Lösungen

Lineare Algebra für Physiker, Serie 1

Abgabe am 18.10.2007

1. Es seien $X, Y \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to Y$ gegeben durch $f(x) = x(1-x)$. Geben Sie je ein Beispiel für die Mengen X und Y an, sodass die Abbildung f (a) injektiv und nicht surjektiv, (b) surjektiv und nicht injektiv, (c) bijektiv, (d) weder injektiv noch surjektiv (e) gar nicht wohldefiniert ist. **5 P**

   Lösung. Jede Teilaufgabe bringt **1 P**. (a) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$. Die Abbildung ist injektiv, denn aus $x_1(1-x_1) = x_2(1-x_2)$ mit $x_1, x_2 \geq 1$ folgt

   $$x_1 - x_2 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

   Wäre $x_1 - x_2 \neq 0$, so folgt nach Division durch $x_1 - x_2$ sofort $1 = x_1 + x_2 \geq 2$ — ein Widerspruch; also $x_1 = x_2$ und f ist injektiv. Andererseits ist $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$, denn $x(1-x) \leq 1/4$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In der Tat gilt dies, denn $x^2 - x + 1/4 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Somit ist f nicht surjektiv.
   (b) $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 0]$. Die Abbildung ist surjektiv, da zu jedem $y \leq 0$ ein Urbild x existiert, sodass $f(x) = x(1-x) = y$, $x^2 - x + y = 0$, $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - y}$. Diese Wurzel existiert immer, da $y \leq 0$. Andererseits ist f nicht injektiv, da $f(0) = f(1) = 0$; also hat $y = 0$ mehr als ein Urbild.
   (c) $f : [1, +\infty) \to (-\infty, 0]$ ist bijektiv, da jedes $y \leq 0$ genau ein Urbild $x \geq 1$ besitzt, nämlich $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y}$.
   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist weder injektiv noch surjektiv; siehe (a) und (b).
   (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}_+$. Die Abbildung ist nicht wohldefiniert, denn $x = 2$ hat kein Bild in Y, da $f(2) = 2(1-2) = -2 \notin Y$.

2. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \cos x \in \mathbb{R}$.
   (a) Bestimmen Sie das Bild $f([\pi/3, 3\pi/2])$ des abgeschlossenen Intervalls $[\pi/3, 3\pi/2] = \{x \in \mathbb{R} \mid \pi/3 \leq x \leq 3\pi/2\}$.
   (b) Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}(A)$ für $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-1 - \frac{1}{n}, -1 + \frac{1}{n}\right)$. Hierbei sei (c, d) das offene Intervall von c bis d, also $(c, d) = \{x \in \mathbb{R} \mid c < x < d\}$. **5 P**

   Lösung. (a) **2 P** Die Kosinusfunktion ist streng monoton fallend von 0 bis π und dann steng wachsend von π bis $3\pi/2$. Daher nimmt die Funktion alle Werte zwischen $f(\pi/3) = \sin \pi/3 = \frac{1}{2}$ und $f(\pi) = -1$ an. (Sie werden in Analysis 1 bald eine genauere Begründung dieses Faktes lernen.)

   Wegen $\cos x \leq 0$ für $x \in [\pi, 3\pi/2]$ kommen zwischen $x = \pi$ und $x = 3\pi/2$ keine weiteren Funktionswerte hinzu. Es ist $\cos([\pi/3, 3\pi/2]) = [-1, 1/2]$.

   (b) **3 P** Es gilt $A = \{-1\}$. Der Durchschnitt aller angegebenen offenen Intervalle enthält nur die Zahl -1, da die Folge $1/n$ gegen Null konvergiert. Es gilt also

   $$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-1 - \frac{1}{n}, -1 + \frac{1}{n}\right) = (-2, 0) \cap \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cap \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cap \cdots \left(-\frac{n+1}{n}, -\frac{n-1}{n}\right) \cap \cdots = \{-1\}.$$

   Jede Zahl, die noch so nahe an -1 liegt, fällt bei hinreichend großem n aus dem Intervall $\left(-\frac{n+1}{n}, -\frac{n-1}{n}\right)$ heraus.

Da die Kosinusfunktion 2π-periodisch ist und $\cos\pi = -1$, erhalten wir

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\{-1\}) = \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

3. Es sei $A := (a_{ij}) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ eine 2×3-Matrix. Wir definieren die Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ indem wir für $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ setzten

$$T((x_1,x_2,x_3)) := (y_1, y_2) := \left(\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\,x_j, \sum_{j=1}^{3} a_{2j}\,x_j\right)$$

(a) Benutzen Sie die Definition des Summenzeichens und die obige Definition der Matrix A um die Abbildung explizit anzugeben. Wie lassen sich y_1 und y_2 durch x_1, x_2 und x_3 ausdrücken? Bestimmen Sie $T((0,1,-5))$.

(b) Es sei $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $S((y_1,y_2)) = y_1 - 2y_2$. Berechnen Sie die Komposition $S\circ T$.

(c) Ist S surjektiv, injektiv bzw. bijektiv? **6 P**

Lösung.

(a) **2 P** Wir setzen $a_{11} = 3$, $a_{12} = 4$ und $a_{13} = 5$ ein und benutzen die Definition des Summenzeichens:

$$y_1 = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} x_j = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3.$$

Analog erhält man

$$y_2 = \sum_{j=1}^{3} a_{2j} x_j = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = -x_1 + 4x_3.$$

Also gilt

$$T((x_1,x_2,x_3)) = (3x_1+4x_2+5x_3, -x_1+4x_3), \quad T((0,1,-5)) = (0+4\cdot 1+5\cdot(-5), 4(-5)) = (-21,-20).$$

(b) **2 P** Die Komposition $S\circ T$ existiert, da T nach $\mathbb{R}^2$ abbildet und S von $\mathbb{R}^2$. Die Komposition ist also eine Abbildung $S\circ T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Die Abbildungsvorschrift ist nach (a)

$$\begin{aligned} S\circ T((x_1,x_2,x_3)) &= S(T((x_1,x_2,x_3))) = S((3x_1+4x_2+5x_3, -x_1+4x_3)) \\ &= (3x_1+4x_2+5x_3) - 2(-x_1+4x_3) = 5x_1+4x_2-3x_3. \end{aligned}$$

(c) **2 P** S ist nicht injektiv (und damit auch nicht bijektiv), da $S((2,1)) = 2-2 = 0 == S((0,0))$, das heißt, $0 \in \mathbb{R}$ hat unter S mindestens zwei verschiedene Urbilder in $\mathbb{R}^2$.

S ist surjektiv, da zu jedem $y \in \mathbb{R}$ ein Urbild $(y,0) \in \mathbb{R}^2$ existiert. In der Tat ist $S((y,0)) = y - 0 = y$.

4. Es sei $\{B_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Teilmengen der Menge Y, $B_i \subset Y$, $A \subset X$ und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.
Zeigen Sie, dass

$$\text{(a)} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad \text{(b)} \quad A \subset f^{-1}(f(A)).$$

4 P

Beweis. (a)

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \Longrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \Longrightarrow \forall\, i \in I\colon f(x) \in B_i \Longrightarrow \forall\, i \in I\colon x \in f^{-1}(B_i)$$
$$\Longrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

Umgekehrt gilt

$$x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \Longrightarrow \forall\, i \in I\colon x \in f^{-1}(B_i) \Longrightarrow \forall\, i \in I\colon f(x) \in B_i$$
$$\Longrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \Longrightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$$

(b) Sei $x \in A$. Dann gilt $f(x) \in f(A)$ und folglich $x \in f^{-1}(f(A))$. Folglich liegt jedes Element x von A auch in $f^{-1}(f(A))$, also gilt die Behauptung. ■

5. Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. **5 P**
Die folgenden Aussagen sind äquivalent :

   (a) f ist injektiv.
   (b) $\forall\, A \subset X\colon f^{-1}(f(A)) = A$.
   (c) $\forall\, A, B \subset X\colon f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

   Beweisen Sie mindestens drei der Implikationen (a) $\Longrightarrow$ (b), (b) $\Longrightarrow$ (a) , (a) $\Longrightarrow$ (c), (c) $\Longrightarrow$ (a), (b) $\Longrightarrow$ (c), (c) $\Longrightarrow$ (b).

Beweis. Bemerkung. Natürlich genügt es auch *zwei geeignete* Implikationen zu zeigen, wie etwa (x) $\Longrightarrow$ (y) und (y) $\Longrightarrow$ (z). Dann hat man nämlich automatisch gezeigt: (x) $\Longrightarrow$ (z).
(b) $\Longrightarrow$ (a). Wir müssen zeigen: $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$. Seien also $x_1, x_2 \in X$ und $f(x_1) = f(x_2) = y$, das heißt, $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2\}$. Dann gilt wegen (b) mit den Mengen $A_1 = \{x_1\}$ und mit $A_2 = \{x_2\}$:

$$\{x_1\} \underset{\text{(b)}}{=} f^{-1}(f(\{x_1\}) = f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(f(\{x_2\})) \underset{\text{(b)}}{=} \{x_2\}.$$

Folglich gilt $x_1 = x_2$ und f ist injektiv.
(a) $\Longrightarrow$ (b). Die Inklusion $A \subset f^{-1}(f(A))$ gilt für alle Abbidungen und alle Teilmengen $A \subset X$, denn $x \in A$ impliziert $f(x) \in f(A)$, also $x \in f^{-1}(f(A))$.

Wir müssen also noch zeigen: $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Sei also $x \in f^{-1}(f(A))$, das heißt, $f(x) \in f(A)$, also existiert ein $a \in A$ mit $f(x) = f(a)$. Weil f injektiv ist folgt $x = a$; insbesondere $x \in A$ und alles ist gezeigt ($f^{-1}(f(A)) \subset A$, jedes Element x der ersten Menge liegt auch in der zweiten Menge).
(c) $\Longrightarrow$ (a). Sei $f(x_1) = f(x_2) = y$. Wir setzen $A = \{x_1\}$ und $B = \{x_2\}$, dann ist nach (c)

$$\{y\} = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) \underset{(c)}{=} f(\{x_1\} \cap \{x_2\}).$$

Wäre nun $x_1 \neq x_2$, so hätten wir $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$ im Widerspruch zu $f(\emptyset) = \emptyset \neq \{y\}$. Folglich gilt $x_1 = x_2$.
(a) $\Longrightarrow$ (c). Die Inklusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ gilt wieder für beliebige Abbildungen und Mengen $A, B \subset X$, denn $y \in f(A \cap B)$ heißt, es gibt ein $x \in A \cap B$ mit $f(x) = y$ und somit

$$x \in A \quad \text{und} \quad x \in B \Longrightarrow f(x) \in f(A), \quad f(x) \in f(B) \Longrightarrow f(x) \in f(A) \cap f(B),$$

und hieraus folgt die Behauptung.
Wir müssen umgekehrt zeigen, dass $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Sei also $y \in f(A) \cap f(B)$, d.h. $y \in f(A)$ und $y \in f(B)$. Somit gibt es Elemente $a \in A$ und $b \in B$ mit $y = f(a) = f(b)$. Wegen der Injektivität von f folgt $a = b$ und somit $a = b \in A \cap B$ und damit $y \in f(A \cap B)$. ■