Lineare Algebra für Physiker, Serie 9

Abgabe am 13.12.2007

1. (a) Gegeben sei die Permutation $\tau \in \mathbf{S}_n$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$ mit fixierten $1 \le i < j \le n$. Berechnen Sie $\operatorname{inv}\tau$ und $\operatorname{sign}\tau$.

   (b) Wie groß ist die maximale Anzahl von Inversionen, die eine Permutation $\sigma \in \mathbf{S}_n$ haben kann. Bestimmen Sie alle $\sigma \in \mathbf{S}_n$, die diese maximale Inversionszahl besitzen. Für welche $n \in \mathbb{N}$ sind diese Permutationen gerade?

   (c) Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Welche Summanden tauchen in der Leibnizdefinition der Determinante $\det A$ auf und welches Vorzeichen haben sie

   $a_{23}a_{34}a_{15}a_{51}a_{42}$, $a_{51}a_{43}a_{22}a_{31}a_{14}$, $a_{13}a_{21}a_{45}a_{52}$, $a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54}a_{22}$, $a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}a_{12}$?

   4 P

2. (a) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ und $D_n(a)$ die n-reihige Determinante

$$D_n(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}.$$

   Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $D_n(a) = \frac{1}{2}((a+1)^n + (a-1)^n)$.

   (b) Zeigen Sie, dass aus (a) für alle $a, b \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ -b & a & b & \cdots & b & b \\ \vdots & & & \vdots & a & b \\ -b & -b & -b & \cdots & -b & a \end{vmatrix} = \frac{1}{2}((a+b)^n + (a-b)^n).$$

   Hinweis. (a) Benutzen Sie die Linearität der Determinanten in der ersten Zeile, angewandt auf die Identität $(a,1,\dots,1) = (a-1,0,\dots,0) + (1,\dots,1)$. Wenden Sie auf die zweite dabei entstehende Determinante den Gauß-Algorithmus an. Sie erhalten eine Rekursionsformel, die $D_n(a)$ aus $D_{n-1}(a)$ berechnet. (b) Ziehen Sie den Faktor b aus jeder Zeile heraus. **4 + 2 P**

3. Beweisen Sie, dass

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

   durch 19 teilbar ist, ohne die Determinante auszurechnen. Verwenden Sie hingegen, dass die als Dezimalzahlen aufgefassten Zeilen 21375, 38798 , 34162, 40223 und 79154 alle durch 19 teilbar sind. **3 P**

4. Es sei $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine fixierte Matrix. Wir definieren die lineare Abbildung $S\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ über $S(A) = B\cdot A$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie die Determinante, die Spur, den Rang und den Defekt von S in Abhängigkeit von B. **4 P**