Lineare Algebra für Physiker, Serie 7

Abgabe am 4. 12. 2007

1. Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar? Geben Sie gegebenenfalls die inverse Matrix an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter. **6 P**

2. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basen $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = (1, -1, 2)$, $b_2 = (2, 3, 7)$ und $b_3 = (2, 3, 6)$ sowie $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, $c_1 = (1, 1, 2)$, $c_2 = (-1, 3, 3)$ und $c_3 = (-2, 7, 6)$ gegeben.

   Bestimmen Sie die Koordinaten (y_1, y_2, y_3) des Vektors $v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3$ bezüglich der Basis C. **3 P**

3. Mit der Basis B aus Aufgabe 2 sei eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$T(b_1) = d_1 + 2d_2, \quad T(b_2) = -d_2 + d_1, \quad T(b_3) = 2d_1 + 3d_2,$$

   wobei $d_1 = (1, 2)$ und $d_2 = (-1, -1)$, $D = \{d_1, d_2\}$.

   (a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $M_{B,D}(T)$.

   (b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $M_{B_3,B_2}(T)$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$. **4 P**

4. Im fünfdimensionalen komplexen Vektorraum V aus Übungsaufgabe 6.3 sei eine neue Basis C gegeben durch $C = \{c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2\}$, wobei

$$c_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx), \quad n = -2, \ldots, 2.$$

   (a) Geben Sie die Matrix A der Basistransformation von B nach C an.

   (b) Geben Sie die Matrix $M' = M_{C,C}(D)$ der Differentiation $D\colon V \to V$ an und bestätigen Sie die Transformationsformel für Endomorphismen $M' = A^{-1}MA$, $M = M_{B,B}(D)$. **4 P**

5. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

4 P