Lineare Algebra für Physiker, Serie 6

Abgabe am 22.11.2007

1. Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -15 & 3 & 12 \\ -10 & 2 & 8 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

   (a) Berechnen Sie AB und BA.

   (b) Bestimmen Sie $\operatorname{Ker}(AB)$, $\operatorname{Ker}(BA)$ und geben Sie jeweils eine Basis von $\operatorname{Im} A$ und $\operatorname{Im} B$ an. **4 P**

2. (a) Bestimmen Sie den Rang und den Defekt der Matrix A und verifizieren Sie für T_A den Dimensionssatz für lineare Abbildungen.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

   (b) Es sei $B \in \mathbb{R}^{3\times4}$. Welche Paare $(\operatorname{rg} B, \operatorname{def} B)$ sind möglich? Geben Sie für jedes Paar eine Beispielmatrix B an. **4 P**

3. Es sei V der fünfdimensionale reelle Vektorraum der trigonometrischen Polynome höchstens zweiten Grades mit der Basis $B = \{1, \cos x, \cos(2x), \sin x, \sin(2x)\}$. Die Differentiation $D\colon V \longrightarrow V$, gegeben durch $Df(x) = f'(x)$, ist eine lineare Abbildung.

   (a) Bestimmen Sie die Matrix $M_{B,B}(D)$ von D bezüglich der gegebenen Basis B.

   (b) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\operatorname{Im} D$ und $\operatorname{Ker} D$. Welchen Rang hat D? Ist D invertierbar? **4 P**

4. Gegeben sei die lineare Abbildung $I\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$, $I(p) = \int_0^3 p(x)\,\mathrm{d}x$.

   (a) Bestimmen Sie die Matrix $M_{B,C}(I)$ von I bezüglich der Basen $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ von $\mathbb{R}_3[x]$ bzw. $C = \{1\}$ von $\mathbb{R}$.

   (b) Geben Sie eine Basis von $\operatorname{Ker} I$ an und bestimmen Sie $\operatorname{Im} I$. **4 P**

5. Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Zeigen Sie, dass gilt

   (a) $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg} A$.

   (b) $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg} B$.

   (c) Geben Sie ein Beispiel an, wo sowohl in (a) als auch in (b) jeweils das $<$-Zeichen steht.

5 P