Lineare Algebra für Physiker, Serie 13

Abgabe am 24.1.2008

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen A:

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   Wenn möglich, diagonalisieren Sie die Matrix, d. h., geben Sie eine Matrix S an und eine Diagonalmatrix A' mit $A' = S^{-1}AS$. **6 P**

2. Es sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_4$ eine Permutation und $P_\sigma \in \mathrm{L}(\mathbb{C}^4)$ die zugehörige Permutationsabbildung, das heißt, $P_\sigma(\mathrm{e}_k) = \mathrm{e}_{\sigma(k)}$ für alle $k = 1, \dots, 4$.

   (a) Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, reelle und komplexe Eigenwerte und deren algebraische und geometrische Vielfachheiten.

   (b) Bestimmen Sie zu den reellen Eigenwerten je einen Eigenvektor.

   5 P

3. Bestimmen Sie die Eigenwerte, ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten und die zugehörigen Eigenräume:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   4 P

4. Es sei $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Ferner sei $S \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3)$ die *Spiegelung* an der Ebene U, das heißt, S ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit

$$S(1,2,3) = -(1,2,3), \quad S(u) = u \quad \forall\, u \in U.$$

   Geben Sie eine Basis an, in der S Diagonalgestalt hat. Berechnen Sie $S(3,2,1)$. **4 P**

5. Es sei $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine fixierte Matrix und $T \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^{2\times 2})$ gegeben durch Linksmultiplikation mit B, $T(A) = BA$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von T.
   (b) Bestimmen Sie im Falle $a = b = c = d = 1$ die Eigenwerte und -vektoren von T. **4 P**