Dr. Quapp: Statistik für Mathematiker mit SPSS

Hinweise zur Theorie der Stichproben

1.] Es wird eine Stichprobe vom Umfang n gezogen für eine $N(\mu, \sigma)$-verteilte Stichprobenvariable X mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Geben Sie die Verteilung der folgenden Zufallsvariablen an:

a)
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
ist der erwartungstreue Schätzer von μ mit der Varianz $\frac{1}{n}\sigma^2$, d.h. die Verteilung ist $\sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Mit wachsendem n wird die Verteilung somit immer "schärfer".

b)
$$\frac{(X-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1).$$

c)
$$\sqrt{n}\frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1) \ ,$$
wegen der Aussagen in a).

d)
$$\sqrt{n}\frac{(\bar{X}-\mu)}{s} \sim t_{n-1}$$
ist die T- oder Students Verteilung, ohne "Verwendung" von σ. Die Verteilung ist angebracht, wenn σ aus der Stichprobe als s geschätzt werden muß.

e)
$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2_n \ .$$
Die χ^2_n Verteilung entsteht durch Setzen von $\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 = Y_i^2$, wobei $Y \sim N(0,1)$ ist.

f)
$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2_{n-1}$$
Die χ^2_{n-1} Verteilung ergibt sich, weil in der $\bar{X}$ -Berechnung noch ein Freiheitsgrad "verlorengeht". Der Ausdruck entspricht mit $(n-1)s^2/\sigma^2$ der Stichprobenverteilung der Varianz.