

11 Serie — Aufgaben zur Statistik 2

Aufgabe 1. Es wurden 10 Stichproben eines Glycerin-Wasser-Gemisches gezogen. Es ergaben sich folgende Dichten (in g/cm^3):

$$\begin{array}{cccccc} 1,0768 & 1,0772 & 1,0766 & 1,0765 & 1,0774 \\ 1,0771 & 1,0775 & 1,0770 & 1,0769 & 1,0770. \end{array}$$

Es ist mit SPSS zu prüfen, ob das Gemisch aus 30% Glycerin besteht, für das die mittlere Dichte mit $\rho^{(30)} = 1,0771$ angegeben wird. Wählen Sie $\alpha = 0,1$. Geben Sie den P-Wert an. Erstellen Sie eine SPS-Datei.

Lösung 1. Wir wenden den *t*-Test für eine Stichprobe an und erhalten

$$t_n = -0.9891$$

der kritische Wert ist

$$k_\alpha = t_{10-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = 1.833113$$

Somit gilt

$$|t_n| = 0.9891 < k_\alpha = 1.833113$$

und die Nullhypothese wird nicht verworfen. Der *p*-Wert lautet

$$p = 0.3485.$$

Aufgabe 2. In einer Klinik wurden bei 270 Jungen das Durchschnittsgewicht von $\bar{x} = 3350 \text{ g}$ und die empirische Streuung von $s_x = 480 \text{ g}$ ermittelt. Entsprechend wurden bei 256 Mädchen das Durchschnittsgewicht von $\bar{y} = 3100 \text{ g}$ und die empirische Streuung von $s_y = 470 \text{ g}$ ermittelt. Sind die Geburtsgewichte bei Jungen und Mädchen gleich? Bisher ging man bei Jungen von einem Geburtsgewicht von 3550 g und bei Mädchen von 3250 g aus. Werden diese Annahmen bestätigt ($\alpha = 0,05$)? Geben Sie das entsprechende Testproblem für diese Aufgabe an.

Lösung 2. Es wird vorausgesetzt, dass $X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, 270$, und $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, $j = 1, \dots, 256$, insgesamt unabhängig sind.

a) Die Nullhypothese lautet

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

und die Alternativhypothese

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Der Testwert ergibt sich zu

$$\begin{aligned} t_{256} &= \frac{3350 - 3100}{\sqrt{(270-1)480^2 + (256-1)470^2}} \sqrt{\frac{270 * 256 * (256 + 270 - 2)}{270 + 256}} \\ &= 6,031277 \end{aligned}$$

Für den kritischen Wert erhalten wir

$$k_\alpha = t_{270+256-2, 1-\frac{\alpha}{2}} = 1,964502.$$

Da

$$|t_{256}| > k_\alpha = 1,964502,$$

wird die Nullhypothese verworfen.

b) Das zweite Testproblem lautet

$$H_0 : \mu_1 = 3550 = \mu_{0,1} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_{0,1}$$

Als Testwert erhalten wir

$$T = \frac{3350 - 3550}{480} \sqrt{270} = -6.846532$$

Der kritische Wert ist

$$k_\alpha = t_{270-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = 1.968822.$$

Somit wird die Nullhypothese verworfen.

c) Das dritte Testproblem lautet

$$H_0: \mu_2 = 3250 = \mu_{0,2} \quad H_1: \mu_2 \neq \mu_{0,2}$$

Als Testwert erhalten wir

$$T = \frac{3100 - 3250}{470} \sqrt{256} = -5.106383$$

Der kritische Wert ist

$$k_\alpha = t_{256-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = 1.969311$$

Somit wird auch diese Nullhypothese verworfen.

Aufgabe 3. Ein Merkmal sei $U(0, \vartheta)$ -verteilt ($\vartheta > 0$). Es soll mit Hilfe einer Stichprobe X_i vom Umfang $n = 50$ untersucht werden, ob $\vartheta = 1$ ist. Wählen Sie als kritischen Bereich

$$|R_n - 1| = \left| \frac{(n+1)\max(X_i)}{n} - 1 \right| > k$$

- a) Bestimmen Sie für das Signifikanzniveau $\alpha = 0,1$ den kritischen Wert k .
- b) Schätzen Sie mit R die Wahrscheinlichkeit $\beta(\vartheta)$ für den Fehler zweiter Art für den Wert $\vartheta = 1,1$.
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\beta(\vartheta)$ für den Fehler zweiter Art für $\vartheta = 1,1$.

Lösung 2. a) Wir bestimmen zunächst den kritischen Bereich. Es sei

$$W_n = \max(X_1, \dots, X_n)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} h_n(k) &:= P(|R_n - 1| > k | H_0) \\ &= 1 - P(|R_n - 1| \leq k | H_0) \\ &= 1 - P(1 - k \leq R_n \leq 1 + k | H_0) \\ &= 1 - P\left((1 - k) \frac{n}{n+1} \leq W_n \leq (1 + k) \frac{n}{n+1} \mid H_0\right) \\ &= 1 - F_{W_n} \left((1 + k) \frac{n}{n+1} \right) + F_{W_n} \left((1 - k) \frac{n}{n+1} \right) \end{aligned}$$

Offenbar gilt für $X_i \sim U(0, \vartheta)$ und

$$F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x < 0 \\ \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^n, & \text{wenn } 0 \leq x < \vartheta \\ 1, & \text{wenn } x > \vartheta \end{cases}$$

Wir unterscheiden nun vier Fälle:

(i)

$$(1 + k) \frac{n}{n+1} < 1, \quad (1 - k) \frac{n}{n+1} < 0$$

(ii)

$$(1 + k) \frac{n}{n+1} < 1, \quad (1 - k) \frac{n}{n+1} \geq 0$$

(iii)

$$(1 + k) \frac{n}{n+1} \geq 1, \quad (1 - k) \frac{n}{n+1} < 0$$

(iv)

$$(1+k)\frac{n}{n+1} \geq 1, \quad (1-k)\frac{n}{n+1} \geq 0$$

Der Fall (i) ist unmöglich.

Der Fall (ii) ist gleichwertig mit $k < \frac{1}{n}$.

Der Fall (iii) ist gleichwertig mit $k > 1$.

Der Fall (vi) ist gleichwertig mit $k \in [\frac{1}{n}, 1]$.

Damit ergibt sich

$$h_n(k) = \begin{cases} 1 - \left[(1+k)\frac{n}{n+1}\right]^n + \left[(1-k)\frac{n}{n+1}\right]^n, & \text{wenn } k < \frac{1}{n} \\ \left[(1-k)\frac{n}{n+1}\right]^n, & \text{wenn } k \in [\frac{1}{n}, 1] \\ 0, & \text{wenn } k > 1 \end{cases}.$$

Die Funktion h_n ist auf Grund der Definition stetig und monoton fallend. Es gilt $h_n(0) = 1$ und $h_n(1) = 0$. Weiter gilt

$$h_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n.$$

Man überzeugt sich leicht, dass für $2 \leq n$ und $n < \infty$ gilt

$$h_n\left(\frac{1}{n}\right) \in \left[\frac{1}{9} = 0,11; 0,14 (= e^{-2})\right]. \quad (1)$$

Wir bestimmen k_α aus der Bedingung

$$h_n(k_\alpha) = \alpha.$$

Wegen (1) ist für $\alpha \leq 0,1$ dies gleichwertig mit

$$h_n(k_\alpha) = \left[(1-k_\alpha)\frac{n}{n+1}\right]^n = \alpha.$$

Daraus resultiert

$$0 < k_\alpha = 1 - \alpha^{\frac{1}{n}} \frac{n+1}{n} < 1.$$

Insbesondere gilt für $\alpha = 0,1$

$$k_\alpha = 1 - 0,1^{\frac{1}{n}} \frac{n+1}{n}$$

Wir erhalten folgende Tabelle

n	$k_{\alpha,n}$
2	0,5257
3	0,3811
4	0,2971
5	0,2429
10	0,1262
20	0,0642
30	0,0430
40	0,0323
50	0,0259

c) Für die Macht des Tests erhalten wir

$$\beta(\vartheta_1) := P(|R_n - 1| \leq k_\alpha | \vartheta_1)$$

Es gilt offenbar für $\alpha \leq 0,1$

$$k_{\alpha,n} > \frac{1}{n}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Analog zu b) folgt für den Fehler zweiter Art

$$v_n(\vartheta_1) = \begin{cases} \left(\left[(1 + k_\alpha) \frac{n}{n+1} \right]^n - \left[(1 - k_\alpha) \frac{n}{n+1} \right]^n \right) \frac{1}{\vartheta_1^n}, & \text{wenn } (1 + k_\alpha) \frac{n}{n+1} < \vartheta_1 \\ 1 - \left(\left[(1 - k_\alpha) \frac{n}{n+1} \right]^n \right) \frac{1}{\vartheta_1^n}, & \text{wenn } (1 + k_\alpha) \frac{n}{n+1} \geq \vartheta_1 \end{cases}.$$

Da

$$(1 + k) \frac{n}{n+1} = 1.005792 < \vartheta_1 = 1.1$$

folgt

$$v_{50}(1, 1) = \left(\left[(1 + k_\alpha) \frac{n}{n+1} \right]^n - \left[(1 - k_\alpha) \frac{n}{n+1} \right]^n \right) \frac{1}{\vartheta_1^n} = 0,01051836$$

Also ergibt sich für die Macht des Tests 0.9894816 für $\vartheta_1 = 1, 1$ und $n = 50$.