Lösungen der Aufgaben aus Teil 1

1. Eine Menge A heißt Teilmenge einer Menge B, symbolisch $A \subset B$ oder $A \subseteq B$, genau dann wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist.

2.

3. Eine Folge (a_j) heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt, d.h., falls $\lim_{j\to\infty} a_j$ existiert.

4. Unter der partiellen Ableitung einer Funktion von n Variablen nach der Variablen x_2 an der Stelle $(x_1, \dots, x_n)$ versteht man den Grenzwert
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2 + h, x_3, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

5. Unter der linearen Hülle der Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ versteht man die Menge aller Linearkombinationen, die aus diesen Vektoren gebildet werden können. D.h.
$$L\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\} = \{\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \vec{v}_j \,|\, \alpha_j \in \mathbb{R},\, j = 1, \dots, r\}$$

6.
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2(-1)(-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(6-3) - (4-(-1)) - (0-(-6)) = -5$$

7.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 7 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$$

8.
$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

Lösungen der Aufgaben aus Teil 2

1. Gegeben sei die Abbildung $\vec{f}: \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ durch

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \ln(x^2y) \\ x^2y^2 \end{pmatrix}$$

   a) Der Definitionsbereich von $\vec{f}$ wird offenbar nur durch die 1. Koordinatenfunktion $\ln(x^2y)$ eingeschränkt. Weil x^2 sowie so positiv für $x \neq 0$ ist, muss wegen der Eigenschaften der ln-Funktion nur noch gesichert werden, dass $y > 0$ gilt. Somit $D_{\vec{f}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0,\ y > 0\}$

   b) Es wird $(f_1)_x = \frac{2}{x}$, $(f_1)_y = \frac{1}{y}$ und $(f_2)_x = 2xy^2$, $(f_2)_y = 2x^2y$. Dies ergibt folgende Jacobimatrix für $\vec{f}$:

$$J_{\vec{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{y} \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}$$

   c) Es wird

$$\det J_{\vec{f}}(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{y} \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{vmatrix} = 2xy$$

   d) Es ist $\det J_{\vec{f}}(x,y) = 2xy \neq 0$ genau dann, wenn sowohl $x \neq 0$ als auch $y \neq 0$. Weil $\vec{f}(x,y) = \vec{f}(-x,y)$ gilt, ist $\vec{f}$ umkehrbar als differenzierbare Funktion auf $\{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\}$.

2. Es ist $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ auf lokale Extrema über $\mathbb{R}^2$ zu untersuchen. Offenbar gibt es keine Randpunkte und f ist auf $\mathbb{R}^2$ überall differenzierbar. Somit brauchen wir zunächst alle Punkte, wo grad f verschwindet. Es wird

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y \text{ und } f_y(x,y) = 3y^2 - 3x$$

   Somit ist für grad $f = \vec{O}$ notwendig und hinreichend:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0 \end{aligned}$$

Dieses System ist äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 0 \\ -x - y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Setzt man beispielsweise $x = -y^2$ aus der 2. Gleichung in die 1. Gleichung ein, so folgt $y^4 - y = 0$ bzw. $y(y^3 - 1) = 0$ Diese Gleichung hat als reelle Lösungen nur die Werte $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$. Die zugehörigen x-Werte sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Somit gibt es genau zwei Punkte, in denen relative Extrema vorliegen können: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$. Es sind nun die hinreichenden Bedingungen in diesen Punkten zu überprüfen: Dafür benötigten wir alle zweiten Ableitungen von f:

$$f_{xx}(x,y) = 6x,\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -3,\ f_{yy}(x,y) = 6y.$$

Damit genügt es, für P_0 folgende Determinante zu untersuchen:

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante ist negativ, damit kann P_0 kein lokales Extrema sein, sondern ist ein Sattelpunkt (weil die Determinante negativ ist). Für P_1 muss folgende Determinante betrachtet werden:

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante ist größer Null, also ist P_1 lokales Extrema. Wegen $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$ ist P_1 lokales Minimum. Es wird $f(1,1) = -1$.

3. 3a) Die kleinste positive Nullstelle des Integranden $\sin(2x+3)$ erhlt man aus $2x + 3 = \pi$, weil π die kleinste positive Nullstelle der Sinisfunktion ist und $x > 0$ gilt (0 wäre keine positive Nullstelle). Somit gilt $x_0 = \frac{\pi-3}{2}$ und es ist das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi-3}{2}} x \sin(2x+3)\, dx$$

zu berechnen. Möglich ist dies mittels partieller Integration:

$$\int_0^{\frac{\pi-3}{2}} x \sin(2x+3)\, dx = -x\frac{1}{2}\cos(2x+3)\Big|_0^{\frac{\pi-3}{2}} - \int_0^{\frac{\pi-3}{2}} (-\frac{1}{2})\cos(2x+3)\, dx$$

Das letzte Integral kann man sofort angeben und erhält:

$$\int_0^{\frac{\pi-3}{2}} x\sin(2x+3)\,dx = \frac{\pi-3}{4} - \frac{1}{4}\sin 3$$

3b) Der Grad des Nennerpolynoms ist gleich dem Grad des Zählerpolynoms, also muss man erst Polynomdivision durchführen:
Wegen $(x-1)(x+1) = x^2-1$ folgt

$$(x^2+2bx) : (x^2-1) = 1 + \frac{2bx+1}{x^2-1}$$

Damit wird:

$$\int \frac{x^2+2bx}{(x-1)(x+1)}\,dx = \int dx + \int \frac{2bx+1}{x^2-1}$$
$$= x + \int \frac{2bx+1}{x^2-1}\,dx$$

Partialbruchzerlegung des Integranden im letzten Integral ergibt:

$$\frac{2bx+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

und man erhält $A = \frac{2b-1}{2}$, $B = \frac{2b+1}{2}$. Damit folgt:

$$\int \frac{x^2+2bx}{(x-1)(x+1)}\,dx = x + \frac{1}{2}\int \frac{2b-1}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{2b+1}{x-1}\,dx$$
$$= x + \frac{2b-1}{2}\ln|x+1| + \frac{2b+1}{2}\ln|x-1| + C$$

4. 4a) Man berechnet zunächst z.B. die ersten drei Ableitungen:

$$f(x) = \ln(1+\frac{x}{2}),\ f'(x) = \frac{1}{x+2},\ f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2},\ f'''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$$

und vermutet dann

$$f^{(j)}(x) = (-1)^{j+1}\frac{(j-1)!}{(x+2)^j},$$

was man z.B. mittels vollständiger Induktion beweisen kann (war nicht verlangt). Dies gibt an der Stelle $x_0 = 0$ zunächst $f^{(j)}(0) = (-1)^{j+1}\frac{(j-1)!}{2^j}$ und somit das n-te Taylorpolynom:

$$f(x) = \sum_1^n \frac{(-1)^{j+1}}{j2^j}x^j + T_n,$$

wobei noch $f(0) = 0$ beachtet wurde.

4b)

$$T_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},\ \xi \in [0,x]$$

4c) Für $x \in [0,2]$ gilt:

$$|T_n| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}x^{n+1} \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\xi)| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(2-\xi)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}$$

Somit wird $|T_n| \leq 10^{-3}$ für $n \geq 999$.