Lösungen zur Klausur für Mathematik vom 12. 07. 2003

Aufgabe 1 Jährlich werde (periodisch) die Masse M des Cäsiumisotops ^{137}Cs an die Umgebung abgegeben. (Beginnend mit $M_0{=}M$.) Das Cäsium verliert (ebenfalls jährlich) $2,3\%$ seiner Masse durch radioaktiven Zerfall. Es bezeichne M_n die Gesamtmasse von ^{137}Cs am Ende des n-ten Jahres.
a) Zeigen Sie, dass die Folge $\{M_n\}_{n=0,1,2\dots}$ einem inhomogenen linearen Modell der Populationsentwicklung genügt und geben Sie die entsprechenden Parameter M_0, q und d an.
b) Bestimmen Sie die Grenzkonzentration M_∞ und M_{100}.

Lösung 1 *a) Am Ende des ersten Jahres sind noch $M_1 = qM + M$ vorhanden, wobei*

$$q = 1 - 0,023 = 0,977$$

gilt, und am Ende des zweiten Jahres haben wir

$$M_2 = q(qM + M) + M = qM_1 + M = qM_1 + M.$$

Analog folgt

$$M_{n+1} = qM_n + M = qM_n + M.$$

Es liegt also ein Populationsmodell mit $M_0 = M$, $q = 0,977$ und $d = M$ vor.
b) Es gilt dann

$$M_\infty = \frac{d}{1-q} = 43,48M$$

Außerdem folgt

$$M_{100} = q^{100}M_0 + d(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = \frac{1-q^{101}}{1-q}M = 39,33M$$

Aufgabe 2 Phosphor−32 hat eine Halbwertszeit von 14,2 Tagen. Wie lange dauert es (Angabe in Stunden, Minuten und Sekunden), dass eine Probe 4% ihrer Masse verliert?
Hinweis: Der Zerfall wird durch die Funktion $f(t) = c_0\, e^{-\lambda t}$ mit $\lambda > 0$ modelliert.

Lösung 2 *Es gilt*

$$\frac{c_0}{2} = c_0\, e^{-\lambda\, 14,2}.$$

Dividiert man durch c_0 und bildet den natürlichen Logarithmus auf beiden Seiten der Gleichung, so folgt

$$\ln\frac{1}{2} = -\lambda\, 14,2\ ,$$

also ist

$$\lambda = \frac{\ln 2}{14,2} = 0,04881.$$

Nach Aufgabenstellung erhält man den Ansatz

$$0,96c_0 = c_0\, e^{-\lambda\, t_1}.$$

Geht man analog vor, so folgt die gesuchte Zeit (in Tagen):

$$t_1 = \frac{-\ln 0,96}{\lambda} = \frac{-14,2 * \ln 0,96}{\ln 2} = 0,8362904.$$

Das sind 20 Stunden 4 Minuten und 15 Sekunden.

Aufgabe 3 Zur Rast lassen sich 80 Stare auf 7 Bäumen nieder. Die Stare lassen sich nicht unterscheiden.
a) Geben Sie 2 mögliche Verteilungen der Stare auf den Bäumen an.
b) Berechnen Sie die Anzahl der Verteilungen der Stare auf den Bäumen und geben Sie an mit welcher kombinatorischen Größe die Anzahl berechnet wird.

Lösung 3 *a) Folgende Tabelle enthält zwei Lösungen*

$1.\,Baum$	$2.\,Baum$	$3.\,Baum$	$4.\,Baum$	$5.\,Baum$	$6.\,Baum$	$7.\,Baum$
5	15	15	15	15	15	0
80	0	0	0	0	0	0

b) Die Bäume kann man als Zellen und die Stare als nichtunterscheidbare Kugeln interpretieren. So ist jede Aufteilung eine Aufteilung von 80 *Kugeln auf* 7 *Zellen. Dies sind alle Kombinationen von* $n = 7$ *zu* $k = 80$ *(mit Wiederholung), also*

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{80+7-1}{7-1} = \binom{86}{6} = 470\ 155\ 077\ .$$

Möglichkeiten.

Aufgabe 4 Es sei die Folge $\{x_n > 0 : n = 0, 1, 2, ...\}$ rekursiv gegeben durch $x_{n+1} = \frac{3}{5}x_n + \frac{2}{x_n^3}$ und x_0.
a) Bestimmen Sie die Reproduktionsfunktion g dieser Folge und ihren Fixpunkt t.
b) Zeichnen Sie in einem Koordinatensystem die Reproduktionsfunktion, ihren Fixpunkt und drei Werte der Folge mit Anfangswert $x_0 = 3$. Zeichnen Sie den Kurvenzug ein, der die drei Werte darstellt.
c) Zeigen Sie, dass der Fixpunkt anziehend ist.
d) Bestimmen Sie alle Anfangswerte $x_0 > 0$, für die die Folge konstant ist.

Lösung 4 *a) Die Reproduktionsfunktion lautet*

$$g(x) := \frac{3}{5}x + 2\frac{1}{x^3}.$$

Der Fixpunkt t *erfüllt die Gleichung*

$$g(t) = t\ . \tag{1}$$

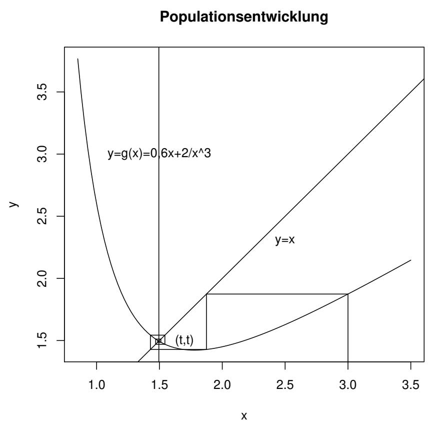
Wird von dieser Gleichung (von beiden Seiten) $\frac{3}{5}t$ *subtrahiert, und durch* 2 *dividiert, so ergibt sich*

$$\frac{1}{t^3} = \frac{t}{5}\ .$$

Daraus folgt

$$t = 5^{1/4} = 1{,}495349$$

b)



c) Es gilt

$$g'(x) = \frac{3}{5} - \frac{6}{x^4}.$$

Somit gilt

$$|g'(t)| = \left|\frac{3}{5} - \frac{6}{t^4}\right| = \left|\frac{3}{5} - \frac{6}{5}\right| = \frac{1}{2} < 1,$$

also ist der Fixpunkt t anziehend.
d) Wenn alle Glieder der Folge konstant bleiben, muss der Anfangswert ein Fixpunkt sein, d. h. es gilt $x_0 = t$

Aufgabe 5 Die folgende Tabelle stellt zwei Merkmale x und y dar. Hierbei ist h eine Konstante

y_i	4	10	12	15
x_i	h	2	3	6

a) Es sei $h = 0$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate die beste lineare Anpassung $y = ax + b$ von y bezüglich x und den Korrelationskoeffizienten. Wie ist die Güte der Anpassung einzuschätzen?
b) Zeichnen Sie die Punktwolke und die beste Anpassung in einem Koordinatensystem für einen Wert von $h = 0$. Entscheiden Sie an der Zeichnung, wie sich der Korrelationskoeffizient verändert, wenn $h = 10$. Kann man h so wählen, dass der Korrelationskoeffizient absolut größer ist als in der Teilaufgabe a)? Welchen Wert für h würden Sie dafür wählen?

Lösung 5 *Folgende Tabelle enthält Hilfsresultate zur Berechnung der Korrelationskoeffizienten:*

	x	y	xy	x^2	y^2
	0	4	0	0	16
	2	10	20	4	100
	3	12	36	9	144
	6	15	90	36	225
Summe	11	41	146	49	485

Es ergibt sich nun der Korrelationskoeffizient aus

$$r_{x,y} = \frac{4*146 - 11*41}{\sqrt{(4*49 - 11^2)(4*485 - 41^2)}} = \frac{133}{\sqrt{75*259}} = 0,95.$$

Für die beste Anpassung $y = ax + b$ von y durch x werden die Parameter aus

$$a = \frac{4*146 - 11*41}{4*49 - 11^2} = \frac{133}{75} = 1,77$$

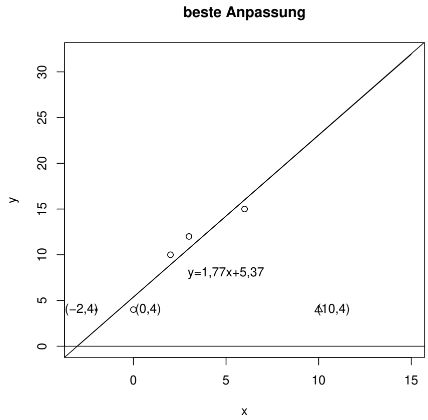
und aus

$$b = \frac{49*41 - 146*11}{4*49 - 11^2} = \frac{403}{75} = 5,37$$

ermittelt. Die beste Anpassung hat die Gestalt

$$y = 1,77x + 5,37.$$

b)



Wenn h verändert wird, so wandert der Punkt $(h,4)$ auf der Geraden $y=4$. Auf Grund der Zeichnung ist zu vermuten, dass im Falle $h=10$ die lineare Anpassung schlechter ist als bei $h=0$.
c) Die Summe der quadratischen Residuen für $h=-0.774$ ist kleiner als in Teilaufgabe a), da dann

$$1,77h+5,37=4$$

ist und folglich ein Summand null wird. Für dieses h wird also das Bestimmheitsmaß größer als in a).

Aufgabe 6 Für ein Merkmal mit 5 Ausprägungen a_i wird eine Versuchsreihe mit 40 Versuchen durchgeführt. Folgende Tabelle enthält die Resultate (n_i sei die absolute Häufigkeit von a_i):

a_i	1	3	5	7	18
n_i	6	10	12	10	2

a) Bestimmen Sie folgende Charakteristiken: Modalwert, Mittelwert, empirische Varianz s_n^2 und das Quantil der Ordnung $0,32$.
b) Bestimmen Sie die Ausreißer und dann die Kenngrößen des Boxplots. Zeichnen Sie den Boxplot.

Lösung 6 *Zur Bestimmung von $\bar{x}$ und s_n^2 dient folgende Tabelle:*

a_i	n_i	$a_i * n_i$	$a_i^2 * n_i$
1	6	6	6
3	10	30	90
5	12	60	300
7	10	70	490
18	2	36	648
Summe	40	202	1534

Also ergeben sich mit n=40

$$\bar{x}=\frac{202}{40}=5,05, \quad s_n^2=\frac{1}{39}\left(1534-\frac{202^2}{40}\right)=13.18.$$

Zur Bestimmung des Quantils der Ordnung $0,32$ bildet man

$$n*0,32=12,8\ .$$

Die nächste größere ganze Zahl ist $k=13$. Es gilt dann

$$x_{0,32}=a_{(13)}=3\ .$$

b) Durch folgende Tabelle bestimmt man die Quantile:

α	$n*\alpha$	k	x_α
$0,25$	10	10	$\frac{x_{(10)}+x_{(11)}}{2}=\frac{3+3}{2}=3$
$0,5$	20	20	$\frac{x_{(20)}+x_{(21)}}{2}=\frac{5+5}{2}=5$
$0,75$	30	30	$\frac{x_{(30)}+x_{(31)}}{2}=\frac{7+7}{2}=7$

Es gilt für die Grenzen:

$$x_{0.5}+3*(x_{0.75}-x_{0,25})=5+3(7-3)=17,\quad x_{0.5}-3*(x_{0.75}-x_{0,25})=5-3(7-3)=-3.$$

Somit sind die beiden Werte 18 Ausreißer. Durch folgende Tabelle bestimmt man die Quantile nach Elimination der Ausreißer mit n=38:

α	$n*\alpha$	k	x_α
$0,25$	$9,5$	10	$x_{(10)}=3$
$0,5$	19	19	$\frac{x_{(19)}+x_{(20)}}{2}=\frac{5+5}{2}=5$
$0,75$	$28,5$	29	$x_{(29)}=7$

Also ändern sich die Quantile hier nicht.