Mathematik I für Chemiker
4. Serie vom 01.11.01

13. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = 3\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{b} = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} - \vec{e_3}$, wobei $\vec{e_1}\,\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

    a) Man drücke $2\vec{a} - \vec{b}$ als Linearkombination von $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ aus.

    Lösung:

    $$2\vec{a} - \vec{b} = 6e_1 - 2e_2 + 2e_3 - 2e_1 - 3e_2 + e_3 = \underline{\underline{4e_1 - 5e_2 + 3e_3}} = \vec{c}$$

    b) Man bestimme den Einheitsvektor in Richtung von $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

    Lösung:

    $$|\vec{c}| = (16 + 25 + 9)^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{2}$$
    $$\underline{\underline{\rightarrow \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{4}{5\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 + \frac{3}{5\sqrt{2}}e_3}}$$

14. Ein Man wandert 25 km nach Nordost, 15 km genau nach Osten und 10 km genau nach Süden. Unter Verwendung eines geeigneten Maßstabes bestimme man graphisch

    a) wie weit, und

    b) in welcher Richtung

    er vom Ausgangspunkt entfernt ist.

    Lösung:

    1 $\vec{a} = \sqrt{312,5}e_1 + \sqrt{312,5}e_2$

    2 $\vec{b} = 15 * e_1 + 0 * e_2$

    3 $\vec{c} = 0 * e_1 - 10 * e_2$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 32,678e_1 + 7,678e_2$$
$$\rightarrow |g\vec{e}s| = \sqrt{(32,678e_1)^2 + (7,678e_2)^2}$$
$$|g\vec{e}s| = 33,568\,km$$
$$\tan\alpha = \frac{7,678}{32,678} = 0,235 \rightarrow \alpha = 13,22°$$

Der Mann bewegte sich in $13,22°$ Nordost um 33,568 km.

15. Berechnen Sie einen Einheitsvektor in Richtung der Resultierenden (d.h. Summe) der Vektoren $\vec{a} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{b} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + 2\vec{e_3}$, $\vec{c} = 3\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + 4\vec{e_3}$.

Lösung:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 6e_1 - 2e_2 + 7e_3 = \vec{x}, \quad |\vec{x}| = (36 + 4 + 49)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{89}$$
$$\underline{\underline{\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{1}{\sqrt{89}}\vec{x}}}$$

16. A, B, C sind drei verschiedene Punkte im Raum. Sind die Vektoren $5\overrightarrow{AB}$, $\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ linear abhängig oder linear unabhängig?

Lösung:
Wenn A,B,C kollinear sind, so sind je 2 Vektoren linear abhängig.
Annahme: Seien A,B,C nicht kollinear, dann ist

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}\ ,$$

also gilt

$$\overrightarrow{CB} = \frac{1}{5}(5\overrightarrow{AB}) + \frac{4}{3}(\frac{3}{4}\overrightarrow{CA})$$

$\rightarrow$ linear abhängig, da $\overrightarrow{CB}$ darstellbar ist

Diese Lösungsblatt wurde von Martin Zschache erstellt.