Dr. Quapp HS 2002
http://www.math.uni-leipzig.de/~quapp/uebungenP.html

Lineare Algebra – Lösungen zur 9. Serie (zum 6.1.2003)

---

38. a) Folgende (4,3) Matrix T bildet die Basisvektoren von $\mathbb{R}^3$ auf die gegebenen Vektoren im $\mathbb{R}^4$ ab:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix} .$$

b) Die lineare Abbildung $f: U \to V$ habe einen Kern $ker f = W$.
W ist ein Untervektorraum von U. Im Urbildraum U kann man die Nebenklasse $\vec{u} + W$ betrachten. $\vec{u}$ nennt man dann auch den Vertreter der Nebenklasse. Dies ist nicht eindeutig!
Es gelte nun zu diesem (beliebigen) $\vec{u} \in U$ die Abbildung $f(\vec{u}) = \vec{v}$.
Beh.: Das Urbild von $\vec{v}$ ist $f^{-1}(\vec{v}) = \vec{u} + W$.
Bew.:
(i) Sei ein $\vec{u}' \in f^{-1}(\vec{v})$. Dann ist $f(\vec{u}') = \vec{v}$ und wegen der Linearität ist $f(\vec{u}' - \vec{u}) = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$. Also ist $\vec{u}' - \vec{u} \in W$, oder anders geschrieben: $\vec{u}' = \vec{u} + \vec{w}$ mit $\vec{w} \in W$.
Das heisst $\vec{u}' \in \vec{u} + W$ oder $f^{-1}(\vec{v}) \subseteq \vec{u} + W$.
(ii) Sei nun $\vec{u}'$ ein beliebiges Element aus der Menge der Nebenklasse, d.h. $\vec{u}' \in \vec{u} + W$, d.h. es existiert ein $\vec{w} \in W$ mit $\vec{u}' = \vec{u} + \vec{w}$. Dann ist $f(\vec{u}') = f(\vec{u}) + f(\vec{w}) = \vec{v}$, also ist $\vec{u}' \in f^{-1}(\vec{v})$, und $\vec{u} + \vec{w} \subseteq f^{-1}(\vec{v})$.
Kombiniert man (i) und (ii), ergibt sich die Behauptung.
Bemerkung:
Definiert man eine Äquivalenzrelation in U durch $a \sim b \iff a - b \in W$, so sind die Äquivalenzklassen dieser Relation genau die Nebenklassen bezüglich W.

c) Die Linearität wird leicht nachgerechnet...
Der Kern bei einer Ableitung sind alle Konstanten.
Das Bild des Operators D ist zu einem beliebigem Polynom $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ das Polynom $D(f(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{(i-1)}$, also offenbar wieder alle denkbaren Elemente von V. Somit ist $Bild\ D(f) = V$.
Obwohl es einen Kern gibt, hat das Bild die gleiche Dimension wie das Urbild: unendlich.

39. a) Der Rang der Matrix ist

$$rg(A_\lambda) = rg \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \quad \text{bei } \lambda \neq \pm 1 .$$

Dies ergibt sich leicht durch Spaltenoperationen: Von hinten her wird die $(i-1)$-te Spalte durch $-\lambda * i$-te Spalte + $(i-1)$-te Spalte berechnet.
Die Inverse ist somit für $\lambda \neq \pm 1$ mit dem Gauss-Jordan-Verfahren berechenbar, sie ist:

$$A_\lambda^{-1} = \frac{1}{1-\lambda^2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & -\lambda & 1-\lambda^2 & 0 \\ -\lambda^3 & \lambda^2 & -\lambda+\lambda^3 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} .$$

39. b) Der Rang von A ist 4.

40. a) Es ist

$$\begin{vmatrix} (a-1)^2 & a^2 & (a+1)^2 \\ (b-1)^2 & b^2 & (b+1)^2 \\ (c-1)^2 & c^2 & (c+1)^2 \end{vmatrix} = 4(a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)) .$$

und es ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)(z-1) .$$

b) Zu A brauchen wir noch die transponierte Matrix A^T:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 7 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} , \quad \text{und} \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

Die gesuchte Aufspaltung ergibt sich aus

$$A = \frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 12 & -1 \\ 12 & 8 & 6 \\ -1 & 6 & 10 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} .$$

c) Zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ergibt sich: $A\,B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B\,A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ sowie

$A\,B^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B\,A^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -2 & -6 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ und

$$A^T\,B^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 6 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

41. Ist A eine ganzzahlige quadratische Matrix, so ist auch die Determinante von A ganzzahlig - nach dem Determinantenentwicklungssatz.
Wenn $Det(A) = \pm 1$ ist, so ergibt sich bei der Berechnung der Inversen durch die komplementäre Matrix ($A^{-1} = 1/Det(A)\ \tilde{A}$, und $\tilde{A}$ enthält nur ganzzahlige Unterdeterminanten) wieder Ganzzahligkeit, dann sind wir fertig. (Ein Beispiel war in Aufgabe 32 vorgekommen.)
Wäre aber $Det(A) = a \neq \pm 1$, so müsste $Det(A^{-1}) = \frac{1}{a} \neq \pm 1$ sein, also eine gebrochene Rationalzahl. Wäre nun aber A^{-1} selbst trotzdem ganzzahlig, dann müsste auch wieder die Determinante von A^{-1} ganzzahling sein, wie oben. Das ist ein Widerspruch.