Dr. Quapp HS 2002
http://www.math.uni-leipzig.de/~quapp/uebungenP.html

Lineare Algebra – Lösungen zur 8. Serie (zum 16. 12. 2002)

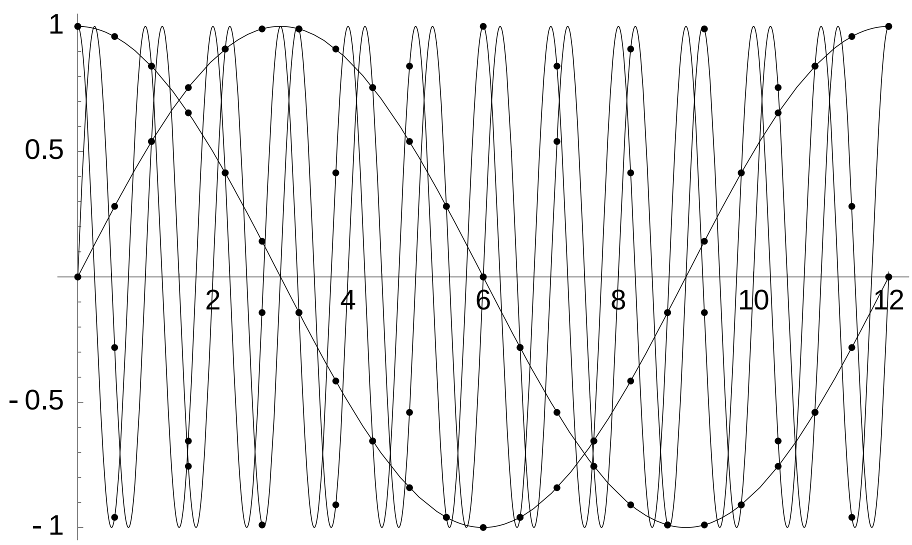
34. Wie definieren die (3,3) Matrizen

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{, und} \quad O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dann erfüllen folgende (6,6)-Matrizen die Aufgabe

$$A = \begin{pmatrix} E_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 \end{pmatrix} \text{, und} \quad B = \begin{pmatrix} O_3 & O_3 \\ O_3 & E_3 \end{pmatrix}.$$

Es ist offenbar $rg(A) = rg(B) = 3$, und $A\ B = O_6$.



35. Für

$$H_t = \begin{pmatrix} sin 2\pi t & sin\frac{\pi}{6}t \\ cos 2\pi t & cos\frac{\pi}{6}t \end{pmatrix}$$

gibt es einen Rangabfall, wenn die Zeilen oder Spalten linear abhängig sind. Der Rangabfall kann nur eins sein, da *sin* und *cos* jeweils verschiedene Nullstellen haben. Somit muss für rg(H_t)=1 gelten:

$$sin 2\pi t = C_1 sin\frac{\pi}{6}t \;\text{ und }\; cos 2\pi t = C_1 cos\frac{\pi}{6}t$$

oder

$$sin\frac{\pi}{6}t = C_2 cos\frac{\pi}{6}t \;\text{ und }\; sin 2\pi t = C_2 cos 2\pi t\ .$$

Daraus ergibt sich die Verhältnis-Gleichung

$$\frac{sin\frac{\pi}{6}t}{cos\frac{\pi}{6}t} = \frac{sin2\pi t}{cos2\pi t}$$

oder

$$tan\frac{\pi}{6}t = tan2\pi t \ .$$

Da gilt $tanx = tan(x + k\pi)$ für ganze k , erhalten wir

$$\frac{\pi}{6}t \ + \ k\pi = 2\pi t \ , \ \text{oder } k = \frac{11}{6}t \ , \ \text{oder } t = \frac{6}{11}k \ .$$

Da $0 \leq t \leq 12$ ist, kann $0 \leq k \leq 22$ sein, und das sind 23 Werte.

36. Die Abbildung f ist offenbar durch eine Matrix realisierbar:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

(i) Damit ist f auch als lineare Abbildung nachgewiesen!
(ii) Der Kern besteht aus allen Vektoren, die auf 0_3 abgebildet werden. Dies ergibt ein homogenes (3,3)-Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rrrl} 1x+ & 2y+ & 1z & = 0 \\ & 1y+ & 1z & = 0 \\ -1x+ & 3y+ & 4z & = 0 \end{array}$$

mit der Lösung $x = -y = z$, also $Kernf = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \text{wobei } t \in R \right\}$.

Es ist $dimKerf = 1$.

Das Bild von f ist die lineare Hülle der Abbildungen der Basisvektoren des Urbildraumes:

$$Bild\ f = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}\right) .$$

(iii) Die Basis des Kernes ist der Vektor im Kern in (ii), und da gilt $dim\ Kern\ f = dimBild\ f = dim\ I\!R^3 = 3$, folgt, dass die Dimension des Bildes nur 2 sein kann. Folglich reichen zwei linear unabhängige Vektoren aus dem Bild als Basis aus, etwa:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) .$$

37. Die Abbildung f ist die Spur der gegebenen Matrix. Schreibt man die Matrix als Spaltenvektor im $I\!R^9$, dann ergibt sich die Spur durch Multiplikation von links mit der "Zeilen-Matrix" $T = (1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1)$. Also ist

f wieder eine lineare Abbildung. Da $dim\ Bild\ f = 1$ ist, muss der Kern die Dimension 8 haben. Zum ersten enthält der Kern die 6 kanonischen Basisvektoren des (3,3)-Matrixraumes, die die Nebendiagonalelemente repräsentieren. Dazu kommen noch zwei Basisvektoren, die die Diagonale selbst betreffen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich sind diese aus dem Kern, sie sind linear unabhängig, und mehr als zwei Basisvektoren des Kerns fehlen nicht mehr.