Lineare Algebra – Lösungen zur 7. Serie

28.

(a) Es ist $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 1 \end{pmatrix}$, und es besteht die Vermutung: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$. Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion:

Ind.-Anfang: Die Vermutung ist richtig für $n = 1$ (und $n = 2$, und $n = 3$).

Ind.-Voraussetzung: Die Vermutung ist richtig für $n = k$: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ka & 1 \end{pmatrix}$.

Ind.-Behauptung: Die Vermutung ist richtig für $n = k+1$: $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (k+1)a & 1 \end{pmatrix}$.

Ind.-Beweis: Es ist $A^{k+1} = A^k\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ka & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (k+1)a & 1 \end{pmatrix}$.

– Fertig –

(b) Es ist $A\,B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B\,A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Also gilt $A\,B \neq B\,A$.

29

Sei Matrix $A = (a_{ij})$, dann ist $A^T = (a_{ji})$. Der erste Index zählt die Zeilen, der 2. Index die Spalten.
Setze $B = (b_{ij}) = \left(\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})\right)$ und $D = (d_{ij}) = \left(\frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})\right)$

Behauptung: B ist symmetrisch und D ist schiefsymmetrisch.

Beweis:
$B^T = (b_{ji}) = \left(\frac{1}{2}(a_{ji} + a_{ij})\right) = \left(\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})\right) = B$ und
$D^T = (d_{ji}) = \left(\frac{1}{2}(a_{ji} - a_{ij})\right) = \left(-\frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})\right) = -D$.
Also ist jede quadratische Metrix darstellbar:
$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.

30.

Es ergibt sich: $-2\vec{a_1} + 2\vec{a_2} - 1\vec{a_3} + 1\vec{a_4} + 1\vec{a_5} = \vec{0}$.
Es zeigt sich, dass dabei z.B. $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ linear unabhängig sind. Sie können als Basis eines Untervektorraumes der Dimension 3 im $\mathbb{R}^4$ gewählt werden. Der Untervektorraum ist isomorph zum $\mathbb{R}^3$.

31.

Sei $T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $T \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ist $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so ist dies ein Gleichungssystem mit 4 Variablen, den Elementen in T, und 4 Gleichungen.
Man erhält als Lösung: $T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Eine neue Basis kann man als Matrix darstellen, indem man die Vektoren als

Spalten der Matrix schreibt: $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Eine lineare Abbildung $T\,x = w$ in der Originalbasis transformiert sich nun zu

$$BB^{-1}T\,BB^{-1}x = BB^{-1}w = B(B^{-1}TB)(B^{-1}x) = B(B^{-1}w).$$

Setzt man in Symbolen: $B^{-1}x = x_B$, $B^{-1}w = w_B$ für die Koordinaten in der neuen Basis, und $B^{-1}TB = T_B$, dann ist

$$T_B = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/4 \\ -6 & 4/3 \end{pmatrix} ,$$

und es ist $B\,w_B = B\,T_B x_B$, also $w_B = T_B x_B$.

32.

Es ist $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dann ist $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Folglich wird $T_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Es ist $T_B x_B = B^{-1}TBB^{-1}x = B^{-1}(Tx) = (Tx)_B$.

33.

Wenn $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ist, mit reellen Zahlen a_i, dann operiert die gegebene lineare Abbildung folgendermassen:
$T(p(x)) = a_2(3x-5)^2 + a_1(3x-5) + a_0$. Das ist wieder ein Polynom in P_2. Setzt man die gegebenen Basisvektoren in T ein, erhält man: $T(1) = 1, T(x) = (3x-5), T(x^2) = (3x-5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$. Ordnet man P_2 isomorph folgende Basisvektoren im $\mathbb{R}^3$ zu,

$1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^2 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dann werden diese entsprechen abgebildet zu:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -30 \\ 9 \end{pmatrix} .$$

Also ist die Transformationsmatrix als Spalten-Matrix der Bilder der kanonischen Einheitsvektoren

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} .$$