Lineare Algebra – Lösungen zur 5. Serie

20.

Einfacher Schluss: Die Dimension eines von 4 Vektoren $\vec{x}_i$ aufgespannten Untervektorraumes kann höchstens 4 sein. Also müssen 5 $\vec{v}_k$ von diesen 4 $\vec{x}_i$ linear kombinierte Vektoren linear abhängig sein. Fertig!

21.b)

Es gelte $Dim(V) = n$, und $Dim(U_1) = p$, mit $p < n$.
Dann gibt es p linear unabhängige Basisvektoren von U_1. Diese können auch als Teil der Basis von V dienen. Dann fehlen aber noch $n - p$ Basis-Vektoren in V. Diese können nach dem Basisergänzungssatz so gefunden werden, dass sie nicht in U_1 sind:
Wähle Basis $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, .., \vec{u}_p\} \in U_1$ und $\{\vec{v}_{p+1}, \vec{v}_{p+2}, .., \vec{v}_n\} \in V$, aber $\vec{v}_k \notin U_1$. D.h., die $\vec{v}_k$ sind linear unabhängig von den $\vec{u}_i$.
Setze $U_2 = L(\vec{v}_{p+1}, \vec{v}_{p+2}, .., \vec{v}_n)$ die lineare Hülle aller $\vec{v}_k$. Aus der Konstruktion folgt, dass U_2 Untervektorraum von V ist, und seine Dimension ist gleich der Anzahl der $\vec{v}_k$, nämlich $n - p$. Da galt $\vec{v}_k \notin U_1$, ist der Durchschnitt $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$, und per Konstruktion ist die direkte Summe $U_1 + U_2$=V, weil eben $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, .., \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, \vec{v}_{p+2}, .., \vec{v}_n\}$ die Basis von V ist.

22.

Die Dimension des Raumes der (m, n)-Matrizen ist $m\,n$. Die Basis von V ist bildbar aus den Matrizen, die je genau eine 1 enthalten, sonst Nullen. Dies sind $m\,n$ Stück.
Beispiel (2,3)-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. (Vertiefte Version)

Seien $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ beliebige Vektoren.
Nach Behauptung gilt für alle $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ die Eigenschaft: $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \in U$. Es ist somit, wenn man zweimal $\vec{u}_2$ einsetzt: $\vec{u}_2 - \vec{u}_2 = \vec{0} \in U$, und wenn man diesen Nullvektor einsetzt, ergibt sich: $\vec{0} - \vec{u}_2 = -\vec{u}_2 \in U$. Also gilt auch $\vec{u}_1 - (-\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in U$. Das ist die bisher bekannte 2. Bedingung für die Untervektorraum-Eigenschaft. Diese ist somit gezeigt.
(Man braucht nicht vorauszusetzen, dass $-1 \in I\!\!K$ ist.)