Lineare Algebra – Lösungen zur 4. Serie

(Unter Verwendung der Lösung von Clemens Petzold, Kristin Vogt und Friedrich Büttner.)

16.

a) Einfachster Schluss: Der Nullvektor muss in U_α sein, also muss $\alpha = 0$ sein.

b) Sei nun $\alpha = 0$. Betrachte 2 beliebige Vektoren der Ebene:
$\vec{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow$ mit: $a + b + c = 0$, und $\vec{B} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \rightarrow d + e + f = 0$.
Ihre Summe ist $\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix}$. $\vec{A} + \vec{B}$ in die Ebene eingesetzt ist:
$x_1 + x_2 + x_3 = (a+d) + (b+e) + (c+f) = a+d+b+e+c+f = 0+0 = 0$.
Analog gilt $\lambda\vec{A}$ erfüllt $\lambda(x_1 + x_2 + x_3) = 0$. Wenn $\alpha = 0$ dann sind alle Unter-Vektorraum-Bedingungen erfüllt.

17.

Es gelte für $p_a(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, dass in den beiden Intervallpunkten 0 und 1 ist $p_a(0) = a_0 = 0$ und $p_a(1) = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n = 0$. Wenn analoges für ein beliebiges $p_b(x)$ gilt, dann ist

- $p_a(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0$; $p_b(1) = b_0 + b_1 + \cdots + b_n = 0$ und
  $p_a(1) + p_b(1) = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + (b_0 + b_1 + \cdots + b_n) = 0 + 0 = 0$
- Sowie mit $p_a(0) = a_0 = 0$ und $p_b(0) = b_0 = 0$ ist
  $p_a(0) + p_b(0) = a_0 + b_0 = 0 + 0 = 0$.

Damit sind für beliebiges $p(x) \in$ W die Untervektorraumaxiome erfüllt.

18.

a) Ja, es gibt linear unabhängige Vektoren, da zwei Vektoren nur eine Ebene aufspannen können. Z.B. der Normalvektor zur Ebene durch die beiden Vektoren $(1, 0, 0)$ und $(1, 1, 1)$ ist nicht linear kombinierbar. Er ergibt sich aus dem Vektorprodukt: $(1, 0, 0) \times (1, 1, 1) = (0, -1, 1)$. Aber auch schiefe Vektoren zur angegebenen Ebene sind linear unabhängig.

b, c, e) Die drei Vektoren sind linear unabhängig. Sie spannen deshalb den $\mathbb{R}_3$ vollständig auf. Alle weiteren Vektoren sind beschreibbar und damit linear abhängig.

d) Die vier Vektoren müssen schon untereinander linear abhängig sein. Dabei sind aber die Vektoren 1, 2, und 4 im $\mathbb{R}_3$ linear unabhängig. Alle weiteren Vektoren sind damit linear abhängig.

19.

Damit vier Vektoren als linear unabhängig gelten können, dürfen sie in folgender Vektorgleichung nur die Null-Lösung zulassen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \alpha \quad + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \beta \quad + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma \quad + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \delta \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein homogenes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llllll}
\text{I:} & \alpha\ 1 & +\ \beta\ 2 & +\ \gamma\ (\text{-}1) & +\ \delta\ 0 & =0 \\
\text{II:} & \alpha\ 2 & +\ \beta\ 0 & +\ \gamma\ 0 & +\ \delta\ 2 & =0 \\
\text{III:} & \alpha\ 3 & +\ \beta\ 1 & +\ \gamma\ 0 & +\ \delta\ 3 & =0 \\
\text{IV:} & \alpha\ 4 & +\ \beta\ (\text{-}1) & +\ \gamma\ 1 & +\ \delta\ 0 & =0
\end{array}$$

aus II folgt: $\alpha = -\delta$,
in III folgt: -3$\delta + \beta + 3\delta = 0$, also $\beta = 0$.
Damit folgt aus I: $\alpha = \gamma$. Und noch aus IV: $5\gamma = 0$, also auch $\alpha = 0$ und $\delta = 0$.
Folglich sind die vier Vektoren linear unabhängig.