Lineare Algebra 2002, Lösungen zur Serie 3

11.

Behauptung: $\vec{x} + (\vec{y} - \vec{x}) = \vec{y}$ (! Druckfehler in Aufgabe !) Beweis durch Anwendung der Vektoraxiome:

(1) Kommutativität: Es gilt
$\vec{y} - \vec{x} = -\vec{x} + \vec{y}$, also ist $\vec{x} + (\vec{y} - \vec{x}) = \vec{x} + (-\vec{x} + \vec{y})$

(2) Assoizativität: $\vec{x} + (-\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x} - \vec{x}) + \vec{y}$

(3) Existenz des inversen Elements, und eines Nullvektors: $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{O}$, für den dann gilt $\vec{O} + \vec{y} = \vec{y}$

(4) Also Fazit: $\vec{x} + (\vec{y} - \vec{x}) = (\vec{x} - \vec{x}) + \vec{y} = \vec{O} + \vec{y} = \vec{y}$ $\Rightarrow$ Die Behauptung ist richtig!

12.

Sei $U_1 \cup U_2 = \{\ x | x \in U_1$ oder $x \in U_2\ \} =$ V,
und sei angenommen, dass U_1 als auch U_2 echte Untervektorräume von V sind. Dann gibt es ein Element $v \in V$ mit der Eigenschaft $v \notin U_1$ als auch $v \notin U_2$, folglich kann dieses v nicht in $U_1 \cup U_2$ liegen. Das ist ein Widerspruch.
Die Aussage der 1. Zeile gilt nur, wenn U_1 oder U_2 oder beide V sind.

13.

a) U ist Untervektorraum.
Begründung: Wähle Darstellung der Elemente von U mit Parametern t, s: $\vec{x} = t\,(1,1,...,1)$, $\vec{y} = s\,(1,1,...,1)$, $t, s \in R$. Dann ist $\vec{x} + \vec{y} = (t+s)\,(1,1,...,1) \in U$, und mit $\lambda \in R$ ist auch $\lambda\,\vec{x} = (\lambda\,t)\,(1,1,...,1) \in U$, u.s.w.. Alle Untervektorraumaxiome sind erfüllt.

b) U ist kein Untervektorraum.
Begründung: Eine Linearkombination gewisser Elemente führt heraus.
Wähle Darstellung der Elemente von U mit Parametern t, s:
$\vec{x} = (0,0,x_3,...,x_n) + t\,(1,1,0,...,0)$,
$\vec{y} = (0,0,x_3,...,x_n) + s\,(1,-1,0,...,0)$, $t, s \in R$ als auch $x_3,...,x_n \in R$, beliebige Zahlen. Für beliebige t liegen alle $\vec{x}$ in U, und für beliebige s liegen alle $\vec{y}$ in U.
Aber $\vec{x} + \vec{y} = (0,0,x_3,...,x_n) + (t+s, t-s, 0,...,0)$ sind für $t \neq 0,\ s \neq 0$ nicht in U.

c) U ist kein Untervektorraum, weil kein Nullvektor vorhanden ist.

14.

Der Unterraum ist durch $(U, +, \bullet)$ definiert, bestehend aus U, einer Verknüpfung $+$ (Addition) und einer Verküpfung $\bullet$ (Skalarmultiplitaktion). $V =$ C; $U \subset V$; $U = \{iy | y \in R\}$. Die Definition für komplexe Zahlen (C) lautet $i^2 = -1$, sie wird aber hier gar nicht zur Anwendung gebracht! y ist der Parameter, und

zu $y_1, y_2 \in R$ gilt $iy_1 + iy_2 \in$ U als auch $\lambda * iy_1 \in$ U, wenn $\lambda \in R$ war. D.h. dass U Untervektorraum ist, U $\subset V$. Zusätzlich gelten auch alle 8 Axiome für Vektorräume.
Bsp: $(iy_1 + iy_2) + iy_3 = iy_1 + (iy_2 + iy_3)$, u.s.w.
Durch die Erfüllung all dieser Bedingungen kann die Aussage bestätigt werden: $U \subset V$.

15.

P_m sei die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad $\preceq m$. Elemente p, q und r aus P_m sind $p = \sum_{i=0}^{k} a_i * x^i$, $q = \sum_{i=0}^{l} b_i * x^i$, und $r = \sum_{i=0}^{n} c_i * x^i$, mit $k, l, n \preceq m$. Dabei sind k, l, n natürliche Zahlen, und $a_i, b_i, c_i \in R$. Auch x kann man sich in R vorstellen.
Die Addition + ist definiert durch:
$+$:$P_m \times P_m \to P_m$, $(p, q) \to p + q := \sum_{i=0}^{m}(a_i + b_i) * x^i$, und die Multiplikation * eines Polynoms p mit einer reellen Zahl λ ist definiert durch:
$*$:$R \times P_m \to P_m$, $(\lambda, p) \to \lambda * p := \sum_{i=0}^{m}(\lambda * a_i) * x^i$.
Zu zeigen ist, dass $(P_m, +, *)$ ein Vektorraum ist. Mit den genannten Definitionen ist klar, dass $p + q$ und $\lambda * p$ Elemente von P_m sind, denn durch beide Operationen erhöht sich der Grad des Polynomes nicht. Dadurch ist die Erfüllung der Axiome begründet:

(1) $(p + q) + r = \sum_{i=0}^{max(k,l)}(a_i + b_i) * x^i + \sum_{i=0}^{n} c_i * x^i$
$= \sum_{i=0}^{k} a_i * x^i + \sum_{i=0}^{max(l,n)}(b_i + c_i) * x^i = p + (q + r)$,
gilt für alle $p, q, r \in P_m$, da die Assoziativität für die reellen Koeffizienten gilt. (Dabei ist etwa $a_i = 0$ zu setzen, wenn $i > k$ ist.)

(2) $p + q = \sum_{i=0}^{max(k,l)}(a_i + b_i) * x^i = \sum_{i=0}^{max(k,l)}(b_i + a_i) * x^i = q + p$,
gilt für alle $p, q \in P_m$, da die Kommutativität für die reellen Koeffizienten gilt.

(3) $\mathbf{O}$ ist der Nullvektor in P_m, bei dem alle $a_i = 0$ sind.
$p + \mathbf{O} = \sum_{i=0}^{k}(a_i + 0) * x^i = p$, gilt für alle $p \in P_m$.

(4) Zu jedem $p = \sum_{i=0}^{k} a_i * x^i \in P_m$ gibt es ein $-p = \sum_{i=0}^{k}(-a_i) * x^i \in P_m$ mit $p + -p = \sum_{i=0}^{k}(a_i + -a_i) * x^i = \mathbf{O}$.

(5) Wenn $\lambda, \mu \in R$, dann ist
$\lambda(\mu p) = \lambda \sum_{i=0}^{k}(\mu a_i) * x^i = \lambda\mu \sum_{i=0}^{k} a_i * x^i = (\lambda\mu)p$, gilt für alle $p \in P_m$.

(6) Die Eins $1 \in R$ ergibt $1 * p = 1 * \sum_{i=0}^{k} a_i * x^i = \sum_{i=0}^{k}(a_i * 1) * x^i = \sum_{i=0}^{k} a_i * x^i = p$.

(7) Wenn $\lambda \in R$ ist, gilt
$\lambda(p + q) = \lambda \sum_{i=0}^{max(k,l)}(a_i + b_i) * x^i = \sum_{i=0}^{max(k,l)}(\lambda a_i + \lambda b_i) * x^i$
$= \sum_{i=0}^{k} \lambda a_i * x^i + \sum_{i=0}^{l} \lambda b_i * x^i = \lambda p + \lambda q$, für alle $p, q \in P_m$.

(8) Wenn $\lambda, \mu \in R$, dann ist
$(\lambda + \mu)p = (\lambda + \mu) \sum_{i=0}^{k} a_i * x^i = \sum_{i=0}^{k} \lambda a_i * x^i + \sum_{i=0}^{k} \mu a_i * x^i = \lambda p + \mu p$ für alle $p \in P_m$.

Damit ist gezeigt, dass $(P_m, +, *)$ ein Vektorraum ist.