Lineare Algebra für Physiker, 2. Serie

Lösungen der Serie 2
angefertigt von Clemens Petzold, Kristin Vogt und Friedrich Büttner

6.

a) Mensch $\rightarrow$ Freundin:
Diese Aussage ist keine Abbildung, da jeder Mensch keine, eine oder mehrere Freundinnen haben kann und somit jedem Mensch nicht eindeutig eine Freundin zugeordnet werden kann.

b) Mensch $\rightarrow$ Vater:
Diese Aussage ist eine Abbildung, da jeder Mensch genau einen (biologischen) Vater hat. Die Abbildung ist surjektiv: $f(Mensch) = Vater$, aber sie ist nicht injektiv.

c) Mensch $\rightarrow$ Telefonnummer:
Diese Aussage ist keine Abbildung, da jeder Mensch keine, eine oder mehrere Telefonnummern haben kann und somit jedem Mensch nicht eindeutig eine Telefonummer zugeordnet werden kann.

d) Mensch $\rightarrow$ Wohnung:
Diese Aussage ist keine Abbildung, da jeder Mensch keine, eine oder mehrere Wohungen haben kann und somit jedem Mensch nicht eindeutig eine Wohnung zugeordnet werden kann.

7.

(1) Wenn $X \cup Y$ eine endliche Menge ist, so müssen auch X, Y endliche Mengen sein: $\{x | x \in X \text{ oder } x \in Y\}$.
Wenn X und/oder Y unendlich wären, so wäre auch $X \cup Y$ unendlich, weil bei der Vereinigung höchstens noch etwas hinzu kommt.
Oder betrachte Anzahl der Elemente:
$X \subset X \cup Y$ und $Y \subset X \cup Y$, also ist $|X| \leq |X \cup Y|$ und $|Y| \leq |X \cup Y|$.

(2) $X \cap Y$ ist endlich, wenn X und Y endlich sind. $X \cap Y$ kann aber auch endlich sein, wenn eine oder beide Mengen unendlich ist:
$X \cap Y = \{x | x \in X \text{ und } x \in Y\}$.
Bsp.: $X = \{-4, -2, 2, 4\}$, $Y = \mathbb{N}$, und $X \cap Y = \{2, 4\}$.
Für die Anzahl gilt nicht die Umkehrung obiger Relation, da $X \cap Y \subset X$ und $X \cap Y \subset Y$ ist, können wenn $|X \cap Y|$ endlich ist, doch $|X|$ oder $|Y|$ selbst unendlich sein.

8.

i) Aus $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ folgt $A \Rightarrow C$, ist richtig.

ii) Die Aussage $B \Rightarrow A$ ist falsch. Analog ist (iii) die Aussage $C \Rightarrow B$ falsch; und auch (iv) die Aussage $C \Rightarrow A$ ist falsch.

i) folgt aus der entsprechenden Wahrheittabelle:

Sei ($A \Rightarrow B$)=X, ($B \Rightarrow C$)=Y, ($X \wedge Y$) = Z, und ($A \Rightarrow C$)=W, dann ist

A	B	C	X	Y	Z	W	$Z \Rightarrow W$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Also ist die Folgerung, daß aus Z immer W folgt, in allen Fällen richtig.

9.

Die Aussage ist im allgemeinen falsch, weil die in Frage kommende Relation nicht alle Elemente erfassen braucht, aber die Reflexivität für alle Elemente gelten muß.
Bsp.:
Sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und
R $= \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$,
dann ist R symmetrisch und transitiv, aber R ist nicht reflexiv auf M weil 4R4 nicht gilt.

10.

R ist eine Äquivalenzrelation bezüglich der Länge.

- symmetrisch weil aus:
  $sRt \Longleftrightarrow l(s) = l(t)$ folgt, dass auch $l(t) = l(s)$ ist, also tRs .
- transitiv weil aus
  sRt, tRu folgt, dass $l(s) = l(t) = l(u)$, also sRu ist.
- reflexiv weil
  $l(s) = l(s)$ gilt, also sRs ist.