Dr. Quapp HS 2002

http://www.mathe.uni-leipzig.de/~quapp/uebungenP.html

Lösungen zur 12. Übung (zum 20. 1. 2003)

50. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung lautet

$$| < \vec{x}, \vec{y} > | \leq ||\vec{x}||||\vec{y}|| \ .$$

Der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist

$$cos\ \alpha = \frac{< \vec{x}, \vec{y} >}{||\vec{x}||||\vec{y}||} \ .$$

Wenn in der Relation das Gleichheitszeichen steht, dann ist $cos\,\alpha = \pm 1$, also $\alpha = 0$ oder 180 Grad. Dann sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ linear abhängig.

51. Der Vektor $\vec{a} = (1/2,\ 1/2\, 1/\sqrt{2})^T$ ist zu einer Orthonormalbasis zu ergänzen.
(i) Setze an mit einem Vektor $\vec{b}$

$$< \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ B \end{pmatrix} > = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{B}{\sqrt{2}} = 0 \ .$$

Es folgt $B = -\sqrt{2}$, und der Betrag des neuen Vektors ist $||\vec{b}|| = 2$.
(ii) Suche nun einen Vektor $\vec{c}$, der zu den beiden gegebenen orthogonal ist

$$< \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ C \\ D \end{pmatrix} > = \frac{1}{2} + \frac{C}{2} + \frac{D}{\sqrt{2}} = 0 \ ,$$

also $C = -1 - \frac{2\,D}{\sqrt{2}}$, und

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ C \\ D \end{pmatrix} > = 1 + C - D\sqrt{2} = 0 \ ,$$

also ergibt sich als zweite Gleichung $C = -1 + D\sqrt{2}$; daraus $D = 0$ und $C = -1$. Der Betrag des 3. Vektors ist $||\vec{c}|| = \sqrt{2}$. Eine Orthonormalbasis ist:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\ , \ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

52. Gegeben sind 3 Vektoren im $I\!R^4$: $\vec{a_1} = (-3,-3,3,3)^T$, $\vec{a_2} = (-5,-5,7,7)^T$, $\vec{a_3} = (4,-2,0,6)^T$. Der erste wird normiert zu $\vec{b_1} = (-1/2,-1/2,1/2,1/2)^T$. Dann ist ein orthogonaler Vektor

$$\vec{B_2} = \vec{a_2} - \frac{<\vec{b_1},\vec{a_2}>}{<\vec{b_1},\vec{b_1}>}\,\vec{b_1}\ .$$

Das Skalarprodukt im Zähler ist 12, im Nenner wegen der vorherigen Normierung 1. Damit ist $\vec{B_2} = (1,1,1,1)^T$, und nach erneuter Normierung erhalten wir $\vec{b_2} = (1/2,1/2,1/2,1/2)^T$. Nun kann der 3.Vektor berechnet werden:

$$\vec{B_3} = \vec{a_3} - \frac{<\vec{b_1},\vec{a_3}>}{<\vec{b_1},\vec{b_1}>}\,\vec{b_1} - \frac{<\vec{b_2},\vec{a_3}>}{<\vec{b_2},\vec{b_2}>}\,\vec{b_2}\ .$$

Die Skalarprodukte in den beiden Zählern sind 2 und 4. Somit wird

$$\vec{B_3} = \begin{pmatrix} 4\\ 2\\ 0\\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 2\\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\ -3\\ -3\\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Betrag des 3. Vektors ist $||\vec{B_3}|| = 6$, und nach erneuter Normierung erhalten wir $\vec{b_3} = (1/2,-1/2,-1/2,1/2)^T$. Die ONB ist letztendlich:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1/2\\ -1/2\\ 1/2\\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2\\ 1/2\\ 1/2\\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2\\ -1/2\\ -1/2\\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}.$$

53. Es sei definiert ein Skalarprodukt $<\vec{x},\vec{y}>= \sum_{i,j}^{3} a_{ij}\,x_i\,y_j$, wobei die Koeffizienten a_{ij} in folgender Matrix festgelegt sind:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$<\vec{e_1},\vec{e_2}>= \begin{array}{lll} 2\cdot 1\cdot 0 & +1\cdot 1\cdot 1 & +0\cdot 1\cdot 0\\ +1\cdot 0\cdot 0 & +2\cdot 0\cdot 1 & +1\cdot 0\cdot 0\\ +0\cdot 0\cdot 0 & +1\cdot 0\cdot 1 & +4\cdot 0\cdot 0 \end{array} = 1\ .$$

Analog ergibt sich $<\vec{e_1},\vec{e_3}>= 0$ und $<\vec{e_2},\vec{e_3}>= 1$. Die Beträge sind auch nach diesem Schema zu berechnen, es ist: $||\vec{e_1}|| = \sqrt{2}$, $||\vec{e_2}|| = \sqrt{2}$, und $||\vec{e_3}|| = 2$. Die Winkel werden:

$$\sphericalangle(\vec{e_1},\vec{e_2}) = arccos\frac{1}{2} = 60^o$$

$$\sphericalangle(\vec{e_1},\vec{e_3}) = arccos 0 = 90^o$$

$$\sphericalangle(\vec{e_2},\vec{e_3}) = arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} = 69,3^o\ .$$