Lineare Algebra – Lösungen zur 11. Übung (zum 20.1.2003)

46. Eine Zeilenstufen-Berechnung führt bei Aufgabe (a) zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also zum Rang 4 des homogenen Systems mit 4 Variablen, folglich gibt es nur die triviale Null-Lösung.

(b) Bei Aufgabe (b) ergibt sich

$$rg \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = 3,$$

also ist das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar, da 4 Variable vorliegen. Die Zeilenstufenform ergibt mit

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 6 \end{array}\right),$$

dass x_4 festgelegt ist zu $x_4 = -2/3$, dann aber x_2 oder x_3 als Parameter s vorgegeben werden können. Setze $x_3 = s$, dann folgt $x_2 = (3 - 6s)/5$ und $x_1 = 1 - 2/3 - s + 2(3 - 6s)/5 = 23/15 - 17/5s$. Folglich ergibt sich als Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 23/15 \\ 3/5 \\ 0 \\ -2/3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -17/5 \\ -6/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Die Zeilenstufenform ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

Folglich ergibt sich als Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

47. Setze vorerst $X = x^2, Y = y^2, Z = z^2$, und betrachte das System als ein lineares System für die grossen Variablen. Die Zeilenstufenform ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

Dann ist $Z = z^2 = 2$, also $z = \pm\sqrt{2}$, sowie $Y = y^2 = 3$, also $y = \pm\sqrt{3}$, und $X = x^2 = 1$, also $x = \pm 1$ Folglich ergibt sich als Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm\sqrt{3} \\ \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Die Matrix A besteht aus 2 Spaltenvektoren, die im $\mathbb{R}^3$ liegen. Deren Linearkombination durch 2 "Werte" $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ kann nur den Nullvektor ergeben, wenn die beiden Spaltenvektoren linear abhängig sind, d.h. wenn sie auf einer Linie liegen, man sagt kollinear sind. Im Fall a) sind die beiden Spaltenvektoren linear unabhängig, dann ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Nullvektor die einzige mögliche Lösung.
Im Fall b) sind die beiden Spaltenvektoren linear abhängig, also alle Geraden fallen zu einer einzigen Geraden zusammen. Es ist somit

$$\begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix}$$

Und wenn man $x = 1,\ y = -\lambda$ setzt, ergibt sich der Nullvektor.

48. Gegeben sei eine quadratische Matrix A über $\mathbb{R}^{n,n}$, und es werde das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ betrachtet.
Beh.: rgA ist maximal $\leftrightarrow$ Es existiert genau eine eindeutige Lösung.
Bew.:
(i) Hinrichtung: Sei rgA maximal. Da $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, folgt $rgA = n$, und da $n = rgA + dim\,kerA$ ist, muss somit $dim\,kerA = 0$ sein.
A ist eineindeutige Abbildung, und genau ein $\vec{x}$ wird durch A auf ein $\vec{b}$ abgebildet.
Es existiert genau eine eindeutige Lösung.
(ii) Rückrichtung: Es existiere genau eine eindeutige Lösung. D.h. genau ein $\vec{x}$ wird durch A auf ein $\vec{b}$ abgebildet. Dann ist A eine eineindeutige Abbildung, für die gelten muss $dim\,kerA = 0$. Da gilt $n = rgA + dim\,kerA$, ist somit $rgA = n$, und dieser Rang ist maximal.
q.e.d.

49. Der Vektor der rechten Seite ist nicht der Nullvektor, folglich ist das System nicht lösbar, wenn $rgA \neq rg(a, \vec{b})$ ist. Das tritt ein bei $detA = 0$.
Fall (i) $\alpha_1 \neq 0$.

Es ergibt sich die Determinante:

$$det \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_4 - \alpha_3\alpha_2/\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 - \alpha_3\alpha_2/\alpha_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1\alpha_1(\alpha_4 - \alpha_3\alpha_2/\alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_3\alpha_2/\alpha_1) = (\alpha_4\alpha_1 - \alpha_3\alpha_2)^2$$

Sie ist ungleich Null bei $\alpha_4\alpha_1 \neq \alpha_3\alpha_2$.
Fall (ii) $\alpha_1 = 0$.
Dann ist die Determinante, wie man sofort sieht, dann nicht Null, wenn $\alpha_2 \neq 0$ und $\alpha_3 \neq 0$ ist.
Lösung: Wir haben 4 Gleichungen eines inhomogenen Systems für 4 Koeffizienten. Sei (i) wieder $\alpha_1 \neq 0$. Aus der letzen Stufe folgt
$x_4 = \alpha_1/(\alpha_4\alpha_1 - \alpha_3\alpha_2)$, dann
$x_3 = -\alpha_3/(\alpha_4\alpha_1 - \alpha_3\alpha_2)$, sowie
$x_2 = -\alpha_2/(\alpha_4\alpha_1 - \alpha_3\alpha_2)$, und
$x_1 = \alpha_4/(\alpha_4\alpha_1 - \alpha_3\alpha_2)$.
Im Fall (ii) $\alpha_1 = 0$ ergibt sich die analoge Formel mit diesem konkreten Wert für α_1.