Lineare Algebra – Lösungen zur 10. Übung (zum 6. 1. 2003)

42. Eine Permutationsmatrix entsteht aus der Einheitsmatrix, indem man z.b. r-mal eine Zeilenvertauschung vornimmt. Umgekehrt kann man jede Permutationsmatrix in die Einheitsmatrix überführen, indem man diese entsprechenden r Zeilenvertauschungen invers vornimmt. Bei jeder Zeilenvertauschung ändert sich das Vorzeichen der Determinante um (-1), also bei r Zeilenvertauschungen um $(-1)^r$. Die gesuchte Determinante ist $+1$ oder -1.

43. Die Lösung durch eine Zeilenstufen-Berechnung ist bei Aufgabe (a)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{und bei (b)} \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

44. Wäre V ein VR mit 3 Elementen, so ist es naheliegend anzunehmen, dass diese $\{-\vec{x}, \vec{0}, \vec{x}\}$ sind, weil $\vec{0}$ ein Element sein muss, und zu $\vec{x}$ soll es das entgegengesetzte Element $-\vec{x}$ geben. Sei wie immer $I\!K = I\!R$ oder $\mathbb{C}$, und $\lambda \in I\!K \setminus \{-1, 0, 1\}$, dann ergibt sich bei den Rechenregeln für $I\!K$ sofort, dass $\lambda\vec{x} \notin V$. Somit kann es keinen VR über $I\!K$ mit 3 Elementen geben.

45. Sei V der VR der (2,2) Matrizen mit reellen Einträgen.
(a) $W = \{A \in V | Det\, A = 0\}$.
Wäre W ein VR, so müsste die Addition seiner Elemente in W bleiben. Ein Gegenbeispiel bringt diese Annahme zu Fall: Wähle
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Es ist offenbar $A_1 + A_2 = E$, und obwohl die $A_i \in W$ sind, ist $Det\,(A_1 + A_2) = 1$.
Also ist W kein Untervektorraum von V.

(b) $W = \{B \in V | B^2 = B\}$.
Wäre W ein VR, so müsste wieder die Addition seiner Elemente in W bleiben. Ein Gegenbeispiel bringt auch diese Annahme zu Fall: Wähle
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{und es ist auch} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Es ist aber offenbar $B + B = 2B \neq (B + B)^2 = 4B$.
Also ist W kein Untervektorraum von V.
Bemerkung: Matrizen dieser Menge W mit $B^2 = B$ sind sogenannte Projektoren.

45.c) Wir haben zu betrachten:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Das sind 4 Gleichungen eines homogenen Systems für die 3 Koeffizienten. Aus der 3. Gleichung (für die untere linke Komponente) ergibt sich direkt $\alpha = 0$, dann aus der 4. Gleichung (für die untere rechte Komponente) $\beta = 0$, und somit auch noch $\gamma = 0$. Also sind die 3 Elemente linear unabhängig.