

Eine Abwandlung der Heronschen Formel

Der Heronsche Pythagoras

Ronald Wilhelm · Wolfgang Quapp

Received: September 3, 2024/ Accepted: date

Abstract Die Heronsche Formel für die Dreiecksfläche wird so umgestellt, dass sich eine Gleichung wie in der Pythagorasformel ergibt. Zusätzlich betrachten wir den Inkreis des Dreiecks sowie das Problem des Wurzelziehens.

Keywords Heronsche Formel · Inkreis · Wurzelberechnung · Pythagoras

Mathematics Subject Classification (2020) 97D50

1 Einleitung: Die Heronsche Formel für die Dreiecksfläche

Dreiecke wurden schon von Mathematikern in der Antike betrachtet. Ihre Flächenberechnung war eine praktische Anwendung der Mathematik. Denn oft mußten die Bauern je nach Größe ihrer Felder Steuern bezahlen.

$$F = \frac{1}{2} g h$$

ist die bekannte Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks. Dabei stehen die Buchstaben g und h für die Länge der Grundseite und die zu dieser Seite senkrechte Höhe. Die Formel setzt voraus, dass man eine Höhe des Dreiecks kennt - eine Bedingung, die nicht immer erfüllt ist. Sind nur die Seitenlängen a , b und c gegeben, wie in Fig. 1, so würde die Anwendung der Formel erst die Berechnung einer Dreieckshöhe erfordern.

Schneller führt in diesem Fall die Heronsche Formel zum Ziel

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Die Variable s bezeichnet den halben Dreiecksumfang: $s = \frac{a+b+c}{2}$.

R. Wilhelm
Leipzig

W. Quapp
Mathematisches Institut, Universität Leipzig, PF 10 09 20, 04009 Leipzig
Tel.: +0341-9802493, ORCID: 0000-0002-0366-1408, E-mail: quapp@math.uni-leipzig.de

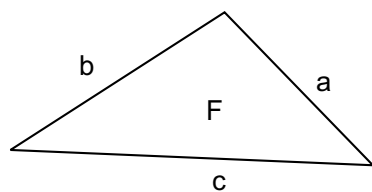


Fig. 1 Zur Heronschen Formel: Dreieck mit Seiten a , b , c und Flächeninhalt F

Übungsaufgabe.

Man berechne die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks mit Seiten 3, 4, 5.

Die Formel ist benannt nach dem griechischen Mathematiker und Physiker Heron von Alexandria, der im ersten Jahrhundert unserer Zeitrechnung lebte [2]. Er lehrte vermutlich am Museion von Alexandria (Ägypten) mit der berühmten großen Bibliothek mit fast 1 Million Buchrollen. Heron bewies die Richtigkeit dieser Formel, die nach arabischen Quellen schon Archimedes bekannt war. In einem seiner vielen Bücher schreibt er:

“Die Erfindung aber der Vermessung ist von den Ägyptern gemacht; denn wegen des Steigens des Nils wurden viele Grundstücke, die deutlich zu erkennen, unkenntlich durch das Steigen, viele auch noch nach dem Fallen, und es war dem Einzelnen nicht mehr möglich, sein Eigentum zu unterscheiden; daher haben die Ägypter diese Vermessung erfunden...” [2], S.74 f.

Im weiteren Teil dieses Beitrages (Abschn. 2) werden wir den Inkreis erwähnen, der an die Größe s gekoppelt ist. In Abschn. 3 gehen wir auf das Ziehen der Wurzel ein, welches man bei der Heronschen Formel benötigt. Einige Umformungen der Heronschen Formel führen uns in Abschn. 4 zum 'Heronischen Pythagoras'. Dies wird im Abschnitt Einschätzung besprochen. Insgesamt berührt der Beitrag

- Geometrie, Trigonometrie,
- Gleichungen,
- Polynome,
- Numerik
- und etwas Zahlentheorie.

2 Abschweifung zum Inkreis

Mit der Variable s des halben Dreiecksumfanges formulieren wir eine

Übungsaufgabe.

Mit den Termen $s - a$, $s - b$, $s - c$ aus der Heronschen Formel werden die Inkreisabschnitte der Dreieckseiten b , c , a erfasst, siehe Fig.2.

Begründung:

Seien x , y , z vorerst die zweifach vorkommenden Inkreisabschnitte der Dreieckseiten b , c , a . Vom Mittelpunkt des Inkreises M kann man dreimal den

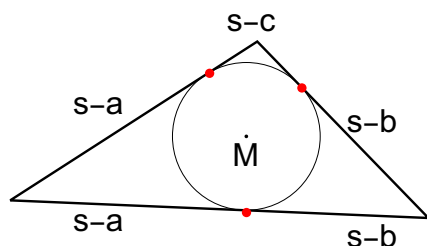


Fig. 2 Zur Heronschen Formel: Seitenabschnitte $s - a$, $s - b$, $s - c$

Inkreisradius r als Lot auf die Dreiecksseiten fallen. Die Fußpunkte sind in Fig. 2 eingezeichnet. Es entstehen sechs rechtwinklige Dreiecke mit den Seiten je x und r , je y und r und je z und r . Die Fläche ist somit

$$F = 2 \frac{xr}{2} + 2 \frac{yr}{2} + 2 \frac{zr}{2} = \frac{r}{2} (2x + 2y + 2z) = \frac{r}{2} (a + b + c) = rs .$$

Umgekehrt ist dann der Inkreisradius $r = F/s$. Um x, y, z zu erhalten, kann man in $x + y + z = s = \frac{1}{2} (a + b + c)$ setzen $x = s - a$, $y = s - b$ und $z = s - c$. Damit erfüllt man die Bedingung für die 3 Unbekannten x, y, z . Dies erscheint aber etwas willkürlich. Exakt hat man das Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} x + 0 + z &= b \\ x + y + 0 &= c \\ 0 + y + z &= a , \end{aligned}$$

das die gesuchte Zuordnung ergibt.

Nur im rechtwinkligen Dreieck gilt eine weitere Anwendung der Heronschen Seitenabschnitte auf der Seite c (vergleiche Fig. 2.):

Übungsaufgabe: Es ist $F = (s - a)(s - b)$, wenn der rechte Winkel über c liegt. Die Fläche ist somit nur durch die Inkreisabschnitte auf c gegeben.

Beweis

Es war vorn

$$F^2 = s(s - a)(s - b)(s - c) \quad \text{und} \quad F = rs .$$

Teilt man den ersten Ausdruck durch den zweiten, ergibt sich

$$F = (s - a)(s - b) \left(\frac{s - c}{r} \right) .$$

Im rechtwinkligen Dreieck mit dem rechten Winkel γ in der oberen Ecke gilt $s - c = r$, womit die Behauptung richtig ist. Liegt hier kein rechter Winkel γ vor, dann kann man den Faktor $\frac{s-c}{r}$ durch den Cotangens des halben Winkels ersetzen [1]:

$$F = (s - a)(s - b) \cot(\gamma/2) .$$

3 Herons Verfahren zum Wurzelziehen

Zur Berechnung von Herons Dreiecksfläche braucht man das Ziehen der Wurzel. Dazu entwickelte er selbst das 'Heron'-Verfahren, ein Iterationsverfahren zur näherungsweisen Berechnung der Quadratwurzel.

Sei $w = s(s-a)(s-b)(s-c)$, dann ist $\sqrt{w}$ gesucht. Per Definition ist $w > 0$. Beginnt man mit dem groben Schätzwert $F_0 = w$, dann führt die Iterationsformel

$$F_{n+1} = \frac{1}{2} \left(F_n + \frac{w}{F_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sehr schnell zum Flächeninhalt F .

Beispiel:

Die Wurzel bezeichnet geometrisch das Problem, ein Quadrat zu einer gegebenen Fläche w mit den beiden Seiten $\sqrt{w}$ zu finden. Ist $w = 2$, dann kann man sich ein Rechteck mit den Seiten 2 und 1 vorstellen ($w=2$ ist der erste Schätzwert): Es hat die gesuchte Fläche 2, ist aber noch kein Quadrat. Die Heronsche Formel verkürzt die längere Seite. Damit die Fläche wieder 2 ist wird die kürzere Seite verlängert, und dies solange, bis beide gleich sind. Im ersten Schritt kommt man zu $3/2$ und $4/3$ mit $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$, und so weiter. Das Verfahren konvergiert sehr schnell.

Anmerkung für höhere Klassen:

Hérons Verfahren ist ein Spezialfall für das Newtonverfahren zur Berechnung von Nullstellen einer differenzierbaren Funktion $f(x)$. Das Newtonverfahren ist eines der wichtigsten numerischen Verfahren. Man startet mit einem Schätzwert x_0 und iteriert

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wählt man $f(x) = x^2 - 2$, so ergibt sich sofort obige Formel für die gesuchte Nullstelle. Wenige Schritte führen zu $x_n \rightarrow \sqrt{2}$.

Anmerkung: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl. Ein halbes Jahrtausend vor Heron wußten das schon die Pythagoräer. Der Legende nach haben sie zuerst die Irrationalität von $\sqrt{5}$ erkannt, weil das reguläre Fünfeck das Zeichen ihres Bundes war. Aber das ist eine andere Geschichte.

4 Der Heronsche Pythagoras

In diesem Beitrag stellen wir eine Überlegung vor, die zu einer anderen Formel führt. Zuerst quadrieren wir die Formel und setzen jeweils die Variable s ein. Es ergibt sich ein kompakter Polynomausdruck

$$(4F)^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

den man ausmultiplizieren kann

$$= -a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 .$$

Übungsaufgabe: Nachrechnen! Man vergleiche auch den Anhang am Ende des Beitrages. Der schwierigere Teil schließt sich nun an: Wir können damit zurückrechnen und erhalten mit etwas Mühe einen weiteren Polynomausdruck [1]

$$= (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 .$$

Übungsaufgabe: Nachrechnen durch nochmaliges Ausmultiplizieren und Vergleichen mit dem vorigen Resultat!

Mit dem letzten Ausdruck erhalten wir mit der Heronschen Formel

$$(4F)^2 + (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab)^2$$

sozusagen einen *Heronischen Pythagoras*: Mit $X = 4F$, $Y = a^2 + b^2 - c^2$ und $Z = 2ab$ gilt $X^2 + Y^2 = Z^2$ für beliebige Seiten a , b , c .

5 Einschätzung

Der Heronsche Pythagoras gilt für alle Dreiecke, nicht nur für rechtwinklige, wie die echte Pythagorasformel. Diese erlaubt ganzzahlige a , b , c in einem rechtwinkligen Dreieck. Setzen wir im Heronschen Pythagoras für a , b , c ganzzahlige Seitenlängen ein, so muß aber F nicht ganzzahlig sein, da es in diesem Fall nur als $(4F)^2$ ganzzahlig vorkommt.

In der Heronschen Formel treten die Seiten a , b , c 'symmetrisch' auf; man kann die Bezeichnungen der Hypotenuse c und der beiden Katheten a und b vertauschen. Diese Symmetrie überträgt sich auch auf den Heronschen Pythagoras.

Wir können noch Spezialfälle betrachten. War das Dreieck selbst ein rechtwinkliges, dann ist der zweite Quadratterm links nach dem echten Pythagoras Null, und wir erhalten $F = \frac{ab}{2}$, die erste Flächenformel mit a für die Länge der Grundseite und b die senkrechte Höhe, oder umgedreht. Wegen der Symmetrie von a , b , c bleibt die Formel korrekt, wenn die Seitenbezeichnungen vertauscht werden.

Übungsaufgabe: Man kann Zahlenbeispiele einsetzen um die Formel zu überprüfen.

War das Dreieck zu einem Strich 'entartet', also $a + b = c$, dann muß $F = 0$ sein, und wir erhalten

$$0 + (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab)^2 .$$

Da nun $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2$ ist, bleibt in $(a^2 + b^2 - c^2)$ noch $2ab$ übrig, dessen Quadrat korrekt die rechte Seite ist.

Literatur

1. Wikipedia, Satz des Heron, (2024)
2. H. WUßING: *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1989)

6 Anhang

Hinweise zu den vorgeschlagenen Übungen [1]:

Ausmultipliziert erhält man:

$$F = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 2 \cdot c^2 \cdot a^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

Als weitere Darstellung der heronischen Formel ist auch die folgende gängig:

$$F = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 \cdot b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2},$$

welche man aus der 1. Version durch Umgruppieren und Anwendung der binomischen Formeln mit den folgenden Gleichungen gewinnt:

$$\begin{aligned} 16 \cdot F^2 &= (((a+b)+c) \cdot ((a+b)-c)) \cdot ((c+(a-b)) \cdot (c-(a-b))) \\ &= ((a+b)^2 - c^2) \cdot (c^2 - (a-b)^2) \\ &= (a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 - c^2) \cdot (c^2 - a^2 + 2 \cdot a \cdot b - b^2) \\ &= (2 \cdot a \cdot b + (a^2 + b^2 - c^2)) \cdot (2 \cdot a \cdot b - (a^2 + b^2 - c^2)) \\ &= 4 \cdot a^2 \cdot b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2. \end{aligned}$$