

Übungsaufgaben Analysis - 10. Serie

1. Man bestimme den größtmöglichen Definitionsbereich der folgenden Funktionen und berechne ihre Ableitungen.

(a) $f(x) = (5(x - 2)^2 + 7x)^4$

(b) $g(x) = \sin(\ln \sqrt{x^2 + 3})$

(c) $h(x) = (2 + \cos x)^{\sqrt{x}}$

2. Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass die folgende Verallgemeinerung der Produktregel für die Ableitung gilt: Wenn die Funktionen f und g in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar sind, dann ist auch das Produkt $f \cdot g$ dort n -mal differenzierbar und die n -te Ableitung berechnet sich als

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

3. Man zeige, dass für beliebiges reelles $x > 0$ die Ungleichung

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

gilt.

Hinweis: Mittelwertsatz anwenden

4. Mit Hilfe der l' Hospitalschen Regel berechne man die folgenden Grenzwerte. (Dabei ist $c > 0$ ein beliebiger reeller Parameter.)

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos cx}{1 - \cos x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\tan cx)}{\ln(\sin x)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{c}{x}\right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{x} \sin^2 x}{x}$

Aufgabe (d) ist eine *freiwillige Zusatzaufgabe*.

Abgabe: Dienstag, 1. Juli 2003 (vor der Vorlesung)