Übungsaufgaben Analysis - 9. Serie

1. Man bestimme alle $c \in \mathbb{R}$, so dass die folgenden Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind. (Begründung!)

   (a) $f(x) = \begin{cases} (1 - \frac{\sin x}{x})^2 & \text{für} \quad x < 0 \\ cx^3 + x & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$

   (b) $g(x) = \begin{cases} (x-4)^3 & \text{für} \quad x \leq 5 \\ (x-c)^2 & \text{für} \quad x > 5 \end{cases}$

2. Man zeige, dass die Gleichung

$$\frac{x^5 + 4x^3 + 2}{(x-a)^2} = \frac{1 + x^3}{b - x}$$

   für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ stets eine Lösung im offenen Intervall (a, b) besitzt.

3. Man beweise: Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ besitzt einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$.
   Man zeige an Hand eines Gegenbeispiels, dass dieser Satz nicht gilt, wenn man das *abgeschlossene* Intervall $[a, b]$ durch das *offene* Intervall (a, b) ersetzt.

4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sin x + \sqrt{x} - 1$. Mit Hilfe des Bisektionsverfahrens berechne man (z.B. mittels eines Taschenrechners) näherungsweise, bis auf einen Fehler von höchstens 10^{-3}, eine Nullstelle der Funktion f im Intervall $[0, 1]$.
   Hinweis: Zunächst bestimme man die Anzahl der nötigen Iterationen.

5. *Zusatzaufgabe:* Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man zeige, dass dann zu beliebigen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ stets eine Stelle $x_0 \in (a, b)$ existiert mit

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Hinweis zu den Aufg. 2, 3 und 5: Zwischenwertsatz

Abgabe: Dienstag, 24. Juni 2003 (vor der Vorlesung)