

Übungsaufgaben Analysis - 7. Serie

1. Man bestimme den Wertebereich der folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und skizziere jeweils den Graph.

(a) $D = [0, 20]$, $f(x) = \text{Anzahl der Primzahlen } p \leq x$

(b) $D = [-1, 3]$, $f(x) = x^2 - 4$

(c) $D = (-1, 1)$, $f(x) = \frac{2}{1-x}$

(d) $D = (0, 1)$, $f(x) = \sqrt{x - x^2}$

2. Die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seien rekursiv definiert durch

$$f_1(x) = f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{und} \quad f_{n+1}(x) := f(f_n(x)), n \in \mathbb{N}.$$

(a) Man finde eine explizite Formel für $f_n(x)$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ berechne man den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} f_n(x)$.

3. Ausgehend von den bekannten Additionstheoremen für $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$ beweise man:

(a) $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$

(b) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

(c) Aus (b) folgere man $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

4. Man weise folgende Rechenregeln für die Hyperbelfunktionen nach.

(a) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

(b) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

(c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(d) $(\cosh x + \sinh x)^k = \cosh kx + \sinh kx$, ($k \in \mathbb{N}$)

Hinweise:

1.(a) Die Zahl 1 ist nach Definition *keine* Primzahl.

2.(a) Man berechne einige Funktionen, stelle eine Vermutung über $f_n(x)$ auf und beweise diese durch vollständige Induktion.

4.(a) $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$, $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$

Abgabe: Dienstag, 3. Juni 2003, vor der Vorlesung