Übungsaufgaben Analysis - 5. Serie

1. Man weise die Konvergenz der folgenden Reihen nach und berechne ihre Summe.

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$ (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k}$ (c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{6^k+1}{7^k}$

2. Durch Berechnung der Partialsummen und Grenzübergang bestimme man die Summen der folgenden Reihen.

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

3. Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz.

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^3\, 2^{-k}$ (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+1}{4^k+1}$ (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k-2}$

4. (*Zusatzaufgabe*)

   Die Eulersche Zahl e ist definiert als $e := \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.
   (Die Existenz dieses Grenzwerts wurde in der Vorlesung bewiesen.)
   Man zeige:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,.$$

Hinweise:
zu 1: geometrische Reihe
zu 2: Bei (a) benutze man die Identität

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\,.$$

Bei (b) und (c) führen ähnliche Umformungen zum Ziel.
zu 3: Vergleichskriterium und bekannte Reihen benutzen
zu 4: Eine Anleitung zu dieser Aufgabe findet man in:
H. Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Aufg. 26.1., S. 171f.

Abgabe: Dienstag, 20. Mai 2000, vor der Vorlesung