Übungsaufgaben Analysis - 4. Serie

1. Gegeben seien eine reelle Zahl $a > 0$, eine natürliche Zahl $k \geq 2$ und die Funktion
$$f(x) = \frac{1}{k}\left(\frac{a}{x^{k-1}} + (k-1)x\right), \quad x > 0.$$
   (a) Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$,
$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n \in \mathbb{N},$$
   für jeden Startwert $x_0 > 0$ konvergiert.

   (b) Man berechne $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

   (c) Mit Hilfe eines (Taschen-)Rechners berechne man für $a = 2, k = 3$ und den Startwert $x_0 = 1$ die Folgenglieder $x_1, \ldots, x_6$.

   Hinweis: Der Spezialfall $k = 2$ war ein Beispiel aus der Vorlesung.

2. Man bestimme alle Häufungspunkte der Folgen (a_n) und berechne jeweils $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

   (a) $a_n = (-1)^n/n$

   (b) $a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n} + n^{20} \cdot 2^{-n}$

   (c) $a_n = \begin{cases} 1 + 3^{-n} & \text{, falls } \; n = 3k \\ \frac{2n}{n+4} & \text{, falls } \; n = 3k+1 \\ 5 & \text{, falls } \; n = 3k+2 \end{cases}$

3. Man konstruiere Folgen (a_n) und (b_n) mit den folgendenEigenschaften:

   (a) Die Menge der Häufungspunkte von (a_n) ist gleich $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

   (b) Es gilt $\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n = 1$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n = \infty$.

4. *(freiwillige Zusatzaufgabe)* Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige beschränkte Folge und bezeichne $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ die Folge ihrer Mittelwerte,
$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad .$$
   Man beweise: $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} s_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} s_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

   Hinweis: Es genügt, die erste Ungleichung zu zeigen. (Warum?)

Abgabe: Dienstag, 13. Mai 2003, vor der Vorlesung

Termin der Prüfungsklausur "Analysis 1":
Samstag, 19. Juli 2003, Beginn 8.00 Uhr im Hörsaal 13