Torische Varietäten

Vorlesung im Wintersemester 2007

Bezeichnungen

[D] der Weil-Divisor zum Cartier-Divisor D, vgl. A2.4.3.

A_σ := $\mathbb{C}[S_\sigma]$ Koordinatenring der affinen torischen Varietät zum Kegel σ, vgl. 1.2.2.

$\mathbb{A}^n$ der n-dimensionale affine Raum, vgl. A1.1.1

CaDiv(X) die Gruppe der Cartier-Divisoren von X, vgl. A2.4.3

CaP(X) die Gruppe der Cartier-Divisoren von X, welche Hauptdivisoren sind, vgl. A2.4.3.

D(f) offene Hauptmenge zur regulären Funktion f, vgl. A1.1.2.

dim σ Dimension des Kegels σ, vgl. 1.1.2.

Dom(r) Definitionsbereich der rationalen Funktion r (vgl. A1.2.2) bzw. der rationalen Abbildung r (vgl. A1.2.3).

|Δ| der Träger des Fächers Δ, vgl. 1.3.1.

Δ ein Fächer im Gitter N, vgl. 1.3.1.

f* der Komorphismus, der durch die reguläre oder rationale Abbildung f auf den Koordinatenringen bzw. rationale Funktionenkörpern induziert wird, vgl. A1.1.4 bzw. A1.2.3.

$\mathbb{F}_a$ a-te Hirzebruch-Fläche, vgl. 1.3.12.

I(X) das Ideal der Menge X im afinen Raum, vgl. A1.1.1

Im(f) Bild der rationalen Abbildung f, vgl. A1.2.3.

k ein algebraisch abgeschlossener Körper, außer im Anhang is k = $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen, vgl. A1.1.1

k[X] Koordinatenring der über k definierten algebraischen Menge X, vgl. A1.1.3.

k(X) Körper der rationalen Funktionen auf der irreduziblen affinen algebraischen Menge X, vgl. 1.2.2.

$m_{X,Y}$ das maximale Ideal des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,Y}$, vgl. A2.4.2.

N ein Gitter, vgl. 1.1.2.

rk N der Rang des Gitters N, vgl. 1.1.2.

$\mathcal{O}_{X,Y}$ lokaler Ring von X entlang dem Primdivisor Y, vgl. A2.4.2.

Pic(X) die Picrad-Gruppe von X, vgl. A2.4.3.

$\mathbb{P}^n$ n-dimensionaler projektiver Raum, vgl. 0.

$\mathbb{R}\cdot\sigma$ der vom Kegel σ erzeugte $\mathbb{R}$-lineare Unterraum von V, vgl. 1.1.2.

S_σ die endlich erzeugte Halbgruppe zum rationalen konvexen polyedralen Kegel σ, vgl. 1.1.10

σ ein Kegel von V, meistens konvex, polyedral und rational, vgl. 1.1.2.

$\check{\sigma}$ Dual des Kegels σ, vgl. 1.1.2.

Spec k[X] Menge der Primideale des Koordinatenrings k[X] der algebraischen Menge X, vgl. A1.3.3.

U_i i-te offene Menge der Standard-Überdeckung des projektiven Raums, vgl. 0.

V der von Gitter N erzeugte reelle Vektorraum, vgl. 1.1.2.

V(M) die durch die Polynom-Menge definierte algebraische Menge, vgl. A1.1.1

$\check{V}$ Dual des reellen Vektorraums V, vgl. 1.1.2

X(Δ) die torische Varietät zum Fächer Δ, vgl. 1.3.2

X(R) Menge der Punkte der algebraischen Menge X mit Koordinaten in der Algebra R, vgl. A1.3.2.

X_f die Menge der Punkte der affinen algebraischen Varietät X, in denen die reguläre Funktion f ungleich Null ist, vgl. Bemerkung 1.1.4(viii).

0. Zum Gegenstand der Vorlesung

Der n-dimensionale komplexe projektive Raum

$$\mathbb{P}^n = \{ [x_0, x_1, \dots, x_n] \mid (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{(0,0,\dots,0)\}\}$$

der Geraden

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] = \mathbb{C}\cdot(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

durch den Ursprung des $\mathbb{C}^{n+1}$ läßt sich als Vereinigung

$$\mathbb{P}^n = \cup_{i=0}^n U_i$$

von Mengen

$$U_i = \{ [x_0, x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$$

schreiben, von denen sich jede mit dem $\mathbb{C}^n$ identifizieren läßt:

$$U_i \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n, [x_0, x_1, \dots, x_n] \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}).$$

Man kann sich den $\mathbb{P}^n$ als das Ergebnis eines Verheftungsprozesses der von gewissen affinen Räumen ausgeht und gewissen Punkte dieser Räume miteinander identifiziert.

Konstruktionen dieser Art sind in der Mathematik weit verbreitet: Mannigfaltigkeiten entstehen auf diese Weise aus offenen Teilmengen affiner Räume.

Wir wollen hier eine Konstruktion beschreiben, welche auf diese Weise algebraische Varietäten aus affinen algebraischen Varietäten gewinnt, sogenannte torische Varietäten (welche in der frühen Theorie dieser Varietäten auch Toruseinbettungen genannt werden).

Torischen Varietäten werden aus affinen Varietäten durch Verheftung mit Hilfe gewisser kombinartorischer Daten gewonnen. Sie sind wichtige Testobjekte in ganz unterschiedlichen Gebieten der Mathematik bei der Überprüfung von allgemeinen Vermutungen. Sie zeichnen dadurch aus, daß man fast alle Berechnungen im Zusammenhang mit diesen Varietäten explizit ausführen.

Wir beginnen mit der Beschreibung der kombinatorischen Daten, durch welche diese Varietäten definiert sind.

1. Definitionen und Beispiele

1.1 Konvexe polyedrale Kegel

1.1.1 Vorbemerkung

Wir geben hier einige grundlegende Eigenschaften konvexer polyedraler Kegel an, die wir benötigen werden. Diese Ergebnisse kann man in ihrer natürlichen Allgemeinheit in jedem Buch über Konvexittät finden, die Beweis im polyedralen Fall sind jedoch so einfach, daß es fast genau so leicht ist, sie zu beweisen wie sie zu zitieren. Wir geben auch deshalbb die Beweise an, weil diese zeigen, wie man die Erzeuger der Halbgrupppen finden kann, was wir für die wirklichen Berechnungen brauchen.

1.1.2 Definition: konvexer polyedraler Kegel
Sei

$$N$$

ein Gitter, d.h. eine endlich erzeugte freie abesche Gruppe. Mit anderen Worten, N soll isomorph sein zu einer einer direkten Summe von Exemplaren von $\mathbb{Z}$. Die Anzahl dieser Exemplare heißt Rang des Gitters und wird mit

$$\operatorname{rk} N$$

bezeichnet. Weiter sei

$$V := N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

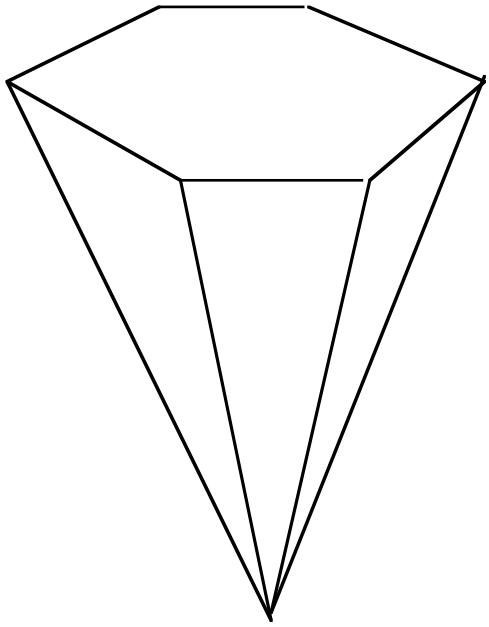
der vom Gitter N erzeugte reelle Vektorraum und

$$V^{\check{}} := \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$$

der zugehörige duale Vektorraum.

Ein konvexer polyedraler Kegel ist eine Menge der Gestalt

$$\sigma = \{r_1 v_1 + \dots r_s v_s \in V \mid r_i \geq 0\}$$



mit endlich vielen Vektoren $v_1, \dots, v_r \in V$, welche Erzeuger des Kegels V heißen. Manchmal spricht man auch von den aus den positiven Vielfachen der v_i bestehenden Strahlen als von den Erzeugern des Kegels. Die Dimension des linearen Unterraums, der von den Vektoren von σ erzeugt wird, heißt auch Dimension von σ und wird mit

$$\dim \sigma := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \cdot \sigma = \dim_{\mathbb{R}} \sigma + (-\sigma).$$

bezeichnet.

Für jede Teilmenge $\sigma \subseteq V$ heißt die Menge

$$\sigma^{\check{}} := \{ u \in V^{\check{}} \} \mid \langle u, v \rangle \geq 0 \text{ für jedes } v \in \sigma \}$$

Dual von σ. Die Elemente des Duals heißen auch Stützhyperebenen von σ. Eine Seite eines Kegels σ ist definiert als eine Menge der Gestalt

$$\sigma \cap u^{\perp} = \{v \in \sigma \mid \langle u, v \rangle = 0\},$$

d.h. als Durchschnitt von σ mit einer Stützhyperebene. Der Kegel selbst ist eine Seite von sich selbst.[1] Alle übrigen Seiten heißen echte Seiten des Kegels. Eine Fasette ist definiert als eine Seite der Kodimension 1.[2]

Bemerkungen

(i) Man beachte, jeder ganz im Kegel σ liegende lineare Unterraum liegt auch ganz in jeder Seite von σ.[3]

(ii) Wir werden bald eine duale Beschreibung dieser Kegel als Durchschnitt von Halbräumen kennenlernen.

(iii) Alle nachfolgenden Betrachtungen basieren auf der folgenden Tatsache aus der Theorie der konvexen Mengen.

Beispiel

Im zwei-dimensionalen Fall wird jeder Kegel, der keine Gerade enthält von zwei Vektoren erzeugt: seien

$$N = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

d.h.

$$V = \mathbb{R}^2$$

und

$$\sigma \subseteq V$$

ein Kegel, der keine Gerade enthält. Für je drei Erzeugende v_i , v_j und v_k von σ besteht dann eine Relation

$$\alpha \cdot v_i + \beta \cdot v_j + \gamma \cdot v_k = 0 \text{ mit } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Falls die Koeffizienten sämtlich dasselbe Vorzeichen besitzen, ist das Negative eines der Erzeugenden eine nicht-negative Linearkombination der beiden anderen, d.h. eine ganze Gerade liegt in σ im Widerspruch zur Annahme. Also treten unter den Koeffizienten unterschiedliche Vorzeichen auf. Damit besteht eine Relation der Gestalt

$$v_i = \alpha \cdot v_j + \beta \cdot v_k \text{ mit } \alpha \geq 0 \text{ und } \beta \geq 0,$$

eines der Erzeugenden kann weggelassen werden.

1.1.3 Eine grundlegende Eigenschaft der konvexen polyedralen Kegel

Seien σ ein konvexer polyedraler Kegel und v ein Punkt, der nicht in σ liegt. Dann gibt es einen Punkt $u \in \check{\sigma}$ mit $\langle u, v \rangle < 0$.

Wir wollen diese Aussage hier nicht beweisen. Sie ist eine Konsequenz der allgemeineren Aussage der konvexen Geometrie, daß es für je zwei disjunkte konvexe Mengen eine Hyperebene gibt mit der Eigenschaft, daß die eine konvexe Menge ganz auf der einen und die andere konvexe Menge ganz auf der anderen Seite der Hyperebenen liegt. Siehe zum Beispiel [Berger, Teil 3, Kapitel 11, Folgerung 11.4.4]

Wir geben hier einige Konsequenzen dieses Ergebnisses an.

---

[1] Mit $u = 0$.

[2] Jede echte Seite wird durch eine Stützhyperebene $u \neq 0$ definiert, liegt also ganz in einem linearen Unterraum der Kodimension 1. Eine Fasette ist somit eine echte Seite maximaler Dimension.

[3] Seien $W \subseteq \sigma$ ein linearer Unterraum und $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ eine Seite von σ. Für jedes $w \in W$ gilt dann

$$\langle u, w \rangle \geq 0$$

(weil w in σ liegt und u Stützhyperebene ist). Nun liegt aber auch -w in W, d.h. es besteht auch die umgekehrte Ungleichung. Also gilt

$$\langle u, w \rangle = 0,$$

d.h. $w \in \sigma \cap u^{\perp} = \tau$.

1.1.4 Folgerungen

(i) Dualitätssatz: Jeder konvexe polyedrale Kegel σ ist gleich seinem doppelten Dual:

$$\sigma^{\vee\vee} = \sigma.$$

(ii) Jede Seite $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ eines konvexen polyedralen Kegels σ ist ebenfalls ein konvexer polyedraler Kegel. Sie wird als Kegel erzeugt von denjenigen v_i aus einer Erzeugermenge von σ, die der Bedingung

$$< u, v_i > = 0$$

genügen. Insbesondere ist die Anzahl der Seiten von σ endlich.

(iii) Jeder Durchschnitt von Seiten ist eine Seite.

(iv) Jede Seite τ' einer Seite τ des konvexe polyedralen Kegels σ ist eine Seite von σ.

(v) Jede echte Seite liegt ganz in einer Fasette. Jede Seite der Kodimension 2 ist Durchschnitt von genau zwei Fasetten.

(vi) Jede echte Seite ist gleich dem Durchschnitt aller Fasetten, in denen sie enthalten ist.

(vii) Der Rand (des Inneren) eines Kegels σ, der den Vektorraum V aufspannt ist gleich der Vereinigung seiner echten Seiten (oder Fasetten).

(viii) Sei σ ein Kegel, der den Vektorraum V aufspannt. Für jede Fasette τ von σ ist dann die Stützhyperebene u mit

$$\tau = \sigma \cap u^{\perp}$$

bis auf positive reelle Vielfache eindeutig bestimmt. Wir bezeichnene eine dieser Stützhyperebenen mit

$$u_\tau := u.$$

Der Durchschnitt aller zugehörigen Halbräume

$$H_\tau := \{ v \in V \mid < u_\tau , v > \geq 0\},$$

wobei τ die Fasetten von σ durchläuft, ist gleich σ.

(ix) Das Dual eines konvexen polyedralen Kegels σ ist wieder ein konvexer polyedraler Kegel.

Im Fall $\mathbb{R}\cdot\sigma = V$ bilden die Stützhyperebenen u_τ zu den Fasetten τ von σ ein Erzeugendensystem des dualen Kegels $\sigma^{\vee}$.

Beweis. Zu (i). Unmittelbar aus der Definition des Duals folgt

$$\sigma \subseteq \sigma^{\vee\vee}.$$

Angenommen die Enthaltenseinsrelation ist echt, d.h. es gibt ein

$$v \in \sigma^{\vee\vee} - \sigma .$$

Nach 1.2.2 gibt es dann ein $u \in \sigma^{\vee}$ mit

$$< u, v > < 0 .$$

Dann kan aber v nicht im Dual von $\sigma^{\vee}$ liegen.

Zu (ii). Sei $v_1 , ..., v_s$ eine Menge von Erzeugenden des Kegels σ. Dann gilt

$$< u , v_i > \geq 0$$

für jedes i. Für nicht-negative reelle Koeffizienten $r_1 , ..., r_s$ gilt deshalb

$$< u, r_1 v_1 + ... + r_s v_s > = 0 \Leftrightarrow r_i = 0 \text{ für jedes i mit } < u , v_i > \neq 0.$$

Jeder Punkt von $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ ist deshalb nicht-negative Linearkombination der v_i mit $< u , v_i > = 0$. Umgekehrt liegt jede solche Linearkombination trivialerweise in τ. Deshalb ist τ ein Kegel mit der beschriebenen Erzeugendenmenge.

Zu (iii). Wir können uns auf die Betrachtung von zwei Seiten beschränken, da deren Anzahl endlich ist. Seien

$$\tau = \sigma \cap u^{\perp} \text{ und } \tau' = \sigma \cap u'^{\perp}\ ,\ u, u' \in \sigma^{\vee}$$

zwei Seiten. Dann gilt

$$\tau \cap \tau' = \sigma \cap (u+u')^{\perp},$$

d.h. wir erhalten wieder eine Seite.
Zu (iv). Seien

$$\tau = \sigma \cap u^{\perp} \text{ und } \tau' = \tau \cap u'^{\perp} \text{ mit } u \in \sigma^{\vee} \text{ und } u' \in \tau^{\vee}.$$

Wir fixieren eine Menge $v_1, ..., v_s$ von Erzeugenden von σ. Aus

$$< u, v_i > = 0$$

folgt dann $v_i \in \tau$, also $< u', v_i > \geq 0$. Damit besteht für jedes i die Implikation

$$< u', v_i > < 0 \Rightarrow < u, v_i > > 0.$$

Es gibt deshalb eine (hinreichend große) positive reelle Zahl p mit

$$< u' + pu, v_i > \geq 0 \text{ für jedes } i = 1, ... ,s$$

und

$$< u' + pu, v_i > > 0 \text{ für jedes i mit } < u', v_i > < 0.$$

Mit anderen Worten, $u' + pu$ liegt für große reelle p in $\sigma^{\vee}$. Dann ist aber

$$\sigma \cap (u' + pu)^{\perp} = \sigma \cap u^{\perp} \cap u'^{\perp} = \tau \cap u'^{\perp} = \tau'$$

eine Seite von σ.
Zu (v). Sei

$$\tau = \sigma \cap u^{\perp}\ ,\ u \in \sigma^{\vee},$$

eine Seite des Kegels σ einer Kodimension > 1, Es reicht zu zeigen, daß dann τ in einer größeren Seite liegt.[4]

Wir können den Vektorraum V durch den von σ erzeugten linearen Unterraum ersetzen und somit annehmen, σ erzeugt V.

Seien $v_1,...,v_s$ Erzeugende des Kegels σ und sei

$$W$$

der von τ erzeugte lineare Unterraum von V. Wir führen auf V ein positiv definites Skalarprodukt ein und betrachten die zugehörige orthogonale Zerlegung

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Dann liegen die Bilder

$$\overline{v}_i := p(v_i)$$

der v_i bei der zugehörigen orthogonalen Projektion

$$p: V \rightarrow W^{\perp}$$

im durch u definierten Halbraum:[5]

---

[4] Aus der Beschreibung der Erzeugenden einer Seite in (ii) ergibt sich, daß diese größere Seite automatisch auch eine größere Dimension besitzt: jedes hinzukommende Erzeugende liegt außerhalb des von den alten Erzeugenden aufgespannten linearen Unterraums.

(1) $$< u, \bar{v}_i > = < u, v_i > \geq 0 \text{ für } i = 1,...,s.$$

Wir betrachten die Einschränkung $\bar{u}$ von u auf $W^\perp$ als Punkt von $(W^\perp)^\vee$ und bewegen diesen Punkt auf der Sphäre mit dem Mittelpunkt im Ursprung. Wenn wir $\bar{u}$ in den gegenüberliegenden Punkt auf der Sphäre bewegen, kehren sich alle Ungleichungen (1) um, d.h. auf einem beliebigen Weg von $\bar{u}$ zum gegenüberliegen Punkt auf der Sphäre, wird jedes der Skalarprodukte (1) einmal Null. Es gibt also einen Punkt von

$$\bar{u}' \in (W^\perp)^\vee - \{0\}$$

für welchen alle Ungleichungen (1) nach wie vor bestehen (mit $\bar{u}'$ anstelle von u), wobei jedoch eines der Skalarprodukte (1) Null wird, welches vorher ungleich Null war. Wir setzen die Linearform $\bar{u}'$ auf V fort, indem wir sie auf W gleich Null setzen. Wir erhalten so einen Punkt

$$\bar{u}' \in \sigma^\vee$$

mit

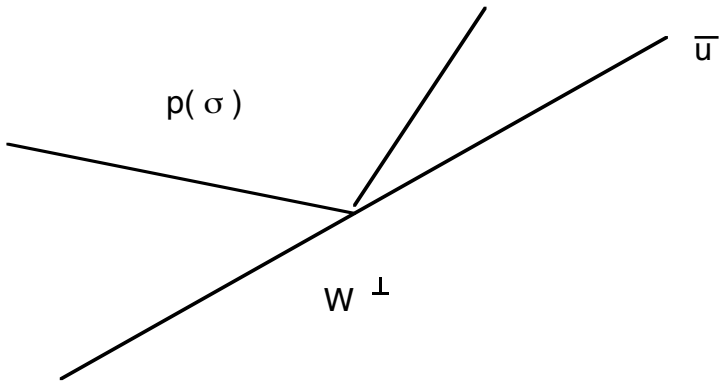
$$\tau \subseteq W \subseteq \bar{u}'^{,\perp}$$

wobei es außerdem ein v_i gibt mit

$$< u, v_i > > 0 \text{ und } < \bar{u}', v_i > = 0.$$

Die durch $\bar{u}'$ definierte Seite von σ enthält somit τ und ist echt größer als τ. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Ist τ von der Kodimension 2 in σ, so hat $W^\perp$ die Dimension 2. Der von den $\bar{v}_i$ erzeugte Kegel wird bereits von zwei Vektoren erzeugt, d.h. es gibt für $\bar{u}'$ genau zwei Möglichkeiten.[6] Daraus ergibt sich die zweite Aussage der Behauptung.



Zu (vi). Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach der Kodimension der echten Seite τ. Hat τ die Kodimension 1, so ist nichts zu beweisen: echt ineinander liegende Seiten haben unterschiedliche Kodimension (wegen (ii)). Hat τ die Kodimension 2, so wurde die Aussage bereits bewiesen (vgl. (v)). Sei jetzt τ von einer Kodimension > 2. Nach (v) liegt τ ganz in einer Fasette, sagen wir

---

[5] $\bar{v}_i$ und v_i underscheiden sich um einen Vektor aus W. Da W von τ erzeugt wird, gilt $W \subseteq u^\perp$, d.h. das Skalarprodukt von u mit diesem Vektor ist Null.

[6] $p(\sigma)$ liegt in der durch $\bar{u}$ definierten Halbebene von $W^\perp = \mathbb{R}^2$, ist aber von dieser Halbebene verschieden (da einige der v_i nicht in τ liegen).

$$\tau \subseteq \sigma.$$

Als Seite von σ hat τ eine kleinere Kodimension. Nach Induktionsvoraussetzung ist τ Durchschnitt der Fasetten von σ, in denen τ vollständig enthalten ist. Jede dieser Fasetten ist ihrersetis (nach (v)) Durchschnitt von je zwei Fasetten des Ausgangskegels. Also ist τ Durchschnitt von Fasetten.

Zu (vii). Es reicht, die Aussage hinsichtlich der Seiten zu beweisen. Die entsprechende Aussage hinsichtlich der Fasetten ergibt sich dann aus (v).

Sei v ein Punkt auf einer echten Seite von σ, sagen wir

$$v \in \sigma \cap u^{\perp}.$$

Dann gibt es in beliebiger Nähe von v Punkte, die nicht auf der Stützhyperebene $u^{\perp}$ liegen, d.h. es gibt in beliebiger Nähe Punkte des Komplements. Also ist der Punkt v ein Randpunkt des Kegels σ.

Zeigen wir, er ist auch ein Randpunkt des Innern von σ. Weil der Kegel σ den Vektorraum V erzeugt, besitzt er innere Punkte.[7] Sei v_0 ein solcher innerer Punkt. Dann ist aber auch jeder Punkt auf der offenen Strecke $\overline{v\,v_0}$ ein innerer Punkt, d.h. es gibt in beliebiger Nähe von v innere Punkte von σ. Insbesondere ist v ein Randpunkt des Inneren von σ.

Sei jetzt umgekehrt v ein Randpunkt von v. Dann gibt es eine Folge

$$\{w_i\}$$

von Punkten

$$w_i \in V - \sigma$$

mit

(2) $$w_i \to v.$$

Nach 1.1.3 gibt es für jedes i eine Stützhyperebene $u_i \in \sigma^{\vee}$ mit

(3) $$< u_i , w_i > < 0.$$

Wir können annehmen, die Vektoren u_i liegen auf einer Sphäre um den Ursprung, d.h. auf einer kompakten Menge. Eine Teilfolge der u_i konvergiert. Wir können annehmen, daß die Folge der u_i sellbst schon konvergiert, sagen wir

$$u_i \to u.$$

Weil $\sigma^{\vee}$ abgeschlossen ist, ist u eine Stützhyperebene,

$$u \in \sigma^{\vee}.$$

Wegen (2) und (3) gilt

$$< u, v > \leq 0.$$

Weil v ein Punkt von σ ist, gilt dann aber sogar das Gleichheitszeichen, d.h. v liegt auf der echten Seiten

$$\sigma \cap u^{\perp}.$$

Zu (viii). Die Eindeutigkeitsaussage bezüglich u_τ folgt aus der Tatsache, daß jede Fasette einen linearen Unterraum der Kodimension 1 erzeugt. Die Gleichungen dieses Unterraums sind bis aufs Vorzeichen gerade die zugehörigen Stützhyperebenen.

Beweisen wir die behauptete Identität

---

[7] Jede positive Linearkombination der Erzeuger ist ein innerer Punkt.

$$\sigma = \bigcap_{\tau \text{ Fasette von } \sigma} H_\tau .$$

Da jedes u_τ nach Definition eine Stützhyperebene von σ ist, gilt "$\subseteq$". Angenommen diese Ungleichung wäre echt. Dann gibt es einen Punkt

$$v \in \bigcap H_\tau - \sigma.$$

Wir fixieren einen Punkt aus dem Inneren von σ, sagen wir

$$v' \in \operatorname{Int} \sigma ,$$

und bewegen uns auf der Strecke von v' nach v. Bezeichne

$$w \in \sigma , w = \alpha v + \beta v', \alpha>0 \text{ und } \beta>0,$$

den letzten Punkt auf dieser Strecke, der noch in σ liegt. Dann ist w ein Randpunkt, liegt also auf einer Fasette, sagen wir τ,

$$w \in \sigma \cap (u_\tau)^\perp.$$

Weil v' im Innern von σ liegt, gilt

$$< u_\tau , v' > > 0,$$

und nach Konstruktion ist $< u_\tau , w > = 0$. Also muß

$$< u_\tau , v > < 0$$

gelten. Das steht aber im Widerspruch dazu, daß v im Halbrauch H_τ liegen soll.

Zu (ix). Sei σ ein konvexer polyedraler Kegel. Wir behandeln zunächst den Fall, daß σ den Vektorraum V erzeugt,

1. Fall. $\mathbb{R}\cdot\sigma = V$. Es reicht zu zeigen, $\sigma^\vee$ wird von den Stützhyperebenen u_τ erzeugt, wobei τ die Fasetten von σ durchlaufe. Trivialerweise gilt

$$\sigma^\vee \supseteq \{ \sum_{\tau \text{ Fasette von } \sigma} \lambda_\tau \cdot u_\tau \mid \lambda_\tau \geq 0 \}.$$

Angenommen, diese Inklusion ist echt. Wir wählen ein Element aus dem Dual

$$u \in \sigma^\vee,$$

welches nicht in der Menge rechts liegt. Die Menge rechts ist ein konvexer polyedraler Kegel. Nach 1.1.3 gibt es deshalb ein $v \in V$ mit

$$< u_\tau , v > \geq 0$$

für jede Fasette τ von σ und mit

$$< u, v > < 0.$$

Die ersten Ungleichungen bedeuten (nach (viii)), daß v in σ liegt,

$$v \in \sigma.$$

Dann kann aber die letzte Ungleichung nicht gelten (da u eine Stützhyperebene sein soll). Dieser Widerspruch zeigt, daß die obige Inklusion nicht echt sein kann, d.h. daß die Behauptung gilt.

2. Fall. Wir haben noch den Fall zu betrachten, daß σ einen echten linearen Unterraum von V erzeugt,

$$W := \mathbb{R}\cdot\sigma , \dim W < \dim V.$$

Dann wird $\sigma^\vee$ erzeugt von den u_τ und dem orthogonalen Komplement $W^\perp$ von W in $V^\vee$. Um das einzusehen, beachten wir zunächst, daß trivialerweise

$$(4) \qquad \sigma^\vee \supseteq \{ \sum_{\tau \text{ Fasette von } \sigma} \lambda_\tau \cdot u_\tau \mid \lambda_\tau \geq 0 \} + W^\perp$$

gilt. Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Sei

$$u \in \sigma^{\check{}} \subseteq V^{\check{}} =^{8} W^{\check{}} \oplus W^{\perp}$$

beliebig. Wir schränken die Linearform u: $V \to \mathbb{R}$ auf den Unterraum W ein. Nach dem ersten Fall ist diese Einschränkung eine nicht-negative Linearkombination der (auf W eingeschränkten) u_τ. Das Element u selbst ist somit bis auf Elemente aus $W^{\perp}$ eine nicht-negative Linearkombination der u_τ, d.h. ein Element der rechten Menge von (4).

QED.

1.1.5 Ein Algorithmus zur Bestimmung der Erzeugenden des Duals

Sei $\sigma \subseteq V$ ein konvexer polyedraler Kegel der Dimension n mit den Erzeugenden

$$v_1, \ldots, v_s.$$

Für je n-1 linear unabhängige Elemente der Menge der v_i wähle man ein $u \in V^{\check{}}$, welches in diesen Elementen Null ist. Hat u in allen übrigen v_i, in denen es ungleich Null ist, dasselbe Vorzeichen, so nehme man u in die Menge der gesuchten Erzeuger von $\sigma^{\check{}}$ auf, andernfalls nicht. Dabei ändere man, falls nötig, das Vorzeichen von u so ab, daß gilt

$$u \in \sigma^{\check{}}.$$

Schließlich füge man zu der konstruierten Menge noch ein Erzeugendensystem einschließlich der Negativen dieses Erzeugendensystems des orthogonalen Komplements von $\mathbb{R}\cdot\sigma$ in $V^{\check{}}$ hinzu. Die so entstehende Menge erzeugt den Kegel $\sigma^{\check{}}$.

Beweis. Auf Grund der Beschreibung eines Erzeugendensystems von $\sigma^{\check{}}$ im Beweis von 1.1.4 (ix) genügt es zu zeigen, daß die oben beschriebenen Orthogonalen zu je n-1 linear unabhängigen Erzeugenden v_i gerade die zu den Fasetten τ von σ gehörigen Stützhyperebenen u_τ sind.

Wegen 1.1.4 (ii) enthält jede Fasette τ von σ jeweils n-1 linear unabhänge der v_i und die zu diesen v_i orthogonalen Vektoren genügen der im Algorithmus beschriebenen Vorzeichenbedingung. Wir erhalten also auf diese Weise alle Erzeugenden von $\sigma^{\check{}}$.
Umgekehrt liegen alle im Algorithmus konstruierten Vektoren trivialerweise in $\sigma^{\check{}}$.
QED.

1.1.6 Eine duale Beschreibung der konvexen polyedralen Kegel

Ein konvexer polyedraler Kegel ist dasselbe wie ein Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen.

Beweis. Sei σ ein konvexer polyedraler Kegel. Dann ist σ nach 1.1.4 (viii) Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen.
Sei σ umgekehrt Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen,

$$\sigma = \{v \in V \mid \langle u_1, v\rangle \geq 0\} \cap \ldots \cap \{v \in V \mid \langle u_s, v\rangle \geq 0\}$$

---

[8] Die Einschränkung auf W definiert eine Surjektion $V^{\check{}} \to W^{\check{}}$ mit dem Kern $W^{\perp}$. Wir fixieren einen Schnitt dieser Surjektion und erhalten so eine direkte Zerlegung.

mit $u_1, \ldots, u_s \in V^\vee$. Dann ist σ das Dual des von den u_i erzeugten Kegels, also nach 1.1.4 (ix) selbst ein Kegel.
QED.

1.1.7 Summe und Durchschnitt von Kegeln

(i) Der Durchschnitt von endlich vielen konvexen polyedralen Kegeln ist ein konvexer polyedraler Kegel.

(ii) Die Summe zweier Kegel. Seien τ' und τ'' zwei konvexe polyedrale Kegel des Vektorraums V. Dann heißt

$$\tau'+\tau'' = \{v'+v'' \mid v' \in \tau' \text{ und } v'' \in \tau''\}$$

Summe der beiden Kegel τ' und τ''. Dies ist offensichtlich wieder ein konvexer polyedraler Kegel. Außerdem gilt

$$(\tau'+\tau'')^\vee = (\tau')^\vee \cap (\tau'')^\vee$$

und

$$(\tau' \cap \tau'')^\vee = (\tau')^\vee + (\tau'')^\vee$$

Beweis. Zu (i). Folgt unmittelbar aus 1.1.6.
Zu (ii). Weil $\tau'+\tau''$ ein Kegel ist, folgt nach 1.1.4 (ix):

$$\tau'+\tau'' = (\tau'+\tau'')^{\vee\vee}.$$

Nun ist eine Linearform u genau dann eine Stützhyperebenen von $\tau'+\tau''$, wenn sie eine von τ' und eine von τ'' ist, d.h. es gilt

$$(\tau'+\tau'')^\vee = ((\tau')^\vee \cap (\tau'')^\vee).$$

Dies ist gerade die erste der zu beweisenden Identitäten. Durch Dualisieren erhält man

(1) $$\tau'+\tau'' = ((\tau')^\vee \cap (\tau'')^\vee)^\vee.$$

Die Identität (1) bleibt richtig, wenn man die Kegel τ' und τ'' durch deren Duale ersetzt. Auf diese Weise erhalt man die zweite zu beweisende Identität.
QED.

1.1.8 Definition: rationale Kegel

Ein konvexer polyedraler Kegel σ von $V = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ heißt rational, wenn er ein Erzeugendensystem besitzt, dessen Vektoren sämtlich im Gitter N liegen.

1.1.9 Das Dual eines rationalen Kegels

Das Dual eines rationalen Kegels ist wieder ein rationaler Kegel (bezüglich des dualen Gitters $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$).

Beweis. Wir verwenden die Tatsache, daß die Lösungen eines linearen Gleichungssystems mit Koeffizienten aus einem Körper K Linearkombinationen von Vektoren sind mit Koordinaten aus diesem Körper. Wir fixieren dazu eine Basis von V, welche gleichzeitig Basis des Gitters N ist. Der Raum V wird dadurch mit einem $\mathbb{R}^n$ identifiziert und das Gitter mit der Menge der Vektoren mit ganzzahligen Koordinaten.

Nach 1.1.5 kann man für den dualen Kegel Erzeuger finden, die als Lösungen von homogenen Gleichungssystem auftreten, deren Koeffizienent gerade die Koordinaten der Erzeuger des Ausgangskegel sind, d.h. man hat ganzzahlige Koeffizienten. Die gesuchten Lösungen haben damit rationale Koordinaten. Durch Übergang zu ganzzahligen Vielfachen erhält man wieder ganzzahlge Vektoren.
QED.

1.1.10 Lemma von Gordon

Sei σ ein rationaler konvexer polyedraler Kegel. Dann ist

$$S_\sigma := \sigma^\vee \cap M$$

eine endlich erzeugte Halbgruppe.

Beweis. Wir wählen ein System von Erzeugern

$$u_1, \ldots, u_s \in \sigma^\vee \cap M$$

des dualen Kegels $\sigma^\vee$, die sämlich im Gitter M = Hom (N, $\mathbb{Z}$) liegen. Dann ist die Menge

$$K := \{ \sum_i t_i u_i \mid 0 \le t_i \le 1\}$$

kompakt. Weil M diskret ist, ist damit

$$K \cap M \text{ endlich.}$$

Erst recht ist damit auch

$$\sigma^\vee \cap K \cap M$$

endlich. Es reicht zu zeigen, diese Menge erzeugt zusammen mit den u_i die Halbgruppe

$$\sigma^\vee \cap M.$$

Sei $u \in \sigma^\vee \cap M$. Dann kann man u als nicht-negative reelle Linearkombination der u_i schreiben. Indem wir u modolo einer nicht-negativen ganzzahligen Linearkombination der u_i abändern, erreichen wir, daß die Koeffizienten zwischen Null und Eins liegen, also u ein Element von $\sigma^\vee \cap K \cap M$ ist.
QED.

1.1.11 Existenz innerer Gitterpunkte

Wir werden oft vor der Aufgabe stehen, einen Punkt im relativen Innern eines Kegels σ zu finden, d.h. im Innern von σ in Bezug auf den von σ erzeugten linearen Unterraum $\mathbb{R}\cdot\sigma$. Man erhält einen solchen Punkt, indem man ein Erzeugendensystem von σ fixiert, unter den Erzeugern dim(σ) linear unabhängige auswählt und von diesen eine positive Linearkombination bildet.

Ist der Kegel rational, so kann man insbesondere einen inneren Punkt finden, der ein Gitterpunkt ist.

1.1.12 Die Seitenrelationen beim Dualisieren

Seien σ ein konvexer polyedraler Kegel von V und τ eine Seite von σ. Dann ist

$$\sigma^\vee \cap \tau^\perp$$

eine Seite von $\sigma^\vee$ mit

$$\dim(\tau) + \dim(\sigma^\vee \cap \tau^\perp) = \dim V.$$

Die Abbildung

$$\text{(1)} \qquad \{\text{Seiten von } \sigma\} \to \{\text{Seiten von } \sigma^\vee\}, \tau \mapsto \sigma^\vee \cap \tau^\perp,$$

ist eine selbstinverse Bijektion, welche die Halbordnung "⊆" umkehrt. Die kleinste Seite von σ ist

$$\sigma \cap (-\sigma).$$

Beweis. 1. Schritt: Die Abbildung (1) ist wohldefiniert.
Für jede Seite τ von σ gilt

$$\tau \subseteq \sigma = \sigma^{\vee\vee},$$

d.h. τ besteht aus Stützhyperebenen von $\sigma^\vee$, d.h. $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ ist Durchschnitt von Seiten von $\sigma^\vee$, also Seite von $\sigma^\vee$ (nach 1.1.4 (iii)). Die Abbildung (1) ist somit wohldefiniert, d.h. sie bildet die angegebenen Mengen ineinander ab.

2. Schritt: die Abbildung (1) ist surjektiv.
Die Seiten von $\sigma^\vee$ sind gerade die Kegel der Gestalt

$$\sigma^\vee \cap v^\perp \text{ mit } v \in \sigma^{\vee\vee} = \sigma.$$

Betrachten wir jetzt σ als disjunkte Vereinigung der relativen Inneren der Seiten von σ (vgl. 1.1.4 (vii)). Sei τ die Seite von σ, die den Punkt v als relativ innneren Punkt besitzt. Dann gilt mit $\tau \subseteq \sigma$ auch $\sigma^\vee \subseteq \tau^\vee$, also

$$\sigma^\vee \cap v^\perp = \sigma^\vee \cap \tau^\vee \cap v^\perp =^{9} \sigma^\vee \cap \tau^\perp.$$

Damit hat jede Seite von $\sigma^\vee$ die Gestalt $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$. Mit anderen Worten, die Abbildung (1) ist surjektiv.

3. Schritt. Die Abbildung (1) ist injektiv und selbstinvers.
Die Abbildung (1) kehrt offensichtlich die Enthaltenseinsrelationen um. Wir schreiben

$$\tau^* := \sigma^\vee \cap \tau^\perp.$$

Dann gilt[10]

(2) $$\tau \subseteq \tau^{**},$$

also $\tau^* \supseteq \tau^{***}$. Die umgekehrte Inklusion besteht aber auch (sie ist ein Spezialfall von (2)). Also gilt sogar

$$\tau^* = \tau^{***}.$$

Da die Abbildung (1) nach dem zweiten Schritt surjektiv ist,[11] folgt $\tau = \tau^{**}$ für jedes τ. Damit ist die Abbildung aber auch injektiv (und surjektiv und zu sich selbst invers).
4. Schritt. Beweis der Dimensionsformel.
Da die Abbildung (1) bijektiv und ordnungsumkehrend und selbstinvers ist, ist die kleinste Seite von σ gerade gleich

$$\sigma^{\vee *} = \sigma^{\vee\vee} \cap \sigma^{\vee\perp} =^{12} \sigma^{\vee\perp} =^{13} \sigma \cap (-\sigma).$$

Damit ist

$$\dim(\sigma \cap (-\sigma)) + \dim(\sigma^\vee) = \dim(\sigma^{\vee\perp}) + \dim(\sigma^\vee) = \dim V.$$

Mit anderen Worten, die Dimensionsformel der Behauptung ist richtig für die kleinste Seite $\tau = \sigma \cap (-\sigma)$ von σ. und damit auch für die größte Seite σ von σ.[14]

---

[9] Die Elemente der linken Seite bestehen aus Hyperebenengleichungen, die ≥ 0 sind auf τ und $= 0$ in einen inneren Punkt (nämlich in v). Sie müssen deshalb gleich Null sein auf ganz τ (da der innere Punkt positive Linearkombination der Erzeugenden ist), also in $\tau^\perp$ liegen.

[10] τ^* besteht aus allen Hyperebenengleichungen von $\sigma^\vee$, die auf τ identisch Null ist. Letztere sind auf τ gleich Null, d.h. die Punkte von τ liegen in τ^{**}.

[11] Jede Seite τ' von $\sigma^\vee$ ist von der Gestalt τ^*, d.h. es gilt

$$\tau' = \tau'^{**}$$

für jede Seite τ' von $\sigma^\vee$. Durch Übergang zum Dual folgt $\tau = \tau^{**}$ für jede Seite τ von σ.

[12] Die erste Menge links besteht aus allen Punkten, in denen gewisse Hyperebenengleichungen ≥ 0 sind, und die zweite Menge besteht aus den Punkten, in denen dieselben Gleichungen $= 0$ sind.

[13] $\sigma^{\vee\perp}$ besteht aus den Punkten von σ, in denen alle Stüttzhyperebenen $= 0$ sind, also aus allen Punkten x, für welche gilt $H(x) \geq 0$ und $H(/x) \leq 0$ für jede Stützhyperebene $H \in \sigma^\vee$. Mit anderen Worten,

$$\sigma^{\vee\perp} = \sigma^{\vee\vee} \cap (-\sigma^{\vee\vee}) = \sigma \cap (-\sigma).$$

Die Formel für allgemeines τ ergibt sich daraus, indem man τ in eine maximale Kette von Seiten von σ einbettet und diese mit der dualen Kette in $\sigma^\vee$ vergleicht.[15]
QED.
Bemerkung
Ist σ ein Kegel mit der Seite

$$\tau = \sigma \cap v^\perp \text{ , } v \in \sigma^\vee,$$

und $\tau^* \subseteq \sigma^\vee$ diejenige Seite von $\sigma^\vee$, welche den Punkt $v \in \sigma^\vee$ in ihrem relativen Innern enthält, so gilt[16]

$$\tau = \sigma \cap (\tau^*)^\perp \text{ und } \tau^* = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$$

1.1.13 Das Dual einer Seite

Sei σ ein konvexer polyedraler Kegel mit der Seite $\tau = \sigma \cap u^\perp$, $u \in \sigma^\vee$. Dann gilt

$$\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-u).$$

Beweis. Auf beiden Seiten der zu beweisenden Identiät stehen konvexe polyedrale Kegel. Es reicht deshalb zu zeigen, daß diese Kegel dasselbe Dual besitzen. Das Dual der Linken Seite ist τ. Das Dual der Rechten Seite ist

$$\sigma^{\vee\vee} \cap (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-u))^\vee =^{17} \sigma \cap u^\perp = \tau.$$

QED.

1.1.14 Die Seiten der rationalen konvexen polyedralen Kegel

Seien σ ein rationaler konvexer polyedraler Kegel und u ein Element von

$$S_\sigma := \sigma^\vee \cap M.$$

Dann ist die Seite

$$\tau := \sigma \cap u^\perp$$

ein rationaler konvexer polyedraler Kegel, und jede Seite von σ hat diese Gestalt. Außerdem gilt

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u).$$

Beweis. Sei τ eine Seite von σ. Dann gilt nach 1.1.12

$$\tau = \sigma \cap \tau^{*\perp} \text{ mit } \tau^* := \sigma^\vee \cap \tau^\perp.$$

Ist die Hyperflächengleichung u aus dem relativen Innern von τ^*, so ist u eine Linearkombination der Erzeuger von τ^*, wobei sämtliche Koeffizienten positiv sind. Deshalb ist u in einem Punkt von σ genau dann gleich Null, wenn alle diese Erzeuger in in diesem Punkt gleich Null sind:

---

[14] Die Dimensionsformeln in diesen beiden extremen Fällen sind identisch: bei der Abbildung τ a τ^* geht die größte Seite in die kleinste und die kleinste Seite in die größte über.

[15] Eine Vergrößerung der Dimension in der Ausgangskette entspricht eine Verkleinerung der Dimension in der dualen Kette (da die Abbildung (1) ordnungsumkehrende ist). Benachbarte Glieder in jeder der beiden Ketten unterscheiden sich in der Dimension um 1 (da Abbildung (1) bijektiv und selbstinvers ist).

[16] Die erste Identität ist gerade die im 2.Schritt bewiesene Aussage in dualer Formulierung. Die zweite ergibt sich aus der Tatsache, daß die in 1.1.12 konstruierte Abbildung selbstinvers ist.

[17] Wegen $u \in \sigma^\vee$ ist u in allen Punkten von σ nicht-negativ. Die Forderung ≤ 0 zu sein ist deshalb äquivalent zu Forderung = 0 zu sein.

$$\sigma \cap u^{\perp} = \sigma \cap \tau^{*\perp} = \tau$$

für jedes u aus dem relativen Innern von τ^*. Nun ist mit σ auch $\sigma^{\check{}}$ rational (vgl. 1.1.9). Dann ist aber auch die Seite τ^* von $\sigma^{\check{}}$ rational (nach 1.1.4 (ii)). Deshalb kann man für das innere Element u einen Gitterpunkt wählen. Damit hat jede Seite von σ die in der Behauptung beschriebene Gestalt.[18]

Wir haben noch die Identität am Ende der Behauptung zu beweisen. Trivialerweise gilt[19]

$$S_\tau \supseteq S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u).$$

Sei umgekehrt

$$w \in S_\tau = \tau^{\check{}} \cap M.$$

Wie wir gesehen haben ist τ von der Gestalt $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ mit $u \in S_\sigma := \sigma^{\check{}} \cap M$. Ist w auf einem Erzeuger von σ negativ, so liegt dieser Erzeuger nicht in τ (wegen $w \in \tau^{\check{}}$), d.h. die Stützhyperebene u ist auf diesem Erzeuger $\neq 0$, also positiv. Deshalb nimmt

$$w + pu$$

für große reelle p auf jedem Erzeuger von σ Werte ≥ 0 an, d.h. es gilt

$$w + pu \in \sigma^{\check{}} \text{ für p groß.}$$

Wählt man p außerdem ganzzahlig, so erhalten wir

$$w + pu \in \sigma^{\check{}} \cap M = S_\sigma,$$

also

$$w \in S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u).$$

QED.

1.1.15 Die definierenden Stützhyperebenen einer Seite

Für jeden konvexen polyedralen Kegel σ, jede Seite τ von σ und jedes u aus dem relativen Inneren von

$$\tau^* = \sigma^{\check{}} \cap \tau^{\perp}$$

gilt

$$\tau = \sigma \cap \tau^{*\perp} = \sigma \cap u^{\perp}.$$

Das folgt aus dem Beweis 1.1.14 (vgl. auch den 2. Schritt des Beweises von 1.1.13) ergibt.

1.1.16 Gemeinsame Stützhyperebenen für gemeinsame Seiten

Seien σ und σ' zwei konvexe polyedrale Kegel, deren Durchschnitt eine Seite

$$\tau = \sigma \cap \sigma'$$

von beiden Kegeln ist. Dann gibt es ein

$$u \in \sigma^{\check{}} \cap (-\sigma')^{\check{}}$$

mit

$$\tau = \sigma \cap u^{\perp} = \sigma' \cap u^{\perp}.$$

---

[18] Die Seiten der Gestalt $\tau := \sigma \cap u^{\perp}$ sind rational, weil jede Seite eines rationalen Kegels rational ist (nach 1.1.4 (ii)).

[19] Wegen $\tau \subseteq \sigma$ gilt $\tau^{\check{}} \supseteq \sigma^{\check{}}$, also $S_\tau \supseteq S_\sigma$. Wegen $u \in \tau^* := \sigma^{\check{}} \cap \tau^{\perp}$ ist u identisch Null auf τ, also ist $\pm u \in \tau^{\check{}} \cap M = S_\tau$

Sind σ und σ' rational, so kann man u sogar aus dem Gitter M wählen,

$$u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee \cap M.$$

Beweis. Wir betrachten den Kegel

$$\gamma := \sigma - \sigma' = \sigma + (-\sigma').$$

Nach 1.1.15 gilt für u aus dem relativen Inneren von $\gamma^\vee$:

(1) $$\gamma \cap u^\perp = \gamma \cap (\gamma^\vee)^\perp =^{20} \gamma \cap (-\gamma) = (\sigma - \sigma') \cap (\sigma' - \sigma).$$

Man beachte, sind σ und σ' rational, so ist auch γ rational, d.h. man kann für einen Punkt aus dem Gitter M wählen.
Es reicht zu zeigen, das so gewählte Element u hat die in 1.1.16 angegebene Eigenschaften.

Wegen $\sigma \subseteq \gamma$ gilt

$$u \in \gamma^\vee \subseteq \sigma^\vee.$$

Analog folgt aus $-\sigma' \subseteq \gamma$ auch $u \in \gamma^\vee \subseteq (-\sigma')^\vee$, zusammen also

$$u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee.$$

Wegen $\tau \subseteq \sigma \cap \sigma'$ gilt $\tau \subseteq \gamma \cap (-\gamma)$, also nach (1) auch $\tau \subseteq \gamma \cap u^\perp$, also auch

$$\tau \subseteq \sigma \cap u^\perp.$$

Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Für $v \in \sigma \cap u^\perp$ ($\subseteq \gamma \cap u^\perp$) gilt nach (1) auch

$$v \in \sigma' - \sigma,$$

d.h., v hat die Gestalt

$$v = w' - w \text{ mit } w' \in \sigma' \text{ und } w \in \sigma.$$

Die Summe

$$v + w = w'$$

liegt deshalb im Durchschnitt $\sigma \cap \sigma' = \tau$. Nun liegt eine Summe von Kegel-Elementen genau dann auf einer Seite, wenn jeder der Summanden auf der Seite liegt. Insbesondere gilt

$$v \in \tau.$$

Wir haben gezeigt

$$\tau = \sigma \cap u^\perp.$$

Dieselbe Argumentation wie oben mit -u anstelle von u liefert

$$\tau = \sigma' \cap u^\perp.$$

QED.

1.1.17 Die Halbgruppe S_τ für eine gemeinsame Seite τ

Seien σ und σ' zwei rationale konvexe polyedrale Kegel, deren Durchschnitt

$$\tau := \sigma \cap \sigma'$$

Seite von beiden Kegeln ist. Dann gilt

$$S_\tau = S_\sigma + S_{\sigma'}.$$

Beweis. Wegen $\tau \subseteq \sigma$ gilt $\tau^\vee \supseteq \sigma^\vee$, also $S_\tau \supseteq S_\sigma$. Analog folgt $S_\tau \supseteq S_{\sigma'}$, , also

$$S_\tau \supseteq S_\sigma + S_{\sigma'}.$$

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion wählen wir ein Element

$$u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee \cap M$$

mit

$$\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$$

---

[20] nach 1.1.12 steht sowohl rechts als auch links die kleinste Seite von γ.

(das ist möglich auf Grund von 1.1.16). Nach 1.1.14 gilt

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}\cdot(-u).$$

Wegen $-u \in \sigma'^{\vee} \cap M = S_\sigma$, folgt $S_\tau \subseteq S_\sigma + S_\sigma$, .

QED.

1.1.18 Charakterisierung der streng konvexen Kegel

Sei σ ein konvexer polyedraler Kegel. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

(ii) σ enthält keinen linearen Unterraum positiver Dimension.

(iii) Es gibt eine Stützhyperebene $u \in \sigma^{\vee}$ mit $\sigma \cap u^{\perp} = \{0\}$.

(iv) $\sigma^{\vee}$ erzeugt $V^{\vee}$.

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Die Bedingungen sind äquivalent, weil $\sigma \cap (-\sigma)$ der größte lineare Unterraum von V ist, der ganz in σ liegt.[21]

(i) $\Leftrightarrow$ (iii). Die Bedingungen sind äquivalent, weil $\sigma \cap (-\sigma)$ die kleinste Seite von σ ist (nach 1.1.12).

(i) $\Leftrightarrow$ (iv). Die Bedingungen sind äquivalent wegen

$$\dim(\sigma \cap (-\sigma)) + \dim(\sigma^{\vee}) = \dim V$$

(nach 1.1.12).

QED.

1.1.19 Definition: streng konvexer Kegel

Ein konverser polyedraler Kegel heißt streng konvex, wenn er den äquivalenten Bedingungen von 1.1.18 genügt.

1.1.20 Minimale Erzeuger von streng konvexen Kegeln

Jeder konvexe polyedrale Kegel wird von einer minimalen Menge von Erzeugern erzeugt. Ist der Kegel streng konvex, so sind die Stahlen zu den Erzeugern einer solchen minimalen Erzeugermenge gerade die 1-dimensionalen Seiten des Kegels.

Beweis. Seien σ ein streng konvexer polyedraler Kegel und

$$v_1, \ldots, v_s$$

ein minmales Erzeugendensystem von σ. Für jedes i ist dann der von

$$v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_s$$

erzeugte Kegel ein echt kleinerer Kegel als σ. Insbesondere kann der Vektor v_i nicht in diesem Kegel liegen. Nach 1.1.3 gibt es ein $u \in V^{\vee}$ mit

$$\langle u, v_i \rangle < 0 \text{ und } \langle u, v_j \rangle \geq 0 \text{ für jedes } j \neq i.$$

Weil der Kegel σ streng konvex ist, gibt es nach 1.1.18 (iii) außerdem ein $u' \in V^{\vee}$ mit

$$\langle u', v_j \rangle > 0 \text{ für } j = 1,\ldots,s.$$

Dann kann man aber eine positive reelle Zahl p so wählen, daß die Hyperebene

$$w := u' + pu$$

den folgenden Bedingungen genügt:

$$\langle w, v_i \rangle = 0 \text{ und } \langle w, v_j \rangle > 0 \text{ für jedes } j \neq i.$$

---

[21] $\sigma \cap (-\sigma)$ ist ein linearer Unterraum von V: die Summe zweier Elemente des Durchschnitts liegt wieder im Durchschnitt und alle reellen Vielfachen eines Durchschnittelements ist wieder ein Durchschnittelement.
Umgekehrt liegt jeder lineare Unterraum von σ in $\sigma \cap (-\sigma)$: das negative eines Unterraumelements ist wieder ein Unterraumelement.

Mit anderen Worten, w ist eine Stützhyperebene von σ und die zugehörige Seite ist gerade der von v_i erzeugte Strahl. Wir haben gezeigt jeder von einem minimalen Erzeuger erzeugte Strahl ist eine 1-dimensionale Seite von σ.
Sei umgekehrt

$$\tau = \sigma \cap u^{\perp}$$

irgendeine 1-dimensionale Seite von σ. Dann wird τ nach 1.1.4(ii) von denjenigen v_i erzeugt, die ganz in $u^{\perp}$ liegen. Da die Dimension des von diesen v_i erzeugten Vektorraums nach Voraussetzung gleich 1 sein soll, kann es nur ein v_i geben, welches dieser Bedingung genügt (andernfalls wären zwei v_i proportional, d.h.das Erzeugersystem wäre nicht minimal bzw. der Kegel wäre nicht streng konvex - je nach dem Vorzeichen des Proportionalitätsfaktors). Mit anderen Worten, die Seite τ ist gerade der von einem v_i erzeugte Strahl.

QED.

1.1.21 Faktorkegel

Seien τ eine Seite des konvexen polyedralen Kegels σ und $W = \mathbb{R}\cdot\tau$ der von τ erzeugte lineare Unterraum. Dann ist

$$\overline{\sigma} := (\sigma + W)/W$$

ein konverxer polyedraler Kegel (der rational ist, falls σ es ist), und die Seiten von $\overline{\sigma}$ sind gerade die Kegel der Gestalt

$$\overline{\gamma} := (\gamma + W)/W,$$

wobei γ die Seiten von σ duirchläuft, die die Seite τ enthalten.

Beweis. Die Aussagen ergeben sich aus den folgenden Fakten:

1. Die Restklassen der Erzeuger von σ erzeugen $\overline{\sigma}$.
2. Das natürliche Bild von N in V/W ist ein Gitter (weil dieses Bild torsionsfrei ist, also eine freie abelschen Gruppe).
3. Die definierenden Stützhyperebenen für γ faktorisieren sich über V/W und induzieren so definierende Stützhyperebenen für $\overline{\gamma}$.

QED.

1.1.22 Charakterisierung der inneren Punkte eines Kegels

Seien σ ein konvexer polyedraler Kegel und $v\in\sigma$ ein Punkt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) v liegt im relativen Inneren von σ.

(ii) $< u, v> \; > 0$ für jedes $u \in \sigma^{\vee} - \sigma^{\perp}$.

(iii) $\sigma^{\vee} \cap v^{\perp} = \sigma^{\perp}$.

(iv) $\sigma + \mathbb{R}_{\geq 0}\cdot(-v) = \mathbb{R}\cdot\sigma$.

(v) Für jedes $x\in\sigma$ gibt es eine positive reelle Zahl p und ein $y\in\sigma$ mit $p\cdot v = x + y$.

Beweis.(i) $\Rightarrow$ (ii). Wegen $u\in \sigma^{\vee}$ gilt $<u, v> \geq 0$. Wegen $u \notin \sigma^{\perp}$ ist u auf mindestens einem Erzeuger von σ positiv. Da v im Innern von σ liegt, folgt$< u, v > > 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Die Inklusion $\supseteq$ besteht trivialerweise für jedes $v\in\sigma$. Die umgekehrte Inklusion besteht wegen (ii).

(iii) ⇒ (iv). Es reicht zu zeigen, die dualen Kegel der beiden Seiten sind gleich. Das Dual der linken Seite ist $\sigma^\vee \cap v^\perp$. Das Dual der rechten Seite ist $\sigma^\perp$.

(iv) ⇒ (v). Sei $x \in \sigma$. Dann gilt $-x \in \sigma + \mathbb{R}_{\geq 0}\cdot(-v)$, d.h. es gibt ein $y \in \sigma$ und ein positives reelles p mit $-x = y - pv$, d.h. $pv = x + y$.

(v) ⇒ (i). Sei $\sigma = \langle v_1, .., v_n \rangle$ mit n minimal. Angenommen, v liegt nicht im realtiven Innern von σ. Dann liegt v auf einer echten Seite $\tau \subseteq \sigma$, die eines der v_i nicht enthält, sagen wir

$$v \in \tau \subseteq \sigma, v_n \notin \tau.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein positives reelles p und ein $y \in \sigma$ mit

$$pv = v_n + y.$$

Insbesondere liegt die Summe rechts auf Seite τ,

$$v_n + y \in \tau$$

Dann muß aber jeder der beiden Summanden auf dieser Seite liegen. Insbesondere ist

$$v_n \in \tau$$

im Widerspruch zur Wahl von τ.
QED.

1.1.23 Charakterisierung der Seiten eines Kegels

Seien σ ein konvexer polyedraler Kegel, τ eine Seite von σ und

$$x,y \in \sigma$$

zwei Punkte von σ. Man zeige,

$$x + y \in \tau \Leftrightarrow x \in \tau \text{ und } y \in \tau.$$

Umgekehrt ist jede konvexe Teilmenge τ eines Kegels σ, die dieser Bedingung genügt, ist eine Seite von σ.

Beweis. Sei τ' die kleinste Seite von σ mit $\tau \subseteq \tau'$. Es reicht zu zeigen,

$$\tau' \subseteq \tau.$$

1. Schritt: Ein Punkt von τ liegt im relativen Innern von τ'.
Angenommen, das ist nicht der Fall. Dann liegt τ auf der Vereinigung der Fasetten von τ'. Wegen der Minimalität von τ' kann τ nicht ganz in einer Fasette von τ' liegen. Zu jeder Fassette von τ' können wir somit einen Punkt von τ wählen, der nicht auf dieser Fasette liegt. Die Summe dieser Punkte liegt in τ, also auf einer Fasette von τ'. Dann liegt aber jeder Summand auf dieser Fasette, im Widerspruch zu Wahl der Punkte.
2. Schritt: Beweis der behaupteten Inklusion.
Sei $x \in \tau'$. Wir wählen einen nach dem ersten Schritt existierenden Punkt $v \in \tau$, der im relativen Innern von τ' liegt. Nach Aufgabe 1.2.16 (v) gibt es eine positive reelle Zahl p und ein $y \in \tau'$ mit

$$p \cdot v = x + y.$$

Insbesondere gilt $x + y \in \tau$. Als Punkte der Seite τ' liegen nun x und y beide in σ. Auf Grund der angenommenen Eigenschaft der Menge τ gilt dann aber $x \in \tau$.
QED.

1.1.24 Vereinbarung zur Bezeichnung "Kegel"

Wir werden oft sagen,

"σ ist ein Kegel in N"

und meinen damit, daß σ ein streng konvexer rationaler polyedraler Kegel in $N_{\mathbb{R}}$ sein soll.

Die Relation

$$\text{“}\tau < \sigma\text{” bzw. “}\sigma > \tau\text{”}$$

soll bedeuten, τ ist eine Seite des Kegels σ.

Ein Kegel heißt simplizial oder auch Simplex, wenn er von einem System linear unabhängiger Vektoren erzeugt wird.

1.1.25 Aufgabe

Der vom Kegel σ erzeugte lineare Unterraum sei gleich $N_{\mathbb{R}}$. Haben dann σ und $\check{\sigma}$ dieselbe Anzahl minimaler Erzeuger ?

1.2. Afine torische Varietäten

Zwischenbemerkung:
Affine algebraische Mengen und ihr Koordinatenring.
Die Zariski-Topologie.
Punkte und Primideale.
Reguläre und rationale Abbildungen.
Isomorphie und Isomorphie und Isomorphie der Koordinatenringe.
Birationale Isomorphie und Isomorphie der rationalen Funktionenkörper.
Die Garbe der regulären Funktionen.

1.2.1 Definition: Gruppenring einer Halbgruppe

Jede Halbgruppe S definiert einen “Gruppen-Ring”

$$\mathbb{C}[S].$$

Dieser ist eine kommutative $\mathbb{C}$-Algebra. Als komplexer Vektorraum hat er eine Basis aus Symbolen

$$\chi^u \text{ mit } u \in S,$$

wobei die Multiplikation definiert ist durch die Relationen

$$\chi^u \cdot \chi^{u'} = \chi^{u+u'} \text{ für } u,u' \in S.$$

Das Einselement von $\mathbb{C}[S]$ ist

$$1 = \chi^0.$$

Bemerkungen

(i) Sei

$$\sigma$$

ein streng konvexer rationaler polyedraler Kegel. Dann ist die Halbgruppe

$$S_\sigma := \check{\sigma} \cap M$$

endlich erzeugt (nach 1.1.10).

(ii) Ist $\{u_i\}$ eine Familie von Erzeugern der Halbgruppe S, so bilden die χ^{u_i} ein Erzeugendensystem der $\mathbb{C}$-Algebra $\mathbb{C}[S]$.

(iii) Jede endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra^A definiert eine komplexe affine Varietät, welche mit

$$\text{Spec(A)}$$

bezeichnet wird. Wir wiederholen hier diese Konstruktion und die entsprechenden Bezeichnungen.

(iv) Fixiert man Erzeuger der Algebra A, so erhält man eine Darstellung

$$A = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_m]/I$$

mit einem Ideal I. Die Varietät Spec (A) kann dann identifiziert werden mit der Teilmenge

$$V(I)$$

des affinen Raums $\mathbb{C}^m$, die aus den gemeinsamen Nullstellen der Polynome aus I besteht.

(v) Wie in der modernen Mathematik üblich, ist es jedoch bequemer eine Beschreibung von Spec (A) zu verwenden, die unabhängig ist von der speziellen Wahl von Koordinaten.

(vi) In unseren Anwendungen wird A ein Integritätsbereich sein, so daß Spec(A) eine irreduzible Varietät ist. Obwohl Spec(A) aus Primidealen besteht (die den Teilvarietäten von V(I) entsprechen) werden wir, wenn wir von Punkten von Spec(A) sprechen, gewöhnliche Punkte im Auge haben, die zu den maximalen Idealen von A gehören - wenn nicht explizit anders erwähnt. Die Menge dieser abgeschlossenen Punkte bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Specm}(A).$$

(vii) Jeder Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren

$$A \to B$$

definiert einen Morphismus

$$\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$$

von Varietäten. Insbesondere gehören die abgeschlossenen Punkte von A zu $\mathbb{C}$-Algebra-Homomorphismen

$$A \to \mathbb{C}.$$

(viii) Ist X = Spec(A) und f∈A, so gehört die offene Hauptmenge

$$X_f := \mathrm{Spec}(A_f) \subseteq X = \mathrm{Spec}(A)$$

zum Lokalisierungshomomorphismus $A \to A_f$..

(ix) Ist die $\mathbb{C}$-Algebra A gerade

$$A = \mathbb{C}[S]$$

der Gruppenring einer Halbgruppe S, so kann man die Punkte von Spec(A) we folgt beschreiben: sie lassen sich gerade mit den Homomorphismen

$$S \to \mathbb{C}$$

von Semigruppen identitizieren, wobei hier

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup \{0\}$$

als abelsche Halbgruppe bezüglich der gewöhnlichen komplexen Multiplikation angesehen wird:

$$\mathrm{Specm}(\mathbb{C}[S]) = \mathrm{Hom}_{\text{Halbgruppen}}(S, \mathbb{C}).$$

(x) Sind

$$x: S \to \mathbb{C}$$

ein Halbgruppen-Homomorphismus und u∈S, so ist der Wert der regulären Funktion χ^u im zu x gehörigen Punkt von Spec(A) gerade gleich

$$\chi^u(x) = x(u).$$

1.2.2 Definition: affine torische Varieäten

Ist

$$S = S_\sigma$$

die Halbgruppe zu einem streng konvexen rationalen polyedralen Kegel, so setzen wir

$$A_\sigma := \mathbb{C}[S_\sigma]$$

und

$$U_\sigma := \mathrm{Spec}(A_\sigma).$$

Die affine Varietät U_σ heißt die zu σ gehörige affine torische Varietät.

Bemerkungen

(i) Alle diese hier betrachteten Halbgruppen S_σ sind Unterhalbgruppen der Gruppe

$$S_{\{0\}} = M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}).$$

Ist $e_1,...,e_n$ eine Basis von N und $e_1^*, \dots, e_n^*$ die zugehörige duale Basis, so hat M als Halbgruppe die Erzeugenden $\pm e_1^*, \dots, \pm e_n^*$, d.h. wir erhalten den Ring

$$\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}] = \mathbb{C}[X_1,...,X_n]_{X_1 \cdot \ldots \cdot X_n}$$

der Laurent-Polynome in n Unbestimmten. Die zugehörige affine torische Varietät ist

$$U_{\{0\}} = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[M] = \mathbb{C}^* \times \ldots \times \mathbb{C}^*$$

ein affiner algebraischer Torus. Wir verwenden für diesen Torus auch die Bezeichnung

$$T_N := U_{\{0\}}.$$

Vereinbarung: Wir werden T_N oft mit der Menge seiner (abgeschlossenen) Punkten identifizieren:

$$T_N = \mathrm{Specm}(\mathbb{C}[M]) = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{C}^*) = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$$

(ii) Alle unsere Halbgruppen S werden Untergruppen des Gitters M sein. Damit ist $\mathbb{C}[S]$ eine Teilalgebra von $\mathbb{C}[M]$. Insbesondere ist $\mathbb{C}[S]$ ein Integritätsbereich. Wurde wie oben eine Basis von M fixiert, so schreiben wir die Elemente von $\mathbb{C}[S]$ gewöhnlich als Laurent-Polynome in den entsprechenden Unbestimmten X_i.

(iii) Man beachte alle diese Algebren $\mathbb{C}[S]$ werden von Potenzprodukten in den X_i erzeugt.

1.2.3 Beispiel

Seien $e_1,...,e_n$ eine Basis des Gitters N und σ der von den ersten k dieser Vektoren erzeugte Kegel,

$$\sigma = < e_1, \dots, e_k >.$$

Bezeichnet $e_1^*, \dots, e_n^*$ die duale Basis, so gilt

$$S_\sigma = \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot e_1^* + \ldots + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot e_k^* + \mathbb{Z} \cdot e_{k+1}^* + \ldots + \mathbb{Z} \cdot e_n^*,$$

also

$$A_\sigma = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, X_{k+1}^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}],$$

also

$$U_\sigma = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k} \text{ mit } k = \dim \sigma.$$

Mit anderen Worten, wird der Kegel σ von einem Teil einer Gitterbasis erzeugt, so ist U_σ das direkte Produkt von k := dim σ Exemplaren der komplexen Ebene und n-k Exemplaren des algebraischen Torus $\mathbb{C}^*$. Alle torischen Varietäten dieser Gestalt sind nicht-singulär.

1.2.4 Beispiel

Betrachten wir als nächstes ein singuläres Beispiel. Seien N ein Gitter vom Rang 3 und σ der von vier Vektoren erzeugte Kegel,

$$\sigma = < v_1 , v_2 , v_3 , v_4 >,$$

wobei wir annehmen, daß diese Vektoren das Gitter erzeugen und der Relation

$$v_1 + v_3 = v_2 + v_4$$

genügen. Die Varietät U_σ ist dann ein Kegel über einer quadratischen Fläche, eine Varietät, welche man bei der Untersuchung von Singularitäten oft antrifft. Genauer, ist

$$N = \mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3 ,$$

so kann man

$$v_i = e_i \text{ für } i = 1, 2, 3$$

und

$$v_4 = e_1 + e_3 - e_2$$

setzen.
Dann wird S_σ von den Vektoren

$$e_1^*, e_3^*, e_1^*+e_2^*, e_2^*+e_3^*$$

erzeugt, d.h.

$$A_\sigma = \mathbb{C}[X_1X_3, X_1X_2, X_2X_3] = \mathbb{C}[W, X, Y, Z]/(WZ - XY).$$

Deshalb ist U_σ die Hyperebene im $\mathbb{C}^4$ mit der Gleichung $WZ = XY$.

1.2.5 Der Morphismus zu einer Inklusion von Kegeln

Jeder Homomorphismus $S \to S'$ von Halbgruppen induziert eine Homomorphismus

$$\mathbb{C}[S] \to \mathbb{C}[S']$$

von $\mathbb{C}$-Algebren, also einen Morphismus von affinen Varietäten

$$\text{Spec } \mathbb{C}[S'] \to \text{Spec } \mathbb{C}[S].$$

Sind insbesondere

$$\tau \subseteq \sigma$$

ineinander enthaltene Kegel, so ist S_σ eine Unterhalbgruppe von S_τ, und wir erhalten einen Morphismus

$$U_\tau \to U_\sigma.$$

Speziell der Torus $T_N = U_{\{0\}}$ läßt sich in jedes U_σ abbilden.

1.2.6 Lemma: der Morphismus zu einer Seite von σ

Ist τ eine Seite des Kegels σ, so identifiziert die Abbildung

$$U_\tau \to U_\sigma.$$

die affine Varietät U_τ mit einer offenen Hauptmenge von U_σ.

Beweis. Wir wählen ein $u \in S_\sigma$ mit

$$\tau = \sigma \cap u^\perp$$

und

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u)$$

(vgl. 1.1.14). Jedes der Erzeugenden $\chi^{u'}$ von $A_\tau = \mathbb{C}[S_\tau]$ hat somit die Gestalt

$$\chi^{u'} = \chi^{w-pu} = \chi^w \cdot (\chi^u)^{-p} \text{ mit } w \in S_\sigma \text{ und } p \in \mathbb{Z}_{\geq 0} ,$$

d.h. es gilt

$$A_\tau = (A_\sigma)_{\chi^u}.$$

Dies ist gerade eine algebraische Version der geforderten Aussage.
QED.

1.2.7 Aufgabe

Seien $\tau \subseteq \sigma$ ineinander enthaltene Kegel mit der Eigenschaft, daß die zugehörige Abbildung

$$U_\tau \to U_\sigma$$

eine offene Einbettung ist. Man zeige, dann ist τ eine Seite von σ.

Literaturhinweis: Zum Beweis siehe [KKMS, Chapter I, §1, Theorem 3]. Der dortige Beweis benutzt Eigenschaften der Limespunkte von 1-Parameter-Untergruppen[22] des Torus T_N.

1.2.8 Der Morphismus zu einem Gitterhomomorphismus.

Seien

$$\varphi: N' \to N$$

ein Gitterhomomorphismus und

$$\sigma' \subseteq N' \otimes \mathbb{R}\ ,\ \sigma \subseteq N \otimes \mathbb{R}$$

zwei (rationale streng konvexe polyedrale) Kegel, die bei der durch φ induzierten $\mathbb{R}$-linearen Abbildung ineinander überführt werden. Man sagt in dieser Situation, φ ist mit den beiden Kegeln verträglich. Die duale Abbildung

$$\check{\varphi}: M \to M'$$

überführt dann S_σ in $S_{\sigma'}$, und bestimmt auf diese Weise einen $\mathbb{C}$-Algebra-Homomorphismus

$$A_\sigma \to A_{\sigma'},$$

also auch einen Morphismus affiner Varietäten

$$U_{\sigma'} \to U_\sigma.$$

1.2.9 Birationalität von Morphismus zu Inklusionen von Halbgruppen

Seien $S \subseteq S'$ ineinander enthaltene Unterhalbgruppen des Gitters M. Dann ist der induzierte Morphismus

$$\operatorname{Spec} \mathbb{C}[S'] \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}[S]$$

ist genau dann birational, wenn S und S' dieselbe Untergruppe von M erzeugen.
Beweis. Falls S und S' dieselbe Untergruppe erzeugen, gilt

$$S' \subseteq S + (-S),$$

also

$$\mathbb{C}[S'] \subseteq \mathbb{C}[S+(-S)] \subseteq \mathbb{C}[\,\chi^u / \chi^{u'} \mid u, u' \in S] \subseteq \mathbb{C}(S),$$

also

$$\mathbb{C}(S') \subseteq \mathbb{C}(S).$$

Die umgekehrte Inklusion besteht aus Symmetriegründen, d.h. der obige Morphismus ist birational.

Sei der Morphismus umgekehrt birational, d.h.

$$\mathbb{C}(S') = \mathbb{C}(S).$$

Für jedes $u \in S'$ gilt dann

---

[22] welche zu den Seiten von σ gehören.

$$\chi^{-u} \in \mathbb{C}(S),$$

d.h. es gibt

$$u_1,...,u_r , v_1 ,..., v_s \in S \text{ und } a_1,...,a_r , b_1 ,..., b_s \in \mathbb{C} - \{0\}$$

mit

$$(a_1\chi^{u_1}+...+a_r\chi^{u_r})\chi^{-u} = b_1\chi^{v_1}+...+b_s\chi^{v_s} ,$$

d.h.

$$a_1\chi^{u_1}+...+a_r\chi^{u_r} = b_1\chi^{v_1+u}+...+b_s\chi^{v_s+u} \text{ in } \mathbb{C}[M].$$

Dabei können wir annehmen, die u_i sind paarweise verschieden und ebenfalls die v_j . Da die Elementemente von M eine Vektorraumbasis von $\mathbb{C}[M]$ definieren, folgt r = s und

$$\{u_1,...,u_r\} = \{v_1+u ,..., v_r+u\}.$$

Es gibt somit Indizes i, j mit

$$u_i = v_j + u,$$

d.h. es ist

$$u = u_i - v_j \in S + (-S).$$

Wir haben gezeigt

$$S' \subseteq S + (-S),$$

also

$$S' + (-S') \subseteq S + (-S).$$

Die umgekehrte Inklusion ergibt sich aus Symmetriegründen.
QED.

1.2.10 Eigenschaften der Teilmonoide der Gestalt S_σ

Die durch einen Kegel σ definierten Teilmonoide S_σ von M sind in vieler Hinsicht sehr speziell. So sind sie zum Beispiel saturiert, d.h. es gilt

$$p\cdot u \in S_\sigma , u\in M, p\in \mathbb{N} \Rightarrow u \in S_\sigma .$$

Ist der Kegel σ streng konvex, so wird das duale Gitter M von $\sigma\check{}$ erzeugt (vgl. 1.1.18), d.h. S_σ erzeugt M als Gruppe:

$$M = S_\sigma + (-S_\sigma).$$

1.2.11 Charakterisierung der Teilmonoide der Gestalt S_σ

Jede endlich erzeugtes Teilmonoid S des Gitters M, welches M als Gruppe erzeugt und saturiert ist, hat die Gestalt

$$S_\sigma = \sigma\check{}\cap M$$

mit einem eindeutig bestimmten streng konvexen rationalen polyedralen Kegel σ von N.
Beweis. Sei τ der von S erzeugte rationale konvexe Kegel,

$$\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}\cdot S.$$

Weil S endlich erzeugt ist, ist τ polyedral und weil S ganz im Gitter M liegt, ist $\tau\check{}$ streng konvex. Also ist das Dual

$$\sigma = \tau\check{}$$

ein streng konvexer rationaler polyedraler Kegel mit

$$\tau = \sigma\check{}$$

Nach Konstruktion gilt

$$S \subseteq \tau\cap M.$$

Es reicht zu zeigen, daß auch die umgekehrte Inklusion besteht. Sei

$$u \in \tau \cap M,$$

d.h. u ist ein Gitterelement der Gestalt

(1) $$u = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_r u_r \text{ mit } u_i \in S \text{ und } \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ für jedes i.}$$

Falls die u_i linear abhängig über $\mathbb{R}$ sind, kann man die linearen Relationen benutzen, um die Zahl der u_i, die auf der rechten Seite wirklich vorkommen, zu verkleinern.[23] Wir können deshalb annehmen,

$$u_1,...,u_r \text{ sind } \mathbb{R}\text{-linear unabhängig.}$$

Die Koeffizienten in der obigen Darstellung von u sind deshalb eindeutig bestimmt.

Da u und die u_i Elemente des Gitters M sind, kann man ansttelle der λ_i auch Koeffizienente aus $\mathbb{Q}$ wählen, sodaß (1) auch mit den neuen (nicht notwendig positiven) Koeffizienten gilt.[24] Wegen der Eindeutigkeit der λ_i in (1) folgt

$$\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{\geq 0} \text{ für jedes i.}$$

Wir multiplizieren mit dem Hauptnenner und erhalten, ein Vielfaches von u ist ganzzahlige positive Linearkombination der u_i, d.h.

$$k \cdot u \in S \text{ für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Weil S saturiert sein soll, folgt $u \in S$.
QED.

Bemerkung
Die nachfolgende Aufgabe zeigt, affine torische Varietäten sind durch monomiale Gleichungen definiert.

1.2.12 Monomialität der definierenden Gleichungen affiner torischer Varietäten

Sei $u_1,...,u_t$ ein Erzeugendensystem der Halbgruppe S_σ. Wir schreiben

$$A_\sigma = \mathbb{C}[\chi^{u_1},...,\chi^{u_t}]$$

in der Gestalt

$$A_\sigma = \mathbb{C}[Y_1, ... , Y_t]/I.$$

Man zeige, das Ideal I wird von Polynomen der Gestalt

(1) $$Y_1^{a_1} \cdot ... \cdot Y_t^{a_t} - Y_1^{b_1} \cdot ... \cdot Y_t^{b_t}$$

erzeugt. Dabei seien $a_1, ... , a_t , b_1, ... , b_t$ nicht-negative ganze Zahlen mit

$$a_1 u_1 + ... + a_t u_t , = b_1 u_1 + ... + b_t u_t$$

---

[23] Man addiere Null so zur rechten Seite von (1), daß alle Koeffizienten ≥ 0 bleiben, aber einer = 0 wird.
[24] Die Identität besagt, u ist ein von den u_i linear abhängiger Vektor von $M \otimes \mathbb{R}$. Fixiert man eine Basis von M, d.h. einen Isomorphismus $M \cong \mathbb{Z}^n$, so bedeutet dies gewisse Determinanten mit ganzzahligen Einträgen sind Null. Letzteres bedeutet aber, u ist ein von den u_i liner abhänggiger Vektor von $M \otimes \mathbb{Q}$.

Beweis. Die Gruppenringstruktur von A_σ definiert auf dieser Algebra die Struktur eines graduierten Rings, wobei die Elemente χ^u mit $u \in S_\sigma$ homogen vom Grad u sind. Versieht man den Polynomring

$$\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_t]$$

mit der graduierten Struktur, bei welcher Y_i homogen vom Grad u_i ist, so wird der natürliche Homomorphismus

$$\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_t] \to A_\sigma$$

ein Homomorphismus graduierter $\mathbb{C}$-Algebren. Sei Kern ist deshalb ein homogenes Ideal, d.h. ein Ideal, welches von homogenen Elementen erzeugt wird, d.h. von Polynomen, welche $\mathbb{C}$-Linearkombinationen von Potenzprodukten

$$Y_1^{a_1} \cdot \dots \cdot Y_t^{a_t}$$

sind mit $a_1u_1 + \dots + a_tu_t = \text{const}$. Ein solches Polynom liegt genau dann im Kern, wenn die Summe seiner Koeffizienten gleich Null ist, d.h. wenn es $\mathbb{C}$-Linearkombination von Polynomen der Gestalt (1) ist.
QED.

1.2.13 Die Torus-Operation

Sei σ ein Kegel im Gitter N. Dann operiert der Torus T_N wie folgt auf der affinen Varietät U_σ:

$$T_N \times U_\sigma \to U_\sigma \quad (t, x) \mapsto tx: u \mapsto t(u)x(u).$$

Dabei identifizieren wir die Punkte $t \in T_N$ mit den Halbgruppen-Homomorphismen

$$t: N \to \mathbb{C}^*$$

und die Punkte $x \in U_\sigma$ mit den Halbgruppen-Homomorphismen

$$x: S_\sigma \to \mathbb{C}^* \cup \{0\},$$

wobei die Bilder als multiplikative Halbgruppen aufgefaßt werden.

Bemerkungen

(i) Der durch diese Operation induzierte Komorphismus ist wie folgt definiert,

$$\mathbb{C}[S_\sigma] \to \mathbb{C}[S_\sigma] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[M], \chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u \quad (u \in S_\sigma).$$

(ii) Im Fall $\sigma = \{0\}$ ist dies das übliche Produkt auf der algebraischen Gruppe T_N.

(iii) Die oben definierten Operationen sind verträglich mit den Einbettungen der Seiten in einen Torus. Insbesondere setzen sie die Operation des Torus auf sich selbst fort.

1.2.14 Aufgabe: Produkte affiner torischer Varietäten

Seien σ ein Kegel im Gitter N und σ' ein Kegel im Gitter N'. Man zeige, $\sigma \times \sigma'$ ist ein Kegel im Gitter $N \oplus N'$ und es gilt

$$U_{\sigma \times \sigma'} \cong U_\sigma \times U_{\sigma'},$$

Hinweis. Man verwende die Tatsache, daß für kommutative Ringe A mit 1 und A-Algebren B und C gilt

$$\text{Spec}\,(B \otimes_A C) \cong \text{Spec}\,B \times_{\text{Spec}\,A} \text{Spec}\,C$$

Bemerkung

Mit Ausnahme der nachfolgenden Aufgaben werden wir uns nicht mit allgemeineren Halbgruppen beschäftigen, obwohl diese von beträchtlichem Interesse für Algebraiker sind.

1.2.15 Beispiel

Sei $S \subseteq \mathbb{Z}$ das von 2 und 3 erzeugte Teilmonoid,

$$S = \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot 2 + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot 2.$$

Dann gilt

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[X^2, X^3] =^{25} \mathbb{C}[Y, Z]/(Z^2 - Y^3).$$

Also ist Spec $\mathbb{C}[S]$ die rationale Kurve mit einem Knoten (die semikubische Parabel).

1.2.16 Aufgabe: affine Varietäten zu Teilmonoiden von $\mathbb{Z}$

(a) Man bestimme $\mathbb{C}[S]$, wenn S die Halbgruppe ist, die von zwei teilerfremden natürlchen Zahlen erzeugt wird.

(b) Man bestimme die Erzeugenden und Relationen für die Halbgruppe, die von 3, 5 und 7 erzeugt wird und beschreibe die zugehörige affine torische Varietät.

1.2.17 Aufgabe: ein nicht-rationaler Kegel

Sei $\sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ der Kegel, welcher erzeugt wird von

$$e_2 \text{ und } \lambda \cdot e_1 - e_2$$

mit einer irrationalen Zahl λ. Man zeige:

(i) $\sigma^\vee \cap (\mathbb{Z}^2)^\vee$ ist nicht endlich erzeugt.

(ii) $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap (\mathbb{Z}^2)^\vee]$ ist nicht noethersch.

1.2.18 Beispiel: ein Kegel der Dimension 2

Sei σ der Kegel

$$\sigma = < 2e_1 - e_2 , e_2 >$$

im Gitter $\mathbb{Z}^2$. Die Halbgruppe S_σ wird dann erzeugt von

$$e_1^*, e_1^* + e_2^* \text{ und } e_1^* + 2e_2^*.$$

---

[25] Nach 1.2.12 sind die definierenden Gleichungen von der Gestalt

$$Y^a Z^b - Y^c Z^d \text{ mit } 2a + 3b = 2c + 3d,$$

d.h. $2(a-c) = 3(d-b)$. Damit gilt $2 \mid d-b$ und $3 \mid a-c$. Wir schreiben das Polynom in der Gestalt

$$Y^{\min(a,c)} Z^{\min(b,d)} \left(Y^{a-\min(a,c)} Z^{b-\min(b,d)} - Y^{c-\min(a,c)} Z^{d-\min(b,d)}\right)$$

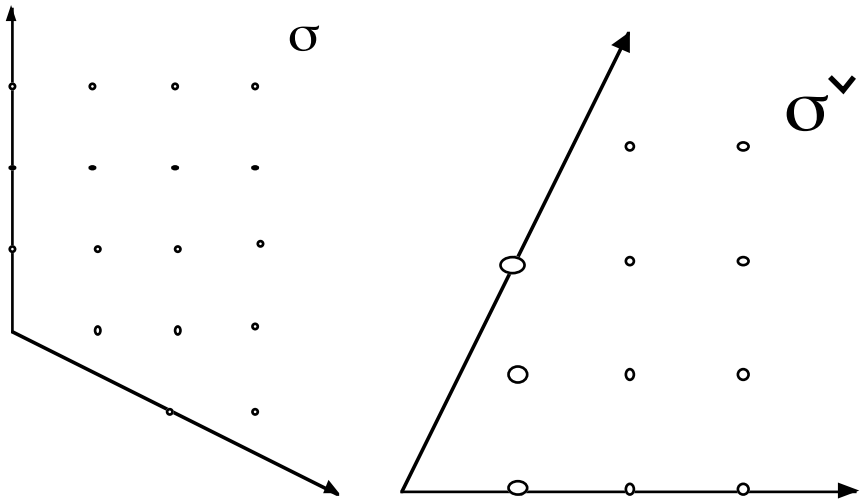
Der zweite Faktor ist eine Differenz aus einer Potenz einer dritten Potenz von Y und einer Potenz des Quadrats von Z,

$$\pm\, Y^{\min(a,c)} Z^{\min(b,d)} (Z^{2k} - Y^{3\ell}) \text{ mit } 2 \cdot 3\ell = 3 \cdot 2k, \text{ d.h. } k = \ell .$$

Damit mit das Ideal der Varietät von den Polynomen der Gestalt

$$Z^{2k} - Y^{3k}.$$

Diese sind aber Vielfache von $Z^2 - Y^3$.



Damit ist

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X, XY, XY^2] = \mathbb{C}[U, V, W]/(V^2\text{-}UW).$$

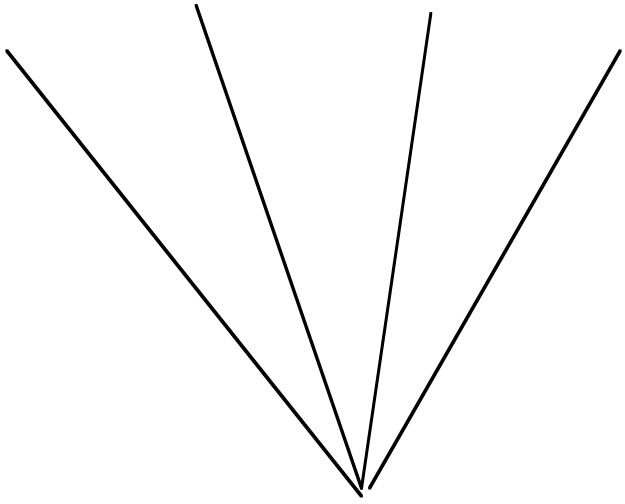
Mit anderen Worten, U_σ ist ein quadratischer Kegel über einem Kegelschnitt.

1.3 Fächer und torische Varietäten

1.3.1 Definition: Fächer

Ein Fächer Δ in N ist eine Menge von rationalen streng konvexen polyedrischen Kegeln σ in $N_{\mathbb{R}}$ mit folgenden beiden Eigenschaften.

(1) Jede Seite eine Kegels von Δ ist ein Kegel von Δ.
(2) Der Durchschnitt von zwei Kegeln in Δ ist Seite von beiden Kegeln.



Für jeden Fächer Δ bezeichne

$$|\Delta| := \cup_{\sigma\in\Delta}\, \sigma$$

den Träger von Δ, d.h. die Vereinigung der Kegel von Δ.

Vereinbarung

Der Einfachheit halber werden wir hier stets annehmen - wenn nicht explizit anders angegeben , daß Fächer endlich sind, d.h. aus einer endlichen Mengen von Kegeln bestehen.

Bemerkung

Dies Forderung wird sicherstellen, daß unsere torischen Varietäten endlichen Typs sind, und nicht nur lokal vom endlichen Typ.

Vereinbarung
Von jetzt an sei ein Kegel stets ein rationaler streng konvexer polyedraler Kegel, es sei denn, wir fordern explizit etwas anderes.

1.3.2 Konstruktion: die torische Varietät zu einem Fächer

Die torische Varietät zu einem Fächer Δ wird mit

$$X(\Delta)$$

bezeichnet und ist definiert als die disjunkte Vereinigung der affinen torischen Varietäten U_σ mit σ aus Δ , wobei für zwei Kegel σ und τ die Varietäten U_σ und U_τ entlang der gemeinsamen offenen Hauptmenge $U_{\sigma\cap\tau}$ verheftet werden,

$$X(\Delta) := \cup_{\sigma\in\Delta} U_\sigma/\sim.$$

Bemerkungen
(i) Die Tatsache, daß die beschriebenen Identifikationen miteinander verträglich sind, folgt unmittelbar aus der ordnungserhaltenden Natur der Korrespondenz zwischen den Kegeln und den affinen Varietäten.
(ii) Die Tatsache, daß die sich ergebende komplexe Varietät hausdoffsch (oder die algebraische Varietät separiert - oder das sich ergebende Präschema ein Schema) ist, ergibt sich aus dem nachfolgenden Lemma.

1.3.3 Separabilität

Seien σ und τ zwei Kegel, die sich in einer gemeinsamen Seite schneiden. Dann ist die Diagonalabbildung

$$U_{\sigma\cap\tau} \to U_\sigma \times U_\tau$$

eine abgeschlossene Einbettung.
Beweis. Das ist äquivalent zu der Aussage, daß die vom Produkt induzierte Abbildung

$$A_\sigma \otimes A_\tau \to A_{\sigma\cap\tau}$$

surjektiv ist[26]. Dies folgt aber aus der Identität

$$S_{\sigma\cap\tau} = S_\sigma + S_\tau$$

von 1.2.17 die ihrerseits eine Konsequenz des "Separationslemmas" 1.2.16 ist.
QED.
Bemerkungen
(i) Für je zwei Kegel σ und τ eines Fächers Δ, daß

$$U_\sigma \cap U_\tau = U_{\sigma\cap\tau}$$

ist.[27]

---

[26] Der Kern dieser Abbildung ist dann gerade das Ideal einer abgeschlossenen Teilmenge des direkten Produkts, die isomorph ist zu $U_{\sigma\cap\tau}$.

[27] Wegen $\sigma\cap\tau \subseteq \sigma$ und $\sigma\cap\tau \subseteq \tau$ gilt

$$U_{\sigma\cap\tau} \subseteq U_\sigma \text{ und } U_{\sigma\cap\tau} \subseteq U_\tau$$

also

$$U_{\sigma\cap\tau} \subseteq U_\sigma \cap U_\tau .$$

Wir haben die umgekehrte Inklusion zu beweisen.

Weil $\sigma\cap\tau$ gemeinsame Seite von σ und τ ist, gibt es nach 1.1.16 ein

(*) $$u \in \check{\sigma} \cap (-\tau)\check{} \cap M$$

mit $\sigma\cap\tau = \sigma\cap u^\perp$ und $\sigma\cap\tau = \tau\cap u^\perp$. Wegen (*) gilt

(**) $$u \in S_\sigma \text{ und } -u \in S_\tau .$$

Deshalb ist nach 1.1.14

(ii) Ist σ ein Kegel im Gitter N und besteht Δ aus den Seiten von σ (einschließlich σ selbst), so ist Δ ein Fächer und X(Δ) ist die affine torische Varietät U_σ,

$$X(\Delta) = \cup_{\tau \text{ Seite von } \sigma} U_\tau =^{28} U_\sigma$$

Wir werden später sehen, dies sind die einzigen torischen Varietäten, welche affin sind.

1.3.4 Beispiel: die projektive Gerade

Seien N das Gitter

$$N = \mathbb{Z}$$

und Δ der Fächer

$$\Delta = \{\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}, \{0\}\}$$

Die drei Kegel gehören zu den affinen torischen Varietäten

$$\mathbb{C} = \text{Spec } \mathbb{C}[X],\ \mathbb{C} = \text{Spec } \mathbb{C}[X^{-1}] \text{ und } \mathbb{C}^* = \text{Spec } \mathbb{C}[X, X^{-1}].$$

Die Varietät, die durch Verheften der beiden ersten entlang der dritten entsteht

$$\mathbb{C} \supseteq \mathbb{C}^* \subseteq \mathbb{C}$$

wobei der Verheftungsisomorphismus die Abbildung

$$z \mapsto z^{-1}$$

ist, ist gerade die projektive Gerade:

$$\mathbb{P}^1 = X(\Delta).$$

1.3.5 Beispiel: die Dimension 1

Die einzigen 1-dimensionalen Kegel im Gitter N = $\mathbb{Z}$ sind die positive und die negative Halbgerade und der Ursprung,

$$\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}, \{0\}.$$

Wir kennen damit die möglichen Fächer. Die zu den Kegeln gehörigen affinen torischen Varietäten sind

$$\mathbb{C}=\text{Spec } \mathbb{C}[X],\ \mathbb{C}=\text{Spec } \mathbb{C}[X^{-1}],\ \mathbb{C}^*=\text{Spec } \mathbb{C}[X, X^{-1}].$$

Die möglichen torischen Varietäten sind

$$\mathbb{C},\ \mathbb{C}^* \text{ und } \mathbb{P}^1.$$

$$S_{\sigma\cap\tau} = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u) = S_\tau + \mathbb{Z}_{\geq 0}(+u),$$

also

$$A_{\sigma\cap\tau} = (A_\sigma)_{\chi^u} \text{ und } A_{\sigma\cap\tau} = (A_\tau)_{\chi^{-u}}$$

also

(***) $$U_{\sigma\cap\tau} = \{x \in U_\sigma \mid \chi^u(x) \neq 0\} = \{x \in U_\tau \mid \chi^{-u}(x) \neq 0\}.$$

Ist $x \in U_\sigma \cap U_\tau$. Dann sind χ^u und χ^{-u} wegen (**) in x reguläre Funktionen. Da sie zueinander invers sind, müssen sie beide in x von Null verschieden sein. Nach (***) folgt

$$x \in U_{\sigma\cap\tau}.$$

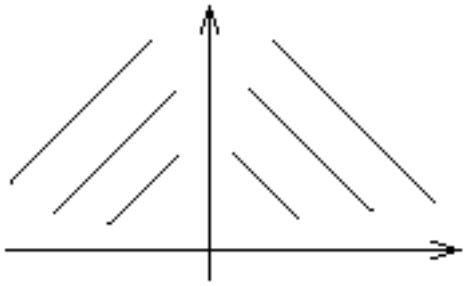
[28] Alle U_τ sind in U_σ enthalten.

1.3.6 Beispiel zur Dimension 2

Um einfache 2-dimensionale Beispiele zu erhalten, betrachten wir einige Fächer in

$$N = \mathbb{Z}^2.$$

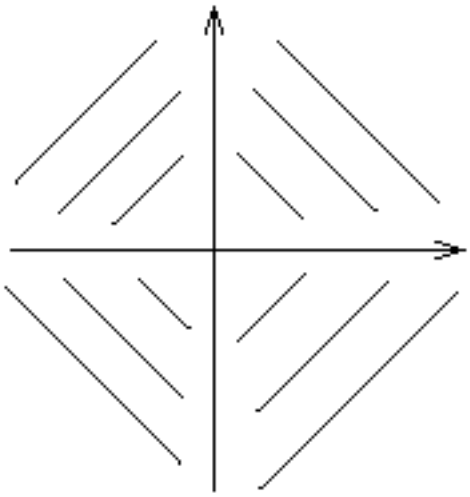
Zum Fächer, der aus dem ersten und zweiten Quadranten besteht



gehören zwei Exemplare des $\mathbb{C}^2$, welche den Algebren $\mathbb{C}[X,Y]$ und $\mathbb{C}[X^{-1}, Y]$ entsprechen. Durch Verheften erhalten wir $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$.

1.3.7 Beispiel zur Dimension 2

Zum Fächer aus allen vier Quadranten



gehören vier Exemplare des $\mathbb{C}^2$, welche den Algebren

$$\mathbb{C}[X,Y]\ ,\ \mathbb{C}[X^{-1}, Y]\ ,\ \mathbb{C}[X,Y^{-1}]\ ,\ \mathbb{C}[X^{-1}, Y^{-1}]$$

ensprechen. Sie verheften sich zum direkten Produkt

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

1.3.8 Aufgabe: das Produkt torischer Varietäten

Seien Δ ein Fächer im Gitter N und Δ' ein Fächer im Gitter N'. Man zeige, die Produkt-Mengen

$$\sigma \times \sigma'$$

mit $\sigma \in N$ und $\sigma' \in N'$ bilden einen Fächer in $N \oplus N'$ und es gilt

$$X(\Delta \times \Delta) = X(\Delta) \times X(\Delta').$$

Die nachfolgend Aufgabe verallgemeinert die Konstruktion des $\mathbb{P}^2$.

1.3.9 Beispiel: der projektive Raum

Sei N ein Gitter vom Rang n mit dem Erzeugendensystem $v_0, \dots, v_n$. Es gelte

$$v_0 + \dots + v_n = 0.$$

Weiter sei Δ der Fächer, dessen Kegel die von den echten Teilmengen von

$$\{ v_0, \dots, v_n \}$$

erzeugten Kegel sind. Dann besteht ein Isomorphismus

$$X(\Delta) \cong \mathbb{P}^n$$

mit dem n-dimensionalen projektiven Raum.

Beweis. Wir betrachten die natürliche Surjektion

$$\rho: \mathbb{Z}^{n+1} \twoheadrightarrow N, e_i \mapsto v_i \ (i = 0, \dots, n),$$

welche den i-ten Standard-Einheitsvektor e_i in den Erzeuger v_i von N abbildet. Auf diese Weise wird das Gitter N mit dem Faktor

$$N = \mathbb{Z}^{n+1}/(1,\dots,1)\mathbb{Z}$$

identifiziert. Wir betrachten den Kegel

$$\sigma_i := \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle \text{ in } N$$

Die zugehörige affine torische Varietäten ist

$$\tilde{U}_i := U_{\sigma_i} =^{29} \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n] \cong \mathbb{A}^n$$

Wir identifizieren diese Varietät mit der offeen Teilmenge

$$U_i := \{[x_0,\dots,x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$$

des projektiven Raums vermittels des Isomorphismus

(1) $\pi_i: \tilde{U}_i \to U_i, (x_0,\dots,x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \mapsto [x_0,\dots,x_{i-1},1, x_{i+1}, \dots, x_n].$

Man beachte, die Umkehrabbildung

$$[x_0,\dots,x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

ist wohldefiniert und regulär auf U_i. Es reicht zu zeigen,

1. Die Abbildungen sind in dem Sinne verträglich, daß sie sich zu einer Abbildung

$$X(\Delta) \to \mathbb{P}^n.$$

---

[29] Der natürliche Homomorphismus $\rho: \mathbb{Z}^{n+1} \to N$ identifiziert das Dual M von N mit den $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen

$$\mathbb{Z}^{n+1} \to \mathbb{Z},$$

welche an der Stelle (1, ... , 1) gleich Null sind. Die zu $v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n$ duale Basis besteht dann aus den Vektoren

$$v_j^* = e_j^* - e_i^* \text{ mit } j = 0, \dots, i-1, i+1, \dots, n,$$

denn es gilt

$$(e_j^* - e_i^*)(e_{j'}) = \begin{cases} 1 & \text{für } j'=j \\ 0 & \text{für } j' \neq j,i \end{cases}$$

und

$$(e_j^* - e_i^*)(e_0+e_1+\dots+e_n) = 0.$$

2. Die Abbildung von 1. ist ein Isomorphimus algebraischer Varietäten.

Zu 1. Betrachten wir den Durchschnitt

$$\tilde{U}_{\sigma_{i_1}} \cap \tilde{U}_{\sigma_{i_2}} = U_{\tilde{\sigma}_{i_1}} \cap U_{\tilde{\sigma}_{i_2}} = U_{\tilde{\sigma}_{i_1} \cap \tilde{\sigma}_{i_2}}$$

und schreiben

$$\tau := \tilde{\sigma}_{i_1} \cap \tilde{\sigma}_{i_2} \overset{30}{=} \langle v_0, \dots, v_{i_1-1}, v_{i_1+1}, \dots, v_{i_2-1}, v_{i_2+1}, \dots, v_n \rangle.$$

Dann gilt

$$\check{\tau} = \langle v_0^*, \dots, v_{i_1-1}^*, v_{i_1+1}^*, \dots, v_n^*, -v_{i_2}^* \rangle$$

mit $v_j^* = e_j^* - e_{i_1}^*$, also

$$\begin{aligned} U_\tau &= \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_0, \dots, X_{i_1-1}, X_{i_1+1}, \dots, X_n, X_{i_2}^{-1}] \\ &= \{(x_0, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_n) \in U_{\sigma_{i_1}} = \mathbb{A}^n \mid x_{i_2} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Zur analogen Beschreibung von U_τ als Teilmenge von $U_{\sigma_{i_2}}$ verwenden wir die entsprechende Beschreibung τ als Seite von σ und erhalten

$$\check{\tau} = \langle w_0^*, \dots, w_{i_2-1}^*, w_{i_2+1}^*, \dots, w_n^*, -w_{i_1}^* \rangle$$

mit $w_j^* = e_j^* - e_{i_2}^*$, also

$$\begin{aligned} U_\tau &= \operatorname{Spec} \mathbb{C}[Y_0, \dots, Y_{i_2-1}, Y_{i_2-1}, \dots, Y_n, Y_{i_1}^{-1}] \\ &= \{(y_0, \dots, y_{i_2-1}, y_{i_2+1}, \dots, y_n) \in U_{\sigma_{i_2}} = \mathbb{A}^n \mid y_{i_1} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Wegen

$$w_j^* = v_j^* - v_{i_2}^* \text{ und } v_j^* = w_j^* - w_{i_1}^*$$

bestehen zwischen den beiden Koordinatensystemen für U_τ die Relationen

$$Y_j = X_j / X_{i_2} \text{ und } X_j = Y_j / Y_{i_1}$$

Der Punkt

$$x = (x_0, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_n) \in U_{\sigma_{i_1}}$$

beschreibt denselben Punkt von $X(\Delta)$ wie der Punkt

$$y = \left(\frac{x_0}{x_{i_2}}, \dots, \frac{x_{i_2-1}}{x_{i_2}}, \frac{x_{i_2-1}}{x_{i_2}}, \dots, \frac{x_n}{x_{i_2}}\right) \in U_{\sigma_{i_2}}.$$

---

[30] O.B.d.A. sei $i_1 < i_2$.

Wir haben zu zeigen,

$$\pi_{i_1}(x) = \pi_{i_2}(y),$$

d.h.

$$[x_0,...,x_{i_1}-1,1,x_{i_1}+1,\dots,x_n] = [\frac{x_0}{x_{i_2}},...,\frac{x_{i_2}-1}{x_{i_2}},1,\frac{x_{i_2}-1}{x_{i_2}},\dots,\frac{x_n}{x_{i_2}}].$$

Letztere Identität besteht aber tatsächlich, da proportionale Koordinaten denselben Punkt des projektiven Raums beschreiben.

Zu 2. Die Abbildung

(2) $$X(\Delta) \to \mathbb{P}^n$$

ist surjektiv, weil die U_i den projektiven Raum überdecken. Die Abbildung ist regulär, weil die $\tilde{U}_i$ die Varietät $X(\Delta)$ überdecken und π_i auf $\tilde{U}_i$ regulär ist.

Die Umkehrabbildungen

$$\pi_i^{-1}: U_i \to \tilde{U}_i \subseteq X(\Delta)$$

sind ebenfalls regulär und wie im Beweis von 1. sieht man, daß $\pi_{i_1}^{-1}$ und $\pi_{i_2}^{-1}$ auf dem Durchschnitt $U_{i_1} \cap U_{i_2}$ übereinstimmen. Sie definieren also eine reguläre Abbildung

$$\mathbb{P}^n \to X(\Delta).$$

Nach Konstruktion ist diese invers zur Abbildung (2).
QED.

Bemerkung
In der obigen Situation kann man die Vektoren

$$v_1, \dots, v_n$$

als Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ des Gitters $N = \mathbb{Z}^n$ ansehen mit

$$v_0 = -e_1 - \dots - e_n.$$

Dies entspricht der Konstruktion des $\mathbb{P}^n$ als Abschließung des $\mathbb{C}^n$ durch Hinzfügen einer Fernhyperebene. Bei der obigen symmetrischeren Beschreibung des $\mathbb{P}_n$ wird die Einbettung des Torus

$$T_N = (\mathbb{C}^*)^{n+1}/\mathbb{C}^*$$

in die torischen Varietät

$$X(\Delta) = \mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\mathbb{C}^*$$

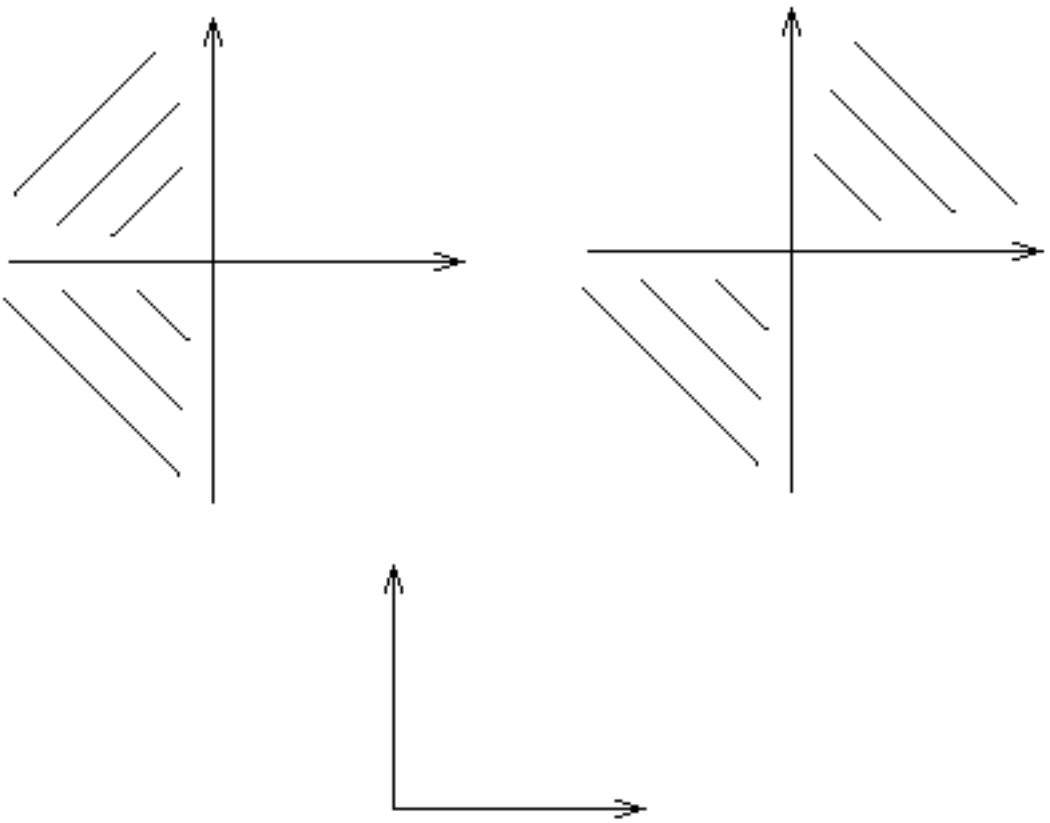
durch die natürliche Einbettung

$$(\mathbb{C}^*) \to \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$$

induziert.

1.3.10 Aufgaben

Man bestimmte die torischen Varietäten zu den folgenden drei Fächern im $\mathbb{Z}^2$.

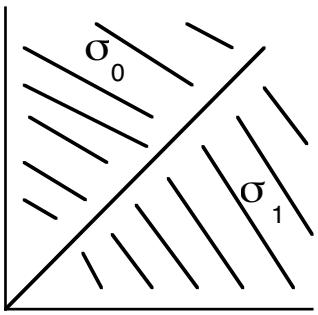


1.3.11 Beispiel: Aufblasung der affinen Ebene im Ursprung

Betrachten wir im 2-dimensionalen Fall den Fächer Δ der aus den beiden 2-dimensionalen Kegeln

$$\sigma_0 = < e_2, e_1+e_2 >$$
$$\sigma_1 = < e_1+e_2, e_1 >$$

und deren Seiten besteht.



Die dualen Kegel sind

$$\check{\sigma}_0 = < e_1^*, e_2^* - e_1^* > \text{ und } \check{\sigma}_1 = < e_2^*, e_1^* - e_2^* >,$$

d.h.

$$U_{\sigma_1} = \text{Spec } \mathbb{C}[X_1, X_2X_1^{-1}]$$

$$U_{\sigma_0} = \text{Spec } \mathbb{C}[X_2, X_1X_2^{-1}]$$

Die sich ergebende torische Varietät ist die Aufblasung des $\mathbb{C}^2$ im Ursprung. Um das einzusehen, realisieren wir diese Aufblasung als Teilvarietät

$$X := V(X_1T_2 - X_2T_1) \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1.$$

Dabei sollen T_1 und T_2 die projektiven Koordinaten des $\mathbb{P}^1$ bezeichnen. Die Varietät X hat eine Überdeckung

$$X = U_1 \cup U_2$$

durch affine offene Teilmengen

$$U_i := \{x \in X \mid T_i(x) \neq 0\},$$

die beide isomorph zum $\mathbb{C}^2$ sind:[31]

$$U_i \to \mathbb{C}^2, (x_1, x_2, t_1, t_2) \mapsto (x_1, x_2) \ (i = 1, 2).$$

Auf U_1 sind

$$X_1 \text{ und } T_2/T_1 = X_2/X_1$$

affine Koordinaten und auf U_2 analog

$$X_2 \text{ und } T_1/T_2 = X_1/X_2$$

Die Verheftung von U_1 und U_2 zur Aufblasung X stimmt also gerade mit der Konstruktion der torisichen Varietät $X(\Delta)$ überein.

1.3.12 Beispiel: Hirzebruch-Flächen

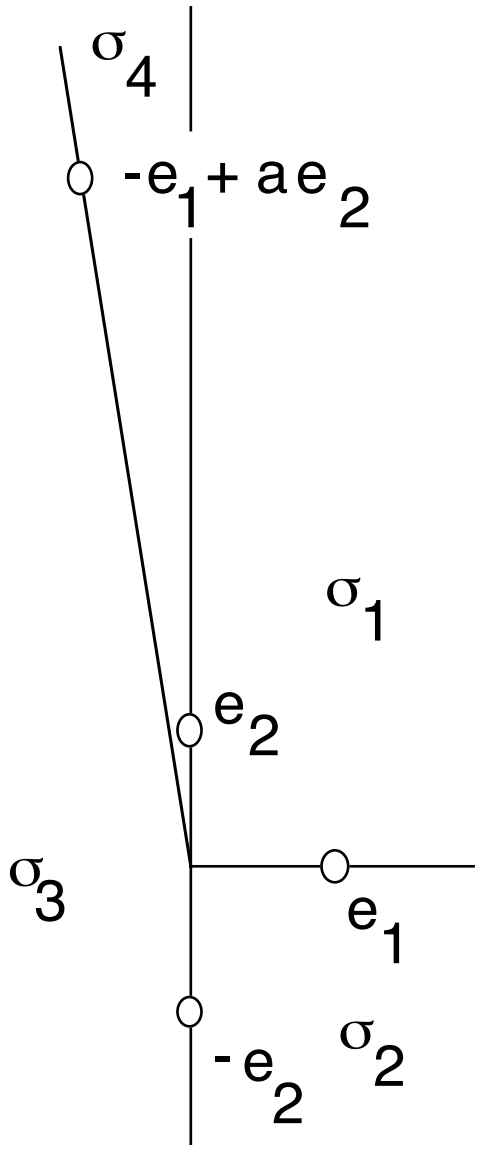
Ein interessanteres Beispiel ist das folgende. Im 2-dimensionalen Fall betrachten wir den Fächer, der aus den Kegeln

$$\sigma_1 = \langle e_2, e_1 \rangle, \sigma_2 = \langle e_1, -e_2 \rangle, \sigma_3 = \langle -e_2, -e_1 + ae_2 \rangle, \sigma_4 = \langle -e_1 + ae_2, e_2 \rangle,$$

und deren Seiten besteht.

---

[31] Auf Grund der Gleichung ist $t_1, t_2)$ proportional zu (x_1, x_2) und definiert damit einen eindeutig bestimmten Punkt der projektiven Greaden.



Die zugehörigen affinen Varietäten sind

$$U_{\sigma_1} = \text{Spec } \mathbb{C}[X, Y]$$

$$U_{\sigma_2} = \text{Spec } \mathbb{C}[X, Y^{-1}]$$

$$U_{\sigma_3} = \text{Spec } \mathbb{C}[X^{-1}, X - {}^{a}Y^{-1}]$$

$$U_{\sigma_4} = \text{Spec } \mathbb{C}[X^{-1}, X^{a}Y].$$

Alle vier sind isomorph zum $\mathbb{C}^2$. Die Verheftung der U_{σ_i} erfolgt, indem man zum Beispiel den Punkt

$$(x,y) \in U_{\sigma_1}$$

identifiziert mit den Punkten

$$(x, y^{-1}) \in U_{\sigma_2}, (x^{-1}, x^{-a}y^{-1}) \in U_{\sigma_3}, (x^{-1}, x^a y) \in U_{\sigma_4},^{32}$$

$$\begin{array}{ccc} U_{\sigma_4} \ni & (x^{-1};x^a y) & \longleftrightarrow & (x,y) & \in U_{\sigma_1} \\ & \updownarrow & & \updownarrow & \\ U_{\sigma_3} \ni & (x^{-1};x^{-a}y^{-1}) & \longleftrightarrow & (x,y^{-1}) & \in U_{\sigma_2} \end{array}$$

Projiziert man die beiden vertikalen Verheftungsvorschriften auf die zweite Koordinate, so erhält man

$$\mathbb{C} \ni y \longleftrightarrow y^{-1} \in \mathbb{C},$$

d.h. zwei Exemplare der komplexen Geraden werden zur projektiven Geraden verheftet,. Wir erhalten

$$U_{\sigma_1} \cup U_{\sigma_2} = \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$$

und analog

$$U_{\sigma_3} \cup U_{\sigma_4} = \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$$

Außerdem induzieren die Projektionen auf die erste Koordinate ebenfalls diese Verheftungsvorschrift, d.h. die beiden Projektionen

$$U_{\sigma_1} \cup U_{\sigma_2} = \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}, (z, p) \mapsto z,$$

$$U_{\sigma_3} \cup U_{\sigma_4} = \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}, (z, p) \mapsto z,$$

---

[32] Genauer: die natürlichen Einbettungen

$$\mathbb{C}[X,Y] \to \mathbb{C}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$$

$$\mathbb{C}[X,Y^{-1}] \to \mathbb{C}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$$

$$\mathbb{C}[X^{-1},X^{-a}Y^{-1}] \to \mathbb{C}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$$

$$\mathbb{C}[X^{-1},X^{a}Y] \to \mathbb{C}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$$

induzieren die Projektionen

$$T_N = V(XS - 1, YT-1) \subseteq \mathbb{C}^4 \to \mathbb{A}^2 = U_{\sigma_i}, (x,y,x^{-1},y^{-1}) \mapsto (x,y),$$

$$T_N = V(XS - 1, YT-1) \subseteq \mathbb{C}^4 \to \mathbb{A}^2 = U_{\sigma_i}, (x,y,x^{-1},y^{-1}) \mapsto (x,y^{-1}),$$

$$T_N = V(XS - 1, YT-1) \subseteq \mathbb{C}^4 \to \mathbb{A}^2 = U_{\sigma_i}, (x,y,x^{-1},y^{-1}) \mapsto (x^{-1},x^{-a}y^{-1}),$$

$$T_N = V(XS - 1, YT-1) \subseteq \mathbb{C}^4 \to \mathbb{A}^2 = U_{\sigma_i}, (x,y,x^{-1},y^{-1}) \mapsto (x^{-1},x^{a}y),$$

Dies liefert die angegebenen Identifikationen zumindest auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge. Das reicht aber aus, denn zwei reguläre Funktionen auf einer irreduziblen ‘Varietät, die auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge gleich sind, sind überall gleich.

sind verträglich mit den Verheftungen der U_{σ_i}, wenn man die beiden Exemplare der komplexen Ebene zu einer projektiven Geraden zusammenklebt. Wir erhalten so einen Morphismus

$$X(\Delta) \to \mathbb{P}^1,$$

dessen Fasern isomorph zum $\mathbb{P}^1$ sind (genauer: ein $\mathbb{P}^1$-Bündel). Die so konstruierte rationale Regelfläche wird auch mit

$$\mathbb{F}_a := X(\Delta)$$

bezeichnet und heißt a-te Hirzebruch-Fläche.

1.3.13 Die Hirzebruch-Flächen als projektivierte Vektorraumbündel

Das eben konstruierte Bündel

$$\mathbb{F}_a \to \mathbb{P}^1$$

ist bis auf Isomorphie gerade das projektive Geradenbündel

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}(a)\oplus\mathcal{O}),$$

d.h. die Projektivierung der direkten Summe aus $\mathcal{O}(a)$ und dem trivialen Geradenbündel auf $\mathbb{P}^1$.

Beweis. Wir schreiben

$$\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1 \text{ mit } U_i := \{[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1 \mid x_i \neq 0\}.$$

Das Bündel $\mathcal{O}(a)$ ist durch die Übergangsfunktion

$$g_{U_0U_1} : U_0 \cap U_1 \to \mathbb{C}^*, [x_0, x_1] \mapsto (x_0/x_1)^a$$

gegeben. Die Übergangsfunktion des Bündels $\mathcal{O}(a)\oplus\mathcal{O}$ von U_0 nach U_1 ist damit die Abbildung

$$U_0 \cap U_1 \to GL(2, k), [x_0, x_1] \mapsto \begin{pmatrix} (x_0/x_1)^a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten, die trivialen Bündel

$$U_0 \times \mathbb{C}^2 \text{ und } U_1 \times \mathbb{C}^2$$

werden verklebt, indem den Punkt

$$([x_0, x_1], v_1, v_2)$$

des linken Bündels indentifiziert mit dem Punkt

$$([x_0, x_1], (x_0/x_1)^a v_1, v_2)$$

des rechten Bündels. Geht man zu den Projektivierungen der Fasern über, so erhält man die Bündel

$$U_0 \times \mathbb{P}^1 \text{ und } U_1 \times \mathbb{P}^1,$$

die dadurch verklebt werden, daß man den Punkt

$$([x_0, x_1], [v_1, v_2])$$

des linken Bündels indentifiziert mit dem Punkt

$$([x_0, x_1], [(x_0/x_1)^a v_1, v_2])$$

des rechten Bündels. In affinen Koordinaten bekommt diese Verheftungsvorschrifte (je nach Wahl der Koodinaten auf dem zweiten direkten Faktor) die Gestalt:

$$(x, v) \mapsto (x^{-1}, x^a v) \text{ bzw. } (x, v) \mapsto (x^{-1}, x^{-a} v).$$

Das ist dieselbe Verheftungsvorschriff wie in 1.3.12, mit der dort die Mengen

$$U_{\sigma_1} \cup U_{\sigma_2} = \mathbb{C}\times\mathbb{P}^1 \text{ und } U_{\sigma_3} \cup U_{\sigma_4} = \mathbb{C}\times\mathbb{P}^1$$

zur Fläche $\mathbb{F}_a$ verklebt werden (bis auf die Reihenfolge der direkten Faktoren).

QED.

Wiederholung

Garben von $\mathcal{O}$-Moduln
Kohärente Garben
Lokal freie Garben und Vektorraumbündel
Die Projektivierung eines Vektorraumbündels
Umkehrbare Garben und Divisoren
Die umkehrbaren Garben des $\mathbb{P}^n$: die tautologischen Bündel.

1.3.14 Einige Divisoren auf den Hirzebruch-Flächen

Jede der vier Kanten τ (= 1-dimensionale Seiten) der Kegel von 1.3.12 definiert wie folgt eine Kurve

$$D_\tau$$

auf der Hirzebruch-Fläche

$$\mathbb{F}_a = X(\Delta).$$

Diese Kurve liegt ganz in der Vereinigung der beiden U_σ, für welche σ eine Seite von τ ist, wobei der Durchschnitt

$$D_\tau \cap U_\sigma \cong \mathbb{C}$$

für jedes dieser beiden σ zur komplexen Ebene isomorph ist und sich die beiden Teilstücke der Kurve zu einer projektiven Geraden verheften,

$$D_\tau \cong \mathbb{P}^1.$$

Wir definieren D_τ, indem eine definierende Gleichung dieser Kurve für jedes der beiden

$$U_\sigma \cong \mathbb{C}^2$$

angeben: es sei

$$D_\tau \cap U_\sigma = V(\chi^u) \text{ in } U_\sigma,$$

wobei $u \in S_\sigma$ derjenige der beiden Erzeuger von S_σ sei, der nicht identisch Null auf τ ist.

Beispiel:

$$\tau = e_2$$

Die beiden σ mit der Kante τ sind dann

$$\sigma_1 = \langle e_2, e_1\rangle \text{ und } \sigma_4 = \langle -e_1 + ae_2, e_2\rangle.$$

Die beiden dualen Kegel sind

$$\check{\sigma_1} = \langle e_2^*, e_1^*\rangle \text{ und } \check{\sigma_4} = \langle -e_1^* + ae_2^*, e_2^*\rangle.$$

Die Kante von $\check{\sigma_1}$, die nicht Null ist auf τ ist e_2^* und die von $\check{\sigma_4}$ ist $e_2^* + ae_1^*$. Damit ist D_τ definiert durch die Gleichung

$Y = 0$ auf $U_{\sigma_1} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X, Y]$

$X^a Y = 0$ auf $U_{\sigma_4} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X^{-1}, X^a Y]$.

(auf $U_{\sigma_2} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X, Y^{-1}]$ und $U_{\sigma_3} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X^{-1}, X^{-a} Y^{-1}]$ liefern diese Gleichungen Einheiten der Koordinatenringe).

1.3.15 Aufgabe

Man zeige, D_τ ist isomorph zum $\mathbb{P}^1$. Man zeige außerdem, das Normalenbündel von D_τ in $\mathbb{F}_a$ ist das Geradenbündel $\mathcal{O}(a)$. Die Selbstschnittzahl des Divisors $D = D_\tau$ ist deshalb

$$(D \cdot D) = -a.$$

Man berechne die Selbstschnittzahlen für die anderen drei Kanten τ.

Wiederholung
Schnittzahlen von Divisoren auf Flächen
Das Normalenbündel
Die Selbstschnittzahl

1.3.16 Funktorialität

Seien $\varphi: N' \to N$ ein Homomorphismus von Gittern, Δ ein Fächer in N und Δ' ein Fächer in N', wobei die folgende Bedingung erfüllt sei.,

Für jeden Kegel σ' von Δ' gibt es einen Kegel σ von Δ mit $\varphi(\sigma') \subseteq \sigma$.

Wir sagen in dieser Situation, der Gitterhomomorphismus φ ist mit den Fächern Δ' und Δ verträglich.

Wie wir in 1.3.5 gesehen haben, induziert φ einen Morphismus

$$U_{\sigma'} \to U_\sigma \subseteq X(\Delta)$$

für je zwei Kegel $\sigma' \in \Delta'$ und $\sigma \in \Delta$ mit $\varphi(\sigma') \subseteq \sigma$. Der zugehörige Morphismus

$$U_{\sigma'} \to X(\Delta)$$

ist unabhängig von der speziellen Wahl von σ. Durchläuft σ' die Kegel von Δ' so verheften sich die zugehörigen Morphismen zu einem Morphismus

$$\varphi_* = X(\varphi): X(\Delta) \to X(\Delta').$$

1.3.17 Beispiel

Sie $\mathbb{F}_a$ die Hirzebruch-Fläche von 1.3.12 zusammen mit der dort konstruierten Projektion

$$\mathbb{F}_a \to \mathbb{P}^1$$

Letztere ist gerade der Morphismus zum Gitterhomomorphismus

$$\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}, (x,y) \mapsto x .$$

Man beachte, die Projektion auf den zweiten Faktor ist nicht mit den entsprechenden Fächern verträglich.

1.3.18 Aufgabe

Man zeige, für jede ganze Zahl m definiert der Gitterhomomorphismus

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2,\ z \mapsto (z, mz),$$

einen Schnitt $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{F}_a$ der Projektion $\mathbb{F}_a \to \mathbb{P}^1$.

1.3.19 Die Torus-Operation auf den Varietäten der Gestalt X(Δ)

Die Operationen des Torus T_N auf den Varietäten U_σ, welche wir in 1.3.12 beschrieben haben, sind mit den Verheftungsisomorphismen eines Fächers Δ verträglich. Sie definieren deshalb eine Operation

$$T_N \times X(\Delta) \to X(\Delta)$$

von T_N auf X(Δ). Diese Operation setzt die Operation des Torus auf sich selbst fort (d.h. sie setzt die Multiplikation der algebraischen Gruppe T_N fort): wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} T_N & \times & X(\Delta) & \to & X(\Delta) \\ \| & & \cup & & \cup \\ T_N & \times & T_N & \to & T_N \end{array}$$

Bemerkungen

(i) Die Umkehrung ist ebenfalls richtig: jede (separierte normale) Varietät X, die einen Torus T_N als dichte offene Teilmenge enthält, der wie oben in verträglicher Weise auf X operiert, kann als eine torische Varietät X(Δ) realisiert werden mit einem eindeutig bestimmten Fächer in N. Wir haben keine Verwendung für diese Aussage und werden deshalb den Beweis nicht diskutieren.

(ii) Obwohl wir hier nur komplexe torische Varietäten betrachten, sollte der interessierte Lese keine Probleme haben, dieselben Konstruktionen über irgendeinem anderen Grundkörper (oder Grundring) durchzuführen.

1.4 Torische Varietäten zu Polytopen

1.4.1 Definition: konvexes Polytop

Ein konvexes Polytop K in einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum E ist definiert als die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge von E. Eine echte Seite F von K ist der Durchschnitt mit einer affinen Stützhyperebene, d.h.

$$F = \{ v \in K \mid \langle u, v \rangle = r \}$$

mit

$$u \in E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R}) \text{ und } r \in \mathbb{R}$$

derart, daß

$$\langle u, v \rangle \geq r$$

gilt für jedes $v \in K$.

Bemerkungen

(i) Das Polytop K selbst wird gewöhnlich ebenfalls als (unechte) Seite von K betrachtet.

(ii) Vereinbarung: Wir werden im folgenden der Einfachheit halber annehmen, daß das Polytop K den Ursprung als inneren Punkt enthält. Insbesondere hat es dann dieselbe Dimension

$$\dim K = n = \dim E$$

wie der einbettende Raum.

(iii) Unter einer Fasette von K versteht man eine Seite der Dimension n-1. Unter einer Ecke eine 0-dimensionale Seite. Ist $\Gamma \subseteq E$ ein Gitter maximalen Rangs in E, so heitßt das Polytop K rational bezüglich Γ, falls die Ecken von K in Γ liegen.

(iv) Die Ergebnisse von 1.1 lassen sich verwenden zum Beweis von analogen Aussagen zu den Seiten eines konvexen Polytops. Dazu betrachte man den Kegel

$$\sigma$$

über K×1 im Vektorraum E×$\mathbb{R}$ (mit der Spitze im Ursprung). Die Seiten von σ entsprechen dann gerade den Seiten von K (wobei die Seite {0} der leeren Seite von K entspricht). Daraus ergibt sich, daß die Seiten von K die zu 1.1.3(ii) - 1.1.3(vii) analogen Eigenschaften besitzen:

1, Jede Seite eine konvexen Polytops ist ein konvexes Polytop.
2. Jeder Durchschnitt von Seiten ist eine Seite.
3. Jede Seite einer Seite ist eine Seite.
4. Jede echte Seite liegt ganz in einer Fasette. Jede Seite der Kodimension 2 ist Durchschnitt von genau zwei Fasetten.
5. Jede echte Seite ist gleich dem Durchschnitt aller Fasetten, in denen sie enthalten ist.
6. Der Rand (des Inneren) eines konvexen Polytops, der den Vektorraum V aufspannt ist gleich der Vereinigung seiner echten Seiten (oder Fasetten).

1.4.2 Die Polarenmenge eines Polytops

Sei K ein konvexes Polytop im Vektorraum E. Dann heißt

$$K^o := \{ u \in E^* \mid < u, v > \geq -1 \text{ für jedes } v \in K\}$$

Polarenmenge oder auch einfach Polare von K.

Bemerkung

Oft definiert man

$$-K^o := \{ u \in E^* \mid < u, v > \leq 1 \text{ für jedes } v \in K\}$$

als die Polare von K. Das hat aber keinen Einfluß auf die Ergebnisse.

1.4.2 Beispiel

Sei K das Oktaeder mit den Ecken $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ und $(0, 0, \pm 1)$. Die Polare von K ist dann der Kubus mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

1.4.3 Die Dualität zwischen einem Polytop und seiner Polaren

Sei K ein konvexes Polytop im endlich-dimensionalen reellen Vektorraum E. Dann gilt:

(i) Die Polare K^o von K ist ein konvexes Polytop mit der Polaren K.

(ii) Ist F eine Seite von K, so ist

$$F^* := \{ u \in K^o \mid < u, v > = -1 \text{ für } v \in K\}$$

eine Seite von K^o mit

$$\dim F + \dim F^* = \dim E - 1.$$

(iii) Die Abbildung

$$\{ \text{Seiten von } K\} \rightarrow \{ \text{Seiten von } K^o\}, F \mapsto F^*,$$

ist bijektiv, selbst-invers und ordnungsumkehrend.

(iv) Ist K rational bezüglich eines Gitters, so ist K^o rational bezüglich des dualen Gitters.

Beweis. Sei

$$\sigma$$

der Kegel über K×1. Man beachte, beim Übergang zu diesem Kegel verwandeln sich die Formeln, mit denen K^o und F* definiert werden in Formeln, welche den dualen Kegel bzw. die duale Seite definieren (zumindest für Punkte mit der letzten Koordinate 1).

Das Dual $\check{\sigma}$ von σ besteht aus den Punkten der Gestalt

$$(u, r) \in E^* \times \mathbb{R}$$

mit

$$<(u, r), (v, 1)> = < u, v > + r \geq 0$$

für jedes $v \in K$.[33] Da nach Vereinbarung (Bemerkung 1.4.1 (ii)) Polytope den Ursprung als inneren Punkt enthalten sollen, enthält dieses Dual außer dem Ursprung keine Punkte (u, r) mit $r = 0$.[34] Der Kegel $\check{\sigma}$, wird also von Punkten der Gestalt $(u , 1)$ erzeugt und ist damit der Kegel über

$$K^o \times 1$$

im Raum $E^* \times \mathbb{R}$. Die Behauptungen sind jetzt direkte Konsequenzen der entsprechenden Aussagen über Kegel (vgl. 1.1.4 - 1.1.12). Die Dualtiät

$$(K^o)^o = K$$

folgt zum Beispiel aus der Dualtiät $(\check{\sigma})\check{} = \sigma$. Ist F eine Seite von K und τ der Kegel über $F \times 1$, so ist dessen Dual

$$\check{\sigma} \cap \tau^{\perp}$$

gerade der Kegel über $F^* \times 1$:

$$\text{Dual (Kegel über } F \times 1) = \text{Kegel über } F^* \times 1.$$

Daraus erhält man die Dualität zwischen den Seiten von K und K^o.
QED.

Bemerkung
Mit den Bezeichnungen des Beweises erhalten wir für jede Seite F des Polytops K:

$$\text{Kegel über } F^* \times 1 = \check{\sigma} \cap \tau^{\perp}$$
$$= \{ (u, r) \in E^* \times \mathbb{R} \mid < (u, r), (v', 1) > \geq 0 \text{ für } v' \in K \text{ und } < (u, r), (v, 1) > = 0 \text{ für } v \in F \}$$
$$= \{ (u, r) \in E^* \times \mathbb{R} \mid 0 = < (u, r), (v, 1) > \leq < (u, r), (v', 1) > \text{ für } v' \in K \text{ und } v \in F \}$$
$$= \{ (u, r) \in E^* \times \mathbb{R} \mid -r = < u, v > \leq < u, v' > \text{ für } v' \in K \text{ und } v \in F \}.$$

Da der Ursprung ein innerer Punkt von K ist, können wir diesen Kegel mit einem Kegel von E^* mit der Spitze im Ursprung identifizieren und erhalten:

$$\text{Kegel über } F^* = \{ u \in E^* \mid < u, v > \leq < u, v' > \text{ für } v' \in K \text{ und } v \in F \}.$$

1.4.4 Aufgabe: konvexe Polyeder und konvexe Polytope

Sei K eine konvexes Polyeder im endlich-dimensionalen reellen Vektorraum E, d.h. eine Menge der Gestalt

$$K = \{v \in E \mid < u_1, v> \geq -a_1 , \ldots , < u_r , v > \geq -a_r\}$$

mit Linearformen $u_1, \ldots , u_r \in E^*$ und reellen Zahlen $a_1, \ldots , a_r$. Man zeige, die Menge K ist genau dann beschränkt, wenn sie die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge ist.

1.4.5 Der Fächer zu einem rationalen konvexen Polytop

Ein rationales konvexes Polytop K in $N_{\mathbb{R}}$ definiert einen Fächer Δ, dessen Kegel gerade die Kegel über den echten Seiten von K sind.[35]

Bemerkungen

(i) Da wir stets annehmen, daß K den Urprung als inneren Punkt enthält, ist die Vereinigung aller Kegel von Δ gleich $N_{\mathbb{R}}$.

(ii) Alle Fächer, denen wir bisher begegnet sind und deren Kegel den Raum $N_{\mathbb{R}}$ überdecken, sind von dieser Gestalt.

---

[33] der Kegel über $K \times 1$ wird von den Vektoren der Gestalt $(v, 1)$ mit $v \in K$ erzeugt.

[34] Für solche Punkte müßte $< u, v > \geq 0$ gelte für jedes $v \in K$, also

$$\wedge < u, E > \geq 0,$$

da K den ganzen Raum E als Kegel erzeugt.

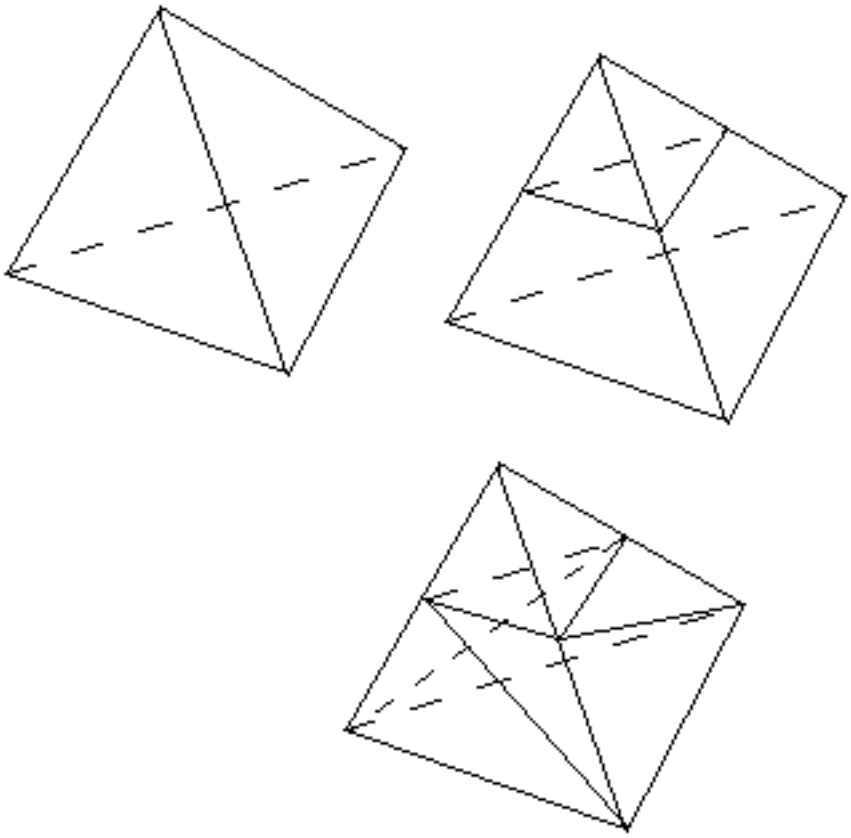
[35] mit der Spitze in einem fest gewählten inneren Punkt von K.

1.4.6 Der Fächer zu einer Unterteilung

Sei K ein konvexes Polytop im endlich-dimensionalen Vektorraum E. Bezeiche K' eine Unterteilung des Randes von K, d.h. K' ist eine Menge von konvexen Polytopen, deren Vereinigung gleich dem Rand von K ist,

$$\cup K' = \partial K,$$

wobei der Durchschnitt von je zwei Polytopen aus K' ein Polytop aus K' sei. Dann bilden die Kegel über den Polytopen von K' einen Fächer. Hier sind einige Beispiele:



Man beachte, das zweite Beispiel kann nach Außen gestülpt werden, d.h. der zugehörige Fächer ist der Fächer über einem konvexen Polytop. Beim dritten geht das nicht.

Es gibt viele Fächer, die nicht von einem konvexen Polytop kommen, ob man es unterteilt oder auch nicht. Um einen solchen zu sehen, gehen wir vom Fächer über den Seiten des Kubus mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ in $\mathbb{Z}^3$ aus. Sei Δ der Fächer mit den Kegeln, die durch dieselben Erzeugendensystme aufgespannt werden, ausgenommen die Ecke (1,1,1), die durch die Ecke (1,2,3) ersetzt werde. Es ist unmöglich, acht Punkte zu finden, wobei jeder auf einem der acht positiven Strahlen durch die Ecken liegt, so daß für jeden der sechs Kegel, die von jeweils vier dieser Ecken erzeugt werden, die zugehörigen vier Punkte in derselben affinen Ebene liegen:

1.4.7 Aufgabe: ein Fächer, der nicht von einem Polyeder kommt

Angenommen, für jede der acht Ecken v gibt es eine reelle Zahl r_v und für jeden der sechs großen Kegel σ gibt es einen Vektor u_σ in $M_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$ derart, daß gilt

$$< u_\sigma , v > = r_v$$

für jede der vier Kanten in σ. Man zeige, es gibt dann einen Vektor $u \in M_{\mathbb{R}}$ mit

$$< u, v > = r_v$$

für jede der acht Kanten v des Fächers. Insbesondere können die vier der den sechs Seiten des Würfels entsprechenden Punkte

$$p_v = \frac{1}{r_v} \cdot v$$

stets in einer Ebene liegen, es sei denn alle acht Punkte sind koplanar.

Bemerkung
Eine besonders wichtige Konstruktion torischer Varietäten geht von einem rationalen Polytop P im dualen Raum $M_{\mathbb{R}}$ aus.

1.4.8 Konstruktion: der Fächer zu einem rationalen konvexen Polytop im dualen Raum

Sei P ein rationales Polytop im dualen Raum $M_{\mathbb{R}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(N_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$, welches dieselbe Dimension

$$n = \dim M_{\mathbb{R}}$$

wie der umgebende Raum hat, jedoch nicht unbedingt den Urprung enthalten muß. Dann kann man mit Hilfe von P einen Fächer

$$\Delta_P$$

wie folgt kontruieren.

Für jede Seite Q von P bezeichne σ_Q den Kegel

$$\sigma_Q = \{v \in N_{\mathbb{R}} \mid < u, v > \leq < u', v > \text{ für jedes } u \in Q \text{ und jedes } u' \in P\}.$$

Mit anderen Worten, σ_Q ist das Dual der Vektoren, die von einem Vektor von Q ausgehend auf einen Vektor von P zeigen. Das Dual

$$(\sigma_Q)^{\check{}}$$

wird erzeugt von den Vektoren der Gestalt

$$u' - u \text{ mit } u' \in P \text{ und } u \in Q.$$

Bemerkung
Es ist nicht schwer in direkter Weise einzusehen, daß die Kegel σ_Q einen Fächer bilden. Es ist jedoch lehrreich, den Fächer als einen Fächer über dem "dualen Polytop" in $N_{\mathbb{R}}$ zu realisieren.

1.4.9 Proposition

Sei P ein rationales Polytop im dualen Raum $M_{\mathbb{R}}$, welches dieselbe Dimension wie $M_{\mathbb{R}}$ hat aber nicht notwendig den Ursprung enthält. Dann bilden die Kegel

$$\sigma_Q$$

zu den Seiten Q von P einen Fächer

$$\Delta_P .$$

Enthält P den Ursprung als innereen Punkt, so besteht Δ_P aus Kegeln über den Seiten des polaren Polytops P^o.

Beweis. Ist der Ursprung ein innerer Punkt von P, so ist σ_Q nach Bemerkung 1.5.3 der Kegel über der dualen Seite Q* von P^o. Damit gilt der zweite Teil der Behauptung.

Auf Grund der Definition der Kegel σ_Q bleibt Δ_P unverändert, wenn man P einer Verschiebung mit einem Element des Gitters M oder einer Streckung mit einer natürlichen Zahl unterwirft:

$$\Delta_{mP+u} = \Delta_P \text{ für } m \in \mathbb{N} \text{ und } u \in M.$$

Durch eine solche Transformation kann man aber jeden Kegel, der den ganzen Vektorraum $M_{\mathbb{R}}$ ezeugt in einen Kegel überführen, der den Ursprung als inneren Punkt enthält.[36] Der erster Teil der Behauptung folgt damit aus dem zweiten.
QED.

1.4.10 Folgerung

Sei K ein konvexes rationale Polytop in $N_{\mathbb{R}}$ (welches den Ursprung als einen inneren Punkt enthält). Dann ist der Fächer der Seiten von K gleich Δ_P , wobei P das polare Polytop $P = K^o$ bezeichne. Die torische Varietät $X(\Delta_P)$ wird manchmal auch mit

$$X_P := X(\Delta_P)$$

bezeichnet.
Beweis. Die Aussage ergibt sich aus 1.5.9 durch Dualisieren.
QED.

1.4.11 Beispiel (1)

Sei P das Simplex im $\mathbb{R}^n$ dessen Ecken

$$0, e_1, \ldots, e_n$$

der Ursprung und die (Endpunkte der) Standardeinheitsvektoren sind. Dann ist Δ_P mit der Fächer, welchen man zur Konstruktion des $\mathbb{P}^n$ als torische Varietät verwendet:[37]

$$X(\Delta_P) \cong \mathbb{P}^n.$$

1.4.12 Beispiel (2)

Sei P der Kubus im $\mathbb{R}^3$ mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Dann ist Δ_P der Fächer über den Seiten des Oktaeders mit den Ecken $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$ (vg. 1.5.2). Es folgt

$$X(\Delta_P) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

1.4.13 Beispiel (3)

Sei P das Oktaeder im $\mathbb{R}^3$ mit den Ecken $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$. Dann ist Δ_P der Fächer über den Seiten des Kubus mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (nach 1.5.2).
Verwendet man als Gitter N die Punkte

$$(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \text{ mit } x \equiv y \equiv z \bmod 2,$$

---

[36] Indem man m hinreichend groß wählt kann man das Polytop so stark vergrößern, daß es Gitterpunkte in seinen Innern enthält. Einen solchen Gitterpunkt kann man durch Verschieben zum Ursprung machen.

[37] Nach Multiplikation von P mit 2 und verschieben um $-e_1 - \ldots - e_n$ erhält man das Simplex

$-e_1 - \ldots - e_n$, e_1 , ... , e_n .

Letzteres liefert aber gerade den $\mathbb{P}^n$, vgl. 1.4.7.

so erzeugen je drei der vier Ecken einer Seite σ des Kubus das Gitter N und die Summen entgegengesetzter Ecken sind gleich. Jede der sechs zugehörigen torischen Teilvarietäten U_σ hat einen singulären Punkt und ist isomorph zum affinen Kegel über einer quadratischen Fläche wie in 1.3.4 . Wir werden auf dieses Beispiel später zurückkommen.

Anhang:

A1. Affine algebraische Mengen

A1.1 Reguläre Abbildungen

A1.1.1 Algebraische Mengen

Seien

k

ein algebraisch abgeschlossner Körper und

$$k[T] = k[T_1, \dots, T_N]$$

ein Polynomring in N Unbestimmten und

$$M \subseteq k[T]$$

eine beliebige Teilmemge.

Eine affine algebraische Menge über k ist eine Menge der Gestalt

$$V(M) := \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } f \in M\},$$

d.h. die Menge der gemeinsamen Nullstellen einer Menge von Polynomen mit Koefffizienten aus k. Mit anderen Worten, es ist die Lösungsmenge eine polynomialen Gleichungssystems.

Bemerkunge

(i) Ist $M = \varnothing$ die leere Menge, so schreibt man auch

$$\mathbb{A}^N = \mathbb{A}^N_k$$

anstelle von V(M) und nennt dies Menge N-dimensionalen affinen Raum über k.

(ii) Sind $f_1, \dots, f_r \in k[T]$ beliebige Polynome, welche auf V(M) identisch Null sind, so gilt dasselbe auch für jede Linearkombination dieser Polyne mit Koeffizienten aus k[T]. Insbesondere ändert sich die Menge V(M) nicht,

$$V(M) = V(M \cdot k[T])$$

wenn man M durch das von M erzeugte Ideal ersetzt,

$$M \cdot k[T] := \{f_1 m_1 + \dots + f_r m_r \mid f_i \in k[T], m_i \in M, r = 1,2,3,\dots\}.$$

(iii) Da der Polynomring k[T] noethersch ist, d.h. jedes Ideal von k[T] ist endlich erzeugt, hat jede algebraische Menge die Gestalt

$$V(m_1, \dots, m_s) := V(M)$$

mit einer endlichen Menge

$$M = \{m_1, \dots, m_s\}.$$

(iv) Für jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{A}^N$ bezeichnen wir mit

$$I(X) := \{f \in k[T] \mid f(x) = 0 \text{ für } x \in X\}$$

die Menge der Polynome, welche in allen Punkten von X Null sind. Diese Menge ist ein Ideal von k[T] und heißt Ideal von X. Ist X eine algebraische Menge, so gilt

$$\overline{X} = V(I(X)).$$

A1.1.2 Die Zariski-Topologie

Sei

$$X = V(M) \subseteq \mathbb{A}^N$$

eine affine algebraische Menge. Die in X enthaltenen algebraischen Mengen bilden die abgeschlossenen Mengen eine Topologie, welche Zariski-Topologie heißt. Genauer, es gilt

(i) $V(I') \cup V(I'') = V(I \cap I'') = V(I' \cdot I'')$ für je zwei Ideale I', I'' von k[T].

(ii) $\bigcap_{\alpha \in A} V(I_\alpha) = V(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha)$ für jede Familie von Idealen I_α von k[T].

(iii) $V(\{1\}) = \emptyset$.

Bemerkungen

(i) Die Mengen der Gestalt

$$D(f) := \{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \} \text{ mit } f \in k[T].$$

sind offen in der Zariski-Topolgie. Sie bilden eine Topologie-Basis dieser Topologie und heißen offene Hauptmengen.

(ii) Jede offene Überdeckung einer affine algebraischen Menge besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Man sagt, affine algebraische Mengen sind quasi-kompakt.[38]

(iii) Die Zariski-Topologie ist weit davon entfernt Hausdorffsch zu sein. Die offenen Teilmengen der affinen Geraden $\mathbb{A}^1$ sind außer der leeren Menge gerade die Komplemente der endlichen Teilmengen.

A1.1.3 Der affine Koordinatenring

Sei

$$X = V(M) \subseteq \mathbb{A}^N$$

eine affine algebraische Menge. Die Abbildungen der Gestalt

$$X \to k,\ x \mapsto f(x),$$

mit einem Polyn f∈k[T] heißen reguläre Funktionen auf X. Die regulären Funktionen auf X bilden einen Ring, welcher mit

$$k[X]$$

bezeichnet wird und affiner Koordinatenring von X heißt.

Bemerkungen

(i) Der Koordinatenring des affinen N-dimensionalen Raums ist gerade

$$k[\mathbb{A}^N] = k[T]$$

der Polynomring in N Unbestimmten über k.

(ii) Die Einschränkungsabbildung

$$\mathbb{A}^N \to X,\ f \mapsto f|_X,$$

[38] Den Terminus "quasi" verwendet man, weil die Zariski-Topologie nicht Hausdorffsch ist.

ist nach Definition gerade surjektiv und hat den Kern I(X). Man kann den Koordinatenring von X also mit dem Faktorraum

$$k[X] = k[T]/I(X)$$

identifizieren.

(iii) Die Einschränkungen der Koordinatenfunktionen

$$T_i: \mathbb{A}^N \to k, x = (x_1, \dots, x_N) \mapsto T_i(x) = x_i ,$$

entsprechen bei der Beschreibung von k[X] als Faktorring von k[T] gerade den Restklassen

$$t_i = T_i |_X = T_i \bmod I(X)$$

der Unbestimmten des Polynomrings k[T]. Diese Funktionen t_i nennen wir auch Koordinatenfunktionen auf X. Sie erzeugen den Koordinatenring als Algebra über k.

A1.1.4 Reguläre Abbildungen, Isomorphie

Seien

$$X \subseteq \mathbb{A}^N \text{ und } X' \subseteq \mathbb{A}^{N'}$$

affine algebraische Mengen. Eine Abbildung

$$f: X \to X', x \mapsto (f_1(x), \dots, f_N,(x)),$$

heißt regulär, wenn deren Koordinatenfunktionen

$$f_i: X \to k$$

regulär sind, d.h. wenn gilt

$$f_i \in k[X] \text{ für } i = 1, \dots, N'.$$

Die reguläre Abbildung f heißt Isomorphismus von affinen algebraischen Mengen, wenn es eine reguläre Abbildung

$$g: X' \to X$$

gibt, für welche die beiden möglichen Zusammensetzungen mit f die identischen Abbildungen sind,

$$f \circ g = id_X, \text{ und } g \circ f = id_X .$$

Bemerkungen

(i) Für jede reguläre Funktion

$$\varphi \in k[X']$$

auf X' ist die Verpflanzung

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f: X \to X', x \mapsto \varphi(f(x))$$

entlang der regulären Abbildung eine reguläre Funktion auf X,

$$f^*(\varphi) \in k[X].^{39}$$

(ii) Umgekeht ist jede Abbildung

$$f: X \to X'$$

mit der Eigenschaft, daß für jedes reguläre

$$\varphi \in k[X']$$

die Verpflanzung regulär ist,

$$f^*(\varphi) \in k[X],$$

---

[39] weil man durch Einssetzen von Polynomen in die Argumente eines Polynoms wieder ein Polynom erhält.

eine reguläre Abbildung.[40]

(iii) Für jede affine algebraische Menge X ist die identische Abbildung

$$id = id_X : X \to X$$

eine reguläre Abbildung.

(iv) Die Zusammensetzung regulärer Abbildungen ist regulär.

(v) Die durch eine reguläre Abbildung f: X → X' definierte Verflanzungsabbildung

$$f^*: k[X'] \to k[X]$$

ist ein Homomorphismus von k-Algebren.

(vi) Die Verflanzungsabbildungen definieren eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left(\begin{array}{c}\text{affine algebraische Mengen}\\ \text{und reguläre Abbildungen}\end{array}\right)^{op} \to \left(\begin{array}{c}\text{endlich erzeugte}\\ \text{k-Algebren ohne}\\ \text{nilpotente Elemente}\end{array}\right)$$

$$X \mapsto k[X],$$

$$X \xrightarrow{f} X' \mapsto k[X'] \xrightarrow{f^*} k[X]$$

vom Dual der Kategorie der affinen algebraischen Mengen und regulären Abbildungen in die Kategorie der endlich erzeugten k-Algebren ohne nilpotente Elemente.

(vi) Insbesondere ist eine reguläre Abbildun

$$f: X \to X'$$

genau dann ein Isomorphismus, wenn die Verflanzungsabbildung

$$f^*: k[X'] \to k[X]$$

ein Isomorphismus von k-Algebren ist.

(vii) Auf Grund von (vi) kommt jeder k-Algebra-Homomorphismus

$$k[X'] \to k[X]$$

zwischen zwei Koordinaten-Ringen von einer eindeutig bestimmten regulären Abbildung

$$f: X \to X'.$$

(viii) Insbesondere ist für jede affine algebraische Menge X und jede reguläre Funktion

$$f \in k[X]$$

die k-Algebra

$$k[X]_f = \{\frac{u}{f^n} \mid u \in k[X], n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \qquad (= k[X][\frac{1}{f}])$$

endlich erzeugt, hat also die Gestalt eines Koordinatenrings,

$$k[X]_f = k[X_f],$$

und die natürliche Abbildung in den Quotientenring

$$k[X] \to k[X]_f, \; u \mapsto \frac{u}{1},$$

kommt von einer regulären Abbildung

(1) $$X_f \to X.$$

Es ist leicht zu sehen, daß man X_f mit der Menge

---

[40] Die Verpflanzungen der Koordinatenfunktionen auf X' sind gerade die Koordinatenfunktionen von f.

$$X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = D(f)$$

identifizieren kann. Die Abbildung (1) ist dann gerade die natürliche Einbettung

$$D(f) \subseteq X$$

der offenen Hauptmenge in die Menge X.

A1.2 Rationale Abbildungen

A1.2.1 Irreduzible algebraische Mengen, Komponenten

Eine affine algebraische Menge

$$X = V(I) \subseteq \mathbb{A}^N$$

heißt reduzibel, wenn sie Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen ist,

$$X = X' \cup X'',\ X' \neq X,\ X'' \neq X,\ X' \text{ und } X'' \text{ abgeschlossen.}$$

Andernfalls heißt die Menge irreduzibel.

Bemerkungen

(i) Jede affine algebraische Menge X ist Vereinigung von endlich vielen irreduziblen,

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_r \text{ mit } X_i \text{ irreduzibel für jede i.}$$

Wählt man die Zahl r minimal, so sind die X_i durch X bis auf die Reihenfolge eindeutig festgelegt. Sie heißen dann irreduzible Komponenten von X.

(ii) Für eine affine algebraische Menge $X \subseteq \mathbb{A}^N$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.
(a) X ist irreduzibel.
(b) Das Ideal I(X) von X ist ein Primideal.
(c) Jede nicht-leere offene Teilmenge liegt dicht in X.
(c) Je zwei nicht-leere offene Teilmengen von X haben einen nicht-leeren Durchschnitt.

(iii) Zwei reguläre Funktionen

$$f, g: X \to k$$

auf einer irreduziblen algebraischen Menge, die auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge von X übereinstimmen, sind gleich.

A1.2.2 Der rationale Funktionenkörper

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^N$ eine irreduzible algebraische Menge. Dann ist I(X) ein Primideal, also

$$k[X] = k[T]/I(X)$$

ein Integritätsbereich. Der volle Quotientenring

$$k(X) = Q(k[X]) = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in k[X] \mid g \neq 0\}$$

des Koordinatenrings von X ist deshalb ein Körper (der Quotientenkörper von k[X]). Er heißt rationaler Funktionenkörper von X oder auch Körper der rationalen Funktionen auf X. Die Elemente von k(X) heißen rationale Funktionen auf X.

Bemerkungen

(i) Die Elemente von k(X) kann man als Funktionen auffassen. Sie sind jedoch im allgemeinen nicht auf ganz X definiert. So kann man vom Element

$$r := \frac{f}{g} \in k(X)$$

zunächst nur sagen, daß es als Funktion auf der offenen Hauptmenge D(g) definiert ist. Es definiert dort die Funktion

(1) $$D(g) \to k,\ x \mapsto \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Läßt sich das Element $\frac{f}{g}$ in k(X) auch in der Gestalt

(2) $$\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'}$$

schreiben, so erhält man eine zweite Funktion

(3) $$D(g') \to k,\ x \mapsto \frac{f'}{g'}(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

und es gilt

$$fg' = f'g$$

auf X, d.h.

$$f(x)g'(x) = f'(x)g(x)$$

für jedem Punkt $x \in X$. Die beiden Funktionen (1) und (3) stimmen also in allen Punkten, in denen beide definiert sind, überein. Die Funktionen der Gestalt (3), für welche die Bedingung (2) erfüllt ist, sind also miteinander verträglich und definieren eine Abbildung,

(4) $$D(r) \to k$$

welche auf der Vereinigung

$$Dom(r) = \cup\, D(g')$$

aller Mengen D(g') definiert ist. Man sagt in dieser Situation auch, (4) ist die maximale Fortsetzung von (1) oder auch die durch $r \in k(X)$ definierte rationale Funktion und bezeichnet sie durch denselben Budchstaben r,

$$r: Dom(r) \to k.$$

Die Menge

$$Dom(r)$$

heißt Definitionsbereich von r oder auch Menge der regulären Punkte der rationalen Funktion r. Das Komplement

$$X - Dom(r)$$

heißt Menge der Fundamentalpunkte von r. Oft vermeidet man die explizite Angabe des Definitionsbereichs von r und schreibt

$$r: X \dashrightarrow k$$

anstelle von $r: D(r) \to k$.

(ii) Eine ratonale Abbildung auf X kann man auch als Äquivalenzklasse von regulären Abbildungen

$$U \to k$$

auf nicht-leeren offenen Teilmengen U von X auffassen, wobei zwei solche Abbildungen als äquivalent angesehen werden, wenn sie auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen.

(iii) Man sagt auch, die rationale Funktion

$$r: X \dashrightarrow k$$

ist regulär im Punkt $x \in X$, wenn x im Definitionsbereich von r liegt,

$$x \in Dom(r).$$

(iv) Eine Funktion

$$f: U \to k,$$

die auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ einer affinen algebraischen Menge X definiert ist, heißt regulär im Punkt

$$x \in U,$$

wenn es Elemente $u, v \in k[X]$ gibt mit der Eigenschaft, daß

$$f(x') = \frac{u(x')}{v(x')}$$

gilt für alle Punkte x' aus einer Umgebung von x. Die Funktion f heißt regulär, wenn sie in allen Punkten von U regulär ist.

(v) Eine Funktion

$$f: X \to k,$$

die in allen Punkten von X regulär ist, ist ein Element von k[X]. Im Fall U = X stimmt also die in (iv) gegebene Definition der regulären Funktion mit der ürsprünglichen Defintion überein.

A1.2.3 Rationale Abbildungen

Seien

$$X \subseteq \mathbb{A}^N \text{ und } X' \subseteq \mathbb{A}^{N'}$$

zwei irreduzible affine algebraische Mengen. Eine rationale Abbildung

$$f: X \dashrightarrow X'$$

auf X mit Werten in X' ist eine Äquivalenzklasse regulärer Abbildungen

$$f: U \to X'$$

die auf nicht-leeren offenen Teilmengen U von X definiert sind, wobei man zwei solche Abbildungen als äquivalent angesehen werden, wenn auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen.

Bemerkungen

(i) Nach Definition verheften sich die regulären Abbildungen, die zur selben rationalen Abbildung $f: X \dashrightarrow X'$ gehören zu einer regulären Abbildung

(1) $$U \to X'$$

mit einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$, wobei jede reguläre Abbildung

$$g: V \to X'$$

mit $V \subseteq X$ offen, die in der Umgebung irgendeines Punktes von $U \cap V$ mit (1) übereinstimmt, eine Einschränkung von (1) ist (insbesondere ist $V \subseteq U$). Diese reguläre Abbildung (1) heißt auch maximale Fortsetzung von f und wird oft mit demselben Symbol bezeichnet:

$$f: U \to X'.$$

Die offene Menge U heißt Definitionsbereich von f und wird mit

$$Dom(f)$$

bezeichnet. Die Menge

$$Im(f) := f(Dom(f))$$

heißt Bild der rationalen Abbildung f.

Analog zum Fall rationaler Funktionen kann man die rationalen Abbildungen mit den maximal fortgesetzten regulären Abbildungen identifizieren.

(ii) Seien

$$f: X \dashrightarrow X' \text{ und } f': X' \dashrightarrow X''$$

dominante rationale Abbildungen, d.h die Bilder von f und f' sollen dicht liegen in X' bzw. X''. Dann hat Im(f) Punkte gemeinsam mit der offenen Menge Dom(f'), d.h. es gibt Punkte von X, in denen die Zusammensetzung $f' \circ f$ definiert ist, und in allen solchen Punkten sind die Koordinatenfunktionen dieser Zusammensetzung lokal von der Gestalt

$$\frac{u}{v}$$

mit regulären Funktionen u und v, wobei v in den betrachteten Punkten ungleich Null ist. Die Menge der Punkte, in denen $f' \circ f$ definiert ist, ist somit offen und nicht leer, d.h. diese Komposition definiert eine rationale Abbildung

$$f' \circ f: X \dashrightarrow X'',$$

die wir ebenfalls mit f'∘f bezeichnen und Komposition von f und f' nennen.
Im Fall X" = X heißen f und f' inverse zueinander, falls

$$f' \circ f = id_X \text{ und } f \circ f' = id_X,$$

gilt. Eine dominante rationale Abbildung f heißt birationaler Isomorphismus, falls es eine rationale Abbildung gibt, die invers ist zu f. Für jede dominante rationale Abbildung

$$f: X \dashrightarrow X'$$

induzierte einen k-Algebra-Homomorphismus

$$f^*: k[X'] \to k(X), u \mapsto u \circ f.$$

Wegen der Dominanz von f ist dieser injektiv und induziert damit einen (injektiven) k-Algebra-Homomorphismus

$$f^*: k(X') \to k(X),$$

den wir ebenfalls mit f* bezeichnen.

(iii) Eine affine Hyperfläche ist eine algebraische Menge der Gestalt

$$X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^N,$$

d.h. X ist im affinen Raum durch nur eine Gleichung definiert.

(iv) Jede irreduzible affine algebraische Menge ist zu einer irreduziblen Hyperfläche isomorph.[41]

(v) Die irreduziblen affinen algebraischen Mengen bilden zusammen mit den dominanten rationalen Abildungen eine Kategorie.

(vi) Der Übergang zum rationalen Funktionenkörper definiert eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left(\begin{array}{c}\text{irreduzibel algebraische Mengen}\\ \text{über k und dominante}\\ \text{rationale Abbildungen}\end{array}\right)^{op} \to \left(\begin{array}{c}\text{endlich erzeugte}\\ \text{Körpererweiterungen}\\ \text{und k-Algebra-Homomorphismen}\end{array}\right), X \mapsto k[X].$$

Insbesondere ist $f: X \dashrightarrow X'$ genau dann ein birationaler Isomorphismus, wenn

$$f^*: k(X') \to k(X)$$

ein Isomorphismus ist.

(vii) Eine rationale Abbildung

$$f: X \dashrightarrow X'$$

ist genau dann ein birationaler Isomorphismus, wenn es nicht-leere offene Teilmengen

$$U \subseteq X \text{ und } U' \subseteq X'$$

gibt, auf denen f einen Isomorphismus induziert.

Beispiel: Aufblasund des affinen Raums in einem Punkt

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ definiert durch die Gleichungen

$$X: x_i y_j - x_j y_i = 0, i,j = 1,...,n.$$

Dabei seien die x_i die affinen Koordinaten des $\mathbb{A}^n$ und die y_j die projektiven Koordinaten des $\mathbb{P}^{n-1}$. Die Gleichungen besagen, für die Punkte (x,y) auf X sollen die affinen Koordinaten von x und die projektiven Koordinaten von y proportional sein.

Die Projektion auf den ersten Faktor definiert eine reguläre Abbildung

---

[41] Diese Satz ist im wesentlichen eine Variante des Satzes vom primitiven Element.

$$\pi: X \to \mathbb{A}^n, (x,y) \mapsto x.$$

Für den Ursprung $0 \in \mathbb{A}^n$ gilt

$$\pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{P}^{n-1} \cong \mathbb{P}^{n-1}.$$

Für jeden weiteren Punkt des $\mathbb{A}^n$ besteht $\pi^{-1}(x)$ aus genau einem Punkt, d.h. die Einschränkung

$$\pi': X - \pi^{-1}(0) \to \mathbb{A}^n - \{0\}$$

von π ist bijektiv. Die Abbildung

$$\mathbb{A}^n - \{0\} \to X - \pi^{-1}(0), x \mapsto (x, [x])$$

ist wohldefiniert, regulär und invers zu π'. Wir haben gezeigt, π' ist ein Isomorphismus. Dann ist aber π ein birationaler Isomorphismus.

Man kann sich X dadurch entstanden denken, daß man aus dem $\mathbb{A}^n$ einen Punkt entfernt und dafür einen projektive Hyperebene hinzu fügt. Der Morphismus π heißt Aufblasung des $\mathbb{A}^n$ im Punkt 0.

A1.2.4 Die Garbe der regulären Funktionen

Seien X eine irreduzible affine algebraische Menge. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ setzen wir

$$\mathcal{O}_X(U) := \{s: U \to k \mid s \text{ regulär in jedem Punkt von } U\}.$$

Dann ist auf diese Weise eine Garbe von kommutativen Ringen mit 1 auf dem dem topologischen Raum X definiert. Es gilt

(i) $\mathcal{O}_X(X_f) = k[X]_f$ für jedes $f \in k[X]$.

(ii) $\mathcal{O}_{X,x} =^{42} k[X]_x$ für jedes $x \in X$.

A1.3 Allgemeine Punkte

A1.3.1 Hilbertscher Nullstellensatz

Seien (wie bisher) k ein algebraisch abgeschlossener Körper und

$$f, f_1, \ldots, f_r \in k[T] = k[T_1,\ldots,T_n]$$

endlich viele Polynome. Außerdem gelte

$$f(x) = 0$$

für jeden Punkt des affinen Raumes mit

$$f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_r(x) = 0.$$

Dann ist eine Potenz von f eine Linearkombination der f_i, sagen wir

$$f^s = a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r$$

mit $a_1,\ldots,a_r \in k[T]$.

Bemerkungen (äquivalente Formulierungen).

(i) Sei $V(I) = \emptyset$ für ein Ideal $I \in k[T]$. Dann gilt $I = k[T]$.

(ii) Jedes maximale Ideal $m \subseteq k[T]$ hat die Gestalt

$$m = (T_1 - c_1, \ldots, T_n - c_n) \text{ mit } c_1,\ldots,c_n \in k.$$

(iii) Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine algebraische Menge. Für jeden Punkt

$$x \in X$$

---

[42] Links steht der Halm der Strukturgarbe im Punkt x, rechts die Lokalisierung des Koordinatenrings k[X] im Primideal x.

bezeichne

$$\varphi_x : k[T] \to k,\ p \mapsto p(x),$$

die Auswertung an der Stelle x. Dann ist die Abbildung

$$X \to \{\text{maximale Ideale von } k[X]\},\ x \mapsto \mathrm{Ker}(\varphi_x),$$

wohldefiniert und bijektiv.

A1.3.2 Punkte mit Werten in k-Algebren, Punkte-Funktoren

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper,

$$X \subseteq \mathbb{A}^n_k$$

eine algebraische Menge über k und R eine k-Algebra. Dann bezeichne

$$X(R) := \{\, x \in R^n \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } f \in I(X) \,\}$$

die Menge aller n-Tupel mit Koordinaten aus R, die den Gleichungen von X genügen. Die Elemente von dieser Menge heißen R-wertige Punkte von X oder auch R-rationale Punkte oder auch Punkt mit Koordinaten in R.

Bemerkung

(i) Ein k-Algebra-Homomorphismus $k[T] \to R$ des Polynomrings k[T] ist durch dessen Werte in den Unbestimmten bereits festgelegt, wobei diese Werte beliebig vorgegeben werden können, d.h. die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[T], R) \xrightarrow{\cong} R^n,\ f \mapsto (f(T_1), \ldots, f(T_n))$$

ist bijektiv. Die R-wertigen Punkte des affinen Raums $\mathbb{A}^n$ werden so mit den k-Algebra-Homomorphismen

$$k[T] \to R$$

des Koordinaten-Rings von $\mathbb{A}^n$ identifiziert. Dem "Punkt" $x \in R^n$ entspricht dabei gerade die Auswertungsabbildng an der Stelle x.

(ii) Die natürliche Surjektion

$$k[T] \to k[T]/I(X) = k[X]$$

induziert eine Injektion

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X], R) \rightarrowtail \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[T], R) \cong R^n.$$

Die Auswertungsabbildung

$$\varphi_x : k[T] \to R,\ f \mapsto f(x)$$

eines Punktes $x \in R^n$ kommt dabei von der kleineren Hom-Menge, wenn sie sich über

$$k[X] = k[T]/I(X)$$

faktorisiert, d.h. wenn sie die Elemente von I(X) in die Null abbildet. Letzteres bedeutet aber gerade, x ist ein R-wertiger Punkt von X. Wir haben damit eine Identifikation

$$X(R) = \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X], R)$$

der R-wertigen Punkte von X mit den k-Algebra-Homomorphismen $k[X] \to R$ gewonnen. Dem R-wertigen Punkt x von X entspricht dabei die Auswertungsabbildung an der Stelle x. Man beachte, die Hom-Menge rechts beschreibt X(R) in koordinaten-unabhängiger Weise.

(iii) Zu jeder algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{A}^n$ gehört somit ein Funktor

$$(\text{k-Algebren}) \to \mathrm{Ens},\ R \mapsto \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X], R),$$

auf der Kategorie der k-Algebren mit Werten in der Kategorie der Mengen. Er heißt Punkte-Funktor von X.

(iv) Es ist leicht zu sehen, isomorphe Koordinaten-Ringe liefern isomorphe Funktoren. Umgekehrt müssen aber auch die Koordinaten-Ringe zu isomorphen Punkte-Funktoren isomorph sein. Da der Koordinaten-Ring die algebraische Menge festlegt (nach dem Nullstellensatz A1.3.1(iii)), ist die algebraische Menge X durch ihren Punkte-Funktor bis auf (natürliche) Isomorphie festgelegt. Wir werden oft keinen Unterschied zwischen der algebraischen Menge X und dem zugehörigen Punkte-Funktor machen.

(v) Die Abbildung, welche jeder algebraischen Menge X deren Punkte-Funktor zuordnet definiert einen völlig treuen Funktor

$$(\text{algebraische Menge über k})^{op} \to (\text{Funktoren k-Algebren} \to \text{Ens})$$

auf dem Dual der Kategorie der algebraischen Mengen über k mit Werten in der Kategorie der Funktoren

$$(\text{k-Algebren}) \to \text{Ens}$$

(die Yoneda-Einbettung).

A1.3.3. Punkte mit Koordinaten in einem Erweiterungskörper

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge über k und K/k eine Körpererweiterung. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Für jeden Punkt

$$x \in X(K)$$

ist der Kern der Auswertungsabbildung

$$k[X] \to K,\ f \mapsto f(x),$$

ein Primideal von k[X].

(ii) Für jedes Primideal

$$p \subseteq k[X]$$

sind die Bilder

$$x_i \in k[X]/p$$

der Unbestimmten T_i bei der Komposition natürlicher Abbildungen

(1) $$k[T] \to k[X] \to k[X]/p$$

die Koordinaten eines Punktes

$$x = (x_1,...,x_n)$$

von X mit Koordinaten im Quotientenkörper $K := Q(k[X]/p)$.[43] Der Körper

$$k(x) := Q(k[X]/p)$$

heißt Definitionskörper von x. Er wird von den Koordinaten von x über k erzeugt,

$$k(x) = k(x_1,...,x_n)$$

und ist der kleinste Erweiterungskörper von k, der diese Koordinaten enthält.

(iii) Zwei Punkte von X mit Koordinaten in einem Erweiterungskörper von k gehören genau dann zum selben Primideal, wenn es einen k-Automorphismus gibt, der die Koordinaten der Punkte ineinander überführt, d.h. wenn die Punkte konjugiert sind über k.[44] Wir haben damit eine Beschreibung der Menge

---

[43] Man beachte, (1) ist gerade die Auswertungsabbildung zu diesem Punkt, und der Kern von (1) enthält das Ideal I(X), d.h. jedes Element von I(X) ist Null im Punkt x.

[44] Wenn die Auswertungsabbildungen
$k[X] \to k(x)$ und $k[X] \to k(y)$

$$\operatorname{Spec} k[X]$$

der Primideale von k[X] gewonnen: es ist gerade die Menge der Punkte von X mit Koordinaten in irgendeinem Erweiterungskörper von k, wobei über k konjugerte Punkte als gleich angesehen werden.

A1.3.4 Allgemeine Punkte

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge über dem Körper k und

$$K/k$$

eine Körpererweiterung von k. Ein Punkt

$$x \in X(K)$$

heißt allgemeiner Punkt von X, wenn gilt

$$I(X) = \{ f \in k[T] \mid f(x) = 0 \}, \tag{1}$$

d.h. ein Polynom mit Koeffizienten aus k ist genau dann Null auf ganz X, wenn es im Punkt x Null ist.

Bemerkungen

(i) Die rechte Seite von (1) ist gerade der Kern der Auswertungsabbildung von x, also ein Primideal. Falls X einen allgemeinen Punkt besitzt, so muß also X notwendig irreduzibel sein.

(ii) Umgekehrt besitzt jede irreduzible algebraische Menge X einen allgmeinem Punkt: man nehme die natürlichen Abbildung

$$k[T] \to k[X]$$

als Auswertungsabbildung zu diesen Punkt und die natürlichen Bilder der Unbestimmten $T_i \in k[T]$ als dessen Koordinaten.

Beispiel

Seien

$$X := V(T_1^3 - T_2^2) \subseteq \mathbb{A}^2$$

die Semikubische Parabel, t eine Unbestimmte und

$$\zeta = (t^2, t^3) \in k(t)$$

ein allgemeiner Punkt von X mit dem Definitionskörper k(t).

---

zu den Punkten x und y denselben Kern p haben, so sind die Definitionskörper k(x) und k(y) beide isomorph zum Quotientenkörper von k[X]/p.

A1.3.5 Spezialisierungen und Generalisierungen von Punkten

A1.4 Die Kategorie der affinen Spektren

A1.4.1 Affine Spektren

A1.4.2 Die Zariski-Topologie

A1.4.3 Reguläre Funktionen

A2 Projektive algebraische Mengen

A2.1 Algebraische Schemata

A2.1.1 Geometrische Räume

A2.1.2 Algebraische Schemata

A2.1.3 Verheftung von Schemata

A2.1.4 Produkte von algebraische Schemata

A2.1.5 Separabilität

A2.2 Projektive Schemata

A2.2.1 Der n-dimensionale projektive Raum

...

A2.3 Vektorraumbündel

A2.3.1 Definition: Vektorraumbündel

Ein Morphismus

$$f: B \to X$$

hei0t Vektorraumbündel vom Rang n (mit der Basis X und dem Bündelraum B), wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U von x gibt,

$$x \in U \subseteq X,$$

und einen Isomorphismus

$$\varphi_U : f^{-1}(U) \to U \times k^n,$$

für welchen das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times k^n \\ f\downarrow & \swarrow p_1 & \\ U & & \end{array}$$

Dabei bezeichne p_1 die Projktion (u,v) a u auf den ersten Faktor. Die Fasern der Abbildung p_1 sind isomorph zu k^n und definieren auf Fasern von f über den Punkten von U die Struktur eines k-Vektorraums.

Der Morphismus φ_U heißt lokale Trivialisierung. von f über U. Für je zwei Trivialisierungen φ_U und $\varphi_{U'}$ mit $U \cap U' \neq \emptyset$ ist die Zusammensetzung $\varphi_{U'} \circ \varphi_U^{-1}$ auf $(U \cap U') \times k^n$ definiert, regulär und von der Gestalt

$$\varphi_{U'} \circ \varphi_U^{-1}: (U \cap U') \times k^n \to (U \cap U') \times k^n, (u, v) \mapsto (u, \varphi_{UU'}(u,v)).$$

mit einer regulären Abbildung

$$\varphi_{UU'}: U \cap U' \to k^n.$$

Als Bestandteil der Definiton eines Vektorraumbündels wird gefordert,, daß man die Trivialisierungen so wählen kann, daß gilt

$$\varphi_{UU'}(u,v) = g_{UU'}(u) \cdot v$$

mit einer n×n-Matrix $g_{UU'}(u)$ mit Einträgen aus k. Genauer, man fordert, es soll eine Familie

(1) $$\{\varphi_U: U \to k^n\},$$

von φ_U geben, für welche die offenen Mengen U das Schema X überdecken, wobei für je zwei dieser offenen Mengen U die angegebene Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist.
Sind f: B → X und f': B' → X zwei Vektorraumbündel, so versteht unter einer Bündelabbildung einen Morphismus

$$g: B \to B',$$

für welchen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & B' \\ & f \searrow \quad \swarrow f' & \\ & X & \end{array}$$

kommutativ ist (sodaß g für jeden Punkt $x \in X$ die Fasern über x ineinander abbildet) und welcher auf allen Faser k-lineare Abbildungen für die zugehörigen Vektorraumstrukturen induziert.

Bemerkungen

(i) Die Familie (1) ist Bestandteil der Definition. Genauer: die Struktur eines Vektoraumbündels auf f: B → X ist nichts anderes als eine Famitlie (1), die den angegebenen Verträglichkeitsbedingungen genügt und die maximal ist (d.h. man kann kein weiteres φ_U zur Familie hinzufügen, ohne daß die Verträglichkeitsbedingungen verletzt werden. Zwei verschiedene maximale Familie für denselben Morphismus f werden als verschiede Vektorraumbündel angesehen. Nur dieφ_U , welche zu der betrachteten maximalen Familie gehörigen, nennt man (lokale) Trivialisierungen des Vektorraumbündels.

(ii) Jede Familie (1), für welche die U die Menge X überdecken, ist in einer eindeutig bestimmten maximalen Familie enthalten.

(iii) Da $\varphi_{U'} \circ \varphi_U^{-1}$ und $\varphi_U \circ \varphi_{U'}^{-1}$ auf $(U \cap U') \times k^n$ zueinander inverse Isomorphismen sind, ist $g_{UU'}(u)$ für jedes $u \in U \cap U'$ eine umkehrbare Matrix, d.h. die $g_{UU'}$ sind reguläre Abbildungen

$$g_{UU'}: U \cap U' \to GL(n, k).$$

Sie heißen Übergangsfunktionen des Bündels. Ihre Existenz stellt sicher, daß die Vektorraumstrukturen, die auf den Fasern von f vermittes der Trivialisierungen φ_U definiert sind, nicht von der Wahl der speziellen Trivialisierung abhängen.

(iv) Für je drei Trivialisierungen φ_U, $\varphi_{U'}$, und $\varphi_{U''}$ gilt

$$\varphi_{U'U''} \circ \varphi_{UU'} = \varphi_{UU''} \cdot$$

Für die Übergangsfunktionen bedeutet das, es gilt

$$g_{U'U''} \circ g_{UU'} = g_{UU''}$$

wobei '$\circ$' für die Matrizenmultiplikation steht. Diese Bedingungen heißt Kozykel-Bedingungen.

(v) Umgekehrt definiert jede Familie von Abbildungen (iii) zu je zwei Mengen U, U' einer offenen Überdeckung, für welche die Kozykel-Bedingungen für je drei solcher Mengen erfüllt sind, ein Vektorraumbündel.[45]

(vi) Ersetzt man die Überdeckung zu einem System von Übergangsfunktionen durch eine Verfeinerung und die Übergangsfunktionen durch die entsprechenden Einschränkungen, so erhält man wieder ein System von Übergangsfunktionen, für welche die Kozykel-Bedingungen erfüllt sind. Das zugehörge Bündel ist zum Ausgangsbündel isomorph.

(vii) Sind $\{g_{UU'}\}$ und $\{g'_{UU'}\}$ zwei Systeme von Übergangsfunktionen zur selben Überdeckung[46], so sind die zugehörigen Bündel genau dann isomorph, wenn es eine Familie von regulären Abbildungen

$$g_U : U \to GL(n, k)$$

gibt mit

$$(id \times g_U) \circ \varphi_U = \varphi'_U$$

d.h.

$$\varphi'_{U'} \circ \varphi'^{-1}_{U} = (id \times g_{U'}) \circ \varphi_{U'} \circ \varphi_U^{-1} \circ (id \times g_U^{-1})$$

d.h.

$$g'_{UU'} = g_{U'} \circ g_{UU'} \circ g_U^{-1} \cdot$$

(viii) Die Vektorraumbündel auf einem gegebenen Schema X bilden zusammen mit den Bündelabbildungen eine Kategorie.

Beispiel 1: Tangentialbündel

Das Tangentialbündel T_X an ein glattes Schema X über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, dessen Komponenten sämtliche die Dimension n besitzen, ist ein Vektorraumbündel vom Rang n.

Beispiel 2: Normalenbündel

Seien X ein glattes Schema über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und

$$Y \subseteq X$$

ein glattes Teilschema. Dann gibt es eine exakte Sequenz von Vektorraumbündeln

$$0 \to T_Y \to T_X|_Y \to N_{Y/X} \to 0,$$

über Y, d.h. für jeden Punkt $y \in Y$ bilden die Fasern über y eine exakte Sequenz von Vektorräumen. Dabei besteht die Einschränkung

$$T_X|_Y$$

---

[45] Für U = U' = U'' hat die Kozykel-Bedingung die Gestalt $g_{UU'} \circ g_{UU'} = g_{UU'}$. Da die Matrix $g_{UU'}(u)$ für jedes u umkehrbar sein soll, muß also $g_{UU'}(u)$ für jedes u die Einheitsmatrix sein

$$g_{UU'}(u) = id.$$

[46] Im Fall von zwei solchen Systemen zu unterschiedlichen Überdeckungen kann man zu einer gemeinsamen Verfeinerung übergehen ohne daß sich die Bündel ändern.

von TX auf Y aus den Tangentialvektoren an X mit Angriffspunkt in den Punkten von Y. Die Fasern des Bündels

$$N_{Y/X}$$

besteht aus den Tangentialvektoren an X mit Angriffspunkt in den Punkten von Y, wobei zwei Vektoren, die sich um einen Tangentialvektor an Y unterscheiden, als gleich angesehen werden. Man kann sie sich als Vektoren vorstellen, die orthogonal zu Y sind, vorstellen. Das Bündel heißt deshalb auch Normalenbündel von Y in X.

Beispiel 3: Vektorraumoperationen

Die üblichen Konstruktionen in Kontext von Vektorräumen wie die direkte Summe, das direkte Produkt, den dualen Vektorraum, das Tensorprodukt, die äußeren Potenzen, Hom-Mengen usw. kann man auch im Kontext von Vektorraumbündeln ausführen, indem man sie für jede Faser ausführt und dann die faserweise erhaltenen Vektorräume zu Bündeln zusammenklebt.

Beispiel 4: Diffenrialformen

Das Dual des Tangentialvektorraums T_X an X ist das Bündel Ω_X der regulären 1-Formen auf X. Die r-te äußere Potenz dieses Bündels ist gerade das Bündel

$$\Omega_X^r := \wedge^r \Omega_X$$

der regulären r-Formen auf X.

Beispiel 5: tautologisches Bündel des $\mathbb{P}^n$

Seien $X = \mathbb{P}^n := (\check{}k^{n+1}\text{-}\{0\})/k^*$ der n-dimensionale projektive Raum und

$$\pi: \mathbb{P}^n \times k^{n+1} \to \mathbb{P}^n \ (x, v) \mapsto x,$$

das triviale Bündel vom Rang n+1 auf $\mathbb{P}^n$. Im Bündelraum betrachten wir die Teilmenge

$$\text{Taut} := \{([v], v) \mid v \in k^{n+1}\text{-}\{0\}\} \cup \mathbb{P}^n \times \{0\}.$$

Dann ist die Einschränkung von π auf Taut,

$$\pi': \text{Taut} \to \mathbb{P}^n$$

ein Vektorraumbündel vom Rang 1 (ein Geradenbündel). Die Faser über dem Punkt $x \in \mathbb{P}^n$ kann man mit x selbst identifizieren, aufgefaßt als Teilmenge des Teilmenge des k^{n+1}:

$$\pi'^{-1}(x) = \{(x,v) \mid \ v = 0 \text{ oder } [v] = x\} = \{(x,v) \mid v \in x\}.$$

Das Bündel heißt deshalb (erstes) tautologisches Bündel des $\mathbb{P}^n$. Über der Menge

$$U_i := \{ [x] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0 \}$$

besitzt das Bündel als Trivialisierung, zum Beispiel die Umkehrabbildung zu

$$U_i \times k \to \pi'^{-1}(U_i), ([x], \lambda) \mapsto ([x], \frac{\lambda}{x_i} \cdot x).$$

Die Übergangsfunktion von U_i nach U_j ist die Abbildung

$$g_{U_i U_j}: U_i \cap U_j \to GL(1, k) = k^*, [x] \mapsto \frac{x_j}{x_i}.$$

Beispiel 6: zweites tautologisches Bündel des $\mathbb{P}^n$

Statt den Punkt $[v] \in X = \mathbb{P}^n$ als eine Gerade im k^{n+1} aufzufassen, kann man ihn auch mit der Hyperebene identifizieren, deren Gleichung als Koeffizienten gerade die Koordinaten von v hat, d.h. [v] wird mit der Hyperebene

$$< v, x > = 0$$

identifiziert. Dann kann man die analoge Konstruktion wie eben ausführen und

$$\text{Taut'} :=^{47} \{([v], x) \in \mathbb{P}^n \times k^{n+1} \mid < v, x > = 0\}$$

$$=^{48} \{([v], x) \in \mathbb{P}^n \times k^{n+1} \mid v^{\perp}\}.$$

$$=^{49} \mathbb{P}^n \times k^{n+1}/\text{Taut}$$

Man erhält ein weiteres tautologisches Bündel (vom Rang n)

$$\pi'': \text{Taut'} \to \mathbb{P}^n,$$

Die Faser über $x \in \mathbb{P}^n$ kann man mit der Menge x identifizieren, wenn x als Hyperebene im k^{n+1} ansieht. Dieses Bündel nennen wir zweites tautologisches Bündel des projektiven Raums. Aus den Definitionen der beiden tautologischen Bündel erhält man eine kurze exakte Bündelsequenz

$$0 \to \text{Taut} \to \mathbb{P}^n \times k^{n+1} \to \text{Taut'} \to 0,$$

Bemerkung
$\text{Taut'} \otimes \text{Taut}^{-1} = T_{\mathbb{P}^n}$.

A2.3.2 Modulgarben

Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{A}$ eine Garbe von kommutativen Ringen mit 1. Ein $\mathcal{A}$-Modul ist eine Garbe $\mathcal{M}$ von abelschen Gruppen auf X mit der Eigenschaft, daß für jede offene Menge

$$U \subseteq X$$

die Menge der Schnitte $\mathcal{M}(U)$ sogar die Struktur eines $\mathcal{A}(U)$-Moduls besitzt und für je zwei offene Teilmengen

$$U, V \subseteq X \text{ mit } U \subseteq V$$

das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(V) \times \mathcal{M}(V) & \to & \mathcal{M}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}(U) \times \mathcal{M}(U) & \to & \mathcal{M}(U) \end{array}$$

Dabei sollen die horizontalen Abbildungen von der Modul-Multiplikation kommen und die vertikalen von den Garben-Restriktionen. Die Kommutativität dieser Diagramme bedeutet geraden, die Modulstrukturen sind mit den Garben-Restriktionen verträglich.

Beispiel 1: freie Moduln

Seien X ein Schema und $\mathcal{M}$ die Garbe der regulären Abbildungen auf X mit Werten im k^N. Die k-Vektorraumstruktur des k^n impliziert, daß jede Abbildung

$$g: U \to k^n$$

kann mit mit den regulären Abbildungen $U \to k$, d.h. den Schnitten von $\mathcal{O}_X(U)$ multipliziert werden kann. Die Menge $\mathcal{M}(U)$ ist bezüglich dieser Muiltiplikation einer

---

[47] $< , >$ soll hier das Standard-Skalarprodukt des k^{n+1} bezeichnen.

[48] $v^{\perp}$ bezeichne das orthogonale Komplement von v bezüglich des Standard-Skalarprodukts.

[49] Wir identifizieren hier das orthogonale Komplement $v^{\perp}$ mit dem Faktorraum $k^{n+1}/k \cdot v$.

$\mathcal{O}_X(U)$ -Modul und die so definierten Modulstrukturen machen $\mathcal{M}$ zur einer Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Da ein Schnitt von $\mathcal{M}$ gerade ein n-Tupel von Schnitten von $\mathcal{O}_X$ zerfällt $\mathcal{M}$ in einer direkte Summe

$$\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \oplus ... \oplus \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X^n$$

von n Exemplaren von $\mathcal{O}_X$. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul dieser Gestalt heißt auch freier $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang n.

Beispiel 2: lokal freie Moduln

Seien X ein Schema und f: B → X ein Vektorraum-Bündel vom Rang n über X. Die Garbe Γ_f der regulären Schnitte von f,

$$\Gamma_f(U) = \{ s: U \to B \mid s \text{ regulär und } f \circ s = id_U \}$$

ist dann ein $\mathcal{O}_X$-Modul: die Vektorraumnstrukturen der Fasern von f erlauben es, die Schnitte von f mit regulären Funktionen zu multiplizieren. Ist $U \subseteq X$ eine offene Menge, über welcher das Bündel eine Trivialisierung besitzt, so läßt sich das Bündel über dieser offenen Menge mit dem trivialen Bündel

$$U \times k^n$$

identifizieren. Die Garbe der regulären Schnitte dieses Bündel ist aber frei vom Rang n, d.h. für die Garbe gilt

$$\Gamma_f|_U = \mathcal{O}_U^n.$$

Man sagt in dieser Situation, die Garbe Γ_f ist lokal frei vom Rang n.

A2.3.3 Lokal freie Garben und Vektorraumbündel

Sei X ein Schema über den Körper k. Dann definiert der Übergang zur Garbe der regulären Schnitte eine Äquivalenz von Kategorien:

$$\left(\begin{matrix} \text{Vektorraumböndel} \\ \text{vom Rang n über X} \end{matrix} \right) \to \left(\begin{matrix} \text{lokal freie Garben} \\ \text{vom Rang n auf X} \end{matrix} \right), \; B \xrightarrow{f} X \; \mapsto \; \Gamma_f ,$$

Zur Konstruktion des quasi-inversen Funktors. Sei F eine lokal freie Garbe vom Rang n auf X. Dann gibt es eine offene Überdeckung $\underline{U}$ von X und für jedes $U \in \underline{U}$ einen Isomorphismus

$$\varphi_U: F|U \to \mathcal{O}_U^n.$$

Für je zwei offene Mengen U, U' aus dieser Überdeckung mit nicht-leeren Durchschnitt erhält man so einen Isomorphismus

$$g_{UU'} = \varphi_{U'} \circ \varphi_U^{-1}: \mathcal{O}_{U \cap U'}^n \to \mathcal{O}_{U \cap U'}^n .$$

Dieser Isomorphismus ist durch eine n×n-Matrix von regulären Funktionen $U \cap U' \to k$ gegeben. Für jeden Punkt $x \in U \cap U'$ ist die zugehörigen Matrix der Werte in diesem Punkt umkehrbar, d.h. dieser Isomorphismus läßt sich auch als reguläre Abbildung

$$g_{UU'}: U \cap U' \to GL(n, k)$$

ansehen. Nach Konstruktion genügen die $g_{UU'}$ der Kozykel-Bedingung, definieren also ein Vektroraumbündel. Es ist nicht schwer zu sehen, daß die zu diesem Bündel gehörige Garbe der Schnitte gerade F ist (bis auf natürliche Isomorphie).

Bemerkung

Ist das Vektorraumbündel B → X durch die Übergangsfunktionen

$$g_{U_i U_j} : U_i \cap U_j \to GL(n,k)$$

gegeben, wobei die U_i eine offene Überdeckung von X bilden, so ist ein regulärer Schnitt dieses Bündels gegeben durch eine Familie von regulären Funktionen

$$s_i : U_i \to k^n$$

mit

$$g_{U_i U_j} \cdot s_i = s_j \text{ auf } U_i \cap U_j$$

für beliebige i und j.

A2.4 Geradenbündel und Divisoren

A2.4.1 Weil-Divisoren

Sei X ein Schema über k, welches in jedem Punkt die Dimension n hat. Ein Primdivisor auf X ist ein reduziertes irreduzibles abgeschlossnenes Teilschema

$$Y \subseteq X$$

der Dimension n-1. Die Gruppe

$$Div(X)$$

der Weil-Divisoren von X ist die von den Primdivisoren auf X erzeugte freie abelsche Gruppe. Ein Weil-Divisor

$$D \in Div(X)$$

ist somit eine formale endliche Linearkombination von Primdivisoren mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$,

$$D = \sum_{i=1}^{r} n_i Y_i \text{ mit } n_i \in \mathbb{Z} \text{ und } Y_i \text{ Primdivisor.}$$

Die Y_i mit $n_i \neq 0$ heißen Komponenten von D. Diejenigen mit $n_i > 0$ heißen Nullstellen-Komponenten von D, diejenigen mit $n_i < 0$ Polstellen-Komponenten. Sind alle $n_i \geq 0$, so heißt der Divisor D effektiv.
Im Fall dim X = 1 heißt ganze Zahl

$$\deg(D) := \sum_{i=1}^{r} n_i$$

heißt Grad von D. Aus der Definition ergibt sich unmittelbar, daß

$$\deg: Div(X) \to \mathbb{Z}$$

ein Gruppen-Homomorphismus ist.[50]

Beispiel 1

Seien $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ die Riemannsche Zahlenkugel und

$$f: X \dashrightarrow \mathbb{C}$$

eine meromorphe Funktion $\neq 0$. Dann ist f eine rationale Funktion mit endlich vielen Nullenstellen

$$p_1, \ldots, p_r$$

---

[50] Im Fall dim X > 1 sollten Primdivisoren im allgemeinen einen Grad > 1 besitzen. Zum Beispiel sollte der Grad einer irreduziblen projektiven Varietät gleich der Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden in "allgemeiner" Lage sein. Ist der Grundkörper nicht algebraisch abgeschlossen, so ist selbst der Grad von Punken im allgemeinen > 1.

der Ordnungen

$$m_1, \dots, m_r$$

und endlich vielen Polstellen

$$q_1, \dots, q_s$$

der Ordnungen

$$n_1, \dots, n_s.$$

Die Funktion f definiert also einen Divisor

$$\mathrm{div}(f) = m_1 p_1 + \dots + m_r p_r - n_1 q_1 - \dots - n_s q_s ,$$

den Nullstellen-Polstellen-Divisor.

Beispiel 2

Sei $X = \mathbb{P}^n$. Ein Primdivisor von X ist dasselbe wie eine irreduzible Hyperfläche

$$Y = V(F), F \in k[T_0, \dots, T_n] \text{ homogen und irreduzibel.}$$

Die effektiven Divisoren kann man mit den Hyperflächen

$$F = 0$$

identifizieren, die durch irgendein homogenes nicht notwendig irreduzibles Polynom F gegeben sind. Die Zerlegung von F

$$F = (F_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (F_r)^{n_r}$$

in irreduzible Faktoren F_i entspricht dann gerade der Darstellung des zugehörigen Divisors

$$\mathrm{div}(F) = \sum_{i=1}^{r} n_i V(F_i)$$

als Linearkombination von Primdivisoren. Jeder Divisor des $\mathbb{P}^n$ ist eine Differenz von zwei solchen effektiven Divisoren.

A2.4.2 Der Divisor zu einer rationalen Funktion

Seien X ein Schema über, welches in jedem Punkt die Dimension n hat und welches regulär in der Kodimension 1 ist, d.h. der singuläre Ort von X hat eine Dimension ≤ n-2, und

$$f: X \dashrightarrow k$$

eine rationale Funktion. Jeder Primdivisor $Y \subset X$ hat dann mindestens einen nicht-singulären Punkt mit X gemeinsam. Deshalt ist der lokale Ring[51]

$$\mathcal{O}_{X,Y}$$

von X im (nicht-abgeschlossenen) Punkt Y von X ein diskreter Bewertungsring. Insbesondere wird das maximale Ideal von einem Element erzeugt[52],

---

[51] $\mathcal{O}_{X,Y}$ besteht aus Quotienten

$$u/v$$

von regulären Funktionen

$$u, v: U \to k,$$

welche auf eine offenen Menge $U \subseteq X$ definiert sind, die mit Y gemeinsame Punkte besitzt, wobei der Nenner v nicht identisch Null sein soll auf $U \cap Y$. Dabei sollen u und v als Schnitte von $\mathcal{O}_X$ Nicht-Nullteiler sein. Funktionen, die auf irgendeiner offenen Menge U der beschriebenen Art übereinstimmen, werden dabei als gleich angesehen.

[52] Y wird in den nicht-singulären Punkten von X lokal durch eine Gleichung definiert. Das Element π ist der Keim einer solchen Gleichung.

$$m_{X,Y} = \pi \mathcal{O}_{X,Y}$$

und jedes von Null verschiedene Element aus dem Quotientenkörper von $\mathcal{O}_{X,Y}$ hat die Gestalt

$$e \cdot \pi^n$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ und einer Einheit e von $\mathcal{O}_{X,Y}$. Insbesondere hat das durch f definierte Element diese Gestalt[53],

$$f = e \cdot \pi^n.$$

Wir sagen in dieser Situation, f hat entlang Y die Ordnung n und schreiben

$$ord_Y(f) = n.$$

Im Fall $n \geq 0$ sagn wir auch f hat entlang Y die Nullstellen-Ordnung n und im Fall $n \leq 0$, f hat entlang Y die Polstellen-Ordnung $|n|$.

Bemerkungen

(i) Ist X außerdem ein Noethersches Schema, d.h. X besitzt eine endliche Überdeckung durch Schemata der Gestalt

$$\operatorname{Spec} A,$$

wobei A ein noethercher Ring ist, so ist die Anzahl der Primdivisoren mit

$$ord_Y(f) \neq 0$$

endlich und

$$div(f) := \sum_{Y \text{ Primdivisor von } X} ord_Y(f) \cdot Y$$

ist ein Weil-Divisor von X. Die Divisoren dieser Gestalt heißen Hauptdivisoren und bilden eine eine Untergruppe der Gruppe der Weil-Divisoren,

$$P(X) \subseteq Div(X).$$

Der Hauptdivisor div(f) heißt auch Polstellen-Nullstellen-Divisor von f.
Die Faktorgruppe

$$Cl(X) := Div(X)/P(X)$$

heißt Divisorklassengruppe.

(ii) Ist X ein 1-dimensionalens glattes projektives Schema, d.h. ein (durch eine Idealgarbe definiertes) abgeschlossenes Teilschema eines $\mathbb{P}^n$, so ist der Grad jedes Hauptdivisors gleich Null,

$$\deg D = 0 \text{ für } D \in P(X).$$

Im Fall $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ entspricht dies gerade der Aussage, daß die Polstellengesamtordnung einer meromorphen Funktion gleich ihrer Nullstellengesamtordnung ist.

Allgemein hat man also

$$P(X) \subseteq \operatorname{Ker}(\deg),$$

d.h. der Grad-Homomorphismus faktorisiert sich über die Divisorklassengruppe und definiert so einen Homomorphismus

---

[53] Man kann sich die Zerlegung

$$f = e \cdot \pi^n$$

als eine Art Primfaktor-Zerlegung von f vorstellen, wobei die zu π teilerfremden Faktoren in e zusammengefaßt sind.

$$\deg: Cl(X) \to \mathbb{Z}.$$

(iii) Weil-Divisoren sind die Objekte, die leicht zu definieren aber schwer zu verstehen sind. Wir definieren nachfolgend eine Variante des Divisor-Begriffs, deren Definition komplizierter ist, die aber viele schöne Eigenschaften hat, die dem Begriff des Weil-Divisors fehlen. In vielen Situationen stimmen die beiden Divisorbegriffe überein. Zum Beispiel ist dies der Fall, wenn das Schema X glatt ist.

A2.4.3 Cartier-Divisoren

Sei X ein Schema über k. Ein Cartier-Divisor ist etwas, was lokal durch eine rationale Funktion definiert ist, welche man lokale Gleichung des Divisors nennt. Die konkreten lokalen Gleichungen des Divisors werden dabei als unwesentlich angesehen: lokale Gleichungen mit demselben Nullstellen-Polstellen-Verhalten sollen denselben Divisor beschreiben.

Genauer: ein Cartier-Divisor auf X ist gegeben durch eine offene Überdeckung

$$X = \cup_{i\in I} U_i$$

von X und für jedes $i\in I$ durch einen Nicht-Nullteiler[54]

$$r_i \in Q(\mathcal{O}_X(U_i))$$

aus dem vollen Quotientenring von $\mathcal{O}_X(U_i)$. Für je zwei Indizes $i, j \in I$ sei dabei der Quotient

(1) $$r_i/r_j \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$$

eine Einheit über $U_i \cap U_j$.[55]

Zwei durch die Daten

$$\{(U_i, r_i)\}_{i\in I} \text{ bzw. } \{(V_j, s_j)\}_{j\in J}$$

gegebene Cartier-Divisoren werden als gleich angesehen, wenn für jedes $i\in I$ und jedes $j\in J$ der Quotient

$$r_i/s_j \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap V_j)$$

eine Einheit von $\mathcal{O}_X(U_i \cap V_j)$ ist (falls $U_i \cap V_j \neq \emptyset$).

Die rationale Funktion r_i heißt lokale Gleichung auf U_i des Cartier-Divisors.

Cartier-Divisoren lassen sich addieren, indem man deren lokale Gleichungen multipliziert. Sie bilden eine abelsche Gruppe, die wir mit

$$CaDiv(X)$$

bezeichnen.

Ein Cartier-Divsisor heißt effiektiv, wenn er ein Systsem von lokalen Gleichungen besitzt, die reguläre Funktionen sind. Sind D' und D" Cartier-Divisoren, so schreiben wir

---

[54] Nullteiler sind Funktionen, die auf einer ganzen Komponente von X Null sind. Divisoren sollten aber Objekte der Kodimension 1 sein.

[55] Der Quotient soll also eine Funktion sein, die weder Pole noch Nullstellen hat auf $U_i \cap U_j$. Mit anderen Worten, r_i und r_j sollen auf $U_i \cap U_j$ dieselben Pole und Nullstellen und das sogar mit denselben Vielfachheiten haben.

$$D' \geq D'',$$

wenn die Differenz D'-D" ein effektiver Divisor ist.

Beispiel 1
Sei $X = \mathbb{P}^n$. Der Divisor

$$\mathrm{div}(F)$$

zum homogenen Polynom F des Grades d ist ein Cartier-Divisor, welcher auf der offenen Menge

$$U_i := \{x \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$$

die lokale Gleichung

$$f_i := F/X_i^d$$

besitzt. Man beachte, auf $U_i \cap U_j$ ist

$$f_i/f_j = X_j^d/X_i^d$$

eine reguläre Funktion ohne Nullstellen oder Pole, also eine Einheit von $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$.
Die Cartier-Divisoren dieser Gestalt wollen wir effektive Cartier-Divisoren des $\mathbb{P}^n$ nennen. Jeder Cartier-Divisor des $\mathbb{P}^n$ ist Differenz von zwei Divisoren effektiven Cartier-Divisoren.

Beispiel 2
Sei X ein projektives Schema, d.h. ein abgeschlossenes Teilschema des projektiven Raumes, sagen wir

$$X \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Durch Einschränken der lokalen Gleichungen der effektiven Cartier-Divisoren des $\mathbb{P}^n$ erhält man Cartier-Divisoren von X. Divisoren, die auf diese Weise zustandekommen (bezüglich irgendeiner Einbettung von X in einen projektiven Raum) heißen Hyperflächenschnitte oder auch sehr ample. Divisoren, welche ein Vielfaches besitzen, welches sehr ample ist, heißen ample. Man kann zeigen, jeder Divisor

$$D \in \mathrm{CaDiv}(X)$$

auf einem projektiven Schema ist Differenz von zwei sehr amplen Divisoren,

$$D = D' - D'' \text{ mit } D', D'' \text{ sehr ample,}$$

genauer: es gibt zwei Einbettungen

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}^m \text{ und } X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$$

in einen projektiven Raum, einen Hyperflächenschnitt D' bezüglich der einen Einbetung, einen Hyperflächenschnitt D" bezüglich der anderen Einbettung, so daß $D = D' - D''$ ist.

Bemerkungen

(i) Sei $\mathfrak{R}_X$ die Garbe der rationalen Funktionen auf X (d.h. Garbe der vollen Quotientenring von $\mathcal{O}_X$. Betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_X^* \to \mathfrak{R}_X^* \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{R}_X^*/\mathcal{O}_X^* \to 0$$

von Garben multiplikativer abelscher Gruppen. Die einen Cartier-Divisor definierenden Daten

$$\{(U_i, r_i)\}_{i\in I}$$

bestimmen eine Familie von lokalen Schnitten von $\mathfrak{R}_X^*$ und damit eine Familie von lokalen Schnitten der Faktorgarbe

$$\mathfrak{R}_X^*/\mathcal{O}_X^*.$$

Die Bedingungen (1) bedeuten gerade, daß sich diese letztere Familie zu einem globalen Schnitt dieser Faktorgarbe verheften lassen. Zwei Familien, die denselben Cartier-Divisor definieren, bestimmen dabei denselben globalen Schnitt dieser Faktorgarbe.

(ii) Ist umgekehrt

$$r \in \Gamma(X, \mathfrak{R}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$$

ein globaler Schnitt, so gibt es eine offene Überdeckung

$$X = \cup_{i\in I} U_i$$

und für jedes $i\in I$ einen Schnitt

$$r_i \in \mathfrak{R}_X(U_i)$$

mit

$$\gamma(r_i) = r|_{U_i}.$$

Weil die Bilder bei γ von r_i und r_j über $U_i\cap U_j$ beide gleich $r|_{U_i\cap U_j}$ sind, liegt der Quotient der beiden Schnitt im Kern von γ,

$$r_i/r_j \in \mathrm{Ker}(\gamma)(U_i\cap U_j) = \mathcal{O}_X^*(U_i\cap U_j).$$

Die Familie der r_i definiert also einen Cartier-Divisor.

(iii) Wir haben gezeigt, Cartier-Divisoren sind nichts anderes als die globalen Schnitte der Faktorgarbe $\mathfrak{R}_X^*/\mathcal{O}_X^*$. Es gilt also

$$\mathrm{CaDiv}(X) = \Gamma(X, \mathfrak{R}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$$

(iv) Ein Cartier-Divisor, der von einer global definierten rationalen Funktion

$$r\in\Gamma(X, \mathfrak{R}_X),$$

d.h. durch die einelementige Familie { (X, r) } gegeben ist, heißt Hauptdivisor. Die Menge der Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe

$$\mathrm{CaP}(X) \subseteq \mathrm{CaDiv}(X)$$

der Gruppe aller Cartier-Divisoren. Die zugehörige Faktorgruppe

$$\mathrm{Pic}(X) := \mathrm{CaDiv}(X)/\mathrm{CaP}(X)$$

heißt Picard-Gruppe von X.

(v) Die Konstruktion von Bemerkung A2.4.2(i), welche einer rationalen Funktion ein Element von P(X) zuordnet, gestattet es, jedem Cartier-Divisor

$$D \in \mathrm{CaDiv}(X)$$

einen Weil-Divisor zuzuordnen: man definiere die Ordnung

$$\mathrm{ord}_Y(D) \in \mathbb{Z}$$

mit Hilfe der lokalen Gleichungen von D (statt eine global definierte rationale Funktion zu verwenden). Die Relationen zwischen den lokalen Gleichungen von D sorgen dann gerade dafür, daß die Definition der Ordnung nicht von der speziellen Wahl der lokalen Gleichung abhängt.[56] Mit Hilfe der Ordnungsfunktionen definiert man dann den zu D gehörigen Weil-Divisor als

$$[D] := \sum_{Y \text{ Primdivisor}} \mathrm{ord}_Y(D) \cdot Y$$

(vi) Inverse Bilder. Seien $f: X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und D ein durch $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$ gegebener Cartier-Divisor mit der Eigenschaft, daß die Verpflanzungen

$$f^*(f_i) = f_i \circ f$$

wohldefiniert sind (d.h. das Bild von f soll nicht ganz aus "Polstellen" von D bestehen). Dann ist durch $\{(f^{-1}(U), f^*(f))\}_{i \in I}$ ein Divisor

$$f^*D \in \mathrm{CaDiv}(X)$$

definiert. Er heißt inverses Bild von D bei D. Dieselbe Konstruktion kann man auf die Übergangsfunktionen eines Vektorraumbündels

$$\pi: B \to Y$$

anwenden. Da die Übergangsfunktionen keine Pole haben, ist die Konstruktion ohne jede Einschränkung an das Bündel immer möglich. Man erhält auf diese Weise ein Vektorraumbündel

$$f^*(\pi): f^*(B) \to X,$$

welches inverses Bild des Bündels $\pi: B \to Y$ entlang f heißt.

Anmerkungen zur Garben-Theorie

(i) Sei

$$f: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

ein Morphimus vom Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X. Dann existiert der Kern von f, und für jede offene Menge $U \subseteq X$ ist

$$\Gamma(U, \mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Ker}(f_U: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)).$$

Außerdem existiert der Kokern von f. Dieser läßt sich aber nicht auf so einfache Weise definieren. Die durch

(1) $$P(U) := \mathrm{Koker}(f_U: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$$

definierte Prägarbe ist nämlich im allgemeinen keine Garbe. Zu jeder Prägarbe P gibt es aber eine Garbe $\tilde{P}$ und einen Morphismus

$$P \to \tilde{P}$$

mit der Eigenschaft, daß sich jeder Morphismus

$$P \to P'$$

von Prägarben mit Werten in einer Garbe P' in eindeutiger Weise über $P \to \tilde{P}$ faktorisiert. Die Garbe $\tilde{P}$ heißt die zu P assoziierte Garbe. Ist P durch (1) definiert, so ist $\tilde{P}$ gerade der Kokern von f in der Kategorie der Garben abelscher Gruppen.

(ii) Eine Sequenz

$$\mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$$

---

[56] Man muß jedoch solche lokalen Gleichungen (U_i, f_i) verwenden, für die $U_i \cap Y$ nicht leer ist.

von Garben abelscher Gruppen auf X ist genau dann exakt, wenn für jeden Punkt $x \in X$ die zugehörige Sequenz der Halme

$$\mathcal{F}'_x \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}''_x$$

exakt ist.

(iii) **Beispiel**

Seien $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ die Riemannsche Zahlenkugel und

$$Y = \{x, y\} \subseteq X$$

eine Teilmenge aus zwei verschiedenen Punkten. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ setzen wir

$$\mathcal{G}(U) := \{ \text{Menge der regulären Funktionen } U \cap Y \to k \}.$$

Auf diese Weise ist eine Garbe $\mathcal{G}$ von abelschen Gruppen definiert, und die Einschränkung auf Y definiert einen Garben-Homomorphismus

$$\varphi: \mathcal{O}_X \to \mathcal{G},\ U \xrightarrow{\alpha} k \text{ a } U \cap Y \xrightarrow{\alpha|_{U \cap Y}} k.$$

Der Kern dieses Morphismus ist gerade die Idealgarbe $\mathcal{I}_Y$ von Y,

$$\mathcal{I}_Y(U) = \{s \in \mathcal{O}_X(U) \mid s|_{U \cap Y} = 0\}$$

Setzt man

$$P(U) := \mathcal{O}_X(U)/\mathcal{I}_Y(U)$$

für jede offene Menge $U \subseteq X$, so erhält man eine Prägarbe, die keine Garbe ist. Das kann man wie folgt einsehen. Da $\mathcal{I}_Y$ der Kern von φ ist, faktorisiert sich φ als Prägarbenhomomorphismus über P, d.h. für jede offene Mengen U haben wir einen injektiven Homomorphismus von abelschen Gruppen

$$P(U) \to \mathcal{G}(U),\ s \bmod \mathcal{I}_Y(U) \text{ a } s|_{Y \cap U}\,.$$

der mit den Garben-Restriktionen verträglich ist. Auf diese Weise ist somit ein injektiver Homomorphismus von Prägarben

(2) $$P \to \mathcal{G}$$

definiert. Außerdem gibt es für jeden Punkt $x \in X$, eine offene offenen Umgebung von x mit der Eigenschaften, daß jeder Schnitt $s \in \mathcal{G}(U)$ Einschränkung eines Schnittes von $\mathcal{O}_X$ ist.[57] Insbesondere liegt dann s im Bild von (2). Wäre P eine Garbe, so würde sich aus dem Garben-Axiomen ergeben, daß (2) ein Isomorphimus ist. Dann ist aber nicht der Fall, denn es gilt

$$P(X) = k$$

weil jede auf ganz X reguläre Funktion konstant ist und

$$\mathcal{G}(X) = k \oplus k,$$

weil eine reguläre Funktion auf einer zweipunktigen Menge zwei beliebig wählbare Werte annehmen kann. Man kann zeigen, $\mathcal{G}$ ist die assoziierte Garbe zu P. Sie entsteht aus P durch zusammenkleben lokaler Schnitte von P.

A2.4.4 Linear äquivalente Cartier-Divisoren und Schnitte mit Kurven

Zwei Cartier-Divisoren D und D' auf X heißten linear äquivalent, wenn ihre Differenz ein Hauptdivisor ist. Man schreibt dann

---

[57] Man wähle U so klein, daß $U \cap Y$ aus genau einen Punkt besteht. Die Schnitte von $\mathcal{G}(U)$ sind dann konstante Funktionen, entstehen also durch Einschränkung konstanter Funktionen auf X.

$$D \sim D' \Leftrightarrow D - D' = \mathrm{div}(f) \text{ für ein } f \in \mathfrak{R}_X(X).$$

Beispiel

Zwei effektive Divisoren im $\mathbb{P}^n$ sind genau dann linear äquivalent, wenn die definierenden homogenen Polynome denselben Grad haben.

Bemerkungen

(i) Sei $C \subseteq X$ eine Kurve von X, die sich mit den Komponenten von D in nur endlich vielen Punkten schneidet. Durch Einschränkung der lokalen Gleichungen von D auf C erhält man dann einen Cartier-Divisor

$$D|_C \in \mathrm{CaDiv}(C),$$

welcher Einschränkung von D auf C heißt. Schneiden sich auch die Komponenten von D' in nur endlich vielen Punkten, so gilt dasselbe für die Komponenten von

$$\mathrm{div}(f) = D - D',$$

d.h. die Einschränkung von f auf C ist eine wohldefinierte rationale Funktion auf C und es gilt

$$D|_C - D'|_C = \mathrm{div}(f|_C),$$

d.h. die Einschränkung linear äquivalenter Divisoren sind linear äquivalent.

(ii) Seien X ein projektives Schema und $C \subseteq X$ eine in X abgeschlossene Kurve. Aus der Darstellung der Divisoren auf X als Differenz sehr ampler Divisoren ergibt sich, daß es zu jedem Divisor auf X einen linear äquivalenten gibt, der C nur in endliche vielen Punkten schneidet. Die Einschränkung auf C definiert deshalb einen Gruppen-Homomorphismus[58]

$$\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(C),\ [D] \mapsto [D]|_C := [D|_C] .$$

Die ganze Zahl[59]

$$(D \cdot C) := \deg [D]|_C$$

ist damit für jeden Cartier-Divisor auf X definiert, hängt nur von dessen linearer Äquivalenzklasse ab und heißt Schnitt-Vielfachheit von D mit C oder auch Schnitt-Index von D mit C. Nach Konstruktion gilt

$$(D' + D'' \cdot C) = (D' \cdot C) + (D'' \cdot C).$$

(iii) Der Schnitt-Index $(D \cdot C)$ bleibt sogar unverändert, wenn man D durch eine algebraisch äquivalenten Divisor ersetzt. Genauer: ist

$$f: X \to D$$

ein surjektiver Morphismus mit Werten in einer glatten zusammenhängenden Kurve D, so gilt für je zwei Punkte

$$p', p'' \in D$$

(aufgefaßt als Divisoren auf D),

$$(f^*p' \cdot C) = (f^*p'' \cdot C).$$

(iv) Die Definition des Schnitt-Index gestattet es, den Unterschied zwischen Weil- und Cartier-Divisoren näher zu beleuchten. Wir wissen bereits, Cartier-Divisoren lassen sich im allgemeinen als Weil-Divisoren interpretieren. Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch. Betrachten wir den Kreiskegel

---

[58] Zur Berechnung des Bildes der Restklasse [D] von D wähle man in dieser Äquivalenzklasse einen Divisor, der C in nur endlich vielen Punkten schneidet.

[59] Eigentlich haben wir den Grad-Homomorphismus nur für den Fall glatter Schemata und den Fall von Weil-Divisoren. Wir können jedoch den Repräsentanten in der linearen Äquivalenzklasse [D] so wählen, daß er die Kurve C nur in (endlich vielen) Punkten schneiden, in denen die Kurve nicht-singulär ist. Dann kann man den zugehörigen Weil-Divisor und dessen Grad in der üblichen Weisen definieren (und der Grad hängt nach wie vor nur von der linearen Äquivalenzklasse ab).

$$X := V(X^2+Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$$

mit der Spitze im Ursprung und dessen Abschließung im projektiven Raum

$$\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^3.$$

Die Summe von je zwei Mantellinien

$$\ell_1 + \ell_2 = H'|_{\overline{X}} \quad , H' \subseteq \mathbb{P}^3$$

dieses Kegel ist ein Hyperebnenschnitt, also ein Cartier-Divisor, der linear äquivalent jeder Ellipse

$$\ell_1 + \ell_2 \sim E = H''|_{\overline{X}} \quad , H'' \subseteq \mathbb{P}^3,$$

die durch Schneiden des Kegels mit irgendwelchen Hyperebenen H" entstehen. Die Hyperebene H' kann man auch so wählen, daß die beiden Mantellinien ℓ_i zusammenfallen,

$$2\ell = H'|_{\overline{X}} \quad , H' \subseteq \mathbb{P}^3$$

Jede Mantellinie schneidet nun aber jede Ellipse E (transversal) in genau einem Punkt, d.h. es gilt

$$1 = (E, \cdot\, \ell) = (2\ell\ , \ell)\ .$$

Wäre ℓ ein Cartier-Divisor, so müßte aber die Selbstschnittzahl von ℓ ein ganze Zahl sein mit

$$1 = 2(\ell, \ell),$$

was offensichtlich nicht möglich ist.

A2.4.5 Das Geradenbündel zu einem Cartier-Divisor

Seien X ein Schema über k und D ein Cartier-Divisor mit den lokalen Gleichungen

$$\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$$

Für je zwei Indizes i, j ∈ I definieren dann die lokalen Gleichungen f_i, f_j eine reguläre Funktion[60]

$$g_{U_iU_j} : U_i \cap U_j \to k^* = GL(1, k),\ x \mapsto \frac{f_j(x)}{f_i(x)}$$

Nach Konstruktion genügen die Funktionen $g_{U_iU_j}$ den Kozykel-Bedingungen und sind daher die Übergangsfunktionen eines Geradenbündels, welches mit

$$\mathcal{O}_X(D)$$

bezeichnet wird.[61]

Bemerkungen

(i) Bildet man die Summe zweier Cartier-Divisoren D' und D", d.h. multipliziert man deren lokale Gleichungen, so erhält man die Übergangsfunktionen zum Bündel

$$\mathcal{O}_X(D'+D''),$$

indem man die Übergangsfunktionen zu $\mathcal{O}_X(D')$ und $\mathcal{O}_X(D'')$ miteinander multipliziert. Mit anderen Worten, es gilt

---

[60] Man könnte genuusogut f_i/f_j anstelle von f_j/f_i wählen können. Unsere Wahl des Quotienten entspricht den klassischen Konventionen.

[61] Wir wählen ab jetzt dieselben Bezeichnungen für das Geradenbündel und die Garbe von dessen regulären Schnitten.

$$\mathcal{O}_X(D' + D'') \cong \mathcal{O}_X(D') \otimes \mathcal{O}_X(D'').$$

(ii) Die Abbildung

$$\mathrm{CaDiv}(X) \to \{\text{Isomorphie-Klassen von Geradenbündeln}\},\ D \mapsto \mathcal{O}_X(D).$$

ist ein Gruppen-Homomorphismus, wenn man die Gruppe rechts mit dem Tensorprodukt als Gruppen-Operation versieht. Die Gruppen-Axiome für die Menge rechts ergibt sich aus den allgemeinen Eigenschaften des Tensorprodukts. Das triviale Bündel $\mathcal{O}_X$ spielt dabei die Rolle des Einselements. Das inverse Elemente erhält man, indem man die Übergangsfunktionen des Ausgangsbündels invertiert.

(iii) Die Existenz des Inversen in der Gruppe der Isomomorphie-Klassen der Geradenbündel auf X bedeutet, zu jeder lokal freien Garbe $\mathfrak{L}$ vom Rang 1 gibt es eine lokal freie Garbe $\mathfrak{L}'$ vom Rang 1 mit

$$\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{L}' \cong \mathcal{O}_X \cong \mathfrak{L}'\otimes\mathfrak{L}.$$

Man kann zeigen, diese Eigenschaft charakterisiert die lokal freien Garben vom Rang 1 unter den Modulgarben. Sie heißen deshalb auch umkehrbare Garben.

(iv) Die lokalen Gleichungen von linear äquivalenten Cartier-Divisoren D' und D'' unterscheiden sich um einen festen global definierten Faktor $f \in \mathcal{R}_X(X)$. Die zugehörigen Garben $\mathcal{O}_X(D')$ und $\mathcal{O}_X(D'')$ gehen deshalb als Teilgarben von $\mathcal{R}_X$ bei Multiplikation mit diesem Faktor ineinander über, d.h. es gilt

$$D' \sim D'' \Rightarrow \mathcal{O}_X(D') \cong \mathcal{O}_X(D'').$$

Insbesondere definiert der Gruppen-Homomorphismus von (ii) einen Gruppen-Homomorphismus

$$\mathrm{Pic}(X) \to \{\text{Isomorphie-Klassen von Geradenbündeln}\}.$$

Wir werden gleich zeigen, dies ist ein Isomorphismus. Wir werden deshalb oft keinen Unterschied mehr machen zwischen Pic(X) und der Gruppe der Isomorphie-Klassen von Geradenbündeln.

A2.4.6 Der Cartier-Divisor zu einem Geradenbündel

Sei umgekehrt $\mathfrak{L}\to X$ ein Geradenbündel über dem noetherschen k-Schema X. wir bezeichnen mit $\mathfrak{L}$ auch die zugehörige lokal freie Garbe vom Rang 1. Ein Schnitt von $\mathfrak{L}$ ist bereits eindeutig festgelegt, wenn er auf einer offenen dichten Teilmenge von X gegeben ist. Jeder Schnitt definiert deshalb eine rationale Funktion auf X,[62] die auf jeder Zusammenhangskomponente eindeutig bis auf einen von Null verschiedenen Faktor ist. Die Multiplikation von rationalen Funktionen definiert dann einen Homomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln

(1) $$\mathfrak{L}\otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}_X \to \mathcal{R}_X .$$

Da $\mathfrak{L}$ lokal frei vom Rang 1 ist, induziert dieser für die Halme in jedem Punkt einen Isomorphismus,

---

[62] Man wähle auf jeder Komponente von X eine offene Teilmenge, die disjunkt ist zu allen anderen Komponenten und über welcher das Geradenbündel trivial ist. Auf der Vereinigung dieser offenen Mengen ist der Schnitt durch eine reguläre Funktione gegeben.

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} Q(\mathcal{O}_{X,x}) \to Q(\mathcal{O}_{X,x})$$

also ist (1) selbst schon ein Isomorphismus. Die natürliche Abildung

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}_X$$

identifiziert $\mathcal{L}$ mit einer Teilgarbe von $\mathcal{R}_X$. Da $\mathcal{L}$ lokal frei vom Rang 1 ist, wird $\mathcal{L}$ lokal als $\mathcal{O}_X$-Modul von einem Element erzeugt. Insbesondere gibt es eine offene Überdeckung

$$X = \cup_{i \in I} U_i$$

von X und Nicht-Nullteiler[63] $f_i \in \mathcal{R}_X(U_i)$ mit[64]

$$\mathcal{L}|_{U_i} = \frac{1}{f_i} \mathcal{O}_X|_{U_i} \text{ (als Teilgarben von } \mathcal{R}_X|_{U_i}).$$

Da über $U_i \cap U_j$ die beiden von $1/f_i$ und $1/f_j$ erzeugten $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$-Teilmoduln von $\mathcal{R}_{U_i \cap U_j}$ übereinstimmen, muß insbesondere

$$\frac{1}{f_i} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) = \frac{1}{f_j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j),$$

d.h. f_i/f_j und f_j/f_i sind beides Schnitte von $\mathcal{O}_X$, d.h. es gilt

(2) $$\frac{f_j}{f_i} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j) \text{ für beliebige } i, j \in I.$$

Mit anderen Worten, die Famlie

$$\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$$

definiert einen Cartier-Divisor D.

Bemerkungen

(i) Als Trivialisierung der Garbe $\mathcal{L}$ über U_i kann man die Multiplikation mit f_i wählen,

$$\varphi_{U_i} : \mathcal{L}|_{U_i} = \frac{1}{f_i}\mathcal{O}_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}, \; s \; a \; sf_i \; .$$

Als System von Übergangsfunktionen des Bündels $\mathcal{L}$ erhält man dann die Quotienten (2), d.h.

$$g_{U_i U_j} := \frac{f_j}{f_i}$$

ist gerade Übergangsfunktine von U_i nach U_j des Bündels $\mathcal{L}$. Für den zu $\mathcal{L}$ gehörigen Divisor D gilt damit aber

---

[63] Wäre der Erzeuger ein Nullteiler, so wäre davon erzeugte $\mathcal{O}_X$ nicht lokal frei.

[64] Die f_i sind als Schnitte von $\mathcal{R}_X$ Eineheit. Ob man f_i oder $1/f_i$ als Erzeuger wählt ist somit nur eine Frage der Konventionen. Wir wählen hier $1/f_i$, damit unsere Konstruktion mit der von A2.4.5 zusammenpaßt.

$$\mathfrak{L} \cong \mathcal{O}_X(D).$$

Insbesondere ist die Abbildung von A2.4.5(iv) surjektiv.

(iii) Sind umgekehrt D' und D" Cartier-Divisoren mit

$$\mathcal{O}_X(D') \cong \mathcal{O}_X(D").$$

Dann sind D' und D" linear äquivalent (d.h. die Abildung von A2.4.2(iv) ist injektiv).

Um das einzusehen tensorieren wir mit $\mathcal{O}_X(-D")$ einen Isomorphimus

$$\mathcal{O}_X(D'- D") \cong \mathcal{O}_X.$$

Es reicht deshalb zu zeigen, ein Cartier-Divisor D mit

(3) $$\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X.$$

ist ein Hauptdivisor. Sei

$$\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$$

ein System von lokalen Gleichungen für D, d.h.

$$\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} = \frac{1}{f_i}\mathcal{O}_{U_i} \text{ (als Teilgarben von } \mathfrak{R}_{U_i})$$

Beim Isomorphismus (3) entspricht dem globalen Erzeuger

$$1 \in \mathcal{O}_X(X)$$

des $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{O}_X$ ein globaler Erzeuger, sagen wir

$$f \in \mathcal{O}_X(D)(X)$$

Mit anderen Worten, für jede offene Menge $U \subseteq X$ gilt

$$\mathcal{O}_X(D)|_U = f\cdot\mathcal{O}_U \text{(als Teilgarben von } \mathfrak{R}_U).$$

Das gilt insbesondere für $U = U_i$, d.h. es ist für jedes i

$$\frac{1}{f_i}\mathcal{O}_{U_i}(U_i) = f\mathcal{O}_{U_i}(U_i),$$

d.h.

$$ff_i = e_i \in \mathcal{O}^*_{U_i}(U_i).$$

Mit anderen Worten f_i und 1/f haben dasselben Polstellen-Nullstellen-Verhalten auf U_i (für jedes i), definieren also denselben Cartier-Divisor, d.h.

$$D = \text{div}\,(\frac{1}{f})$$

ist ein Hauptdivisor.

Beispiel 1: effektive Divisoren als abgeschlossene Teilschemata

Sei D ein effektiver Cartier-Divisor mit den lokalen Gleichungen

$$\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}\ .$$

Dann wird

$$\mathcal{O}_X(-D)$$

lokal über U_i als $\mathcal{O}_X$-Modul von der regulären Funktion f_i erzeugt, ist also eine Teilgarbe der Strukturgarbe,

$$\mathcal{O}_X(-D) \subseteq \mathcal{O}_X ,$$

genauer, eine Idealgarbe. Die Punkte des zugehörigen abgeschlossenen Teilschemas von X sind gerade die Nullstellen der lokalen Gleichungen von D. Wir können D als abgeschlossenes Teilschema von X mit der Idealgarbe $\mathcal{O}_X(-D)$ auffassen.

Beispiel 2: das tautologische Bündel als Bündel zu einem Divisor

Sei D der Cartier-Divisor auf $X := \mathbb{P}^n$ zum homomogen Polynom X_0:

$$D: X_0 = 0$$

(d.h. die Fernhyperebene). Für die lokale Gleichung von D auf

$$U_i := \{x \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0)\}$$

erhalten wir die Funition $f_i = \frac{X_0}{X_i}$. Die Übergangsfunktionen des zugehörigen Geradenbündels von U_i nach U_j sind

$$g_{U_iU_j} = \frac{f_j}{f_i} = \frac{X_i}{X_j} .$$

Diese Funktionen sind aber gerade invers zu den Übergangsfunktionen des tautologischen Bündels des $\mathbb{P}^n$ (vgl. Beispiel 5 von A2.3.1), d.h. es gilt

$$\text{Taut} \cong \mathcal{O}_X(-D).$$

Beispiel 3: die Bündel zu den Hyperflächen des projektiven Raums

Sei D der Cartier-Divisor auf $X := \mathbb{P}^n$ zum homogenen Polynom F des Grades m.

$$D: F = 0.$$

Für die lokale Gleichung von D auf

$$U_i := \{x \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0)\}$$

erhalten wir die Funition $f_i = \frac{F}{X_i^m}$. Die Übergangsfunktionen des zugehörigen Geradenbündels von U_i nach U_j sind dann

$$g_{U_iU_j} = (\frac{f_j}{f_i})^m = (\frac{X_i}{X_j})^m,$$

d.h. die m-ten Potenzen der Übergangsfunktionen des tautologischen Bündels,

$$\mathcal{O}_X(-D) \cong \text{Taut}^{\otimes m}.$$

Bemerkungen

(iv) Wir wir wissen, liefern Hyperflächen gleichen Grades linear äquivalente Divisoren, also isomorphe Bündel. Das Bündel zum Divisor D hängt deshalb nur vom Grad m der Hyperfläche ab. Man schreibt deshalt auch

$$\mathcal{O}_X(D) =: \mathcal{O}_X(m).$$

Für das tautologische Bündel erhalten wir insbesondere

$$\text{Taut} = \mathcal{O}_X(-1).$$

Die zu $\mathcal{O}_X(m)$ inverse Garbe (bezüglich des Tensoerprodukts) bezeichnen wir

$$\mathcal{O}_X(-m).$$

Wir haben damit für jede ganze Zahl $m\in\mathbb{Z}$ eine umkehrbare Garbe

$$\mathcal{O}_X(m)$$

auf $\mathbb{P}^n$ definiert, wobei gilt

$\mathcal{O}_X(m')\otimes\mathcal{O}_X(m'') \cong \mathcal{O}_X(m'+m'')$ für $m', m'' \in\mathbb{Z}$ und $\mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X$.

(v) Da jeder Divisor auf $\mathbb{P}^n$ Differenz von zwei effektiven Divisoren ist, ist jede Garbe auf dem projektiven Raum isomoprh zu einer Garbe der Gestalt $\mathcal{O}_X(m)$ mit $m\in\mathbb{Z}$. Durch Einschränken eines homogenen Polynoms des Grades m auf einen linearen Unterraum in allgemeiner Lage erhält man ein homogenes des Grades m. Die Einschränkung von $\mathcal{O}_X(m)$ auf eine projektive Gerade

$$C := \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^n$$

ist somit

$$\mathcal{O}_X(m)|_C = \mathcal{O}_C(m).$$

Wegen

$$\deg \mathcal{O}_C(m) = m,$$

sind die Garben $\mathcal{O}_C(m)$ für verschiedene Werte von m nicht isomorph. Dann gilt dasselbe aber auch für die Garben $\mathcal{O}_X(m)$. Wir haben gezeigt, die Abbildung

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n),\ m \mapsto \mathcal{O}_X(m),$$

ist ein Isomorphismus.

A2.4.7 Schnitte in Geradenbündel als Räume von rationalen Funktionen, lineare Systeme

Seien X ein Schema über k, D ein Cariter-Divisor auf X mit den System lokaler Gleichungen

$$\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$$

und $\mathfrak{L} = \mathcal{O}_X(D)$. Wir betrachten $\mathfrak{L}$ als Teilgarbe der Garbe der rationalen Funktionen auf X,

$$\mathfrak{L}|_{U_i} = \frac{1}{f_i}\mathcal{O}_{U_i} \text{ für jedes } i\in I.$$

Wir erinnern daran, dieses Bündel hat die Übergangsfunktionen

$$g_{U_iU_j} = \frac{f_j}{f_i}$$

ein regulärer Schnitt des Bündels $\mathfrak{L}$ ist gegeben durch eine Familie von regulären Funktionen

$$s_i: U_i \to k$$

mit

$$g_{U_i U_j} \cdot s_i = s_j ,$$

d.h. mit

$$s_i/f_i = s_j/f_j \text{ auf } U_i \cap U_i$$

Wir erhalten so einen globalen Schnitt

$$f \in \Gamma(X, \mathfrak{R}_X)$$

mit

$$f|_{U_i} = s_i/f_i .$$

Umgekehrt liefert jeder globale Schnitt $f \in \Gamma(X, \mathfrak{R}_X)$ einen Schnitt von $\mathfrak{L}$, wenn für jedes $i \in U$ das Produkt

$$s_i := ff_i : U_i \to k$$

eine reguläre Funktion ist.[65] Die Regularitätsbedingung können wir dadurch ausdrücken, daß der auf U_i definierte Hauptdivisor

$$\mathrm{div}(s_i) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(f_i)$$

effektiv ist, d.h.

$$\mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(f_i) \geq 0$$

Da dies für jedes i gelten soll, erhalten wir die Identifikation

(1) $$\Gamma(X, \mathfrak{O}_X(D)) = \{f \in \Gamma(X, \mathfrak{R}_X) \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\}$$

Dies ist ein k-Vektorraum. Ein wichtiges Ergebnis der Theorie der Divisoren, ist die Aussage, daß im Fall projektiver Schemata, diese Vektorräume endlich-dimensional sind. Der zugehörige projektive Raum

$$|D| := \mathbb{P}(\Gamma(X, \mathfrak{O}_X(D)))$$

heißt lineares System des Divisors. Aus (1) lesen wir ab, es ist gerade die Menge der zu D linear äquivalenten effektiven Divisoren.

Bemerkungen

(i) Sei D ein effektiver Divisor auf X mit den lokalen Gleichungen

$$\{(U_i, f_i)\}_{i \in I} .$$

Nach Definition sind dann die f_i reguläre Funktionen, d.h. die Garbe $\mathfrak{O}_X(D)$ enthält die Strukturgarbe $\mathfrak{O}_X$ als Teilgarbe:

$$\mathfrak{O}_X \subseteq \mathfrak{O}_X(D).^{66}$$

Der globale Schnitt 1 von $\mathfrak{O}_X$ definiert einen globalen Schnitt s von $\mathfrak{O}_X(D)$, welcher gerade durch die Familie der regulären Funktionen

$$f_i : U_i \to k$$

gegeben ist.[67] Der als abgeschlossenenes Teilschema

$$D \subseteq X$$

---

[65] denn dann ist automatisch $g_{U_i U_j} \cdot s_i = s_j$.

[66] Auf U_i wird $\mathfrak{O}_X$ erzeugt von 1 und $\mathfrak{O}_X(D)$ von $1/f_i$.

[67] Der zur rationalen Funktion 1 gehörige Schnitt ist auf U_i gerade durch die Funktion $1 \cdot f_i$ gegeben.

aufgefaßte Divisor ist somit gerade die Nulltstellenmenge dieses Schnitts. Jeder Cartier-Divisor läßt sich also als Nullstellen-Divisor eines Schnitts des zugehörigen Bündels auffassen.

(ii) Umgekehrt definiert jeder reguläre Schnitt eines Geradenbündels $\mathfrak{L}$ einen effektiven Divisor D. Das zu D gehörige Bündel ist bis auf Isomorphie gerade $\mathfrak{L}$,

$$\mathfrak{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$$

und der eben konstruierte Schnitt von $\mathcal{O}_X(D)$ entspricht bei diesem Isomorphismus gerade dem gegebenen Schnitt.

(iii) Indem man Schnitte von rationalen Funktionen auf X identifiziert, kann man die obigen Betrachtungen auch mit rationalen Schnitten von Geradenbündeln (d.h. Schnitten, die nur auf einer offenen dichten Teilmenge regulär sind) und nicht notwendig effektiven Divisoren wiederholen. Dabei kann man jede rationale Funktion als rationale Schnitt jedes Geradenbündels auffassen. Insbesondere ist sichergestellt, daß jedes Geradenbündel globale rationale Schnitte besitzt.

x.x.x

Literatur

[Berger] Berger, M.: Geometrie, 3. Convexes et polytopes, polyèdres règuliers, aires et volumes ,CEDIC, Paris 1978

[Fulton] Fulton, W.: Introduction to toric varieties, Princeton University Press, 1993.

[Hartshorne] Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Springer, New York 1977.

[KKMS] Kempft, G., Knudson, F., Mumford, D., Saint-Donat, B.: Toroidal Embeddings I, Springer Lecture Notes 339 (1973)

[Shafarevich] Shafarevich, I.R.: Basic algebraich geometry, Springer, Heidelberg 1974.

Index

—A—

Abbildung
  rationale, Bild einer, 54
  rationale, Definitionsbereich einer, 54
  rationale, von irreduziblen affinen algebraischen Mengen, 53
Abbildungd
  rationale, Komposition von, 54
affine algebraische Menge, 48
affine Hyperfläche, 54
affine Stützhyperebene, 42
affine torische Varietät, 21
affiner algebraischer Torus, 22
affiner Koordinatenring, 49
affiner Raum
  Aufblasung des, in einem Punkt, 55
algebraische Menge
  affine, 48
algebraischer Torus
  affiner, 22
Aufblasung
  des affinen Raums in einem Punkt, 55

—B—

Basis, 57
Bild
  einer rationalen Abbildung, 54
birationaler Isomorphismus, 54
Bündel
  tautologisches, des projektiven Raums, 60
Bündelabbildung, 58
Bündelraum, 57

—D—

Definitionsbereich, 53
Definitionsbereich einer rationalen Abbildung, 54
Dimension eines Kegels, 3
Dual einer Menge von Vektoren, 3

—E—

echte Seite eines Kegels, 3
echte Seite eines Polytops, 42
Ecke eines konvexen Polytops, 42
endlicher Fächer, 29

Erzeuger eines Kegels, 3

—F—

Fächer
endlicher, 29
Träger eines, 29
verträglicher Gitterhomomorphismus, 41
Fasette eines Kegels, 3
Fasette eines Polytops, 42
Fläche
Hirzebruch-, 39
Fortsetzung
maximale, einer rationalen Abbildung, 54
maximale, einer regulären Funktion auf einer offenen Menge, 53
freie Modulgarbe, 62
Funktion
rationale auf einer irreduziblen affinen algebraischen Menge, 53
rationale, auf einer irreduziblen affinen algebraischen Menge, 52
reguläre, 49
Funktionenkörper
rationaler, einer irreduziblen algebraischen Menge, 52

—G—

Garbe
lokal freie, 62
Geradenbündel, 60
Gitter, 2
Rang eines, 2
Gitterhomomorphismus
verträglicher, mit Fächern, 41
verträglicher, mit Kegeln, 24

—H—

Halbgruppe
saturierte, 25
Hauptmenge
offene, einer affinen algebraischen Menge, 48
Hirzebruch-Fläche, 39
Homomorphismus
verträglicher, von Gittern, mit Fächern, 41
Hyperfläche
affine, 54

—I—

Ideal einer Menge im affinen Raum, 48
Inneres
relatives, eines Kegels, 12
irreduzible affine algebraische Menge, 51
irreduzible Komponente einer affine algebraischen Menge, 51
Isomorphismus
birationaler, 54
von affinen algebraischen Mengen, 50

—K—

Kante eines Kegels, 39
Kegel
Dimension eines, 3
echte Seite eines, 3
Erzeuger eines, 3
Fasette eines, 3
Kante eines, 39
konvexer, polyedraler, 3
rationaler, 11
relatives Inneres, 12
Seite eines, 3
Simplex, 19
simplizialer, 19
streng konvexer, 17
Summe zweier, 10
verträglicher Gitterhomomorphismus mit, 24
Komponente
irreduzible, einer affinen algebraischen Menge, 51
Komposition rationaler Abbildungen, 54
konvexer polyedraler Kegel, 3
konvexes Polyeder, 44
konvexes Polytop, 42
Koordinatenfunktion
auf einer algebraischen Mengen, 49
einer regulären Abbildung, 50
Koordinatenring
affiner, 49
Körper
der rationalen Funktionen auf einer irreduziblen affinen algebraischen Menge, 52
Kozykel-Bedingungen and die Übergangsfunktionen eines Vektorraumbündels, 59

—L—

Laurent-Polynom, 22
lokal freie Garbe, 62

—M—

maximale Fortsetzung einer rationalen Abbildung, 54
maximale Fortsetzung einer regulären Funktion auf einer offenen Menge, 53
Menge
affine algebraische, 48
affine algebraische, irreduzible, 51
affine algebraische, reduzible, 51
Menge der Fundamentalpunkte, 53
mit Fächern verträglicher Gitterhomomorphismus, 41
Modul
über einer Garbe von kommutativen Ringen mit 1, 61
Modulgarbe
freie, 62

—N—

Normalenbündel, 60

—O—

offene Hauptmenge einer affinen algebraischen
Menge, 48

—P—

Polare eines konvexen Polytops, 42
Polarenmenge eines konvexen Polytops, 42
Polyeder
konvexes, 44
polyedraler Kegel
konvexer, 3
Polynom
Laurent-, 22
Polytop
echte Seite eines, 42
Fasette eines, 42
konvexes, 42
konvexes, Ecke eines, 42
konvexes, Polare eines, 42
konvexes, Polarenmenge eines, 42
rationales konvexes, 42
Seite eines, 42
Unterteilung des Rands eines, 44
Punkt
regulärer, einer rationalen Funktion, 53

—R—

Rang
eines Vektorraumbündels, 57
Rang eines Gitters, 2
rationale Abbildung
von irreduziblen affinen algebraischen
Mengen, 53
rationale Funktion auf einer irreduziblen affinen
algebraischen Menge, 53
rationale Funktione auf einer irreduziblen affinen
algebraischen Menge, 52
rationale Regelfläche, 39
rationaler Funktionenkörper einer irreduziblen
affinen algebraischen Menge, 52
rationaler Kegel, 11
rationales konvexes Polytop, 42
Raum
affiner, Aufblasung in einem Punkt, 55
reduzible affine algebraische Menge, 51
Regelfläche
rationale, 39
reguläre Funktion, 49
regulärer Punkte einer rationalen Funktion, 53
Regularität einer Funktion in einem Punkt, 53
relatives Inneres eines Kegels, 12

—S—

saturierte Halbgruppe, 25
Seite
echte, eines Kegels, 3
echte, eines Polytops, 42
Seite eines Kegels, 3
Seite eines Polytops, 42
Simplex, 19
simplizialer Kegel, 19
Strahl, 3
streng konvexer Kegel, 17
Stützhyperebene
affine, 42
Stützhyperebene einer Menge, 3
Summe zweier Kegel, 10

—T—

tautologisches Bündel
zweites, des projektiven Raums, 61
tautologisches Bündel des projektiven Raums, 60
torische Varietät
affine, 21
Torus
affiner algebraischer, 22
Träger eines Fächers, 29
triviales Vektorraumbündel, 62
Trivialisierung
eines Vektorraumbündels, 58

—Ü—

Übergangsfunktion eines Vektorraumbündels, 59

—U—

Unterteilung des Randes eines Polytops, 44

—V—

Varietät
affine torische, 21
Vektorraumbündel
triviales, 62
Trivialisierung eines, 58
Vektorraumbündel, 57
Vereinbarung
der Kegel T_N als Menge von abgeschlossenen
Punkten, 22
der Ursprung ist innerer Punkt eines Polytops,
42
Endlichkeit der Fächer, 29
Kegel sind streng konvex, rational und
polyedral, 19
Rationalität, strenge Konvexheit,
Polyedralität der Kegel, 30
verträglich
mit Fächern verträglicher
Gitterhomomorphismus, 41
verträglicher Gitterhomomorphismus
mit Kegeln, 24

—Z—

zweites tautologisches Bündel des projektiven
Raums, 61