Lineare Algebra II

B. Herzog, Universität Leipzig, Institut für Mathematik und Informatik,

Vorlesung für das erste Studienjahr im Sommertsemester 2013

Mo. 13-15 Uhr in Hs. 7
Mi. 9-11 Uhr in Hs. 7

Klausur: am 22.07.13, 9.00-11.00 Uhr im Auditorium Maximum (Augusteum)
Nachklausur: am 10.10.13, 10.00-12.00 Uhr im Auditorium Maximum (Augusteum)

5. Jordansche Normalform

5.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

5.1.0 Vorbemerkungen: konjugierte Matrizen und die Klassifikation linearer Abbildungen

(i) Matrizen zu unterschiedlichen Basen sind konjugiert.In 3.4.4 haben wir gesehen, daß die Matrix

$$A = M_v^v(f),\ v = (v_1,...,v_n)$$

einer linearen Abbildung

$$f: V \to V$$

bezüglich einer Basis $v_1,...,v_n$ von V beim Ersetzen der Basis v durch eine neue Basis v' in eine Matrix $A' := M_{v'}^{v'}(f)$ übergeht, die sich aus der alten Matrix A nach der Formel

(1) $$A' := S^{-1}AS$$

berechnen läßt, wobei $S = M_v^{v'}(Id)$ die sogenannte Basiswechsel-Matrix ist.

Matrizen $A, A' \in K^{n\times n}$, die in der Relation (1) zueinander stehen mit einer umkehrbaren Matrix S heißen konjugiert.

(ii) Konjugierte Matrizen gehören zur selben Abbildung. Umgekehrt kann man zwei Matrizen A und A', die in einer Beziehung der Gestalt (1) zueinander stehen, als Matrizen von ein und derselben Abbildung ansehen (bezüglich verschiedener Basen). Mit anderen Worten, Matrizen dieser Art sind in einem gewissen Sinne äquivalent.

(iii) Gegenstand der Vorlesung.Ein wichtiger Gegenstand dieses zweiten Teils der Vorlesung besteht in der Frage, wann zwei gegebene Matrizen zu ein und derselben Abbildung gehören, d.h. wann sie im oben beschriebenen Sinne konjugiert sind.

(iv) Wir werden dabei so vorgehen, daß wir in jeder Menge äquivalenter Matrizen eine Matrix auszeichen, d.h. wir konstruieren für diese Matrizen eine Normalform, so daß zwei Matrizen genau dann äquivalent sind, wenn sie dieselbe Normalform besitzen.

(v) Der erste Schritt bei der Verfolgung dieses Ziels ist die Konstruktion von Invaranten einer Matrix, d.h. von Zahlen, die zu der Matrix gehören und die sich nicht ändern, wenn man zu einer äquivalenten Matrix übergeht. Dies ist der Gegenstand dieses Kapitels.

(vi) Problem. Die Äquivalenz zweier Matrizen A und A' kann man zeigen, indem man eine Matrix S angibt, so daß (1) gilt. Wenn man von zwei Matrizen zeigen will, sie sind nicht äquivalent, so muß man nachweisen, daß es keine solche Matrix S gibt, was zunächst ungleich schwerer ist. Die wichtigste Methode bei der Lösung dieses schwierigeren Problems besteht in der Angabe einer Invarianten, die für die betrachteten Matrizen unterschiedliche Werte annimmt.

(vii) Diagonalisierung. Die wichtigsten Konstruktionen unserer Theorie treten bereits für den Fall auf, daß die gesuchte Normalform eine besonders einfache Gestalt hat, nämlich eine Diagonalmatrix ist. Wir beschäftigen uns deshalb zunächst mit diesem Spezialfall, d.h. mit der Frage, ob eine gegebene quadratische Matrix diagonalisierbar ist.

5.1.1 Eigenvektoren, Eigenwerte, Eigenbasen, Eigenräume

Sei $f: V \to V$ eine lineare Abbildung eines endlich-dimensionalen Vektorraums V in sich.

Ein von Null verschiedener Vektor $v \in V-\{0\}$ heißt Eigenvektor von f, wenn es ein $c \in K$ gibt mit

$$f(v) = c \cdot v.$$

In dieser Situation heißt c Eigenwert von f zum Eigenvektor v. Mit anderen Worten, $c \in K$ heißt Eigenwert von f, wenn es einen von Null verschiedenen Vektor $v \in V-\{0\}$ gibt, mit

$$f(v) = c \cdot v.$$

Eine Basis $v_1,\dots,v_n$ von V heißt Eigenbasis von f, wenn sämtliche Vektoren v_i Eigenvektoren von f sind,

$$f(v_i) = c_i v_i \text{ für } i = 1,\dots,n.$$

Zu vorgegebenen $c \in K$ heißt

$$V_c := V_c(f) := \{v \in V \mid f(v) = c \cdot v\}$$

Eigenraum zum Eigenwert c.

Sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Dann versteht man unter einem Eigenvektor, einem Eigenwert, bzw. einer Eigenbasis der Matrix A einen Eigenvektor, einen Eigenwert bzw. eine Eigenbasis der zugehörigen linearen Abbildung

$$f_A: K^n \to K^n,\ x \mapsto Ax.$$

Entsprechend setzt man

$$V_c(A) := V_c(f_A) := \{v \in V \mid Av = c \cdot v\}$$

und nennt $V_c(A)$ Eigenraum von A zum Eigenwert c.

Bemerkungen

(i) Die Mengen $V_c(f)$ bzw. $V_c(A)$ sind lineare Unterräume von V:

$$V_c(f) = \ker(f - c \cdot Id),\ V_c(A) = \ker(f_{A-c\cdot Id})$$

(ii) Die von Null verschiedenen Elemente von $V_c(f)$ bzw. $V_c(A)$ sind die Eigenvektoren von f bzw. A zum Eigenwert c.

(iii) Wie wir demnächst sehen werden, gibt es höchstens endlich viele $c \in K$, für welche die Räume $V_c(f)$ bzw. $V_c(A)$ vom Nullraum verschieden sind. Diese c sind gerade die Eigenwerte von f bzw. c.

(iv) Mit anderen Worten, die Räume $V_c(f)$ bzw. $V_c(A)$ kann man für beliebiges c bilden. Sie sind jedoch nur für die (endlich vielen) Eigenwerte ungleich Null.

5.1.2 Ein Beispiel: Eigenbasen und Diagonalmatrizen

Sei

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix mit den paarweise verschiedenen Einträgen $c_1,...,c_n$ in der Hauptdiagonalen. Dann gilt

$$A\cdot e_i = c_i e_i,$$

d.h. der i-te Standardeinheitsvektor ist ein Eigenvektor e_i zum Eigenwert c_i und die Standardeinheitsvektoren

$$e_1,...,e_n$$

bilden eine Eigenbasis. Wir werden später sehen, daß es keine weiteren Eigenwerte und (bis auf Vielfache - falls die c_i paarweise verschieden sind) keine weiteren Eigenvektoren gibt. Wir kennen damit sämtliche Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume.

Sei jetzt umgekehrt $f:V\to V$ eine lineare Abbildung eines endlich-dimensionalen Vektorraums V in sich und sei

$$v = (v_1,...,v_n)$$

eine Eigenbasis von f. Dann gilt

(1) $$f(v_i) = c_i v_i \text{ für } i=1,...,n$$

und gewisse $c_i\in K$. Die Identitäten (1) besagen gerade, daß die Matrix von f bezüglich der Basis v die folgende ist

$$M_v^v(f) = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

Mit anderen Worten, die Eigenbasen eines Endomorphismus $f:V\to V$ sind gerade diejenigen Basen von V, bezüglich der die Matrix von f Diagonalgestalt hat.

Probleme

(i) Besitzt jeder lineare Endomorphismus eine Eigenbasis, bzw. wie entscheidet man, ob ein gegebener Endomorphismus eine solche besitzt?

(ii) Wie kann man die Eigenvektoren bzw. Eigenwerte eines Endomorphismus bestimmen?

5.1.3 Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus

Sei $f: V \to V$ eine lineare Abbildung des endlich-dimensionalen Vektorraums V in sich. Dann heißt

$$\chi_f(T) := \det(f - T\cdot Id)$$

charakteristisches Polynom von f. Sei $v = (v_1,...,v_n)$ eine Basis von V und

$$A := M_v^v(f)$$

die Matrix von f bezüglich v. Dann gilt

$$\chi_f(T) := \det(f - T\cdot Id) := \det (A-T\cdot Id),$$

d.h. $\chi_f(T)$ ist tatsächlich ein Polynom (n-ten Grades) in T. Für beliebige quadratische Matrizen A schreibt man auch

$$\chi_A(T) := \det(A - T\cdot Id)$$

und spricht vom charakteristischen Polynom der Matrix.

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(T) &= \det \begin{pmatrix} 1-T & 2 \\ 3 & 4-T \end{pmatrix} \\ &= (T-1)(T-4) - 6 \\ &= T^2 - 5T - 2 \\ &= (T - \tfrac{1}{2}(5+\sqrt{33}))\,(T - \tfrac{1}{2}(5-\sqrt{33})) \end{aligned}$$

5.1.4 Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Seien $f: V \to V$ eine lineare Abbildung des endlich-dimensionalen Vektorraums V und $c\in K$ ein Element. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) c ist ein Eigenwert von f.

(ii) $\chi_f(c) = 0$.

Beweis. Zum Beweis können wir eine Basis von V fixieren und anstelle von f die Matrix von f bezüglich dieser Basis betrachten. Sei A diese Matrix. Wir haben dann zu zeigen, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i)' c ist Eigenwert von A.

(ii)' $\chi_A(c) = 0$.

<u>(i)' ⇒ (ii)'</u>. Sei c ein Eigenwert von A. Es gibt also einen Vektor $v\in K^n-\{0\}$ mit

$$Av = c\cdot v.$$

Diese Identität kann man auch wie folgt schreiben.

$$0 = Av - cv = A\cdot v - c\cdot Id\cdot v = (A - c\cdot Id)v\ .$$

Mit $B := A - c\cdot Id$ gilt folglich

$$Bv = 0,$$

d.h. das Gleichungssystem $Bx = 0$ hat eine nicht-triviale Lösung, d.h. neben der Lösung $x = 0$ gibt es noch mindestens eine weitere Lösung (nämlich $x = v$). Dann mußt aber B die Determinante Null haben,

$$0 = \det(B) = \det(A - c\cdot Id) = \chi_A(c).$$

Es gilt also (ii)'.

<u>(ii)' ⇒ (i)'</u>. Sei c eine Nullstelle von χ_A. Mit $B := A - c\cdot Id$ gilt dann

$$\det B = 0,$$

also

$$\mathrm{rk}\, B < n.$$

Die Spalten $b_1,\dots,b_n$ von B sind also linear abhängig, d.h. es gibt Elemente $v_1,\dots,v_n \in K$ mit

$$\text{(1)} \qquad \sum_{i=1}^{n} v_i b_i = 0 \text{ und } v_i \neq 0 \text{ für ein } i.$$

Wir setzen $v = \begin{pmatrix} v_i \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$. Dann kann man (1) auch wir folgt ausdrücken.

$$B\cdot v = 0,\ v\neq 0.$$

Wegen $B = A - c\cdot Id$ bedeutet dies,

$$0 = Bv = (A - c\cdot Id)v = Av - cv,$$

d.h.

$$Av = cv.$$

Wir haben gezeigt, c ist Eigenwert von A.
QED.

5.1.5 Ein Beispiel: Eigenwerte für verschiedene Grundkörper

In 5.4.3 hatten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(T) = T^2 - 5T - 2 = (T - \frac{1}{2}(5+\sqrt{33}))\ (T - \frac{1}{2}(5-\sqrt{33}))$$

betrachtet. Im Fall $K = \mathbb{Q}$ hat die Matrix also keinerlei Eigenwerte oder Eigenvektoren. Über den reellen Zahlen dagegen sind die Eigenwerte gleich

$$c_{1,2} = \frac{1}{2}(5\pm\sqrt{33})$$

Die Matrix $A - c\cdot Id$ hat, falls c ein Eigenwert ist, einen Rang <2. Die zugehörigen Eigenvektoren sind also durch die einzige Gleichung

$$\frac{1}{2}(3+\sqrt{33})\cdot x - 2\cdot y = 0 \text{ (im Fall } c = c_1)$$

bzw.

$$\frac{1}{2}(3-\sqrt{33})\cdot x - 2\cdot y = 0 \text{ (im Fall } c = c_1)$$

gegeben. Insbesondere sind

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3+\sqrt{33} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3-\sqrt{33} \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren. Diese Vektoren sind nicht proportional, also linear unabhängig. Sie bilden also eine Eigenbasis von K^2.

Bemerkung

Die Situation des obigen Beispiels ist typisch für Betrachtungen im Kontext von Eigenwerten: Eigenwerte lassen sich stets finden, solange der Grundkörper nicht zu klein ist. Wir werden in dieser Vorlesung die folgenden Tatsachen benutzen.

1. Man kann den Körper K stets soweit vergrößern, daß das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt (also n nicht notwendig verschiedene Eigenwerte existieren).
3. Allgemeiner: Jeder Körper k liegt in einem Körper K derart, daß jedes nichtkonstante Polynom mit Koeffizienten aus K in K eine Nullstelle besitzt. Solche Körper K heißen <u>algebraisch abgeschlossen</u>.
2. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen (Fundamentalsatz der Algebra).

Der Beweis dieser Aussagen sprengt den Rahmen dieser Vorlesung. Der Beweis der ersten beiden ist Gegenstand der Vorlesung

Algebra

des zweiten Studienjahres. Der Beweis des Fundamentalsatzes könnte ebenfalls im Rahmen dieser Vorlesung erbracht werden, wird aber meistens aus Zeitgründen weggelassen: es ist eine Aussage über $\mathbb{C}$, also eine Aussage der Analysis (obwohl der Name etwas anderes suggeriert). Sein Beweis wird sich mehr oder weniger als Nebenergebnis einer allgemeineren Theorie, der Residuen-Theorie, im Rahmen der Vorlesung

Komplexe Analysis

ergeben. Einen Beweis mit Mitteln der Algebra findet man im Algebra-Buch von Krull.

5.1.6 Vereinbarung, algebraische und geometrische Vielfachheiten

Wir werden im folgenden oft annehmen, unser Körper K ist so groß, daß die Nullstellen der betrachteten charakteristischen Polynome in K liegen. Wir werden in dieser Situation sagen, der Körper K sei hinreichend groß.

Bemerkung

Auf Grund des nachfolgenden Ergebnisses bedeutet dies gerade, daß das charakterische Polynon in Linearfaktoren zerfällt,

$$\chi(T) = \pm(T-c_1)^{\nu_1}(T-c_2)^{\nu_2}...(T-c_r)^{\nu_r}$$

wobei $c_1,...,c_r \in K$ die Eigenwerte sind. Die natürlichen Zahlen $\nu_1,...,\nu_r$ heißen algebraische Vielfachheiten der Eigenwerte im Gegensatz zu deren geometrischen Vielfachheiten

$$\mu_i := \dim V_{c_i}$$

5.1.7 Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren

Seien f(T) ein nicht-konstantes Polynom mit Koeffizienten aus K und $\overline{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, welcher K enthält. Dann gibt es einen Körper L zwischen K und $\overline{K}$ derart, daß f über L in Linearfaktoren zerfällt, d.h. es gibt Elmente $c, c_1,...,c_r \in L$ und natürliche Zahlen $n_1,...,n_r$ mit

$$f(T) = c\cdot(T-c_1)^{n_1}(T-c_2)^{n_2}...(T-c_r)^{n_r}$$

Bemerkung

Der kleinste solche (hinreichend große) Körper wird mit $K(c_1,...,c_1)$ bezeichnet und heißt der von $c_1,...,c_r$ über K erzeugte Körper. Er besteht (wie leicht zu sehen ist) aus allen Quotienten

$$u(c_1,...,c_r)/v(c_1,...,c_r)$$

von Polynome in $c_1,...,c_r$ mit Koeffizienten aus K.

Beweis. Es reicht zu zeigen, f zerfällt über $L := \overline{K}$ in Linearfaktoren. Wir führen den Beweis durch Induktion nach dem Grad d = deg f von f. Im Fall d = 1 ist f linear und die Behauptung ist trivial. Sei also d>1. Dann besitzt f in $\overline{K}$ eine Nullstelle, sagen wir c_1. Division mit Rest durch $T - c_1$ liefert

$$f(T) = q(T)\cdot(T-c_1) + r$$

mit Polynomen q und r, wobei der Grad von r kleiner ist als deg $T-c_1 = 1$, d.h. r ist eine Konstante aus $\overline{K}$. Wir setzen $T = c_1$ in diese Gleichung ein und erhalten

$$0 = f(c) = q(c_1) \cdot 0 + r,$$

d.h. es ist r = 0 und

$$f(T) = q(T)\cdot(T-c_1)$$

Das Polynom q(T) hat einen Grad < d, zerfällt also nach Induktionsvoraussetzung in Linearfaktoren. Dann gilt dasselbe aber auch für f.
QED.

5.1.8 Existenz von Eigenbasen und algebraische Vielfachheiten

Sei $f:V\to V$ eine K-lineare Abbildung endlich-dimensionaler Vektorräume, deren (paarweise verschiedenen) Eigenwerte $c_r,...,c_r$ sämtlich in K liegen. Die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte seien $\mu_1,...,\mu_r$ bzw. $\nu_1,...,\nu_r$. Dann gilt

$$\mu_i \le \nu_i \text{ für } i=1,...,r.$$

Weiter sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent.

(i) f besitzt eine Eigenbasis.

(ii) $V =$[1] $V_{c_1} \oplus ... \oplus V_{c_r}$

(iii) $\mu_i = \nu_i$ für $i=1,...,r$.

Beweis. Beweis der behaupteten Ungleichungen. Sei c einer der Eigenwerte von f, μ die zugehörige geometrische und ν die zugehörige algebraische Vielfachheit. Nach Definition gilt

$$\mu := \dim V_c = \dim \ker(f-c\cdot Id).$$

Wir wählen eine Basis $v_1,...,v_\mu$ von V_c und ergänzen diese zu einer Basis

$$v_1,...,v_\mu,...,v_d \text{ , } d = \dim V,$$

von V. Wegen $f(v_i) = c\cdot v_i$ für $i = 1,...,\mu$ hat f bezüglich dieser Basis die Matrix

$$M^v_v(f) = \begin{pmatrix} c & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & c & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cdot Id & A \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

d.h. die Matrix zerfällt in Blöcke mit einer $\mu\times\mu$-Matrix in der linken oberen Ecke. Es folgt

$$\begin{aligned} \chi_f(T) &= \det (M^v_v(f) - T\cdot Id) \\ &= \det \begin{pmatrix} (c-T)\cdot Id & A \\ 0 & B-T\cdot Id \end{pmatrix} \\ &= \det((c-T)\cdot Id)\cdot\det(B-T\cdot Id) \\ &= (c-T)^\mu\cdot\det(B-T\cdot Id) \end{aligned}$$

---

[1] d.h. der Raum V läßt sich in natürlicher Weise mit der direkten Summe der Eigenräume V_{c_i} identifizieren. Genauer, die lineare Abbildung $V_{c_1} \oplus ... \oplus V_{c_r} \to V, (v_1,...,v_r) \mapsto v_1+...+v_r$, ist bijektiv.

Mit anderen Worten, das charakteristische Polynom $\chi_f(T)$ hat c als Nullstelle mit einer Vielfachheit $\geq \mu$, d.h. es ist

$$\nu \geq \mu.$$

<u>Beweis der Äquivalenz der Bedingungen (i)-(iii).</u>

<u>(i) $\Rightarrow$ (iii)</u>. Besitze f eine Eigenbasis $v_1, \ldots, v_d$. Die Anzahl μ'_j der Eigenvektoren v_i zum Eigenwert c_j ist höchstens so groß wie die Dimension des Eigenraums V_{c_i}, d.h. für die geometrische Vielfachheit μ_j von c_j gilt:

$$\mu'_j \leq \mu_j = \dim V_{c_j} \leq \nu_j \text{ für } j = 1, \ldots, r.$$

Außerdem ist

$$\dim V = \sum_{j=1}^{r} \mu'_j \leq \sum_{j=1}^{r} \mu_j \leq \sum_{j=1}^{r} \nu_j = \deg \chi_f = \dim V.$$

In der Abschätzung muß überall das Gleichheitszeichen stehen. Das ist aber nur möglich, wenn

$$\mu'_j = \mu_j = \nu_j$$

gilt für jedes j. Insbesondere gilt (iii). Wir haben außerdem bewiesen:

Folgerung

<u>In jeder Eigenbasis kommen alle Eigenvektoren mit ihren geometrischen Vielfachheiten vor</u>.

<u>(iii) $\Rightarrow$ (ii)</u>. Nach Voraussetzung ist die Dimension

$$\mu_i := \dim V_{c_i}$$

gleich der algebraischen Vielfachheit ν_i. Insbesondere gilt

$$\dim V_{c_1} \oplus \ldots \oplus V_{c_r} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i = \sum_{i=1}^{r} \nu_i = \deg \chi_f(T) = \dim V.$$

Die Dimension der Räume, deren Isomorphie wir zeigen müssen, ist somit gleich. Es reicht also, wenn wir zeigen, die lineare Abbildung

$$\varphi: V_{c_1} \oplus \ldots \oplus V_{c_r} \to V, \ (v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 + \ldots + v_r,$$

ist injektiv. Angenommen die Abbildung wäre nicht injektiv. Dann gibt es Vektoren

$$v_i \in V_{c_i},$$

welche nicht sämtlich gleich Null sind, mit

(1) $$v_1 + \ldots + v_r = 0.$$

Sei s die Anzahl der von Null verschiedenen v_i. Diese Anzahl ist mindestens 1,

$$s \geq 1.$$

Die Idee des nachfolgenden Beweises besteht darin, danach zu fragen, ob es vielleicht ein Tupel $(v_1, \ldots, v_r)$ derselben Art gibt mit weniger als s von Null verschiedenen v_i. Falls ja, so können wir das betrachtete Tupel durch dasjenige mit dem kleinerem s ersetzen. Wir können also annehmen, die Zahl s ist für das hier von uns betrachtete

Tupel $(v_1,...,v_r)$ minimal, d.h. es gibt kein Tupel derselben Art, mit weniger als s von Null verschiedenen Vektorren v_i.

Durch geeignets Abändern der Bezeichnungen können wir erreichen, daß gerade die ersten s Vektoren in der Summe (1) von Null verschieden sind. Bedingung (1) bekommt dann die Gestalt,

(1') $$v_1 + ... + v_s = 0,$$

wobei jetzt sämtliche Summanden ungleich Null sind. Dann muß $s > 1$ gelten. Es gibt also mindestens zwei verschiedene Eigenwerte c_i und mindestens einer davon muß ungleich Null sein. O.B.d.A. sei

$$c_1 \neq 0.$$

Wir gewinnen jetzt zwei verschiedene Relationen aus (1'), einmal indem wir f auf (1') anwenden und einmal indem wir (1') mit c_1 multiplizieren. Es ergibt sich

(2) $$c_1v_1 + ... + c_sv_s = 0$$

und

(3) $$c_1v_1 + ... + c_1v_s = 0.$$

Wir bilden die Differenz dieser beiden Relationen und erhalten

(4) $$(c_2-c_1)v_2 + ... + (c_s-c_1)v_s = 0.$$

Die Koeffizienten in dieser neuen Relation sind sämtlich von Null verschieden (da die Eigenwerte c_i nach Voraussetzung paarweise verschieden sein sollen). Die Zahl der Summanden ist kleiner als s. Das steht aber im Widerspruch zur Minimalität der Zahl s. Dieser Widerspruch beweist die die behauptete Implikation.

(ii) ⇒ (i). Wir benutzen den Isomorphismus von (ii) um V mit der direkten Summe der V_{c_i} zu identifizieren. Wir wählen in jedem der Eigenräume V_{c_i} eine Basis und vereinigen alle diese Basen zu einer Basis v von V. Jeder Vektor dieser Basis liegt in einem der V_{c_i}, ist also ein Eigenvektor. Die so erhaltene Basis ist somit eine Eigenbasis.

QED.

Bemerkung

Die Frage nach der Existenz von Eigenbasen (bzw. nach der Diagonalisierbarkeit von Matrizen) wird im gesamten nachfolgenden Verlauf der Vorlesung eine Rolle spielen. Um die Frage abschließend[2] zu beantworten, müssen wir jedoch erst einige einfachere Probleme lösen:

1. Besitzt jede Abbilung wenigsten einen Eigenvektor?
2. Kann man jede Matrix wenigstens in eine obere Dreieckgestalt überführen.

Beispiel

Bei einer Drehung im $\mathbb{R}^2$ um einen kleinen Winkel wird kein Vektor in ein (reelles) Vielfaches von sich selbst überführt. Eine solche Drehung besitzt also keinen Eigenvektor.

Wie wir sehen werden, liegt das einfach daran, daß der Körper $\mathbb{R}$ dafür zu klein ist. Über den komplexen Zahlen besitzt die entsprechende Matrix sehr wohl einen Eigenwert.

Bemerkungen

(i) Die nachfolgenden Ergebnisse gelten also insbesondere auf Grund unserer Annahme, daß unser Grundkörper so groß sein soll, daß er alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms enthält.

(ii) Allgemein gilt: Die über 'kleinen' Körpern wie $\mathbb{R}$ auftretenden Phänomene sind sehr viel komplizierter und reichhaltiger als die Phänomene über $\mathbb{C}$. Es ist deshalb

[2] über algebraisch abgeschlossenen Körpern

typisch für die Vorgehensweise in der Mathematik, zuerst solche Körper wie $\mathbb{C}$ zu behandeln.

5.1.9 Existenz von Eigenwerten

Sei f: $V\to V$ eine K-lineare Abbildung. Dann besitzt f (falls K hinreichend groß ist) mindestens einen Eigenvektor.
Analog besitzt eine beliebige Matrix über K (falls K hinreichend groß ist) mindestens einen Eigenvektor.
Beweis. Das charakteristische Polynom von f besitzt in einen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper von K eine Nullstelle. Da K hinreichend groß sein soll, liegt diese Nullstelle in K. Diese Nullstelle ist dann aber ein Eigenwert von f, d.h. f besitzt einen Eigenvektor.
QED.

5.1.10 Fahnen von Vektorräumen

Sei V ein K-Vektorraum. Eine <u>Fahne</u> der Länge r von V ist eine echt aufsteigende Folge

$$V_0 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_r$$

von Unterräumen von V. Die Fahne heißt <u>vollständig</u>, falls folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) $V_0 = \{0\}$

(ii) $V_r = V$

(iii) $\dim V_{i+1} = \dim V_i + 1$ für $i=0,\ldots,r-1$.

Seien $f{:}V\to V$ ein linearer Endomorphismus und $W \subseteq V$ ein linearer Unterraum. Dann heißt W f-<u>invariant</u>, falls gilt $f(W) \subseteq W$.

5.1.11 Existenz von Fahnen invarianter Unterräume

Sei f: $V\to V$ ein linearer Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums. Falls K hinreichend groß ist, so existiert eine vollständige Fahne

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_d = V$$

von V, deren Unterräume V_i sämtlich f-invariant sind.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach $d = \dim V$. Im Fall $d = 1$ ist nichts zu beweisen. Sei also $d > 1$. Weil K hinreichend groß ist, gibt es einen Eigenvektor $v_1 \in V$ von f. Wir setzen

$$W = K\cdot v_1$$

Da v_1 ein Eigenvektor ist, gilt $f(W) \subseteq W$, d.h. W ist f-invariant. Wir setzen

$$V' := V/W$$

und bezeichnen mit

$$\rho: V\to V'$$

die natürliche Abbildung. Weiter sei f' die Abbildung

$$f': V'\to V',\ v+W \mapsto f(v) + W.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn mit $v+W = w+W$ gilt $v-w\in W$, also

$$f(v-w)\in f(W) \subseteq W,$$

also $f(v) - f(w) \in W$, also $f(v) + W = f(w) + W$.

Die Abbildung f' ist offensichtlich linear. Sie ist gerade so definiert worden, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow\rho & & \downarrow\rho \\ V' & \xrightarrow{f'} & V' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} v & \mapsto & f(v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ v+W & \mapsto & f(v)+W \end{array}$$

Es gilt dim V' = dim V - dim W = dim V - 1. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine vollständige Fahne aus f'-invarianten Unterräumen in V', sagen wir

$$0 = V'_1 \subset V'_2 \subset ... \subset V_d = V'$$

Wir setzen

$$V_i := f^{-1}(V'_i) \quad \text{für } i = 1,...,d$$

und $V_0 := \{0\}$. Dann gilt

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq ... \subseteq V_d = V.$$

Zum Beweis von 5.1.10 reicht es, wenn wir zeigen

1. Die Räume V_i sind f-invariant.
2. $\dim V_{i+1} = \dim V_i + 1$ für $i = 0,..., d-1$.

<u>Zu 1</u>. Sei $v \in V_i$. Wir haben zu zeigen $f(v) \in V_i$. Nach Voraussetzung gilt $\rho(v) \in V'_i$. Da der Raum V'_i invariant bezüglich f' ist, folgt

$$(f'\circ\rho)(v) = f'(\rho(v)) \in f'(V'_i) \subseteq V'_i.$$

Wegen der Kommutativität des obigen Vierecks folgt

$$\rho(f(v)) = (\rho\circ f)(v) = (f'\circ\rho)(v) \in V'_i,$$

also $f(v) \in V_i$.

<u>Zu 2</u>. Wir betrachten die Einschränkung der natürlichen Abbildung ρ auf V_i,

$$\rho_i: V_i \to V'_i \qquad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho} & V' \\ \cup & & \cup \\ V_i & \xrightarrow{\rho'} & V'_i \end{array}$$

Da ρ surjektiv ist, ist auch die Einschränkung ρ_i surjektiv und ihr Kern ist gerade

$$\ker(\rho_i) = \{v \in V_i \mid \rho(v) = 0\} = V_i \cap \ker(\rho) = V_i \cap W = W \text{ (falls } i>0).$$

Damit gilt für $i > 0$:

$$\dim V_i = \dim \mathrm{Im}(\rho_i) + \dim \mathrm{Ker}(\rho_i) = \dim V'_i + \dim W = \dim V'_i + 1.$$

also ist

$$\dim V_{i+1} - \dim V_i = \dim V'_{i+1} - \dim V'_i = 1,$$

d.h. Aussage 2 gilt zumindest für $i>0$. Für $i = 0$ erhalten wir

$$\dim V_1 = \dim W = 1 = 0 + 1 = \dim V_0 + 1.$$

QED.

5.1.12 Überführung von Matrizen in obere Dreiecksgestalt

Sei $A\in K^{n\times n}$ eine Matrix über einem hinreichend großen Körper K. Dann gibt es eine umkehrbare Matrix $T\in K^{n\times n}$ derart, daß

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix}$$

obere Dreieckgestalt besitzt.
Beweis. Sei f die Abbildung

$$f = f_A: K^n \to K^n,\ x \mapsto Ax.$$

Wir haben zu zeigen, bezüglich einer geeigneten Basis v von K^n besitzt die Matrix

$$M_v^v(f)$$

obere Dreiecksgestalt.Da K hinreichend groß ist, gibt es eine vollständige Fahne von f-invarianten Unterräumen

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq V_n = K^n.$$

Jede Basis von V_i läßt sich durch Hinzufügen eines Vektors zu einer Basis von V_{i+1} ergänzen. Es gibt also eine Basis $v_1,\dots,v_n$ von K^n derart, daß $v_1,\dots,v_i$ für jedes i eine Basis von V_i ist. Wegen $v_i\in V_i$ und $f(V_i) \subseteq V_i$ gilt $f(v_i) \in V_i$, d.h.

$$f(v_i) = \text{Linearkombination von } v_1,\dots,v_i.$$

Das bedeutet, $M_v^v(f)$ besitzt obere Dreiecksgestalt.
QED.
Bemerkung
Wir haben gezeigt, durch eine geeignete Wahl der Basis, bekommt die Matrix eines linearen Endomorphismus die Gestalt

$$M = D + N$$

mit einer Diagonalmatrix D und einer Matrix in oberer Dreiecksgestalt N, auf deren Hauptdiagonalen lauter Nullen stehen. Wenn wir die Matrix M diagonalisieren wollen, müssen wir uns also noch um den 'störenden Rest' N kümmern. Dies ist der Inhalt des nächst Abschnitts.

5.2. Nilpotente Endomorphismen

5.2.1 Definition

Ein linearer Endomorphismus

$$f: V \to V$$

heißt <u>nilpotent</u>, wenn es eine natürliche Zahl g gibt mit

$$f^g = f\circ\dots\circ f \text{ (g-fache Komposition)} = 0.$$

Die kleinste solche natürliche Zahl g heißt <u>Ordnung</u> von f.

Eine Matrix $N \in K^{n\times n}$ heißt <u>nilpotent</u>, falls die zugehörige Abbildung f_N nilpotent ist, d.h. falls $N^g = 0$ gilt für ein natürliche g. Die Ordnung von f_N heißt dann auch <u>Ordnung</u> von N.

Die wichtigste Eigenschaft nilpotenter Endomorphimen wird im nachfolgenden Lemma beschrieben.

5.2.2 Lemma über nilpotente Endomorphismen

Seien $f:V\to V$ ein nilpotenter linearer Endomorphismus und $W\subseteq V$ ein nicht-trivialer linearer f-invarianter Unterraum. Dann gilt

$$f(W) \subset W \text{ (echtes Enthaltensein).}$$

Beweis. Angenommen es gilt $f(W) = W$. Dann gilt $f^j(W) = W$ für jedes j. Weil f nilpotent ist, können wir j so wählen, daß gilt

$$0 = f^j(V) \supseteq f^j(W) = W.$$

Also muß $W = 0$ sein im Widerspruch zur Wahl von W.
QED.

5.2.3 Nilpotenz und Fahnen invarianter Unterräume

Sei $f:V\to V$ ein linearer Endomorphismus mit $d:=\dim V < \infty$. Dann sind folgende Aussage äquivalent.

(i) f ist nilpotent.

(ii) Es gibt eine vollständige Fahne von linearen Unterräumen

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq ... \subseteq V_d = V$$

mit $f(V_i) \subseteq V_{i-1}$ für $i = 1,...,d$. (Die V_i sind automatisch f-invariant).

(iii) $f^d = 0$ für $d = \dim V$.

Beweis. <u>(i) ⇒ (ii)</u>. Wir setzen V_d und kontruieren die übrigen Unterräume indukiv. Seien V_d, V_{d-1}, ..., V_i bereits konstruiert. Wir haben die Konstruktion von V_{i-1} zu beschreiben. Falls $V_i = 0$ ist, gibt es nichts zu beschreiben: die Konstruktion ist abgeschlossen. Sei also $V_i\neq 0$. Weil V_i invariant bezüglich f ist, gilt

$$f(V_i) \subseteq V_i.$$

Wegen des Lemmas über nilpotente Endomorphismen ist diese Enthaltenseinsrelation echt. Es gibt also einen Unterraum V_{i-1} mit

$$f(V_i) \subseteq V_{i-1} \subseteq V_i \text{ und } \dim V_{i-1} = \dim V_i - 1.$$

Dieser Raum V_{i-1} ist invariant, denn es gilt

$$f(V_{i-1}) \subseteq f(V_i) \subseteq V_{i-1}.$$

Nach Konstruktion gilt $f(V_i) \subseteq V_{i-1}$.

(ii) ⇒ (iii). Nach Voraussetzung gilt $f^j(V_i) \subseteq V_{i-j}$. Insbesondere ist

$$f^d(V) \subseteq V_{d-d} = V_0 = 0.$$

(iii) ⇒ (i). trivial.

QED.

Bemerkung

Man beachte, im Beweis wurde nicht verwendet, daß K hinreichend groß sein soll.

5.2.4 Die Matrix eines nilpotenten Endomorphismus

Sei $f:V\to V$ ein linearer Endomorphismus eines Vektorraums V endlicher Dimension. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) f ist nilpotent.

(ii) Es gibt eine Basis v von V derart, daß $M_v^v(f)$ obere Dreiecksgestalt hat, wobei in der Hauptdiagonalen lauter Null stehen.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Wir wählen eine vollständige Fahne

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq ... \subseteq V_d = V$$

mit $f(V_i) \subseteq V_{i-1}$ für alle i. Dann gibt es eine Basis v von V derart, daß für jedes i die ersten i Vektoren dieser Basis gerade V_i erzeugen. Wegen

$$f(v_i) \in f(V_i) \subseteq V_{i-1}$$

ist $f(v_i)$ eine Linearkombination von $v_1, ... , v_{i-1}$. Damit hat aber die Matrix $M_v^v(f)$ die behauptete Gestalt hat.

(ii) ⇒ (i). Sei v eine Basis von V, für welche $M_v^v(f)$ obere Dreiecksgestalt hat, wobei auf der Hauptdiagonalen lauter Nullen stehen und bezeichne

$$V_i$$

den linearen Unterraum von V, der von den ersten i Basisvektoren erzeugt wird.

Nach Konstruktion wird das i-te Basiselement in eine Linearkombination der ersten i-1 Basiselemente abgebildet. Also gilt

$$f(V_i) \subseteq V_{i-1},$$

Die Räume V_i bilden also eine Fahne wie in 5.2.3(ii). Also ist f nilpotent.

QED.

5.2.5 Beispiel: Jordanblöcke

Eine d×d-Matrix der Gestalt

$$J_d(c) = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c \end{pmatrix}$$

in deren Hauptdiagonalen der feste Wert $c \in K$ steht, in deren Diagonalen unmittelbar über der Hauptdiagonalen lauter Einsen stehen und deren sonstigge Einträge sämtlich Null sind, heißt <u>Jordanblock</u> zum Eigenwert c.

Wie wir eben gesehen haben sind Jordanblöcke zum Eigenwert Null nilpotent. Alle übrigen Jordanblöcke sind nicht nilpotent[3].

5.2.6 Beispiel: direkte Summen von Matrizen

Seien $A_1,...,A_r$ quadratische Matrizen mit Einträgen aus K. Dann heißt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_r \end{pmatrix},$$

welche sich aus den auf der Hauptdiagonalen angeordneten Matrizen A_i zusammensetzt und welche außerhalb dieser so angeordneten Blöcke als Einträge nur Nullen besitzt, <u>direkte Summe</u> von $A_1,...,A_r$ und wird auch wie folgt bezeichnet,

$$A = A_1 \oplus ... \oplus A_r.$$

Für die n-te Potenz der direkten Summe von A gilt

$$A^n = A_1^n \oplus ... \oplus A_r^n$$

Insbesondere ist die direkte Summe von Matrizen genau dann nilpotent, wenn alle direkten Summanden nilpotent sind.

Bemerkung

Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, zu zeigen, jede nilpotente Matrix ist konjugiert zu einer direkten Summe von Jordan-Blöcken zum Eigenwert Null. Zum Beweis dieser Aussage benötigen wir den Begriff der zyklischen Basis.

5.2.7 Zyklische Basen

Sei $f: V \to V$ ein K-linearer Endomorphismus mit $d := \dim V < \infty$. Eine f-<u>zyklische</u> Basis von V ist eine Basis von V der Gestalt

(1) $$f^{d-1}(v),\ f^{d-2}(v),...,\ f^2(v),\ f(v), v$$

mit einem Vektor $v \in V$, welcher <u>Hauptvektor</u> der zyklischen Basis heißt, wobei zusätzlich gefordert wird, daß

$$f^d(v) = 0$$

gilt. Der Vektorraum V heißt f-<u>zyklisch</u> falls er eine f-zyklische Basis besitzt. Weiter wollen wir in dieser Situation sagen, der Endomorphismus f ist <u>zyklisch</u>.

---

[3] In der Hauptdiagonalen der j-ten Potenz von $J_d(c)$ steht c^j.

Ein linearer Unterraum W von V heißt f-zyklisch, wenn er f-invariant ist und die Einschränkung von f auf W zyklisch ist.

Die f-Ordnung eines Vektors v'∈V ist definiert als die kleinste nicht-negative ganze Zahl i mit $f^i(v') = 0$. Zum Beispiel hat 0∈V die Ordnung 0 und die Vektoren der zyklischen Basis haben die Ordnungen 1, 2, 3, ...d-1, d.

Bemerkungen

(i) Die Bedingung $f^d(v) = 0$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß f nilpotent ist[4].

(ii) Die Matrix von f bezüglich der zyklischen Basis $f^{d-1}(v)$, $f^{d-2}(v)$,...,v ist gerade ein Jordanblock zum Eigenwert 0,

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_d(0)$$

(iii) Umgekehrt bilden die Standard-Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_d$ eine f-zyklische Basis des K^d, falls f der Endomorphismus $f = f_{J_d(0)}$ zum Jordanblock $J_d(0)$ ist.

5.2.8 Beispiel

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } f = f_A.$$

Wir führen Bezeichnungen für die von Null verschiedenen Spalten von A ein:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = v_1$. Schließlich kann man hier durch Raten noch einen Vektor v_3 finden mit $f(v_3) = v_2$, nämlich

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig, denn

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

---

[4] Ist die Bedingung erfüllt, so ist $f^d(\sum_{i=0}^{d-1} a_i f^i(v)) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i f^{i+d}(v) = 0$ für beliebige a_i∈K, d.h. f ist nilpotent. Ist umgekehrt f nilpotent (und V von der Dimension d), so gilt sogar $f^d(v') = 0$ für beliebiges v'∈V (siehe 5.2.2).

Also ist v_3 Hauptvektor einer zyklischen Basis. Die Matrix von f bezüglich der Basis $v= (v_1, v_2, v_3)$ ist:

$$M_v^v(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.2.9 Der Kern eines zyklischen Endomorphismus

Seien $f: V \to V$ ein linearer Endomorphismus und $v \in V$ ein Hauptvektor einer f-zyklischen Basis von V. Dann gilt

$$\mathrm{Ker}(f) = K \cdot f^{d-1}(v)$$

mit d = dim V. Insbesondere ist

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = 1.$$

Beweis. Nach Definition des Begriffs der zyklischen Basis gilt

$$0 \neq f^{d-1}(v) \in \mathrm{Ker}(f).$$

Es reicht also zu zeigen,

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = 1.$$

Nun gilt,

$$\mathrm{rk}\, f = \dim \mathrm{Im}(f) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(f) = d - \dim \mathrm{Ker}(f),$$

d.h. es reicht zu zeigen rk(f) = d-1. Sei M = M(f) die Matrix von f bezüglich der vorliegenden zyklischen Basis. Wie wir wissen, stehen in M über der Hauptdiagonalen lauter Einsen und alle anderen Einträge von M sind Null,

$$M = (0, e_1, e_2, \ldots, e_{d-1}).$$

Daher gilt

$$\mathrm{rk}\,(f) = \mathrm{rk}(M) = d-1.$$

QED.

Bemerkungen

(i) Seien $f_i: V_i \to V_i$ für i=1,...,r zyklische Endomorphismen und sei

$$f = f_1 \oplus \ldots \oplus f_r: V_1 \oplus \ldots \oplus V_r \to V_1 \oplus \ldots \oplus V_r,$$

d.h. es sei $f(v_1,\ldots,v_r) = (f_1(v_1),\ldots,f_r(v_r))$. Dann gilt

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(f_r)$$

also dim Ker(f) = r. Insbesondere besitzt $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ im Fall r>1 keine zyklische Basis. Es gibt also nicht-zyklische lineare Endomorphismen.

(ii) Wir wollen im folgenden zeigen, die eben beschriebenen Situation tritt immer ein, d.h. jeder nilpotente Endomorphismus f ist bis auf Isomorphie eine direkte Summe von zyklischen Endomorphismen. Die Anzahl der direkten Summanden ist dabei leicht zu bestimmen: es ist gerade die Dimension des Kerns, denn dieser wird von den Basiselementen der Ordnung 1 erzeugt.

5.2.10 Zerlegung nilpotenter Endomorphismen in zyklische

Sei f: V→V ein nilpotenter Endomorphismus mit

$$d := \dim V < \infty.$$

Dann gibt es lineare f-invariante Unterräume $V_1,...,V_r$ mit folgenden Eigenschaften.

(i) $V = V_1\oplus...\oplus V_r$. Genauer, die lineare Abbildung

$$V_1\oplus...\oplus V_r \to V, (v_1,...,v_r) \mapsto v_1+...+v_r,$$

ist bijektiv.

(ii) Für jedes i ist V_i zyklisch bezüglich $f|_{V_i}$.

Bezeichne

$$\rho_k(f) := \# \{ V_i \mid \dim V_i = k \}$$

die Anzahl der direkten Summanden V_i der Dimension k. Dann gilt

$$(1) \qquad \sum_{k=i+1}^{d} (k-i)\cdot\rho_k(f)= \mathrm{rk}(f^i) \text{ für } i = 0, 1, 2, ...,d-1$$

Dabei bezeichne f^0 die identische Abbildung, d.h. es ist

$$\dim \mathrm{rk}(f^0) = \dim \mathrm{Im}(f^0) = \dim V.$$

Bemerkungen

(i) Von der Zahl r wissen wir, daß sie unabhängig von der speziellen Wahl der V_i ist, denn, wie wir gesehen haben, gilt

$$r = \dim \ker(f).$$

(ii) Durch die Bedingungen (1) sind die Zahlen $\rho_k(f)$ eindeutig festgelegt.[5] Sie hängen nur von den Rängen der Potenzen von f ab und nicht von der speziellen Wahl der V_i.

(iii) Die Unterraäume V_i der beschriebenen zyklischen Zerlegung sind im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Auf Grund von Bemerkung (ii) steht aber fest, wieviele es von welcher Dimension es gibt.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Ordnung

$$m := \mathrm{ord}\ (f) = \min \{n \in \mathbb{Z} \mid n \ge 0, f^n = 0 \}$$

des Endomorphismus f: V → V:

$$f^m = 0, f^{m-1} \ne 0.$$

<u>Der Fall m = 1</u>. f ist die Nullabbildung. Wir wählen eine Basis

$$v_1, ..., v_d \in V$$

von V und betrachten die zugehörige Zerlegung in eine direkte Summe 1-dimensionaler Unterräume,

$$V = Kv_1\oplus...\oplus Kv_d$$

[5] Wir können (1) als Gleichungssystem in den Unbestimmten $\rho_k(f)$ auffassen. Dieses Gleichungssystem hat eine Koeffizientenmatrix von Dreiecksgestalt, wobei auf der Hauptdiagonalen lauter Einsen stehen.

Jeder der Unterräume Kv_i ist zyklisch (und v_i ist Hauptvektor einer zyklischen Basis). Weiter gilt

$$\rho_k(f) = \begin{cases} \dim V & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$rk(f^i) = \begin{cases} \dim V & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Identitäten (1) sind damit trivialerweise erfüllt.
Der Fall $m > 1$. Seien

$$W := \ker(f)$$

und

$$\rho: V \to V' := V/W,\ v \mapsto v+W,$$

die natürliche Abbildung. Weiter betrachten wir den linearen Endomorphismus

$$f': V' \to V',\ v + W \mapsto f(v) + W.$$

Zwischenbemerkung. f' ist wohldefiniert.
Aus $v + W = v' + W$ folgt $v-v' \in W$, also $f(v) - f(v') \in f(W) = 0$, also $f(v) = f(v')$, also $f(v) + W = f(v') + W$.

Nach Konstruktion ist f' die eindeutig bestimmte Abbildung, für welche das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \rho\downarrow & & \downarrow\rho \\ V' & \xrightarrow{f'} & V' \end{array} \qquad (2)$$

Weil f nilpotent ist, gilt $\operatorname{Ker} f \neq 0$, also

$$\dim V' = \dim V - \dim W < \dim V = d.$$

und wegen des kommutativen Diagramms ist mit f auch f' nilpotent:

$$f'^k \circ \rho = \rho \circ f^k = 0 \text{ für } k \text{ groß, d.h. } f'^k = 0 \text{ für } k \text{ groß.}$$

Wir wollen jetzt die Induktionsvoraussetzung auf den Endomorphismus f' anwenden. Dazu müssen wir noch zeigen,

$$\operatorname{ord} f' < m.$$

Es reicht zu zeigen, $f'^{m-1} = 0$. Nach Definition von m gilt $f^m = 0$, d.h. für jedes $v \in V$ gilt

$$0 = f^m(v) = f(f^{m-1}(v)),$$

d.h. $f^{m-1}(v) \in \ker(f) = W = \ker(\rho)$. Wegen der Kommutativität von (2) folgt

$$0 = \rho(f^{m-1}(v)) = f'^{m-1}(\rho(v)) \text{ für jedes } v \in V.$$

Da ρ surjektiv ist, folgt $f'^{m-1} = 0$. Die Induktionsvoraussetzung kann also auf f' angewandt werden. Wir erhalten eine Zerlegung

$$V' = V'_1 \oplus \ldots \oplus V'_r,$$

in f'-zyklische invarianten Unterräume mit

$$\sum_{k=i+1}^{\infty} \rho_k(f')(k-i) = rk(f'^i) \text{ für } i = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

Wir schreiben hier ∞ für die obere Summationsgrenze um keine Bezeichnung für die Dimension von V' einführen zu müssen. Die zusätzlichen Summanden sind sämtlich gleich Null, da $\rho_k(f') = 0$ sein muß für $k > \dim V'$. Außerdem können wir auch i bis ins Unendliche laufen lassen, da die zusätzlichen Gleichungen von der Gestalt 0 = 0 sind.

Bezeichne

$$v'_i \in V'_i$$

den Hauptvektor einer zyklischen Basis von V'_i. Für jedes i wählen wir ein Urbild dieses Hauptvektors in V, sagen wir

$$v_i \in V \text{ mit } \rho(v_i) = v'_i .$$

Den weiteren Beweis des Satzes führen wir in mehreren Schritten.

<u>1. Schritt</u>. Für jedes i ist v_i der Hauptvektor einer zyklischen Basis eines linearen Unterraums $V_i \subseteq V$ der Dimension

$$\dim V_i = \dim V'_i + 1.$$

Die Summe der V_i ist direkt, d.h. die lineare Abbildung

$$V_1 \oplus \ldots \oplus V_{r'} \to V_1 + \ldots + V_{r'} \ (\subseteq V),\ (x_1,\ldots,x_{r'}) \mapsto x_1 + \ldots + x_{r'},$$

ist ein Isomorphismus.

Sei

(4) $$d_i := \dim V'_i + 1$$

und V_i der von den d_i Vektoren v_i , $f(v_i)$, $f^2(v_i)$, ... , $f^{d_i-1}(v_i)$ erzeugte lineare Unterraum von V,

(5) $$V_i := K\, v_i + Kf(v_i) + Kf^2(v_i) + \ldots + Kf^{d_i-1}(v_i)$$

Zum Beweis der Aussage des ersten Schritts reicht es zu zeigen:

1. $f^{d_i}(v_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, r'$.
2. Die Vektoren $f^k(v_i)$, $i = 1, \ldots , r'$, $k = 0, \ldots , d_i - 1$ sind linear unabhängig.

<u>Zu 1</u>. Es reicht zu zeigen $f(f^{d_i-1}(v_i)) = 0$, d.h.

$$f^{d_i-1}(v_i) \in \mathrm{Ker}(f)\ (= W = \mathrm{Ker}(\rho)),$$

d.h.

$$\rho(f^{d_i-1}(v_i)) = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \rho(f^{d_i-1}(v_i)) &= f'^{d_i-1}(\rho(v_i)) && \text{(wegen der Kommutativität von (2))} \\ &= f'^{d_i-1}(v'_i) && \text{(nach Definition von } v_i) \end{aligned}$$

Nun ist V'_i ein Unterraum der Dimension

$$\dim V'_i = d_i - 1$$

(vgl. (4)) und $f'|_{V'_i}$ ist nilpotent. Deshalb gilt $f'^{d_i-1} = 0$ auf V'_i also ist auch

$$f'^{d_i-1}(v'_i) = 0.$$

<u>Zu 2</u>. Angenommen es besteht eine lineare Relation

$$0 = \sum_{i=1}^{r'} \sum_{k=0}^{d_i-1} c_{k,i} f^k(v_i) \text{ mit } c_{k,i} \in K.$$

Wir bringen die Summanden der Gestalt $c\cdot f^{d_i-1}(v_i)$ auf die andere Seite und erhalten

$$\sum_{i=1}^{r'} \sum_{k=0}^{d_i-2} c_{k,i} f^k(v_i) = - \sum_{i=1}^{r'} c_{d_i-1,i} f^{d_i-1}(v_i) \in W$$

Man beachte, wegen 1. liegen die Vektoren $f^{d_i-1}(v_i)$ im linearen Unterraum

$$\ker(f) = W = \ker(\rho).$$

Wir wenden die natürliche Abbilung ρ an und erhalten wegen $\rho\circ f^j = f'^j\circ\rho$ die Identität

$$0 = \sum_{i=1}^{r'} \sum_{k=0}^{d_i-2} c_{k,i} f'^k(\rho(v_i)) = \sum_{i=1}^{r'} \sum_{k=0}^{d_i-2} c_{k,i} f'^k(v'_i)$$

Nun ist

(6) $$f'^{d_i-2}(v'_i), f'^{d_i-3}(v'_i), \dots , f'(v'_i), v'_i$$

nach Wahl von v'_i eine zyklische Basis von V'_i (vgl. (4)). Weil V' eine direkte Summe der V'_i ist, bilden die Basen (6) zusammen (i = 1, ... , r') eine Basis von V' und sind insbesondere linear unabhängig. Es gilt also

$$c_{k,i} = 0 \text{ für } i = 1, \dots , r' \text{ und } k = 0, \dots , d_i - 2.$$

Wir haben noch zu zeigen, die $c_{k,i}$ sind auch für $k = d_i-1$ gleich Null. Die Ausgangsrelation bekommt, da die $c_{k,i}$ für $k < d_i-1$ gleich Null sind, die Gestalt

$$0 = \sum_{i=1}^{r'} c_{d_i-1,i} f^{d_i-1}(v_i) = f(\sum_{i=1}^{r'} c_{d_i-1,i} f^{d_i-2}(v_i))$$

Man beachte, es gilt $d_i = \dim V'_i +1 \ge 2$ für jedes i, da keiner der zyklischen direkten Summanden V'_i von V' Null ist. Wir erhalten

$$\sum_{i=1}^{r'} c_{d_i-1,i} f^{d_i-2}(v_i) \in \operatorname{Ker}(f) = W = \operatorname{Ker}(\rho).$$

Wir wenden ρ auf diese Summe an und erhalten wegen der Kommutativität des Diagramms (2)

$$0 = \sum_{i=1}^{r'} c_{d_i-1,i} f'^{d_i-2}(\rho(v_i)) = \sum_{i=1}^{r'} c_{d_i-1,i} f'^{d_i-2}(v'_i)$$

Wie wir oben angemerkt haben, sind die Vektoren

$$f'^{d_i-2}(v'_i) , \ i = 1, \dots , r'$$

linear unabhängig, d.h. es gilt

$$c_{d_i-1,i} = 0 \text{ für } i = 1, \dots, r'.$$

Bemerkung
Auf Grund des ersten Schritts besitzt der Unterraum

$$V_1+\dots+V_{r'} = V_1\oplus\dots\oplus V_{r'}$$

von V eine Zerlegung in f-zyklische Unterräum V_i. Dieser Unterraum ist im allgemeinen nicht gleich V, denn in der Zerlegung fehlen die zyklichen Unterräume der Dimension 1, mit den wir uns jetzt noch beschäftigen müssen.

2. Schritt. Es gibt einen linearen Unterraum $W' \subseteq \ker(f)$ mit

$$V = V_1\oplus\dots\oplus V_{r'}\oplus W'.$$

Insbesondere ist V eine direkte Summe f-zyklischer Unterräume.

Nach dem ersten Schritt ist die Summe der V_i direkt. Es reicht zu zeigen, eine Basis von

$$V_1+\dots+V_{r'}$$

läßt sich zu einer Basis von V ergänzen, wobei man die zusätzlichen Basisvektoren aus W nehmen kann.

Betrachten wir die natürliche Abbildung

$$\rho':V \to V/(V_1+\dots+V_{r'})$$

Zur Konstruktion einer Basis von V genügt es, irgendeine Basis des Faktorraums rechts zu wählen. Die Urbilder der Basiselemente in V bilden dann zusammen mit der gegebenen Basis von $V_1+\dots+V_{r'}$ eine solche von V.

Es reicht also zu zeigen, daß wir die Urbilder der Basiselemente so abändern können, daß sie in W liegen. Mit anderen Worten, es reicht zu zeigen:

(7) Für jedes $v\in V$ gibt es ein $w\in W$ mit $\rho'(v) = \rho'(w)$.

Sei $v\in V$. Dann liegt $\rho(v)$ in V' und ist somit eine Linearkombination von Vektoren der Gestalt

$$f'^k(v'_i) \text{ im } i = 1, \dots, r', k = 0, \dots, d_i - 2,$$

sagen wir

$$\rho(v) = \sum_{i=1}^{r'} \sum_{k=0}^{d_i-2} c_{k,i}\, f'^k(v'_i) = \sum_{i=1}^{r'} \sum_{k=0}^{d_i-2} c_{k,i}\, f'^k(\rho(v_i))$$

$$= \rho(\tilde v) \text{ mit } \tilde v = \sum_{i=1}^{r'} \sum_{k=0}^{d_i-2} c_{k,i}\, f^k(v_i) \in V_1+\dots+V_{r'}.$$

Es folgt

$$\rho(v - \tilde v) = 0$$

also

$$w := v - \tilde v \in \ker(\rho) = W.$$

Nun liegt $\tilde v$ in $V_1+\dots+V_{r'}$ und es gilt somit $\rho'(\tilde v) = 0$. Dann ist aber

$$\rho'(v) = \rho'(w+\tilde v) = \rho'(w).$$

Wir haben gezeigt

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_{r'} \oplus W'.$$

mit einem linearen Unterraum $W' \subseteq W = \ker(f)$. Da f auf W die Ordnung 1 hat, ist W' (auf Grund des bereits behandelten Falls m = 0) eine direkte Summe von zyklischen Unterräumen (der Dimension 1), die wir mit $V_{r'+1}, ... , V_r$ bezeichnen wollen. Damit bekommt V die behauptete Gestalt

$$V = \oplus_r^{i=1} V_i$$

Wir haben noch die Gültigkeit der Formeln (1) zu beweisen.

Die direkte Summe über alle zyklischen Unterräume der Dimension k von V hat die Dimension

$$k\times \text{ Anzahl der direkten Summanden} = k\cdot\rho_k(f)$$

Da V die direkte Summe über alle zyklischen Unterräume V_i gleich V ist, folgt

$$\sum_{i=1}^{r} k\cdot\rho_k(f) = \dim V = rk(f^0).$$

Dies ist die erste der Identitäten (1) (mit i = 0). Beweisen wir die übrigen. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\sum_{k=i+1}^{\infty} \rho_k(f')(k-i) = rk(f'^i) \text{ für } i = 0, 1, 2, ...$$

(vgl. Formel (3)). Wegen (4) ist die Anzahl $\rho_k(f')$ der k-dimensionalen zyklischen direkten Summanden von V' gleich der Anzahl der (k+1)-dimensionalen zyklischen direkten Summanden von V,

$$\rho_k(f') = \rho_{k+1}(f)$$

Durch Einsetzen in die obigen Identitäten erhalten wir

$$\sum_{k=i+1}^{\infty} \rho_{k+1} (f)(k-i) = rk(f'^i) \text{ für } i = 0, 1, 2, ...$$

und durch Index-Verschiebung

$$\sum_{k=i+2}^{\infty} \rho_k (f)(k-i-1) = rk(f'^i) \text{ für } i = 0, 1, 2, ...$$

Mit anderen Worten,

$$\sum_{k=i+1}^{\infty} \rho_k (f)(k-i) = rk(f'^{i-1}) \text{ für } i =1, 2, ...$$

Zum Beweis der verbleibenden Identitäten (1) reicht es somit, wenn wir zeigen

<u>3. Schritt</u>: $rk(f'^{i-1}) = rk(f^i)$ für i = 1, 2, ...

Es gilt

$$rk(f'^{i-1}) = \dim V' - \dim\ker(f'^{i-1}) = \dim V - \dim W - \dim\ker(f'^{i-1})$$

und

$$rk(f^i) = \dim V - \dim\ker(f^i).$$

Es reicht also zu zeigen,

$$\dim\ker(f'^{i-1}) = \dim\ker(f^i) - \dim W.$$

Dazu wiederum reicht es zu zeigen,

$$\mathrm{Ker}(f'^{i-1}) = \mathrm{Ker}(f^i)/W.$$

Es gilt

$$v \in \mathrm{Ker}(f^i) \Leftrightarrow f^i(v) = 0 \Leftrightarrow f(f^{i-1}(v)) = 0 \Leftrightarrow f^{i-1}(v) \in \mathrm{Ker}(f) = W = \mathrm{Ker}(\rho)$$
$$\Leftrightarrow 0 = \rho(f^{i-1}(v)) = f'^{\,i-1}(\rho(v))$$
$$\Leftrightarrow \rho(v) \in \ker(f'^{\,i-1})$$
$$\Leftrightarrow v \in \rho^{-1}(\ker(f'^{\,i-1}))$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f'^{\,i-1}) &= \rho(\rho^{-1}(\mathrm{Ker}(f'^{\,i-1}))) && \text{(weil } \rho \text{ surjektiv ist)}\\
&= \rho(\mathrm{Ker}(f^i)) && \text{(wie eben gezeigt)}\\
&= \{ v + W \mid v \in \mathrm{Ker}(f^i) \}\\
&= \mathrm{Ker}(f^i)/W.
\end{aligned}$$

<u>4. Schritt</u>: Durch die Identitäten (1) sind die $\rho_k(f)$ eindeutig festgelegt.

Wir betrachten die Identitäten als lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der $\rho_k(f)$. Die Zahl der Gleichungen ist dann gleich der Zahl der Unbestimmten und die Koeffizientenmatrix ist quadratisch von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d \\ 0 & 1 & \dots & d-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem hat somit eine eindeutig bestimmte Lösung.
QED.

Bemerkungen

(i) Eine Zerlegung wie in 5.2.10 (i) heißt auch <u>Jordan-Zerlegung</u> von V bezüglich f oder auch <u>Zerlegung in f-zyklische Unterräume</u>.

(ii) Die wichtigste Frage im Zusammenhang mit dieser Zerlegung ist die nach der Anzahl $\rho_k(f)$ der direkten Summanden einer vorgegebenen Dimension k. Die Formeln (1) gestatten es die Zahlen $\rho_k(f)$ zu berechnen.

(ii) Wie wir bereits in 5.2.9 gesehen haben, gilt außerdem

$$\sum_k \rho_k(f) = r = \dim \mathrm{Ker}(f).$$

Diese Formel gestattet es oft, die Berechnung der $\rho_k(f)$ zu vereinfachen, bzw. sie bietet die Möglichkeit einer Probe.

5.2.11 Die Jordansche Normalform eines nilpotenten Endomorphismus

Sei $f:V\to V$ ein nilpotenter Endomorphismus mit $\dim V < \infty$. Dann gibt es eine Basis v von V derart, daß die zugehörige Matrix $M_v^v(f)$ eine direkte Summe von Jordanblöcken zum Eigenwert Null ist,

$$M_v^v(f) = J_{k_1}(0)\oplus\ldots\oplus J_{k_r}(0).$$

Wählt man noch die Reihenfolge der Basiselemente von v derart, daß

$$k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_r$$

gilt, so ist die Folge der k_i unabhängig von der speziellen Wahl der Basis.

Beweis. Folgt aus 5.2.10.
QED.

5.2.12 Beispiel

Sei $f = f_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ mit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -10 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Wir wollen die Jordansche Normalform dieser Abbildung berechnen. Wir müssen zunächst überprüfen, ob A auch wirklich nilpotent ist, denn nur in diesem Fall können wir bisher die Jordansche Normalform bestimmen. Da die Spalten von A proportional sind, hat f den Rang 1 und das Bild

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\mathrm{Im}(f^2) = f(\mathrm{im}(f)) = \mathbb{R}\cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -10 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

Wir erhaltwen:

$\mathrm{rk}\, f = 1,$

$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - 1 = 2.$

Damit ist

$$\begin{aligned} \rho_1(f) + \rho_2(f) + \rho_3(f) &= \dim \mathrm{Ker}(f) = 2 \\ \rho_1(f) + 2\cdot\rho_2(f) + 3\cdot\rho_3(f) &= \mathrm{rk}(f^0) = 3 \\ \rho_2(f) + 2\cdot\rho_3(f) &= \mathrm{rk}(f) = 1 \end{aligned}$$

Die Dimension des Kerns von f ist gleich der Anzahl der zyklischen direkten Summanden. Da diese größer als 1 ist, kann es keinen direkten Summanden der Dimension 3 geben, d.h. es gilt

$\rho_3(f) = 0$

(das folgt auch aus der dritten Bestimmungsgleichung). Dann ist aber

$\rho_2(f) = 1$

$\rho_1(f) = 1.$

Als Jordansche Normalform erhalten wir damit

$$M(f) = J_2(0)\oplus J_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Bestimmung einer Basis, bezüglich welcher die Matrix von f die Jordansche Normalform annimmt, ist schwieriger. Die systematische Behandlung dieses Problems verschieben wir auf später (bis wir geeignete Begriffe zur Verfügung haben). Im hier vorliegenden Fall ist dies vergleichsweise einfach, da bereits das Quadrat von f Null ist.

Wir berechnen dazu zunächst den Kern von f. Da f den Rang 1 hat, besteht der Kern aus den Lösungen der einzelnen Gleichung

$$5x + 2y - z = 0.$$

Wir erhalten $z = 5x + 2y$, d.h. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5x+2y \end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, d.h. es ist

$$\ker(f) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Raum $K^3/\ker(f)$ ist 1-dimensional, also zyklisch bezüglich der durch f induzierten Abbildung. Jeder von Null verschiedene Vektor ist Hauptvektor. Jeder Repräsentant eines solchen Vektors in K^3 ist Hauptvektor eines f-zyklischen Unterraums der Dimension 2 von K^3. Es reicht also, einen beliebigen Vektor zu wählen, der nicht in Ker(f) liegt. Zum Beispiel können wir

$$v_1 := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

wählen, denn es ist

$$v'_1 = f(v_1) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -10 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -60 \\ 30 \end{pmatrix} \neq 0,$$

d.h. v_1 ist nicht im Kern von f, d.h. v_1 ist Hauptvektor eines zyklischen Unterraums

$$V_1 = K\, v_1 + Kv'_1$$

der Dimension 2.

Die Frage, wie man den Vektor v_1 in der allgemeinen Situation findet, behandeln wir später. Wir haben noch einen zyklischen Unterraum der Dimension 1 zu finden, dessen Summe mit V_1 direkt ist. Dazu müssen wir die Basis v_1, v'_1 von V_1 so zu einer Basis

$$v_1, v'_1, v_2 \text{ von } V$$

ergänzen, daß v_2 im Kern von f liegt, d.h. gesucht ist ein Vektor von ker(f), der nicht in V_1 liegt. Aus theoretischen Gründen wissen wir, daß es einen solchen Vektor gibt. Dann hat aber einer der Basisvektoren

$$\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

von Ker(f) diese Eigenschaft. Ein solcher Vektor ist[6]

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

---

[6] Man berechne die Determinante, desern Spalten die Vektoren v_1, v'_1, v_2 sind:

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 30 & 0 \\ 2 & -60 & 1 \\ -1 & 30 & 2 \end{pmatrix} = 30\bullet\det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 30\bullet\det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -30\bullet\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = -30\bullet(25+5) \neq 0$$

Damit hat die Matrix von f die Gestalt $M(f) = J_2(0)\oplus J_1(0)$ bezüglich der Basis v_1, v'_1, v_2 von V.

Bemerkung
Bei der Konstruktion einer Basis, bezüglich welcher ein nilpotenter Endomorphismus eine Matrix in Jordanscher Normalform besitzt, ist es oft nützlich, die Anzahl der zyklischen direkten Summanden der Dimension 1 zu kennen, d.h. die Anzahl der in jedem Induktionsschritt des obigen Beweises hinzukommenden Summanden.

5.2.13 Die Anzahl der zyklischen direkten Summanden der Dimension 1

Seien $f: V\to V$ ein nilpotenter Endomorphismus mit $\dim V < \infty$ und

$$V = \oplus_{i\in I} V_i$$

eine Zerlegung in f-zyklische Unterräume (d.h. eine Jordanzerlegung bezüglich f). Dann ist die Anzahl der direkten Summanden der Dimension 1 gerade gleich

$$\rho_1(f) = \dim \mathrm{Ker}(f) - \dim \mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f).$$

Insbesondere im Fall $f = f_A$ mit $A\in K^{n\times n}$ ist dies gerade die Anzahl der 1×1-Jordanblöcke von A.
Beweis. Wir setzen

$$V' := \bigoplus_{\dim V_i=1} V_i$$

$$V'' := \bigoplus_{\dim V_i>1} V_i$$

Dann ist $V = V'\oplus V''$ und

$$\rho_1(f) = \dim V'.$$

Wir haben also zu zeigen, V' hat die Dimension $\dim \mathrm{Ker}(f) - \dim \mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)$. Dazu wiederum genügt es zu zeigen,

$$V'\oplus\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f),$$

genauer, die lineare Abbildung

$$\varphi: V'\oplus\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Ker}(f),\ (a,b) \mapsto a+b,$$

ist bijektiv.
<u>φ ist wohldefiniert</u>.Ein zyklischer Unterraum V_i der Dimension 1 wird von einem Basisvektor der Ordung 1 erzeugt und liegt damit im Kern von f. Also gilt $V'\subseteq\mathrm{Ker}(f)$, d.h. die Abbildung φ ist wohldefiniert.
<u>Injektivität von φ</u>. Für jedes $i\in I$ wählen wir einen Hauptvektor v_i einer f-zyklischen Basis von V_i. Sei

$$k_i := \mathrm{ord}\ v_i = \dim V_i$$

die Ordnung von v_i, d.h. die Vektoren

$$f^j(v_i) \text{ mit } j = 0,...,k_i -1$$

bilden eine Basis von V_i (und es ist $f^j(v_i) = 0$ für $j = k_i$). Sei jetzt

$$(a,b) \in \mathrm{Ker}(\varphi),$$

d.h. es gelte $a + b = 0$. Wir schreiben $a\in V'$ in der Gestalt

(1) $$a = \sum_{k_i=1} c_i \cdot v_i \text{ mit } c_i\in K$$

Wegen $b\in\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)$ gibt es ein $b'\in V$ mit $b = f(b')$. Wir schreiben b' in der Gestalt

$$b' = \sum_{j<k_i} c_{ij}\cdot f^j(v_i) \text{ mit } c_{ij} \in K.$$

Dabei können wir b' um Elemente aus Ker(f) abändern, denn dadurch ändert sich $b = f(b')$ nicht. Mit anderen Worten, wir können alle Summanden mit $j = k_i - 1$ in der Summe weglassen und annehmen

$$b' = \sum_{j<k_i-1} c_{ij}\cdot f^j(v_i) \text{ mit } c_{ij} \in K.$$

Insbesondere fallen damit alle Summanden mit $k_i = 1$ weg, d.h. gerade diejenigen i, über welche die Summe von (1) erstreckt wird. Wir wenden f an und erhalten

(2) $$b = \sum_{j<k_i-1} c_{ij}\cdot f^{j+1}(v_i)$$

Wir sehen, a und b sind Linearkombinationen von disjunkten Mengen der Basisvektoren $f^j(v_i)$ (in (1) treten nur Basisvektoren mit j=0 auf und in (2) nur solche mit $j\geq1$). Damit folgt aber aus $a + b = 0$ (und der linearen Unabhängigkeit der $f^j(v_i)$ mit $j<k_i$ und $i\in I$), daß alle c_i und alle c_{ij} Null sein müssen. Mit anderen Worten, es ist $a = b = 0$.

Surjektivität von φ. Sei $v\in\mathrm{Ker}(f)$ $(\subseteq V)$. Wir schreiben v mit Hilfe der oben gewählten Basis der $f^j(v_i)$ in der Gestalt

$$v = \sum_{j<k_i} c_{ij}f^j(v_i) \text{ mit } c_{ij}\in K$$

und setzen

$$a := \sum_{k_i=1} c_{i0}v_i \text{ und } b := \sum_{j<k_i,k_i\neq1} c_{ij}f^j(v_i)$$

Dann gilt $a + b = v$ und $a\in\mathrm{Ker}(f)$ (weil die v_i in der ersten Summe die Ordnung $k_i=1$ haben). Wir haben also nur noch zu zeigen,

(4) $$b \in \mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f).$$

Wegen $v\in\ker(f)$ und $a\in\ker(f)$ gilt auch

(3) $$b = v - a \in\mathrm{Ker}(f),$$

also

$$0 = f(b) = \sum_{j<k_i, k_i\neq 1} c_{ij} f^{j+1}(v_i),$$

d.h. alle c_{ij} mit $f^{j+1}(v_i) \neq 0$ sind Null. Genauer gilt,

$$c_{ij} = 0 \text{ für } j = 0,1,...,k_i-2.$$

In der Summe

$$b = \sum_{j<k_i, k_i\neq 1} c_{ij} f^j(v_i)$$

kann man also insbesondere alle Summanden mit j = 0 weglassen. Das bedeutet aber, b liegt im Bild von f,

$$b \in \mathrm{Im}(f).$$

Dies zusammen mit (3) ist aber gerade die zu beweisende Aussage (4).
QED.

5.3 Die Jordansche Normalform (beliebiger Matrizen)

5.3.1 Zur Unzulänglichkeit des Eigenraum-Begriffs

Sei $f:V\to V$ ein K-linearer Endomorphismus mit $d := \dim V < \infty$ und r verschiedenen Eigenwerten $c_1, ... , c_r$. Wie wir bereits wissen, ist in "günstigen" Fällen der Vektorraum V eine direkte Summe der Eigenräume

$$V_{c_i} := \ker(f-c_i\cdot\mathrm{Id}),$$

d.h. f besitzt eine Eigenbasis, d.h. eine Basis bezüglich welcher die Matrix von f Diagonalgestalt besitzt. "Günstig" bedeutet hier, die Dimensionen der Eigenräume sind groß genug, und zwar so groß, daß die Summe der Dimensionen gerade d ist,

$$\sum_{i=1}^{r} \dim V_{c_i} = \dim V.$$

Leider ist im allgemeinen die Summe auf der linken Seite kleiner als die Dimension rechts. Wir müssen deshalb den Begriff des Eigenraums so verändern, daß wir etwas größere Räume erhalten, für welche die Dimensionsbedingung immer erfüllt ist.

Wir werden dann eine explizite Beschreibung der Matrix von f auf diesen größeren Räumen angeben.

Diese Räume werden die Gestalt

$$\ker(f-c_i\cdot\mathrm{Id})^{n_i}$$

besitzen mit n_i hinreichend groß. Zunächst müssen wir deshalb die Kerne für sämtliche Werte von $n_i = 1,2,3,...$ betrachten. Anstelle von $f-c_i\cdot\mathrm{Id}$ werden wir vorerst einen beliebigen Endomorphismus $g:V\to V$ betrachten. Später wird uns nur der Fall

$$g = f-c_i\cdot\mathrm{Id}$$

interessieren.
Wir beginnen mit einigen allgemeinen Betrachtungen zur Menge aller Endomorphismen eines Vektorraums.

5.3.2 Der Endomorphismenring eines Vektoraums

Sei V ein K-Vektorraum. Wie wir bereits wissen ist ein K-Endomorphismus von V eine K-lineare Abbildung

$$f: V \to V.$$

Die Menge aller K-Endomorphismen von V wird mit

$$\mathrm{End}(V) = \mathrm{End}_K(V) := \mathrm{Hom}_K(V,V)$$

bezeichnet und ist offensichtlich ein K-Vektorraum. Außerdem definiert die Komposition von Abbildungen auf End(V) eine weitere Operation,

$$f\cdot g := f\circ g,$$

durch welche End(V) zu einem nicht-notwendig kommutativen Ring mit Eins wird, d.h. "∘" spielt die Rolle der Multiplikation und es gelten die üblichen Rechengesetze (außer eventuell dem Kommutativgesetz).

Für jedes Polynom

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$$

mit Koeffizienten $a_i \in K$ und jeden Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ ist somit der Ausdruck

(1) $$f(\varphi) = a_n\varphi^n + \ldots + a_0$$

wohldefiniert und beschreibt einen Endomorphismus von V, d.h.

$$f(\varphi) \in \mathrm{End}(V).$$

Die Teilmenge aller Endomorphismen der Gestalt (1) mit festem φ, wobei f alle Polynome mit Koeffizienten aus K durch läuft, wird mit

$$K[\varphi]$$

bezeichnet. Diese Teilmenge von End(V) ist sogar ein Teilring[7]. In diesem Teilring gilt stets das Kommutativgesetzt.[8]

5.3.3 Das Minimalpolynom eines Endomorphismus

Sei $f: V \to V$ linearer Endomorphismus mit $\dim V < \infty$. Dann gibt es genau ein Polynom kleinsten Grades $m_f(T) \in K[T]$ mit dem höchsten Koeffizienten 1 und der Nullstelle f,

$$m_f(f) = 0.$$

Dieses Polynom teilt jedes Polynom aus K[T] mit der Nullstelle f. Es heißt <u>Minimalpolynom</u> von f.

Beweis. Wir zeigen zunächst, es gibt ein Polynom $p(T) \in K[T]$ mit

$$p(f) = 0.$$

Dazu fixieren wir eine Basis von V und betrachten die zugehörige Matrix A von f. Es reicht zu zeigen, es gibt ein Polynom p mit $p(A) = 0$.

Ist $d := \dim V$, so ist A eine $d\times d$-Matrix. Der Raum $K^{d\times d}$ aller $d\times d$-Matrizen hat die Dimension d^2. Deshalb sind die d^2+1 Elemente

$$A^0, A^1, A^2, \ldots, A^{d^2} \in K^{d\times d}$$

---

[7] Addition und Multiplikation von Elementen dieser Teilmenge liefern wieder Elemente dieser Teilmenge.

[8] Wegen $\varphi^i\circ\varphi^j = \varphi^{i+j} = \varphi^j\circ\varphi^i$.

linear abhängig. Das bedeutet aber gerade, es gibt ein Polynom p der behaupteten Art.

Aus der Existenz eines Polynoms p mit p(A) = 0 folgt natürlich auch die Existenz eines Polynoms m minimalen Grades mit m(A) = 0, d.h. eines Minimalpolynoms.

Sei jetzt p irgendein Polynom mit p(A) = 0. Polynomiale Division mit Rest liefert dann

$$p = q \cdot m + r$$

mit Polynomen q und r, wobei außerdem noch deg r < deg m gilt. Wir setzen A ein und erhalten

$$0 = p(A) = q(A)\cdot m(A) + r(A) = q(A)\cdot 0 + r(A),$$

also r(A) = 0. Wäre r ≠ 0, so würde dies der Minimalität des Grades von m widersprechen. Es muß also r = 0 gelten, d.h. es ist

$$p = q\cdot m.$$

Wir haben gezeigt, jedes Polynom mit der Nullstelle A ist Vielfaches von m. Insbesondere sind zwei Minimalpolynome Vielfache voneinander. Sie haben also denselben Grad. Weil der höchst Koeffizienten eines Minimalpolynoms 1 sein soll, kann es somit nur ein Minimalpolynom von A geben.
QED.

Bemerkung
Aus dem Beweis ergibt sich, daß deg $m_f \le d^2$ gilt. Wir werden später sehen, es ist sogar deg $m_f \le d$ (:= dim V).

Beispiel
Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $f(T) = T^2 - 5T - 2$. Es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 - 5A - 2\cdot \mathrm{Id} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - 5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Überzeugen wir uns nun davon, daß f sogar das Minimalpolynom von A ist. Dazu müssen wir zeigen, daß kein Polynom eines Grades < 2 (außer dem Nullpolynom) die Nullstelle f hat. Sei g ein solches Polynom. Wir können annehmen, g ist nicht konstant, d.h.

$$\deg g = 1.$$

Außerdem können wir durch den höchsten Koeffizienten teilen und so erreichen, daß g die Gestalt

$$g(T) = T - a$$

hat. Dann gilt

$$g(A) = A - a\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & 2 \\ 3 & 4-a \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist niemals Null, ganz gleich wie man a wählt.

5.3.4 Potenzen eines Endomorphismus, Stabilisieren von Kern und Bild

Sei $g: V\to V$ ein K-linearer Endomorphismus mit $\dim V <\infty$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Die Kerne bzw. die Bilder der Potenzen g^i, $i=0,1,2, 3, ...$ bilden eine aufssteigende bzw. absteigende Kette von K-linearen Unterräumen von V,

$$0 \subseteq \ker(g)\subseteq\ker(g^2)\subseteq...\subseteq\ker(g^i)\subseteq...\subseteq V$$

$$V\supseteq\mathrm{im}(g)\supseteq\mathrm{im}(g^2)\supseteq...\supseteq\mathrm{im}(g^i)\supseteq...\supseteq 0$$

(ii) Es gibt nicht-negative ganze Zahlen u bzw. v mit

$$\ker(g^i) = \ker(g^{i+1}) \text{ für } i=u, u+1, u+2, ...$$

bzw.

$$\mathrm{im}(g^i) = \mathrm{im}(g^{i+1}) \text{ für } i=v, v+1, v+2, ...$$

Wählt man u und v minimal, so gilt $u=v$. Wir wollen dieses $u = v$ <u>den ersten stabilen Exponenten</u> von g nennen und mit

$$u = \mathrm{stab}(g)$$

bezeichnen. Entsprechend heißt g^u dann erste stabile Potenz von g.

(iii) Ist i kleiner als der erste stabile Exponent von g, so bestehen sogar die echten Inklusionen,

$$\ker(f^i) \subset \ker(f^{i+1}) \text{ und } \mathrm{im}(f^i) \supset \mathrm{im}(f^{i+1}).$$

Beweis. <u>Zu (i)</u>: Wir haben zu zeigen, für jedes i gilt

1. $\ker(g^i) \subseteq \ker(g^{i+1})$
2. $\mathrm{im}(g^i) \supseteq \mathrm{im}(g^{i+1})$.

<u>Zu 1</u>. Für $x\in\ker(g^i)$ gilt $g^i(x) = 0$, also $g^{i+1}(x) = 0$, also $x\in\ker(g^{i+1})$.

<u>Zu 2</u>. Für $y\in\mathrm{im}(g^{i+1})$ gibt es ein $x\in V$ mit $y = g^{i+1}(x) = g^i(g(x))$, d.h. es gilt $y\in\mathrm{im}(g^i)$.

<u>Zu (ii)</u>. Die Existenz von u bzw. v folgt aus (i) wegen der Endlichkeit der Dimension von V. Die Gleichheit der beiden Zahlen ergibt sich aus der Identität

(1) $$\dim\ker(g^i) + \dim\mathrm{im}(g^i) = \dim V,$$

welche für alle i gilt: wenn bei Vergrößerung von i die Dimension des Kerns zunimmt, so muß dabei die Dimension des Bildes abnehmen.

<u>Zu (iii)</u>. Es reicht die folgende Implikation zu beweisen.

(2) $$\mathrm{im}(g^i) = \mathrm{im}(g^{i+1}) \Rightarrow \mathrm{im}(g^{i+1}) = \mathrm{im}(g^{i+2}).$$

Die analoge Implikation für die Kerne der Potenzen von g ergibt sich dann aus der Identität (1). Sei also

$$\mathrm{im}(g^i) = \mathrm{im}(g^{i+1}).$$

Es reicht zu zeigen, es gilt

$$\mathrm{im}(g^{i+1}) \subseteq \mathrm{im}(g^{i+2}),$$

denn die umgekehrte Inklusion wurde bereits in (i) bewiesen. Sei also $y\in\mathrm{im}(g^{i+1})$. Dann gibt es ein $x\in V$ mit $y = g^{i+1}(x)$, d.h. es gilt

$$y = g(z) \text{ mit } z = g^i(x).$$

Der Vektor z liegt in $\mathrm{im}(g^i) = \mathrm{im}(g^{i+1})$, d.h. es gibt ein $w\in V$ mit $z = g^{i+1}(w)$. Dann ist aber

$$y = g(z) = g(g^{i+1}(w))\in\mathrm{im}(g^{i+2}).$$

QED.

5.3.5 Haupträume

Seien $f:V\to V$ ein K-linearer Endomorphismus mit $d:= \dim V<\infty$ und $c\in K$ ein Eigenwert von f. Dann heißt der Kern

$$V'_c(f) := V'_c := \ker(f-c\cdot Id)^u \text{ mit } u := \operatorname{stab}(f - c\cdot Id)$$

der ersten stabilen Potenz von f - c·Id <u>Hauptraum</u> von f zum Eigenwert c. Mit anderen Worten, V'_c ist der größte K-lineare Unterraum von V, der von einer Potenz der Abbildung

$$f - c\cdot Id$$

in die Null abgebildet wird. Nach Konstruktion ist der Eigenraum zum Eigenwert c ganz im Hauptraum enthalten,

$$V_c \subseteq V'_c .$$

Bemerkungen

(i) Der Hauptraum V'_c ist f-invariant: mit $v\in\ker(f-c\cdot Id)^u$ gilt

$$(f - c\cdot Id)^u (f(v)) = (f - c\cdot Id)^u\circ f (v) = f\circ(f - c\cdot Id)^u(v) = f(0) = 0.$$

(ii) Insbesondere ist das charakteristische Polynom von f auf V'_c ein Teiler des charakteristischen Polynoms von f auf V. Genauer, es gilt

$$\chi_f(T) = \chi_{f|V'_c}(T)\cdot \chi_{f'}(T),$$

wenn $f':V'\to V'$ die durch f auf $V':=V/V'_c$ induzierte Abilung bezeichnet.

(iii) Nach Definition ist die Einschränkung von f - c·Id auf V'_c nilpotent, d.h. diese Einschränkung besitzt eine Matrix, die in der Hauptdiagonalen und darunter lauter Nullen hat. Insbesondere gilt

$$\det (f-c\cdot Id - T\cdot Id) = (-T)^k \text{ mit } k = \dim V'_c$$

also ist

$$\chi_{f|V'_c}(T) = \det(f - T\cdot Id)|_{V'_c} = (c-T)^k$$

(iv) Weil $\chi_{f|V'_c}$ ein Teiler von χ_f ist, kann die Dimension des Hauptraum höchstens so groß sein wie die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes c von f,

$$\dim V'_c \le \nu_f(c).$$

Unser nächstes Ziel ist es, zu zeigen, daß sogar das Gleichheitszeichen gilt.

5.3.6 Die Dimension der Haupträume

Seien $f:V\to V$ ein K-linearer Endomorphismus mit $\dim V<\infty$ und $c\in K$ ein Eigenwert von f. Falls K hinreichend groß ist, ist die Dimension des Hauptraums zum Eigenwert c gleich der algebraischen Vielfachheit von c,

$$\dim V'_c(f) = \nu_f(c).$$

Beweis. Angenommen, es wäre

(1) $$k := \dim V'_c < \nu_f (c).$$

Wir setzen

$$W := V/V'_c$$

und betrachten den durch f auf W induzierten Endomorphismus

$$f': W \to W,\ w + V'_c \mapsto f(w) + V'_c.$$

Es gilt

$$\chi_f(T) = \chi_{f|V'_c}(T) \cdot \chi_{f'}(T) = (c-T)^k \cdot \chi_{f'}(T)$$

Wegen (1) kommt in der Faktorzerlegung des Polynoms $\chi_{f'}(T)$ noch mindestens ein Faktor der Gestalt T-c vor, d.h. es ist

$$\chi_{f'}(c) = 0,$$

d.h. c ist Eigenwert von f'. Deshalb hat f' einen (von Null verschiedenen) Hauptraum zum Eigenwert c, d.h. es gibt einen Unterraum

$$\tilde{U} \subseteq W,\ \tilde{U} \neq 0,$$

und eine natürliche Zahl

$$\ell \in \mathbb{N}$$

mit

(2) $$(f' - c\cdot Id)^{\ell}(\tilde{U}) = 0.$$

Seien

$$\rho: V \to W = V/V'_c$$

die natürliche Abbildung und $U := \rho^{-1}(\tilde{U})$. Dann ist U ein Unterraum von V mit

(3) $$V'_c \subset U \subseteq V,$$

wobei die erste Inklusion eine echte Inklusion ist. Für jedes $u \in U$ gilt

$$\rho((f - c\cdot Id)^{\ell}(u)) = (f - c\cdot Id)^{\ell}(u) + V'_c = (f' - c\cdot Id)^{\ell}(u + V'_c) = (f' - c\cdot Id)^{\ell}(\rho(u)) = 0$$

(wegen $\rho(u) \in \tilde{U}$ und (2)). Mit anderen Worten, es ist $(f - c\cdot Id)^{\ell}(u) \in \ker(\rho) = V'_c$. Nach Definition des Hauptraums ist dann aber

$$(f - c\cdot Id)^{\ell+k}(u) = 0 \text{ für jedes } u \in U \text{ und k hinreichend groß.}$$

Insbesondere ist

$$\ker(f - c\cdot Id)^{\ell+k}$$

echt größer als der Hauptraum V'_c. Das steht aber im Widerspruch zur Definition des Hauptraums V'_c (als der größte Unterraum von V, der von einer Potenz von $f - c\cdot Id$ in die Null abgebildet wird). Dieser Wiederspruch zeigt, daß unsere Annahme (1) falsch sein muß.

QED.

5.3.7 Abschätzung der stabilen Potenzen von f

Seien $f:V\to V$ ein K-linearer Endomorphismus von f mit $\dim V < \infty$ und $c\in K$ ein Eigenwert. Dann ist der erste stabile Exponent von $f - c\cdot Id$ höchstens so groß wie die algebraische Vielfachheit von c, genauer,

$$\mathrm{stab}(f - c\cdot Id) \le \nu_f(c) - \mu_f(c) + 1.$$

Insbesondere ist der Hauptraum zum Eigenwert c gleich

$$V'_c(f) = \ker(f - c\cdot Id)^{\nu_f(c)}.$$

Beweis. Angenommen es ist

$$\nu_f(c) - \mu_f(c) + 1 < \mathrm{stab}(f - c\cdot Id).$$

Dann ist die Folge der Unterräume

(1) $$\ker(f - c\cdot Id)^i\ ,\ i = 1, ..., \nu_f(c) - \mu_f(c) + 2.$$

echt aufsteigend. Insbesondere ist

(2) $$\dim \ker(f - c\cdot Id)^i \ge i - j + \dim (f - c\cdot Id)^j \quad \text{für } j \le i \le \nu_f(c) - \mu_f(c) + 2$$

(der Unterschied in den Dimensionen ist mindestens so groß wie der in den Indizes). Speziell für $j = 1$ ist

$$\dim (f - c\cdot Id)^j = \mu_f(c)$$

die Dimension des Eigenraums. Für $j = 1$ und $i = \nu_f(c) - \mu_f(c) + 2$ erhalten wir damit aus (2) die Ungleichung

(2) $$\dim \ker(f - c\cdot Id)^i \ge \nu_f(c) + 1 \text{ mit } i = \nu_f(c) - \mu_f(c) + 2$$

Da der Kern (2) im Hauptraum $V'_c(f)$ liegt, folgt

$$\dim V'_c(f) \ge \nu_f(c)+1.$$

Dies steht im Widerspruch zu 5.3.6.

QED.

Bemerkung

Es gilt sogar

$$V'_c(f) = \ker(f - c\cdot Id)^{\nu_f(c)-\mu_f(c)+1},$$

5.3.8 Hauptraumzerlegung

Sei $f:V\to V$ ein K-linearer Endomorphismus mit $\dim V < \infty$. Die Eigenwerte von f seien mit $c_1,...,c_r$ bezeichnet. Falls K hinreichend groß ist, ist die K-lineare Abbildung

$$\varphi:V'_{c_1}\oplus...\oplus V'_{c_r} \to V,\ (v_1,...,v_r) \mapsto v_1 + ... + v_r,$$

bijektiv.

Beweis. Nach 5.3.6 sind die Dimensionen der Haupträume gleich den algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte. Die Summe ihrer Dimensionen ist somit gleich dim V. Mit anderen Worten, die Abbildung bildet Räume gleicher Dimension ineinander ab. Es genügt also, ihre Injektivität zu beweisen.

Sei also

$$\varphi(v_1,...,v_r) = 0,$$

d.h.

(1) $$v_1+\ldots+v_r = 0.$$

Wir haben zu zeigen, jeder einzelne Summand ist Null. Sei s die Anzahl der von Null verschiedenen Summanden.

$$s = \#\{i \mid v_i \neq 0\}$$

Wir führen den Beweis durch Induktion nach s. Im Fall s = 1 ist nichts zu beweisen: aus dem Verschwinden der Summe folgt das Verschwinden des einzigen Summanden. Sei jetzt s > 1 und sei $v_i \neq 0$. Wir betrachten die Abbilung

$$g := (f - c_i\cdot Id)^{\nu_i} \text{ mit } \nu_i := \nu_f(c_i).$$

Aus (1) folgt

$$g(v_1)+\ldots+g(v_r) = 0.$$

Da alle Haupträume f-invariant sind, sind sie auch invariant bezüglich der Abbildung[9] g. Also ist

(2) $$(g(v_1),\ldots,g(v_r)) \in V'_{c_1}\oplus\ldots\oplus V'_{c_r}$$

Auf V'_{c_i} ist g die Nullabbildung, d.h. die Anzahl der von Null verschiedenen Koordinaten des Elements (2) ist kleiner als s. Nach Induktionsvoraussetzung folgt,

$$g(v_1) = \ldots. = g(v_r) = 0.$$

Wegen (1) reicht es zu zeigen, die Vektoren $v_1,\ldots,v_r$ sind Null mit eventueller Ausnahme von einem. Dazu reicht es zu zeigen,

$$g|_{V'_{c_j}} \text{ ist injektiv für alle } j \neq i.$$

Dazu wiederum reicht es, wenn wir zeigen,

(3) $$f - c_i\cdot Id\,|_{V'_{c_j}} \text{ ist injektiv für } j \neq i.$$

Sei $v\in V'_{c_j}$ ein Element aus dem Kern der Abbilung (3). Dann gilt

$$f(v) = c_i\cdot v,$$

also

$$(f - c_j\cdot Id)(v) = (c_i-c_j)\cdot v,$$

also

$$(f - c_j\cdot Id)^k(v) = (c_i-c_j)^k\cdot v \text{ für } k=1,2,3,\ldots$$

Wegen $v\in V'_{c_j}$ ist die linke Seite dieser Identität Null für große k. Es gilt also

$$(c_i-c_j)^k\cdot v = 0 \text{ für ein } k\in\mathbb{N}.$$

Im Fall $i\neq j$ ist aber c_i-c_j von Null verschieden und es folgt v = 0. Damit ist (3) bewiesen, und damit wiederum der Satz.

QED.

---

[9] Sogar bezüglich aller Polynome in f.

5.3.9 Jordansche Normalform eines Endomorphismus

Sei $f: V\to V$ ein K-linearer Endomorphismus mit $\dim V < \infty$. Falls K hinreichend groß ist, so gibt es eine Jordan-Basis von V bezüglich f, d.h. eine Basis, bezüglich welcher die Matrix von V eine direkte Summe von Jordan-Blöcken ist. Die Anzahl

$$\rho_k(f, c)$$

der direkten Summanden mit vorgegebenen Format $k\times k$ und Eigenwert c ist dabei für jede Wahl von k und c unabhängig von der Wahl der speziellen Basis.

Beweis. Seien $c_1,...,c_r$ die Eigenwerte von f. Weil K hinreichend groß ist, zerfällt V in eine direkte Summe der Haupträumen,

$$V = V_{c_1}\oplus...\oplus V_{c_r}.$$

Da die Haupträume V_{c_i} invariant bezüglich f sind, reicht es die Behauptung für die Einschränkungen von f auf die Haupträume zu beweisen, denn für eine Basis, die gerade Vereinigung von Basen der direkten Summanden ist, gilt

$$M(f) = M(f_1)\oplus...\oplus M(f_r)$$

Dabei bezeichne $f_i: V_{c_i}\to V_{c_i}$ die Einschränkung von f auf V_{c_i}. Beweisen wir also die Behauptung für jedes der f_i. Mit anderen Worten, beweisen wir die Behauptung für den Fall, daß f nur einen einzigen Eigenwert, sagen wir $c\in K$, besitzt. Dann gibt es nur einen Hauptraum und V fällt mit diesem Hauptraum (zum Eigenwert c) zusammen. Das bedeutet,

$$g = f - c\cdot Id$$

ist nilpotent. Dann gibt es aber eine Basis von V, bezüglich welcher die Matrix von g eine direkte Summe von Jordan-Blöcken zum Eigenwert 0 ist,

$$M(f) - M(c\cdot Id) = M(f - c\cdot Id) = M(g) = J_{a_1}(0) \oplus ... \oplus J_{a_s}(0).$$

Es folgt

$$M(f) = M(c\cdot Id) + M(g) = c\cdot Id + J_{a_1}(0) \oplus ... \oplus J_{a_s}(0) = J_{a_1}(c) \oplus ... \oplus J_{a_s}(c),$$

d.h. M(f) ist eine direkte Summe von Jordan-Blöcken zum Eigenwert c.
QED.

5.3.10 Jordansche Normalform einer Matrix

Sein $A\in K^{n\times n}$ eine n-reihige quadratische Matrix. Falls K groß genug ist, so gibt es eine umkehrbare n-reihige Matrix $B\in K^{n\times n}$ derart, daß

$$BAB^{-1}$$

eine direkte Summe von Jordan-Blöcken ist. Die Anzahl

$$\rho_k(A,c)$$

der direkten Summanden mit vorgegebenen Format $k\times k$ und Eigenwert c ist dabei für jede Wahl von k und c unabhängig von der Wahl der speziellen Basis.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus 5.3.9.
QED.

5.4 Satz von Cayley-Hamilton

Sei $f:V\to V$ ein K-linearer Endomorphismus mit $\dim V < \infty$. Dann ist f Nullstelle seines charakteristischen Polynoms,

(1) $$\chi_f(f) = 0.$$

Analog ist jede quadratische Matrix $A\in K^{n\times n}$ Nullstelle ihres charakteristischen Polynoms,

(2) $$\chi_A(A) = 0.$$

Beweis. Offensichtlich sind die beiden Aussagen (1) und (2) äquivalent. Beim Beweis von (2) können wir bei Bedarf den Körper A vergrößern und zum Beispiel durch einen algebraisch abgeschlossenen Körper ersetzen. Wir können also annehmen, der Körper K ist groß genug. Der Raum V zerfällt dann in eine direkte Summe von Haupträumen,

$$V = V'_{c_1}\oplus\ldots\oplus V'_{c_r} ,$$

und das charakteristische Polynom von f zerfällt in Linearfaktoren,

$$\chi_f(T) = (c_1-T)^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot(c_r-T)^{\nu_r}$$

Wir wollen zeigen, der Endomorphismus

(3) $$\chi_f(f) = (c_1\cdot\mathrm{Id} -f)^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot(c_r\cdot\mathrm{Id} -f)^{\nu_r}$$

ist identisch Null auf V. Dazu reicht es zu zeigen, er ist identisch Null auf jedem der Haupträume V'_{c_i}. Nun sind diese Haupträume invariant bei f also auch invariant bezüglich der Endomorphismen $c_i\cdot\mathrm{Id} - f$ und aller ihrer Potenzen. Wenn wir zeigen wollen,

$$\chi_f(f)|_{V'_{c_i}} = 0,$$

so reicht es zu zeigen, einer der Faktoren

$$(c_j\cdot\mathrm{Id} -f)^{\nu_j}$$

auf der rechten Seite von (3) ist identisch Null auf V'_{c_i}. Das ist aber der Fall für den Faktor mit $j = i$, denn es gilt

$$V'_{c_i} = \ker(f - c_i\cdot\mathrm{Id})^{\nu_i} = \ker\,(c_i\cdot\mathrm{Id} - f)^{\nu_i}.$$

QED.

Aufgabe

Man finde den Fehler im folgenden “Beweis” des Satzes von Cayley-Hamilton. Wegen

$$\chi_A(T) = \det\,(A - T\cdot\mathrm{Id})$$

gilt

$$\chi_A(A) = \det\,(A - A\cdot\mathrm{Id}) = \det\,(A - A) = \det\,(0) = 0.$$

5.5 Zur Bestimmung einer Jordanbasis

6. Bilineare Abbildungen

6.1 Bilineare Räume

6.1.1 Definitionen

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Eine Bilinearform auf V ist eine Abbildung

$$b: V\times V \to K$$

mit folgenden Eigenschaften.

(i) Für jedes $v\in V$ ist die Abbildung

$$V \to K,\ x \mapsto b(x,v),$$

K-linear, d.h. b ist linear bezüglich der ersten Variablen.

(ii) Für jedes $v\in V$ ist die Abbildung

$$V \to K,\ x \mapsto b(v,x),$$

K-linear, d.h. b ist linear bezüglich der zweiten Variablen.

Ein bilinearer Raum über dem Körper K ist ein Paar (V, b) bestehend aus einem K-Vektorraum V und einer Bilinearform $b: V \times V \longrightarrow K$. Oft werden wir auch einfach V schreiben anstelle von (V, b) und von b als von der Bilinearform von V sprechen.

Die Bilinearform b heißt symmetrisch, wenn gilt

$$b(v',v'') = b(v'',v')$$

für alle $v',v''\in V$ und antisymmtrisch oder auch schiefsymmetrisch im Fall

$$b(v', v'') = - b(v'', v').$$

Die Bilinearform b heißt nicht-entartet, oder auch regulär, wenn es für jedes $v'\in V-\{0\}$ ein $v''\in V-\{0\}$ gibt mit

$$b(v',v'') \ne 0.$$

Eine Bilinearform heißt anisotrop , wenn für jeden von Null verschiedenen Vektor $v\in V$ gilt

$$b(v,v) \ne 0.$$

Man sagt dann auch, V ist anisotrop (bezüglich b), und ein Vektor v mit $b(v,v)\neq 0$ heißt anisotrop (bezüglich b).
Wenn es einen Vektor von Null verschiedenen Vektor v gibt mit $b(v, v) = 0$, so heißen b und der Vektor v und der Vektorraum V isotrop (bezüglich b).

Im Fall $K \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine Bilinearform b positiv definit (bzw. negativ definit) wenn für jeden von Null verschiedenen Vektor $v\in V$ gilt

$$b(v,v) > 0 \text{ (bzw. } b(v,v) < 0.$$

Eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform heißt auch Skalarprodukt von V. Ein Raum mit Skalarprodukt ist ein bilinearer Raum, dessen Bilinearform ein Skalarprodukt ist. Das Skalarprodukt eines solchen Raumes V werden wir meistens mit $<\ ,\ >_V$ oder auch einfach nur mit $<\ ,\ >$ bezeichnen.

Eine K-lineare Abbildung f: V $\longrightarrow$ V' von Räumen mit Skalarprodukt heißt isometrische Einbettung, wenn sie das Skalarprodukt unverändert läßt, d.h. wenn

$$<f(x), f(y)>_{V'} = <x, y>_V$$

gilt für alle x, y $\in$ V. Eine Isometrie ist eine bijektive isometrische Einbettung. Zwei Räume mit Skalarprodukt V, V' heißen isometrisch, wenn es eine Isometrie V $\longrightarrow$ V' gibt.

Im Fall K $\subseteq \mathbb{R}$ heißt ein Skalarprodukt euklidisch, wenn es positiv definit ist.

Eine Paarung der K-Vektorräume V und W ist eine Abbildung

$$b: V \times W \to K, (v,w) \mapsto b(v,w),$$

welche für jedes feste v linear in w und für jedes fest w linear in v ist. Eine Paarung heißt nicht-entartet, wenn es für beliebige v$\in$V-{0} und w$\in$W-{0} Vektoren v'$\in$V und w'$\in$W gibt mit

$$b(v,w') \ne 0 \text{ und } b(v', w) \ne 0.$$

Bemerkungen

(i) Positiv bzw. negativ definite Bilinearformen sind offensichtlich anisotrop. Anisotrope Bilinearformen sind offensichtlich nicht-entartet. Eine Bilinearform über $\mathbb{R}$ ist genau dann anisotrop, wenn sie positiv oder negativ definit ist (nach dem Zwischenwertsatz der Analysis).

(ii) Das Standard-Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$,

$$<\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}> = \sum_{i=1} x_i y_i ,$$

ist euklisch, denn <x,x> ist eine Summe von Quadraten reeller Zahlen, also stets >0 sobald x $\ne$ 0 ist.

(iii) werden sehen, das Standard-Skalarprodukt ist über jedem Körper K nicht-entartet, also ein Skalarprodukt, obwohl es für manche K isotrop ist.

(iv) Für jeden K-Vektorraum V ist die folgende Abbildung ein Beispiel für eine Paarung.

$$V\times V^* \to K, (v, \ell) \mapsto \ell(v).$$

Die Abbildung ist offensichtlich bilinear und nach dem Fortsetzungssatz (3.4.6) für lineare Abbildungen nicht entartet. Sie heißt natürliche Paarung des Vektorraums V.

(v) Sei V ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt < , > : V $\times$ V $\to$ K. Ein ein linearer Unterraum U $\subseteq$ V heißt total isotrop, falls < v, w > = 0 gilt für alle v, w $\in$ U.

Falls K eine von 2 verschiedene Charakteristik besitzt, kann man die Identität

$$< x + y, x + y > = <x, x> + 2<x,y> + <y, y>$$

nach < x, y > auflösen,

$$<x, y > = \frac{1}{2}(<x + y, x + y > - <x, x> - <y , y>)$$

Die Bedingung der totalen Isotropie ist dann äquivalent zu der Aussage, daß alle Vektoren von U - {0} isotrop sind.

(vi) Eine isometrische Einbettung $f: V \longrightarrow V'$ ist, wie es die Bezeichnung nahelegt, stets injektiv. Ist nämlich $x \in V$ von Null verschieden, so gibt es, weil $<\ ,\ >$ nicht-entartet ist, ein $y \in V$ mit

$$< x, y > \neq 0.$$

Dann ist aber auch $< f(x), f(y) > = < x, y >$ von Null verschieden, d.h. $f(x)$ muß ungleich Null sein.
Insbesondere ist eine isometrische Einbettung genau dann eine Isometrie, wenn sie surjektiv ist.

(vii) Seien V ein K-Vektorraum mit der Bilinearform $b: V \times V \to K$ und

$$M \subseteq V$$

eine beliebige Teilmenge. Dann heißt

$$M^{\perp} := \{v \in V \mid b(m, v) = 0 \text{ für jedes } m \in M\}$$

(rechtes) <u>orthogonales Komplement</u> von M in V. Die Menge $M^{\perp}$ ist ein linearer Unterraum von V. Analog heißt

$${}^{\perp}M := \{v \in V \mid b(v, m) = 0 \text{ für jedes } m \in M\}$$

(linkes) <u>orthogonales Komplement</u>. Die beiden Komplemente stimmen natürlich überein, wenn b symmetrisch ist.
Für zwei Vektoren $x, y \in V$ mit $b(x,y) = 0$ schreibt man

$$x \perp y$$

und sagt, x und y sind <u>orthogonal</u> oder <u>stehen aufeinander senkrecht</u> (bezüglich b).

6.1.2 Die Bilinearform zu einer Matrix

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix mit Einträgen aus K. Für je zwei Spaltenvektoren

$$x,y \in K^n = K^{n\times 1},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

setzen wir

$$b(x,y) := x^T A y = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Die Abbildung

$$b: K^n \times K^n \to K,\ (x,y) \mapsto b(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

ist dann bilinear. Das folgt unmittelbar aus den Eigenschaften der Matrizenmultiplikation. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} b(x, y + z) &= (x^T A)(y + z) \\ &= x^T A y + x^T A z \\ &= b(x,y) + b(x, z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b(x, cy) &= (x^T A)(cy) \\ &= c\cdot(x^T A y) \\ &= c\cdot b(x,y) \end{aligned}$$

für beliebige x, y, $z \in K^n$ und $c \in K$, d.h. b(x,y) ist linear in der zweiten Variablen y.

<u>Symmetrie von b im Fall symmetrischer Matrizen A</u>
Sei jetzt A eine symmetrische Matrix, d.h. es gelte

$$A = A^T.$$

Die Matrix

$$x^T A y$$

besitzt genau eine Zeile und genau eine Spalte. Sie verändert sich also nicht, wenn wir sie transponieren. Es folgt

$$\begin{aligned} b(x,y) &= x^T A y \\ &= (x^T A y)^T \\ &= y^T A^T x^{TT} \\ &= y^T A x \qquad\qquad \text{(A ist symmetrisch)} \\ &= b(y,x). \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, die Bilinearform b ist im Fall symmetrischer Matrizen symmetrisch.
<u>Der Fall von Matrizen maximalen Rangs</u>
Sei jetzt rk A = n. Wir wollen zeigen, daß dann die Bilinearform b nicht-entartet ist.

Beweis. Angenommen, b wäre entartet. Dann gibt es einen Spaltenvektor

$$y \in K^n - \{0\}$$

derart, daß für jeden Spaltenvektor $x \in K^n$

$$0 = b(y,x) = y^T A x$$

gilt. Insbesondere gilt dies für $x = e_i$ (i=1,...,n),

$$(y^T A) e_i = 0$$

Nun ist $(y^T A)e_i$ gerade die i-te Spalte von $y^T A$. Mit anderen Worten, für jedes i ist die i-te Spalte von $y^T A$ gleich Null, d.h. $y^T A$ ist die Nullmatrix,

$$y^T A = 0.$$

Seien $a_1,...,a_n$ die Zeilen von A und $y_1,...,y_n$ die Koordinaten von y. Dann kann man die letzte Identität auch in der folgenden Gestalt schreiben,

$$y_1 a_1 + ... + y_n a_n = 0.$$

Da y vom Nullvektor verschieden sein soll, bedeutet letzteres, die Zeilen von A sind linear abhängig. Dann hat aber A nicht den Rang n im Widerspruch zur Annahme.
QED.

6.1.3 Die Matrix einer Bilinearform

Seien

$$b: V \times V \to K$$

eine Bilinearform und

$$v = (v_1, ..., v_n)$$

eine Basis des Vektorraums V. Dann heißt die n×n-Matrix

$$M_v(b) := (b(v_i, v_j))_{i,j=1,..,n}$$

<u>Matrix</u> von b bezüglich der Basis v.
Bemerkung
Sei

$$\varphi_v: K^n \longrightarrow V, \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1v_1 + \dots x_nv_n,$$

die zur Basis v gehörige Koordinaten-Abbildung, d.h. der K-lineare Isomorphismus, welche jedes Koordinaten-n-Tupel auf die zugehörige Linearkombination der Basisvektoren Abbildet. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccccc} K^n\times K^n & \xrightarrow{A} K & & (x,y) & \mapsto & x^TAy \\ \varphi_v\times\varphi_v \downarrow & \| & & \downarrow & & \| \\ V\times V & \xrightarrow{b} K & & (\varphi_v(x),\varphi_v(y)) & \mapsto & b(\varphi_v(x),\varphi_v(y)) \end{array}$$

und identifiziert die beiden horizontalen bilinearen Abbildungen.

Dabei bezeichne der obere horizontale Pfeil die in 6.1.2 beschriebene zur Matrix

$$A := M_v(b)$$

gehörige bilineare Abbildung, und $\varphi_v\times\varphi_v$ sei der lineare Isomorphismus

$$\varphi_v\times\varphi_v: K^n\times K^n \longrightarrow V\times V, (x, y) \mapsto (\varphi_v(x), \varphi_v(y)).$$

Beweis. Mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} & b(\varphi_v(x),\varphi_v(y)) \\ & = b(\sum_{i=1}^n x_iv_i , \sum_{j=1}^n y_jv_j) \\ & = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n b(v_i,v_j)y_j \end{aligned}$$

mit $z_i := \sum_{j=1}^n b(v_i,v_j)y_j$ erhalten wir

$$\begin{aligned} b(\varphi_v(x),\varphi_v(y)) &= \sum_{i=1}^n x_iz_i = (x_1,\dots,x_n)\bullet\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1,\dots,x_n)\bullet\begin{pmatrix} b(v_1,v_1) & \dots & b(v_1;v_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ b(v_nv_1) & \dots & b(v_n;v_n) \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x^TAy \end{aligned}$$

QED.

6.1.4 Verhalten bei Koordinatenwechsel

Seien

$$b: V\times V \to K$$

eine Bilinearform und

$$v = (v_1,...,v_n) \text{ und } v' = (v'_1,...,v'_n)$$

zwei Basen des Vektorraums V. Dann gilt

$$M_v(b) = B^T\cdot M_{v'}(b)\cdot B,$$

wenn $B := M^v_{v'}(Id)$ die Basiswechselmatrix für den Übergang von v nach v' bezeichnet.

Beweis. Wir setzen

$$A := M_v(b) = (a_{ij})$$
$$A' := M_{v'}(b) = (a'_{ij})$$
$$B := (b_{ij}).$$

Dann gilt

$$v_i = Id(v_i) = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha i} v'_\alpha$$

also

$$a_{ij} = b(v_i, v_j) = b(\sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha i} v'_\alpha , \sum_{\beta=1}^{n} b_{\beta j} v'_\beta) = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} b_{\alpha i}\, b(v'_\alpha, v'_\beta) b_{\beta j}$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} b_{\alpha i} a'_{\alpha\beta} b_{\beta j}$$

d.h. es ist $A = B^T A'B$.

QED.

6.1.5 Beispiele für Bilinearformen

Beispiel 1

Im Fall des obigen Beispiels ist die zur Matrix A = Id gehörige Bilinearform

$$b(x,y) = x^T\cdot Id\cdot y = x^T\cdot y$$

gerade das Standard-Skalar-Produkt. Es ist symmetrisch, weil die Matrix Id symmetrisch ist, und nicht-entartet, weil die Matrix Id maximalen Rang hat.

Beispiel 2

Der komplexe Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt ist isotrop. Zum Beispiel gilt ,

$$<\begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix}> = 1^2 - i^2 = 0.$$

Beispiel 3

Durch

$$<(x_1,x_2), (y_1,y_2)> := x_1y_1 - x_2y_2$$

ist für beliebiges K ein Skalarprodukt definiert: es gehört zur symmetrischen Matrix maximalen Rangs

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit diesem Skalarprodukt ist selbst der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^2$ isotrop.

Beispiel 4

Das Skalarprodukt der Relativitätstheorie, das zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gehört, ist selbst für K= $\mathbb{R}$ nicht definit. Die drei positiven Eigenwerte der Matrix entsprechen dabei den drei Raumrichtungen und der negative Eigenwert steht für die Zeit. Die isotropen Vektoren bilden einen Kegel mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

und stehen für Massepunkte, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Beispiel 5

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die durch A definierte Bilinearform

$$b: K^2\times K^2 \longrightarrow K, (x, y) \mapsto x^TAy,$$

ist nicht-entartet und schiefsymmetrisch.

6.1.6 Kriterium für nicht-entartete Bilinearformen

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum,

$$b: V\times V \to K$$

eine Bilinearform und $v_1,...,v_n$ eine Basis von V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) b ist nicht entartet.

(ii) Die lineare Abbildung

$$V \to V^*, v \mapsto b_v \text{ mit } b_v(x) := b(v,x)),$$

in das Dual von V ist injektiv (also bijektiv).

(iii) Die lineare Abbildung

$$V \to V^*, v \mapsto b^v \text{ mit } b^v(x) := b(x,v),$$

in das Dual von V ist injektiv (also bijektiv).

(iv) Die Matrix von b bezüglich der Basis $v_1,...,v_n$ hat maximalen Rang n.

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Bedingung (ii) besagt gerade, für jedes $v'\in V-\{0\}$ ist $b_{v'}$ nicht die Null-Abbildung, d.h. es gibt ein $v''\in V$ mit

$$b(v',v'') \ne 0.$$

Das bedeutet aber nach Definition gerade, daß b nicht entartet ist.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Bedingung (iii) besagt gerade, b^v ist nur dann die Nullabbildung, wenn v gleich Null ist, d.h. es besteht die Implikation

$$b^{v}(x)=0 \text{ für alle } x \Rightarrow y = 0.$$

Übersetzen wir die Bedingung in die Sprache der Matrizen. Wir verwenden die gegebene Basis, um V mit dem K^n zu identifizieren, und erhalten

$$b^{v}(x) = b(x,v) = x^T Ay,$$

wenn A die Matrix von b bezüglich der gegebenen Basis bezeichnet (vgl. 6.1.3). Bedingung (iii) bekommt dann die Gestalt

$$x^T Av = 0 \text{ für alle } x \Rightarrow v = 0$$

Nun ist aber die durch die Matrix Av gegebene Abbildung $x \mapsto x^T Av$ genau dann die Nullabbildung, wenn die Matrix gleich Null ist. Die Implikation läßt sich also auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$Av = 0 \Rightarrow v = 0$$

In dieser Gestalt bedeutet die Bedingung aber gerade, daß die Spalten von A linear unabhängig sind, d.h. daß (iv) gilt.

<u>(ii) ⇔ (iv)</u>. Die Behauptung ergibt sich nach derselben Argumentation wie im Beweis von '(iii) ⇔ (iv)', wenn man b_v anstelle von b^v verwendet.

QED.

Bemerkungen

(i) Nach dem gerade bewiesenen Ergebnis kann man eine nicht-entartete Bilinearform

$$b: V\times V \to K$$

benutzen, um den Raum V mit seinem Dual V* zu identifizieren (indem man den Vektor v mit der Linearform b^v: $x \mapsto b(x,v)$ identifiziert).

(ii) Die <u>natürliche Paarung</u>

$$V\times V^* \to K, (v, \ell) \mapsto \ell(v),$$

wird durch diese Identifikation mit der folgenden Abbildung identifiziert:

$$V\times V \to K, (v', v'') \mapsto (v', b^{v''}) \mapsto b(v',v'').$$

(iii) Mit anderen Worten, die Identifikation von (i) ist gerade so beschaffen, daß die natürliche Paarung identisch wird mit der gegebenen Bilinearform.

(iv) Für die natürliche Paarung verwendet man oft dieselbe Bezeichnung wie für das Standard-Skalarprodukt,

$$<v, \ell > := \ell (v).$$

(v) Unter Verwendung dieser Bezeichnung nimmt die Definition der dualen Abbildung in 3.4.7 eine besonders elegante Form an. Es gilt nämlich für lineare Abbildungen $f:V\to W$ und Vektoren $v\in V$, $w^*\in W^*$:

$$<v,f^*(w^*)> = <v, w^*\circ f> = (w^*\circ f)(v) = w^*(f(v)) = <f(v),w^*>.$$

Mit anderen Worten, die zu $f:V \to W$ duale Abbildung ist diejenige Abbildung $f^*:W^* \to V^*$, für welche

$$<v, f^*(w^*)> = <f(v), w^*> \text{ für } v\in V \text{ und } w^*\in W^* \tag{1}$$

gilt.

(vi) Sind in (v) die Räume V und W mit einem Skalarprodukt versehen, so kann man aus der Relation (1) die dualen Räume vollständig entfernen (indem man sie mit den Ausgangsräumen identifiziert. Genau dies werden wir später tun und so den Begriff der adjungierten Abbildung einführen (vgl. 6.4).

tun wir in der nachfolgenden Definition.

6.1.7 Eigenschaften des orthogonalen Komplements

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit nicht-entarteter Bilinearform b und

$$W \subseteq V$$

ein linearer Unterraum. Dann gilt:

(i) $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V = \dim W + \dim {}^{\perp}W$.

(ii) ${}^{\perp}(W^{\perp}) = W = ({}^{\perp}W)^{\perp}$.

(iii) $W \cap W^{\perp} = 0 = W \cap {}^{\perp}W$ falls $b|_W$ nicht-entartet ist.[10]

(iv) $V = W \oplus W^{\perp}$ und $V = W \oplus {}^{\perp}W$ falls $b|_W$ nicht-entartet ist.

.

Beweis. Zu (i). Sei $w_1,\dots,w_n$ eine Basis von W. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow K^n,\ v \mapsto \begin{pmatrix} b(w_1,v) \\ \dots \\ b(w_n,v) \end{pmatrix}.$$

Der Kern dieser Abbildung besteht gerade aus allen $v \in V$, die auf den w_i und damit auf allen Vektoren von W senkrecht stehen. Es gilt

$$W^{\perp} = \mathrm{Ker}(\varphi),$$

also

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim \mathrm{Im}(\varphi),$$

also

$$\dim \mathrm{Im}(\varphi) + \dim W^{\perp} = \dim V.$$

Zum Beweis des ersten Gleichheitszeichens reicht es zu zeigen, φ ist surjektiv, denn dann ist

$$\dim \mathrm{Im}(\varphi) = \dim K^n = n = \dim W.$$

Beweis der Surjektivität von φ. Angenommen φ ist nicht surjektiv. Dann gilt

$$\dim \mathrm{Im}(\varphi) < n.$$

Seien $s_1,\dots, s_m$ irgendwelche Spaltenvektoren, die $\mathrm{Im}(\varphi)$ erzeugen. Die Matrix aus diesen Spaltenvektoren hat dann einen Rang < n. Die n Zeilen dieser Matrix sind somit linear abhängig: es gibt Konstanten

$$c_1,\dots, c_n \in K,$$

die nicht alle gleich Null sind mit

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_1 = 0$$

---

[10] Wir bezeichnen mit $b|_W$ die Einschränkung von b auf W×W.

falls $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ eine Linearkombination der s_i ist, d.h. falls $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ in Im(φ) liegt. Wir wenden dies

auf den Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(w_1,v) \\ \dots \\ b(w_n,v) \end{pmatrix}$ aus Im(φ).Für jedes $v \in V$ gilt also

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 b(w_1,v) + ... + c_n\, b(w_n, v) \\ &= b(c_1 w_1 + ... + c_n w_n, v). \end{aligned}$$

Weil b nicht entartet ist, folgt

$$0 = c_1 w_1 + ... + c_n w_n,$$

und, weil die w_i eine Basis bilden,

$$c_1 = ... = c_n = 0.$$

Dies steht im Widerspruch zur Wahl der c_i und beweist die Surjektivität von φ.

Damit ist die erste Identität von (i) bewiesen. Die zweite ergibt sich, wenn man die gerade bewiesene Aussage auf die Bilinearform $b'(x, y) := b(y,x)$ anwendet.

Zu (ii). Für jeden Vektor $w \in W$ und jeden Vektor $w' \in W^\perp$ gilt $b(w, w') = 0$, d.h. $w \in {}^\perp(W^\perp)$. Deshalb gilt

$$W \subseteq {}^\perp(W^\perp).$$

Wegen (i) (angewandt auf W und $W^\perp$) haben aber W und ${}^\perp(W^\perp)$ dieselbe Dimension. Also gilt

$$W = {}^\perp(W^\perp).$$

Damit ist die erste Identität von (ii) bewiesen. Die zweite ergibt sich aus der ersten, indem man $b(x, y)$ durch $b'(x,y) := b(y,x)$ ersetzt.

Zu (iii). Sei $x \in W \cap W^\perp$. Dann gilt

1. $x \in W$
2. $b(y, x) = 0$ für jedes $y \in W$.

Weil die Einschränkung von b auf W×W nicht-entarter sein soll, folgt $x = 0$. Wir haben gezeigt, $W \cap W^\perp = 0$. Analog folgt $W \cap {}^\perp W = 0$.

Zu (iv). Nach (i) ist

$$\varphi: W \oplus W^\perp \longrightarrow V,\ (x, y) \mapsto x+y,$$

eine lineare Abbildung zwischen Räumen gleicher Dimension. Es reicht zu zeigen, die Abbildung ist injektiv. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\varphi) &= \{(x,y) \mid x \in W, y \in W^\perp \text{ und } x+y = 0\} \\ &= \{(x, -x) \mid x \in W \cap W^\perp\} \end{aligned}$$

Nach (iii) ist dies der triviale Vektorraum. Analog folgt die Aussage mit ${}^\perp W$ anstelle von $W^\perp$.

QED.

6.1.8 Orthogonale Zerlegungen

Seien V ein K-Vektorraum mit Bilinearform $b: V \times V \longrightarrow K$ und V',V" zwei K-lineare Unterräume mit

$$V =^{11} V' \oplus V''.$$

Diese Zerlegung in direkte Summanden heißt orthogonal (bezüglich b), wenn gilt

$$b(v',v'') = 0$$

für beliebige $v' \in V'$ und $v'' \in V''$.

Bemerkungen

(i) Ist $V = V' \oplus V''$ eine orthogonale direkte Zerlegung und sind v', v" Basen von V' bzw. V", so gilt für die Matrix von b bezüglich der Basis v', v" von V

$$M_{v',v''}(b) = \begin{pmatrix} M_{v'}(b|_{V'}) & 0 \\ 0 & M_{v''}(b|_{V''}) \end{pmatrix}.$$

(ii) Insbesondere gilt

$$\det M_{v',v''}(b) = \det M_{v'}(b|_{V'}) \bullet \det M_{v''}(b|_{V''})$$

Die Einschränkungen von b auf die beiden direkten Summanden sind nicht-entartet, falls b es ist. Ist b ein Skalarprodkt, so gilt dasselbe auch für die Einschränkung $b|_{V'}$ und $b|_{V''}$.

6.2 Räume mit Skalarprodukt

6.2.1 Orthonormierte Basen

Eine Basis $v_1,\ldots,v_n$ des K-Vektorraums V mit Skalarprodukt < , > heißt orthogonal, wenn gilt

$$v_i \perp v_j \text{ für beliebige } i,j \text{ mit } i \neq j.$$

Sie heißt orthonormiert, wenn außerdem noch

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1$$

gilt für alle i = 1, ... , n.

6.2.2 Das Orthogonalisierungsverfahren

Sei V ein K-Vektorraum mit anisotropen Skalarprodukt (und $\dim V < \infty$). Dann gilt

(i) V besitzt eine orthogonale Basis.

(ii) Falls K hinreichend groß ist, besitzt V eine orthonormierte Basis.

Bemerkungen

(i) 'Hinreichend groß' soll hier bedeuten, daß man im Körper K aus den Skalarprodukten der Gestalt $\langle v,v \rangle$ mit $v \in V$ die Quadratwurzel ziehen kann.

(ii) Wichtiger als die beiden obigen Aussagen ist deren Beweis: er beschreibt ein Verfahren, mit welchem man aus einer gegebenen Basis des Vektorraums V eine orthogonale bzw. orthonormierte Basis konstruieren kann, und welches Orthogonalisierungsverfahren heißt.

(iii) Wie wir anschließend sehen werden, existiert - auch wenn die Anisotropie-Bedingung nicht erfüllt ist und das Orthogonaliserungsverfahren bezüglich einer

---

[11] d.h. die lineare Abbildung $V' \oplus V'' \to V$, $(v', v'') \mapsto v'+v''$, ist ein Isomorphismus.

gegebenen Basis versagt - stets eine orthogonale Basis, vorausgesetzt, die Charakteristik des Körpers K ist ungleich 2.

Beweis. Zu (i) Wir wählen eine Basis $v_1,...,v_n$ von V und beschreiben ein Verfahren, durch welches diese Basis in endlich vielen Schritten in eine orthogonale Basis überführt wird. Angenommen, die ersten k Vektoren der Basis sind bereits orthogonal,

$$<v_i , v_j > = 0 \text{ für } i,j=1,...,k, i\neq j.$$

Es reicht, den Vektor v_{i+1} durch einen Vektor w zu ersetzen, der orthogonal zu den ersten i Vektoren der Basis ist und zusammen mit den Vektoren $v_1,...,v_i, v_{i+2},...,v_n$ eine Basis von V bildet. Wir setzen

$$w = \lambda_1 v_1 +...+ \lambda_i v_i + v_{i+1} . \qquad (1)$$

Dabei seien die Koeffizienten λ_j so gewählt, daß gilt

$$\begin{aligned} 0 \quad &= <w, v_j > \\ &= < \lambda_1 v_1 +...+ \lambda_i v_i + v_{i+1} , v_j > \\ &= \lambda_j < v_j, v_j> + < v_{i+1}, v_j> \end{aligned}$$

für j = 1, ... , i, d.h. es sei

$$\lambda_j = - < v_{i+1}, v_j>/< v_j, v_j>.$$

Man beachte, es ist $< v_j, v_j> \neq 0$, weil das Skalarprodukt anisotrop sein soll. Wegen (1) erzeugt w zusammen mit den Vektoren $v_1,...,v_i, v_{i+2},...,v_n$ den Raum V, d.h. indem wir v_{i+1} durch w ersetzen erhalten wir wieder eine Basis. Indem wir die obige Konstruktion endlich oft wiederholen, erhalten wir eine orthogonale Basis.

Zu (ii). Zum Beweis genügt es, aus einer orthogonalen Basis $v_1,...,v_n$ eine orthonormierte $v'_1,...,v'_n$ Basis zu konstruieren. Da K hinreichend groß sein soll, können wir setzen

$$v'_i := \frac{1}{\sqrt{<v_i,v_i>}} \cdot v_i \text{ für } i = 1, ... , n.$$

Es gilt dann

$$<v'_i, v'_i> = \frac{1}{<v_i,v_i>} <v_i, v_i> = 1$$

für jedes i.

QED.

6.2.3 Die Räume der Gestalt $<c_1,...,c_n>$

Der K-Vektorraum $V = K^n$ versehen mit der Bilinearform

$$b: V \times V \longrightarrow K,$$

deren Matrix bezüglich der Standard-Basis die Diagonalgestalt

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & c_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & c_n \end{pmatrix}$$

besitzt mit $c_1,...,c_n \in K$ wird mit

$$<c_1,...,c_n>_K \text{ oder auch } <c_1,...,c_n>$$

bezeichnet.

6.2.4 Orthogonalisierung im Fall char (K) ungleich 2

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und

$$b: V \times V \longrightarrow K$$

eine symmetrische Biliinerform. Wir nehmen an, daß eine der beiden folgenden Bedingunen erfüllt ist.

1. Die Charakteristik des Körpers K ist von 2 verschieden.
2. b ist anisotrop.

Dann gibt es eine Basis von V, bezüglich welcher die Matrix von b Diagonalgestalt besitzt.

Beweis.

<u>1. Schritt</u>. Für jeden Vektor $v \in V$ mit $b(v,v) \neq 0$ besteht eine orthogonale direkte

Zerlegung $V = Kv \oplus (xK)^{\perp}$.

Wegen $b(v,v) \neq 0$ ist $b|_{Kv}$ nicht-entartet, d.h. die Behauptung gilt nach 6.1.7(iv).

<u>2. Schritt</u>. Beweis der Behauptung durrch Induktion nach der Dimension n = dim V.

<u>Der Fall</u> n = 1

Es gilt V = Kv, und die Matrix von b bezüglich der Basis v ist die 1×1 Matrix mit dem einzigen Eintrag b(v,v). Sie hat wie jede 1×1-Matrix Diagonalgestalt.

<u>Der Fall</u> n > 1.

Ist die Charakteristik von K ungleich 2 ist, so gilt

$$b(x, y) = \frac{1}{2}(b(x+y) - b(x,x) - b(y,y)) \tag{1}$$

für beliebige Vektoren $x, y \in V$. Falls

$$b(x, x) = 0$$

gilt für jeden Vektor $x \in V$, so gilt auf Grund von (1) sogar

$$b(x, y) = 0 \text{ für beliebige } x, y, \in V,$$

Die Matrix von b ist die Nullmatirx für jede Basis von V und hat damit Diagonalgestalt.

Wir können also annehmen, es gibt einen Vektor $v_1 \in V - \{0\}$ mit

$$b(v_1, v_1) \neq 0$$

(was im anisotropen Fall automatisch für jedes v_1 gilt). Nach dem ersten Schritt gibt es eine orthogonale Zerlegung

$$V = Kx \oplus W \tag{2}$$

mit einem K-linearen Unterraum W der Dimension n - 1. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf die Einschränkung von b auf W an und erhalten eine Basis

$$v_2, ..., v_n \in W,$$

bezüglich welcher die Matrix dieser Einschränkung Diagonalgestalt hat. Weil die Zerlegung (2) orthogonal ist, hat dann aber auch die Matrix von b bezüglich der Basis

$$v_1, ... , v_n$$

Diagonalgestalt (vgl. 6.1.8).

QED.

Bemerkungen

(i) Jeden Vektorraum V mit Bilinearform b kann man also durch Wahl einer Basis so mit einem K^n identifizieren, daß V als Vektorraum mit Bilinearform die Gestalt

$$V = \langle c_1, ..., c_n \rangle$$

bekommt (falls die Charakteristik des Grundkörpers ungleich 2 oder das Skalarprodukt anisotrop ist).

(ii) Ist $v \in V$ ein Vektor mit $d = b(v,v) \neq 0$, so kann man auf Grund des obigen Beweises, die Basis von V sogar so wählen, daß

$$c_1 = b(v,v)$$

wird. Das bedeutet, die Wahl der c_i ist weit davon entfernt, eindeutig bestimmt zu sein.

Beispiel

Sei

$$V = \langle 1 , -1 \rangle.$$

Dies ist der einfachste nicht-triviale K-Vektorraum mit isotropen Skalarprodukt

$$\langle\ ,\ \rangle = b.$$

Zum Beispiel gilt für diesen Raum

$$\left\langle \binom{1}{1}, \binom{1}{1} \right\rangle = 1^2 - 1^2 = 0.$$

Für jeden Vektor

$$v = \binom{x}{y} \in V$$

gilt

$$\langle v, v \rangle = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Für vorgegebenes $a \in K$ hat das lineare Gleichungssystem

$$x - y = 1$$
$$x + y = a$$

die Koeffizienten-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Deren Determinate ist ungleich 0 (wegen char $K \neq 2$), d.h. das System hat eine eindeutig bestimmte Lösung. Es gibt also einen Vektor v mit

$$\langle v, v \rangle = 1 \cdot a = a.$$

Auf Grund von Bemerkung (ii) läßt sich der Vektorraum $V = \langle 1, -1 \rangle$ mit einem Vektorraum $V = \langle a, b \rangle$ identifizieren mit vorgegebenen $a \in K^*$.

6.2.5 Orthogonale Transformationen

Sei V ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt. Eine <u>orthogonale Transformation</u> von V ist definiert als K-lineare Abbildung

$$f: V \longrightarrow V$$

welche eine Isometrie ist, d.h. f ist K-linear und bijektiv, und es gilt

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \qquad (1)$$

für beliebige $x, y \in V$.

Bemerkungen

(i) Isometrien sind automatisch injektiv (vgl. Bemerkung 6.1.1 (vi)). Ist V endlich-dimensional, so ist die Bijektivitätsforderung also automatisch erfüllt. Im Fall

$$\dim V < \infty$$

ist eine orthogonale Transformation von V desselbe wie eine K-lineare Abbildung mit

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

für beliebige $x, y \in V$.

(ii) Ist die Charakteristik des Grundkörper K von 2 verschieden, so kann man Bedingung (1) der Definition ersetzen durch die Bedingung, daß das 'Längen-Qudrate jedes Vektors beim Anwenden von f unverändert bleibt, d.h. durch

$$\langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, x \rangle \text{ für alle } x \in V.$$

(vgl. Bemerkung 6.1.1 (v)).

6.2.6 Die orthogonale Gruppe

Sei ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann bilden die orthogonalen Transformationen von V bezüglich der Zusammensetzung von Abbildungen eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $GL(V) := Aut_K(V)$. Diese wird mit

$$O(V) = O_K(V) = O_K(V, \langle\, ,\, \rangle)$$

bezeichnet und heißt orthogonale Gruppe von V.

Beweis. Die Zusammensetzung von orthogonalen Transformationen ist eine orthogonale Transformation (weil beim Zusammensetzen die Linearität, die Bijektivität und die Invarianz des Skalarprodukts erhalten bleibeh). Die Abbildung

$$O(V) \times O(V) \longrightarrow O(V), (f, g) \mapsto g \circ f, \tag{1}$$

die je zwei orthogonalen Transformationen deren Zusammensetzung zuordnet ist also wohldefiniert. Die Operation (1) ist - als Zusammensetzung von Abbildungen - assoziativ.

Die identische Abbildung $V \longrightarrow V$ ist eine orthogonale Transformation. Sie spielt in O(V) die Rolle des neutralen Elements.

Die Umkehrung einer orthogonalen Transformation $f: V \longrightarrow V$ ist eine orthogonale Transformation, denn für beliebige $x, y \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \langle f^{-1}(x), f^{-1}(y)\rangle &= \langle f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))\rangle && \text{(weil f orthogonal ist)} \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, O(V) ist eine Gruppe. Die Gruppen-Operation von O(V) ist dieselbe wie die von GL(V), d.h.

$$O(V) \subseteq GL(V)$$

ist eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe von V.

QED.

6.2.7 Orthogonale Transformationen und orthogonale Komplemente

Seien $f: V \longrightarrow V$ eine orthogonale Transformation des Raums V mit Skalarprodukt $\langle,\rangle$ und $W \subseteq V$ ein K-linarerer f-invarianter Unterraum.

Dann ist auch $W^\perp$ ein f-invarianter Unterraum.

Falls $\langle\, ,\, \rangle|_W$ bzw. $\langle\, ,\, \rangle|_{V^\perp}$ Skalarprodukte sind, sind die Einschränkungen

$$f|_W : W \longrightarrow W$$

$$f|_{W^\perp} : W^\perp \longrightarrow W^\perp$$

von f auf W bzw. $W^\perp$ orthogonale Transformationen von W bzw. $W^\perp$.

Beweis: Als orthogonale Transformation ist f injektiv. Deshalb ist die Einschränkung

$$f|_W : W \longrightarrow W$$

ebenfalls injektiv, also ein Isomorphismus. Also ist

$$f|_W^{-1}: W \longrightarrow W$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung. Für $x \in W$ und $y \in W^\perp$ gilt $f^{-1}(x) \in W$ und

$$<f(y), x> = <f(y), f(f^{-1}(x))> = <y, f^{-1}(x)> = 0.$$

Da dies für alle $x \in W$ der Fall ist, folgt $f(y) \in W^\perp$. Also ist $W^\perp$ ebenfalls f-invariant.

Sind $< , >|_W$ bzw. $< , >|_{V^\perp}$ Skalarprodukte, so sind

$$f|_W : W \longrightarrow W \text{ und } \quad f|_{W^\perp}: W^\perp \longrightarrow W^\perp$$

isometrische Einbettungen von Räumen gleicher Dimension, also orthogonale Transformationen.
QED.

Zur Formulierung des nachfolgenden Kriterium für orthogonale Transformation brauchen wir noch die folgende Terminologie.

6.2.8 Der Längen-Qudrat-Vektor einer orthogonalen Basis

Sei

$$v_1, ..., v_n \in V$$

eine orthogonale Basis des Vektorraums V mit Skalarprodukt. Dann wollen wir das n-Tupel

$$(<v_1, v_1>, ... , <v_n, v_n>)$$

der zugehörigen Skalarprodukte der Basisvektoren mit sich selbst auch <u>Längen-Quadrat-Vektor</u> dieser Basis nennen.
Man beachte, keine Koordinate dieses Längen-Quadrat-Vektors ist Null, weil $< , >$ nicht-entartet ist, denn aus $<v_i , v_i> = 0$ würde folgen, daß für jedes $v \in V$ gilt

$$<v_i , v> = 0,$$

obwohl v_i nicht der Nullvektor ist.

6.2.9 Die Matrix einer orthogonalen Transformation

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Skalarprodukt $< , >$,

$$v_1,...,v_n$$

eine orthogonale Basis von V und

$$f: V \to V$$

eine K-lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) $f: V \to V$ ist eine orthogonale Transformation.

(ii) $f(v_1),...,f(v_n)$ ist eine orthogonale Basis von V mit demselben Längen-Quadrat-Vektor wie $v_1,...,v_n$.

(iii) Die Matrix $A = M_v^v(f)$ genügt der Bedingung

$$C^{-1}A^TCA = Id.$$

Dabei bezeichne C die Diagonal-Matrix, auf deren Hauptdiagonalen die Koordinaten des Längen-Quadrat-Vektors der Basis der v_i steht.

(iv) Die Matrix $A = M_v^v(f)$ genügt der Bedingung

$$CAC^{-1}A^T = Id.$$

(v) Die Matrix $A = M_V^V(f)$ genügt der Bedingung

$$(CA)^{-1} = C^{-1}A^T.$$

Beweis. (i) ⇒ (ii). Als orthogonale Transformation ist f ein K-linearer Isomorphismus. Insbesondere ist

$$f(v_1), \dots , f(v_n)$$

eine Basis von V. Bezeichne

$$(c_1,\dots,c_n)$$

den Längenvektor der gegebenen Basis $v_1,\dots,v_n$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$<f(v_i), f(v_j)> = <v_i, v_j> = c_i\delta_{ij}.$$

Also ist die Basis der $f(v_i)$ orthogonal und hat denselben Längen-Quadrat-Vektor wie die Basis der v_i.

(ii) ⇒ (i). Für je zwei Vektoren $x = \sum_{i=1}^{n} x_iv_i$ und $y = \sum_{i=1}^{n} y_iv_i$ gilt

$$\begin{aligned}<f(x), f(y)> &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i\, y_j <f(v_i) ,f(v_j)> \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i\, y_jc_i\delta_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i\, y_j <v_i ,v_j> \\ &= <x, y>.\end{aligned}$$

Die Abbildung f ist also orthogonal.

(ii) ⇔ (iii). Mit $A = (a_{ij})$ gilt nach Definition von A,

$$f(v_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}v_k .$$

Also ist

$$\begin{aligned}<f(v_i), f(v_j)> &= \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{ki}\, a_{\ell j}<v_k, v_\ell> \\ &= \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{ki}\, a_{\ell j}c_\ell\delta_{k\ell} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj}c_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} a^T_{ik}\, c_ka_{kj} \text{ mit } a^T_{ik} = a_{ki}\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist gerade der Eintrag in der Position (i, j) der Matrix A^TCA. Bedinung (ii) besagt, daß $<f(v_i), f(v_j)>$ gerade der Eintrag in der Position (i, j) der Matrix C ist. Es gilt also

$$(ii) \Leftrightarrow A^TCA = C \Leftrightarrow C^{-1}A^TCA = Id \Leftrightarrow (iii).$$

(iii) ⇔ (iv) ⇔ (v). Alle drei Bedingungen bedeuten gerade, daß die Matrizen CA und $C^{-1}A^T$ zueinander invers sind.

QED.

Bemerkungen

(i) Betrachten wir den Spezialfall, daß der Vektorraum bezüglich des gegebenen Skalarprodukts eine orthonormierte Basis besitzt und die Basis der v_i eine solche ist. Dann ist die in den obigen Bedingungen auftretende Matrix C die Einheitsmatrix.

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt orthogonal, wenn sie einer der drei äquivalenten Bedingungen (iii), (iv) bzw. (v) mit C = Id genügt, d.h.

$$AA^T = Id \Leftrightarrow A^TA = Id \Leftrightarrow A^{-1} = A^T$$

(ii) Die Bedingung AA^T = Id bedeutet gerade, daß die Spalten von A eine orthonormierte Basis von K^n bilden (bezüglich des Standard-Skalarprodukts).

(iii) Die Bedingung A^TA = Id bedeutet gerade, daß die Zeilen von A eine orthonormierte Basis von K^n bilden (bezüglich des Standard-Skalarprodukts). Die Äquivalenz der beiden Bedingungen bedeutet, daß A genau dann orthogonal ist, wenn es die transponierte Matrix wieder ist,

$$A \text{ orthogonal} \Leftrightarrow A^T \text{ orthogonal.}$$

(iv) Da Transponieren und Invertieren für orthogonale Matrizen dieselbe Operation ist, gilt außerdem auch

$$A \text{ orthogonal} \Leftrightarrow A^{-1} \text{ orthogonal.}$$

6.2.10 Beispiel: Spiegelungen

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Skalarprodukt < , > und

$$v \in V - \{0\}$$

ein von Null verschiedener Vektor. Das orthogonale Komplement von v hat eine Dimension

$$\dim v^\perp = \dim \{v\}^\perp = \dim V - 1,$$

die um 1 kleiner ist als die Dimension des gesamten Raums V. Deshalb heißt $v^\perp$ die zu v orthogonale Hyperebene. Sei jetzt v anisotrop,

$$<v, v> \neq 0.$$

Dann besteht die direkte orthogonale Zerlegung

$$V = Kv \oplus v^\perp \qquad (1)$$

Jeder Vektor aus $x \in V$ kann auf genau eine Weise in der Gestalt

$$x = \lambda v + y \text{ mit } \lambda \in K \text{ und } y \perp x$$

geschrieben werden. Wir setzen

$$s_v(x) = -\lambda x + y$$

und erhalten auf diese Weise eine Abbildung

$$s_v: V \longrightarrow V, \lambda v + y \mapsto -\lambda x + y.$$

Sie überführt die Vielfachen von v in ihr Negatives und läßt alle Vektoren auf dem orthogonalen Komplent von v invariant, und heißt deshalb Spiegelung an der zu v orthogonalen Hyperebene. Identifiziert man V mit der rechten Seite von (1) so bekommt die Abbildung die Gestalt

$$Kv \oplus v^{\perp} \longrightarrow Kv \oplus v^{\perp}, (\lambda v, y) \mapsto (-\lambda v, y).$$

Insbesondere ist die Abbildung K-linear. Außerdem gilt

(i) $s_v : V \longrightarrow V$ ist eine orthogonale Transformation.

(ii) $\det(s_v) = -1$.

(iii) Für jedes $x \in v$ gilt

$$s_v(x) = x - \frac{2\cdot<x,v>}{<v,v>}\cdot v$$

(iv) Seien V ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum mit euklidischen Skalarprodukt und f: $V \longrightarrow V$ eine orthogonale Transformation mit negativer Determinante. Dann ist f die Zusammensetzung einer Drehung mit einer Spiegelung, genauer, man kann f in der Gestalt

$$f = d\circ s = s'\circ d'$$

schreiben mit Drehungen d und d' und Spiegelungen s, s'. Die Spiegelung kann man dabei beliebig vorgeben.

Beweis. Zu (i). Sei $x = \lambda v + y$ mit $y \in v^{\perp}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} <s_v(x), s_v(x)> &= <-\lambda v + y ,- \lambda v + y> \\ &= (-\lambda)^2<v, v> + <y, y> \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, wegen $v \perp y$. Der letzte Ausdruck ändert sich nicht ,wenn man λ durch sein Negatives ersetzt. Deshalb folgt

$$\begin{aligned} <s_v(x), s_v(x)> &= <\lambda v + y ,\lambda v + y> \\ &= <x, x>. \end{aligned}$$

Da dies für alle $x \in V$ gilt, ist s_v eine orthogonale Transformation.

Zu (ii). Wir schreiben V in der Gestalt

$$V = K\cdot v \oplus v^{\perp}$$

und wählen eine Basis

$$v_1, \dots , v_{d-1} \in v^{\perp}.$$

Dann gilt

$f(v) = -v$

$f(v_i) = v_i$ für $i = 1, \dots , d-1$.

Die Matrix von f bezüglich der Basis $v, v_1,\dots, v_{d-1}$ ist damit gleich

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\det f = \det M(f) = -1.$$

Zu (iii). Sei $x = \lambda v + y$ mit $y \in v^{\perp}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} <x, v> &= <\lambda v+y, v> \\ &= \lambda<v,v> + <y, v> \\ &= \lambda<v, v>, \end{aligned}$$

also
$$\lambda = \frac{<x,v>}{<v,v>},$$
also
$$\begin{aligned} f(x) &= -\lambda v + y \\ &= \lambda v + y - 2\lambda v \\ &= x - 2\lambda v \\ &= x - \frac{2\cdot<x,v>}{<v,v>}\cdot v \end{aligned}$$

<u>Zu (iv)</u>. Wir wählen in V eine orthonormierte Basis $v_1, v_2 \in V$ und verwenden die zugehörige Koordinaten-Abbildung
$$\varphi:\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} V, \binom{x}{y} \mapsto x\cdot v_1 + y\cdot v_2,$$
um V mit dem $\mathbb{R}^2$ zu identifizieren. Weil die Basis orthonormiert ist, entspricht das Skalarprodukt von V gerade dem Standard-Skalarprodukt des $\mathbb{R}^2$. Sei s irgendeine Spielgelung. Dann gilt
$$\det(f\circ s) = \det(f)\cdot\det(s) = -\det(f) > 0.$$
Also ist die orthogonale Transformation
$$f\circ s = d$$
eine Drehung. Es folgt
$$f = f\circ s\circ s = d\circ s.$$
Analog gilt
$$\det(s\circ f) = \det(s)\cdot\det(f) = -\det(f) > 0,$$
d.h.
$$s\circ f = d'$$
ist eine Drehung. Es folgt
$$f = s\circ s\circ f = s\circ d'.$$
QED.

6.2.11 Die hyperbolische Ebene

Sei V ein K-Vektorraum der Dimension 2 mit dem Skalarprodukt < , >. Die Charakteristik des Grundkörpers sei von 2 verschieden,
$$\mathrm{char}(K) \neq 2.$$

Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.
(i) V ist isometrisch zu < 1, -1 >.
(ii) V ist isotrop
(iii) V ist isometrisch zu < a, -a > für ein $a \in K^*$.
(iv) $\{ <x, x> \mid x \in V - \{0\}\} = K$.
Ein Raum mit Skalarprodukt, der diese Bedingungen erfüllt, heißt <u>hyperbolische Ebene</u>.

Beweis.<u>(i) ⇒ (ii)</u>. Trivial: $\binom{1}{1}$ ist ein isotroper Vektor.

<u>(ii) ⇒ (iii)</u>. Sei $x \in V - \{0\}$ isotrop. Dann gilt
$$xK \subseteq x^\perp \text{ und } \dim x^\perp = \dim V - \dim xK = 1,$$
also
$$x^\perp = xK.$$
Sei $y \in V - xK$. Dann gilt $<x, y> \neq 0$. O.B.d.A. können wir annehmen,
$$< x, y > = 1.$$

Nach Konstruktion sind x und y linear unabhängig, erzeugen also V.
<u>1. Fall</u>: $< y, y > = 0$. Wir setzen

$$x' = x + y \text{ und } y' := x - y.$$

Dann gilt

$$<x', y'> = <x, x> - <y, y> = 0$$
$$<x', x'> = <x, x> + 2<x,y> + <y, y> = 2$$
$$<y', y'> = <x, x> - 2<x,y> + <y, y> = -2$$

Der Raum V ist isometrisch zu $< 2, -2 >$.
<u>2. Fall</u>: $< y, y > \neq 0$.
Es gilt $yK \cap (yK)^\perp = 0$. Mit $0 \neq z \in y^\perp$ hat man eine orthogonale Zerlegung

$$V = yK \oplus zK$$

Wir setzen

$$a := <y, y>$$
$$b := <z, z>$$
$$x = \alpha y + \beta z.$$

Weil $< , >$ nicht-entartet ist, gilt für die Determinante der Matrix $M_{y,z}$ von $<, >$ bezüglich der Basis y, z:

$$0 \neq \det M_{y,z} = \det \begin{pmatrix} <y,y> & <y,z> \\ <z,y> & <z,z> \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = a \cdot b,$$

d.h. a und b sind von Null verschieden. Weil x isotrop ist und y, z es nicht sind, sind auch die Koeffizienten α und β ungleich Null. Indem wir y und z durch geeignete Vielfache ersetzen, erreichen wir, daß die Koeffizienten gleich 1 sind,

$$x = y + z$$

Es folgt

$$0 = < x, x > = <y+z, y+z> = a + b,$$

also $b = -a$. Der Raum V ist isometrisch zu $< a, -a>$

<u>(iii) $\Rightarrow$ (iv)</u>. Sei

$$V = < a , -a > \text{ mit } a \in K^*.$$

Zu vorgegebenen $c \in K$ betrachten wir den Vektor $v \in V$ mit den Koordinaten

$$v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\frac{c}{a} \\ 1-\frac{c}{a} \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$< v, v > = \frac{1}{4} \cdot a \cdot ((1+\frac{c}{a})^2 - (1-\frac{c}{a})^2) = \frac{1}{4} \cdot a \cdot 4 \cdot \frac{c}{a} = c.$$

Der Vektor v kann im Fall $c \neq 0$ nicht der Nullvektor sein. Die Formel für v zeigt, daß v auch im Fall $c = 0$ vom Nullvektor verschieden ist.

<u>(iv) $\Rightarrow$ (i)</u>. Nach Voraussetzung ist $< , >$ isotrop. Auf Grund der bereits bewiesenen Implikationen können wir annehmen,

$$V = < a, -a>$$

für ein $a \in K^*$. Ebenfalls nach Voraussetzung gibt es ein $x \in V$ mit $< x, x > = 1$. Dann gilt

$$xK \cap x^\perp = 0,$$

und mit $0 \neq y \in x^\perp$ hat man eine orthogonale Zerlegung.

$$V = xK \oplus yK$$

Mit

$$b := < y, y >,$$

hat die Matrix $M_{x,y}$ von < , > bezüglich der Basis x, y die Gestalt

$$M_{x,y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Wegen V= < a, -a >, hat die Matrix von < , > bezüglich der Standard-Basis die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

d.h. es gilt

$$M_{x,y} = S^T \cdot M \cdot S.$$

mit einer umkehrbaren Matrix $S \in K^{2\times 2}$. Es folgt

$$b = \det(M_{x,y}) = \det S^T \cdot \det M \cdot \det S = -a^2 \det(S)^2,$$

d.h.

$$b = -c^2 \text{ mit } c = a\cdot\det(S) \in K^*.$$

Wir setzen $y' = \frac{1}{c} y$ und erhalten wir eine orthogonale Basis

$$x, y' \in V$$

von V mit

$$\langle x, x\rangle = 1, \langle y', y'\rangle = -1.$$

Mit anderen Worten, V ist isometrisch zu < 1, -1>.
QED.

6.2.12 Isotropie und hyperbolische Ebenen

Seien V ein K-Vektorraum endlicher Dimension mit Skalarprodukt < , > und

$$0 \neq x \in V$$

ein isotroper Vektor,

$$\langle x , x \rangle = 0.$$

Dann gibt es einen linearen Unterraum

$$W \subseteq V$$

mit folgenden Eigenschaften.

(i) $x \in W \subseteq V$.

(ii) $\dim W = 2$.

(iii) $\langle\, , \rangle|_W$ ist nicht entartet.

(iv) Es besteht eine orthogonale direkte Zerlegung

$V = W \oplus W^\perp$.

Mit anderen Worten, jeder isotrope Vektor liegt in einer hyperbolischen Ebene, die ein orthogonaler direkter Summand des Vektorraums ist.

Beweis. Die Dimension von V ist mindestens 1, weil es einen von Null verschiedenen Vektor x gibt. Die Dimension kann nicht gleich 1 sein, weil dann

$$\langle u, v \rangle = 0$$

gelten würde für beliebige $u, v \in V = Kx$, d.h. < , > wäre entartet, also kein Skalarprodukt. Es gilt also

$$\dim V \geq 2.$$

Wegen

$$\dim x^\perp = \dim (xK)^\perp = \dim V - 1$$

ist $V - x^\perp$ nicht leer. Wir wählen einen Vektor

$$y \in V - x^{\perp}$$

Dann gilt $< x, y > \neq 0$. Indem wir y durch ein geeignetes Vielfaches ersetzen erreichen wir

$$< x, y > = 1.$$

Wir setzen

$$W := Kx + Ky.$$

Nach Konstruktion gilt $x \in W$, d.h. Bedingung (i) ist erfüllt.

Weil x isotrop und $x^{\perp} \cap W$ ein echter Unterraum von W ist[12], gilt $x^{\perp} \cap W = xK$. Zussammen mit $y \notin x^{\perp} \cap W$ folgt, daß x und y linear unabhängig sein müssen, d.h.

$$\dim W = 2.$$

Damit ist Bedingung (ii) erfüllt. Die Matrix der Bilinearform $< , >|_W$ bezüglich der Basis x,y ist gleich

$$M_{x,y} = \begin{pmatrix} <x, x> & <x, y> \\ <y, x> & <y, y> \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & <y, y> \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\det M_{x,y} = -1$. Insbesondere ist die Einschränkung $< , >|_W$ des Skalarprodukts auf $W \times W$ nicht-entartet. Bedingung (iii) ist erfüllt.

Bedingung (iv) folgt aus 6.1.7 (iv) und der gerade bewiesenen Aussage (iii).
QED.

6.2.13 Satz von Dieudonné

Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und V ein K-Vektorraum der Dimension

$$\dim V = n$$

mit dem Skalarprodukt $< , >$. Dann ist jede orthogonale Transformation

$$f: V \longrightarrow V$$

Zusammensetzung von höchstens n Spiegelungen.
Beweis. (nach Lam: Introduction to quadratic forms over fields).

<u>Bezeichnungen</u>. Für jede orthogonale Transformation

$$f: V \longrightarrow V$$

setzen wir

$$\tilde{f} = f - 1 \ (\in \mathrm{End}_K(V)).$$

und

$$\mathrm{Fix}(f) := \mathrm{Ker}(\tilde{f}) = \{v \in V \mid f(v) = v\}$$

Fix(f) heißt Raum der f-invarianten Vektoren von f (und ist gleich dem Eigenraum von f zum Eigenvektor 1).

Zum Beweis der Behauptung müssen wir zunächst eine Reihe von Eigenschaften des Endomorpismus $\tilde{f}$ beweisen.

<u>1. Schritt</u>. $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Ker}(\tilde{f}) = \mathrm{Im}(\tilde{f})^{\perp}$.

---

[12] $y \in W$ liegt nicht in diesem Unterraum.

Für $v \in Fix(f)$ und $w \in V$ gilt

$$
\begin{aligned}
< v, \tilde{f}(w) > &= < v, f(w) - w > \\
&= < v, f(w) > - < v, w> \\
&= < f(v), f(w) > - < v, w> && \text{(wegen } v \in Fix(f)) \\
&= < v, w > - < v, w > && \text{(wegen } f \in O(V)) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$Fix(f) \subseteq Im(\tilde{f})^{\perp}.$$

Sei umgekehrt $v \in Im(\tilde{f})^{\perp}$. Für jedes $w \in V$ gilt dann

$$
\begin{aligned}
<f(v) - v, f(w)> &= < f(v), f(w) > - < v, f(w) > \\
&= < v, w > - < v, f(w) > && \text{(wegen } f \in O(V)) \\
&= - < v, \tilde{f}(w) > && \text{(Definition von } \tilde{f}) \\
&= 0 && \text{(wegen } v \in Im(\tilde{f})^{\perp}).
\end{aligned}
$$

Wenn w alle Vektoren von V durchläuft, so gilt dasselbe für f(w) (wegen $f \in O(V)$). Deshalb gilt

$$<f(v) - v, w> = w \text{ für alle } w \in V.$$

Wei < , > nicht-entartet ist folgt $f(v) - v = 0$ für jedes $v \in Im(\tilde{f})^{\perp}$, d.h. es ist

$$f(v) = v \text{ für } v \in Im(\tilde{f})^{\perp}.$$

Also gilt

$$Im(\tilde{f})^{\perp} \subseteq Fix(f).$$

<u>2. Schritt</u>. 1. $Ker(\tilde{f})^{\perp} = Im(\tilde{f})$

2. $\tilde{f}^2 = 0 \Leftrightarrow Im(\tilde{f})$ ist total isotrop.

Zu Ausssage 1.
Es gilt

$$
\begin{aligned}
Ker(\tilde{f})^{\perp} &= Im(\tilde{f})^{\perp\perp} && \text{(nach dem ersten Schritt)} \\
&= Im(\tilde{f}) && \text{(weil < , > nicht-entartet ist)}^{13}.
\end{aligned}
$$

Zu Aussage 2.
Es gilt

$$
\begin{aligned}
Im(\tilde{f}) \text{ total isotrop} &\Leftrightarrow Im(\tilde{f}) \subseteq Im(\tilde{f})^{\perp} \\
&\Leftrightarrow Im(\tilde{f}) \subseteq Ker(\tilde{f}) && \text{(nach dem ersten Schritt)} \\
&\Leftrightarrow \tilde{f}^2 = 0.
\end{aligned}
$$

<u>3. Schritt</u>. Für jedes $w \in V$ sind folgende Aussagen äquivalent.

1. $\tilde{f}(w)$ ist orthogonal zu sich selbst.
2. $\tilde{f}(w)$ ist orthogonal zu w.

Es gilt

---

[13] vgl. 6.1.7 (ii).

$<\tilde{f}(w), \tilde{f}(w)> = 0$

$\Leftrightarrow <(f-1)(w), (f-1)(w)<> = 0$

$\Leftrightarrow <f(w),f(w)> - <f(w),w> - <w,f(w)> + <w,w> = 0$

$\Leftrightarrow 2(<w,w> - <f(w),w>) = 0$ (wegen $f \in O(V)$ und $< , >$ symmetrisch)

$\Leftrightarrow <\tilde{f}(w), w) >= 0$ (Definition von $\tilde{f}$ und $\mathrm{Char}(K) \neq 2$)

<u>4. Schritt</u>. Sei $\tilde{f}^2 \neq 0$. Dann gilt

1. Es gibt ein anisotropes $w \neq 0$ mit $z := \tilde{f}(w)$ anisotrop oder Null.
2. Ist z anisotrop und $\neq 0$ und $f' = s_z \circ f$, so gilt $w \in \mathrm{Fix}(f')$.

Dabei bezeichne s_z wie in 6.2.10 die Spiegelung an der zu z orthogonalen Hyperebene.

Der Beweis des vierten Schrittes ist etwas aufwendiger als die Beweise der vorangehenden Schritte. Wir zeigen deshalb zunächst, wie man aus dessen Aussge die Behauptung des Satzes von Dieudonné ableitet.

<u>5. Schritt.</u> Ableitung der Behauptung mit Hilfe des vierten Schritts.
Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Dimension

$$n = \dim V.$$

Im Fall n = 1 gilt

$$O(V) = \{\pm 1\},$$

wobei -1 die einzige Spiegelung von V ist. Es ist nichts zu beweisen. Sei jetzt

$$n > 1,$$

und die Behauptung gelte für orthogonale Transformationen auf Räumen mit Skalarprodukt und einer Dimension < n. Sei

$$f \in O(V).$$

<u>1. Fall</u>. Es existiere ein anisotroper Vektor $w \in V - \{0\}$ mit $f(w) = w$. Wir zeigen, daß dann f sogar Zusammensetzung von n-1 oder weniger Spiegelungen ist.

Nach Wahl von w ist K•w ein eindimensionaler f-invarianteer Unterraum. Dann ist aber auch dessen orthogonales Komplement f-invariant. Weil w anisotrop ist, hat man eine orthogonale direkte Zerlegung

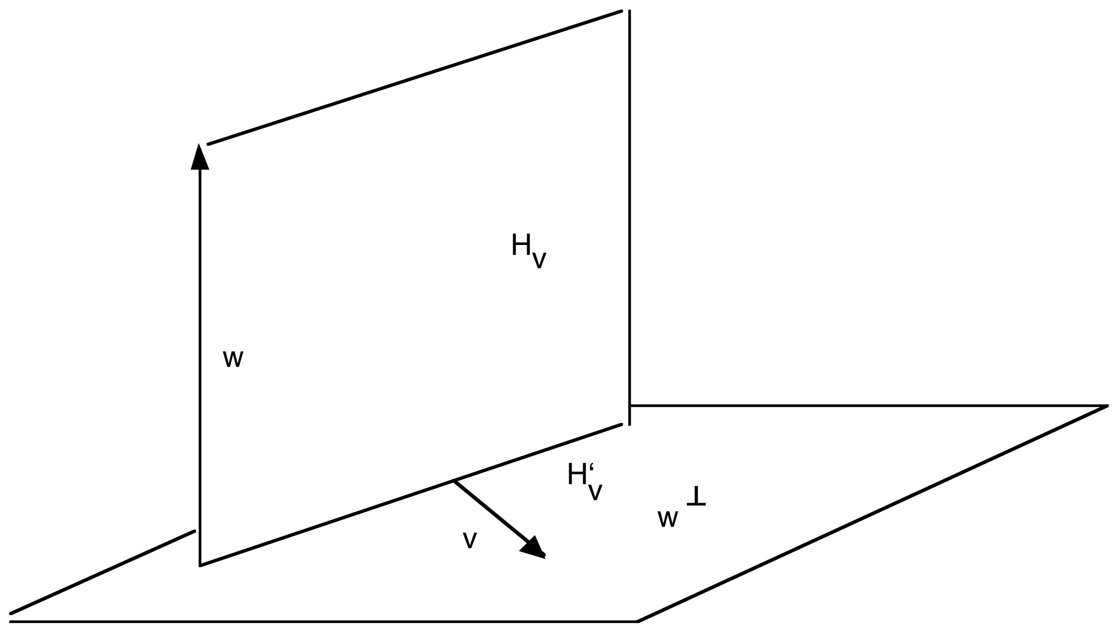
$$V = Kw \oplus (Kw)^{\perp}$$

und f ist von der Gestalt

$$f = \mathrm{id} \oplus f|_{(Kw)^{\perp}} : Kw \oplus (Kw)^{\perp} \longrightarrow Kw \oplus (Kw)^{\perp}, (x, y) \mapsto (x, f(y)).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $f|_{(Kw)^{\perp}}$ Zusammensetzung von höchstens n-1 Spiegelungen. Führt man diese Spiegelungen statt in $(Kw)^{\perp}$ im Raum V aus, so erhält man gerade f.[14]

[14] Weil w orthogonal ist zu jedem Vektor von $(Kw)^{\perp}$, also insbesondere zu den Vektoren, mit denen gespiegelt wird.



Spiegelung an den zu v orthogonalen Hyperebenen $H'_v \subseteq w^\perp$ und $H_v \subseteq V$.

2. Fall. Der allgemeine Fall.
Angenommen, die Behauptung ist falsch und

$$f \in O(V)$$

ist ein Gegenbeispiel zur Behauptung. Wir zeigen zunächst, daß dann

$$\tilde{f}^2 = 0 \qquad (1)$$

gilt. Angenommen, es wäre $\tilde{f}^2 \neq 0$. Wir wählen einen anisotropen Vektor

$$w \in V - \{0\},$$

wie er nach dem vierten Schritt existieren muß. Wäre $z = \tilde{f}(w)$ gleich Null, d.h. $f(w) = w$, so wäre f nach dem ersten Fall kein Gegenbeispiel. Also gilt

$$z = \tilde{f}(w) \neq 0,$$

und nach Aussage 2 des vierten Schritts ist $w \in \mathrm{Fix}(f')$ mit $f' = s_z \circ f$. Der Vektor

$$w \in V - \{0\}$$

ist anisotrop mit $f'(w) = w$. Nach dem ersten Fall ist f' Zusammensetzung von n-1 oder weniger Spiegelungen, sagen wir

$$s_z f = f' = \tau_1 \circ ... \circ \tau_{r-1} \text{ mit } r < n.$$

Wir multiplizieren diese Identität von links mit s_z und erhalten eine Darstellung von f als Zusammensetzung von n oder weniger Spiegelungen. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, daß f ein Gegenbeispiel zum Satz von Dieudonné sein soll. Deshalb muß (1) gelten. Mit anderen Worten, es ist

$$\mathrm{Im}(\tilde{f}) \subseteq \mathrm{Ker}(\tilde{f}) = \mathrm{Fix}(f).$$

Enthielte Fix(f) - {0} einen anisotropen Vektor, so wäre f nach dem ersten Fall kein Gegenbeispiel. Deshalb ist Fix(f) total isotrop, d.h.

$$\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Ker}(\tilde{f}) \subseteq \mathrm{Ker}(\tilde{f})^\perp = \mathrm{Im}(\tilde{f}).$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt dabei nach dem zweiten Schritt. Zusammen sehen wir, keine der obigen Inklusionen ist echt:

$$\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Ker}(\tilde{f}) = \mathrm{Ker}(\tilde{f})^\perp = \mathrm{Im}(\tilde{f}).$$

Insbesondere ist die Dimension

$$n = \dim V = \dim \mathrm{Ker}(\tilde{f}) + \dim \mathrm{Ker}(\tilde{f})^{\perp} = 2\bullet \dim \mathrm{Ker}(\tilde{f})$$

eine gerade Zahl. Die Abbildung f operiert auf Fix(f) wie die identischen Abbildung und induziert auf

$$V/\mathrm{Fix}(f) = V/\,\mathrm{Im}(\tilde{f}) = V/(f-1)V$$

ebenfalls die identische Abbildung. Insbesondere hat f die Determinante 1,

$$\det f = 1.$$

Sei jetzt $s \in O(V)$ eine beliebige Spiegelung von V.[15] Dann hat sf die Determinante -1 und kann, wie wir gerade gezeigt haben, kein Gegenbeispiel zum Satz von Dieudonné sein. Also ist

$$sf$$

Produkt von n oder weniger Spiegelungen. Dann ist aber f Produkt von n+1 oder weniger Spiegelungen. Wäre die Anzahl der Spiegelungen gleich n+1, so wäre

$$\det f = (-1)^{n+1} = -1$$

(weil n gerade ist). Wir haben aber gerade gesehen, die Determinante von f ist gleich 1. Deshalb kann die Anzahl der Spiegelung nicht n+1 sein, d.h. f ist Produkt von n oder weniger Spiegelungen. Dieser finale Widerspruch beweist schließlich den Satz von Dieudonné.

Wir haben noch die Aussage des vierten Schritts zu beweisen:

Sei $\tilde{f}^2 \neq 0$. Dann gilt

1. Es gibt ein anisotropes $w \neq 0$ mit $z := \tilde{f}(w)$ anisotrop oder Null.
2. Ist z anisotrop und $\neq 0$ und $f' = s_z \circ f$, so gilt $w \in \mathrm{Fix}(f')$.

<u>Beweis des 4. Schritts</u>.

<u>Zu 1</u>. Wir nehmen an, die Aussage ist falsch. Für jedes anisotrope $w \in V - \{0\}$ ist dann

$$z := \tilde{f}(w)$$

isotrop und ungleich Null. Die Vektoren w und $\tilde{f}(w)$ können dann nicht proportional sein.[16] Der von ihnen erzeugte Unterraum

$$W' = Kw + K\tilde{f}(w)$$

hat also die Dimension 2. Nach dem dritten Schritt gilt

$$\tilde{f}(w) \perp w \text{ für jedes anisotrope } w \in V - \{0\}. \tag{2}$$

Weil außerdem $\tilde{f}(w)$ als isotroper Vektor auch auf sich selbst senkrecht steht, ist die Einschränkung von < , > auf den Unterraum W' entartet. Deshalb kann V nicht gleich diesem Unterraum sein. Es gilt also

$$\dim V \geq 3.$$

<u>Behauptung</u>: $\tilde{f}(y) \perp y$ für jedes $y \in V$. (3)

Für y = 0 ist diese Aussage trivial. Für y anisotrop haben wir sie gerade bewiesen (vgl (2)). Sei also y isotrop und ungleich Null. Wir wählen einen anisotropen Vektor

$$w \neq 0 \text{ mit } w \perp y.$$

---

[15] Wegen Char(K) $\neq$ 2 besitzt V anisotrope Vektoren (andernfalls wäre < , > identisch Null), also Spiegelungen.

[16] weil einer der Vektoren isotrop und der andere anisotrop ist.

Ein solcher Vektor w existiert: y ist isotrop, liegt also in einer hyperbolischen Ebene, die ein direkter Summand von V ist. Deren orthogonales Komplement hat eine Dimension $\dim V - 2 \geq 1$ und die Einschränkung von $<\ ,\ >$ auf dieses Komplement ist nicht-entartet, enhält also anisotrope Vektoren.

Die beiden Vektoren y und w sind nicht proportional (d.h. linear unabhängig), denn y ist isotrop und w ist anisotrop.

Betrachten wir die Vektoren der Gestalt

$$u = y + \varepsilon \cdot w \text{ mit } \varepsilon \in K^*.$$

Es gilt

$$< u, u > = < y, y > + 2\varepsilon < y, w > + \varepsilon^2 <w, w >$$

Der erste Summand rechts ist Null, weil y isotrop sein soll, der zweite ist es nach Wahl von w. Also ist

$$< u, u > = \varepsilon^2 <w, w >,$$

d.h. mit w ist auch u anisotrop. Nach (2) gilt

$$\begin{aligned} 0 &= < \tilde{f}(u), u > \\ &= < \tilde{f}(y + \varepsilon \cdot w), y + \varepsilon \cdot w > \\ &= < \tilde{f}(y), y > + \varepsilon \cdot (<\tilde{f}(w), y> + <\tilde{f}(y), w>) + \varepsilon^2 <\tilde{f}(w), w> \end{aligned}$$

Das letzte Glied rechst ist Null (wegen (2)). Wäre der Koeffizient von ε ungleich Null, so wäre ε durch diese Identität eindeutig bestimmt. Die Identität gilt aber für alle $\varepsilon \in K^*$. Weil K eine von 2 verschiedene Charakteristik besitzt, enthält K mindestens drei, K^* also mindestens zwei Elemente. Der Koeffizient von ε muß also Null sein. Dann ist aber auch der erste Summand auf der rechten Seite gleich Null, d.h. es gilt (3).

Nach dem dritten Schritt gilt mit (3):

$$< \tilde{f}(y), \tilde{f}(y) > = 0 \text{ für jedes } y \in V,$$

d.h.

$$\mathrm{Im}(\tilde{f}) \subseteq V$$

ist ein total isotroper Unterraum von V. Nach dem zweiten Schritt gilt $\tilde{f}^2 = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die ersten Aussage des vierten Schritts bewiesen.

<u>Zu 2</u>.

Sei $z = \tilde{f}(w)$ anisotrop (und von Null verschieden). Wir setzen

$$f' := s_z f.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} z &= f(w) - w \\ s_z(w) &= w - \frac{2<w,z>}{<z,z>} \cdot z \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} <z, z> &= <f(w)-w, f(w)-w> = <f(w), f(w)> + <w,w> - 2<f(w), w> \\ &= 2(<w,w> - <f(w), w>) \qquad \text{(wegen } f \in O(V)) \\ <w,z> &= <w, f(w)-w> = <w, f(w)> - <w,w> \end{aligned}$$

also

$$s_z(w) = w + z = f(w)$$

Wir wenden s_z an und erhalten

$$w = s_z f(w) = f'(w)$$

also

$$w \in \mathrm{Fix}(f')$$

QED.

6.3 Der Fall eines reellen Grundkörpers

6.3.1 Normalformen reeller symmetrischer Bilinearformen

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und

$$b: V\times V \to \mathbb{R}$$

eine symmetrische Bilinearform. Dann gibt es eine Basis $v_1,...,v_n$ von V, bezüglich welcher die Matrix von b die folgende Gestalt hat

$$M(b) \quad = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die angegebenen Blöcke auch die Zeilen- bzw. Spaltenzahl 0 haben dürfen.
Mit anderen Worten, identifiziert man V mit Hilfe der Basis $v_1,...,v_n$ mit dem $\mathbb{R}^n$ so bekommt b die Gestalt

$$b(\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}) = x_1y_1 + ... + x_ry_r - x_{r+1}y_{r+1} - ... - x_sy_s$$

Die Zahl s der Glieder auf der rechten Seite heißt <u>Rang</u> der Bilinearform b und wird mit

$$\mathrm{rk}\ (b)$$

bezeichenet. Die Differenz

$$\mathrm{sig}(b) = r - (s-r)$$

aus der Anzahl der positiven und der Anzahl der negativen Vorzeichen
heißt <u>Signatur</u> von b.
Beweis. Nach 6.1.12 können wir jedenfalls eine Basis

$$v'_1,...,v'_n \in V$$

so wählen, daß die zugehörig Matrix die Gestalt

$$M_{v'}(b) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

bekommt, d.h. es ist

$$b(v'_i , v'_j) = \delta_{ij}\cdot c_i$$

Wir können dabei die Reihenfolge der v'_i so wählen, daß die ersten c_i positiv werden, sagen wir,

$$c_i > 0 \text{ für } i = 1, ... , r,$$

die nachfolgenden c_i negativ sind, und die c_i, welche Null sind, ganz am Ende stehen, sagen wir,

$$c_i < 0 \text{ für } i = r+1, \dots , s$$

und

$$c_i = 0 \text{ für } i = s+1, \dots , n.$$

Wir setzen

$$v_i := \frac{1}{\sqrt{|c_i|}} \cdot v'_i \text{ für } i = 1, \dots , n.$$

Dann gilt

$$b(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i=j \le r \\ -1 & \text{für } r < i=j \le s \\ 0 & \text{für } s < i=j \le n \end{cases}$$

Mit anderen Worten, die Matrix von b bezüglich der Bassis der v_i hat die behauptete Gestalt.
QED.

6.3.2 Trägheitssatz von Sylvester

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und

$$b: V\times V \to \mathbb{R}$$

eine symmetrische Bilinearform. Dann gibt es $\mathbb{R}$-lineare Unterräume V_0, V_+ und V_- mit den folgenden Eigenschaften.

(i) $V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$

(ii) Die Einschränkung von b auf V_+ ist positiv definit.

(iii) Die Einschränkung von b auf V_- ist negativ definit.

(iv) Für je zwei Vektoren v', v" aus zwei verschiedenen direkten Summanden gilt

$$b(v', v") = 0.$$

(v) V_0 =[17] $\{v\in V \mid b(v,v') = 0 \text{ für alle } v'\in V\}$.

Die Dimension der Räume V_+ und V_- ist unabhängig von der spezielen Wahl der Zerlegung. Insbesondere sind der Rang von b,

$$\text{rk}(b) = \dim V_+ + \dim V_-$$

und die Siganatur von b

$$\text{sig}(b) = \dim V_+ - \dim V_-$$

unabhängig von der speziellen Wahl der Unterräume.

Beweis. <u>1. Schritt</u>: Existenz der Zerlegung.
Mit den Bezeichnungen von 6.3.1 setzen wir

$$V_+ := Kv_1+\dots+Kv_r$$
$$V_- := Kv_{r+1}+\dots+Kv_s$$
$$V' := Kv_s+\dots+Kv_n$$

Dann gelten die Aussagen (i)-(iv) des Satzes mit V' anstelle von V_0, und es ist

---

[17] Dieser Raum heißt auch <u>Entartungsraum</u> von b.

$$V' \subseteq V_0.$$

Sei jetzt

$$v = x_1v_1 + ... + x_nv_n \in V_0.$$

Dann gilt insbesondere

$0 = b(v, v_i) = x_i$ für $i = 1, ... r$

und

$0 = b(v, v_i) = -x_i$ für $i = r+1, ... s$

d.h. es gilt $v \in V'$. Wir haben gezeigt,

$$V' = V_0,$$

d.h. es gelten die Aussagen (i)- (v). Nach Wahl der Räume V_+ und V_- gelten außerdem die angegebenen Formeln für den Rang und die Signatur von b,

$\mathrm{rk}\,(b) = s = \dim V_+ + \dim V_-$

$\mathrm{sig}(b) = r - (s-r) = \dim V_+ - \dim V_-$

<u>2. Schritt</u>: Unabhängigkeit der Dimensionen.

Sei

$V = V_0 \oplus V'_+ \oplus V'_-$

eine zweite Zerlegung der angegebenen Art. Für

$$v \in V'_+ \cap (V_0 + V_-) - \{0\}$$

gilt dann

$b(v,v) > 0$ (wegen $v \in V'_+$)

und

$b(v,v) \le 0$ (wegen $v \in V_0 \oplus V_-$)

was nicht möglich ist. Also gilt

$$V'_+ \cap (V_0 + V_-) = \{0\}.$$

Damit ist aber die Abbildung

$$V_0 \oplus V'_+ \oplus V_- \to V, (a,b,c) \mapsto a+b+c,$$

injektiv, d.h. es gilt

$$\dim V_0 + \dim V'_+ + \dim V_- \le \dim V = \dim V_0 + \dim V_+ + \dim V_-$$

also

$\dim V'_+ \le \dim V_+$

Aus Symmetriegründen muß auch die umgekehrte Ungleichung bestehen , d.h. es gilt

$\dim V'_+ = \dim V_+$

Dann ist aber auch

$$\begin{aligned} \dim V'_- &= \dim V - \dim V_0 - \dim V'_+ \\ &= \dim V - \dim V_0 - \dim V_+ \\ &= \dim V_- \end{aligned}$$

QED.

6.3.3 Drehungen in der Ebene

Sei V = $\mathbb{R}^2$ mit dem Standard-Skalarprodukt versehen. Die Drehung um den Winkel φ hat bezüglich der Standard-Basis die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

ist also eine orthogonale Transformation.
Umgekehrt sind jede orthogonale Transformation

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit positiver Determinante

$$\det f > 0$$

eine Drehung.
Beweis. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

die Basis von f bezüglich der Standard-Basis. Dann ist A eine orthogonale Matrix, d.h. es gilt

$$a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2 \text{ und } ac + bd = 0. \tag{1}$$

Insbesondere ist (a,-b) ein Punkt auf dem Einheitskreis um den Ursprung. Sei φ der Winkel, den die Gerade durch diesen Punkt und den Ursprung mit der x-Achse bildet. Dann gilt

$$(a, -b) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

Aus der Identität von (1) ganz rechts erhalten wir

$$c\cdot\cos\varphi - d\cdot\sin\varphi = 0,$$

d.h. der Punkt (c,d) liegt im eindimensionalen linearen Unterraum mit der Gleichung

$$x\cdot\cos\varphi - y\cdot\sin\varphi = 0.$$

Ein weiterer Punkt in diesem Unterraum ist (sin φ, cos φ). Da der Vektorraum 1-dimensional ist, folgt

$$(c, d) = \lambda\cdot(\sin\varphi, \cos\varphi) \text{ mit } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Auf Grund der mittleren Identität von (1) gilt

$$\lambda = \pm 1.$$

Die Matrix A hat damit die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \lambda\cdot\sin\varphi & \lambda\cdot\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Ihre Determinante ist gleich

$$\det A = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \lambda\cdot\sin\varphi & \lambda\cdot\cos\varphi \end{pmatrix} = \lambda\cdot(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \lambda.$$

Weil die Determinate von A positiv sein soll folgt $\lambda = 1$, d.h. f ist die Drehung um den Winkel φ.
QED.

6.2.4 Ebene Drehungen des n-dimensionalen Raums

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum mit Skalarprodukt < , > und

$$V = W \oplus W'$$

eine orthogonale direkte Zerlegung. Dann gilt

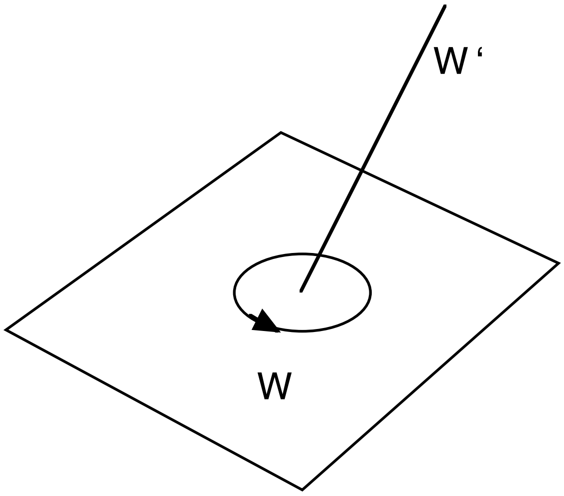
(i) Die Einschränkungen von < , > auf W und W' sind Skalarprodukte.
(ii) Sei dim W = 2 und die Einschränkung von <, > auf W positiv definit. Dann ist für jede Drehung in der Ebene W, sagen wir

$$f: W \longrightarrow W,$$

die Abbildung

$$f\oplus id: V = W\oplus W' \longrightarrow W \oplus W' = V, (w, w') \mapsto (f(w), w')$$

eine orthogonale Transformation mit positiver Determinante, welche <u>ebene Drehung</u> mit dem <u>Träger</u> W und der <u>Drehachse</u> W' heißt.



Diese ebenen Drehungen sind nicht zu verwechseln mit den in 6.3.3 betrachteten Drehungen der Ebene.

Eine Zusammensetzung von endlich vielen ebenen Drehungen heißt <u>Drehung</u>. Eine Zusammensetzung einer Drehung mit einer <u>Translation</u> oder auch <u>Verschiebung</u>, d.h. einer Abbildung der Gestalt

$$T_a: V \longrightarrow V, x \mapsto x+a,$$

mit $a \in V$, heißt <u>Bewegung</u>.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Die Eigenschaften des Skalarprodukts, bilinear und symmetrisch zu sein, bleiben beim Einschränken erhalten. Weil die Zerlegung von V orthogonal ist, gilt dies auch für die Eigenschaft nicht-entartet zu sein (vgl. Bemerkung 6.1.8 (i)). Die Einschränkungen von < , > auf W×W und W'×W' sind also Skalarprodukte.

<u>Zu (ii)</u>. Die linearen Unterräume W und W' sind invariant bei der Abbildung

$$g := f\oplus id.$$

Für $w_1, w_2 \in W$ und $w'_1, w'_2 \in W'$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&< g(w_1+w'_1), g(w_2+w'_2) > \\
&\quad = <f(w_1), f(w_2)> + <f(w_1), w'_2> + <w'_1, f(w_2)> + <w'_1, w'_2> \\
&\quad = <f(w_1), f(w_2)> + 0 + 0 + <w'_1, w'_2> \\
&\quad = <w_1, w_2> + 0 + 0 + <w'_1, w'_2> \\
&\quad = <w_1, w_2> + <w_1, w'_2> + <w'_1, w_2> + <w'_1, w'_2> \\
&\quad = <w_1+w'_1, w_2+w'_2>
\end{aligned}$$

d.h. g ist eine orthogonale Transformation.

Zur Berechnung der Determinante von g fixieren wir Basen von W und W'. Zusammen bilden diese beiden Basen eine Basis von V, und die Matrix von g bezüglich dieser Basen hat die Gestalt

$$M(g) = \begin{pmatrix} M(f) & 0 \\ 0 & M(id) \end{pmatrix},$$

wenn M(f) die Matrix von f bezüglich der fixierten Basis von W bezeichnet (vgl. Bemerkung 6.1.8(i)). Für die Determinanten erhalten wir

$$\det(g) = \det M(g) = \det M(f)\bullet\det(M(id)) = \det f > 0.$$

QED.

6.3.5 Orthogonale Transformationen mit positiver Determinante

Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit euklidischen Skalarprodukt und

$$f: V \longrightarrow V$$

eine orthogonale Transformation mit positiver Determinante. Dann ist f eine Drehung (d.h. Zusammensetzung von endlich vielen ebenen Drehungen.

Beweis. Wir wählen eine orthonormale Basis und identifizieren so den Vektorraum V mit dem $\mathbb{R}^n$. Das Skalarprodukt wird so zum Standard-Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$. Die orthogonale Transformation f: V $\longrightarrow$ V wird zu einer Abbildung der Gestalt

$$f = f_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax,$$

mit einer orthogonalen Matrix

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, AA^T = Id.$$

Wir interessieren uns zunächst für den Fall, daß n klein ist.
<u>1. Fall</u>: n = 1.
Die Matrix A = (a) ist eine 1×1-Matrix. Die Bedingung $AA^T = Id$ bedeutet,

$$a^2 = 1,$$

also a = ±1, und weil die Determinante von f positiv sein soll, a = 1. Die Abbildung f_A ist die identische Abbildung, d.h. eine Drehung (um den Winkel 0).
<u>2. Fall</u>: n = 2.
Dieser Fall wurde bereits behandelt (vgl. 6.3.3).
<u>3. Fall</u>: n > 2.
Wir betrachten die durch A definierte $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$g := f_A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, z \mapsto Az,$$

Das Charakteristische Polynom von g hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, d.h. es gibt eine komplexe Zahl c und einen Vektor $z \in \mathbb{C}^n$ - {0} mit

$$Az = cz, c \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n - \{0\}.$$

<u>Fall A</u>. Es gibt reelle Eigenvektoren $z \in \mathbb{R}^n$ zum Eigenwert c.
Dann ist c reell, der von z erzeugte 1-dimensionale reelle Unterraum f-invariant, und die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}z$ ist eine orthogonale Transformation, also entweder die identische Abbildung oder die Multiplikation mit -1 (auf Grund des ersten Falls).
Seien

$$U := \mathbb{R}z \text{ und } W := z^{\perp}$$

Weil z anisotrop ist, haben wir eine orthogonale direkte Zerlegung

$$V = \mathbb{R}z \oplus z^{\perp} = U \oplus W \text{ mit } \dim U = 1$$

<u>Fall B</u>. Es gibt keine reellen Eigenvektoren zum Eigenwert c.
Wir scheiben

$$z = z' + i \cdot z'' \text{ mit } z', z'' \in \mathbb{R}^n.$$

Angenommen z' und z'' sind proprotional, sagen wir

$$z' = a\tilde{z}\ ,\ z'' = b\tilde{z} \text{ mit } \tilde{z} \in \mathbb{R}^n,\ a,b \in \mathbb{R}\approx$$

Dann ist $z = (a+bi)\tilde{z}$ und $\tilde{z}$ ist ein reeller Eigenvektor im Widerspruch zur Voraussetzung im Fall B. Also gilt

z' und z'' sind linear unabhängig.

Mit Az = cz gilt, weil die Matrix A reelle Einträge besitzt auch

$$A\overline{z} = \overline{Az} = \overline{cz} = \overline{c} \cdot \overline{z}$$

Wir sehen, auch $\overline{z}$ ist ein Eigenvektor von A. Insbesondere ist der von z und $\overline{z}$ erzeugte $\mathbb{C}$-lineare Unterraum

$$\mathbb{C}z + \mathbb{C}\overline{z} = \mathbb{C}z' + \mathbb{C}z''$$

invariant bei g reelle Linearkombination von z' und z'' geht bei $g = f_A$ in eine komplexe Linearkombination

$$c'z' + c''z''$$

von z' und z'' über. Weil A eine reelle Matrix ist, ist diese Linearkombination ein Vektor mit reellen Koordinaten. Weil die Vektoren z' und z'' linear unabhängig, d.h. nicht proportional sind, können sich eventuel vorhandene Imaginärteile von c' und c'' nicht wegheben, d.h. c' und c'' sind selbst schon reell. Wir haben gezeigt, die reellen Vektoren z' und z'' erzeugen einen reellen f-invarianten Unterraum

$$U := \mathbb{R}z' + \mathbb{R}z'' \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Sei

$$W := U^{\perp} = z'^{\perp} \cap z''^{\perp}.$$

Weil das Skalarprodukt < , > anisotrop sein soll, gilt $V = U \oplus W$.

Zusammen erhalten wir sowohl im Fall A als auch im Fall B eine orthogonale Zerlegung

$$V = U \oplus W,\ W = U^{\perp}$$

mit einem f-invarianten Unterraum U der Dimension

$$\dim U = 1 \text{ oder } 2.$$

Nach 6.2.7 ist mit U auch W invariant,

W ist ein f-invarianter Unterraum.

Indem wir die obige Argumentation mit W anstelle von V wiederholen erhalten wir eine orthogonale Zerlegung

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r$$

in f-invariante Unterräume U_i deren Dimension 1 oder 2 ist. Seien

$$f_i := id \oplus \dots \oplus id \oplus f|_{U_i} \oplus id \oplus \dots \oplus id$$

und

$$s_i := id \oplus \dots \oplus id \oplus s'_i \oplus id \oplus \dots \oplus id$$

mit irgendeiner Spiegelung s'_i von U_i.

Dann gilt

$$f = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_r \tag{1}$$

und

$$f_i \circ f_j = f_j \circ f_i \text{ und } s_i \circ s_j = s_j \circ s_i \text{ für i,j beliebig} \quad (2)$$

und

$$s_i \circ f_j = f_j \circ s_i \text{ für } i \neq j. \quad (3).$$

Die Abbildungen s_i sind dann Spiegelungen von V.

Wegen (2) können wir die Reihenfolge der f_i so ändern, daß

$$\dim U_1 \le ... \le \dim U_r$$

gilt. Falls f_i für ein i mit $\dim U_i = 2$ eine negative Determinante besitzt können wir

$$f_i = s_i \circ s_i \circ f_i$$

schreiben, f_i durch $s_i \circ f_i$ ersetzen und den zusätzlichen Faktor s_i in (1) an einen der vorderen Plätze bringen (wegen (3) und (2)). Wir erhalten so eine Zerlegung der Gestalt

$$f = s_1 \circ ... \circ s_u \circ g_1 \circ ... \circ g_v$$

mit ebenen Drehungen g_i und Spiegelungen s_i. Weil die Determinanten von f und den g_i positiv sind und die s_i die Determinante -1 besitzen, ist die Anzahl der s_i gerade,

u ist gerade.

Zum Beweis der Behauptung reicht es also zu zeigen, die Zusammensetzung von zwei Spiegelung ist eine ebene Drehung, d.h. es reicht, die nachfolgende Aussage zu beweisen.
QED.

6.3.6 Die Zusammensetzung zweier Spiegelungen

Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit euklidischem Skalarprodukt und

$$s, t: V \longrightarrow V$$

zwei Spiegelungen. Dann ist die Zusammensetzung $s \circ t$ eine ebene Drehung.
Beweis. Wir wählen Vektoren

$$v, w \in V$$

derart, daß s und t die Spiegelungen an der zu v bzw. an der zu w orthogonalen Hyperebene sind. Falls v und w proportional sind, gilt s = t und

$$s \circ t \quad (1)$$

ist die identische Abbildung (d.h. ein ebene Drehung um den Winkel 0). Wir können also im folgendne annehmen,

v und w sind linear unabhängig.

Wir setzen

$$U := \mathbb{R}v + \mathbb{R}w \text{ und } W := U^\perp = v^\perp \cap w^\perp$$

Es gilt

$$\dim W = \dim V - \dim U = \dim V - 2.$$

Weil die Einschränkung des Skalarprodukts auf U nicht entartet ist, erhalten wir eine orthogonale direkte Zerlegung

$$V = U \oplus W.$$

Trivialerweise gilt

$$W \subseteq v^\perp \text{ und } W \subseteq w^\perp,$$

d.h. W liegt in den zu v und w orthogonalen Hyperebenen und s und t bilden jeden Punkt von W in sich ab. Die Zusammensetzung (1) induziert auf W die identische Abbildung. Insbesondere ist W ein invarianter Unterraum. Dann ist aber auch das orthogonale Komplement U von W ein invarianter Unterraum von (1). Für die Determinante der auf U induzierten Abbildung

$$u: U \longrightarrow U$$

gilt

$$\det u = \det (u \oplus id_W) = \det (s\circ t) = \det (s) \bullet \det (t) = (-1)(-1) = 1.$$

Mit anderen Worten, u ist eine Drehung der Ebene und damit s∘t eine ebene Drehung.
QED.
Bemerkung
Beim Beweis von 6.3.5 haben wir es vermieden, den Satz von Dieudonné anzuwenden. Tatsächlich ist die Aussage von 6.3.5 ene direkte Folgerung des Satzes von Dieudonné und 6.3.6:
Nach Dieudonné ist jede orthogonale Transformation mit positiver Determinante eine Zusammensetzung von Spiegelungen. Weil die Determinante positiv ist, ist die Anzahl der Spiegelungen gerade. Je zwei Spiegelungen lassen sich aber zu einer ebenen Drehung zusammenfassen.

6.3.7 Orthogonale Transformationen mit negativer Determinante

Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit euklidischen Skalarprodukt und

$$f: V \longrightarrow V$$

eine orthogonale Transformation mit negativer Determinante. Dann läßt sich f in der Gestalt

$$f = s\circ d = d'\circ s'$$

schreiben mit Drehungen d, d' und Spiegelungen s, s'. Die Spiegelungen s, s' kann man dabei beliebig vorgeben.
Beweis. Sei s irgendeine Spiegelung von V. Dann ist

$$d := s\circ f$$

eine orthogonale Transformation mit positiver Determinante, also eine Drehung. Wir wenden s auf diese Identität an und erhalten

$$s\circ d = s\circ s\circ f = f.$$

Sei s' irgendeine Spiegelung von V. Dann ist

$$d' := f\circ s'$$

eine orthogonale Transformation mit positiver Determinante, also eine Drehung. Wir wenden die beiden Seiten dieser Identität auf s' an und erhalten

$$d'\circ s' = f\circ s'\circ s' = f.$$

QED.

6.4 Selbstadjungierte Endomorphismen

Im Kapitel 5 zur Jordanschen Normalform haben wir nach irgendeiner Basis gesucht, für welche die Matrix eines linearen Endomorphismus eine möglichst einfache Gestallt annimmt, d.h. wir haben beliege lineare Transformationen des Raums zugelassen.

Hier wollen wir der Frage nachgehen, ob sich bei manchen Abbildungen diese Vereinfachungen bereits durch orthogonale Transformationen oder Drehungen des Raumes erreichen lassen.

Eine Klassen von Abbildungen, für welche diese Frage eine positive Beantwortung zuläßt, sind die sogenannten selbstadjungierten Endomorphismen.

6.4.1 Die adjungierte lineare Abbildung

Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit Skalarprodukt,

$$<,>_V: V\times V \to K$$

$$<,>_W: W\times W \to K$$

Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f: V\to W$ genau eine lineare Abbildung $f^*:W\to V$ mit

$$\langle v,f^*w\rangle_V = \langle fv, w\rangle_W$$

für alle $v\in V$ und alle $w\in W$. Diese Abbildung heißt die zu f (bezüglich der gegebenen Skalarprodukte) <u>adjungierte Abbildung</u>.

Beweis. <u>Existenz von f*</u>.Nach Bemerkung 6.1.6(v) gilt

$$\langle v, f^*(w^*)\rangle = \langle f(v), w^*\rangle \text{ für } v\in V \text{ und } w^*\in W^*,$$

wenn $\langle\ ,\ \rangle$ die natürliche Paarung (auf $V\times V^*$ bzw. $W\times W^*$) bezeichnet und $f^*:W^*\to V^*$ die duale Abbildung. Wir benutzen die gegebenen Skalarprodukte $\langle\ ,\ \rangle_V$ bzw. $\langle\ ,\ \rangle_W$ um V mit V* und W mit W* zu identifizieren. Dann wird $f^*:W^*\to V^*$ zu einer Abbildung $f':W\to V$ für welche gilt

$$\langle v, f'(w)\rangle_V = \langle f(v), w\rangle_W$$

für alle $v\in V$ und alle $w\in W$, d.h. f' ist eine Abbildung der gesuchten Art.

<u>Eindeutigkeit von f*</u>. Wir nehmen an, es gibt zwei lineare Abbilungen $g,h:W\to V$ mit der angegebenen Eigenschaft, d.h. mit

$$\langle v,g(w)\rangle = \langle f(v), w\rangle = \langle v, h(w)\rangle$$

für alle $v\in V$ und alle $w\in W$ und zeigen,daß dann g=h gilt.
Es gilt

$$\langle v, (g-h)(w)\rangle = \langle v,g(w)\rangle - \langle v, h(w)\rangle = 0$$

für alle $v\in V$ und alle $w\in W$. Es reicht also zu zeigen, aus

(1) $$\langle v, g(w)\rangle_V = 0$$

für alle $v\in V$ folgt

(2) $$g(w) = 0.$$

Nun ist g(w) ein Element von V und das Bild von g(w) bei der durch $\langle\ ,\ \rangle_V$ definierten Injektion

(3) $$V \to V^*, x \mapsto (y \mapsto \langle y,x\rangle_V)$$

ist die Abbildung

$$V\to K, y \mapsto \langle y,g(w)\rangle_V.$$

Nach (1) ist dies die Nullabbildung. Da aber (3) injektiv ist (denn $\langle\ ,\ \rangle_V$ ist als Skalerprodukt nicht entartet), muß bereits g(w) = 0 sein. Es gilt also tatsächlich (2).
QED.

6.4.2 Beispiel: adjungierte Abbildungen und transponierte Matrizen

Seien $A\in K^{m\times n}$ eine Matrix und

$$f_A: K^n \to K^m, x \mapsto Ax,$$

die zugehörige lineare Abbildung. Die Räume K^n und K^m seien mit dem Standard-Skalarprodukt versehen. Weiter sei

$$f_{A^T}: K^m \to K^n, y \mapsto A^Ty,$$

die zur transponierten Matrix gehörige lineare Abbildung. Dann gilt für die Standard-Skalarprodukte auf K^m bzw. K^n,

$$\langle v, f_{A^T}(w)\rangle_V = \langle f_A(v), w\rangle_W$$

für beliebige $v\in K^n, w\in K^m$.
Insbesondere sind die linearen Abbildungen f_A und f_{A^T} adjungiert zueinander.

Beweis. Es gilt

$$<v, f_{A^T}(w)>_V = v^T\cdot A^T\cdot w = (Av)^T\cdot w = <Av, w>_W = <f_A(v), w>_W$$

QED.

6.4.3 Selbstadjungierte Endomorphismen

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt < , > versehen ist. Ein <u>selbstadjungierter Endomorphismus</u> oder auch <u>selbstadjungierter Operator</u> ist dann eine lineare Abbildung $f:V\to V$ mit

$$<v, f(w)> = <f(v), w>$$

für alle $v\in V$ und alle $w\in W$.

6.4.4 Beispiel: selbstadjungierte Endomorphismen und symmetrische Matrizen

Seien $A\in K^{n\times n}$ und

$$f = f_A:K^n \to K^n, x \mapsto Ax,$$

die lineare Abbildung zur Matrix A. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) f ist selbstadjungiert.
(ii) A ist symmetrisch.

Beweis. <u>(i) ⇒ (ii)</u>. Nach Voraussetzung gilt

$$< v, f(w) > = < f(v), w >$$

für beliebige v und w, also

$$v^Tf(w) = f(v)^Tw,$$

also

$$v^TAw = (Av)^Tw = v^TA^Tw.$$

Für $v = e_i$ und $w = e_j$ steht auf beiden Seiten der Eintrag in der Position (i,j) der Matrix A bzw. A^T. Da dies für beliebige i und j gilt, folgt

$$A = A^T,$$

d.h. A ist symmetrisch.
<u>(ii) ⇒ (i)</u>. Wegen $A = A^T$ gilt $f = f_A = f_{A^T}$. Nach 6.4.2 ist f selbstadjungiert.

QED.

6.4.5 Selbstadjungierte Endomorphismen und invariante Unterräume im anisotropen Fall

Seien V ein K-Vektorraum mit anisotropen Skalarprodukt < , > (und mit $\dim V < \infty$),

$$f: V\to V$$

ein selbstadjungierter Operator und

$$V' \subseteq V$$

ein f-invarianter Unterraum. Dann gilt:

(i) Die Einschränkung des Skalarprodukts < , > auf V' ist ein (anisotropes) Skalarprodukt.
(ii) Die Einschränkung

$$f|_{V'}$$

von f auf V' selbstadjungiert.

Beweis. Zu (i). Die Abbildung

$$V'\times V' \to K, (a,b) \mapsto \langle a,b\rangle,$$

ist offensichtlich bilinear und symmetrisch. Nach Voraussetzung ist sie auch anisotrop, also nicht-entartet, also ein Skalarprodukt.
Zu (ii). Es gilt

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$$

für $v,w\in V'$, denn dies gilt sogar für beliebige $v,w\in V$.
QED.

Bemerkung
Die Einschränkung eines Skalarprodukts auf einen Unterraum ist im allgemeinen kein Skalarprodukt. Zum Beispiel ist die Einschränkung des Skalarprodukt

$$\langle \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}\rangle = x'y'' + x''y'$$

mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

auf den Unterraum $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot K$ identisch Null.

6.4.6 Diagonalisierbarkeit selbstadjungierter Operatoren im anisotropen Fall

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit anisotropen Skalarprodukt <,> und $f:V\to V$ ein selbstadjungierter K-linearer Endomorphismus. Falls K genügend groß ist[18], besitzt V eine Eigenbasis bezüglich f (und die Haupträume von f stimmen mit den Eigenräumen von f überein).

Beweis. Sei

(1) $$V = V_1\oplus\ldots\oplus V_r$$

die zu f gehörige Hauptraumzerlegung, wobei V_i der Hauptraum zum Eigenwert c_i sei,

$$V_i := \ker(f-c_i\cdot Id)^n \text{ für n groß.}$$

Die Zerlegung (1) ist eine Zerlegung in f-invariante Unterräume. Weil < , > anisotrop sein soll, sind die direkten Summanden wieder Räume mit Skalarprodukt und die Einschränkungen von f auf die direkten Summanden selbstadjungierte Operatoren.
Es reicht zu zeigen, für jedes i besitzt die Einschränkung von f auf V_i eine Eigenbasis. Wir können also annehmen, V ist bereits selbst schon (der einzige) Hauptraum von f. Sei $c\in K$ der einzige Eigenwert. Es reicht zu zeigen,

$$f = c\cdot Id$$

(d.h. der erste stabile Exponent ist 1). Nach Definition des Hauptraumbegriffs ist

$$f - c\cdot Id$$

ein nilpotenter Endomorphismus. Außerdem ist er selbstadjungiert:

$$\langle (f-c\bullet Id)(x), y \rangle = \langle f(x), y \rangle - c\bullet\langle x, y\rangle = \langle x, f(y) \rangle - c \langle x, y\rangle = \langle x, (f-c\bullet Id)(y) \rangle$$

---

[18] d.h. das charakteristische Polynom von f zerfalle über K in Linearfaktoren.

Es reicht also, die nachfolgende Aussage zu beweisen.
QED.

6.4.7 Nilpotente selbstadjungierte Endomorphismen im anisotropen Fall

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit anisotropen Skalarprodukt <,> und $f:V\to V$ ein nilpotenter selbstadjungierter K-linearer Endomorphismus. Dann gilt

$$f = 0.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$f^n = 0 \text{ für ein } n\in\mathbb{N}.$$

Im Fall n = 1 ist die Behauptung trivial.

Im Fall n = 2 gilt für jedes $v\in V$

$$\langle f(v), f(v)\rangle = \langle v, f^2(v)\rangle = \langle v, 0\rangle = 0,$$

Wegen < , > anisotrop folgt f(v) = 0.

Sei jetzt n >2. Es reicht zu zeigen, mit $f^n = 0$ gilt auch

$$g := f^{n-1} = 0.$$

Nun ist g selbstadjungiert und wegen n>2 gilt

$$2(n-1) = n + (n-2) > n,$$

also

$$g^2 = (f^{n-1})^2 = f^{2(n-1)} = 0.$$

Auf Grund es eben behandelten Falles n = 2 folgt g = 0.
QED.

6.4.8 Beispiel: der isotrope Fall

Sei $V = K^2$ der Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\rangle = xy' + yx'$$

Man beachte, die Matrix dieser Bilinearform bezüglich der Standardbasis ist

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

Die Bilinearform ist nicht entartet, d.h. < , > ist tatsächlich ein Skalarprodukt. Sei f die lineare Abbildung

$$f:V\to V, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix},$$

mit der Matrix $M(f) = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis. Dann ist M(f) nicht diagonalisierbar, d.h. V besitzt keine Eigenbasis bezüglich f.
Es gilt jedoch

$$\langle f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\rangle = \langle\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\rangle = yy'$$

und

$$\langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\rangle = \langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y'\\0\end{pmatrix}\rangle = yy',$$

d.h. f ist selbstadjungiert.

Vereinbarung

(i) Aussage 6.3.6 beschreibt eine neue Klassen von Endomorphismen, für welche eine Eigenbasis existiert. Wir wollen uns deshalb etwas genauer für deren Eigenschaften interessieren.

(ii) Das letzte Beispiel zeigt, im isotropen Fall besitzen selbstadjungierte Endomorphismen völlig andere Eigenschaften als im anisotropen Fall. Wir werden uns deshalb im folgenden bei der Untersuchung der Eigenschaften selbstadjungierter Endomorphismen auf den anisotropen Fall beschränken.

6.4.9 Orthogonalität der Hauptraumzerlegung selbstadjungierter Operatoren

Sei f: V → V ein selbstadjungierter Operator auf einem endlich-dimensionalen Raum mit anisotropen Skalarprodukt. Dann ist die Hauptraumzerlegung

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_r$$

- falls sie existiert - seine orthogonale Zerlegung.

Beweis. Bezeichne c_i den Eigenwert zum Hauptraum V_i. Dann gilt für $i\neq j$, $v_i \in V_i$, $v_j \in V_j$:

$$c_i <v_i,v_j> = < fv_i,v_j> = < v_i,fv_j> = c_j < v_i,v_j>$$

und wegen $c_i \neq c_j$ folgt $<v_i,v_j> = 0$.

QED.

6.4.10 Existenz von orthonormierten Eigenbasen

Sei

$$f: V \to V$$

ein Endomorphismus auf dem endlich-dimensionalem K-Vektorraum V mit Skalarprodukt < , >. Wir nehmen an, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. f ist selbstadjungiert.
2. < , > ist anisotrop.
2. $\chi_f(T)$ zerfällt in Linearfaktoren.

Dann besitzt f eine orthogonale Eigenbasis $v_1, ... , v_n$.

Falls die Elemente $< v_1, v_1 > , ... , < v_n , v_n > \in K$ Quadrate in K sind, gibt es sogar eine orthonormierte Eigenbasis.

Beweis. Da das charakteristische Polynom $\chi_f(T)$ in Linearfaktoren zerfällt, besitzt V eine Hauptraumzerlegung

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_r$$

bezüglich f (vgl. 5.3.8). Weil f selbstadjungiert und < , > anisotrop ist, ist diese Hauptraumzerlegung orthogonal (vgl. 6.4.9). Es reicht es zu zeigen, jedes V_i besitzt eine orthogonale Basis aus Eigenvektoren. Auf V_i hat aber f die Gestalt

$$f = c_i \cdot \mathrm{Id}$$

(wobei c_i den i-ten Eigenwert von f bezeichnet - vgl. 6.4.6), d.h. jede Basis von V_i ist Eigenbasis. Nach 6.2.4 besitzt jedes V_i damit eine orthogonale Eigenbasis, d.h. es gibt eine orthogonale Eigenbasis

$$v_1, \dots , v_n$$

von V bezüglich f.

Falls es für jedes i Elemente $d_i \in K$ gibt mit

$$d_i^2 = < v_i , v_i >,$$

so bilden auch die Vektoren

$$v'_i = \frac{1}{d_i} v_i$$

eine solche Eigenbasis. Außerdem gilt

$$< v'_i , v'_i > = \frac{1}{d_i^2} < v_i , v_i > = 1,$$

d.h. die Eigenbasis ist orthonormiert.

QED.

6.4.11 Beispiel

Seien $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $f:=f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

<u>Bestimmung der Eigenwerte</u>:
Es gilt

$$\begin{aligned}\chi_f(T) &= \det \begin{pmatrix} 2-T & -1 & 1 \\ -1 & 2-T & 1 \\ 1 & 1 & 2-T \end{pmatrix} = (2-T)^3 - 2 + 3(T-2) \\ &= - T^3 + 6T^2 - 12T + 8 - 2 + 3T - 6 \\ &= - T^3 + 6T^2 - 9T \\ &= (-T)(T^2 - 6T + 9) \\ &= (-T)(T-3)^2\end{aligned}$$

Als Eigenwerte erhalten wir also $c_1 = 0$ (Vielfachheit 1) und $c_2=1$ (Vielfachheit 2).

<u>Bestimmung einer orthonormierten Eigenbasis</u>:
Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist gerade die Lösungsmenge des homogenen Systems zu

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(2×untere Zeile zur oberen)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix} \quad \text{(2× obere Zeile zur unteren)}$$

$$\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

d.h. y+z = 0 und x + z = 0. Der Eigenraum besteht aus den Vektoren der Gestalt

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-z\\ -z\\ z\end{pmatrix} = -z\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Eine orthonormierte Basis des Eigenraums ist:

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 3 ist gerade die Lösungsmenge des homogenen Systems zu

$$(-1\ -1\ 1)$$

d.h. x + y - z = 0. Der Eigenraum besteht aus den Vektoren der Gestalt

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ x+y\end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Eine orthogonale Basis des Eigenraums ist

$$\mathbf{x}'_2 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}'_3 = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

mit $0 = <\mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3> = 1 + \lambda\cdot 2$, d.h. $\lambda = -\frac{1}{2}$ und $\mathbf{x}'_3 = \begin{pmatrix}-1/2\\ 1\\ 1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

Eine orthonormale Basis des Eigenraums ist

$$\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

Zusammen bilden die Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ eine orthonormierte Eigenbasis des $\mathbb{R}^3$.

6.5 Der Fall eines komplexen Grundkörpers

Wie wir gesehen haben, lassen sich viele Konstruktionen in einem Raum mit Skalarprodukt einfacher durchführen oder sind überhaupt erst möglich, wenn wir wissen daß das Skalarprodukt positiv definit oder wenigstens anisotrop ist. Im Fall eines Grundkörpers K = $\mathbb{C}$ läßt sich das Skalarprodukt stets mit dem Standard-Skalarprodukt eines $\mathbb{C}^n$ identifizieren.[19] Letzteres ist aber über $\mathbb{C}$ stets isotrop. Argumente, die die Anisotropie des Skalarprodukts verwenden, versagen also über $\mathbb{C}$.
Es ist also naheliegend nach einem Ausweg zu suchen. Es gibt tatsächlich einen Ausweg: dieser besteht darin, die Definiiton des Skalarprodukts etwas abzuändern. Diese etwas abgeänderten Skalarprodukte heißen hermitische Skalarprodukte.

6.5.1 Hermitische Formen

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine <u>hermitische Form</u> auf V ist eine Abbildung

$$h : V\times V \to \mathbb{C},\ (x,y) \mapsto < x, y>,$$

mit folgenden Eigenschaften.

[19] Nach 6.2.4 und dem Beweis von 6.2.2 (ii).

1. Die Form ist $\mathbb{C}$-linear bezüglich der ersten Variablen, d.h. für jedes $v\in V$ ist die Abbildung
$$V \to \mathbb{C},\ x \mapsto h(x, v),$$
eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung.
2. Die Abbildung ist hermitisch, d.h. für je zwei Vektoren $x,y\in V$ gilt
$$h(y, x) = \overline{h(x, y)},$$
d.h. beim Vertauschen der beiden Argumente wird der Wert konjugiert.

Ist $v_1,\ldots,v_n$ eine Basis des Vektorraums V so nennt man die Matrix
$$M_v(h) := (h(v_i,v_j))_{i,j=1,\ldots,n}$$
auch Matrix von h bezüglich der gegebenen Basis.

Beispiel

Sei A eine n×n-Matrix mit komplexen Einträgen. Dann ist durch
$$h(x,y) := x^T A\bar{y}$$
genau dann eine hermitische Form definiert, wenn
$$A^T = \bar{A} \tag{1}$$
gilt. Dabei bezeichne $\bar{A}$ die Matrix, die man aus A erhält, indem man alle Einträge durch deren komplexe Konjugiertes ersetzt. Man beachte,
$$h(y, x) - \overline{h(x, y)} = y^T A\bar{x} - \bar{x}^T\bar{A}y = y^T A\bar{x} - y^T\bar{A}^T\bar{x} = y^T (A - \bar{A}^T)\bar{x}$$
ist genau dann identisch Null, wenn die Matrix $A - \bar{A}^T$ identisch Null ist. Matrizen, die der Bedingung (1) genügen, heißen <u>hermitische Matrizen</u> Insbesondere ist die Einheitsmatrix eine hermitische Matrix. Für A = Id gilt
$$h(x,x) := x^T\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i\bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x|_i^2 ,$$
wenn man die Koordinaten des Vektors x mit x_i bezeichnet.

Bemerkungen

(i) Die beiden Eigenschaften 1 und 2 implizieren eine Eigenschaft der Abbildung bezüglich des zweiten Arguments, welche der Linearität sehr nahe kommt. Für v', v"$\in$V und c',c"$\in\mathbb{C}$ gilt nämlich
$$\begin{aligned} h(x, c'v' + c''v'') &= \overline{h(c'v' + c''v'',x)} \\ &= \overline{c'h(v',x) + c''h(v'',x)} \\ &= \bar{c}'\cdot\overline{h(v', x)} + \bar{c}''\cdot\overline{h(v'', x)} \\ &= \bar{c}'\cdot h(x,v') + \bar{c}''\cdot h(x,v''). \end{aligned}$$
Mit anderen Worten, bezüglich des zweiten Arguments hat man in Linearkombinationen die Koeffizienten zusätzlich zu konjugieren. Man nennt Abbildungen mit dieser Eigenschaft auch <u>anti-linear</u> Hermitische Formen sind also antilinear bezüglich des zweiten Arguments.

(ii) Aus der zweiten Bedingung folgt, daß für jeden Vektor $x\in V$ der Wert h(x,x) mit seinem konjugiert komplexen übereinstimmt, d.h. es ist
$$h(x,x) \in \mathbb{R}$$
eine reelle Zahl.

(iii) Wie im Fall gewöhnlicher Bilinearformen kann man die Koordinaten-Abbildung
$$\varphi_v: \mathbb{C}^n \longrightarrow V, \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i v_i,$$

zu einer Basis $v_1,...,v_n$ verwenden, um den Vektorraum V mit dem $\mathbb{C}^n$ zu identifizieren. Die hermitischen Formen auf V entsprechen dabei geraden den durch eine hermitische Matrix definierten hermitischen Formen auf dem $\mathbb{C}^n$. Genauer: es besteht ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\varphi_v \times \varphi_v} & V \times V \\ A \downarrow & & \downarrow b \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\varphi_v} & V \end{array}$$

dessen horizontale Abbildungen bijektiv sind. Die hermitische Form b auf der rechten Seite definiert eine hermitische Form

$$x \mapsto x^T A \bar{y} \qquad (2)$$

links, wobei $A = M_v(b)$ gerade die Matrix von b bezüglich der Basis v ist. Umgekehrt definiert jede hermitische Matrix A durch (2) auf der linken Seite eine hermitische Form, die wiederum eine hermitische Form b recths definiert.

6.5.2 Hermitische Skalarprodukte

Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine hermitische Form

$$h: V \times V \to \mathbb{C}$$

heißt positiv definit, wenn

$$h(x,x) > 0$$

gilt für alle von Null verschiedenen Vektoren $x \in V$. Eine positiv definite hermitische Form heißt auch hermitisches Skalarprodukt.

Bemerkungen

(i) Hermitische Skalarprodukte sind eigentlich keine Skalarprodukte im von uns definiertem Sinne. Sie stellen eine spezielle Anpassung des Skalarprodukt-Begriffs an den Fall der komplexen Zahlen dar. Für die komplexe Analysis ist deshalb der Begriff des hermitischen Skalarprodukts bedeutsamer als der des Skalarprodukts.

(ii) Der Begriff des hermitischen Skalarprodukt läßt sich auf den Fall beliebiger Körper verallgemeinern (zum Begriff der sesqui-linearen Form, der $1\frac{1}{2}$ - fach linearen Form).

(iii) Wir werden zeigen, für hermitsche Skalarprodukte sind die sind von uns betrachteten Phänomene im wesentlichen dieselben wie für gewöhnliche Skalarprodukte über den reellen Zahlen.

(iv) Hermitische Skalarprodukte werden wir meistens mit $< \, , \, >$ bezeichnen. Zwei Vektoren x,y heißen orthogonal bezüglich eines gegebenen hermitischen Skalarproduktes, wenn gilt

$$<x, y> = 0.$$

Die Zahl

$$\|x\| := \sqrt{<x,x>}$$

heißt auch Länge des Vektors x. Man beachte, $\|x\|$ ist eine wohldefinierte reelle Zahl, da $<x,x>$ stets nicht-negativ ist.

(vi) Wie im Fall gewöhnlicher Skalarprodukte definiert man für jede Teilmenge $M \subseteq V$ eines komplexen Vektorraums mit Skalarprodukt deren orthogonales Komplement

$$M^{\perp} := \{v \in V \mid <v,m> = 0 \text{ für alle } m \in M\}$$

Beispiel

Die hermitische Form zur Einheitsmatrix ist ein hermitisches Skalarprodukt. Es heißt auch hermitisches Standard-Skalarprodukt des $\mathbb{C}^n$.

6.5.3 Orthonormalisierung

Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum mit hermitischen Skalarprodukt. Dann gibt es eine Basis $v_1,...,v_n$ von V mit

$$<v_i,v_j> = \delta_{ij}$$

für i,j = 1,...,n. Eine solche Basis heißt orthonormiert.

Beweis. Man wende das Orthogonalisierungsverfahren von 6.2.2 auf irgendeine Basis von V an.

QED.

Bemerkung: Orthonormalität und Standard-Skalarprodukt

Ist $v_1,...,v_n$ eine orthonormierte Basis, so läßt sich das Skalarprodukt von $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ und $y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$ wie folgt schreiben.

$$<x,y> = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\bar{y}_j <v_i,v_j> = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i = x^T\bar{y} ,$$

d.h. <x,y> läßt sich mit dem Standard-Skalarprodukt der zugehörigen Koordinatenvektoren identifizieren.

6.5.4 Unitäre Transformationen

Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum mit hermitischen Skalarprodukt <, >. Ein linearer Endomorphismus

$$f: V \longrightarrow V$$

heißt unitäre Transformation, wenn er das Skalarprodukt invariant läßt, d.h. wenn gilt

$$<f(x), f(y) > = < x, y > \qquad (1)$$

für beliebige $x, y \in V$.

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt unitäre Matrix , wenn eine der folgenden Äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

$$A\bar{A}^T = \mathrm{Id} \Leftrightarrow \bar{A}^T A = \mathrm{Id} \Leftrightarrow A^{-1} = \bar{A}^T.$$

Bemerkungen

(i) Weil die Charakteristik von $\mathbb{C}$ ungleich 2 ist, ist die definierende Bedingung (1) für unitäre Transformationen äquivalent zur Bedingung, daß
$$<f(x),f(x) > = <x, x >$$
gelten soll für alle $x \in V$.

(ii) Eine unitäre Transformation ist stets injektiv, denn für $x \neq 0$ gilt
$$< f(x), f(x) > = < x, x > \neq 0,$$
also $f(x) \neq 0$.
Damit ist aber jede unitäre Transformation sogar bijektiv, also ein Isomorphimus von komplexen Vektorräumen.

(iii) Die Zusammensetzung unitärer Transformationen ist unitär, die identische Abbildung ist eine unitäre Abbildung. Wie im Fall orthogonaler Transformationen zeigt man, die Umkehrung einer unitären Transformation ist unitär.

(iv) Wegen (iii) bilden die unitären Transformationen eine Gruppe, die unitäre Gruppe. Diese wird mit
$$U(V)$$

und im Fall $V = \mathbb{C}^n$ mit

$$U(n)$$

bezeichnet.

(v) Die unitäre Gruppe ist eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe,

$$U(V) \subseteq GL(V),\ U(n) \subseteq GL(n, \mathbb{C}).$$

6.5.5 Die Matrix einer unitären Transformation

Seien V ein komplexer Vektorraum mit hermitischen Skalarprodukt und der orthonormierten Basis

$$v_1,\dots, v_n \in V. \tag{1}$$

Weiter sei

$$f: V \longrightarrow V$$

ein linearer Endomorphismus. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) f ist eine unitäre Transformation.

(ii) $f(v_1),\dots, f(v_n)$ ist eine orthonormierte Basis von V.

(iii) Die Matrix $M_v(f)$ von f bezüglich der Basis (1) ist unitär.

Beweis. Man verwende die Argumente im Beweis von 6.2.9 (mit C = Id).
QED.

6.5.6 Der adjungierte Endomorphismus, Selbstadjungiertheit

Seien V und W ein endlich-dimensionale komplexe Vektorräume mit hermitischen Skalarprodukt < , > und

$$f: V \to W$$

eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Dann gibt es genau eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f^*: W \to V$ mit

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$$

für alle $x,y\in V$. Diese Abildung heißt zu f gehöriger <u>hermitisch adjungierter Endomorphismus</u> (bezüglich des gegebenen hermitischen Skalarprodukts). Die Abbildung f heißt <u>hermitisch selbstadjungiert</u>, falls sie mit ihrem adjungierten Operator übereinstimmt,

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

für alle $x,y\in V$ (und insbesondere ist V = W).

Beweis. Wir wählen orthonormierte Basen

$$v_1,\dots,v_m \in V \text{ und } w_1,\dots,w_n \in W,$$

welche nach 6.2.3 existieren, und betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{cccc} x & \mathbb{C}^m \xrightarrow{\varphi_V} V & \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} \overset{\varphi_V}{\mapsto} x_1v_1+\dots+x_mv_m \\ \downarrow & f_A\downarrow \quad \downarrow f & \\ Ax & \mathbb{C}^n \xrightarrow{\varphi_W} W & \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\varphi_W}{\mapsto} y_1v_1+\dots+y_nv_m \end{array}$$

mit $A = M^v_w(f)$. Die gesuchte Abbildung $f^*: W \longrightarrow V$ entspricht einer gesuchten Matrix B links, und die Existenz und Eindeutigkeit von f^* ist äquivalent zu Existenz und Eindeutigkeit dieser Matrix B.

Wir verwenden jetzt die Isomorphismen φ_v und φ_w und identifizieren jeden Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m \text{ und } \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

mit der zugehörigen Linearkombination der v_i bzw. w_j. Auf diese Weise wird f mit f_A und die gesuchte Abbildung f* mit f_B identifiziert, und die definierende Identität für den adjungierten Endomorphismus bekommt die Gestalt

$$< f_A(x), y > = < x, f_B(y) >,$$

d.h.

$$< Ax, y > = < x, By >.$$

Wir haben zu zeigen, zu gegebener Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ gibt es genau eine Matrix

$$B \in \mathbb{C}^{m\times n},$$

sodaß diese Identität besteht für alle $x \in \mathbb{C}^m$ und alle $y \in \mathbb{C}^n$. Da die Basen v und w von V und W orthonormierte Basen sind, handelt es sich bei den zugehörigen Skalarprodukten des $\mathbb{C}^m$ bzw. $\mathbb{C}^n$ gerade um die hermitischen Standard-Skalarprodukte. Die definierende Identität für den adjungierten Endomorphismus hat also die Gestalt

$$(Ax)^T\overline{y} = x^T\bullet\overline{By}$$

d.h.

$$x^TA^T\overline{y} = x^T\overline{B}\,\overline{y}. \qquad (1)$$

An dieser Stelle haben wir zwei Möglichkeiten, den Beweis fortzuführen.

<u>1. Möglichkeit</u>: Wenn y alle Vektoren des $\mathbb{C}^n$ durchläuft, so gilt dasselbe für $\overline{y}$. Die definierende Bedingung für den hermitisch adjungierten Endomorphismus läßt sich also in der Gestalt

$$x^TA^Ty = x^T\overline{B}\,y$$

schreiben. Betrachten wir stattdessen die Bedingung

$$x^TA^Ty = x^TC\,y.$$

Dies ist die Bedingung für den gewöhnlichen (nicht hermisch) adjungierten Endomorphsmus. Es gibt also genau ein C, so daß diese Bedingung für alle x und y erfüllt ist. Wir setzen $B = \overline{C}$. Dann gilt $\overline{B} = C$, also

$$x^TA^Ty = x^T\overline{B}\,y.$$

für alle x und y, und mit C ist auch B eindeutig bestimmt.

<u>2. Möglichkeit</u>. Wir setzen in (1)

$$x = e_i \text{ und } y = e_j.$$

Dann bedeutet (1) gerade, daß die Einträge von A und $\overline{B}$ in der Position (i,j) gleich sind. Da dies für alle i und j gelten muß, bekommt (1) die Gestalt

$$A^T = \overline{B},$$

d.h.

$$B = \overline{A}^T,$$

d.h. B existiert und ist eindeutig bestimmt.

QED.

6.5.7 Selbstadjungierte Endomorphismen und invariante Unterräume

Seien V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit hermitischem Skalarprodukt $< , >$ (und mit $\dim V < \infty$),

$$f: V \to V$$

ein selbstadjungierter Endomorphismus und

$$V' \subseteq V$$

ein f-invarianter Unterraum. Dann gilt:

(i) Die Einschränkung des Skalarprodukts $< , >$ auf V' ist ein hermitisches Skalarprodukt.

(ii) Die Einschränkung

$$f|_{V'}$$

von f auf V' selbstadjungiert.

Beweis: siehe 6.4.5.
QED.

6.5.8 Diagonalisierbarkeit selbstadjungierter Endomorphismen

Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit hermitischem Skalarprodukt $<,>$ und $f:V\to V$ ein hermitisch selbstadjungierter $\mathbb{C}$-linearer Endomorphismus. Dann besitzt V eine Eigenbasis bezüglich f (und die Haupträume stimmen mit den Eigenräumen überein).
Beweis. siehe 6.4.6 und 6.4.7.
QED.

6.5.9 Eigenwerte und Eigenvektoren selbstadjungierter Operatoren

Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit hermitischen Skalarprodukt $< , >$ und

$$f: V \to V$$

ein hermitisch selbstadjungierter Operator. Dann gilt

(i) Die Hauptraumzerlegung von V bezüglich f ist orthogonal, d.h. je zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander,

$$x' \in V_{c'} \text{ und } x'' \in V_{c''} \text{ und } c' \neq c'' \Rightarrow x' \perp x''.$$

(ii) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von f sind reell.

Beweis. Zu (i). siehe 6.4.9.
Zu (ii) i eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von f. Dann ist c eine komplexe Zahl. Da V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist, ist damit c auch ein Eigenwert von f, d.h. es gibt ein

$$v \in V - \{0\}$$

mit

$$f(v) = cv.$$

Damit gilt aber auch

$$c<v,v> = <cv, v> = <f(v), v> = <v,f(v)> = <v, cv> = \bar{c}\cdot<v,v>,$$

also

$$(c-\bar{c})<v,v> = 0.$$

Wegen $v\neq 0$ ist auch $<v,v>\neq 0$, d.h. es muß $c-\bar{c} = 0$ gelten, d.h.

$$c = \bar{c}.$$

Mit anderen Worten, c ist eine reelle Zahl.
QED.

6.5.10 Eigenbasen hermitisch selbstadjungierter Endomorphismen

Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit hermitischen Skalarprodukt <, > und $f:V\to V$ ein hermitisch selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine orthonormierte Basis von V, welche aus lauter Eigenvektoren von f besteht.

Beweis. Wie wir bereits wissen, fällt die Hauptraumzerlegung mit der Eigenraumzerlegung zusammen und diese ist eine orthogonale Zerlegung. Es genügt in jedem Eigenraum irgendeine orthonormierte Basis zu wählen. Zusammen bilden die so gewonnenen Vektoren eine Basis von V der gesuchten Art.
QED.

6.5.11 Diagonalisierung komplexer hermitischer Matrizen mit Hilfe unitärer Matrizen

Seien $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ eine hermitische Matrix. Dann gibt es eine unitäre Matrix $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ derart, daß

$$B^{-1}AB = \overline{B}^{T}AB$$

eine Diagonalmatrix ist.
Beweis. Weil die Matrix A hermitisch ist, ist die lineare Abbildung

$$f = f_A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n,\ x \mapsto Ax,$$

hermitisch selbstadjungiert bezüglich des hermitischen Standard-Skalarprodukts. Nach 6.5.10 gibt es eine orthonormierte Eigenbasis

$$v_1, \dots , v_n \in \mathbb{C}^n$$

bezüglich f. Die Matrix von f bezüglich dieser Basis,

$$M_v^v(f) = M_v^e(\mathrm{Id})\bullet M_e^e(f)\bullet M_e^v(\mathrm{Id}) = B^{-1}\bullet A\bullet B$$

hat Diagonalgestalt. Wir bezeichnen hier mit e die Standard-Basis des $\mathbb{C}^n$. Die Basis-wechsel-Matrix

$$B = M_e^v(\mathrm{Id})$$

hat als i-te Spalte

$$Be_i = M_e^v(\mathrm{Id})e_i = v_i$$

gerade den i-ten Basisvektor v_i, d.h. die Spalten von B bilden eine orthonormierte Basis des $\mathbb{C}^n$. Mit anderen Worten, die Matrix B ist unitär. Insbesondere gilt $B^{-1} = \overline{B}^T$.
QED.

6.6. Anwendungen auf den reellen Fall

6.6.1 Existenz von orthonormierten Eigenbasen

Seien V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum mit euklidischen Skalar-Produkt und

$$f: V \longrightarrow V$$

ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann besitzt V eine orthonormierte Eigenbasis.

Beweis. Zum Beweis reicht es zu zeigen, daß die Bedingungen von 6.3.9 erfüllt sind. Als euklidisches Skalarprodukt ist < , > positiv definit, also insbesondere anisotrop. Es reicht also zu zeigen, der Körper $\mathbb{R}$ ist groß genug, in dem Sinne, daß gilt

1. Das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren (so daß für V die Hauptraumzerlegung existiert).
2. Das Orthogonalisierungsverfahren gestattet es, die Haupträume mit orthonormierten Basen zu versehen.

Bedingung 2 ist erfüllt, weil < , > positiv definit ist und jede Quadratwurzel aus einer nicht-negativen reellen Zahl eine reelle Zahl ist.

Betrachten wir Bedingung 1. Dazu wählen wir eine orthonormiert Basis

$$v_1,...,v_n \in V$$

und verwenden diese, um V mit dem $\mathbb{R}^n$ zu identifizieren. Das Skalarprodukt von V wird dabei zum Standard-Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$. Außerdem ist die Matrix des selbstadjungierten Endomorphismus f bezüglich dieser Basis symmetrisch,

$$A := M_v(f) \text{ ist smmetrisch}$$

(vgl. 6.4.4). Es reicht also zu zeigen, das charakteristische Polynom einer reellen symmetrischen Matrix A zerfällt über den reellen Zahlen in Linearfaktoren.
Zum Beweis betrachten wir A als komplexe Matrix. Weil A symmetrisch und reell ist, ist A auch hermitisch und

$$f_A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, x \mapsto Ax,$$

ein hermitsch selbstadjungierter Endomorphismus. Die Eigenwerte von f_A sind aber nach 6.5.9(ii) reell, d.h. alle Nullstellen von

$$\chi_A(T)$$

sind reell. Mit anderen Worten $\chi_A(T)$ zerfällt über den reellen Zahlen in Linearfaktoren.
QED.

6.6.2 Diagonalisierung reeller symmetrischer Matrizen mit Hilfe von orthogonalen Matrizen

Seien $A\in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann gibt es eine orthogonale Matrix $B\in \mathbb{R}^{n\times n}$ derart, daß

$$BAB^{-1} = BAB^T$$

eine Diagonalmatrix ist.
Bemerkung
Die Matrix B kann man außderdem noch so wählen, daß sie eine positive Determinante besitzt

$$\det B > 0,$$

also eine Bewegung im $\mathbb{R}^n$ beschreibt. Ist nämlich

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

so ist auch SB orthogonal und mit BAB^T ist auch

$$(SB)A(SB)^T = S(BAB^T)S$$

eine Diagonalmatrix.

Beweis. Weil A symmetrisch ist, ist die Abbildung

$$f := f_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein selbstadjungierter Endomorphismus (bezüglich des Standard-Skalarprodukts). Nach 6.6.1 besitzt f_A eine orthonormierte Eigenbasis v. Die Matrix von f bezüglich dieser Basis

$$M^v_v(f) = M^v_e(\mathrm{Id})M^e_e(f)M^v_e(\mathrm{Id}) = BAB^{-1}$$

ist eine Diagonal-Matrix. Die Basiswechsel-Matrix

$$B = M^v_e(\mathrm{Id})$$

für den Übergang von der orthonormierten Basis v zur (orthonormierten) Standard-Basis e des $\mathbb{R}^n$ ist dabei orthogonal. Insbesondere gilt $B^{-1} = B^T$.
QED.

6.6.3 Hyperflächen und Quadriken, Multi-Index-Schreibweise

Sei K und V der K-Vektorraum

$$V = K^n$$

und

$$f(x_1,...,x_n) = \sum_{a_1+...+a_n\le m} c_{a_1,...,a_n}\cdot x_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n}$$

ein Polynom des Grades m. Wir schreiben f auch in der folgenden Gestalt (genannt <u>Multi-Index-Schreibweise</u>):

$$f(x) = \sum_{a\in\mathbb{N}^n,\ |a|\le m} c_a\cdot x^a,$$

d.h. für $x = (x_1,...,x_n)$ und $a = (a_1,...,a_n)$ setzen wir

$$x^a := x_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n} \text{ und } |a| = a_1+...+a_n.$$

Die Menge

$$V(f) := \{x\in K^n \mid f(x) = 0\}$$

heißt dann <u>Hyperfläche</u> des Grades

$$\deg f := \max\{|a| \mid c_a \ne 0\}.$$

mit der Gleichung f. Im Fall des Grades 2 und Char(K) $\ne$ 2 hat f die Gestalt

(1) $$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{k=1}^{n} b_kx_k + c$$

Wegen

$$a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}(x_ix_j + x_jx_i)$$

können wir annehmen, in (1) gilt $a_{ij} = a_{ji}$, d.h. $A := (a_{ij})$ ist eine symmetrische Matrix. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades läßt sich also in der Gestalt

$$f = (x_1,...,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}x_1\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix} + c$$

schreiben mit einer symmetrischen Matrix A und einem Spaltenvektor b. Eine Hyperfläche V(f), die durch ein Polynom dieser Gestalt gegeben ist, heißt auch <u>Quadrik</u>.

6.6.4 Die Hauptachsen-Transformation

Sei

$$Q = V(f) \subseteq \mathbb{R}^n$$

die Quadrik mit der Gleichung

$$f(y) = y^T Ay + b^T y + c$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

Nach 6.6.2 gibt es eine orthogonale Matrix S mit positiver Determinante (d.h. eine Drehung des Raumes) mit

$$A' := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Wir führen neue Koordinaten $y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}$ mit $y = Sy'$ ein. Die Hyperflächengleichung bekommt in den neuen Koordinaten die Gestalt

$$\begin{aligned} f'(y') &= y'^T S^T ASy' + b^T Sy' + c \\ &= y^T A'y' + b'^T y' + c \text{ mit } b' := S^T b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_r y_r^2 + b_1 y_1 + \dots + b_n y_n + c \end{aligned}$$

Wir nehmen dabei o.B.d.A. an, daß die ersten r der λ_i von Null verschieden und die letzten n-r gleich Null sind. Durch quadratische Ergängung, erreichen wir noch, daß die ersten n-1 der b_i Null werden. Genauer, wir führen eine Translation durch und führen neue Koordianten

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } x_i := \begin{cases} y_i + \dfrac{b_i}{2\lambda_i} & \text{für } i=1,\dots,r \\ y_i & \text{sonst} \end{cases}$$

ein. Die Gleichung der Quadrik bekommt damit die Gestalt

$$g(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + b_{r+1} y_{r+1} + \dots + b_n y_n + d$$

(mit $d \in \mathbb{R}$).

Der Fall der reellen Ebene (n = 2):

<u>Der Fall r = 2</u>: H: $g(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2 + d = 0$.

Je nach Vorzeichen der λ_i bekommt man eine Ellipse, eine Hyperbel, ein Geradenpaar (d = 0), eine doppelt zu zählende Gerade (d=0), einen Punk oder die leere Menge.
In den letzten beiden Fällen stellt man sich die Quadrik als zum größten Teil oder auch vollständig im Komplexen liegend vor.

<u>Der Fall r = 1</u>: H: $g(x) = \lambda_1 x_1^2 + b_2 x_2 + d = 0$.

Im Fall $b_2 \neq 0$ kann man durch eine weitere Translation erreichen, daß $d = 0$ wird. Man erhält eine Parabel.
Im Fall $b_2 = 0$ erhält man eine doppelt zu zählende Parallele zur x_2-Achse oder die leere Mengen. Im letzten Fall stellt man sich die Quadrik wieder als ganz im Komplexen liegend vor.
Der Fall $r = 0$: H: $g(x) = b_1x_1+b_2x_2 + d = 0$.
H ist keine Quadrik.

Bemerkungen

(i) Der Spezialfall zeigt, durch die am Anfang durchgeführte Drehung, sorgen wir dafür, daß die Hauptachsen der Quadrik parallel zu den Koordinanten-Achsen werden. Die Anschließende Translation sorgt dafür, daß der Mittelpunkt der Quadrik zum Ursprung des Koodinatensystem wird.
(ii) Für die höheren Dimensionen ist die Situation analog.
(iii) Die zur Vereinfachung der Gleichung einer Quadrik durchgeführte Bewegung heißt Hauptachsentransformation.

6.6.5 Beispiel

Sei $C := V(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ die ebene Kurve mit der Gleichung

$$f(x,y) := x^2 + 6xy + y^2 + 8x + 8y + 1 = 0,$$

Handelt es sich um eine Ellipse oder eine Hyperbel ?

Wir schreiben die Gleichung von f in der Gestalt

$$f(x,y) = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

und führen eine solche orthogonale Transformation durch, daß die Matrix A Diagonalgestalt bekommt.
Die Eigenwerte von A:

$$\det(A\text{-}T\cdot Id) = \det\begin{pmatrix} 1\text{-}T & 3 \\ 3 & 1\text{-}T \end{pmatrix} = (T-1)^2 - 9 = T^2 - 2T - 8.$$

$$c_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3$$

$$c_1 = 4,\ c_2 = -2$$

Bemerkung
An dieser Stelle wissen wir bereits, nach der Hauptachsentransformation hat die Gleichung der Quadrik die Gestalt

$$4\bullet x^2 - 2y^2 + \text{const} = 0$$

oder

$$-2\bullet x^2 + 4y^2 + \text{const} = 0$$

Es handelt sich also jedenfalls nicht um eine Ellipse. Ob wir eine Hyperbel erhalten, hängt vom Wert der Konstanten ab.

Die Eigenvektoren von A:
Der Eigenraum V_{c_1} zum Eigenwert $c_1 = 4$ hat die Gleichung

$$-3x + 3y = 0,$$

d.h. es gilt

$$V_{c_1} = \mathbb{R}\cdot\binom{1}{1}$$

Der Eigenraum V_{c_2} zum Eigenwert $c_2 = -2$ hat die Gleichung

$$3x + 3y = 0,$$

d.h. es gilt

$$V_{c_2} = \mathbb{R}\cdot\binom{1}{-1}$$

Als orthonormierte Eigenbasis können wir zum Beispiel die folgende verwenden.

$$v_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\binom{1}{1} \text{ und } v_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\binom{1}{-1}.$$

Bemerkung
Damit die Transformation eine Drehung wird, müßte man die Reihenfolge der beiden Vektoren vertauschen. Für die Frage ob wir eine Hyperbel erhalten oder nicht, spielt dies keine Rolle.

Bezeichen wir mit x' und y' die Koordinaten bezüglich dieser neuen Basis. Dann gilt

$$\binom{x}{y} = xe_1 + ye_2 = x'v_1 + y'v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{x'+y'}{x'-y'},$$

d.h.

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \text{ und } y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y').$$

In den neuen Koordinaten hat die Kurve C also die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \tfrac{1}{2}(x'+y')^2 + 3(x'+y')(x'-y') + (x'-y')^2 + \frac{16}{\sqrt{2}}x' + 1\\
&= \tfrac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2)\\
&\quad +3(x'^2-y'^2)\\
&\quad +\tfrac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + \frac{16}{\sqrt{2}}x' + 1\\
&= 4x'^2 - 2y'^2 + \frac{16}{\sqrt{2}}x' + 1\\
&= 4\left(x'+\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2y'^2 + 1 - 32\\
&= 4x''^2 - 2y''^2 - 31
\end{aligned}$$

Also ist C eine Hyperbel.

6.7 Schiefsymmetrische Bilinearformen

6.7.1 Definitionen

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Bilinearform auf V,

$$\omega: V \times V \to K$$

heißt antisymmetrisch oder schiefsymmetrisch, wenn gilt

$$\omega(v', v'') = -\omega(v'', v') \text{ für beliebige } v', v''\in V.$$

Sie heißt symplektisch, wenn sie außerdem nicht-entartet ist. Ein symplektischer Vektorraum ist ein K-Vektorraum, der mit einer symplektischen Bilinearform versehen ist.

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt schiefsymmetrisch, wenn gilt $A^T = -A$.

6.7.2 Schiefsymmetrische Bilinearformen und Matrizen

Seien V ein K-Vektorraum mit der Basis

$$v_1,\dots,v_n \in V$$

und

$$\omega: V \times V \to K$$

eine Bilinearform. Dann sind folgende Aussagen ´äquivalent.

(i) ω ist schiefsymmetrisch.

(ii) Die Matrix $M_v(\omega)$ von ω bezüglich der gegebenen Basis ist schiefsymmetrisch.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Es gilt

$$\omega(v_i , v_j) = - \omega(v_j,v_i),$$

d.h. die Matrix $M_v(\omega)$ der $\omega(v_i , v_j)$ ist schiefsymmetrisch.

(ii) ⇒ (i). Seien $v' = \sum_{i=1}^{n} x'_i v_i$ und $v'' = \sum_{i=1}^{n} x''_i v_i$ aus V. Dann gilt

$$\begin{aligned}\omega(v', v'') &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x'_i x''_j \omega(v_i , v_j)\\ &= - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x'_i x''_j \omega(v_j , v_i)\\ &= - \omega(v'',v'),\end{aligned}$$

d.h. ω ist schiefsymmetrisch.
QED.

6.7.3 Beispiel: der symplektische Standardraum der Dimension 2

Seien K ein Körper,

$$V = K^2,\ A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$$

und

$$\omega(x,y) = x^T A y.$$

Der Vektorraum V ist mit der Bilinearform ω ein symplektischer Raum. Er heißt 2-dimensionaler symplektischer Standardraum.

6.7.4 Beispiel: direkte Summe von symplektischen Räumen

Seien V' und V" zwei endlich-dimensionale symplektische K-Vektorräume mit den symplektischen Bilinearformen ω' bzw. ω''. Dann ist

$$V := V' \oplus V''$$

mit der Bilinearform

$$\omega: V\times V \to K,\ ((a', a''), (b', b'')) \mapsto \omega'(a', b') + \omega''(a'',b''),$$

ein symplektischer K-Vektorraum, welcher direkte Summe der beiden symplektischen Vektorräume V' und V" heißt (und mit $V' \oplus V''$ bezeichnet wird).

Beweis. Seien v' bzw. v" eine Basis von V' bzw. V". Dann bilden die beiden Basen zusammene eine Basis v von V, und durch direktes Nachrechnen sieht man

$$M_v(\omega) = \begin{pmatrix} M_{v'}(\omega') & 0 \\ 0 & M_{v''}(\omega'') \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist ω nicht-entartet und schiefsymmetrisch, also symplektisch.
QED.

6.7.5 Zerlegung in symplektische Standardräume

Sei V ein symplektischer K-Vektorraum der Dimension

$$n = \dim V \ (< \infty)$$

mit der symplektischen Bilinearform ω. Die Charakteristik von K sei ungleich 2,

$$\mathrm{char}\, K \neq 2.$$

Dann gibt es eine Basis v von V derart, daß $M_v(\omega)$ direkte Summe von Exemplaren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Insbesondere ist n gerade und V eine direkte Summe von 2-dimensionalen symplektischen Standardräumen.

Beweis. Wir können annehmen, $V \neq \{0\}$. Sei $v' \in V - \{0\}$ beliebig. Da ω nicht entartet ist, gibt es ein $v'' \in V$ mit

$$\omega(v', v'') \neq 0.$$

Durch Multiplikation von v" mit einem von Null verschiedenen Faktor können wir erreichen, daß gilt

$$\omega(v', v'') = 1. \qquad (1)$$

Dann gilt

$$\omega(v'', v') = -1 \qquad (2)$$

und $\omega(v', v') = - \omega(v',v')$. Da die Charakteristik von K ungleich zwei sein soll, folgt

$$\omega(v', v') = 0 \qquad (3)$$

und analog

$$\omega(v'', v'') = 0 \qquad (4)$$

Aus (1), (3) und (4) ergibt sich insbesondere, daß v' und v" nicht proportional sein können, d.h. es gilt

v' und v" sind linear unabhängig. (5)

Wir setzen

$$W = Kv'+Kv''$$

und

$$U := W^{\perp} = \{v \in V \mid \omega(v,w) = 0 \text{ für } w \in W\} = \{v \in V \mid \omega(v,v') = \omega(v,v'') = 0 \}$$

Dann gilt

$$\dim W = 2$$

und U ist gerade der Kern der linearen Abbildung

$$f: V \to K^2,\ v \mapsto (\omega(v,v''), \omega(v,v')),$$

Wegen $f(v') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f(v'') = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist f surjektiv, also

$$\dim U = \dim \ker f = \dim V - \dim \operatorname{im} f = \dim V - 2.$$

Die lineare Abbildung

$$g: W \oplus U \to V, (w, u) \mapsto w+u, \tag{6}$$

ist somit eine Abbildung zwischen Räumen gleicher Dimension. Für $(w,v) \in \ker(g)$ gilt

$$\begin{aligned} v = -w \in U \cap W &= \{u = x'v' + x''v'' \mid x',x'' \in K, 0 = \omega(u,v') = \omega(u,v'')\} \\ &= \{u = x'v' + x''v'' \mid x',x'' \in K, 0 = -x'' = x'\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

Der Kern von g ist somit trivial, d.h. g ist injektiv, d.h. g ist ein Isomorphismus. Nach Definition von U als orthogonales Komplement von W ist die Zerlegung (6) orthogonal. Mit ω sind deshalb auch die Einschränkungen $\omega|_W$ und $\omega|_U$ nicht-entartet (vgl. Bemerkung 6.1.8 (ii)), also symplektisch.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Basis u von U derart, daß gilt

$$M_u(\omega|_U) = \text{direkte Summe von Exemplaren von } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren v' und v" bilden dann zusammen mit den Vektoren von u eine Basis von V mit

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots \\ -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & M_u(\omega|_U) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus M_u(\omega|_U)$$

(vgl. (1) - (4)).

QED

6.7.6 Der Rang einer schiefsymmetrischen Bilinearform

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und

$$\omega: V \times V \to K$$

eine Bilinearform. Dann ist der Rang von ω definiert als Rang der Matrix von ω bezüglich irgendeiner Basis v von V:

$$\operatorname{rk}(\omega) = \operatorname{rk} M_v(\omega).$$

Bemerkungen

(i) Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Basis v. Das folgt zum Beispiel aus 6.1.4: für jede weitere Basis v' von V hat man

$$M_v(\omega) = B^T \cdot M_{v'}(\omega) \cdot B$$

mit einer umkehrbaren Matrix B.

(ii) Wir zeigen als nächstes, zwei schiefsymmetrische Bilinearformen lassen sich identifizieren, wenn sie denselben Rang haben. Der Rang einer schiefsymmetrischen Bilinearform ist in diesem Sinne deren einzige Invariante.

6.7.7 Klassifikation der schiefsymmetrischen Bilinearformen

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und

$$\omega: V \times V \to K$$

eine schiefsymmetrische Bilinearform. Bezeichne

$$V_0 := \{v \in V \mid \omega(v, v') = 0 \text{ für jedes } v' \in V\}$$

den <u>Entartungsraum</u> von ω. Dann gibt es einen K-linearen Unterraum $V'\subseteq V$ mit

1. $V = V_0 \oplus V'$
2. $\omega|_{V'}: V'\times V' \to K$ ist symplektisch.

Insbesondere gibt es eine Basis von v von V mit

$$M_v(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & Id_r & 0 \\ -Id_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit einer r×r-Einheitsmatrix Id_r. Die Zahl r ist unabhängig von der speziellen Wahl der Basis:

$$r = \frac{1}{2}\operatorname{rk}(\omega).$$

Beweis. Wir ergänzen eine Basis $v_1, \dots, v_s$ des Entartungsraums V_0 zu einer Basis

$$v_1, \dots, v_n \in V$$

von V und setzen

$$V' := v_{s+1}K + \dots + v_nK.$$

Dann ist Bedingung 1 erfüllt. Ist $v\in V'$ ein von Null verschiedenes Element, so liegt dieses Element wegen Bedingung 1 nicht im Entartungsraum, d.h. es gibt ein $\tilde{v}\in V$ mit

$$\omega(v, \tilde{v}) \neq 0.$$

Wegen Bedingung 1 gilt

$$\tilde{v} = \tilde{v}' + v' \text{ mit } \tilde{v}'\in V_0 \text{ und } v'\in V'.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} 0 \neq \omega(v, \tilde{v}) &= \omega(v, \tilde{v}') + \omega(v, v') \\ &= -\omega(\tilde{v}',v) + \omega(v, v') \quad \text{(weil } \omega \text{ schiefsymmetrisch ist)} \\ &= \omega(v, v') \quad \text{(wegen } \tilde{v}'\in V_0). \end{aligned}$$

Damit ist aber ω auf V' nicht entartet, also symplektisch. Damit ist Bedinung 2 erfüllt. Insbesondere zerfällt V' in eine direkte Summe von symplektischen Standard-Räumen der Dimension 2. Sei

$$v'_1, v'_2, \dots, v'_{2r-1}, v'_{2r}$$

eine entsprechende Basis von V'. Dann ist

$$v'_1, v'_3, \dots, v'_{2r-1}, v'_2, v'_4, \dots, v'_{2r}, v_1, \dots, v_s$$

eine Basis, bezüglich welcher die Matrix von ω die angegebene Gestalt hat. Der Rang dieser Matrix ist trivialerweise gleich

$$\operatorname{rk}(\omega) = 2r.$$

QED.

6.7.8 Normalformen schiefsymmetrischer Matrizen

Für jede schiefsymmetrische Matrix $A\in K^{n\times n}$ gibt es eine umkehrbare Matrix B mit

$$B^T A B = \begin{pmatrix} 0 & Id_r & 0 \\ -Id_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei hängt der Rang r der Einheitsmatrix Id_r nicht von der speziellen Wahl von B ab und ist gleich

$$r = \frac{1}{2} rk(A).$$

Beweis. Folgt aus 6.7.7 und Bemerkung (i) von 6.7 6.
QED.

6.8 Das Tensorprodukt

Das Tensorprodukt ist der theoretisch anspruchvollste Gegenstand dieser Vorlesung. Bei der Einführung des Tensorprodukts ist man in einer ähnlichen Situation wie bei der Einführung der Determinante: man kann zwar eine geschlossene Formel dafür angeben, aber diese ist so aufwendig in der Handhabung, daß man sie in praktischen Situationen nie benutzt, man verwendet sie nur für theoretische Betrachtungen.

Beim Tensorprodukt ist die explizite Beschreibung nicht einmal für theoretische Zwecke sinnvoll. Sie ist nur von Nutzen beim Beweis für die Existenz des Tensorprodukts.

6.8.0 Vorbemerkungen

(i) Unser Ziel ist die Betrachtung von bilinearen Abbildungen

$$b: U\times V \to W$$

mit beliebigen K-Vektorräumen U, V und W, d.h. von Abbildungen f mit

$$f(c'u'+c''u'', v) = c'\cdot f(u',v) + c''\cdot f(u'',v)$$
$$f(u, c'v' + c''v'') = c'\cdot f(u,v') + c''\cdot f(u,v'')$$

für beliebige $u,u',u''\in U$, $v,v',v''\in V$ und $c',c''\in K$.

(ii) Genauer, wir wollen die allgemeinste Art von Abbildung dieser Gestalt finden, die es für diese Räumen geben kann.

(iii) Dabei ist die konkrete Konstruktion dieser Abbildung nicht besonders schön, relativ kompliziert und genaugenommen nicht so wichtig. Wichtiger ist ihre Eigenschaft, die ‘allgemeinste’ Abbildung zu sein und die Tatsache, daß es eine solche Bilinearform gibt.

(iv) Wir werden deshalb wie folgt vorgehen.

1 beschreiben zunächst, was wir unter der ‘allgemeinsten’ bilinearen Abbildung verstehen wollen, indem wir deren sogenannte <u>Universalitätseigenschaft</u> angeben.
2. Wir zeigen, durch diese Eigenschaft ist die Konstruktion bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
3. Wir beweisen unter der Annahme, daß das Konstrukt stets existiert, dessen wichtigste Eigenschaften.
4. Erst ganz zum Schluß werden wir zeigen, daß das Konstrukt tatsächlich existiert.

Zunächst wollen wir zur Illustration unserer Vorgehensweise eine ähnlich gelagerte Problemstellung betrachten, deren Lösung wir im wesentlichen bereits kennen.

6.8.1 Beispiel für eine Universalitätseigenschaft

Für jede K-lineare Abbildung $f:U \to V$ wollen wir eine K-lineare Abbildung

$$\rho:V \to \mathrm{Coker}(f)$$

konstruieren, welche natürliche Abbildung auf den <u>Kokern</u> von f heißt. Dabei sollen folgende Bedingungen erfüllt sein.

1. $\rho \circ f = 0$.
2. Für jede K-lineare Abbildung $g:V \to W$ mit $\rho \circ g = 0$ soll es genau eine K-lineare Abbildung $\tilde{g}$: Coker(f) $\to$ W geben mit $g = \tilde{g} \circ f$, mit anderen Worten, eine solche lineare Abbildung, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[dl, "\tilde{g}"] \\ W & \end{tikzcd}$$

Bemerkungen zum Begriff der Universalitätseigenschaft

(i) Nach Bedingung 1 ist ρ eine Abbildung mit $\rho \circ f = 0$. Offensichtlich hat jede Zusammensetzung

$$V \xrightarrow{\rho} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{h} W$$

mit einer beliebigen (linearen) Abbildung h ebenfalls diese Eigenschaft,.

(ii) Bedingung 2 besagt gerade, daß man durch Zusammensetzen mit solchen Abbildungen h sämtliche Abbildungen bekommt deren Zusammensetzung mit f Null ist. Und zwar auf genau eine Weise (d.h. verschiedene h liefern verschiedene Zusammensetzungen).

(iii) Genauer: für jeden K-Vektorraum W sei

$$C(W) := \{ g: V \longrightarrow W \mid g \text{ ist K-linear und } g \circ f = 0 \}.$$

Die Universalitätseigenschaft con Coker(f) besagt dann gerade, daß die folgende Abbildung bijektiv ist.

$$\mathrm{Hom}_K(\mathrm{Coker}(f), W) \longrightarrow C(W), \tilde{g} \mapsto \tilde{g} \circ \rho.$$

(iv) Anders ausgedrückt bedeutet Bedingung 2 bedeutet gerade, daß die Abbildung ρ in dem Sinne 'universell' ist, daß man aus ihr jede andere Abbildung mit der Eigenschaft 1 gewinnen kann, und zwar auf genau eine Weise. Man sagt in einer solche Situation, ρ ist <u>universell</u> bezüglich Eigenschaft 1 oder auch, 2 ist eine <u>Universalitätseigenschaft</u>.

(v) Die obige Beschreibung des Raumes

$$\mathrm{Coker}(f)$$

entspricht gerade dem ersten Schritt, wie wir ihn für das Tensorprodukt angekündigt haben. Wir zeigen hier zunächst, daß Coker(f) durch die obigen beiden Eigenschaften bereits bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Anschließend beweisen wir die Existenz von (ρ und) Coker(f).

<u>Die Eindeutigkeit von Coker(f) bis auf Isomorphie</u> ei eine weitere K-lineare Abbilduug

$$\rho': V \to C'$$

gegeben, für welche die Bedingungen 1 und 2 mit C' anstelle von C := Coker(f) erfüllt sind.

Dann gilt $\rho'\circ f = 0$. Auf Grund der Eigenschaft 2 von ρ faktorisiert sich ρ' eindeutig über ρ,

$$\rho': V \xrightarrow{\rho} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\tilde{\rho}'} C',$$

d.h. es gibt genau eine K-lineare Abbildung $\tilde{\rho}'$ mit $\rho' = \tilde{\rho}'\circ\rho$.
Da auch ρ' die Universalitätseigenschaft 2 besitzt und $\rho\circ f = 0$ gilt, faktorisiert sich auch ρ eindeutig über ρ',

$$\rho: V \xrightarrow{\rho'} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\tilde{\rho}} C',$$

d.h. es gibt genau eine K-lineare Abbildung $\tilde{\rho}$ mit $\rho = \tilde{\rho}\circ\rho$.

Damit erhalten wir kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho'"'] & C \arrow[dl, "\tilde{\rho}'"] \\ C' & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho'"'] & C \\ C' \arrow[ur, "\tilde{\rho}"'] & \end{tikzcd}$$

und durch Zusammensetzen dieser Dreiecke weiterhin kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C \\ C \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho'"] \arrow[d, "\rho'"'] & C' \\ C' \arrow[ur, "u'"'] & \end{tikzcd}$$

mit $u := \tilde{\rho}\circ\tilde{\rho}'$ und $u' := \tilde{\rho}'\circ\tilde{\rho}$. Auf Grund von Eigenschaft 2 ist die Abbildung u durch die Kommutativität des ersten Diagramms aber eindeutig bestimmt. Da das Diagramm kommutativ bleibt, wenn man u durch die identische Abbildung ersetzt, folgt

$$\tilde{\rho}\circ\tilde{\rho}' = u = \mathrm{Id}.$$

Dieselbe Argumentation mit dem zweiten Diagramm liefert

$$\tilde{\rho}'\circ\tilde{\rho} = u = \mathrm{Id}.$$

Mit anderen Worten, $\tilde{\rho}$ und $\tilde{\rho}'$ sind zueinander inverse Isomorphismen und die Räume C und C' sind isomorph (sogar in eindeutig bestimmter Weise!).

<u>Existenz von Coker(f)</u>. Wir setzen

$$\mathrm{Coker}(f) := V/\mathrm{Im}(f)$$

und verwenden für ρ die natürliche Abbildung

$$\rho: V \to V/\mathrm{Im}(f),\ v \mapsto v + \mathrm{Im}(f),$$

auf den Faktorraum,

$$\rho(v) := v + \mathrm{Im}(f).$$

Dann ist Bedingung 1 offensichtlich erfüllt. Beweisen wir, daß auch 2 gilt. Sei also eine K-lineare Abbildung

$$g: V \to W$$

gegeben mit $g\circ f = 0$. Wir haben zu zeigen, es gibt genau eine K-lineare Abbildung

$$\tilde{g}: V/\mathrm{Im}(f) \to W$$

mit $\tilde{g}\circ f = g$. Falls $\tilde{g}$ existiert, so muß gelten,

$$\tilde{g}(v+Im(f)) = \tilde{g}(f(v)) = g(v),$$

mit andern Worten, der Wert von $\tilde{g}$ an der Stelle v+Im(f) ist eindeutig bestimmt.

Wir haben noch die Existenz von $\tilde{g}$ zu beweisen. Wir setzen

(*) $$\tilde{g}(v+Im(f)) := g(v).$$

Falls wir zeigen können, daß diese Definition korrekt ist, so sind wir fertig, denn dannn gilt

$$\tilde{g}(f(v)) = g(v) \text{ für alle } v\in V$$

(und offensichtlich ist $\tilde{g}$ eine lineare Abbildung).

Beweisen wir die Korrektheit der Definition (*). Seien $v,v'\in V$ zwei Vektoren mit

$$v + Im(f) = v' + Im(f).$$

Wir haben zu zeigen, daß dann $g(v) = g(v')$ gilt. Auf Grund der Voraussetzung gilt

$$v-v' \in Im(f).$$

Wegen $g\circ f = 0$ gilt $g|_{Im(f)} = 0$, d.h.

$$0 = g(v-v') = g(v) - g(v'),$$

also $g(v) = g(v')$.

QED.

Bemerkung

Wir haben damit die natürliche Abbildung $\rho: V \longrightarrow V/Im(f)$, $v \mapsto v + Im(f)$, für jede lineare Abbilung $f: U \longrightarrow V$ durch eine Universalitätseigenschaft charakterisiert. Ist $U\subseteq V$ ein linearer Unterraum und $f: U \hookrightarrow V$ die natürliche Einbettung, so erhalten wir gerade die folgende Charakterisierung der natürlichen Abbildung

$$\rho : V \longrightarrow V/U,\ v \mapsto v + U.$$

Es gilt der <u>Homomorphie-Satz</u>:

1. $U \subseteq Ker(\rho)$.
2. Eine lineare Abbildung $g: V \longrightarrow W$ faktorisiert sich genau dann über ρ, wenn $U \subseteq Ker(g)$ gilt.
3. Die Faktorisierung von g über ρ ist, falls sie existiert eindeutig.

6.8.2 Definition des Tensorprodukts zweier K-Vektorräume

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Das <u>Tensorprodukt</u> von V und W ist ein K-Vektoraum

$$V\otimes W = V\otimes_K W$$

zusammen mit einer K-bilinearen Abbildung

$$\rho=\rho_{V,W}: V\times W \to V\otimes W,\ (v,w) \mapsto \rho(v,w) =: v\otimes w$$

wobei folgende Bedingung erfüllt ist.

(⊗) Jede K-bilineare Abbildung $b:V\times W\to U$ mit Werten in einem K-Vektorraum U faktorisiert sich eindeutig über ρ,

$$b: V \times W \xrightarrow{\rho} V\otimes W \xrightarrow{\tilde{b}} U,$$

d.h. es gibt genau eine K-lineare Abbildung $\tilde{b}$ mit $b = \tilde{b}\circ\rho$.

Mit anderen Worten, es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\rho"'] & U \\ V\otimes W \arrow[ur, "\tilde{b}"'] & \end{tikzcd}$$

mit einer linearen Abbildung $\tilde{b}$, und diese lineare Abbilding $\tilde{b}$ ist durch die Kommutativität dieses Diagramms eindeutig bestimmt.

Die Elemente von $V\otimes W$ heißen Tensoren.

Bemerkungen

(i) Setzt man die bilineare Abbildung $\rho:V\times W\to V\otimes W$ mit einer linearen Abbildung $V\otimes W\to U$ zusammen, so erhält man trivialerweise eine bilineare Abbildunge $V\times W\to U$. Bedingung $(\otimes)$ besagt gerade, daß man auf diese Weise jede auf $V\times W$ definierte bilineare Abbildung erhält erhält, und zwar jede auf genau eine Weise.

(ii) Bedingung $(\otimes)$ ist äquivalent zu der Aussage, daß die folgende lineare Abbildung bijektiv ist.

$$\mathrm{Hom}_K(V\otimes W,U) \to L(V,W,U),\ \tilde{b} \mapsto \rho\circ \tilde{b}.$$

Dabei bezeichne

$$L(V,W;U)$$

den Vektorraum der über K bilinearen Abbildungen $V\times W\to U$.

(iii) Wir zeigen als nächstes, daß das Tensorprodukt, falls es existiert, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Danach werden wir die wichtigsten Eigenschaften des Tensorprodukt unter der Annahme, daß es existiert, ableiten. Seine Existenz beweisen wir ganz zum Schluß.

6.8.3 Eindeutigkeit des Tensorprodukts bis auf Isomorphie

Seien V,W zwei K-Vektorräume und

$$b\colon V\times W \to U \text{ und } b'\colon V\times W \to U'$$

zwei bilineare Abbildungen, welche die Eigenschaft $(\otimes)$ eines Tensorprodukts besitzen. Dann gibt es genau einen K-linearen Isomorphismus $f:U\to U'$, für welchen das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "b"] \arrow[d, "b'"'] & U \arrow[dl, "f", "\cong"'] \\ U' & \end{tikzcd}$$

d.h. es gilt $b' = f\circ b$.

Beweis. Auf Grund der Universalitätseigenschaft $(\otimes)$ von b gibt es zumindest eine K-lineare Abbildung $f:U\to U'$ mit der geforderten Eigenschaft,

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "b"] \arrow[d, "b'"'] & U \arrow[dl, "f"] \\ U' & \end{tikzcd}$$

Weiterhin gibt es aber auch (auf Grund der Universaltätseigenschaft $(\otimes)$ von b') eine K-lineare Abbildung f' sodaß

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "b"] \arrow[d, "b'"'] & U \\ U' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Durch Zusammensetzen dieser kommutativen Dreiecke erhalten wir kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "b'"'] & U' \\ U' \arrow[ur, "u'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "b"] \arrow[d, "b"'] & U \\ U \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

mit $u := f\circ f'$ und $u' := f'\circ f$. Auf Grund der Eindeutigkeitsaussage von $(\otimes)$ sind die linearen Abbildungen u und u' durch die Kommutativität dieser Diagramme eindeutig festgelegt. Da die Diagramme aber kommutative bleiben, wenn man u und u' durch die identischen Abbildungen ersetzt, gilt

$$f\circ f' = u = Id \text{ und } f'\circ f = u' = Id.$$

Die Abbildungen f und f' sind folglich zueinander inverse Isomorphismen.
QED.

Bemerkungen

(i) Aus der obigen Argumentation ergibt sich, daß jede K-lineare Abbildung f, für welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "b"] \arrow[d, "b'"'] & U \arrow[dl, "f"] \\ U' & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, automatisch ein Isomorphismus ist.

(ii) Im folgenden nehmen wir an, daß das Tensorprodukt zweier K-Vektorräume V und W stets existiert. Das Bild des Paares $(v,w)\in V\times W$ bei der natürlichen Abbildung

$$\rho = \rho_{V,W}: V\times W \to V\otimes W$$

bezeichnen wir wie in der Definition mit $v\otimes w$, d.h. die natürliche Abbildung soll gerade die Abbildungsvorschrift

$$V\times W \to V\otimes W,\ (v,w) \mapsto v\otimes w.$$

haben. Die Bilinearität der natürlichen Abbildung ρ bedeutet gerade, daß die folgenden Rechenregeln gelten.

(a) $(v'+v'')\otimes w = v'\otimes w + v''\otimes w$

(b) $v\otimes(w'+w'') = v\otimes w' + v\otimes w''$

(c) $(cv)\otimes w = c(v\otimes w) = v\otimes(cw)$

für beliebige $v,v',v''\in V$, $w,w',w''\in W$, $c\in K$.

Wir beweisen als nächstes die wichtigsten Eigenschaften des Tensorprodukts.

6.8.4 Ein Erzeugendensystem für $V\otimes W$

Seien $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ Erzeugendensysteme der K-Vektorräume V bzw. W. Dann bilden die Vektoren der Gestalt

$$v_i \otimes w_j$$

mit $i\in I$ und $j\in J$ ein Erzeugendensystem des Vektorraums $V\otimes W$.

Beweis. Sei

$$U := < v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J > \subseteq V\otimes W$$

der von den Vektoren $v_i\otimes w_j$ erzeugte K-lineare Unterraum. Jeder Vektor $v\in V$ ist Linearkombination der v_i und jeder Vektor $w\in W$ ist Linearkombination der w_j . Also ist $v\otimes w$ Linearkombination der $v_i\otimes w_j$. Mit anderen Worten, für jedes $v\in V$ und jedes $w\in W$ gilt

$$v\otimes w \in U.$$

Die Abbildungsvorschrift der natürlichen Abbildung

$$\rho\colon V \times W \to V\otimes W, (v,w) \mapsto v\otimes w$$

definiert also auch eine bilineare Abbildung

$$b\colon V\times W \to U, (v,w) \mapsto v\otimes w.$$

Insbesondere hat man ein kommutatives Diagramm

(1)
$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\rho"'] & U \arrow[dl, "i"] \\ V\otimes W & \end{tikzcd}$$

wenn

$$i\colon U \to V\otimes W$$

die natürliche Einbettung bezeichnet. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, die natürliche Einbettung i ist surjektiv, denn dann gilt

$$V\otimes W = U = <u_i\otimes v_j \mid i\in I, j\in J>.$$

Weil b bilinear ist, ergibt sich aus der Universalitätseigenschaft von ρ die Existenz einer linearen Abbildung $\tilde{b}$, für welches das Diagramm

(2)
$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\rho"'] & U \\ V\otimes W \arrow[ur, "\tilde{b}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, d.h. mit

$$\tilde{b}(v\otimes w) = v\otimes w.$$

Durch Zusammensetzen der Diagramme (1) und (2) erhalten wir ein kommutatives Diagramm

(2)
$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & V\otimes W \\ V\otimes W \arrow[ur, "i\circ\tilde{b}"'] & \end{tikzcd}$$

Auf Grund der Eindeutigkeitsaussage der Universalitätseigenschaft von ρ muß dann aber

$$i\circ\tilde{b} = \mathrm{Id}$$

gelten. Für jedes t ⊗ V⊗W gilt also

$$t = \mathrm{Id}(t) = i(\tilde{b}(t)) \in \mathrm{Im}(i),$$

d.h. es ist

$$\mathrm{Im}(i) = V\otimes W.$$

Die natürliche Einbettung $i : U \to V\otimes W$ ist somit surjektiv.
QED.

6.8.5 Eigenschaften des Tensorprodukts von Vektorräumen

Seien U, V, W beliebige K-Vektorräume. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Es gibt genau eine K-lineare Abbildung $V\otimes K\to V$ mit

$$v\otimes c \mapsto cv.$$

Diese ist ein Isomorphismus

$$V\otimes K \cong V.$$

(ii) Es gibt genau eine K-lineare Abbildung $V\otimes W \to W\otimes V$ mit

$$v\otimes w \mapsto w\otimes v.$$

Diese ist ein Isomorphismus,

$$V\otimes W \cong W\otimes V$$

(iii) Es gibt genau eine K-lineare Abbildung $U\otimes(V\otimes W) \to (U\otimes V)\otimes W$ mit

$$u\otimes(v\otimes w) \mapsto (u\otimes v)\otimes w.$$

Diese ist ein Isomorphismus

$$U\otimes(V\otimes W) \cong (U\otimes V)\otimes W..$$

(iv) Es gibt genau eine bilineare Abbildung $U\otimes(V\oplus W) \to (U\otimes V)\oplus(U\otimes W)$ mit

$$u\otimes(v,w) \mapsto (u\otimes v, u\otimes w).$$

Diese ist ein Isomorphismus

$$U\otimes(V\oplus W) \cong (U\otimes V)\oplus(U\otimes W)..$$

Beweis. Zu (i). Wir betrachten die bilineare Abbildung

$$m: V\times K \to V, (v,c) \mapsto cv.$$

Zeigen wir, diese Abbildung besitzt die Eigenschaft (⊗) des Tensorprodukts.

Sei also $b: V\times K \to P$ eine bilineare Abbildung. Wir haben zu zeigen, diese Abbildung faktorisiert sich eindeutig über m,

$$b: V \times K \xrightarrow{m} V \xrightarrow{\tilde{b}} P,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{b}$ mit $b = \tilde{b}\circ m$.

Eindeutigkeit von $\tilde{b}$. Für jedes $v\in V$ gilt, falls $\tilde{b}$ existiert,

$$\tilde{b}(v) = \tilde{b}(1\cdot v) = \tilde{b}(m(v,1)) = b(v,1).$$

Mit anderen Worten $\tilde{b}$ ist durch b eindeutig festgelegt.

Existenz von $\tilde{b}$.
Wir setzen

$$\tilde{b}(v) := b(v,1) \text{ für jedes } v \in V.$$

Weil b bilinear ist, ist auf diese Weise eine lineare Abbildung

$$\tilde{b}: V \longrightarrow P$$

definiert. Für beliebige $(v, c) \in V \times K$ gilt

$$\tilde{b}(m(v, c)) = \tilde{b}(cv) = b(cv, 1) = c\bullet b(v,1) = b(v, c\bullet 1) = b(v,c).$$

Wir haben gezeigt, $b = \tilde{b}\circ m$, d.h. $\tilde{b}$ ist die Abbildung mit der geforderten Eigenschaft.

Wir haben gezeigt, die oben definierte Abbildung m besitzt die Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts. Auf Grund von Bemerkung 6.8.3 (i) gibt es genau einen Isomorphismus

$$\tilde{m}: V\otimes K \longrightarrow V,$$

für welchen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V\times K \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\rho"'] & V \\ V\otimes K \arrow[ur, "\tilde{m}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Auf Grund der Kommutativität dieses Diagramms gilt aber

$$\tilde{m}(v\otimes c) = \tilde{m}(\rho(v,c)) \; 0 \; m(v,c) = cv,$$

d.h. $\tilde{m}$ ist der Isomorphismus, dessen Existenz in Aussage (i) behauptet wird.

<u>Zu (ii)</u>. Betrachten wir die Abbildung

$$b: V\times W \to W\otimes V,\ (v,w) \mapsto w\otimes v.$$

Nach Bemerkung 6.8.3 (ii) ist diese Abbildung bilinear. Deshalb faktorisiert sich diese Abbildiung eindeutig über das Tensorprodukt $V\otimes W$,

$$b: V \times W \xrightarrow{\rho} V\otimes W \xrightarrow{f} W\otimes V,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung f mit $b = f\circ\rho$, d.h.

$$f(v\otimes w) = f(\rho(v,w)) = b(v,w) = w\otimes v.$$

Wir haben noch zu zeigen, die lineare Abbildung

$$f: V\otimes W \to W\otimes V,\ v\otimes w \mapsto w\otimes v.$$

ist ein Isomorphismus. Aus Symmetriegründen gibt es aber auch genau eine K-lineare Abbildung

$$f': W\otimes V \to V\otimes W,\ w\otimes v \mapsto v\otimes w$$

Damit gilt

$$(f\circ f')(w\otimes v) = w\otimes v$$

und

$$(f'\circ f)(v\otimes w) = v\otimes w,$$

für beliebige $v \in V$ und $w \in W$.

Die Abbildungen $f\circ f'$ und $f'\circ f$ wirken auf einem Erzeugendensystem von $W\otimes V$ bzw. $V\otimes W$ wie die identische Abbildung, sind also selbst identische Abbildungen. Also sind f und f' zueinaner inverse Isomorphismen.

<u>Zu (iii)</u>. Betrachten wir die Abbildung wir für vorgegebens $w \in W$ die Abbildung

$$U\times V \to U\otimes(V\otimes W),\ (u,v) \mapsto u\otimes(v\otimes w).$$

Diese Abbildung ist bilinear, faktorisiert sich also über das Tensorprodukt $U\otimes V$,

$$U \times V \xrightarrow{\rho} U\otimes V \xrightarrow{f_w} U\otimes(V\otimes W),$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung f_w, deren Zusammensetzung mit ρ gerade die vorgegebene Abbildung ist, d.h. eine lineare Abbildung f_w mit

$$f_w(u\otimes v) = f_w(\rho(u,v)) = u\otimes(v\otimes w).$$

Untersuchen wir, in welcher Weise die lineare Abbildung

$$f_w\colon U\otimes V \to U\otimes(V\otimes W),\ u\otimes v \mapsto u\otimes(v\otimes w),$$

von $w \in W$ abhängt, d.h. betrachten wir die Abbildung

$$f\colon(U\otimes V)\times W \to U\otimes(V\otimes W),\ (t, w) \mapsto f_w(t).$$

Diese Abbildung ist linear in t. Zeigen wir, daß sie auch linear in w ist, d.h. daß gilt

$$f_{c'w'+c''w''}(t) = c'f_{w'}(t) + c''f_{w''}(t).$$

Zumindest stehen auf beiden Seiten der zu beweisenden Identität K-lineare Abbildungen

$$\varphi\colon U\otimes V \to U\otimes(V\otimes W)$$

und die Abbildung auf der linken Seite ist durch die folgende Bedinungung eindeutig festgelegt:

$$\varphi(u\otimes v) = u\otimes(v\otimes(c'w'+c''w'')).$$

Zum Beweis der Gleichheit reicht es folglich, wenn wir zeigen, die Abbildung auf der rechten Seite genügt derselben Bedingung. Sei also φ die Abbildung auf der rechten Seite. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(u\otimes v) &= c'f_{w'}(u\otimes v) + c''f_{w''}(u\otimes v)\\
&= c'\cdot u\otimes(v\otimes w') + c''u\otimes(v\otimes w'')\\
&= u\otimes c'\cdot(v\otimes w') + u\otimes c''\cdot(v\otimes w'')\\
&= u \otimes (v\otimes c'w') + u \otimes (v\otimes c''w'')\\
&= u \otimes (v\otimes c'w' + v\otimes c''w'')\\
&= u \otimes (v\otimes(c'w'+c''w''))
\end{aligned}$$

Damit ist Bilinearität der Abbildung f gezeigt. Die Abbildung f faktorisiert sich damit über das Tensorprodukt $(U\otimes V)\otimes W$,

$$f\colon (U\otimes V)\times W \xrightarrow{\rho} (U\otimes V)\otimes W \xrightarrow{g} U\otimes(V\otimes W),$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung g mit $f = g\circ\rho$, d.h. mit

$$g(t\otimes w) = g(\rho(t, w)) = f(t, w) = f_w(t).$$

Da die Abbildung f_w bereits durch ihre Werte in den Vektoren der Gestalt $t = u\otimes v$ eindeutig festgelegt ist, gilt dasselbe für g, wobei

$$g((u\otimes v)\otimes w) = f_w(u\otimes v) = u\otimes(v\otimes w)$$

ist. Wir haben damit gezeigt, es gibt genau eine K-lineare Abbildung

$$g\colon (U\otimes V)\otimes W \to U\otimes(V\otimes W)$$

mit $g((u\otimes v)\otimes w) = u\otimes(v\otimes w)$. Wir haben noch zu zeigen, diese Abbildung ist ein Isomorphismus.

Eine ganz ähnliche Argumentation wie die eben angeführte zeigt, es gibt genau eine Abbildung

$$h: U\otimes(V\otimes W) \to (U\otimes V)\otimes W$$

mit

$$h(u\otimes(v\otimes w)) = (u\otimes v)\otimes w$$

für alle $u\in U$, $v\in V$, $w\in W$. Die beiden Formeln für g und h zeigen, die beiden Zusammensetzungen sind lineare Abbildungen

$$g\circ h: U\otimes(V\otimes W) \to U\otimes(V\otimes W)$$
$$h\circ g: (U\otimes V)\otimes W \to (U\otimes V)\otimes W$$

mit

$$g\circ h(u\otimes(v\otimes w)) = u\otimes(v\otimes w)$$

und

$$h\circ g((u\otimes v)\otimes w) = (u\otimes v)\otimes w$$

für alle $u\in U$, $v\in V$,$w\in W$. Nach 6.8.4 bilden aber die Vektoren der Gestalt

$$u\otimes(v\otimes w) \text{ bzw. } (u\otimes v)\otimes w$$

ein Erzeugendensystem des Vektorraums $U\otimes(V\otimes W)$ bzw. $(U\otimes V)\otimes W$. Die beiden Zusammensetzungen stimmen also auf einem Erzeugendensystem mit der identischen Abbildung überein, sind also gleich der identisdchen Abbildung. Wir haben gezeigt, g und h sind zueinander inverse Isomorphismen.

Zu (iv). Betrachten wir die Abbildung

$$f: U\times(V\oplus W) \to (U\otimes V)\oplus(U\otimes W),\ (u, (v,w)) \mapsto (u\otimes v, u\otimes w).$$

Auf Grund der Bilinearität von $\otimes$ ist f ebenfalls bilinear:

$$\begin{aligned}
f(c'u' + c''u'',(v,w)) &= ((c'u' + c''u'')\otimes v, (c'u' + c''u'')\otimes w)\\
&= (c'u'\otimes v + c''u''\otimes v, c'u'\otimes w + c''u''\otimes w)\\
&= (c'u'\otimes v, c'u'\otimes w) + (c''u''\otimes v, c''u''\otimes w)\\
&= c'f(u',(v,w)) + c''f(u'', (v,w))\\
f(u, c'(v',w') + c''(v'',w'')) &= f(u, (c'v'+c''v'',c'w'+c''w''))\\
&= (u\otimes(c'v'+c''v''), u\otimes(c'w'+c''w''))\\
&= (c'u\otimes v' + c''u\otimes v'', c'u\otimes w' + c''u\otimes w'')\\
&= c'(u\otimes v', u\otimes w') + c''(u\otimes v'', u\otimes w'')\\
&= c'f(u, (v',w')) + c''f(u, (v'',w''))
\end{aligned}$$

Damit ist die Bilinearität von f bewiesen. Die Abbildung faktorisiert sich also eindeutig über die natürliche Abbildung ins Tensorprodukt $U\otimes(V\oplus W)$,

$$f: U \times (V\oplus W) \xrightarrow{\rho} U\otimes(V\oplus W) \xrightarrow{\tilde{f}} (U\otimes V)\oplus(U\otimes W),$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{f}$ mit $f = \tilde{f}\circ\rho$, d.h. mit

$$\tilde{f}(u\otimes(v,w)) = \tilde{f}(\rho(u, (v,w))) = f(u, (v,w)) = (u\otimes v, u\otimes w)$$

Wir haben noch zu zeigen, die lineare Abbildung

$$\tilde{f}: U\otimes(V\oplus W) \to (U\otimes V)\oplus(U\otimes W), \tag{3}$$
$$u\otimes(v,w) \mapsto (u\otimes v, u\otimes w),$$

ist eine Isomorphismus. Dazu reicht eis zu zeigen, es gibt eine lineare Abbildung

$$\tilde{g}: (U\otimes V)\oplus(U\otimes W) \to U\otimes(V\oplus W), \tag{4}$$
$$(u'\otimes v',u''\otimes w'') \mapsto u'\otimes(v',0) + u''\otimes(0,w'')$$

und die beiden Zusammensetzungen

$$\tilde{g}\circ\tilde{f};\ U\otimes(V\oplus W) \longrightarrow U\otimes(V\oplus W) \qquad (5)$$

$$u\otimes(v,w) \mapsto (u\otimes v,u\otimes w) \mapsto u\otimes(v,0)+u\otimes(0,w) = u\otimes(v,w)$$

$$\tilde{f}\circ\tilde{g}\colon (U\otimes V)\oplus(U\otimes W) \mapsto (U\otimes V)\oplus(U\otimes W) \qquad (6)$$

$$(u'\otimes v',u''\otimes w'') \mapsto u'\otimes(v',0) + u''\otimes(0,w'') \mapsto (u'\otimes v,0)+(0,u''\otimes w'')=(u'\otimes v',u''\otimes w'')$$

sind gerade die Identischen Abbildungen.
Abbildung (5) ist dabei ganz offensichtlich die identische Abbildungen, denn bei (5) wird ein Erzeugendensystem von $U\otimes(V\oplus W)$ genauso abgebildet wie bei der identischen Abbildung. Um zu zeigen, auch (6) ist die identische Abbildung, reicht es zu zeigen, die Einschränkung von (6) auf jeden der beiden direkten Summanden ist die identische Abbildung. Diese beiden Einschränkungen bilden aber jeweils ein Erzeugendensystem so ab wie die identische Abbildung:

$$U\otimes V \to U\otimes V\ ,\ u\otimes v \mapsto u\otimes v \text{ bzw. } U\otimes W\to U\otimes W,\ u\otimes w \mapsto u\otimes w.$$

Wir haben somit nur noch zu zeigen, daß die lineare Abbildung (4) existiert. Dazu wiederum reicht es zu zeigen, daß die beiden Einschränkungen auf die beiden direkten Summanden existieren:

$$U\otimes V \to U\otimes(V\oplus W),\ u\otimes v \mapsto u\otimes(v, 0),$$

$$U\otimes W \to U\otimes(V\oplus W),\ u\otimes w \mapsto u\otimes(0,w).$$

Diese beiden letzten Abbildungen existieren aber wegen der Universalitätseingenschaft des Tensorprodukts und der Bilinearität der beiden folgenden Abbildungen.

$$U\times V \to U\otimes(V\oplus W),\ (u, v) \mapsto (u\otimes v, 0),$$

$$U\times W \to U\otimes(V\oplus W),\ (u, w) \mapsto (0, u\otimes w).$$

QED.

6.8.6 Eigenschaften des Tensorprodukts von Elementen

Seien V und W zwei K-Vektorräume und $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ zwei Familien von Elementen auf V bzw. W. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Sind die v_i in V und die w_j in W lineare unabhängig, so sind es auch die $v_i\otimes w_j$ in $V\otimes W$.

(ii) Bilden die v_i ein Erzeugendensystem von V und die w_j eines von W, so bilden die $v_i\otimes w_j$ eines $V\otimes W$.

(iii) Bilden die v_i eine Basis von V und die w_j eine von W, so bilden die $v_i\otimes w_j$ eine $V\otimes W$.

Bemerkungen
Aussage (iii) bietet die Möglichkeit, die Existenz des Tensorproduktes zu beweisen: Man wähle in V und W jeweils eine Basis (v_i) bzw. (w_j) und definere $V\otimes W$ als den Raum mit der Basis $\{v_i\otimes w_j\}$. Man hat dann allerdings die Unabhängigkeit der Konstruktion von der Wahl der Basen zu beweisen. Unser Beweis wird von vornherein unabhängig von jeder Basis sein.

Beweis. Aussage (ii) wurde bereit bewiesen (vgl. 6.8.4). Aussage (iii) folgt aus (i) und (ii). Es reicht also, Aussage (i) zu beweisen.

Zum Beweis von (i) können wir die Familien $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ zu Basen von V bzw. W ergänzen, d.h. wir können annehmen,

$(v_i)_{i\in I}$ ist eine Basis von V

$(w_j)_{j\in J}$ ist eine Basis von W.

Für den weiteren Beweis benutzen wir eine Konstruktion, die wir vor langer Zeit eingeführt haben: den von einer Menge frei erzeugte Vektorraum.

Wiederholung:
In 3.2.8 haben wir gezeigt, zu jeder beliebigen Menge M gibt es einen K-Vektorraum, der diese Menge als Basis besitzt und welcher mit

$$F(M) := F_K(M)$$

bezeichnet wird.

Als Menge M verwenden wir hier die Menge aller Paare

$$M := \{(v_i, w_j) \mid i\in I, j\in J\}$$

von Vektoren unserer Ausgangsbasen. Der Vektorraum

$$F(M) = \{ \sum_{i\in I, j\in J} c_{ij}(v_i, w_j) \mid c_{ij}\in K, \text{ fast alle } c_{ij} = 0\}$$

besteht dann aus allen endlichen Linearkombinationen

$$u = \sum_{i\in I, j\in J} c_{ij}(v_i, w_j)$$

von solchen Paaren, wobei die Koeffizienten $c_{ij} = c_{ij}(u)$ durch u eindeutig festgelegt sind. Betrachten wir die Abbildung

$$\varphi: V\times W \to F(M), (\sum_{i\in I} c_i v_i , \sum_{j\in J} d_j w_j) \mapsto \sum_{i\in I, j\in J} c_i d_j(v_i, w_j).$$

Diese Abbildung ist bilinear. Als bilineare Abbildung faktorisiert sich φ über die natürlichen Abbildung $\rho=\rho_{V,W}: V\times W \longrightarrow V\otimes W$,

$$\varphi: V\times W \xrightarrow{\rho} V\otimes W \xrightarrow{\tilde\varphi} F(M),$$

d.h. es gibt genau einer lineare Abbildung $\tilde\varphi$ mit $\varphi = \tilde\varphi\circ\rho$, d.h. mit

$$\tilde\varphi(v\otimes w) = \tilde\varphi(\rho(v,w)) = \varphi(v, w).$$

Insbesondere gilt

$$\tilde\varphi(v_i\otimes w_j) = \varphi(v_i,w_j) = (v_i,w_j)$$

Wären nun die Vektoren $v_i\otimes w_j$ linear abhängig in $V\otimes W$, so müßten es auch deren Bilder bei der linearen Abbildung $\tilde\varphi$ sein. Die (v_i,w_j) sind aber nach Definition von F(M) linear unabhängig.
QED.

6.8.7 Die Koordinaten eines Tensors

Seien V und W zwei K-Vektorräume und

$$(v_i)_{i\in I} \text{ und } (w_j)_{j\in J}$$

Basen von V bzw. W. Dann läßt sich jeder Tensor

$$t \in V\otimes W$$

in der Gestalt

$$t = \sum_{i\in I, J\in J} c^{ij}\, v_i\otimes w_j$$

schreiben mit eindeutig bestimmten $c^{ij}\in K$. die c^{ij} heißen Koordinaten des Tensors t bezüglich der gegebenen Basen.

Sind endlich viele K-Vektorräume

$$V_1 , \dots , V_r$$

gegeben und für jedes i eine Basis

$$\{ v_{j,i} \}_{j\in J_i}$$

von V_i so hat man für jeden Tensor

$$t\in V_1 \otimes \dots \otimes V_r$$

eindeutig bestimmte Elemente

$$c^{i_1 i_2 \dots i_r}\in K$$

mit

$$t = \sum_{i_1\in J_1,\dots,i_r\in J_r} c^{i_1 i_2\dots i_r}\, v_{i_1,1}\otimes\dots\otimes v_{i_r,r} .$$

Die $c^{i_1 i_2\dots i_r}$ heißen dann Koordinaten des Tensors t bezüglich der gegebenen Basen.

6.8.8 Das Verhalten der Koordinaten bei Basiswechsel

Seien

$$V_1 , \dots , V_r$$

endlich viele K-Vektorräume und seien für jedes i $\in\{1,\dots,r\}$ zwei Basen

$$v_i := \{ v_{j,i} \}_{j\in J_i} \qquad v'_i := \{ v'_{j,i} \}_{j\in J_i}$$

von V_i gegeben. Wir betrachten die Koordinaten eines Tensors

$$t\in V_1 \otimes \dots \otimes V_r$$

bezüglich der beiden Familien von Basen:

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i_1\in J_1,\dots,i_r\in J_r} c^{i_1 i_2\dots i_r} v_{i_1,1}\otimes\dots\otimes v_{i_r,r} \\ &= \sum_{i_1\in J_1,\dots,i_r\in J_r} c'^{i_1 i_2\dots i_r} v'_{i_1,1}\otimes\dots\otimes v'_{i_r,r}. \end{aligned}$$

Bezeichne A := M(Id) = $(a^i_{j\ell})$ die Basiswechelsmatrix für den Übergang der Basis v_ℓ zur Basis v'_ℓ,

$$v_{j,\ell} = \sum_{\alpha\in J_\ell} a^{\alpha}_{j\,\ell}\, v'_{\alpha,\ell}$$

Dann besteht zwischen den gestrichenen und den ungestrichenen Koordinaten von t die folgende Relation.

$$c'^{i_1\dots i_r} = \sum_{\alpha_1\in J_1,\dots,\alpha_r\in J_r} a^{i_1}_{\alpha_1,1}\cdot\ldots\cdot a^{i_r}_{\alpha_r,r}\, c^{\alpha_1\dots\alpha_r}$$

Beweis. Es gilt

$$t = \sum_{i_1\in J_1,\dots,i_r\in J_r} c^{i_1\dots i_r} v_{i_1,1}\otimes\ldots\otimes v_{i_r,r}$$

$$= \sum_{i_1\in J_1,\dots,i_r\in J_r} c^{i_1 i_2\dots i_r}\Big(\sum_{\alpha_1\in J_1} a^{\alpha_1}_{i_1,1} v'_{\alpha_1,1}\Big)\otimes\ldots\otimes\Big(\sum_{\alpha_r\in J_r} a^{\alpha_r}_{i_r,r} v'_{\alpha_r,r}\Big)$$

$$= \sum_{i_1\in J_1,\dots,i_r\in J_r}\ \sum_{\alpha_1\in J_1,\dots,\alpha_r\in J_r} a^{\alpha_1}_{i_1,1}\cdot\ldots\cdot a^{\alpha_r}_{i_r,r}\, c^{i_1 i_2\dots i_r}\, v'_{\alpha_1,1}\otimes\ldots\otimes v'_{\alpha_r,r}$$

Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung.
QED.

6.8.9 Bemerkungen zum den Tensoren der Physik

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum,

$$v_1,\dots,v_n\in V \qquad (1)$$

eine Basis von V und

$$v^1,\dots,v^n\in V^* \qquad (2)$$

die zugehörige duale Basis. Bezeichne

$$V^{\otimes r}\ \text{bzw.}\ V^{*\otimes s}$$

die r-te Tensorpotenz von V bzw. die s-te Tensorpotenz von V*, d.h. das Tensorprodukt von r Exemplaren des Raumes V (bzw. s Exemplaren des Raumes V*). Ein r-fach kovarianter und s-fach kontravarianter Tensor im ist ein Element von

$$V^{\otimes r}\otimes V^{*\otimes s},$$

wobei man sich den Tensor durch dessen Koordinaten bezüglich der Basen (1) und (2) gegeben denkt.

Bemerkung

Seien

$$v'_1,\dots,v'_n\in V$$

eine zweite Basis von V,

$$v'^1,\dots,v'^n\in V^*$$

die zugehörige duale Basis und $A = M^{v}_{v'}(\mathrm{Id}) = (a^i_j)$ die Basiswechselmatrix für den Übergang von v nach v', d.h.

$$v_i = \sum_{\alpha=1}^{n} a_i^\alpha \, v'_\alpha .$$

Bezeichne $B = (b_j^i)$ die zu B inverse Matrix (d.h. die Basiswechselmatrix $B = M_v^{v'}(\mathrm{Id})$.
Dann gilt

(1) $$v^j = \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha^j \, v'^\alpha$$

Für die Koordinaten eines Tensors $t \in V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$,

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i_1 \in J_1,\dots,i_r \in J_r} c_{j_1\dots j_s}^{i_1 i_2\dots i_r} v_{i_1} \otimes\dots\otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes\dots\otimes v^{j_s} \\ &= \sum_{i_1 \in J_1,\dots,i_r \in J_r} c'^{i_1 i_2\dots i_r}_{j_1\dots j_s} v'_{i_1} \otimes\dots\otimes v'_{i_r} \otimes v'^{j_1} \otimes\dots\otimes v'^{j_s}. \end{aligned}$$

besteht dann die folgende Relation.

$$c'^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} = \sum_{\alpha_1,\beta_1 \in J_1,\dots,\alpha_r,\beta_r \in J_r} a_{\alpha_1}^{i_1} \cdot\ldots\cdot a_{\alpha_r}^{i_r} \, b_{j_1}^{\beta_1} \cdot\ldots\cdot b_{j_r}^{\beta_r} \, c_{\beta_1\dots\beta_s}^{\alpha_1\dots\alpha_r}$$

Beweis. Nach 6.8.8 reicht es (1) zu beweisen, d.h.es reicht zu zeigen, die rechte Seite von (1) genügt den definierenden Bedingungen für die duale Basis. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle v_i , \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha^j v'^\alpha \rangle &= (\sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha^j v'^\alpha)(v_i) = (\sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha^j v'^\alpha)(\sum_{\beta=1}^{n} a_i^\beta v'_\beta) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} b_\alpha^j a_i^\beta v'^\alpha(v'_\beta) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} b_\alpha^j a_i^\beta \delta_\beta^\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha^j a_i^\alpha \\ &= \delta_i^j \end{aligned}$$

Damit ist (1) bewiesen, und damit die Behauptung.
QED.
Bemerkungen
(i) In der Physik betrachtet man im allgemeinen Koordinatenwechsel zwischen "krummlinigen Koordinaten", sagen wir

$$(x'^1 , \dots , x'^n) = f(x^1,\dots,x^n).$$

An die Stelle der Matrix $A = (a_j^i)$ tritt dann die Matrix der Linearisierung von f,

$$a_j^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$$

Für die Matrix $B = A^{-1}$ gilt dann (nach der Kettenregel)

$$b^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}.$$

(ii) Einsteinsche Summenkonvention. In jedem Ausdruck, in welchen ein und derselbe Index sowohl als oberer als auch als unterer Index auftritt, wird über diesen Index summiert (maximaler Summationsbereich).

Unter Verwendung dieser Konvention hätten wir in den obigen Rechnungen sämtliche Summenzeichen weglassen können.

6.8.10 Die Existenz des Tensorprodukts

Für je zwei K-Vektorräume V und W existiert das Tensorprodukt.

Vorbemerkung. Wir haben gesehen, falls das Tensorprodukt $V\otimes W$ existiert, so wird es von den Tensoren $v\otimes w$ mit $v\in V$ und $w\in W$ erzeugt. Mit anderen Worten, $V\otimes W$ ist ein Faktorraum des von den Vektoren $v\otimes w$ frei erzeugten Vektoraums. Wir nutzen jetzt diese Tatsache zur Konstruktion von $V\otimes W$, d.h. wir werden $V\otimes W$ als Faktorraum eines frei erzeugten Vektorraums definieren. Anstelle der Bezeichnung $v\otimes w$ werden wir für die Elemente des frei erzeugten Vektorraum das Symbol (v,w) wählen.

Beweis. Sei M die Menge $V\times W$ der Paare (v,w) mit $v\in V$ und $w\in W$,

$$M = V\times W.$$

Betrachten wir den von M frei erzeugten K-Vektorraum

$$F(M).$$

Dieser Vektorraum besteht aus allen endlichen K-Linearkombinationen von Paaren der Gestalt (v,w) mit $v\in V$ und $w\in W$,

$$c_1\cdot(v_1,w_1) + ... + c_r\cdot(v_r,w_r)$$

mit $c_i\in K$, $v_i\in V$, $w_i\in W$ für i = 1,...,r.

Bemerkung. Man beachte, F(M) ist unendlich-dimensional, sobald M unendlich viele Elmente enthält, d.h. selbst wenn V und W endliche Dimension haben, kann die Dimension von F(M) unendlich sein, denn nach Konstruktion bilden die Elemente von M gerade eine Basis von F(M),

$$\dim F(M) = \# M.$$

Wir konstruieren jetzt den Unterraum R, nach den wir den Raum F(M) faktorisieren wollen. Der Raum R werde von allen Vektoren der folgenden Gestalt erzeugt.

$$((v, w' + w'') - (v,w') - (v,w'') \text{ mit } v\in V,\ w',w''\in W \tag{1}$$

$$(v' + v'', w) - (v',w) - (v'',w) \text{ mit } v',v''\in V,\ w\in W \tag{2}$$

$$(cv, w) - c(v,w) \text{ mit } c\in K,\ v\in V,\ w\in W \tag{3}$$

$$(v, cw) - c(v,w) \text{ mit } c\in K,\ v\in V,\ w\in W. \tag{4}$$

Dabei schreiben wir vereinfachend (v,w) anstelle von $1\cdot(v,w)$ und -(v,w) anstelle von (-1)•(v, w) für $v\in V$, $w\in W$.

Bemerkung. Dieser Unterraum R ist im allgemeinen ebenfalls sehr groß. Wir werden sehen, er ist so groß, daß der Faktoraum F(M)/R im Fall von endlich-dimensionalen Räumen endlich-dimensional wird.

Wir setzen

$$V\otimes W := F(M)/R.$$

Bezeichne

$$\gamma: F(M) \to F(M)/R$$

die natürliche Abbildung. Weiter setzen wir

$$v\otimes w := \gamma((v,w)).$$

Wir haben zu zeigen, die Abbildung

$$\varphi := \gamma|_{V\times W}: V\times W \to F(M)/R, (v,w) \mapsto \gamma((v,w)) = v\otimes w$$

ist bilinear und hat die Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts.

Linearität von φ bezüglich des ersten Arguments. Wir haben zu zeigen

1. $\varphi(v'+v'', w) - \varphi(v',w) - \varphi(v'',w) = 0.$
2. $\varphi(cv,w) - c\cdot\varphi(v,w) = 0.$

Die linke Seite von 1. ist gleich

$$\varphi(v'+v'', w) - \varphi(v',w) - \varphi(v'',w) \quad = \gamma((v'+v'',w) - (v',w) - (v',w))$$

Das Argument von γ auf der rechten Seite ist gerade ein Element der Gestalt (2), liegt also im Unterraum R. Da der Kern von γ gerade der Unterraum R ist, steht auf der rechten Seite der Nullvektor.

Die linke Seite von 2. ist gleich

$$\varphi(cv,w) - c\cdot\varphi(v,w) = \gamma((cv,w) - c\cdot(v,w))$$

Das Argument von γ auf der rechten Seite ist gerade ein Element der Gestalt (3), liegt also im Unterraum R. Da der Kern von γ gerade der Unterraum R ist, steht auf der rechten Seite der Nullvektor.

Linearität von φ bezüglich des zweiten Arguments. Man verwendet dieselben Argumente wie beim Beweis der Linearität bezüglich der ersten Variablen, wobei man die Elemente der Gestalt (1) und (4) von R (anstelle der Elemente der Gestalt (2) und (3)) benutzt.

Die Unversalitätseigenschaft der Abbildung φ. Wir haben zu zeigen, jede K-lineare Abbildung

$$b: V\times W \to U$$

faktorisiert sich eindeutig über die Abbildung φ, d.h. zu gegebenen b gibt es genau ein lineare Abbildung $\tilde{b}: F(M)/R \to U$ mit

$$b(v,w) = \tilde{b}(\varphi(v,w)) \tag{5}$$

für alle $v\in V$ und alle $w\in W$.

Beweis der Eindeutigkeit von $\tilde{b}$.Nach Konstruktion bilden die Vektoren der Gestalt (v,w) ein Erzeugendensystem von F(M). Deshalb bilden die Bilder der (v,w) bei der natürlichen Surjektion

$$\gamma: F(M) \to F(M)/R$$

ein Erzeugendensystem von F(M)/R, d.h. die Elemente

$$\gamma((v,w)) = \varphi(v,w) \text{ mit } v\in V \text{ und } w\in W$$

bilden ein Erzeugendensystem von F(M)/R. Bedingung (5) (rückwärts gelesen) legt daher die Werte von $\tilde{b}$ auf einem Erzeugendensystem von F(M)/R fest. Da $\tilde{b}$ linear sein soll, ist damit die gesamte Abbildung $\tilde{b}$ festgelegt.

Bemerkungen zum weiteren Beweis-Verlauf.

(i) Zum Beweis der Existenz von $\tilde{b}$ könnten wir (5) als Definition verwenden und dann die Korrektheit der Definition beweisen. Obwohl man auf diese Weise durchaus zum Ziel kommt, wollen wir hier anders vorgehen, um die bereits bewiesenen Aussagen etwas effektiver nutzen zu können.

(ii) Aus der Existenz der Abbildung $\tilde{b}$: F(M)/R $\to$ U folgt natürlich auch die Existenz der Zusammensetzung von $\tilde{b}$ mit der natürlichen Abbildung γ:F(M) $\to$ F(M)/R. Wir werden von dieser Zusammensetzung ausgehen und mit deren Hilfe die Existenz von $\tilde{b}$ beweisen.

<u>Beweis der Existenz von</u> $\tilde{b}$. Betrachten wir die K-lineare Abbildung

$$b': F(M) \to U \text{ mit } (v,w) \mapsto b(v,w).$$

Da die Paare der Gestalt (v,w) eine Basis von F(M) bilden, gibt es genau eine lineare Abbildung, die für jedes v$\in$V und jedes w$\in$W im Basisvektor (v,w) $\in$ F(M) den vorgegebenen Wert b(v,w) annimmt.

Zum Beweis der Existenz von $\tilde{b}$ reicht es zu zeigen, der Unterraum R$\subseteq$F(M) liegt im Kern von b',

$$R \subseteq \ker(b'), \tag{6}$$

denn auf Grund der von uns bewiesenen Universalitätseigenschaft des Faktorraums faktorisiert sich dann b' in eindeutiger Weise über die natürliche Abbildung γ:F(M)$\to$F(M)/R (vgl. die Bemerkung am Ende von 6.8.1),

$$b': F(M) \xrightarrow{\gamma} F(M)/R \xrightarrow{\tilde{b}'} U,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{b}'$ mit b' = $\tilde{b}'\circ\gamma$, d.h. mit

$$b(v,w) = b'((v,w)) = \tilde{b}'(\gamma(v,w)) = \tilde{b}'(\varphi(v,w)).$$

Die Abbildung

$$\tilde{b}': F(M)/R \to U, (v,w) + R \mapsto b(v,w)$$

ist somit gerade die von uns gesuchte Abbildung $\tilde{b}$.

Wir haben noch (6) zu beweisen. Dazu reicht es zu zeigen, die Abbildung b' bildet die Elemente eines Erzeugendensystems von R in die Null ab. Es genügt somit zu zeigen, daß die Elemente der Gestalt (1), (2), (3), (4) bei b' in die Null abgebildet werden. Das ist aber gerade eine Folge der Bilinearität von b. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} &b'((v, w' + w'') - (v,w') - (v,w'')) \\ &\quad = b'(v, w' + w'') - b'(v,w') - b'(v,w'') \\ &\quad = b(v, w' + w'') - b(v,w') - b(v,w'') \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

Das erste Gleichheitszeichen besteht auf Grund der Linearität von b', das zweite nach Definition von b' und das dritte wegen der Liniearität von b bezüglich des zweiten Arguments.

QED.

Bemerkung

Im Fall endlich-dimensionaler Vektorräume V und W ist der Existenzbeweis für das Tensorprodukt einfacher. Die Definition des Tensorprodukt besagt gerade, V$\otimes$W ist ein Vektorraum mit

$$\mathrm{Hom}_K(V\otimes W, K) = L(V,W;K).$$

Mit anderen Worten, der zu V$\otimes$W duale Vektorraum ist gerade L(V,W,K). Da man im Fall von endlich-dimensionalen Räumen das doppelte Dual eines Vektorraum mit dem Ausgangsraum identifizieren kann, folg

$$V\otimes W = L(V,W;K)^*$$

für $\dim V < \infty$ und $\dim W < \infty$. Dies kann man im endlich-dimensionalen Fall als Definition verwenden. Es ist nicht schwer, einzusehen, daß $L(V,W;K)^*$ bezüglich der bilinearen Abbildung

$$V\times W \to L(V,W; K)^*, (v,w) \mapsto (b \mapsto b(v,w))$$

tatsächlich die Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts hat.

6.8.11 Die Funktorialität des Tensorprodukts

(i) Seien $f: V\to V'$ und $g: W\to W'$ zwei K-lineare Abbildungen. Dann gibt es genau eine K-lineare Abbildung $f\otimes g$,für welche das folgenden Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "f\times g"] \arrow[d, "\rho_{V,W}"'] & V'\times W' \arrow[d, "\rho_{V',W'}"] \\ V\otimes W \arrow[r, "f\otimes g"] & V'\otimes W' \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{ccc} (v,w) & \mapsto & (f(v),g(w)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ v\otimes w & \mapsto & f(v)\otimes g(w) \end{array}$$

Mit anderen Worten, $f\otimes g$ ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit

$$(f\otimes g)(v\otimes w) = f(v)\otimes g(w) \text{ für } v\in V \text{ und } w\in W.$$

(ii) Für beliebige K-lineare Abbildungen $f: V\to V'$, $f':V'\to V''$, $g:W\to W'$, $g':W'\to W''$ gilt

$$(f'\otimes g')\circ(f\otimes g) = (f'\circ f)\otimes(g'\circ g).$$

(iii) Das Tensorprodukt der beiden identischen Abbildungen

$$Id_V : V \to V \text{ und } Id_W: W \to W$$

ist die identische Abbildung von $V\otimes W$,

$$Id_V\otimes Id_W = Id_{V\otimes W} .$$

Beweis. Zu (i). Da f und g linear sind und $\rho_{V',W'}$ bilinear ist, ist die Zusammensetzung

$$\rho_{V',W'}\circ(f\times g)$$

bilinear. Die Existenz und Eindeutigkeit von $f\otimes g$ folgt deshalb aus der Universalitätseigenschaft von $\rho_{V,W}$.

Zu (ii). Für $v\in V$ und $w\in W$ gilt

$$\begin{aligned} ((f'\otimes g')\circ(f\otimes g))(v\otimes w) &= (f'\otimes g')(f(v)\otimes g(w)) \\ &= f'(f(v))\otimes g'(g(w)) \\ &= (f'\circ f(v))\otimes(g'\circ g(w)) \\ &= ((f'\circ f)\otimes(g'\circ g))(v\otimes w). \end{aligned}$$

Die beiden linearen Abbildungen $(f'\otimes g')\circ(f\otimes g)$ und $(f'\circ f)\otimes(g'\circ g)$ haben für alle Vektoren der Gestalt $v\otimes w$ mit $v\in V$ und $w\in W$ denselben Wert. Da die $v\otimes w$ ein Erzeugendensystem von $V\otimes W$ bilden, folgt

$$(f'\otimes g')\circ(f\otimes g) = (f'\circ f)\otimes(g'\circ g).$$

Zu (iii). Für $v\in V$ und $w\in W$ gilt

$$(Id_V\otimes Id_W)(v\otimes w) = (Id_V(v))\otimes(Id_W(w)) = v\otimes w,$$

d.h. die lineare Abbildung $Id_V \otimes Id_W$ hat auf allen Vektoren des Erzeugendensystems

$$\{v\otimes w\}_{v\in V, w\in W}$$

dieselben Werte wie die identische Abbildung $Id_{V\otimes W}$. Deshalb gilt

$$Id_V \otimes Id_W = Id_{V\otimes W}.$$

QED.

6.8.12 Exake Sequenzen

Eine <u>exakte Sequenz</u> von Vektorräumen und linearen Abbildungen ist eine Folge von linearen Abbildungen

$$... \to V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} V_{i+2} \to ...$$

mit

$$\text{Im } f_i = \text{Ker } f_{i+1} \text{ für alle i.}$$

Falls diese Gleichheit nur für ein gegebenes i gilt, so sagt man die Sequenz ist <u>exakt</u> an der Stelle V_{i+1}.

Beispiel 1
Die Sequenz von linearen Abbildungen

$$0 \to V' \xrightarrow{f'} V \xrightarrow{f''} V'' \to 0$$

ist genau dann exakt, wenn folgenden Bedingungen erfüllt sind.
1. f' ist injektiv (Exaktheit an der Stelle V')
2. Im f' = Ker f'' (Exaktheit an der Stelle V)
3. f'' ist surjektiv.
Man spricht in dieser Situation von einer <u>kurzen exakten Sequenz</u>.

Beispiel 2
Die Sequenz

$$0 \to V' \xrightarrow{f'} V'\oplus V'' \xrightarrow{f''} V'' \to 0$$

mit f'(v') = (v', 0) und f''(v', v'') = v'' ist eine kurze exakte Sequenz.

Beispiel 3
Für jeden K-Vektorraum V und jeden K-linearen Unterraum $U \subseteq V$ ist

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\rho} V/U \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Dabei seien $i: U \hookrightarrow V$ die natürliche Einbettung und $\rho: V \longrightarrow V/U$ die natürliche Abbildung in den Faktorraum.

6.8.13 Exaktheit des Tensorprodukts

Seien W ein K-Vektorraum und

$$... \to V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} V_{i+2} \to ...$$

eine exakte Sequenz von K-linearen Abbildungen. Dann ist die folgende Sequenz ebenfalls exakt.

$$\ldots \to V_i\otimes W \xrightarrow{f_i\otimes Id} V_{i+1}\otimes W \xrightarrow{f_{i+1}\otimes Id} V_{i+2}\otimes W \to \ldots$$

Beweis. Wir haben zu zeigen

$$\mathrm{Im}\,(f_i\otimes Id) = \mathrm{Ker}(f_{i+1}\otimes Id).$$

1 Schritt. Beweis von "$\subseteq$".
Nach Voraussetzung gilt

$$\mathrm{Im}\, f_i = \mathrm{Ker}\, f_{i+1},$$

also

$$f_{i+1}\circ f_i = 0,$$

Also

$$(f_{i+1}\otimes Id)\circ(f_i\otimes Id) = (f_{i+1}\circ f_i)\otimes Id = 0\otimes Id$$

Für $v\in V_i$ und $w\in W$ gilt also

$$(f_{i+1}\otimes Id)\circ(f_i\otimes Id)(v\otimes w) = 0\otimes w = 0\cdot(0\otimes Id) = 0.$$

Die Abbildung überführt alle Vektoren des Erzeugendensystems $\{v\otimes w\}$ in den Nullvektor, ist also die Nullabbildung,

$$(f_{i+1}\otimes Id)\circ(f_i\otimes Id) = 0.$$

Also gilt

$$\mathrm{Im}\,(f_i\otimes Id) \subseteq \mathrm{Ker}(f_{i+1}\otimes Id).$$

2. Schritt. Beweis von "$\supseteq$".
Wir wählen Basen

$\{w_\gamma\}_{\gamma\in L}$ von W
$\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ von $\mathrm{Ker}\, f_{i+1}$

Die Basis des Kerns ergänzen wir zu einer Basis von V_{i+1}, d.h. es sei

$$\{v_\alpha\}_{\alpha\in I} \cup \{v_\beta\}_{\beta\in J} \text{ Basis von } V_{i+1}.$$

Dann gilt:

$$\{v_\alpha\otimes w_\gamma\}_{\alpha\in I\ \gamma\in L} \cup \{v_\beta\otimes w_\gamma\}_{\beta\in J\ \gamma\in L} \text{ ist Basis von } V_{i+1}.$$

Sei jetzt

$$t \in \mathrm{Ker}\,(f_{i+1}\otimes Id).$$

Wir haben zu zeigen, t liegt im Bild von $f_i\otimes Id$. Weil t in $V_{i+1}\otimes W$ liegt, können wir t in der folgenden Gestalt schreiben.

$$\begin{aligned} t &= \sum_{\alpha\in I\cup J,\gamma\in L} c_{\alpha\gamma}\, v_\alpha\otimes w_\gamma \text{ mit } c_{\alpha\gamma}\in K \\ &= \sum_{\alpha\in I,\gamma\in L} c_{\alpha\gamma}\, v_\alpha\otimes w_\gamma + \sum_{\beta\in J,\gamma\in L} c_{\beta\gamma}\, v_\beta\otimes w_\gamma. \qquad (1) \end{aligned}$$

Für $\alpha\in I$ gilt $v_\alpha \in \mathrm{Ker}\, f_{i+1} = \mathrm{Im}\, f_i$, d.h.es gibt ein $v'_\alpha\in V_i$ mit

$$v_\alpha = f_i(v'_\alpha) \text{ für jedes } \alpha\in I. \qquad (2)$$

Deshalb können wir in der ersten Summe von (1) v_α durch $f_i(v'_\alpha)$ ersetzen und diese Summe in der folgenden Gestalt schreiben.

$$\sum_{\alpha\in I,\gamma\in L} c_{\alpha\gamma} f_i(v'_\alpha)\otimes \mathrm{Id}(w_\gamma) = (f_i\otimes \mathrm{Id})(\sum_{\alpha\in I,\gamma\in L} c_{\alpha\gamma} v'_\alpha\otimes w_\gamma).$$

Mit anderen Worten, die erste Summe liegt im Bild von $f_i\otimes\mathrm{Id}$. Es reicht also zu zeigen, die zweite Summe ist Null,

$$\sum_{\beta\in J,\gamma\in L} c_{\beta\gamma} v_\beta\otimes w_\gamma = 0.$$

Dazu reicht es zu zeigen,

$$c_{\beta\gamma} = 0 \text{ für alle } \beta\in J \text{ und alle } \gamma\in L. \qquad (3)$$

Nach Voraussetzung liegt t im Kern von $f_{i+1}\otimes\mathrm{Id}$. Dasselbe gilt von der ersten Summe (das sie sogar im Bild von $f_i\otimes\mathrm{Id}$ liegt). Wir wenden $f_{i+1}\otimes\mathrm{Id}$ auf (1) and und erhalten

$$0 = 0 + \sum_{\beta\in J,\gamma\in L} c_{\beta\gamma} f_{i+1}(v_\beta)\otimes w_\gamma$$

Zum Beweis von (3) reicht es also zu zeigen,

die Vektoren $f_{i+1}(v_\beta)\otimes w_\gamma$ mit $\beta\in J$, $\gamma\in L$ sind linear unabhängig.

Dazu wiederum reicht es zu zeigen,

die Vektoren $f_{i+1}(v_\beta)$ mit $\beta\in J$ sind linear unabhängig

(vgl. 6.8.6(i)). Seien also Koeffizienten $c_\beta\in K$ ($\beta\in J$) gegeben mit

$$\sum_{\beta\in J} c_\beta f_{i+1}(v_\beta) = 0.$$

Wir haben zu zeigen, $c_b = 0$ für jedes b. Es gilt

$$0 = \sum_{\beta\in J} c_\beta f_{i+1}(v_\beta) = f_{i+1}(\sum_{\beta\in J} c_\beta v_\beta),$$

also

$$\sum_{\beta\in J} c_\beta v_\beta \in \mathrm{Ker}(f_{i+1})$$

Da $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ eine Basis von Ker f_{i+1} ist, gibt es Element $d_\alpha\in K$ ($\alpha\in I$) mit

$$\sum_{\beta\in J} c_\beta v_\beta = \sum_{\alpha\in I} d_\alpha v_\alpha ,$$

d.h.

$$0 = \sum_{\beta\in J} c_\beta v_\beta + \sum_{\alpha\in I} (-d_\alpha) v_\alpha$$

Da $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I} \cup \{v_\beta\}_{\beta\in J}$ eine Basis von V_{i+1} ist, ist die Menge der v_α und v_β linear unabhängig, d.h. aus der obigen Identität folgt insbesodere

$$c_\beta = 0 \text{ für jedes } \beta\in J.$$

QED.

6.9 Multilineare Abbildungen

6.9.1 Definition

Seien U und V Vektorräume über dem Körper K und n eine nicht-negative ganze Zahl. Eine Abbildung

$$f\colon V\times\ldots\times V \longrightarrow U,\ (v_1,\ldots, v_n) \mapsto f(v_1,\ldots, v_n)$$

heißt n-linear über K, wenn sie in Bezug auf jedes ihrer Argumente v_i linear über K ist. Eine 1-lineare Abbildung ist dabei einfach eine lineare Abbildung

$$V \longrightarrow U.$$

Eine 2-lineare Abbildung ist dasselbe wie eine bilineare Abbildung

$$V \times V \longrightarrow U.$$

Unter einer 0-linearen Abbildung wollen wir eine lineare Abbildung

$$K \longrightarrow U$$

verstehen.

6.9.2 Die Tensor-Algebra eines K-Vektorraums

Wir erinnern zunächst an den Begriff der Algebra über einem kommutativen Ring mit 1. Seien R kommutativer Ring mit 1. Eine R-Algebra ist ein Ring S mit 1 zusammen mit einem Ring-Homomorphismus

$$R \to S$$

von Ringen mit 1. Der Homomorphismus heißt dann Struktur-Homomorphismus von S. Seien S und S' zwei R-Algebren. Ein Homomorphismus von R-Algebren

$$f\colon S\to S'$$

ist ein Ring-Homomorphismus f, für welchen das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] & & S' \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Dabei sollen die schrägen Pfeile gerade die Struktur-Homomorphismen bezeichnen.

Seien jetzt K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Die Tensor-Algebra von V über K ist definiert als die direkte Summe

$$T_K(V) := T(V) := \oplus_{n=0}^{\infty} T(V)_n \text{ mit } T(V)_n := V^{\otimes n}$$

Dabei seien

$$V^{\otimes 0} = K,$$

$$V^{\otimes 1} = V$$

$$V^{\otimes n} := V\otimes\ldots\otimes V \text{ (n-mal)}$$

die n-te Tensorpotenz von V, d.h. das Tensorprodukt von n Exemplaren des Vektorraumes V.

Nach Konstruktion ist $T_K(V)$ ein K-Vektorraum. Der direkte Summand

$$T(V)_n = V^{\otimes n} \subseteq T(V)$$

heißt homogener Bestandteil des Grades n von T(V), dessen Elemente t heißen homogene Elemente des Grades n und man schreibt

$$\deg t = n.$$

Seien

$$t' = \sum_{n=1}^{\infty} t'_n \text{ und } t'' = \sum_{n=1}^{\infty} t''_n$$

zwei Elemente von T(V) mit t'_n und t''_n homogen vom Grad n. Wir definieren das Produkt von t' und t" wie folgt

$$t'\cdot t'' = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t'_m \otimes t''_n$$

Dabei wird

$$t'_m \otimes t''_n \in V^{\otimes m} \otimes V^n \cong V^{\otimes (m+n)}$$

als Element von $V^{\otimes (m+n)}$ aufgefaßt. Speziel für n = 0 haben wir

$$t'_m \otimes t''_0 \in V^{\otimes m} \otimes K \cong V^{\otimes m}\ , x\otimes y \mapsto yx,$$

d.h. $t'_m \otimes t''_0$ wird mit $t''_0 \cdot t'_m$ identifiziert. Analog wird für m = 0 das Element

$$t'_0 \otimes t''_n$$

mit $t'_0 \cdot t''_n$ identifiziert. Die Multiplikation von zwei Elementen 0-ten Grades entspricht damit der gewöhnlichen Multiplikation mit Elementen aus K.

Die Abbildung

$$K \to T(V),\ c \mapsto c,$$

wobei das Bild c als homogenes Element des Grades 0 von T(V) aufgefaßt wird, heißt natürliche Einbettung von K in die Tensoralgebra T(V).

Die Abbildung

$$V \to T(V),\ v \mapsto v,$$

wobei das Bild v als homogenes Element des Grades 1 von T(V) aufgefaßt wird, heißt natürliche Einbettung von V in die Tensoralgebra T(V).

Bemerkungen

(i) Mit der oben definierten Multiplikation ist T(V) eine K-Algebra.

(ii) Die natürliche Einbettung $K \to T(V)$ ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1.

(iii) Die natürliche Einbettung $V \to T(V)$ ist K-linear.

Beispiel

Sei V = Kv ein eindimensionaler K-Vektorraum. Dann ist

$$K^{\otimes n} = Kv\otimes ...\otimes v = Kv^{\otimes n}$$

für jedes n, also

$$T(V) = K\oplus Kv \oplus Kv^{\otimes 2} \oplus ...$$

Wenn wir die Multiplikation in T(V) nicht mehr mit dem Tensorzeichen “⊗” sondern mit “•” bezeichnen, erhalten wir

$$T(V) = K \oplus K\bullet v \oplus K\bullet v^2 \oplus \ldots = K[v],$$

d.h. T(V) ist bis auf Isomorphie gerade die K-Algebra der Polynome in der Unbestimmten v mit Koeffizienten aus K.

Beispiel

Sei V = Kv + Kw ein zwei dimensionaler K-Vektorraum. Dann ist

$$V^{\otimes 1} = V = Kv + Kw$$
$$V^{\otimes 2} = Kv^2 + Kw^2 + Kvw + Kwv$$
$$\ldots$$

und die Tensoralgebra

$$T(V) = K\langle v, w\rangle$$

läßt sich mit der K-Algbra der nicht-kommutativen Polynome in v und w mit Koeffizienten aus K identifizieren.

Analog erhält man für jeden n-dimensionalen K-Vektorraum

$$V = Kv_1 + \ldots + Kv_n$$

eine Identifikation

$$T(V) = K\langle v_1 , \ldots , v_n\rangle$$

der Tensor-Algebra mit der K-Algebra der nicht-kommutativen Polynome in $v_1 , \ldots ,$ v_n mit Koeffizienten aus K.

6.9.3 Die Universalitätseigenschaft der Tensorpotenz $V^{\otimes n}$

Sei V ein K-Vektorraum. Dann ist die Abbildung

$$\rho_n: V^n = V\times\ldots\times V \to V^{\otimes n} , (v_1,\ldots,v_n) \mapsto v_1\otimes\ldots\otimes v_n$$

des direkten Produkts von n Exemplaren von V nach $V^{\otimes n}$ n-linear über K.

Jede n-lineare Abbildung

$$m:V\times\ldots\times V \to U$$

mit Werten in einem K-Vektorraum U faktorisiert sich auf genau eine Weise über ρ_n,

$$m: V\times\ldots\times V \xrightarrow{\rho_n} V^{\otimes n} \xrightarrow{\tilde{m}} U,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{m}$ mit $m = \tilde{m}\circ\rho_n$.

Beweis. <u>Eindeutigkeit von $\tilde{m}$</u>. Falls $\tilde{m}$ existiert, so gilt für beliebige $v_1,\ldots,v_n \in V$:

$$\tilde{m} (v_1\otimes\ldots\otimes v_n) = \tilde{m} (\rho_n(v_1,\ldots,v_n)) = m(v_1,\ldots,v_n).$$

Die Werte von $\tilde{m}$ auf den Elementen der Gestalt $v_1\otimes\ldots\otimes v_n$ sind also eindeutig festgelegt. Da diese Elemente ein Erzeugendensystem von $V^{\otimes n}$ bilden und da $\tilde{m}$ linear sein soll, ist somit die gesamte Abbildung $\tilde{m}$ festgelegt.

<u>Existenz von $\tilde{m}$</u>. Beweis durch Induktion nach n.

Im Fall n = 0 ist ρ_0: K $\longrightarrow$ K nach Vereinbarung die identische Abbildung von K und die Behauptung ist trivial (jede Abbildung K $\longrightarrow$ U faktorisiert sich eindeutig über die identische Abbildung K $\longrightarrow$ K).

Im Fall n = 1 ist ρ_1: V $\longrightarrow$ V die identische Abbildung und m eine lineare Abbildunge

$$m: V = V^{\otimes 1} \to U$$

Auch in diesem Fall faktorisiert sich m eindeutig

$$m: V \xrightarrow{id} V \xrightarrow{\tilde m} U$$

über die identische Abbildung (mit $\tilde m$ = m).

Sei jetzt m > 1. Für jedes feste $v_0 \in V$ ist die folgende Abbildung (n-1)-linear über K.

$$m_{v_0}: V^{n-1} \to U, (v_1,...,v_{n-1}) \mapsto m(v_1,...,v_{n-1}, v_0),$$

Nach Induktionsvoraussetzung faktorisiert sie sich eindeutig über ρ_{n-1},

$$m_{v_0}: V^{n-1} \xrightarrow{\rho_{n-1}} V^{\otimes(n-1)} \xrightarrow{\tilde m_{v_0}} U,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde m_{v_0}$ mit $m_{v_0} = \tilde m_{v_0} \circ \rho_{n-1}$, d.h. mit

$$\begin{aligned} \tilde m_{v_0}(v_1 \otimes ... \otimes v_{n-1}) &= \tilde m_{v_0}(\rho_{n-1}(v_1,...,v_{n-1})) = m_{v_0}(v_1,...,v_{n-1}) \\ &= m(v_1,...,v_{n-1},v_0). \end{aligned}$$

Die lineare Abbildung

$$\tilde m_{v_0}: V^{\otimes(n-1)} \longrightarrow U, v_1 \otimes ... \otimes v_{n-1} \mapsto m(v_1,...,v_{n-1},v_0),$$

ist durch die Bedingung

$$\tilde m_{v_0}(v_1 \otimes ... \otimes v_{n-1}) = m(v_1,...,v_{n-1},v_0) \tag{1}$$

eindeutig festgelegt (da die $v_1 \otimes ... \otimes v_{n-1}$ ein Erzeugendensystem von $V^{\otimes(n-1)}$ bilden). Betrachten wir die Abbildung

$$\tilde m': V^{\otimes(n-1)} \times V \to U , (t, v) \mapsto \tilde m_v(t). \tag{2}$$

Nach Konstruktion ist sie linear im ersten Argument t. Zeigen wir, sie ist auch linear im zweiten Argument v, d.h. , zeigen wir, es gilt

$$\tilde m_{c'v'+c''v''}(t) = c'\tilde m_{v'}(t) + c''\tilde m_{v''}(t)$$

für alle v',v''$\in$V, alle c',c''$\in$K und alle t$\in V^{\otimes(n-1)}$, d.h.

$$\tilde m_{c'v'+c''v''} = c'\tilde m_{v'} + c''\tilde m_{v''}.$$

Auf beiden Seiten stehen lineare Abbildungen. Zum Beweis ihrer Gleichheit reicht es zu zeigen, sie haben dieselben Werte in allen Vektoren eines Erzeugendensystems von $V^{\otimes(n-1)}$. Es reicht also zu zeigen,

$$\tilde{m}_{c'v'+c''v''}(v_1\otimes...\otimes v_{n-1}) = c'\tilde{m}_{v'}(v_1\otimes...\otimes v_{n-1}) + c''\tilde{m}_{v''}(v_1\otimes...\otimes v_{n-1})$$

für beliebige $v_1,...,v_{n-1}\in V$. Wegen (1) gilt

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= m(v_1,...,v_{n-1}, c'v'+c''v'') \\ &= c'm(v_1,...,v_{n-1},v') + c''m(v_1,...,v_{n-1},v'') \\ &= \text{RHS} \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, die Abbildung (2) ist bilinear. Auf Grund der Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts faktorisiert sie sich eindeutig über die natürliche Abbildung ins Tensorprodukt $\rho: V^{\otimes(n-1)}\times V \to V^{\otimes(n-1)}\otimes V = V^{\otimes n}$,

$$\tilde{m}': V^{\otimes(n-1)}\times V \xrightarrow{\rho} V^{\otimes n} \xrightarrow{\tilde{m}'} U,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{m}$ mit $\tilde{m}' = \tilde{m}'\circ\rho$, d.h. mit

$$\tilde{m}(t,v) = \tilde{m}'(t\otimes v) = \tilde{m}_v(t)$$

für alle $t\in V^{\otimes(n-1)}$ und alle $v\in V$. Speziell für $t = v_1\otimes...\otimes v_{n-1}$ erhalten wir

$$\tilde{m}(v_1\otimes...\otimes v_{n-1}\otimes v) = \tilde{m}_v(v_1\otimes...\otimes v_{n-1}) = m(v_1,...,v_{n-1},v).$$

Mit anderen Worten, es gilt

$$m = \tilde{m}\circ\rho_n ,$$

d.h. $\tilde{m}$ ist gerade die Abbildung, deren Existenz wir beweisen wollen.

QED.

Bemerkung

Bezeichne

$$L_K(V, U)_n$$

den K-Vektorraum der n-linearen Abbildungen $V\times...\times V \longrightarrow U$ über K. Die gerade bewiesene Universalitätseigenschaft von $V^{\otimes n}$ besagt gerade, daß die lineare Abbildung

$$\text{Hom}_K(V^{\otimes n}, U) \longrightarrow L_K(V, U)_n,\ \tilde{m} \mapsto \tilde{m}\circ\rho_n,$$

bijektiv, also ein Isomorphismus ist. Insbesondere hat der Vektorraum der n-linearen Abbildungen auf V mit Werten in U die Dimension

$$\begin{aligned} \dim_K L_K(V, U)_n &= \dim_K \text{Hom}_K(V^{\otimes n}, U) \\ &= \dim_K V^{\otimes n}\bullet\dim_K U \\ &= (\dim_K V)^n\bullet\dim_K U. \end{aligned}$$

6.9.4 Die Universalitätseigenschaft der Tensor-Algebra

Sei V ein K-Vektorraum. Dann gibt es für jede K-Algebra S und jede K-lineare Abbildung

$$f:V \to S$$

genau einen Homomorphismus

$$\tilde{f}: T(V) \to S$$

von K-Algebren derart, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho} & T(V) \\ f\downarrow & \swarrow \tilde{f} & \\ S & & \end{array}$$

dabei sei ρ die natürliche Einbettung von V in die Tensor-Algebra.

Beweis. Eindeutigkeit von $\tilde{f}$. Wir nehmen an, $\tilde{f}$ existiert und leiten eine Formel für $\tilde{f}$ her, aus der hervorgeht, daß $\tilde{f}$ eindeutig festgelegt ist. Sei

$$t \in T(V).$$

Dann ist t eine Summe von endlich vielen homogenen Elementen. Ein homogenes Element des Grades n (aus $V^{\otimes n}$) wiederum ist eine Summe aus endlich vielen Elementen der Gestalt $v_1 \otimes ... \otimes v_n$. Mit anderen Worten, t hat die Gestalt

$$t = \sum_{i=1}^{s} v_1^i \otimes ... \otimes v_{n_i}^i$$

Damit gilt da $\tilde{f}$ eine K-lineare Abbildung ist, die Produkte in Produkte überführt,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \sum_{i=1}^{s} \tilde{f}(v_1^i \otimes ... \otimes v_{n_i}^i) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \tilde{f}(v_1^i) \otimes ... \otimes \tilde{f}(v_{n_i}^i) && (v_j^i \in T(V)_1) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \tilde{f}(\rho(v_1^i)) \otimes ... \otimes \tilde{f}(\rho(v_{n_i}^i)) && (v_j^i \in V) \\ &= \sum_{i=1}^{s} f(v_1^i) \otimes ... \otimes f(v_{n_i}^i) \end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{f}$ eindeutig durch f festgelegt.

Existenz von $\tilde{f}$. Betrachten wir die Abbildung

$$f_n: V^n \to S,\ (v_1, ..., v_n) \mapsto f(v_1) \cdot ... \cdot f(v_n).$$

Auf Grund des Distributivgesetzes für den Ring S ist diese linear in jedem der n Argumente. Nach 6.9.2 faktorisiert sich diese Abbildung eindeutig über die natürliche Abbildung $\rho: V^n \longrightarrow V^{\otimes n}$,

$$f_n: V^n \xrightarrow{\rho} V^{\otimes n} \xrightarrow{\tilde{f}_n} S,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\underline{\tilde{f}_n}$ mit $f_n = \underline{\tilde{f}_n} \circ \rho$, d.h. mit

$$\underline{\tilde{f}_n}(v_1 \otimes ... \otimes v_n) = \underline{\tilde{f}_n}(\rho(v_1, ..., v_n)) = f_n(v_1, ..., v_n) = f(v_1) \cdot ... \cdot f(v_n)$$

für alle $v_1,...,v_n \in V$. Wir definieren $\tilde{\underline{f}}$: $T(V) \to R$, indem wir setzen

$$\tilde{\underline{f}}(t) = \tilde{f}_0(t_0) + \tilde{f}_1(t_1) + ... + \tilde{f}_s(t_s)$$

falls $t = t_0 + t_1 + ... + t_s$ gilt mit t_i homogen vom Grad i. Dabei sei

$$\tilde{f}_0(t_0) = t_0 \cdot 1_S$$

Die Abbildung ist wohldefiniert und linear. Für homogene Elemente des Grades 1 gilt

$$\tilde{\underline{f}}(\rho(v)) = \tilde{\underline{f}}_1(v) = f(v).$$

Auf Grund der Defintion von $\tilde{f}_0$ gilt $\tilde{f}(1_{\underline{K}}) = 1_S$. Durch direktes Nachrechnent sieht man, daß $\tilde{f}$ ein Ringhomomorphismus ist.

QED.

Bemerkungen

(i) Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und S eine R-Algebra. Ein <u>Erzeugendensystem</u> von S über R ist eine Famlie

$$\{s_i\}_{i\in I}$$

von Elementen aus S mit der Eigenschaft, daß jede R-Teilalgebra

$$S' \subseteq S,$$

welche alle s_i enthält, gleich S sein muß,

$$S' \subseteq S.$$

<u>Beispiel 1</u>.

Für jede R-Algebra S bildet die Familie der Elemente von S ein Erzeugendensystem.

<u>Beispiel 2</u>.
Ist

$$S = R[x_1, ... , x_n]$$

die R-Algebra der Polynome in $x_1, ... , x_n$ mit Koeffizienten aus R, so bilden die Unbestimmten $x_1, ... , x_n$ ein Erzeugendensystem von S über R.

(ii) Seien S eine K-Algebra und $V \subseteq S$ ein K-Vektorraum, welcher ein Erzeugendensystem von S als K-Algebra enthält. Das Bild Fortsetzung der natürlichen Einbettung

$$i: V \hookrightarrow S$$

zu einem K-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{i}: S(V) \longrightarrow S$$

ist dann eine K-Teilalgebra, die ebenfalls dieses Erzeugendensystem enthält. Diese Teilalgebra ist deshalb gleich S, d.h. der K-Algebra-Homomorphismus $\tilde{i}$ ist surjektiv. Es folg

$$S \cong S(V)/\mathrm{Ker}(\tilde{i}).$$

Mit anderen Worten, jede K-Algebra ist ein Faktor einer Tensor-Algebra über K.

(iii) Nachfolgend wollen wir die Beschreibung von K-Algebren als Faktoren einer Tensor-Algebra an einigen Beispielen illustrieren. Dazu benötigen wir den Begriff des Ideals.

6.9.5 Das von einer Menge erzeugte Ideal

Seien K ein Körper und S eine K-Algebra. Ein Ideal von S ist ein K-linearer Unterraum

$$I \subseteq S$$

mit der Eigenschaft, daß für beliebige $x \in I$ und $s \in S$ die beiden Produkte

$$s \bullet x \in I \text{ und } x \bullet s \in I$$

von s und x in I liegen.

Beispiel

Für jede Teilmenge $M \subseteq S$ ist der K-lineare Unterraum von S, welcher von den Elementen der Gestalt

$$s \bullet m \bullet s' \text{ mit } s,s' \in S \text{ und } m \in M$$

ein Ideal von S (wegen des Assoziativegesetzes der Multiplikation). Dieses Ideal heißt das von M erzeugte Ideal von S und wird mit

$$I(M) := I_S(M)$$

bezeichnet.

6.9.6 Der Faktorraum nach einem Ideal

Seien S eine K-Algbra und $I \subseteq S$ ein Ideal. Dann ist durch

$$(a + I) \cdot (b + I) = ab + I$$

ein Produkt auf S/I definert und der Vektorraum S/I ist mit diesem Produkt eine K-Algebra. Die natürliche Abbildung

$$\rho: S \to S/I$$

ist ein Homomorphismus von K-Algebren.

Beweis. Seien $a + I = a' + I$ und $b + I = b' + I$. Wir haben zu zeigen, es gilt

$$ab + I = a'b' + I.$$

Es gilt

$$a-a' \in I \text{ und } b-b' \in I$$

also

$$(a-a')b \in I \text{ und } a'(b-b') \in I$$

also

$$ab - a'b' \in I$$

also

$$ab + I = a'b' + I.$$

Nach Konstruktion ist

$$\rho(ab) = ab + I = (a+I)(b+I) = \rho(a)\rho(b).$$

Daraus ergibt sich, daß S/I ein Ring ist und ρ ein Ringhomomorphismus. Bezeichnet 1 das Einselement von S, so spielt $\rho(1)$ die Rolle des Einselements von S/I. Durch die Zusammensetzung der Ringhomomorphismen

$$K \to S \to S/I$$

bekommt S/I die Struktur einer K-Algebra.

QED.

6.9.7 Die symmetrische Algebra

Seien V ein K-Vektorraum und

$$I'(V) \subseteq T(V)$$

das von den Elementen der Gestalt

$$a\otimes b - b\otimes a \text{ mit } a,b\in V$$

erzeugte Ideal. Dann heißt

$$S(V) = S_K(V) = T(V)/I'(V)$$

symmetrische Algebra von V über K. Die Zusammensetzung

$$V \to T(V) \xrightarrow{\rho} S(V)$$

der natürlichen Einbettung (im Grad 1) mit der natürliche Abbildung auf den Faktorring heißt wieder natürliche Einbettung (im Grad 1). Analog definiert man die natürliche Einbettung

$$K \longrightarrow T(V) \xrightarrow{\rho} S(V)$$

im Grad 0.

Bemerkung

Die natürlichen Einbettungen sind injektiv, weil $I'(V) = \mathrm{Ker}(\rho)$ aus Summen von homogenen Elementen eines Grades ≥ 2 besteht. Sie gestatten es somit V und K mit Teilmengen von S(V) zu identifizieren.

6.9.8 Die Universalitätseigenschaft der symmetrischen Algebra

Seien V ein K-Vektorraum, S eine kommutative K-Algebra und

$$f: V \to S$$

eine K-lineare Abbildung. Dann gibt es genau eine Fortsetzung

$$\tilde{f}: S(V) \to S$$

von f zu einen Homomorphismus von K-Algebren, d.h. es gibt genau einen Homomorphismus von K-Algebren $\tilde{f}: S(V) \to S$, dessen Zusammensetzung mit der der natürlichen Einbettung

$$\bar{\rho}: V \xrightarrow{i} T(V) \xrightarrow{\rho} T(V)/I'(V) = S(V)$$

gleich f ist.

Beweis. Auf Grund der Universalitätseigenschatt der Tensor-Algebra gibt es genau eine Fortsetzung

$$f': T(V) \to S$$

zu einen Homomorphismus von K-Algebren. Für beliebige Vektoren $v',v''\in V$ und beliebige Tensoren $t',t''\in T(V)$ gilt

$$f'(t'(v'\otimes v'' - v''\otimes v')t'') = f'(t')(f'(v')f'(v'') - f'(v'')f'(v'))f'(t'') = 0,$$

da S kommutativ ist. Mit anderen Worten, ein Erzeugendensystem des definierenden Ideals I'(V) liegt im Kern von f', d.h.

$$I'(V) \subseteq \mathrm{Ker}(f').$$

Auf Grund des Homomorphie-Satzes faktorisiert sich f' auf genau eine Weise über die natürliche Abbildung $\rho: T(V) \longrightarrow S(V) = T(V)/I'(V)$ auf den Faktorraum (vgl. die Bemerkung am Ende von 6.8.1),

$$f': T(V) \xrightarrow{\rho} S(V) \xrightarrow{\tilde{f}} S,$$

d.h. es gibt genau eine K-lineare Abbildung $\tilde{f}$ mit $f = \tilde{f}\circ\rho$, d.h. mit

$$\tilde{f}(t + I'(V)) = \tilde{f}(\rho(t)) = f'(t).$$

Insbesonder gilt

$$\tilde{f}(\overline{\rho}(v)) = \tilde{f}(\rho(i(v))) = f'(i(v)) = f(v)$$

für jedes $v \in V$, d.h. $\tilde{f}$ setzt die Abbildung f fort.

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, die Abbildung $\tilde{f}$ ist ein K-Algebra-Homomorphismus. Weil $\tilde{f}$ eine K-lineare Abbildung ist, reicht es zu zeigen,

$$\tilde{f}(a\bullet b) = \tilde{f}(a)\bullet\tilde{f}(b).$$

Weil ρ surjektiv ist, gilbt es Elemente $s, t \in T(V)$ mit

$$\rho(s) = a \text{ und } \rho(t) = b.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(a\bullet b) &= \tilde{f}(\rho(s)\bullet\rho(t)) && \text{(nach Wahjl von s und t)}\\
&= \tilde{f}(\rho(s\bullet t)) && \text{(weil } \rho \text{ ein Algebra-Homomorphismus ist)}\\
&= f(s\bullet t) && \text{(nach Definition von } \tilde{f}\text{)}\\
&= f(s)\bullet f(t) && \text{(weil f' ein Álgebra-Homomorphismus ist)}\\
&= \tilde{f}(\rho(s))\bullet\tilde{f}(\rho(t)) && \text{(nach Definition von } \tilde{f}\text{)}\\
&= \tilde{f}(a)\bullet\tilde{f}(b).
\end{aligned}$$

QED.

6.9.9 Vergleich mit den Polynom-Algebren

Seien V ein K-Vektorraum mit der Basis $v_1,...,v_n \in V$ und

$$S := K[x_1,...,x_n]$$

die K-Algebra der Polynome in $x_1,...,x_n$ mit Koeffizienten aus K. Dann gibt es genau einen K-Algebra-Homomorphismus

$$K[x_1,...,x_n] \to S(V) \text{ mit } x_i \mapsto v_i .$$

Dieser Homomorphismus ist sogar ein Isomorphismus.

Beweis. Betrachten wir die K-lineare Abbildung

$$j:V \to K[x_1,...,x_n],\ c_1v_1+...+c_1v_n \mapsto c_1x_1+...+c_1x_n .$$

<u>1. Schritt</u>. Die Polynom-Algebra besitzt die Universalitätseingenschaft der Symmetrischen Algebra.

Seien S ein kommutative K-Algebra und

$$f: V \to S$$

eine K-lineare Abbildung. Wir haben zu zeigen, es gibt genau einen Homomorphismus von K-Algebren

$$\tilde{f}:K[x_1,...,x_n] \to S$$

mit $\tilde{f}\circ j = f$.

<u>Existenz von</u> $\tilde{f}$. Für jedes Polynom $p\in K[x_1,...,x_n]$ setzen wir

$$\tilde{f}(p) = p(f(v_1),\ldots,f(v_n)),$$

d.h. wir ordnen jedem Polynom p den Wert an der Stelle $(f(v_1),\ldots,f(v_n))$ zu. Auf diese Weise ist ein Homomorphismus von K-Algebren definiert,

$$\tilde{f}:K[x_1,\ldots,x_n] \to S$$

Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{f}\circ j(c_1v_1+\ldots+c_1v_n) &= \tilde{f}(c_1x_1+\ldots+c_1x_n) && \text{(nach Definition von j)}\\
&= c_1f(v_1)+\ldots+c_1f(v_n) && \text{(nach Definition von } \tilde{f})\\
&= f(c_1v_1+\ldots+c_1v_n) && \text{(weil f linear ist)}
\end{aligned}$$

d.h. es gilt $\tilde{f}\circ j = f$.

<u>Eindeutigkeit von</u> $\tilde{f}$. Falls $\tilde{f}$ existiert, so gilt für jedes Polynom p

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(p) = \tilde{f}(p(x_1,\ldots,x_n)) &= p(\tilde{f}(x_1),\ldots,\tilde{f}(x_n)) && (\tilde{f} \text{ ist Algebra-Homomorphismus})\\
&= p(\tilde{f}(j(v_1)),\ldots,\tilde{f}(j(v_n))) && \text{(nach Definition von j)}\\
&= p((f(v_1),\ldots,f(v_n)) && (\text{wegen } \tilde{f}\circ j = f).
\end{aligned}$$

Die Abbildung $\tilde{f}$ ist somit durch f eindeutig festgelegt.
<u>2. Schritt</u>: Vergleich von S(V) und $K[x_1,\ldots,x_n]$.
Betrachten wir die folgenden beiden kommutativen Diagramme.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & S(V) \\ K[x_1,\ldots,x_n] \arrow[ur, "\tilde{i}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & K[x_1,\ldots,x_n] \\ S(V) \arrow[ur, "\tilde{j}"'] & \end{tikzcd}$$

Dabei seien j die oben definierte K-lineare Abbildung und i: $V \hookrightarrow S(V)$ die natürliche Einbettung. Die K-Algebra-Homomorphismen $\tilde{i}$ und $\tilde{j}$ existieren auf Grund der Universalitätseigenschaften von j bzw. i und sind durch die Kommutativität der beiden Diagramme eindeutig festgelegt. Durch Zusammensetzen der beiden Diagramme erhalten wir die beiden folgenden kommutativen Diagramme.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & S(V) \\ S(V) \arrow[ur, "\tilde{i}\circ\tilde{j}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j"'] & K[x_1,\ldots,x_n] \\ K[x_1,\ldots,x_n] \arrow[ur, "\tilde{j}\circ\tilde{i}"'] & \end{tikzcd}$$

Diese Diagramm bleiben kommutativ, wenn man $\tilde{i}\circ\tilde{j}$ und $\tilde{j}\circ\tilde{i}$ durch identische Abbildungen ersetzt. Auf Grund der Eindeutigkeitsaussagen der Universalitätseigenschaften von i und j folgt

$$\tilde{i}\circ\tilde{j} = \mathrm{Id} \text{ und } \tilde{j}\circ\tilde{i} = \mathrm{Id}.$$

Die K-Algebra-Homomorphismen $\tilde{i}$ und $\tilde{j}$ sind also zueinander inverse Isomorphismen.
Außerdem gilt für jedes α:

$$\tilde{i}(x_\alpha) = \tilde{i}(j(v_\alpha)) = i(v_\alpha) = v_\alpha.$$

QED.

Bemerkungen

(i) Das Bild

$$S(V)_\ell$$

der ℓ-ten Tensorpotenz $V^{\otimes\ell} = T(V)_\ell$ bei der natürlichen Abbildung

$$\rho: T(V) \longrightarrow S(V),\ v_1\otimes...\otimes v_i \mapsto v_1\bullet...\bullet v_i$$

heißt ℓ-te <u>symmetrische Potenz</u> von V. Beim gerade konstruierten Isomorphismus

$$S(V) \xrightarrow{\cong} K[x_1,..., x_n]$$

entspricht diese ℓ-te symmetrische Potenz gerade den homogenen Polynomen

$$\sum_{|i|=\ell} c_i x^i \in K[x_1,..., x_n]$$

des Grades ℓ des Polynomrings. Insbesondere hat dieser Vektorraum die Dimension

$$\dim S(V)_\ell = \binom{\ell+n-1}{n-1}.$$

(ii) Da die $V^{\otimes\ell}$ den Vektorraum T(V) erzeugen, erzeugen die $S(V)_\ell$ den Faktorraum S(V),

$$S(V) = \sum_{\ell=0}^{\infty} S(V)_\ell.$$

Da sich jedes Polynom auf genau eine Weise als Summe homogener Polynome schreiben läßt, ist diese Summe sogar direkt.

$$S(V) = \oplus_{\ell=0}^{\infty} S(V)_\ell.$$

(iii) Die symmetrischen Potenzen lassen sich in ähnlicher Weise durch eine Universalitätseigenschaft charakterisieren, wie die Tensorpotenzen. Für jeden K-Vektorraum U bezeichne

$$S(V, U)_\ell$$

den K-Vektorraum der ℓ-linearen symmetrischen Abbildungen $V\times...\times V \longrightarrow U$. Weiter sei σ_ℓ die natürliche Abbildung

$$\sigma_\ell: V\times...\times V \xrightarrow{\rho_\ell} V^{\otimes\ell} \longrightarrow S(V)_\ell,\ (v_1,..., v_\ell) \mapsto v_1\bullet...\bullet v_\ell,$$

(welche symmetrisch ist, denn S(V) ist kommutativ). Dann ist die lineare Abbldung

$$\mathrm{Hom}_K(S(V)_\ell , U) \longrightarrow S(V, U)_\ell,\ \tilde{g} \mapsto \tilde{g}\circ\sigma_\ell,$$

ein Isomorphismus für jedes U. Insbesondere gilt

$$\dim_K S(V, U)_\ell = \dim_K S(V)_\ell\bullet\dim_K U = \binom{\ell+n-1}{n-1}\bullet\dim_K U.$$

Beweis Zu (i). Wir beweisen die Dimensionsformel durch Induktion nach der Dimension von V, d.h. nach der Anzahl n der Unbestimmen $x_1,..., x_n$.

Im Fall n = 1 ist der Vektorraum der homogenen Polynome des Grades ℓ von $K[x_1]$ eindimensional,

$$\dim S(V)_\ell = 1 = \binom{\ell+0}{0} = \binom{\ell+n-1}{n-1}.$$

Sei jetzt n > 1. Jedes homonene Polynom $p(x_1,..., x_n)$ des Grades ℓ läßt sich in der folgenden Gestalt schreiben:

$$p(x_1,..., x_n) = p_0(x_1,..., x_{n-1})x_n^\ell + p_1(x_1,..., x_{n-1})x_n^{\ell-1}+...+p_n(x_1,..., x_{n-1})$$

mit eindeutig bestimmten homogenen Polynomen $p_i(x_1,..., x_{n-1})$ des Grades i in den Unbestimmten $x_1,..., x_{n-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung hat der Vektorraum der Polynome der Gestalt $p_i(x_1,..., x_{n-1})$ die Dimension

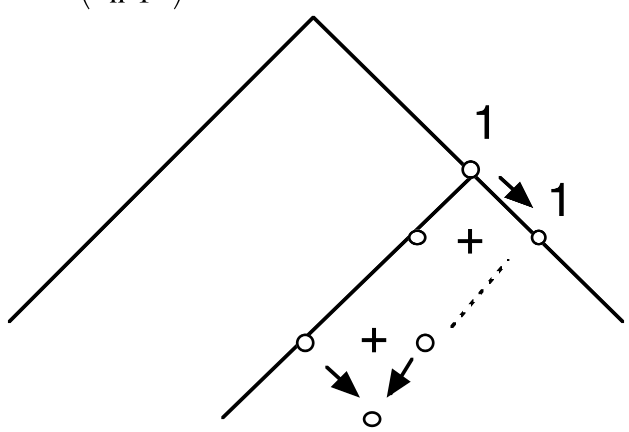
$$\binom{i+n-2}{n-2}$$

Für die gesuchte Dimension erhalten wir damit

$$\dim S(V)_\ell = \binom{\ell+n-2}{n-2} + \binom{\ell-1+n-2}{n-2} + \binom{\ell-2+n-2}{n-2} + ... + \binom{0+n-2}{n-2}$$

Mit Hilfe der Standard-Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks sehen wir, es gilt

$$\dim S(V)_\ell = \binom{\ell+n-1}{n-1}.$$



Zu (ii). Es ist nichts zu zeigen.
Zu (iii). Wir haben die Bijektivität der Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(S(V)_\ell , U) \longrightarrow S(V, U)_\ell , \tilde{g} \mapsto \tilde{g}\circ\sigma_\ell,$$

zu beweisen. Sei $f \in S(V, U)_\ell$, d.h. sei

$$f: V \times ... \times V \longrightarrow U$$

eine ℓ-lineare symmetrische Abbildung. Als ℓ-lineare Abbildung faktorisiert sich f eindeutig über die natürliche Abbildung ρ_ℓ. $V\times...\times V \longrightarrow V^{\otimes\ell}$,

$$f: V\times...\times V \xrightarrow{\rho_\ell} V^{\otimes\ell} \xrightarrow{\tilde{f}} U,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{f}$ mit $f = \tilde{f}\circ\rho_\ell$, d.h. mit

$$\tilde{f}(v_1\otimes...\otimes v_\ell) = \tilde{f}(\rho_\ell(v_1,...,v_\ell)) = f(v_1,...,v_\ell).$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß sich $\tilde{f}$ eindeutig über die natürliche Surjektion $V^{\otimes\ell} \longrightarrow S(V)_\ell$ faktorisiert. Wegen der Surjektivität dieser Surjektion ist die Faktorisierung, falls sie existiert, eindeutig. Es reicht also, die Existenz zu beweisen. Nach dem Homomorphie-Satz (vgl. die Bemerkung am Ende von 6.8.1) reicht es zu zeigen,

$$\tilde{f}(\mathrm{Ker}(V^{\otimes\ell} \longrightarrow S(V)_\ell)) = 0.$$

Der Kern der natürlichen Abbildungt $T(V) \longrightarrow S(V)$ ist gerade das Ideal I'(V). Der Kern der natürlichen Surjektion

$$V^{\otimes\ell} \longrightarrow S(V)_\ell$$

besteht somit gerade aus den homogenen Elementen des Grades ℓ von I'(V), d.h. dieser Kern wird als K-Vektorraum gerade von den Elementen der folgenden Gestalt erzeugt.

$$\alpha\otimes(v\otimes w - w\otimes v)\otimes\beta$$

mit $v, w \in V$,

$$\alpha = v_1\otimes...\otimes v_a,\ v_i \in V$$

$$\beta = w_1\otimes...\otimes w_b,\ w_i \in V$$

und $a + 2 + b = \ell$. Wir haben zu zeigen, alle Elemente dieser Gestalt werden durch $\tilde{f}$ in die Null abgebildet. Es gilt

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\alpha\otimes(v\otimes w - w\otimes v)\otimes\beta) &= \tilde{f}(\alpha\otimes v\otimes w\otimes\beta) - \tilde{f}(\alpha\otimes w\otimes v\otimes\beta)\\ &= f(v_1,...,v_a,v,w,w_1,...,w_b) - f(v_1,...,v_a,w,v,w_1,...,w_b)\\ &= 0\end{aligned}$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt dabei, weil $\tilde{f}$ linear ist, das zweite auf Grund der Definition von $\tilde{f}$. Das dritte Gleichheitszeichen schließlich gilt, weil f symmetrisch ist. **QED**.

6.9.10 Die äußere Algebra

Seien V ein K-Vektorraum und

$$I''(V) \subseteq T(V)$$

das von den Elementen der Gestalt

$$v\otimes v \text{ mit } v\in V$$

erzeugte Ideal. dann heißt

$$\wedge(V) = \wedge_K(V) = T(V)/I''(V)$$

<u>äußere Algebra</u> von V über K. Die Zusammensetzung

$$V \to T(V) \xrightarrow{\rho} \wedge(V)$$

der natürlichen Einbettung (im Grad 1) mit der natürliche Abbildung auf den Faktorring heißt wieder <u>natürliche Einbettung</u> (im Grad 1). Analog definiert man die natürliche Einbettung

$$K \to T(V) \xrightarrow{\rho} \wedge(V)$$

im Grad 0.

Bemerkungen

(i) Die natürlichen Einbettungen sind injektiv, weil $I''(V) = Ker(\rho)$ aus Summen von homogenen Elementen eines Grades ≥ 2 besteht. Sie gestatten es somit V und K mit Teilmengen von $\wedge(V)$ zu identifizieren.

(ii) Das Bild von $v_1\otimes...\otimes v_r \in T(V)$ bei der natürlichen Abbildung

$$T(V) \xrightarrow{\rho} \wedge(V),\ v_1\otimes...\otimes v_r \mapsto v_1\wedge...\wedge v_r$$

auf den Faktorraum wird mit $v_1\wedge...\wedge v_r$ bezeichnet. Die äußere Algebra besteht also aus endlichen Summen von Elementen der Gestalt $v_1\wedge...\wedge v_r$.

6.9.11 Die Universalitätseigenschaft der äußeren Algebra

Seien V ein K-Vektorraum, S eine K-Algebra und

$$f: V \to S$$

eine K-lineare Abbildung mit

$$f(v)f(v) = 0 \text{ für alle } v \in V.$$

Dann gibt es genau eine Fortsetzung

$$\tilde{f}: \wedge(V) \to S$$

von f zu einen Homomorphismus von K-Algebren, d.h. es gibt genau einen Homomorphismus von K-Algebren $\tilde{f}: \wedge(V) \to S$, dessen Zusammensetzung mit der der natürlichen Einbettung

$$V \to T(V) \to T(V)/I''(V) = \wedge(V)$$

gleich f ist.

Beweis. Auf Grund der Universalitätseigenschatt der Tensor-Algebra gibt es genau eine Fortsetzung

$$f': T(V) \to S$$

zu einen Homomorphismus von K-Algebren. Für beliebige Vektoren $v\in V$ und beliebige Tensoren $t',t''\in T(V)$ gilt

$$f'(t'(v\otimes v)t'') = f'(t')(f'(v)f'(v) = 0,$$

Mit anderen Worten, ein Erzeugendensystem des definierenden Ideals $I''(V)$ liegt im Kern von f';

$$I''(V) \subseteq Ker(f').$$

Auf Grund des Homomorphie-Satzes (vgl. die Bemerkung am Ende von 6.8.1) faktorisiert sich f' eindeutig über die natürliche Surjektion auf den Faktorraum modulo dem Ideal $I''(V)$, d.h. über $\rho:T(V) \longrightarrow \wedge(V) = T(V)/I''(V)$,

$$f': T(V) \xrightarrow{\rho} \wedge(V) \xrightarrow{\tilde{f}} S,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{f}$ mit $f' = \tilde{f}\circ\rho$, d.h. mit

$$\tilde{f}(v_1\wedge...\wedge v_i) = \tilde{f}(\rho(v_1\otimes...\otimes v_i)) = f'(v_1\otimes...\otimes v_i) = f(v_1)\bullet...\bullet f(v_i)$$

Speziell für i = 1 sehen wir, daß $\tilde{f}$ die Abbildung f fortsetzt. Es reicht zu zeigen, $\tilde{f}$ ist ein Homomorphismus von K-Algebren. Der Beweis erfolgt in derselben Weise wie im Fall der symmetrischen Algebra.

QED.

6.9.12 Vergleich mit den Graßmann-Algebren

Seien V ein K-Vektorraum mit der Basis $v_1,...,v_n \in V$. Für festes $k\in\mathbb{N}$ und jede echt aufsteigende Folge

$$i_1 < i_2 < ... < i_k$$

von natürlichen Zahlen aus {1,...,n} führen wir ein Symbol

(1) $$e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge...\wedge e_{i_k}$$

ein. Bezeichne

$$\wedge^k K^n = \oplus\, K e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge...\wedge e_{i_k}$$

den von der Menge dieser Symbole frei erzeugte K-Vektorraum. Für k = 1 erhalten wir

$$\wedge^1 K^n = Ke_1+....+Ke_n = K^n.$$

Für k = n erhalten wir den 1-dimensionalen K-Vektorraum

$$\wedge^n K^n = K\, e_1\wedge....\wedge e_n$$

und für k > n ist $\wedge^k K^n = 0$. Für k = 0 wollen wir

$$\wedge^0 K^n = K$$

setzen.. Schließlich sei

(2) $$K<e_1,...,e_n> := \oplus_{k=0}^{\infty} \wedge^k K^n = \wedge^0 K^n \oplus \wedge^1 K^n \oplus .....\oplus \wedge^n K^n$$

die direkte Summe aller $\wedge^k K^n$ Wir wollen jetzt auf dem Vektorraum (2) eine Multiplikation einführen. Dazu ist es nützlich, die Symbole (1) auch zu definieren, wenn die indizes i_ν keine echt aufsteigende Folge bilden. Wir setzen wir für jede Permutation $\pi\in S_k$

$$e_{i_{\pi(1)}}\wedge e_{i_{\pi(2)}}\wedge...\wedge e_{i_{\pi(k)}} := \mathrm{sign}(\pi)\cdot e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge...\wedge e_{i_k}$$

Weiter vereinbaren wir, daß ein Symbol der Gestalt (1) mit mehrfach auftretenden Indizes den Nullvektor bezeichnen soll. Mit diesen Vorbereitungen können wir nun eine Multiplikation in

$$K<e_1,...,e_n>$$

einführen, inden wir setzen

$$\Big(\sum_{i_1...i_k} c_{i_1...i_k} e_{i_1}\wedge...\wedge e_{i_k}\Big)\cdot\Big(\sum_{j_1...j_\ell} d_{j_1...j_k} e_{j_1}\wedge...\wedge e_{j_\ell}\Big)$$

$$:= \sum_{i_1...i_k j_1...j_\ell} c_{i_1...i_k} d_{j_1...j_k} e_{i_1}\wedge...\wedge e_{i_k}\wedge e_{j_1}\wedge...\wedge e_{j_\ell}$$

Dann gibt es genau einen K-Algebra-Homomorphismus

$$K<e_1,...,e_n> \to \wedge(V) \text{ mit } x_i \mapsto v_i .$$

Dieser Homomorphismus ist sogar ein Isomorphismus.

Beweis. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$i: V \to K<e_1,...,e_n>,\ \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha v_\alpha \mapsto \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha e_\alpha$$

<u>1. Schritt</u>. $K<e_1,...,e_n>$ genügt der Universalitätseigenschaft der äußeren Algebra.
Seien S eine K-Algebra und

$$f: V \to S$$

eine K-lineare Abbildung mit

$$f(v)\cdot f(v) = 0 \text{ für jedes } v\in V.$$

Wir haben zu zeigen, es gibt genau einen K-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{f}: K<e_1,...,e_n> \to S$$

mit $\tilde{f}\circ i = f$, d.h. mit

$$\tilde{f}(e_\alpha) = \tilde{f}(i(v_\alpha)) = f(v_\alpha).$$

<u>Eindeutigkeit von</u> $\tilde{f}$.
Jedes Element von $K< e_1,...,e_n>$ hat die Gestalt

$$c = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<...<i_k} c^k_{i_1,...,i_k} e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge...\wedge e_{i_k}$$

Falls $\tilde{f}$ existiert, so gilt

$$\tilde{f}(c) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<...<i_k} c^k_{i_1,...,i_k} \tilde{f}(e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge...\wedge e_{i_k}) \quad (\tilde{f} \text{ ist K-Algebra-Homomorphismus})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<...<i_k} c^k_{i_1,...,i_k} \tilde{f}(e_{i_1})\wedge e_{i_2}\wedge...\wedge\tilde{f}(e_{i_k})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<...<i_k} c^k_{i_1,...,i_k} f(e_{i_1})\wedge e_{i_2}\wedge...\wedge f(e_{i_k}) \qquad (\text{wegen } \tilde{f}\circ i = f).$$

Damit ist die Eindeutigkeit von $\tilde{f}$ bewiesen.

<u>Existenz von</u> $\tilde{f}$. Wir setzen

$$\tilde{f}(c) := \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<...<i_k} c^k_{i_1,...,i_k} f(e_{i_1})\wedge e_{i_2}\wedge...\wedge f(e_{i_k})$$

für

$$c = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<...<i_k} c^k_{i_1,...,i_k} e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge...\wedge e_{i_k} .$$

Diese Definition ist korrect, weil die Vektoren

$$e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge...\wedge e_{i_k} .$$

mit $i_1 < ... < i_k$ eine Basis des K-Vektorraums $K<e_1,...,e_n>$ bilden, d.h. weil die Koeffizienten $c^k_{i_1,...,i_k}$ durch c eindeutig bestimmt sind. Nach Definition gilt dann insbesondere

$$\tilde{f}(i(v_\alpha)) = \tilde{f}(e_\alpha) = f(e_\alpha),$$

d.h. es ist $\tilde{f}\circ i = f$. Nach Konstruktion ist $\tilde{f}$ K-linear. Wir haben noch zu zeigen,

$$\tilde{f}(c'\cdot c'') = \tilde{f}(t')\cdot \tilde{f}(t'') \text{ für } c',c''\in K< e_1,...,e_n>.$$

Das sieht man durch direktes Nachrechnen.

QED.

Bemerkungen

(i) Das Bild

$$\wedge(V)_\ell$$

der ℓ-ten Tensorpotenz $V^{\otimes\ell} = T(V)_\ell$ bei der natürlichen Abbildung

$$\rho: T(V) \longrightarrow \wedge(V),\ v_1\otimes...\otimes v_i \mapsto v_1\wedge...\wedge v_i$$

heißt ℓ-te <u>äußere Potenz</u> von V. Beim gerade konstruierten Isomorphismus

$$\wedge(V) \xrightarrow{\cong} K<e_1,...,e_n>$$

entspricht diese ℓ-te äußere Potenz gerade den K-Linearkombinationen von ℓ-fachen äußeren Produkten Vektoren e_i. Insbesondere hat dieser Vektorraum die Dimension

$$\dim \wedge(V)_\ell = \binom{n}{\ell}.$$

(ii) Da die $V^{\otimes\ell}$ den Vektorraum T(V) erzeugen, erzeugen die $\wedge(V)_\ell$ den Faktorraum $\wedge((V)$,

$$\wedge(V) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \wedge(V)_\ell.$$

Da sich jedes Element der Graßmann-Algebra auf genau eine Weise als Summe homogener Elemente schreiben läßt, ist diese Summe sogar direkt.

$$\wedge(V) = \oplus_{\ell=0}^{\infty} \wedge(V)_\ell.$$

(iii) Die äußeren Potenzen lassen sich in ähnlicher Weise durch eine Universalitätseigenschaft charakterisieren, wie die Tensorpotenzen und die symmetrischen Potenzen. Für jeden K-Vektorraum U bezeichne

$$\wedge(V, U)_\ell$$

den K-Vektorraum der ℓ-linearen schiefsymmetrischen Abbildungen $V\times...\times V \longrightarrow U$. Weiter sei δ_ℓ die natürliche Abbildung

$$\delta_\ell: V\times...\times V \xrightarrow{\rho_\ell} V^{\otimes\ell} \longrightarrow \wedge(V)_\ell,\ (v_1,..., v_\ell) \mapsto v_1\wedge...\wedge v_\ell,$$

(welche schiefsymmetrisch ist, denn in $\wedge(V)$ ist antikommutieren die homogenen Elemente des Grades 1). Dann ist die lineare Abbldung

$$\mathrm{Hom}_K(\wedge(V)_\ell , U) \longrightarrow \wedge(V, U)_\ell ,\ \tilde{g} \mapsto \tilde{g}\circ\delta_\ell,$$

ein Isomorphismus für jedes U. Insbesondere gilt

$$\dim_K \wedge(V, U)_\ell = \dim_K \wedge(V)_\ell\bullet\dim_K U = \binom{n}{\ell}\bullet\dim_K U.$$

(iv) Der Übergang zu den äußeren Potenzen ist funktoriell. Insbesondere ist für jeden linearen Endomorphismus

$$f: V \longrightarrow V$$

eines n-dimensionalen Vektorraums die induzierte Abbildung auf der höchsten äußeren Potenz

$$\wedge(f)_n: \wedge(V)_n \longrightarrow \wedge(V)_n,\ x \mapsto \det(f)\cdot x$$

gerade die Multiplikation mit der Determanten von f.

Beweis. Die Beweise sind analog zu den Beweisen der entsprechenden Aussagen zur symmetrischen Algebra. Die letzte Aussage ergibt sich durch Wahl einer Basis von V und der zugehörigen Basis des 1-dimensionalen Raums $\wedge(V)_\ell$ zusammen mit der Leibnitzschen Determinanten-Formel. Für

$$V = Kv_1 + \ldots + Ke_n$$

und

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}v_j$$

erhalten wir

$$\wedge(V)_n = Kv_1\wedge\ldots\wedge v_n$$

und

$$\begin{aligned} f(v_1\wedge\ldots\wedge v_n) &= f(v_1)\wedge\ldots\wedge f(v_n) \\ &= (\sum_{\alpha_1=1}^{n} a_{\alpha_1 1}v_{\alpha_1 j})\wedge\ldots\wedge(\sum_{\alpha_n=1}^{n} a_{\alpha_n n}v_{\alpha_n}) \\ &= \sum_{\alpha_1=1}^{n} \ldots \sum_{\alpha_n=1}^{n} a_{\alpha_1 1}\cdot\ldots\cdot a_{\alpha_n n}\cdot v_{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge v_{\alpha_n} \end{aligned}$$

Summanden, in denen rechts einer der Basis-Vektoren doppelt vorkommt sind dabei gleich Null. Statt unabhängig voneinander über alle α_i zu summieren reicht es über alle Permutationen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von $(1, \ldots, n)$ zu summieren:

$$\begin{aligned} f(v_1\wedge\ldots\wedge v_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n}\cdot v_{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge v_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n}\cdot v_1\wedge\ldots\wedge v_n \\ &= \det(a_{ij})\cdot v_1\wedge\ldots\wedge v_n. \end{aligned}$$

QED.

6.9.13 Die Clifford-Algebra

Seien V ein K-Vektorraum mit symmetrischer bilinearer Abbildung $b: V \times V \longrightarrow K$ und

$$J(V) \subseteq T(V)$$

das von den Elementen der Gestalt

$$v\otimes v - b(v,v) \text{ mit } v\in V$$

erzeugte Ideal. dann heißt

$$C(V) = C_K(V) = T(V)/J(V)$$

<u>Clifford-Algebra</u> von b über K. Die Zusammensetzung

$$V \to T(V) \xrightarrow{\rho} C(V)$$

der natürlichen Einbettung (im Grad 1) mit der natürliche Abbildung auf den Faktorring heißt wieder natürliche Einbettung (im Grad 1). Analog definiert man die natürliche Einbettung

$$K \to T(V) \xrightarrow{\rho} C(V)$$

im Grad 0.

Bemerkungen

(i) Ist b identisch Null, so fällt die Clifford-Algebra mit der äußeren Algebra zu sammen, die Clifford-Algebra verallgemeinert also den Begriff der äußeren Algebra.

(ii) Die Injektiviät der natürlichen Einbettungen ist im Fall der Clifford-Algebra weniger offensichtlich als im Fall der symmetrischen oder äußeren Algebren. Sie ergibt als Nebeneffekt einer genaueren Analyse der Struktur der Clifford-Algebra, die wir hier nur skitzieren wollen.

(iii) Schreibt man

$$T(V) = T'(V) \oplus T''(V)$$

mit

$$T'(V) = \oplus_{n=0}^{\infty} T(V)_{2n} \text{ und } T''(V) = \oplus_{n=0}^{\infty} T(V)_{2n+1}$$

so erhält man eine zweite Beschreibung der Tensoralgebra als graduierter Ring, wobei homogene Elemente nur den Grad 0 oder 1 haben können. Dabei muß man den Grad als Restklasse modulo 2 betrachten,

$$\deg x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 = \mathbb{F}_2 \text{ für x homogen}$$

damit für homogene Elemente x und y weiterhin gilt

$$\deg (xy) = \deg x + \deg y.$$

Bezüglich dieser neuen Graduierung wird das definierende Ideal J(V) der Clifford-Algebra von homogenen Elementen (des Grades 0) erzeugt. Das hat zur Folge, daß auch die Clifford-Algebra eine Graduierung

$$C(A) = C'(A) \oplus C''(A).$$

besitzt. Um diese neue Graduierung von der bisher betrachteten zu unterscheiden, nenne wir die letztere eine $\mathbb{Z}_2$-Graduierung, die erstere eine $\mathbb{Z}$-Graduierung.

(iv) Sind $x, y \in V$ zwei Elemente mit $x \perp y$, so gilt in C(V):

$$\begin{aligned} x\bullet y + y\bullet x &= (x+y)\bullet(x+y) - x\bullet x - y\bullet y \\ &= \langle x+y, x+y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle \\ &= \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Elemente aus V, die aufeinander senkrecht stehen kommutieren also in C(V),

$$x\bullet y = - y\bullet x \text{ in } C(V) \text{ für Elemente } x, y \in V \text{ mit } x \perp y.$$

Da jedes Element von C(V) eine Summe von Produkten von Elementen aus V ist, ergibt sich daraus für homogene Elemente

$$x\bullet y = (-1)^{\deg x \bullet \deg y}\, y\bullet x \qquad \text{für homogene Elemente } x, y \in C(V).$$

6.9.14 Das Tensorprodukt graduierter Algebren

Seien K ein Körper und S, S' zwei K-Algbren. Dann besitzt

$$S \otimes_K S' \tag{1}$$

die Strutur einer K-Algebra mit

$$(s\otimes s')\bullet(t\otimes t') = (st)\otimes(s't') \qquad \text{für } s,t, \in S \text{ und } s',t' \in S'.$$

Sind S und S' graduierte K-Algebren, d.h. zerfallen sie als K-Vektorräume in direkte Summen

$$S = \oplus_{d=0}^{\infty} S_d \text{ und } S' = \oplus_{d=0}^{\infty} S'_d$$

mit

$$S_a \bullet S_b \subseteq S_{a+b} \text{ bzw. } S'_a \bullet S'_b \subseteq S'_{a+b}$$

für alle a und b, so kann man die Multiplikation auf (1) auch so wählen, daß gilt

$$(s\otimes s')\bullet(t\otimes t') = (-1)^{ab}(st)\otimes(s't') \qquad \text{für } s\in S,\ s'\in S_a,\ t \in S'_b\ s',t' \in S'.$$

Das Tensorprodukt (1) mit dieser abgeändertern Multiplikation heißt auch <u>graduiertes Tensorprodukt</u> der graduierten K-Algebren S und S' und wird mit

$$S \tilde{\otimes} S'$$

bezeichnet.

Beweis. Die Abbildung

$$\varphi: S\times S'\times S\times S' \longrightarrow S\otimes_K S',\ (s,s',t,t') \mapsto (st)\otimes(s't'),$$

ist linear in s, t, s' und t'. Sie faktorisiert sich deshalb über die natürliche Abbildung[20]

$$\rho: S\times S'\times S\times S \longrightarrow S\otimes_K S'\otimes_K S\otimes_K S,\ (s, s', t, t') \mapsto s\otimes s'\otimes t\otimes t',$$

ins Tensorprodukt:

$$\varphi: S\times S'\times S\times S \xrightarrow{\rho} S\otimes_K S'\otimes_K S\otimes_K S \xrightarrow{\tilde{\varphi}} S\otimes_K S'$$

mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $\tilde{\varphi}$ mit $\varphi = \tilde{\varphi}\circ\rho$, d.h. mit

$$\tilde{\varphi}(s\otimes s'\otimes t\otimes t') = \varphi(s,s',t,t') = (st)\otimes(s't').$$

Durch Zusammensetzen von $\tilde{\varphi}$ mit der natürlichen Abbildung

$$\rho': S\otimes_K S' \times S\otimes_K S' \longrightarrow S\otimes_K S'\otimes_K S\otimes_K S',\ (x, y) \mapsto x\otimes y,$$

erhalten wir eines Abbildung

$$\psi = \tilde{\varphi}\circ\rho': S\otimes_K S' \times S\otimes_K S' \longrightarrow S\otimes_K S'$$

mit

$$\psi(s\otimes s', t\otimes t') = \tilde{\varphi}(\rho'(s\otimes s', t\otimes t')) = \tilde{\varphi}(s\otimes s'\otimes t\otimes t') = (st)\otimes(s't').$$

Wir haben gezeigt, die oben angegebene Formel für die Multiplikation in $S\otimes_K S'$ beschreibt eine wohldefinierte Abibldung.

Durch direktes Nachrechnen sieht man, daß die so definierte Multiplikation die üblichen Eigenschaften hat und $S\otimes_K S'$ mit der Struktur einer K-Algebra versieht.

Die modifizierte Formel für die Multiplikation im Fall graduierter K-Algebren

$$S = \oplus_{n=0}^{\infty} S_n \text{ und } S' = \oplus_{n=0}^{\infty} S'_n$$

---

[20] Wir haben das eigentlsich nur für den Fall S = S' gezeigt. Mit Hilfe der vierten Tensorpotenz von $S\oplus S'$ und deren Universalitätseigenschaft erhält man diese Ausage durch einschränken auf den direken Summannden $S\otimes_K S'\otimes_K S\otimes_K S$ von $(S\oplus S')^{\otimes 4}$.

ergibt sich aus der eben konstruierten durch Zusammensetzen mit einem linearen Endomorphismus von

$$S\otimes_K S' = \oplus_{n=0}^{\infty} \oplus_{a+b=n} S_a \otimes S'_b,$$

der auf $S_a \otimes S'_b$ in der Multiplikation mit $(-1)^{ab}$ besteht.

QED.

6.9.15 Die Universalitätseigenschaft der Clifford-Algebra

Seien V ein K-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform

$$b: V \times V \longrightarrow K.$$

Für jede K-Algbra S und jede K-lineare Abbildung

$$f: V \longrightarrow S$$

mit

$$f(v)^2 = b(v,v)\bullet 1_S$$

gibt es genau einen K-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{f}: C(V) \longrightarrow S$$

mit

$$f = \tilde{f}\circ i,$$

wobei $i: V \longrightarrow C(V)$ die oben beschriebene natürliche Einbettung bezeichne.

Beweis. Auf Grund der Universalitätseigenschaft der Tensor-Algebra läßt sich f auf genau eine Weise zu einem K-Algebra-Homomorphismus

$$f': T(V) \longrightarrow S$$

fortsetzen. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, das definierende Ideal J(V) der Clifford-Algebra

$$C(V) = T(V)/J(V)$$

liegt ganz im Kern von f',

$$J(V) \subseteq \mathrm{Ker}(f'), \tag{1}$$

denn dann faktorisiert sich f' eindeutig über die natürliche Abbildung $T(V) \longrightarrow C(V)$. Zum Beweis von (1) reicht es zu zeigen, ein Erzeugendensystem des Ideals J(V) liegt ganz im Kern von f', d.h. es reicht zu zeigen,

$$f'(v \otimes v - b(v, v)) = 0$$

für jedes $v \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(v \otimes v - b(v, v)) &= f'(v \otimes v) - f'(b(v,v))\bullet 1) \\ &= f'(v)\bullet f'(v) - b(v,v)\bullet f(1) \\ &= f(v)^2 - b(v,v)\bullet 1_S \\ &= 0. \end{aligned}$$

QED.

6.9.16 Die Clifford-Algebra einer orthogonalen direkten Summe

Seien V ein K-Vektorraum mit der Bilinearform

$$b: V \times V \longrightarrow K$$

und

$$V = V' \oplus V''$$

eine orthogonale direkte Zerlegung mit zweil K-linearen Unterräumen V' und V''.
Dann ist die Clifford-Algebra von V,

$$C(V) \cong C(V')\tilde{\otimes}C(V''),$$

isomorph zum graduierten Tensorprodukt der Clifford-Algebren von V' und V'' (bezüglich der $\mathbb{Z}_2$-Graduierung der Clifford-Algebra).

Beweis. d auf der rechten Seite besitzt die Universalitätseigenschaft von C(V). Nach Bemerkung 6.9.13 (iv) stimmen die Multiplikationen auf beiden Seiten überein.
QED.

6.9.17 Die Clifford-Algebra von $<c_1,...,c_n>$

Seien V der K-Vektoraum mit symmetrischer Bilinearform

$$V = <c_1,...,c_n>$$

und bezeichne wie üblich

$$e_1,..., e_n \in V = K^n$$

die Standard-Basis. Dann gilt

$$C(<c_1,...,c_n>) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{1\le i_1<...<i_k\le n} Ke_{i_1}\bullet e_{i_2}\bullet ...\bullet e_{i_k}$$

wobei die Erzeuger

$$1, e_1, ... , e_n , ... , e_{i_1}\bullet e_{i_2}\bullet ...\bullet e_{i_k} , ... , e_1\bullet ... \bullet e_n$$

(mit $i_1 < ... < i_k$) linear unabhängig sind. Weiter ist

$$e_i\bullet e_j = - e_j\bullet e_i \text{ und } e_i^2 = c_i.$$

Insbesondere ist $V = K^n = Ke_1+...+Ke_n$ ein linearer Unterraum der Clifford-Algebra, und es gilt

$$\dim C(<c_1,...,c_n>) = 2^n$$

Beweis. Nach 6.9.16 gilt

$$C(<c_1,...,c_n>) = C(<c_1>)\otimes...\otimes C(<c_n>),$$

und die Berechnung von C(V) ist damit auf den 1-dimensionalen Fall reduziert.

Im Fall $V = <c>$ ist

$$T(V) = K[T]$$

der Polynomring über K in der Unbestimmten $T = e_1$ und

$$J(V)$$

ist das Ideal welches von den Elementen der Gestalt

$$v\otimes v - b(v,v) = (\lambda T)^2 - \lambda^2 c = \lambda^2(T^2 - c)$$

mit $v = \lambda e_1$ erzeugt wird, d.h. J(V) besteht aus den Vielfachen des Polynoms $T^2 - c$,

$$J(V) = (T^2 - c)K[T].$$

Ist t die Restklasse von T, so gilt

$$C(<c>) = K + K\bullet t + K\bullet t^2 + \ldots$$

und $t^2 = c$, d.h.

$$C(<c>) = K + K\bullet t \text{ mit } t^2 = c$$

Insbesondere ist

$$\dim_K C(<c>) = 2.$$

Damit erhalten wir für $V = <c_1,...,c_n>$:

$$\dim C(<c_1,...,c_n>) = 2^n$$

und

$$C(<c_1,...,c_n>) = \oplus_{k=0}^{n} \oplus_{i_1<...<i_k} Ke_{i_1}e_{i_2}\bullet...\bullet e_{i_k}$$

QED.

Beispiel.

Für $K = \mathbb{R}$ und $V = <-1,-1>$ ist

$$C(V) = \mathbb{R} + \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_1e_2$$

und

$e_1^2 = -1,$

$e_2^2 = -1,$

Wegen $e_2e_1 = - e_1e_2$ erhalten wir weiter

$(e_1e_2)^2 = e_1e_2e_1e_2 = - (e_1e_1)(e_2e_2) = -1.$

Als Clifford-Algebra von <-1, -1> erhalten wir gerade die Algbra der Hamiltonschen Quaternionen.

7. Ergänzungen

7.1 Moduln

7.1.1 Definition

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Die Definition des R-Moduls erhält man, indem man in der Definition des K-Vektorraums den Körper K durch R ersetzt.
Verzichtet man auf die Kommutativität von R, so gibt es zwei naheliegende Möglichkeiten, die Definition zu Verallgemeinern. Multipliziert man mit Elementen aus R stets von links, so erhält man den Begriff des linken R-Moduls, multipliziert man stets von rechts, den des rechten R-Modjuls.

7.1.2 Beispiele und besondere Phänome

Minimale Erzeugendensysteme brauchen keine Basen zu sein
Basen brauchen nicht zu existieren

7.1.3 Verallgemeinerungen des Dimensionsbegriffs

rk M = Rang eines Moduls (= Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren)

$\mu(M)$ = Minimale Anzahl der Elemente eines EZS
$\ell(M)$ = Länge eines Moduls

7.1.4 Kerne, Kokerne, exakte Sequenzen

7.1.5 Noethersche Ringe und Moduln

7.2 Darstellungen endlicher Gruppen (über $\mathbb{C}$)

vgl. das Buch von Serre

7.3 Kategorien und Funktoren

7.3.1 Der Begriff der Kategorie

Eine Kategorie C besteht

(i) aus einer Klasse

$$|C| = ob(C),$$

welche Objekte der Kategorie heißen,

(ii) aus einer Menge

$$Hom(X, Y) = Hom_C(X, Y)$$

für je zwei Objekte X, Y der Kategorie, deren Elemente Morphismen mit der Quelle X und dem Ziel Y heißen. Für jedes Element f aus Hom(X, Y) schreibt man

$$source(f) = X \text{ und } target(f) = Y$$

und nennt X Quelle von f und Y Ziel von f. Man verwendet dann auch die Bezeichnung

$$f: X \to Y \text{ oder } X \xrightarrow{f} X .$$

und sagt, f ist ein Morphismus von X nach Y.

(iii) aus einer Abbildung

$$Hom(X, Y) \times Hom(Y, Z) \to Hom(X, Z), (f, g) \mapsto g\circ f ,$$

für je drei Objekte X, Y, Z der Kategorie, welche Morphismen-Komposition heißt.

Dabei wird gefordert, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(a) Die Morphismen Komposition ist assozialtiv, d.h. es gilt

$$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$$

für je drie Morphismen f, g, h mit

$$target(h) = source(g) \text{ und } target(g) = source(f).$$

(b) Existenz der identischen Morphismen. Für jedes Objekt $X \in |C|$ gibt es einen Morphimus

$$id_X \in Hom(X, X)$$

mit

$$f\circ id_X = f$$

für jeden Morphismus mit der Quelle X und

$$id_X\circ f = f$$

für jeden Morphismus mit dem Ziel X.

(c) Die Hom-Mengen sind paarweis disjunkt[21]

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \cap \mathrm{Hom}(X', Y') = \emptyset \text{ für } (X, Y) \neq (X', Y').$$

7.3.2 Beispiele

Ens die Kategorie der Mengen
Vect$_K$ die Kategorie der Vektorräume über einem Körper K
Groups die Kategorie der Gruppen
Rings die Kategorie der Ringe
Ab die Kategorie der abelschen Gruppen
Top die Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen
Filt$_{K,I}$ die Kategorie der filtrierten K-Vektorräume über der linear geordneten Menge I[22]
A-**Mod** die Kategorie der linken A-Moduln
Mod-A die Kategorie der rechten A-Moduln
Cat die Kategorie der Kategorien
C^{op} die zur Kategorie C duale Kategorie
C/X die Kategorie der Objekte der Kategorie C über dem Objekt X.

Die Kategorie der metrischen Räume und kontrahierenden Abbildungen
Interpretation der Gruppen als Kategorie
Interpretation der halbgeordneten Mengen als Kategorie
Interpretation der topologischen Räume als Kategorien

7.3.3 Spezielle Objekte

Ein Objekt I der Kategorie C heißt initiales Objekt oder auch Anfangsobjekt, wenn es für jedes Objekt X von C genau einen Morphismus

$$I \longrightarrow X$$

gibt. Ein Objekt T der Kategorie C heißt terminales Objekt oder auch Endobjekt, wenn es für jedes Objekt X von C genau einen Morphismus

$$X \longrightarrow T$$

gibt. Ein Null-Objekt der Kategorie C ist ein Objekt, welches gleichzeitig initial und terminal ist.

Bemerkung

Ist C eine Kategorie mit Nullobjekt 0, so gibt es für je zwei Objekte X und Y von C einen Morphismus $X \longrightarrow Y$, der sich über das Nullobjekt 0 faktorisiert, d.h. das Diagramm

---

[21] Diese Bedingung reflektiert die Ansicht, daß Abbildungen, die zwischen verschiedenen Mengen abbilden, als verschieden angesehen werden sollten, auch wenn deren Abbildungsvorschriefen dieselben sind.

[22] Die Objekte sind die Familien $\{V_i\}_{i\in I}$ von K-Vektorräumen mit der Eigenschaft, daß im Fall $i \le j$ der Vektorraum V_i ein K-linearer Unterraum von V_j ist. Die Morphismen

$$f: \{V_i\}_{i\in I} \longrightarrow \{V'_i\}_{i\in I}$$

sind die Famlien $\{f_i\}_{i\in I}$ von K-linearen Abbildung $f_i: V_i \longrightarrow V'_i$ mit der Eigenschaft, daß im Fall $i \le j$ gilt $f_j|_{V_i} = f_i$. Die Morphismen-Komposition wird durch die Zusammensetzung von Abbildugnen definiert.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & 0 & \end{array}$$

ist kommutativ. Dieser Morphismus heißt Null-Morphismus von Hom(X, Y) und wird meist mit 0 bezeichnet.

Beispiele
Die leere Menge ist ein initiales Objekt von **Ens**. Die Mengen mit genau einem Element sind die terminalen Objekte von **Ens**. Die Kategorie **Ens** besitzt keine Null-Objekte.

Der Null-Vektorraum ist ein Null-Objekt von Vect_K für jeden Körper K. Die triviale Gruppe (mit nur einem Element) ist ein Null-Objekt von **Ab** und **Groups**.

7.3.4 Spezielle Morphismen: Monomorphismen, Epimorphismen, Isomorphismen, Automorphismen

Ein Endomorphismus einer Kategorie C ist ein Morphismus f: X → Y mit X = Y.

Ein Morphismus f: X → Y der Kategorie C heißt Monomorphismus, wenn für je zwei unterschiedliche Morphismen g', g" mit dem Ziel X auch die Kompositionen f∘g' und f∘g" verschieden sind, d.h. die die folgende Implikation besteht

$$f\circ g' = f\circ g'' \Rightarrow g' = g''.$$

Ein Morphismus f: X → Y der Kategorie C heißt Epimorphismus, wenn für je zwei unterschiedliche Morphismen g', g" mit der Quelle Y auch die Kompositionen g'∘f und g"∘f verschieden sind, d.h. die die folgende Implikation besteht

$$g'\circ f = g''\circ f \Rightarrow g' = g''.$$

Ein Morphismus f: X → Y der Kategorie C heißt Isomorphismus, wenn es in C einen Morphismus g: Y → X gibt mit

$$g\circ f = id_X \text{ und } f\circ g = id_Y.$$

Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus f: X → Y mit X = Y.

7.3.5 Beipiele: Epimorphie und Surjektivität, Bijektvität und Isomorphie

Sei X eine Kategorie, deren Morphismen Abbildungen sind und deren Morphismen-Komposition die gewöhnliche Zusammensetzung von Abbildungen ist. Dann sind surjektive Abbildungen Epimorphismen und injektive Abbildungen Monomorphismen.
Beispiel:
In der Kategorie der topologischen Räume (oder der Kategorie der metrischen Räume) ist die natürliche Einbettung

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x,$$

der rationalen in die reellen Zahlen ein Epimorphismus (welcher nicht surjektiv ist).
Beispiel:
Sei C die Kategorie, deren einziges Objekt die Menge der reellen Zahlen ist,

$$|C| = \{\mathbb{R}\}.$$

Die Menge

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

bestehe aus den Abbildungen

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

mit

$$f(x) = f(-x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Man beachte, die Abbildung

$$id: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto |x|,$$

hat die Eigenschaften des identischen Morphismus: für jeden Morphismus f und jedes reelle x gilt:

$id(f(x)) = |f(x)| = f(x)$ (da die Werte von f nicht-negativ sind.
$f(id(x)) = f(|x|) = f(x)$ (wegen $f(x) = f(-x)$).

Kein Morphismus f dieser Kategorie ist injektiv (wegen $f(x) = f(-x)$).
Die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow x^2,$$

ist ein Morphismus dieser Kategorie. Für zwei Morphismen

$$g', g'': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$fg' = fg''$$

gilt $g'(x)^2 = g''(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $|g'(x)| = |g''(x)|$. Da die Werte von g' und g'' nicht-negativ sind, folgt $g'((x) = g''(x)$ für alle x, also $g' = g''$. Mit anderen Worten, f ist ein Monomorphismus.

Beispiel:
Wir betrachten die Kategorie $\mathrm{Filt}_{K,I}$ mit $I = \{0,1\}$ (versehen mit der natürlichen Ordnung). Bezeichne X den Vektorraum K mit der Filtration

$$0 \subseteq K$$

und Y den Vektorraum K mit der Filtration

$$K \subseteq K.$$

Die identischen Abbildung definiert dann einen Morphismus

$$f: X \to Y.$$

Dieser ist kein Isomorphismus.

7.3.6 Funktoren

Seien C und D zwei Kategorien. Ein <u>Funktor</u> oder auch <u>kovarianter Funktor</u>

$$F: C \longrightarrow D$$

besteht aus einer Abbildung

$$F: |C| \longrightarrow |D|,\ X \mapsto F(X),$$

und für je zwei Objekte X und Y von C aus einer Abbildung

$$F: \mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X), F(Y)),\ X \xrightarrow{\alpha} Y \mapsto F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y).$$

Dabei gilt

1. $F(Id_X) = Id_{F(X)}$ für jedes Objekt X von C.
2. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ für je zwei Morphismen $X \xrightarrow{g} Y$ und $Y \xrightarrow{f} Z$ von C.

Ein <u>Kofunktor</u> oder auch <u>kontravarianter Funktor</u> $C \longrightarrow D$ ist ein Funktor $C^{op} \longrightarrow D$.

7.3.7 Beispiele für Funktoren

(i) <u>Der kovariante Hom-Funktor</u>. Für jede Kategorie C und jedes Objekt X von C ist durch

$$h_X: C \longrightarrow \mathrm{Ens},\ Z \mapsto \mathrm{Hom}(X, Z),\ Z \xrightarrow{f} Z' \mapsto (X \xrightarrow{\alpha} Z \mapsto X \xrightarrow{f\alpha} Z')$$

ein Funktor definiert, der <u>kovariante Hom-Funktor</u>.

(ii) Der kontravariante Hom-Funktor. Für jede Kategorie C und jedes Objekt X von C ist durch

$$h^X: C^{op} \longrightarrow Ens, Z \mapsto Hom(Z, X), Z \xrightarrow{f} Z' \mapsto (Z' \xrightarrow{\alpha} X \mapsto Z \xrightarrow{\alpha f} X)$$

ein Kounktor definiert, der kontrvariante Hom-Funktor.

(iii) Der duale Vektorraum. Der Übergang zum dualen Vektorraum und zur dualen Abbildung definiert einen kontravarianten Funktor

$$Vect_K \longrightarrow Vekt_K, V \mapsto V^*, f \mapsto f^*.$$

(iv) Direkte Summen von Vektorräumen. Für jeden K-Vektorraum V definiert die direkte Summe mit V einen Funktor

$$V\oplus: Vect_K \longrightarrow Vect_K, W \mapsto V\oplus W, f \mapsto Id_V \oplus f.$$

(v) Tensorprodukte. Für jeden K-Vektorraum V definiert das Tensorprodukt mit V einen Funktor

$$\otimes_K V: Vect_K \longrightarrow Vect_K, W \mapsto W\otimes_K V, f \mapsto f\otimes Id_V.$$

Für jeden Körper K und jeden Teilkörper $k \subseteq K$ definiert das Tensorprodukt mit K übert k einen Funktor

$$\otimes_k K: Vect_k \longrightarrow Vect_K, V \mapsto V\otimes_k K, f \mapsto f\otimes Id_K.$$

(vi) Faktorräume. Seien K ein Körper und C die Kategorie der Paare (V, W) bestehend aus einem K-Vektorraum V und einem K-linearen Unterraum $W \subseteq V$. Die Morphismen

$$(V, W) \longrightarrow (V', W')$$

der Kategorie C seien die K-linearen Abbildungen $f: V \longrightarrow V'$ mit $f(W) \subseteq W'$. Dann ist durch

$$F: C \longrightarrow Vect_K, (V, W) \mapsto V/W,$$

ein Funktor definiert. Der zum Morphismus $f: (V, W) \longrightarrow (V', W')$ gehörige Morphismus F(f) sei dabei die lineare Abbildung

$$F(f): V/W \longrightarrow V'/W', v + W \mapsto f(v) + W'.$$

Bemerkung
Wie viele Objekte der Mathematik bilden auch aud Funktoren eine Kategorien. Die Morphismen dieser Kategorien heißen natürliche Transformationen oder auch funktorielle Morphimen.

7.3.8 Natürliche Transformationen

Seien C und D Kategorien und

$$F, G: C \longrightarrow D$$

zwei Funktoren. Eine natürliche Transformation

$$\xi: F \longrightarrow G$$

ordnet jedem Objekt X von C einen Morphismus

$$\xi_X: F(X) \longrightarrow G(X)$$

zu, wobei für jeden Morphismus α: X $\longrightarrow$ das folgenden Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\xi_X} & G(X) \\ F(\alpha)\downarrow & & \downarrow G(\alpha) \\ F(X') & \xrightarrow{\xi_{X'}} & G(X') \end{array}$$

Sind alle ξ_X Isomorphismen der Kategorie D, so besitzt die natürliche Transformation ξ eine Umkehrung

$$G \longrightarrow F$$

und ist ein Isomorphismus in der Kategorie

$$\text{Funkt}(C, D)$$

der Funktoren C $\longrightarrow$ D und natürlichen Transformationen.

Beispiel 1

Seien K ein Körper und C die oben definierte Kategorie der Paarer (V, W) aus einem K-Vektorraum V und einem K-linearen Unterraum W $\subseteq$ Weiter betrachten wir die Funktoren

$$F: C \longrightarrow \text{Vect}_K, (V, W) \mapsto V, f \mapsto f,$$

und

$$G: C \longrightarrow \text{Vect}_K, (V, W) \mapsto V/W.$$

Dann ist die Abbildung

$$(V, W) \mapsto \rho: V \longrightarrow V/W,$$

welche jedem Paar (V, W) die natürliche Abbildung auf den Faktorraum zuordnet, eine natürliche Abbildung, denn nach Definition von G ist für jeden Morphismus

$$f: (V, W) \longrightarrow (V', W')$$

von C das folgende Diagramm kommutativ.[23]

$$\begin{array}{ccc} V=F(V,W) & \xrightarrow{\rho} & G(V,W)=V/W \\ F(f)=f\downarrow & & \downarrow G(f) \\ V'=F(V',W') & \xrightarrow{\rho} & G(V',W')=V'/W' \end{array}$$

Beispiel 2

Seien C = D = Vect_K ,

$$F = \text{Id}: C \longrightarrow D, V \mapsto V, f \mapsto f,$$

der identische Funktor und

$$G: C \longrightarrow D, V \mapsto V^{**}, f \mapsto f^{**},$$

der Funktor der jeden K-Vektorraum auf dessen doppeltes Dual und jede K-lineare Abbildung auf deren doppeltes Dual abbildet. Dann ist durch

$$V \longrightarrow V^{**}, v \mapsto (\ell \mapsto \ell(v)),$$

eine natürliche Transformation F $\longrightarrow$ G. Betrachtet man anstelle beliebiger K-Vektorträume nur solche endlicher Dimension, so sind alle diese linearen Abbildungen

[23] G(f) ist definiert als die eindeutig bestimmte K-lineare Abbildung, für welche dieses Diagramm kommutativ ist.

Isomorphismen. Die natürliche Transformation besitzt eine Umkehrung und ist ein Isomorphismus in der Kategorie

$$\mathrm{Funct}(C, D)$$

der Funktoren $C \longrightarrow D$ und natürlichen Abbildungen.

Beispiel 3

Seien K ein Körper, R eine K-Algebra, $C = D = \mathrm{Vect}_K$,

$$F = \mathrm{Id}, C \longrightarrow D, W \mapsto W, f \mapsto f,$$

der identische Funktor und

$$G: C \longrightarrow D, W \mapsto W\otimes_K R,$$

der durch das Tensorprodukt mit R definierte Funktor. Dann ist durch

$$W \longrightarrow W\otimes_K R, w \mapsto w\otimes 1,$$

eine natürliche Transformation $F \longrightarrow G$ definiert.

Beispiel 4

Seien $F: C^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ ein Funktor, $X \in |C|$ ein Objekt und $u\in F(X)$ ein Element. Für jedes Objekt Z von C betrachten wir die Abbildung

$$\xi = \xi_X : h(Z) := \mathrm{Hom}_C(Z, X) \longrightarrow F(Z), Z \xrightarrow{\alpha} X \mapsto F(\alpha)(u). \qquad (1)$$

Man beachte, weil F kontravariant ist als Funktor auf C, ist $F(\alpha)$ eine Abbildung

$$F(X) \longrightarrow F(Z),$$

d.h. (1) ist eine korrekt definierte Abbildung. Außerdem ist für jeden Morphismus

$$Z \xrightarrow{f} Z'$$

das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(Z',X) & \xrightarrow{\xi} & F(Z') \\ h(f)\downarrow & & \downarrow F(f) \\ \mathrm{Hom}(Z,X) & \xrightarrow{\xi} & F(Z) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Z' \xrightarrow{\alpha'} X & \mapsto & F(\alpha)(u) \\ \mapsto & & \mapsto \\ & & F(f)(F(\alpha')(u)) \\ Z \xrightarrow{\alpha' f} X & \mapsto & \| \\ & & F(\alpha' f)(u) \end{array}$$

Mit anderen Worte, die Familie der ξ_X definiert eine natürliche Transformation

$$h \longrightarrow F.$$

Umgekehrt liest man aus dem kommutativen Viereck mit einer beliebigen natürlichen Transformation ξ ab, daß jede natürliche Transformation

$$h = h_X \longrightarrow F$$

auf diese Weise zustande kommt: Man setze

$$Z' := X \text{ und } u := \xi(1_X).$$

Dann ergibt sich aus der Kommativität des Vierecks für $\alpha' := 1_X$

$$\begin{aligned} \xi(Z \xrightarrow{f} X) &= \xi(h(f)(1_X)) && \text{(nach Definition von } h(f)\text{)} \\ &= F(f)(\xi(1_X)) && \text{(Kommutativität des Vierecks)} \\ &= F(f)(u), \end{aligned}$$

d.h. die Abbildung ξ ist durch die Abbildungsvorschrift (1) gegeben.

7.3.9 Darstellbare Funktoren

Ein Funktor

$$F: C^{op} \longrightarrow Ens$$

heißt <u>darstellbar</u>, wenn es ein Objekt $X \in C$ gibt mit der Eigenschaft, daß F isomorph ist zum Funktor

$$h_X = Hom(?, X): C^{op} \longrightarrow Ens,\ Y \mapsto Hom(Y, X).$$

ist. Das Objekt X heißt dann <u>darstellendes Objekt</u> für F.
Sei

$$\xi: h_X \xrightarrow{\cong} F$$

die natürliche Transformation, welche die Isomorphie von h_X und F vermittelt.
Dann heißt das Bild des identischen Morphismus

$$1_X \in h_X(X) = Hom(X, X)$$

bei

$$\xi_X: h_X(X) \longrightarrow f(X)$$

<u>darstellendes Element</u> oder für F und wird mit

$$u_F = u_{F,X} = \xi_X(1_X) \in f(X)$$

bezeichnet. Das Paar $(X, u_{F,X})$ heißt auch darstellendes Paar.
Ein Funktor

$$f: C \longrightarrow Ens$$

heißt <u>kodarstellbar</u>, wenn er als Funktor

$$(C^{op})^{op} \longrightarrow Ens$$

darstellbar ist.

Beispiel

Seien C eine Kategorie mit dem Null-Objekt 0 und

$$f: X \longrightarrow Y$$

ein Morphismen. Für jedes Objekt Z sei

$$K(Z) := \{\alpha \in Hom(Z, X) \mid f \circ \alpha = 0\}$$

und für jeden Morphismus $\xi: Z \longrightarrow Z'$ sei $K(\xi)$ die Abbildung

$$K(\xi): K(Z') \longrightarrow K(Z),\ Z' \xrightarrow{\alpha} X \ \mapsto\ Z \xrightarrow{\alpha\xi} X.$$

Dann ist

$$K: C^{op} \longrightarrow Ens$$

ein Funktor, der genau dann darstellbar ist, wenn f einen Kern besitzt, und die Kerne von f ist dann darstellende Objekte von k.

Beispiel

Seien U, V, W Vektorräum über dem Körper K und bezeichne

$$L(U, V; W)$$

die Menge der über K bilinearen Abbildungen $U \times V \longrightarrow W$. Dann ist der Funktor

$$K\text{-}Mod \longrightarrow Ens,\ W \mapsto L(U, V; W),$$

kodarstellbar. Das Tensorprodukt $U\otimes_K V$ ist kodarstellendes Objekt und die natürliche Abbildung

$$U \times V \longrightarrow U\otimes_K V,\ (u, v) \mapsto u\otimes v,$$

das kodarstellende Element.

7.3.9 Darstellbare Funktoren und darstellende Paare

(i) Das darsttlende Paar ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
(ii) Ein darstellbarer Funktor ist durch sein darstellbares Paar bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Zu (i). Seien

$$F: C^{op} \longrightarrow Ens$$

ein darstellbarer Funktor und (X, u) mit $u \in F(X)$ ein darstellendes Paar. Sei

$$\xi: h = h_X \xrightarrow{\cong} F$$

der zugehörige funktorielle Isomorphismus. Für beliebige Morphismus

$$f: Z \longrightarrow Z'$$

und

$$\alpha: Z' \longrightarrow X$$

ist dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Hom(Z',X) \arrow[rr, "h(f)"] \arrow[dd, "\xi"'] & & Hom(Z,X) \arrow[dd, "\xi"] \\
& Hom(X,X) \arrow[ul, "h(\alpha)"] \arrow[ur, "h(\alpha f)"'] \arrow[dd, "\xi"] & \\
F(Z') \arrow[rr, "F(f)"] & & F(Z) \\
& F(f) \arrow[ul, "F(\alpha)"] \arrow[ur, "F(\alpha f)"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z' \xrightarrow{\alpha} X \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & Z \xrightarrow{\alpha f} X \arrow[dd, mapsto] \\
& 1_X \arrow[ul, mapsto] \arrow[ur, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & \\
\xi(\alpha) \arrow[rr, mapsto] & & \xi(\alpha f) \\
& u \arrow[ul, mapsto] \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Die vertikalen mit ξ gekennzeichneten Pfeile bezeichnen dabei bijektive Abbildungen. Insbesondere gibt es für jedes Element

$$x \in F(Z')$$

genau ein $\alpha \in Hom(Z', X)$ mit

$$x = \xi(\alpha) = \xi(h(\alpha)(1_X)) = F(\alpha)(\xi(1_X)) = F(\alpha)(u),$$

d.h.

$$x = F(\alpha)(u) \text{ für genau ein } \alpha.$$

Sei jetzt

$$(Y, v) \text{ mit } v \in F(Y)$$

ein zweites darstellendes Paar. Weil (X, u) darstellend ist, gilt

$$v = F(\alpha)(u) \text{ für genau ein } \alpha: Y \longrightarrow X.$$

Weil auch (Y, v) darstellend ist, gilt auch

$$u = F(\beta)(v) \text{ für genau ein } \beta: X \longrightarrow Y.$$

Weil F ein Funktor ist, folgt

$$u = F(\beta)(F(\alpha)(u)) = F(\alpha\beta)(u)$$

$$v = F(\alpha)(F(\beta)(v)) = F(\beta\alpha)(v)$$

d.h.

$$u = F(\alpha\beta)(u)$$
$$v = F(\beta\alpha)(v)$$

Weil (X, u) und (Y, v) darstellend sind, sind die Morphismen $\alpha\beta$ bzw. $\beta\alpha$ durch die letzten beiden Bedingungen eindeutig bestimmt. Diese Bedingungen sind aber auch erfüllt, wenn $\alpha\beta$ bzw. $\beta\alpha$ durch die identischen Morphismen ersetzt. Deshalb muß gelten

$$\alpha\beta = 1_X \text{ und } \beta\alpha = 1_Y,$$

d.h. α und β sind zueinander inverse Isomorphismen. Insbesondere sind X und Y isomorph.

Zu (ii). Der Funktor $h = h_X$ ist durch das Objekt X vollständig festgelegt, Die zweite Koordinaten des darstellenden Paars beschreibt, wie die Isomorphie $h \longrightarrow F$ zu realisieren ist.

QED.

7.3.10 Funktorielle Morphismen (natürliche Transformationen)

7.3.11 Additive Kategorien (und Beispiele)

7.3.12 Abelschen Kategorien (und Beispiele)

8. Der projektive Raum

8.1 Die Definition des P^n_K

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Dann bezeichne

$$P(V) := \{Kv \mid v \in V - \{0\}\}.$$

die Menge aller 1-dimensionalen Unterräume von V, d.h. die Menge aller Geraden in V durch den Ursprung. Speziell für $V = K^{n+1}$ setzen wir

$$P^n_K := P(K^{n+1}).$$

Diese Menge heißt n-dimensionaler projektiver Raum über K, im Fall n = 1 auch projektive Gerade über K und im Fall n = 2 projektive Ebene.

Wir schreiben

$$[x_0,...,x_n] := K\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

für die Gerade durch den Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ und den Ursprung. Es gilt dann

$$P^n_K = \{[x_0,...,x_n] \mid \begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n+1}\}$$

und

$$[x_0,...,x_n] = [y_0,...,y_n] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} y_0 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ für ein } \lambda\in K$$

$$\Leftrightarrow x_i = \lambda\cdot y_i \text{ für ein } \lambda\in K \text{ und alle i.}$$

Die x_i heißen projektive Koordinaten des Punktes $[x_0,...,x_n]$ von P^n_K.

Bemerkungen

(i) Die projektiven Koordinaten sind im Gegensatz zu gewöhnlichen Koordinaten nur bis auf einen gemeinsamen von Null verschiedenen Faktor aus K bestimmt.

(ii) Der gewöhniche Raum verhält sich zum projektiven Raum wie die Leinwand eines Malers zu der die Leinwand umgebenden Wirklichkeit. So wie man die Leinwand in der Wirklichkeit verschieden positionieren kann, so läßt sich der gewöhliche Raum auf verschiedene Weise in den projektiven Raum einbetten.

8.2 Einbettungen des K^n in den P^n_K

Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $W\subseteq V$ ein K-linearer Unterraum mit

$$\dim W = \dim V - 1$$

und

$$v \in V - W$$

verschiedener Vektor. Dann ist die folgende Abbildung injektiv.

$$\varphi: W \to P(V), w \text{ a } K(v+w).$$

Mit anderen Worten, W läßt sich mit einer Teilmenge von P(V) identifizieren. Diese Teilmenge ist unabhängig von der speziellen Wahl von des Vektors v.

Beweis. Injektivität von φ. Aus $\varphi(w) = \varphi(w')$ folgt

$$´K(v+w) = K(v+w'),$$

d.h.

$$v+w = \lambda(v+w')$$

d.h.

$$(1-\lambda)v = \lambda w' - w.$$

Der Vektor rechts liegt in W, d.h. das Bild von $(1-\lambda)v$ bei der natürlichen Abbildung $V \to V/W$ ist Null. Da dies nicht für das Bild von v gilt, folgt $1- \lambda = 0$, d.h.

$$\lambda = 1$$

also $w' = w$.

Unabhängigkeit von $\mathrm{Im}(\varphi)$ von der speziellen Wahl von v.

Es reicht zeigen, für $x\in V-\{0\}$ gilt

$$Kx \in \mathrm{Im}(\varphi) \Leftrightarrow x\{ W.$$

Man beachte, wegen $v\in V-W$ gilt $\dim Kv+ W > \dim W = \dim V- 1$, also

$$V = Kv + W.$$

Beweis von '$\Leftarrow$'.

Wegen x{W kann man x in der Gestalt

$$x = \lambda v + w \text{ mit } \lambda \in K\text{-}\{0\} \text{ und } w \in W$$

schreiben. Deshalb gilt

$$Kx = K(\lambda v + w) = K(v + \frac{1}{\lambda} w) = \varphi(\frac{1}{\lambda} w),$$

d.h. Kx liegt im Bild von φ.

Beweis. von '⇒'.

Sei $Kx = \varphi(w)$ für ein $w \in W$. Wäre $x \in W$, so wäre $\varphi(w) = Kx \subseteq W$, d.h

$$K(v+w) \subseteq W,$$

d.h.

$$v+w \in W,$$

d.h.

$$v \in W$$

im Widerspruch zur Wahl von v.

QED.

Bemerkung

Aus dem zweiten Teil des Beweises ergibt sich

$$\mathrm{Im}\,(\varphi) = P(V) - P(W).$$

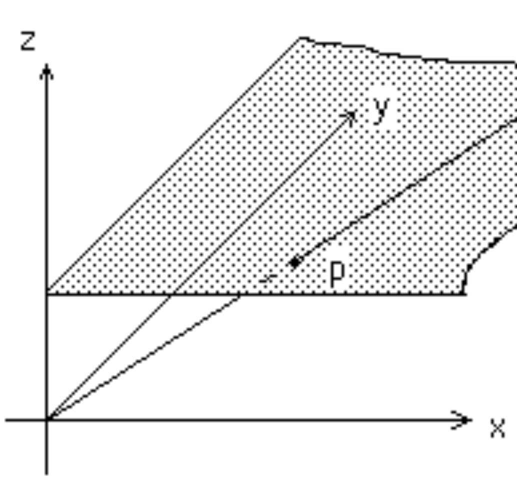
8.3 Beispiel: die Ferngerade

Seien

$$V := R^3$$

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = R^2 \subseteq \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \mid z = 0\}$$



Die Abbildung

$$\varphi\colon R^2 \to P^2_R,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ a } [x,y,1],$$

identifiziert der reelle Ebenen mit den Geraden durch den Ursprung, die nicht in der xy-Ebene liegen. Letztere bilden gerade einen 1-dimensionalen projektiven Raum (ein projektive Gerade). Wandert ein Punkt p im R^2 ins Unendliche, so nähert sich $\varphi(p)$ immer stärker einer Geraden der xy-Ebene an. Die Gerade der xy-Ebenen kann man sich deshalb als unendlich ferne Punkte des R^2 vorstellen, als Punkte am Horizont. Die Menge dieser Punkte heißt Ferngerade

$$P(R^2) = P(R^3) - \varphi(R^2)$$

heißt Ferngerade.

Bemerkung

Der Begriff der Ferngeraden hangt von der Wahl der Einbettung φ ab.

8.4 Beispiel: die Fernhyperebene

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $W \subseteq V$ ein K-linearer Unterraum der Dimension

$$\dim W = \dim V - 1$$

und

$$v \in V - W.$$

Dann kann das Komplement des Bildes der natürlichen Einbettung

$$\varphi: W \to P(V),\ w \mapsto K(v+w),$$

mit dem projetiven Raum P(W) (der Dimension n-1) identifizieren. Es heißt Fernhyperebene von W in P(V).

8.5 Die Überdeckung des P^n_K durch eindlich viele Exemplare des K^n

Wir setzen

$$U_i := \{[x_0,\ldots,x_n] \in P^n_K \mid x_i \neq 0\}.$$

Für jeden Punkt $[x_0,\ldots,x_n] \in P^n_K$ ist nach Definition mindestens eine Koordinate von Null verschieden. Deshalb gilt

$$P^n_K = U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

Jedes U_i können wir damit mit dem K^n identifizieren vermittels der bijektiven Abbildungen

$$\varphi_i: K^n \to U_i\ ,\ (x_0\ ,\ \ldots\ ,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ldots,x_n) \mapsto (x_0\ ,\ \ldots\ ,\ x_{i-1},\ 1\ ,\ x_{i+1},\ldots,x_n).$$

Mit anderen Worten, P^n_K kann man als Vereinigung von n+1 Exemplaren des K^n ansehen.

Bijektivität der Abbildung φ_i: die Abbildung ist injektiv, denn sie ist gerade von der in 7.2 beschriebenen Art: identifiziert man K^n mit dem durch

$$x_i = 1$$

definierten verschobenen Unterraum im K^{n+1}, so ordnete φ_i gerade jedem Punkt p von K^n die Verbindungsgerade von p mit dem Ursprung des K^{n+1} zu.

Surjektivität der Abbildung φ_i: Jeder Punkt $[x_0,...,x_n]$ von U_i hat die Eigenschaft, daß die i-te Koordinate x_i von Null verschieden ist. Der Punkt ändert sich nicht, wenn wir alle Koordinaten mit x_i^{-1} multiplizieren. Wir können also annehmen, $x_i = 1$. Dann liegt der Punkt aber im Bild von φ_i.

8.6 Hyperflächen im P^n_K

Wir betrachten K^n als Unterraum von P^n_K, indem wir K^n mit U_i identifizieren,

$$K^n = U_i \subseteq P^n_K .$$

Der Einfachheit halber werden wir annehmen,

$$i = 0.$$

Sei H die Hyperfläche im K^n mit der Gleichung

$$H:\ f(x_1,...,x_n) = 0.$$

Dabei sei f ein Polynom des Grades m,

$$f \in K[x_1,...,x_n] ,\ \deg f = m.$$

Wir fragen nach der einer Beschreibung von H als eine Teilmenge des P^n_K. Der Punkt

$$p = [x_0 , x_1,...,x_n] \in P^n_K$$

liegt genau dann auf der Hyperfläche H , die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

1. $[x_0 , x_1,...,x_n] \in U_0$, d.h. $x_0 \ne 0$, d.h. $p = (\frac{x_1}{x_0} , ... , \frac{x_n}{x_0}) \in K^n$.
2. $0 = f(\frac{x_1}{x_0} , ... , \frac{x_n}{x_0})$.

Die zweite Bedingung kann man auch in der folgenden Gestalt schreiben (wegen $x_0 \ne 0$):

$$0 = x_0^m f(\frac{x_1}{x_0} , ... , \frac{x_n}{x_0}).$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite kann man dabei als homogenes Polynom des Grades m in den n+1 Unbestimmten $x_0 ,...,x_n$ auffassen. Genauer, mit

$$f(x_1,...,x_n) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n \le m} c_{i_1...i_n} x_1^{i_1}\cdot...\cdot x_n^{i_n}$$

gilt

$$F(x_0,...,x_n) := x_0^m f(\frac{x_1}{x_0} , ... , \frac{x_n}{x_0}) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n \le m} c_{i_1...i_n} x_0^{m-i_1-...-i_n} x_1^{i_1}\cdot...\cdot x_n^{i_n}$$

Dies ist tatsächlich ein homogenes Polynom des Grades m in $x_0 ,...,x_n$. Man nennt F Homogenisierung von f. Die Homogenisierung F von f hat im Endlichen d.h. in U_0

dieselben Nullstellen wie f. Es können jedoch weitere Nullstellen hinzukommen, die sämtlich auf der Fernhyperebene $P^n_K - U_0$ liegen. Die Menge

$$H := \{[x_0,...,x_n] \mid F(x_0,...,x_n) = 0\}$$

heißt <u>projektive Abschließung</u> von H im P^n_K.

Ein <u>Hyperfläche</u> im P^n_K ist definiert als die Menge der Nullstellen eines homogenen Polynoms.

Bemerkung

Ist $f = f(x_0,...,x_n)$ ein inhomogenes Polynom, so ist der Begriff der Nullstelle von f im Raum P^n_K nicht wohldefiniert. Ist $p = [x_0,...,x_n]$ ein Punkt, so sind dessen Koordinaten nur bis auf ein gemeinsames Vielfaches festgelegt. Setzt die Koordinaten von p in f ein, so kann es passieren, daß man als Wert manchmal Null und manchmal einen von Null verschiedenen Wert erhält, je nachdem wie man die Koordinaten von p wählt.

Ist dagegen f homogen vom Grad m, so gilt

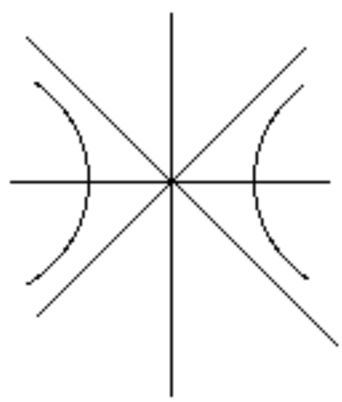
$$f(cx_0,...,cx_n) = c^m f(x_0,...,x_n).$$

Erhält man also für irgend eine Wahl der Koordinaten von p den Wert Null, so trifft dies auch für jede andere Wahl der Koordinaten zu. Der Begriff der <u>Nullstelle</u> im P^n_K besitzt also für homogenen Polynome eine koordinaten-unabhängige Bedeutung. Für inhomogene Polynome dagegen nicht.

8.7 Beispiel: die projektive Abschließung einer Hyperbel

Sei H die ebene Hyperbel

$$H: x^2 - y^2 = 1 \text{ (im } K^2)$$



Die projektive Abschließund im P^2_K ist die Kurve mit der Gleichung

$$H: x^2 - y^2 = t^2 .$$

Deren Punkte im Unendlichem sind gerade die Punkt [x,y,t] mit t = 0, die dieser Gleichung genügen:

$$0 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),$$

d.h. es gilt x = y oder x = -y, d.h. die Punkte von **H** Unendlichen sind gerade die Punkte der Gestalt

$$[t, x, y] = [0, x, ¶x] = [0, 1, ¶\ 1].$$

Es gilt also

$$\mathbf{H} = H \cup \{ [0, 1, 1] , [0, 1, -1] \}.$$

Auf **H** liegen also zwei zusätzliche Punkte. Diese entsprechen gerade den beiden Asymptoden an die Hyperbel.

8.8 Beispiel: die projektive Abschließung Kurve dritten Grades

Sei E die ebene Kurven dritten Grades mit der Gleichung

$$E = E_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda).$$

Die projektive Abschließung im P^2 ist die Kurve mit der Gleichung

$$E: y^2 t = x(x-t)(x-\lambda t).$$

Für ihre Punkte im Unendlichen gilt t = 0, also x = 0. Mit anderen Worten, der einzige Punkt im Unendlichen ist der Punkt

$$[t, x, y] = [0, 0, y] = [0, 0, 1],$$

d.h.

$$E = E \cup \{[0, 0, 1],\}.$$

Bemerkungen (zum großen Fermatschen Problem)

(i) Sind p und q zwei Punkte der Kurve, so schneidet die Verbindungsgerade die Kurve in einem dritten Punkt, sagen wir [t, x, y]. Der Punkt

$$r := [0.\ 0, -y]$$

liegt dann auch auf der Kurve.

(ii) Man kann zeigen, mit der Zuordnung

$$(p, q)\ a\ r$$

ist die Kurve eine abelsche Gruppe. Der Punkt im Unendliche spielt dabei die Rolle des neutralen Elements. Ohne diesen zusätzlichen Punkt gäbe es diese Gruppenstruktur nicht. Man schreibt

$$r = p + q.$$

(iii) Man kann zeigen, liegt λ in einem Körper K, so kann man die Koordinaten von r durch Polynome in den Koordinaten von p und q beschreiben, deren Koeffizienten in K liegen.

(iv) Kurven im P^n_K die eine durch Polynome beschreibbare Gruppenstrukur besitzen heißen elliptische Kurven. Man kann zeigen, alle elliptischen Kurven haben bis auf Isomorphie die Gestalt $E = E_\lambda$ (außer in der Charakteristik 2 bzw. 3, dort sind Gleichungen etwas komplizierter).

(v) Ist $\lambda \in Q$, und ist p ein Punkt von E_λ mit rationalen Koordinaten, so gilt das auch für die Punkte

$$2p = p + p,\ 3p = p + p + p, \ldots.$$

Das Gruppengesetz elliptischer Kurven bietet also eine Möglichkeit aus einer Lösung der zugehörigen diophantischen Gleichung weitere Lösungen zu konstruieren. Bei geeigneter Wahl von p bekommt man auf diese Weise sogar unendlich viele Lösungen.

(iv) Elliptische Kurven sind daher Beispiele für Kurven, für welche die zum Fermatschen Problem analoge Aussage falsch ist: es gibt unenlich viele rationale Lösungen. Die Theorie der elliptischen Kurven spielt deshalb bei der Lösung des Fermatschen Problems eine zentrale Rolle. Tatsächlich wird gezeigt, daß die elliptischen Kurven die einzigen Ausnahme Kurven sind: alle anderen Kurven haben nur endlich viele Punkte mit rationalen Koordinaten.

8.9 Verhalten von Kegelschnitten bei einer Veränderung der Ferngeraden

Wir wollen jetzt an einem Beispiel illustrieren, wie sich die Gleichung eines Kegelschnitts ändert, wenn man die relative Lage der Ferngeraden zum Kegelschnitt verändert. Betrachtenwir die Mittelpunksgleichung der Ellipse

$$C: f(x,y) := \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0,\ a, b > 0$$

in der affinen Ebenen R^2, die wir mit

$$R^2 = U_0 \subseteq P_R^2,\ \binom{x}{y}\ a\ [1,x,y],$$

identifizieren. Die projektive Abschließung von C ist gegeben durch

$$\mathcal{C} : F(x,y,t) := \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - t^2 = 0.$$

Die Punkte von $\mathcal{C}$ im Unendlichen genügen den Bedingungen

$t = 0$ und $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 0$,

also $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$. Mit anderen Worten, es gibt keine Punkte im Unendlichen:

Die “Ellipse” $\mathcal{C}$ hat keine Punkte gemeinsam mit der Ferngeraden.

Wir wollen jetzt die Ferngerade so abändern, daß sie die Kurve $\mathcal{C}$ schneidet. Machen wir deshalb die projektive Abschließung der y-Achse zur Ferngeraden, d.h. wir identifizieren die affine Ebene R^2 mit

$$R^2 = U_2 \subseteq P_R^2,\ \binom{t}{x}\ a\ [t,x,1],$$

d.h. die Punkte [t,x,y] mit y=0 sind die Punkte im Unendlichen. Der Teil der Kurve $\mathcal{C}$, welcher im Endlichen liegt, ist gegeben durch

$$\mathcal{C}\cap U_2 : 0 = F(t,x,1) = \frac{x^2}{a} + \frac{1}{b} - t^2,$$

d.h. durch

$$\mathcal{C}\cap U_2 : \frac{t^2}{1/b} - \frac{x^2}{a/b} - 1 = 0.$$

Dies ist die Mitttelpunktsgleichung einer Hyperbel. Relativ zur affinen Ebeben U_2 sind die Fernpunkte diejenigen Punkte von $\mathcal{C}$ mit $y = 0$ und $0 = \frac{x^2}{a} - t^2 = (\frac{x}{\sqrt{a}} + t)(\frac{x}{\sqrt{a}} - t)$, d.h. mit

$$[t,x,y] = [t,\ ¶\ \sqrt{a}\,t,\ 0] = [1,\ ¶\ \sqrt{a}\ ,\ 0].$$

Die “Hyperbel” $\mathcal{C}$ schneidet die Ferngerade in den Punkten $[1,\sqrt{a},0]$ und $[1,-\sqrt{a},0]$.

Als nächstes bestimmen wir die affine Gleichung von $\mathcal{C}$ in einem Fall, daß die Ferngerade die Kurve berührt. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn die Ferngerade die projektive Abschließung der Geraden

$$y = \sqrt{b}$$

wird. Mit anderen Worten, wir suchen eine Einbettung des R^2 in den P_R^2 bei welcher die Ferngerade durch die Gleichung

$$y - \sqrt{b}t = 0$$

gegeben ist, d.h. wir betten den Unterraum des R^3 mit dieser Gleichung in den P^2_R ein, zum Beispiel durch

$$W := \{\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} \in R^3 \mid y - \sqrt{b}t\} \to P^2_R ,\ \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} \text{ a } [t,x,y+1].$$

Man beachte, der Vektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt nicht in W. Wir müssen noch den Unterraum W in irgendeiner Weise mit dem R^2 identifizieren. Dazu wählen wir eine Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{b} \end{pmatrix}$$

von W (die in diesem Fall orthogonal ist , eine Bedinung die nicht unbedingt erfüllt sein muß) und benutzen diese, um W mit dem R^2 zu identifizieren. Wir erhalten damit die Einbettung

$$R^2 \to P^2_R ,\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ a } u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u \\ \sqrt{b}v \end{pmatrix} \text{ a } [v,u,1+\sqrt{b}v].$$

Der Teil der Kurve $\mathcal{C}$, welcher im Endlichen liegt, ist gegeben durch

$$\mathcal{C}\cap W\text{: } 0 = F(v,u,1\text{-}av) = \frac{u^2}{a} + \frac{(1+\sqrt{b}v)^2}{b} - v^2 ,$$

d.h. durch

$$\mathcal{C}\cap W\text{: } \frac{u^2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{\sqrt{b}}v = 0,$$

$$\mathcal{C}\cap W\text{: } \frac{u^2}{2a/\sqrt{b}} + \frac{1}{2\sqrt{b}} + v = 0,$$

$$\mathcal{C}\cap W\text{: } \frac{u^2}{2a/\sqrt{b}} + v' = 0.$$

mit $v' = v + \frac{1}{2\sqrt{b}}$. Dies ist die Gleichung einer Parabel. Die Punkte im Unendlichen sind gegeben durch

$$y - \sqrt{b}t = 0 ,\ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - t^2 = 0,$$

d.h. durch

$$\text{d.h. } y = \sqrt{b}t \text{ und } \frac{x^2}{a} = 0.$$

Der einzige Punkt im Unendlichen ist somit der Punkt

$$[t,x,y] = [t,\ 0,\ \sqrt{b}t] = [1,0,\sqrt{b}].$$

<u>Die "Parabel"</u> $\mathcal{C}$ <u>berührt die Ferngerade im Punkt</u> $[1,0,\sqrt{b}]$.

Bemerkung

Das obige Beispiel illustiert ein allgemeines Phänomen: in der projektiven Ebene gibt es keinen Unterschied zwischen Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln Der Unterschied kommt durch die unterschiedliche Lage des Kegelschnitt bezüglich der Ferngerade zustande, und diese Lage kann beliebig sein.

8.10 Basen und projektive Koordinaten

Seien V ein K-Vektorraum, $v_0,...,v_n \in V$ eine Basis von V und

$$\varphi_v : K^{n+1} \to V, \begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ a } x_0 v_0 + ... + x_n v_n ,$$

die zugehörige <u>Koordinaten-Abbildung</u> (vgl. 3.4.2). Dies ist ein Isomorphismus, d.h. V wird dadurch mit K^{n+1} identifiziert und die Geraden von V mit denen von K^{n+1}. Insbesondere ist die Abbildung

$$[\varphi_v]: \mathbb{P}^n_K = \mathbb{P}(K^{n+1}) \to \mathbb{P}(V), [x_0,...,x_n] = K\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ a } K\cdot\varphi_v\begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = K\cdot(x_0 v_0 + ... + x_n v_n$$

)

bijektiv. Deshalb heißen die $x_0,...,x_n$ <u>auch projektive Koordinaten</u> des Bildpunktes von $[x_0,...,x_n]$ bei $[\varphi_v]$ bezüglich der Basis $v_0,...,v_n$.

Bemerkung
Bezeichnet man mit

$$[v]$$

die Gerade

$$[v] := Kv$$

durch $v \in V$ und den Ursprung (für jedes $v \in V$- {0}), so sind die Koordinaten von v bezüglich der Basis $v_0,...,v_n$ gerade die projektiven Koordinaten von [v] bezüglich dieser Basis.

8.11 Der duale projektive Raum

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und

$$\check{\mathbb{P}}(V)$$

die Menge aller K-lineare Unterräume von V der Dimension n-1. Diese Menge heißt <u>duale Projektivierung</u> von V und

$$\check{\mathbb{P}}^n_K := \check{\mathbb{P}}(K^{n+1})$$

heißt <u>dualer n-dimensionaler projektiver Raum</u> über K.

Bemerkung
Analog kann man die Menge aller K-linearen Unterräume von V einer fest vorgegebenen Dimension betrachten. Dies führt zum Begriff der <u>Graßmannschen Mannigfaltigkeit</u>. Letztere gehören zu den intensiv erforschen geometrischen Objekten der Mathematik (im Zusammenhang mit dem Begriff der <u>Chern-Klasse</u>).

8.12 Vergleich mit dem projektiven Raum

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{P}(V^*) \to \check{\mathbb{P}}(V), [l:V \to K] \text{ a } \mathrm{Ker}(l),$$

wohldefiniert und bijektiv. Die duale Projektivierung kann also mit der Projektivierung des Duals identifiziert werden.

Beweis. <u>Korrektheit der Definition</u>. Für $[l] \in \mathbb{P}(V^*)$ gilt $l \neq 0$, d.h. $\dim \mathrm{Im}\, l = 1$, d.h.

$$\dim \mathrm{Ker}\, l = \dim V - \dim \mathrm{Im}\, l = \dim V - 1,$$

d.h.

$$\mathrm{Ker}\, l \in \check{P}^n_K.$$

Sei jetzt [l] = [l']. Wir haben zu zeigen

$$\mathrm{Ker}\, l = \mathrm{Ker}\, l'.$$

Wegen [l] = [l'] gibt es ein $c\in K - \{0\}$ mit $l = c\cdot l'$. Deshalb haben l und l' tatsächlich denselben Kern.

<u>Surjektivität der Abbildung</u>. Sei $W\in\check{P}(V)$, d.h. W ist ein K-linearer Unterraum der Dimension dim V - 1. Dann ist

V/W

von der Dimension dim V - dim W = 1, d.h. es gibt einen Isomorphismus

$$V/W \xrightarrow{f} K.$$

Sei

$$l := f°\rho: V \xrightarrow{\rho} V/W \xrightarrow{f} K$$

die Zusammensetzung von f mit der natürlichen Abbildung. Dann gilt

$$\mathrm{Ker}\, l = \mathrm{Ker}\, \rho = W.$$

<u>Injektivität der Abbildung</u>. Seien $l: V \to K$ und $l': V \to K$ zwei von Null verschiedene K-linerer Abbildungen mit

$$W := \mathrm{Ker}\, l = \mathrm{Ker}\, l'.$$

Man beachte, es gilt

$$\dim W = \dim V - 1.$$

Wir vergleichen l und l' mit dem Kokern der natürlichen Einbettung

$W \to V$.

Dieser Kokern ist nach Definition gerade

$\mathrm{KoKer}(W \to V) = V/W$ zusammen mit der natürlichen Abbildung $\rho: V \to V/W$

(vgl. 6.6.1). Wegen

$$l(W) = l'(W) = 0.$$

und der Universalitätseigenschaft dieses Kokerns gibt es eindeutig bestimmte K-lineare Abbildungen

$$\tilde{l}: V/W \to K \text{ und } \tilde{l}': V/W \to K$$

mit

$$l = \tilde{l}°\rho \text{ und } l' = \tilde{l}'°\rho.$$

Weil l und l' von Null verschieden sind, gilt dasselbe für $\tilde{l}$ und $\tilde{l}$ Letztere Abbilungen sind Abbildungen zwischen 1-dimensionale K-Vektorraumen, also Isomorphismen, also gerade Multiplikationen mit einer von Null verschiedenen Zahl aus K. Insbesondere gilt

$$\tilde{l}' = c\cdot\tilde{l} \text{ für ein } c\in K - \{0\}.$$

Dann gilt aber auch $l' = c\cdot l$, also [l'] = [l].

QED.

Bemerkungen

(i) Sei durch

$$H: c_0x_0+...+c_nx_n = 0$$

eine Hyperebene im K^{n+1} (durch den Ursprung) gegeben. Ihre Punkte bilden gerade den Kern der linearen Abbildung

$$K^{n+1} \to K, \begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto c_0x_0+\dots+c_nx_n.$$

Der obige Satz besagt gerade, die Angabe der Hyperebene ist äquivalent zur Angabe des Punktes

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^{n+1} - \{0\}$$

wobei es auf Vielfache mit einem von Null verschiedenen Faktor $c \in K$ nicht ankommt. Zwei solche Punkte liefern genau dann dieselbe Hyperebene, wenn sie proportional sind.

(ii) Wir verwenden jetzt die Bezeichnung $[c_0,\dots,c_n]$ auch für die Hyperebene mit der Gleichung

$$c_0x_0+\dots+c_nx_n = 0,$$

d.h. für den entsprechenden Punkt im $\check{P}^n_K$. Wir identifizieren die Räume P^n_K und $\check{P}^n_K$. Ob wir die Punke dieser Räume als Punkte oder Hyperflächen auffassen ist nur eine Frage der Interpretation. Als formale mathematische Objekte besteht zwischen ihnen kein Unterschied.

(iii) Die Identifikation des dualen projektiven Raumes $\check{P}^n_K$ mit dem P^n_K macht die Begriffe “Gerade” und “Hyperebene” austauschbar. Gültige Sätze über Hyperebenen und Geraden im projektiven Raum bleiben gültig, wenn man diese Begriffe vertauscht.

(iv) Ein besondere Rolle spielt dabei der P^n_K , da dort diese beiden Begriffe zusammenfallen.

8.13 Beispiel: Punkte auf einer Geraden in der projektiven Ebene

Seien drei Punkte

$$[x_0,x_1,x_2] , [y_0,y_1,y_2], [z_0,z_1,z_2]$$

im P^2_K gegeben. Wir wollen der Frage nachgehen, wann diese Punkte auf einer Geraden liegen. Da wir die Ferngerade immer so legen können, daß sie diesen Punkten ausweicht (ist das auch richtig im Fall endlicher Körper ?), können wir annehmen, dies Punkte liegen im K^2, d.h.

$$x_0 \ne 0, y_0 \ne 0, \ z_0 \ne 0,$$

Die Gleichung einer Geraden im K^2 ist von der Gestalt

$$a + bx + cy = 0,$$

wobei b und c nicht beide Null sind. Die Punkte liegen genau dann auf dieser Geraden, wenn gilt

$$a + b\cdot\frac{x_1}{x_0} + c\cdot\frac{x_2}{x_0} = 0$$

und analog für y und z. Das ist äquivalent zu

(*) $$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$$

und analog für y und z. Der Fall a = b = 0 (aber c ≠ 0) entspricht dabei der Situation, in welcher alle drei Punkte auf der Ferngeraden liegen.

Zusammenfassung

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Die Punkte $[x_0,x_1,x_2]$, $[y_0,y_1,y_2]$, $[z_0,z_1,z_2] \in P^2_K$ liegen auf einer Geraden.

(ii) $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in K^3$ sind linear abhängig.

(iii) Die Geraden $[x_0,x_1,x_2]$, $[y_0,y_1,y_2]$, $[z_0,z_1,z_2] \in \check{P}^2_K$ schneiden sich in einem Punkt.

Beweis. Man beachte, die Bedingung (*) bedeutet auch, daß eine Gerade durch einen Punkt geht: der Punkt mit den projektiven Koordinaten a, b, c liegt auf der Ebene im K^3 , deren Gleichung die Koeffizienen x_0, x_1, x_2 hat. Eine Ebene im K^3 entspricht aber gerade einer Geraden im P^2_K , d.h. die Punkte des $\check{P}^2_K$ kann man mit den Geraden des $\check{P}^2_K$ identifizieren.

QED.

Alternative Formulierung

(i) Sien [a] , [b] zwei verschiedene Punkte des P^2_K , so ist die Menge der Punkte auf der Geraden durch [a] und [b] gleich

$$\{ [\lambda a + \mu b] \mid \lambda,\mu \in K , (\lambda,\mu) \neq (0,0) \}.$$

Eine Menge dieser Gestalt heißt <u>Punktreihe</u> und kann man mit dem P^1_K identifizieren.

(i) Sien [a] ,[b] $\in \check{P}^2_K$ zwei verschiedene Geraden des P^2_K , so ist die Menge der Geraden durch den Schnittpunkt von [a] und [b] gleich

$$\{ [\lambda a + \mu b] \mid \lambda,\mu \in K , (\lambda,\mu) \neq (0,0) \}.$$

Eine Menge dieser Gestalt heißt <u>Geradenbüschel</u> (und kann mit dem P^1_K ´indentifiziert werden).

Diese Menge kann man mit dem P^1_K identifizieren.

Beweis. Sind [a] , [b] und [c] drei verschiedene Punkte (bzw. Geraden), so sind keine zwei der Vektoren

a,b,c

proportional, in einer nicht-trivialen linearen Relation zwischen diesen Vektoren sind also alle drei Koeffizienten ungleich Null, d.h. man die Relation nach jedem der drei Vektoren auflösen. Deshalb liegt [c] genau dann auf einer Geraden mit [a] und [b], wenn c Linearkombination von a und b ist.

QED.

Bemerkungen

(i) Die Grundlage der klassischen (ebenen) Geometrie ist die Indizenz-Relation, d.h. die Relation, welche bedeutet, daß Punkte auf einer Geraden liegen, bzw. Gerade sich in einem Punkt schneiden.

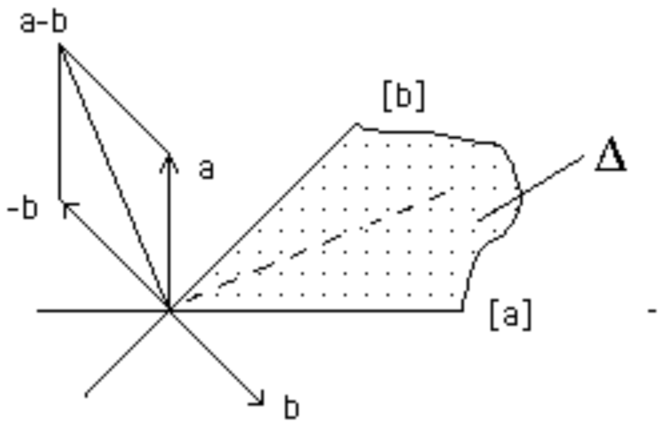
(ii) Die obige Beobachtung bedeutet, die Inzidenz-Relation läßt sich in die Sprache der linearen Algebra übersetzen. Sie hat zur Folge, daß sich Fragen der klassischen Geometrie in Fragen der linearen Algebra übersetzen und mit deren Mitteln lösen lassen. Diese Herangehensweise an die Fragen der klassischen Geometrie heißt Analytische Geometrie. Wir beschränken uns hier auf ein Beispiel für deren Methoden.

8.14 Die Winkel-Halbierenden im Dreieck

Die Winkel-Halbierenden im Dreieck schneiden sich in einem Punkt.
Beweis. Sei Δ das Dreick mit den Seiten

$$[a] = [a_0, a_1, a_2]\ ,\ [b] = [b_0, b_1, b_2]\ ,\ [c] = [c_0, c_1, c_2]\ \in \check{P}^2_R,$$

(d.h. $a,b,c \in R^3$).



Wir können annehmen, die Normalenvektoren der Seiten haben die Länge 1 und zeigen ins Innere des Dreiecks,

$$|a| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2} = 1$$

und analog mit b und c. Dann sind

$$[a-b],\ [a-c],\ [b-c]$$

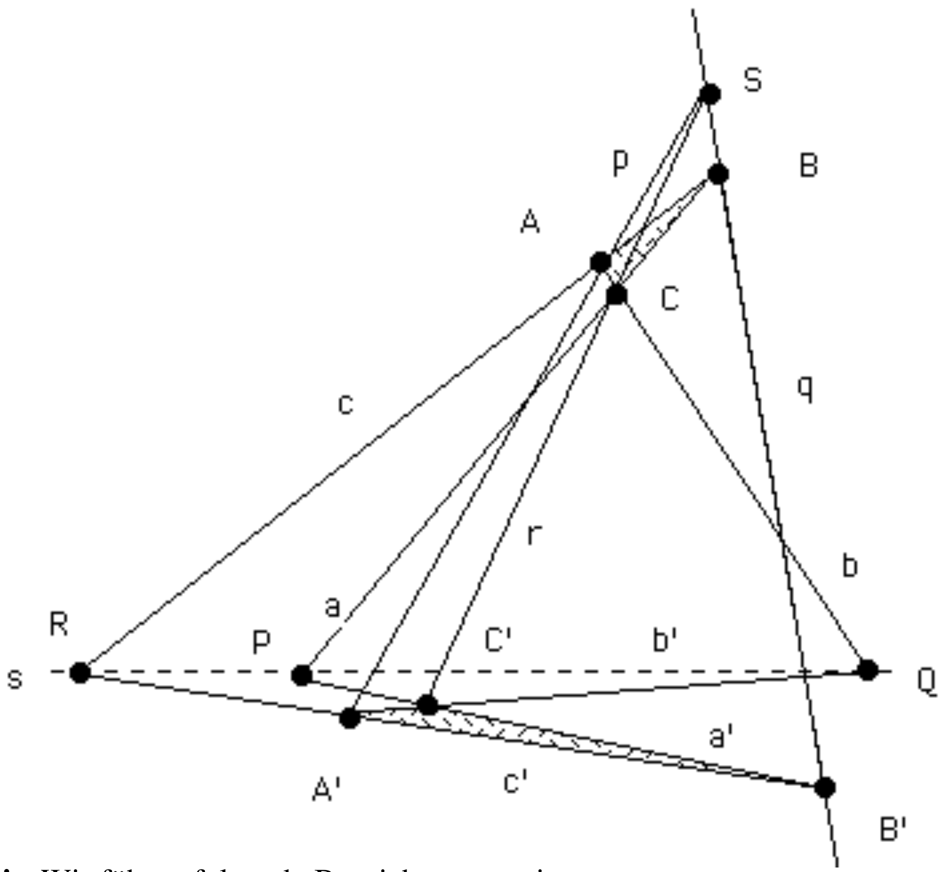
gerade die Winkel-Halbierenden dieses Dreiecks. Wegen

$$(a-b) - (a-c) + (b-c) = 0$$

gehen diese durch einen Punkt.
QED.

8.15 Satz von Desargues

Seien zwei Dreiecke in der Ebene gegeben mit den Seiten a,b,c bzw. a',b', c' und den Ecken A,B,C bzw. A',B',C'. Liegen die Schnittpunkte einander entsprechender Seiten auf einer Geraden s, so gehen die Verbindungsgeraden einander entsprechender Punkte durch einen Gemeinsamen Punkt S.



Beweis. Wir führen folgende Bezeichnungen ein.

P := Schnittpunkt von a und a'
Q := Schnittpunkt von b und b'
R := Schnittpunkt von c und c'

p := Verbindungsgerade von A und A'
q := Verbindungsgerade von B und B'
r := Verbindungsgerade von C und C'

Dabei sei

A := Schnittpunkt von b und c
B := Schnittpunkt von a und c
C := Schnittpunkt von a und b

und A', B', C' seien analog definiert.

Voraussetzung: P , Q und R liegen auf einer Geraden.
Behauptung: p, q und r schneiden sich in einem Punkt

Beweisen wir die Behauptung. Da s mit a und a' bzw. mit b und b' bzw. mit c und c' einen gemeinsamen Punkt hat gilt

$$s = \lambda a + \lambda' a = \mu b + \mu' b' = \nu c + \nu' c'$$

(wir nehmen der Einfachheit halber an, die einander entsprechenden Seiten sind verschieden). Durch Umordnen der Glieder erhält man

$$p := \mu b - \nu c = - \mu' b' + \nu' c'$$

$$q ;= \nu c - \lambda a = -\nu' c' + \lambda' a'$$

$$r := \lambda a - \mu b = -\lambda' a' + \mu' b'$$

Man beachte, p , q und r lassen sich tatsächlich in der angegebenen Weise definieren:

p ist eine Gerade, die einen gemeinsame Schnittpunkt mit b und c (nämlich A) und einen gemeinsamen Schnittpunkt mit b' und c' (nämlich A') hat.

q ist eine Gerade, die einen gemeinsame Schnittpunkt mit a und c (nämlich B) und einen gemeinsamen Schnittpunkt mit a' und c' (nämlich B') hat.

r ist eine Gerade, die einen gemeinsame Schnittpunkt mit a und b (nämlich C) und einen gemeinsamen Schnittpunkt mit a' und b' (nämlich C') hat.

Es reicht zu zeigen, die wie oben definierten Vektoren p , q und r sind linear abhängig. Das ist aber der Fall, wegen

$$p + q + r = 0$$

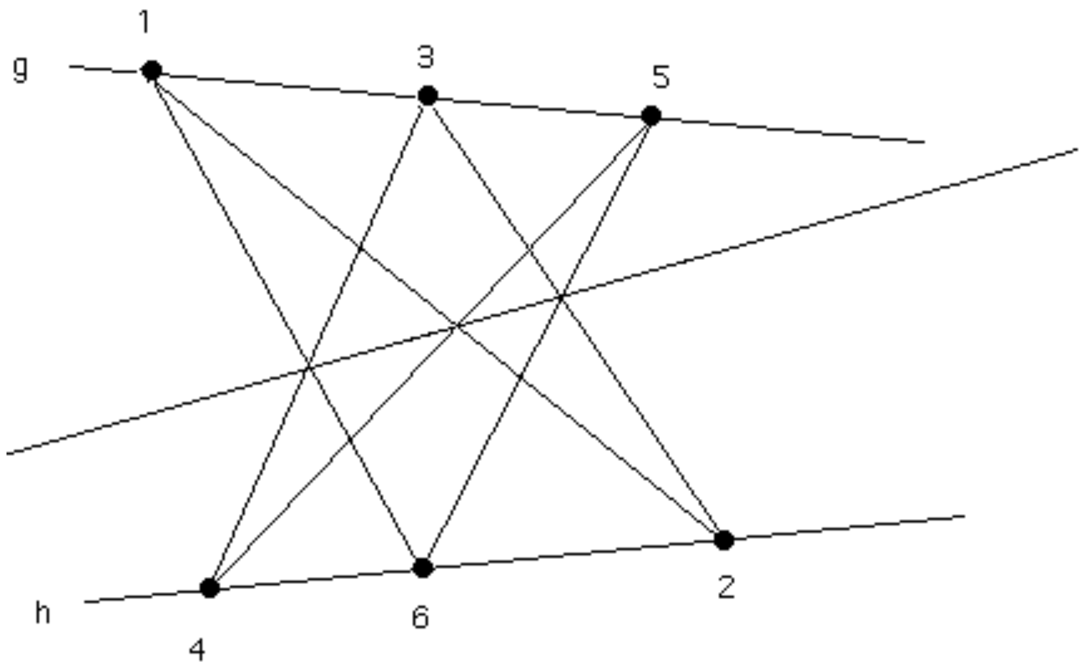
QED.

8.16 Satz von Desargues (Umkehrung)

Seien zwei Dreiecke in der Ebene gegeben mit den Seiten a,b,c bzw. a',b', c' und den Ecken A,B,C bzw. A',B',C'.
Gehen die Verbindungsgeraden einander entsprechender Punkte durch einen Punkt, so liegen die Schnittpunkte einander entsprechender Seiten auf einer Geraden.
Beweis. Man dualisiere 7.14 oder verwende den Beweis von 7.14 in dualer Interpretation.
QED.

8.17 Satz von Pascal

Liegen die Ecken 1,2,3,4,5,6 eines Sechsecks abwechseln auf zwei Gerade g und h, so liegen die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden.



Wird im selben Stil bewiesen wie 7.14. Siehe Keller: Analytische Geometrie.

8.18 Satz von Brianchon

Gehen die Seiten eines Sechsecks abwechselnd durch zwei feste Punkte, so gehen die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken durch einen Punkt.
Beweis: die Aussage ist dual zum Satz von Pascal.
QED.

8.19 Das Doppelverhältnis

Seien [m] und [n] zwei verschiedene Punkte (bzw. Geraden) in der projektiven Ebene und

$$[g_i] \text{ mit } g_i = \lambda_i m + \mu_i n$$

vier weitere Punkte (bzw. Geraden). So heißt die Zahl

$$D([g_1], [g_2]; [g_3], [g_4]) := \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}$$

<u>Doppelverhältnis</u> der vier Punkte bzw. Geraden.

Unabhängigkeit der Definition von der Wahl von m und n. Nach Voraussetzung sind die Vektoren m und n , linear unabhängig. Wir haben zu zeigen, die Zahl $D := D(g_1, g_2; g_3, g_4)$ ändert sich nicht, wenn man die Basis m, n des Vektorraumes Km + Kn durch eine andere Basis m',n' ersetzt,

$$Km + Kn = Km' + Kn'.$$

Die Matrix

$$D_{ij} := \begin{pmatrix} \lambda_i & \lambda_j \\ \mu_i & \mu_j \end{pmatrix} = M^{m,n}_{m,n}(\varphi)$$

ist gerade die Matrix der K-linearen Abbildung

$$\varphi: Km + Kn \to Km + Kn \text{ mit m a } g_i \text{ , n a } g_j$$

bezüglich der Basis (m,n). Analog ist

$$D'_{ij} := \begin{pmatrix} \lambda'_i & \lambda'_j \\ \mu'_i & \mu'_j \end{pmatrix} = M^{m,n}_{m',n'}(\varphi)$$

die Matrix derselben Abbildung bezüglich der Basis (m',n') (im Bild-Raum) falls gilt

$$g_i = \lambda'_i m' + \mu'_i n'.$$

Deshalb gilt

$$D'_{ij} = M^{m,n}_{m',n'}(\varphi) = A \cdot M^{m,n}_{m,n}(\varphi) \text{ mit } A := M^{m,n}_{m',n'}(Id)$$

also

$$\det D'_{ij} = \det D_{ij} \cdot \det A$$

Die beiden Quotienten

$$\frac{\det D_{13}}{\det D_{14}} \text{ und } \frac{\det D_{23}}{\det D_{24}}$$

in der Definition von D ändern sich also nicht, wenn man zu der neuen Basis übergeht. **QED**.

Unabhängigkeit der Definition von der Wahl der Repräsentanten g_i **der** $[g_i]$. Wir haben zu zeigen, D ändert sich nicht, wenn man eines der g_i mit einem von Null verschiedenen Faktor multipliziert. Dann kann man jedoch direkt aus der Definition von D ablesen.
QED.
Bemerkung
Die Bedeutung des Doppelverhältnisses beruht darauf, daß es sich nicht ändert, wenn man eine projektive Transformation des P^2_K anwendet.

8.20 Projektive Transformationen, die projektive Gruppe

Sei f: V → ein K-linearer Automorphismus des endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Dann ist die Abbildung

$$[f] = P(f): P(V) \to P(V), [v] \text{ a } [f(v)],$$

korrekt definiert und bijektive. Abbildungen dieser Gestalt heißt projektive Transformationen. Sie bilden eine Gruppe, die <u>projektive allgemeine lineare Gruppe</u> heißt und mit

$$PGL(V)$$

bezeichnet wird.
<u>Bezeichnung</u>:

$$PGL(n, K) := PGL(K^n).$$

8.21 Satz von Pappos

Seien S ein Punkt im P^2_K und g eine Gerade, die nicht durch S geht. Weiter seien

$$g_1, g_2, g_3, g_4$$

vier Geraden durch S und

$$P_1, P_2, P_3, P_4$$

deren vier Schnittpunkte mit g. Dann gilt

$$D(g_1, g_2, g_3, g_4) = D(P_1, P_2, P_3, P_4).$$

Beweis-Skitze. Wir können annehmen, g ist die Ferngerade und S der Ursprung von

$$K^2 = U_0 \subseteq P^2_K .$$

Die Punkte P_i haben dann die Gestalt

$$P_i = [0;a_i , b_i]$$

und die Geraden g_i sind gegeben durch die Gleichungen

$$g_i : b_i x - a_i y = 0,$$

d.h. als Punkt von $\check{P}^2_K$ hat g_i die Gestalt

$$g_i = [0, b_i , -a_i]$$

Der Punkt P_i hat also die projektiven Koordinaten a_i , b_i bezüglich der Punkte [0;1 , 0] und [0,0,1].
Analog hat die Gerade g_i die projektiven Koordinaten a_i , b_i bezüglich [0,0,-1] und [0,1,0].
Benutzt man diese Koordinaten zur Berechnung der Doppelverhältnisse

$$D(P_1, P_2, P_3, P_4) \text{ bzw. } D(g_1, g_2, g_3, g_4)$$

so erhält man denselben Wert.
QED.

Literatur

Brieskorn, E.

Brieskorn, E.: Lineare Algebra und analytische Geometrie I+II, Vieweg-Verlag, Braunschweig 1983

Fischer, G.

Fischer G.:Lineare Algebra, Vieweg-Verlag, Braunschweig 2003

Herzog, B.

Herzog, B.: Lineare Algebra, www.mathematik.uni-leipzig.de/ ~herzog/Manuskripte/Manuskripte.html

Keller, O.-H.:

Keller, O.-H.: Analytische Geometrie und lineare Algebra, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963

Krull, W.

Krull, W.: Elementare und klassische Algebra vom modernen Standpunkt, 3 Bände, Sammlung Göschen 930, 933, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1952, 1959.

Lam, T.Y.

Lam, T. Y.: Introduction to quadratic forms over fields, A.M.S, Rhode Island 2005

Index

—A—

Abbildung
  Koordinaten-, 43
adjungierte Abbildung, 76
adjungierter Endomorphismus
  hermitisch, 86
Algebra
  äußere, 135
  Clifford, 140
  Erzeugendensystem einer, 128
  symmetrische, 130
  Tensor-, 122
algebraisch abgeschlossen, 5
algebraisch Vielfachheit eines Eigenwerts, 6
Anfangsobjekt, 147
anisotrope Bilinearform, 39
anisotroper Vektor, 39
anisotroper Vektorraum, 39
anti-linear, 83
antisymmetrisch, 94
antisymmtrische Bilinearform, 39
aufeinander senktrecht stehen, 41

—Ä—

äußere Algebra, 135
äußere Potenz, 139

—A—

Automorphismus, 148

—B—

Basis
  orthogonale, Längen-Quadrat-Vektor einer, 54
  zyklische, bezüglich eines Endomorphismus, 15
  zyklische, Hauptvektor einer, 15
Basiswechselmatrix, 44
Bewegung, 71
bilinearer Raum, 39
Bilinearform, 39
  anisotrope, 39
  antisymmtrische, 39
  definit, 39
  isotrope, 39
  negativ definite, 39

nicht-entartet, 39
positiv definite, 39
reguläre, 39
schiefsymmetrische, 39
symmetrische, 39

—C—

charakteristisches Polynom, 3
Clifford-Algebra, 140

—D—

darstellbarer Funktor, 150
darstellendes Element, 150
darstellendes Objekt, 150
definite Bilinearform, 39
direkte Summe, 96
direkte Summe von quadratischen Matrizen, 15
Drehachse einer ebenen Drehung, 71
Drehung, 71
ebene, 71

—E—

Ebene
hyperbolische, 58
ebene Drehung, 71
Eigenbasis, 2
Eigenvektor, 2
Eigenwert, 2
algebraisch Vielfachheit, 6
geometrische Vielfachheit, 6
Einbettung
isometrische, 40
Einsteinsche Summenkonvention, 115
Endobjekt, 147
Endomorphismus
hermitisch adjungierter, 86
nilpotenter, 12
selbstadjungierter, 77
zyklische Basis bezüglich eines, 15
zyklischer, 15
Endomorphismus, 148
Entartungsraum
einer schiefsymmetrischen Bilinearform, 98
einer symmetrischen Bilinearform, 68
Epimorphismus, 148
erster stabiler Exponent eines Endomorphismus, 32
Erzeugendensystem einer Algebra, 128
euklidisch, 40
exakte Sequenz
kurze, 119
exakte Sequenz, 119
Exaktheit an einer Stelle, 119

—F—

Fahne von Vektorräumen, 10
Funktor, 149
darstellbar, 150
kontravarianter, 149
kontravarianter Hom-Funktor, 149
kovarianter, 149
kovarianter Hom-Funktor, 149
Funktor. kodarstellbar, 150

—G—

geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts, 6
graduiertes Tensorprodukt von Algebren, 142
Graduierung
Z-2-Graduierung, 141
Z-Graduierung, 141
Gruppe
orthogonale, 53

—H—

Hauptachsentransformation, 93
Hauptraum, 33
Hauptvektor einer zyklischen Basis, 15
hermitisch adjungierter Endomorphismus, 86
hermitisch selbstadjungiert, 86
hermitische Form, 82
hermitische Matrizen, 83
hermitisches Skalarprodukt, 84
hermitisches Standard-Skalarprodukt, 84
hinreichend großer Körper, 6; 49
Hom-Funktor
kontravarianter, 149
kovarianter, 149
homogene Elemente des Grades n, 123
homogener Bestandteil, 123
Homomorphie-Satz, 102
hyperbolische Ebene, 58
Hyperebene
orthogonale, 56
Hyperfläche, 91

—I—

initiales Objekt, 147
Invaranten, 1
invariant, 10
Isometrie, 40
isometrisch, 40
isometrische Einbettung, 40
Isomorphismus, 148
isotrope Bilinearform, 39
isotroper Vektor, 39
isotroper Vektorraum, 39

—J—

Jordan-Basis, 37
Jordanblock, 15
Jordan-Zerlegung eines nilpotenten Endomorphismus, 24

—K—

Kategorie
Morphismus einer, 146
Kategorie, 146
kodarstellbar Funktor, 150
Kofunktor, 149

Kokern, 100
Komplement
orthogonales, 84
orthogonales (linkes), 41
orthogonales (rechtes), 41
konjugiert, 1
kontravarianter Funktor, 149
kontravarianter Hom-Funktor, 149
kontravarianter Tensor, 113
Koordinaten eines Tensors, 112
Koordinaten eines Tensors, 112
Koordinaten-Abbildung, 43
Körper
hinreichend großer, 49
Körper, hinreichend großer, 6
kovarianter Funktor, 149
kovarianter Hom-Funktor, 149
kovarianter Tensor, 113
kurze exakte Sequenz, 119

—L—

Länge, 84
Längen-Quadrat-Vektor einer orthogonalen Basis, 54

—M—

Matrix
direkte Summe von, 15
nilpotente, 13
unitäre, 85
Matrix einer Bilinearform, 42
Minimalpolynom, 30
Monomorphismus, 148
Morphismus
Null-, 148
Morphismus einer Kategorie, 146
Multi-Index-Schreibweise, 91

—N—

natürliche Einbettung, 123
natürliche Paarung, 40
natürliche Paarung eines Vektorraums mit seinem Dual, 46
negativ definite Bilinearform, 39
nicht-entartete Bilinearform, 39
nicht-entartete Paarung, 40
nilpotente Matrix, 13
nilpotenter Endomorphismus, 12
Normalform, 1
Null-Morphismus, 148
Null-Objekt, 147

—O—

Objekt
Anfangs-, 147
End-, 147
initiales, 147
Null-, 147
terminales, 147
Objekt einer Kategorie, 146
Operator
selbstadjungierter, 77
Ordnung einer Matrix, 13
Ordnung eines Endomorphismus, 12
Ordnung eines Vektors bzgl. eines Endomorphismus, 16
orthogonal, 49; 56; 84
orthogonale Gruppe, 53
orthogonale Hyperebene, 56
orthogonale Transformation, 52
orthogonale Unterräume, 49
orthogonale Vektoren, 41
orthogonales Komplement, 84
orthogonales Komplement (linkes), 41
orthogonales Komplement (rechtes), 41
Orthogonalisierungsverfahren, 49
orthonormiert, 49; 85

—P—

Paarung
natürliche, 40
natürliche, eines Vektorraums mit seinem Dual, 46
nicht-entartete, 40
Paarung, 40
positiv definit, 84
positiv definite Bilinearform, 39
Potenz
äußere, 139
symmetrische, 133
Produkt
Tensor-, 102

—Q—

Quadrik, 91
Quelle, 146

—R—

Rang, 67
Raum
bilinearer, 39
Raum mit Skalarprodukt, 39
reguläre Bilinearform, 39

—S—

Satz
Homomorphie-, 102
schiefsymmetrisch, 94; 95
schiefsymmetrische Bilinearform, 39
selbstadjungiert
hermitisch, 86
selbstadjungierter Endomorphismu, 77
selbstadjungierter Operator, 77
senkrecht aufeinander senktrecht stehen, 41
Sequenz
exakte, 119
kurze exakte, 119
Signatur, 67
Skalarprodukt
Raum mit, 39

Standard-, 40
Skalarprodukt, 39
Skalarprodukt der Relativitätstheorie, 45
Spiegelung an einer Hyperebene, 57
Standard-Skalarprodukt, 40
Struktur-Homomorphismus, 122
symmetrische Algebra, 130
symmetrische Bilinearform, 39
symmetrische Potenz, 133
symplektisch, 94
symplektischer Standardraum, 95
symplektischer Vektorraum, 94

—T—

Tensor, 103
Tensor, 113
Tensor-Algebra, 122
Tensorpotenz, 113
Tensorprodukt
graduiertes, von Algebren, 142
von Algebren, 142
Tensorprodukt, 102
terminales Objekt, 147
total isotroper Unterraum, 40
Träger einer ebenen Drehung, 71
Transformation
Hauptachsen-, 93
orthogonale, 52
unitäre, 85
Translation, 71

—U—

unitäre Gruppe, 85
unitäre Matrix, 85
unitäre Transformation, 85
Universalitätseigenschaft, 100
Universalitätseigenschaft, 99
universell, 100
universelle Familie, 150
Unterraum
total isotroper, 40

—V—

Vektor
anisotroper, 39
isotroper, 39
Längen-Quadrat-Vektor einer orthogonalen Basis, 54
Vektoren
orthogonale, 41
Vektorraum
anisotroper, 39
isotroper, 39
Verschiebung, 71
Vielfachheiten
algebraische, 6
geometrische, 6
vollständige Fahne von Vektorräumen, 10

—Z—

Zerlegung
in f-zyklische Unterräume, eines nilpotenten Endomorphismus, 24
Jordan-Zerlegung eines nilpotenten Endomorphismus, 24
Ziel, 146
zyklisch, 16
zyklische Basis bezüglich eines Endomorphismus, 15
zyklischer Endomorphismus, 15
zyklischer Vektorraum bzgl. eines Endomorphismus, 15

Inhalt

LINEARE ALGEBRA II 1

5. JORDANSCHE NORMALFORM 1

5.1 Eigenwerte und Eigenvektoren 1
5.1.0 Vorbemerkungen: konjugierte Matrizen und die Klassifikation linearer Abbildungen 1
5.1.1 Eigenvektoren, Eigenwerte, Eigenbasen, Eigenräume 2
5.1.2 Ein Beispiel: Eigenbasen und Diagonalmatrizen 2
5.1.3 Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus 3
5.1.4 Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms 4
5.1.5 Ein Beispiel: Eigenwerte für verschiedene Grundkörper 5
5.1.6 Vereinbarung, algebraische und geometrische Vielfachheiten 6
5.1.7 Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren 6
5.1.8 Existenz von Eigenbasen und algebraische Vielfachheiten 7
5.1.9 Existenz von Eigenwerten 10
5.1.10 Fahnen von Vektorräumen 10
5.1.11 Existenz von Fahnen invarianter Unterräume 10

5.1.12 Überführung von Matrizen in obere Dreiecksgestalt 12

5.2. Nilpotente Endomorphismen 12

5.2.1 Definition 12
5.2.2 Lemma über nilpotente Endomorphismen 13
5.2.3 Nilpotenz und Fahnen invarianter Unterräume 13
5.2.4 Die Matrix eines nilpotenten Endomorphismus 14
5.2.5 Beispiel: Jordanblöcke 14
5.2.6 Beispiel: direkte Summen von Matrizen 15
5.2.7 Zyklische Basen 15
5.2.8 Beispiel 16
5.2.9 Der Kern eines zyklischen Endomorphismus 17
5.2.10 Zerlegung nilpotenter Endomorphismen in zyklische 18
5.2.11 Die Jordansche Normalform eines nilpotenten Endomorphismus 24
5.2.12 Beispiel 25
5.2.13 Die Anzahl der zyklischen direkten Summanden der Dimension 1 27

5.3 Die Jordansche Normalform (beliebiger Matrizen) 29

5.3.1 Zur Unzulänglichkeit des Eigenraum-Begriffs 29
5.3.2 Der Endomorphismenring eines Vektoraums 30
5.3.3 Das Minimalpolynom eines Endomorphismus 30
5.3.4 Potenzen eines Endomorphismus, Stabilisieren von Kern und Bild 31
5.3.5 Haupträume 32
5.3.6 Die Dimension der Haupträume 33
5.3.7 Abschätzung der stabilen Potenzen von f 34
5.3.8 Hauptraumzerlegung 35
5.3.9 Jordansche Normalform eines Endomorphismus 37
5.3.10 Jordansche Normalform einer Matrix 37

5.4 Satz von Cayley-Hamilton 38

5.5 Zur Bestimmung einer Jordanbasis 39

6. BILINEARE ABBILDUNGEN 39

6.1 Bilineare Räume 39

6.1.1 Definitionen 39
6.1.2 Die Bilinearform zu einer Matrix 41
6.1.3 Die Matrix einer Bilinearform 42
6.1.4 Verhalten bei Koordinatenwechsel 44
6.1.5 Beispiele für Bilinearformen 44
6.1.6 Kriterium für nicht-entartete Bilinearformen 45
6.1.7 Eigenschaften des orthogonalen Komplements 47
6.1.8 Orthogonale Zerlegungen 49

6.2 Räume mit Skalarprodukt 49

6.2.1 Orthonormierte Basen 49
6.2.2 Das Orthogonalisierungsverfahren 49
6.2.3 Die Räume der Gestalt $<c_1,...,c_n>$ 50
6.2.4 Orthogonalisierung im Fall char (K) ungleich 2 51
6.2.5 Orthogonale Transformationen 52
6.2.6 Die orthogonale Gruppe 53
6.2.7 Orthogonale Transformationen und orthogonale Komplemente 53
6.2.8 Der Längen-Qudrat-Vektor einer orthogonalen Basis 54
6.2.9 Die Matrix einer orthogonalen Transformation 54
6.2.10 Beispiel: Spiegelungen 56

6.2.11 Die hyperbolische Ebene 58
6.2.12 Isotropie und hyperbolische Ebenen 60
6.2.13 Satz von Dieudonné 61

6.3 Der Fall eines reellen Grundkörpers 67
6.3.1 Normalformen reeller symmetrischer Bilinearformen 67
6.3.2 Trägheitssatz von Sylvester 68
6.3.3 Drehungen in der Ebene 70
6.2.4 Ebene Drehungen des n-dimensionalen Raums 70
6.3.5 Orthogonale Transformationen mit positiver Determinante 72
6.3.6 Die Zusammensetzung zweier Spiegelungen 74
6.3.7 Orthogonale Transformationen mit negativer Determinante 75

6.4 Selbstadjungierte Endomorphismen 75
6.4.1 Die adjungierte lineare Abbildung 75
6.4.2 Beispiel: adjungierte Abbildungen und transponierte Matrizen 76
6.4.3 Selbstadjungierte Endomorphismen 77
6.4.4 Beispiel: selbstadjungierte Endomorphismen und symmetrische Matrizen 77
6.4.5 Selbstadjungierte Endomorphismen und invariante Unterräume im anisotropen Fall 77
6.4.6 Diagonalisierbarkeit selbstadjungierter Operatoren im anisotropen Fall 78
6.4.7 Nilpotente selbstadjungierte Endomorphismen im anisotropen Fall 79
6.4.8 Beispiel: der isotrope Fall 79
Vereinbarung 80
6.4.9 Orthogonalität der Hauptraumzerlegung selbstadjungierter Operatoren 80
6.4.10 Existenz von orthonormierten Eigenbasen 80
6.4.11 Beispiel 81

6.5 Der Fall eines komplexen Grundkörpers 82
6.5.1 Hermitische Formen 82
6.5.2 Hermitische Skalarprodukte 84
6.5.3 Orthonormalisierung 85
6.5.4 Unitäre Transformationen 85
6.5.5 Die Matrix einer unitären Transformation 86
6.5.6 Der adjungierte Endomorphismus, Selbstadjungiertheit 86
6.5.7 Selbstadjungierte Endomorphismen und invariante Unterräume 87
6.5.8 Diagonalisierbarkeit selbstadjungierter Endomorphismen 88
6.5.9 Eigenwerte und Eigenvektoren selbstadjungierter Operatoren 88
6.5.10 Eigenbasen hermitisch selbstadjungierter Endomorphismen 88
6.5.11 Diagonalisierung komplexer hermitischer Matrizen mit Hilfe unitärer Matrizen 89

6.6. Anwendungen auf den reellen Fall 89
6.6.1 Existenz von orthonormierten Eigenbasen 89
6.6.2 Diagonalisierung reeller symmetrischer Matrizen mit Hilfe von orthogonalen Matrizen 90
6.6.3 Hyperflächen und Quadriken, Multi-Index-Schreibweise 91
6.6.4 Die Hauptachsen-Transformation 91
6.6.5 Beispiel 93

6.7 Schiefsymmetrische Bilinearformen 94
6.7.1 Definitionen 94
6.7.2 Schiefsymmetrische Bilinearformen und Matrizen 95
6.7.3 Beispiel: der symplektische Standardraum der Dimension 2 95
6.7.4 Beispiel: direkte Summe von symplektischen Räumen 95
6.7.5 Zerlegung in symplektische Standardräume 96
6.7.6 Der Rang einer schiefsymmetrischen Bilinearform 97
6.7.7 Klassifikation der schiefsymmetrischen Bilinearformen 97
6.7.8 Normalformen schiefsymmetrischer Matrizen 98

6.8 Das Tensorprodukt 99

6.8.0 Vorbemerkungen 99
6.8.1 Beispiel für eine Universalitätseigenschaft 100
6.8.2 Definition des Tensorprodukts zweier K-Vektorräume 102
6.8.3 Eindeutigkeit des Tensorprodukts bis auf Isomorphie 103
6.8.4 Ein Erzeugendensystem für $V\otimes W$ 104
6.8.5 Eigenschaften des Tensorprodukts von Vektorräumen 106
6.8.6 Eigenschaften des Tensorprodukts von Elementen 110
6.8.7 Die Koordinaten eines Tensors 111
6.8.8 Das Verhalten der Koordinaten bei Basiswechsel 112
6.8.9 Bemerkungen zum den Tensoren der Physik 113
6.8.10 Die Existenz des Tensorprodukts 115
6.8.11 Die Funktorialität des Tensorprodukts 118
6.8.12 Exake Sequenzen 119
6.8.13 Exaktheit des Tensorprodukts 119

6.9 Multilineare Abbildungen 122
6.9.1 Definition 122
6.9.2 Die Tensor-Algebra eines K-Vektorraums 122
6.9.3 Die Universalitätseigenschaft der Tensorpotenz $V^{\otimes n}$ 124
6.9.4 Die Universalitätseigenschaft der Tensor-Algebra 126
6.9.5 Das von einer Menge erzeugte Ideal 129
6.9.6 Der Faktorraum nach einem Ideal 129
6.9.7 Die symmetrische Algebra 130
6.9.8 Die Universalitätseigenschaft der symmetrischen Algebra 130
6.9.9 Vergleich mit den Polynom-Algebren 131
6.9.10 Die äußere Algebra 135
6.9.11 Die Universalitätseigenschaft der äußeren Algebra 136
6.9.12 Vergleich mit den Graßmann-Algebren 137
6.9.13 Die Clifford-Algebra 140
6.9.14 Das Tensorprodukt graduierter Algebren 141
6.9.15 Die Universalitätseigenschaft der Clifford-Algebra 143
6.9.16 Die Clifford-Algebra einer orthogonalen direkten Summe 143
6.9.17 Die Clifford-Algebra von $<c_1,...,c_n>$ 144

7. ERGÄNZUNGEN 145

7.1 Moduln 145
7.1.1 Definition 145
7.1.2 Beispiele und besondere Phänome 145
7.1.3 Verallgemeinerungen des Dimensionsbegriffs 145
7.1.4 Kerne, Kokerne, exakte Sequenzen 146
7.1.5 Noethersche Ringe und Moduln 146

7.2 Darstellungen endlicher Gruppen (über C) 146

7.3 Kategorien und Funktoren 146
7.3.1 Der Begriff der Kategorie 146
7.3.2 Beispiele 147
7.3.3 Spezielle Objekte 147
7.3.4 Spezielle Morphismen: Monomorphismen, Epimorphismen, Isomorphismen, Automorphismen 148
7.3.5 Beipiele: Epimorphie und Surjektivität, Bijektvität und Isomorphie 148
7.3.6 Funktoren 149
7.3.7 Beispiele für Funktoren 149
7.3.8 Darstellbare Funktoren 150
7.3.9 Darstellbare Funktoren und darstellende Paare 154

7.3.10 Funktorielle Morphismen (natürliche Transformationen) 155
7.3.11 Additive Kategorien (und Beispiele) 155
7.3.12 Abelschen Kategorien (und Beispiele) 155

LITERATUR **155**

INDEX **173**

INHALT **176**