# Kommutative Algebra
(frei nach Matsumura, Commutive ring theory)

Im folgenden sei A ein kommutativer Ring mit 1.

# Bezeichnungen

| | |
|---|---|
| Ann m | Annullator des Elements m, vgl. 2.4.1. |
| ${}^a f$ | die zum Ring-Homorphismus f gehörige Abbildung der Spektren, vgl. 3.1.4. |
| coht p | Kohöhe des Primideals p, vgl. 2.2.1. |
| dim X | kombinatorische Dimension des topologischen Raums X, vgl. 2.2.1. |
| dim A | Krull-Dimension des Rings A, vgl. 2.2.1. |
| ht p | Höhe des Primideals p, vgl. 2.2.1. |
| $S^{-1}A$ | Quotientenring von A bzgl. S, vgl. 2.1.1. |
| $A_S$ | Quotientenring von A bzgl. S, vgl. 2.1.1. |
| $A_p$ | Quotientenring von A bzgl. des Primideals p von A, vgl. 2.1.4. |
| $\kappa(p)$ | Restekörper des Primideals p, vgl. 2.1.5. |
| f(p) | Wert der durch das Element f eines Rings definierten Funktion im Primideal p des Rings, vgl. 2.1.5. |
| $S^{-1}M$ | Quotientenring des Moduls M bzgl. der multiplikativen Menge S, vgl. 2.1.6. |
| $M_S$ | Quotientenring des Moduls M bzgl. der multiplikativen Menge S, vgl. 2.1.6. |
| $M_p$ | Quotientenring des Moduls M bzgl. der multiplikativen Menge S, vgl. 2.1.6. |
| $\mu(p, M)$ | Anzahl der Erzeuger des Moduls M über dem lokalen Ring zum Primideal p, vgl. 2.3.1. |
| m-Spec(A) | maximales Spektrum von A, vgl. 2.1.5. |
| Spec A | Spektrum von A, vgl. A4.2.1.5. |
| Supp(M) | Träger des Moduls M, vgl. 2.1.6. |
| tr. $\deg_k$ A | Transzendenzgrad der nullteilerfreien k-Algebra A, vgl. 2.2.4. |
| V(I) | Nullstellenmenge des Ideals I im Spektrum des Rings von I, vgl. 2.1.5. |
| $\Omega(A)$ | maximales Spektrum von A, vgl. 2.1.5. |
| $\hat{M}$ | Vervollständigung des mit einer lineaeren Topologie versehenen Moduls M, vgl. 3.2.2. |

# 1 Grundbegriffe

## *2.1 Ideale*

Jedes echte Ideal liegt in einem maximalen.
Vergleich der Idealmengen beim Übergang zu Faktorringen.
Vergleich der Idealmengen beim Übergang zu Quotientenringen.
Das Radikal $\sqrt{I}$:

Potenzen von Elementen und Durchschnitt von Primoberidealen.

Das Jacobson-Radikal rad(A):

Durchschnitt von maximalen Idealen und Elemente[1] x mit $1+xA \subseteq A^*$.

---

[1] Liegt x nicht in einem maximalen Ideal $m \subseteq A$ so ist x Einheit modulo m, d.h. es gibt ein $y \in A$ mit $xy = -1 \bmod m$, d.h. $1 + xy \in m$, d.h., das Element $1 + xy \in 1 + xA$ ist keine Einheit. Gezeigt:

$$1 + xA \subseteq A^* \Rightarrow x \in \text{rad } A.$$

Durchschnitt und Produkt von Idealen: komaximalen Ideale: I' + I" = A.
Chinesischer Restesatz
ZPE-Ringe: Beispiel Polynomringe

## *1.2 Moduln*

### 1.2.1 Konstruktionen mit Moduln

Hom-Modul
Annullator Ann(M)
Quotienten von Moduln

$N':N'' := \{x \in A \mid xN'' \subseteq N'\}$ für Teilmoduln $N'; N'' \subseteq M$

$M:I := \{x \in M \mid Ix \subseteq M\}$ für Ideale $I \subseteq A$, Moduln M von A.

...

### 1.2.2 Der Determinanten-Trick[2]

$M = Am_1 + ... + Am_r$ ein endlich erzeugte A-Modul
I ein Ideal von A
$\varphi \in Hom_A(M, M)$ ein Endomorphismus mit $\varphi(M) \subseteq IM$.

$\Rightarrow$
Es besteht eine Relation der Gestalt
$\varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} + ... + a_n = 0$ mit $a_i \in I^i$ für jedes i.

### 1.2.3 Lemma von Nakayma I (NAK = Nakayama-Azumay-Krull)[3]

Seien M ein endlich erzeugter A-Modul und I ein Ideal mit
$M = IM$.
Dann gibt es ein Element $a \in A$ mit
$aM = 0$ und $a \equiv 1 \bmod I$.
Im Fall $I \subseteq rad(A)$ gilt sogar $M = 0$.

### 1.2.4 Lemma von Nakayama II[4]

Seien M ein A-Modul, $N \subseteq M$ ein Teilmodul und I ein Ideal von A. Es gelte

$M = N + IM$, $I \subseteq rad(A)$, M/N endlich erzeugt.

Dann gilt
$M = N$.
Folgerungen des Nakayama-Lemmas:

### 1.2.5 Minimal-Basen über lokalen Ringen

Seien (A, m) ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul.
Dann:
(i) Die Repräsentanten in M jeder Basis des A/m -Vektorraums M/mM bilden ein Erzeugendensystem von M über A (minimaler Länge).
(ii) Jeddes Erzeugendensystem minimaler Länge erhält man auf diese Weise.

---

Die umgekehrte Inklusion ist trivial.
[2] Man betrachte eine Matrix $(a_{ij})$ von $\varphi$ bezüglich der Erzeuger von M und zeige $\det(\varphi\delta_{ij} - a_{ij}) = 0$.

[3] Man wende den Determinanten-Trick mit $\varphi = Id: M \longrightarrow M$ an.

[4] Man wende die erste Variante des Nakayama-Lemmas auf M/N an.

(iii) Die Determinate der Matrix, die zwei minimale Erzeugendensysteme ineinander überführt ist umkehrbar.[5]

### 1.2.6 Freiheit und Projektivität über lokalen Ringen

Jeder projektive Modul über einem lokalen Ring ist frei.[6]

Bijektivität von surjektiven Endomorphismen

Seien M ein endlich erzeugter A-Modul und $\varphi: M \longrightarrow M$ eine surjektive A-lineare Abbildung. Dann ist $\varphi$ bijektiv.[7]

### 1.2.7 Moduln von endlicher Darstellung

Ein A-Modul M heißt von endlicher Darstellung, wenn es eine exakte Sequenz der Gestalt

$$A^q \xrightarrow{g} A^p \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

gibt. Das bedeutet, der Modul M besitzt ein endliches Erzeugendensystem

$$m_i := f(e_i)\ , i = 1, \dots , p$$

derart, daß der Modul der Relationen

$$R(m_1, \dots , m_p) := \{ (a_1, \dots , a_p) \in A^p \mid \sum_{i=1}^{p} a_i m_i = 0\}$$

endlich viele Erzeugende besitzt (z.B. $g(e_1), \dots , g(e_q)$).

### 1.2.8 Kriterium für endliche Darstellung

Seien M ein A-Modul von endlicher Darstellung und

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz mit F endlich erzeugt. Dann ist auch K endlich erzeugt.[8]

Insbesondere sind für jeden A-Modul M die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) M ist von endlicher Darstellung.

---

[5] Man betrachte die zugehörige Matrix der Einträge modulo m.

[6] Siehe H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Mass. 1980, Theorem 2.5, Seite 9.

[7] (Vasconcelos). Wir betrachten M als A[x]-Modul mit

$$x \bullet m = \varphi(x)$$

für $m \in M$. Dann gilt XM = M.Nach NAK gibt es ein Element $f \in A[x]$ mit $fM = 0$ und $f \equiv 1 \bmod xA[x]$, d.h. $f = 1 + xg$ mit $g \in A[x]$. Für $m \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ ( $\subseteq M$) gilt

$$\begin{array}{lll} 0 & = f \bullet m & \text{(wegen } fM = 0) \\ & = (1 + xg) \bullet m & \text{(wegen } f = 1 + xg) \\ & = m + g \bullet x \bullet m & \\ & = m = g \bullet \varphi(m) & \text{(nach Definition von } \bullet) \\ & = m & \text{(wegen } m \in \mathrm{Ker}(\varphi)) \end{array}$$

[8] Man konstruiere ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} A^q & \longrightarrow & A^p & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \beta\downarrow & & \alpha\downarrow & & \| & & \\ K & \longrightarrow & F & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

und fixiere ein endliches System von Erzeugern $f_i$ von F. Für jedes i wähle man ein $g_i$ mit

$$g_i \in K \text{ und } f_i - g_i \in \mathrm{Im}(\alpha).$$

Dann erzeugen die $g_i$ zusammen mit $\mathrm{Im}(\beta)$ den Modul K.

(ii) Es gibt eine Surjektion $A^n \longrightarrow M$ mit endlich erzeugten Kern.

(iii) Für jede Surjektion $A^n \longrightarrow M$ ist der Kern endlich erzeugt.

### 1.3 Moduln endlicher Länge

**Kompositionsreihen**

Eine Komposisitonsreihe der Länge r eines A-Moduls M ist eine Kette von echt ineinander liegenden A-Teilmoduln von M der Gestalt

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M$$

mit der Eigenschaft, daß $M_i/M_{i-1}$ für i = 1,...,r ein einfacher A-Modul ist, d.h. der Modul ist von 0 verschieden und enthält keine echten Teilmoduln. Falls eine solche Kompositionsreihe existiert, so heißt M Modul endlicher Länge. In diesem Fall hängt die Länge r der Kompositionsreihe nur von M und nicht von der speziell gewählten Kompositionsreihe ab und wird mit

$$\ell(M) = \ell_R(M) := r$$

bezeichnet. Man sagt auch, diese Zahl ist die Länge von M. Falls es keine Kompositionsreihe für M gibt, so schreibt man auch

$$\ell(M) = \infty.$$

**Additivität der Längenfunktion**

Für jede kurze exacte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

von A-Moduln gilt

$$\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'').$$

Insbesondere ist M genau dann von endlicher Länge, wenn M' und M'' es sind.

Für jede exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_r \longrightarrow 0$$

von A-Moduln endlicher Länge gilt

$$\sum_{i=1}^{r} (-1)^i \ell(M) = 0.$$

**Beispiel: die Hilbert-Samuel-Funktion**

Sei $m \subseteq A$ ein maximales und endlich erzeugtes Ideal. Dann sind die A/m-Vektorräume

$$m^n/m^{n+1}$$

endlich erzeugt also von endlicher Dimension, also als A-Moduln von endlicher Länge,

$$\ell(m^n/m^{n+1}) < \infty.$$

Also ist auch $A/m^{n+1}$ für jedes n von endlicher Länge:

$$\begin{aligned} \ell(A/m^{n+1}) &\overset{9}{=} \ell(A/m^n) + \ell(m^n/m^{n+1}) \\ &= \ell(A/m^{n-1}) + \ell(m^{n-1}/m^n) + \ell(m^n/m^{n+1}) \\ &\ldots \\ &= \sum_{i=0}^{n} \ell(m^i/m^{i+1}) < \infty. \end{aligned}$$

[9] $0 \longrightarrow m^n/m^{n+1} \longrightarrow A/m^{n+1} \longrightarrow A/m^n \longrightarrow 0$ ist exakt.

Die Funktionen

$$H^0_A: \mathbb{Z}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, n \mapsto \ell(m^n/m^{n+1})$$

$$H^1_A: \mathbb{Z}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, n \mapsto \ell(A/m^{n+1})$$

heißen auch Hilbert-Funktion bzw. Hilbert-Samuel-Funktion von A in m.

## *1.4 Kettenbedingungen*

### 1.4.1 Halbgeordnete Mengen

Sei Γ ein halbgeordnete Mengen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.[10]

(i) Jede nicht-leere Teilmenge von Γ besitzt ein maximales Element.

(ii) Jede aufsteigende Kette

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_2 \leq \ldots$$

ist stationär, d.h. von einer bestimmte Stelle an gilt das Gleichheitszeichen.
Sind diese Bedingungen erfüllt, so sagt man, Γ genügt der aufsteigenden Kettenbedingung. Analog definiert man die absteigende Kettenbedingung: man ersetze ≤ durch ≥.

### 1.4.2 Ringe und Moduln

Ein Modul über einem Ring heißt noethersch, wenn die Menge seiner Teilmoduln der aufsteigenden Kettenbedingung genügt (bezüglich $\subseteq$).
Ein Modul über einem Ring heißt artinsch, wenn die Menge seiner Teilmoduln der absteigenden Kettenbedingung genügt (bezüglich $\subseteq$).

Ein Ring heißt noethersch bzw. artinsch, wenn er als Modul über sich selbst diese Eigenschaft hat (d.h. die wenn die Menge der Ideale des Rings der aufsteigenden bzw. abgsteigenden Kettenbedingung genügt).

Faktormoduln, Teilmoduln, Quotientenmoduln
Jeder Teilmodul oder Faktormodul oder Quotientenmodul eines noetherschen Moduls ist noethersch.
Jeder Teilmodul oder Faktormodul oder Quotientenmodul eines artinschen Moduls ist artinsch.
Die analogen Aussagen für Faktorringe und Quotientenringe sind ebenfalls richtig.
Die analogen Aussagen für Teilringe müssen nicht richtig sein.[11]

### 1.4.3 Endliche Erzeugendensysteme und noethersche Moduln bzw. Ringe

Ein Modul ist genau dann noethersch, wenn jeder Teilmodul ein endliches Erzeugendensystem besitzt.
Ein Ring ist genau dann noethersch, wenn jedes Ideal ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

---

[10] (i) ⇒ (ii). Andernfalls hätte die Menge der $\gamma_i$ kein maximales Element.

(ii) ⇒ (i). Andernfalls könnte man eine unendliche echt aufsteigende Kette konstruieren.

[11] Sei A ein Polynomring in unendlich vielen Unbstimmten über einem Körper. Dann ist A weder artinsch noch noetersch, aber Teilring seines Quotientenkörpers, d.h. eines Rings der sowohl artisch als auch noethersch ist.

### 1.4.4 Kurze exakte Sequenzen

Sei

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Dann gilt[12]

(i) M ist genau dann noethersch, wenn M' und M" es sind.

(ii) M ist genau dann artinsch, wenn M' und M" es sind.

Folgerungen:

Jeder endlich erzeugte Modul über einem noetherschen Ring ist noethersch.

Ein Modul ist genau dann von endlicher Länge, wenn er noethersch und artinsch ist.[13]

Eigenschaften noetherscher Ringe

(i) Mit A ist auch A[x] noethersch (Hilbertscher Basissatz).[14]

(ii) Mit A ist auch A[[x]] noethersch.[15]

(iii) A ist genau dann noethersch, wenn jedes Primideal endlich erzeugt ist (Satz von Cohen).[16]

---

[12] Man zeige, für je zwei Submoduln N', N" von M mit

$$N' \subseteq N'', f^{-1}(N') = f^{-1}(N'') \text{ und } g(N') = g(N'')$$

gilt N' = N". Eine unendlich aufsteigende bzw. absteigene Kette von M liefert somit eine ebensolche für M' oder M".

[13] Sei $M \neq 0$ noethersch und artinsch. Dann gibt es einen mimimalen Teilmodul $M_1 \neq 0$ von M. Im Fall $M_1 \neq M$ gibt es einen minmalen Teilmodul $M_2$ der echt größer ist als $M_1$ usw. Die so konstruierten $M_i$ bilden eine Kompositionsreihe.

[14] Für ein gegebenes Ideal $I \subseteq A[x]$ betrachte man das Ideal $I' \subseteq A$ der höchsten Koeffizienten der Elemente von I und für r = 0, 1, 2, ... das Ideal $I_r \subseteq A$ der Koeffizienten von $x^r$ welche in den Elementen von I vorkommen.

[15] Siehe H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Mass. 1980, Theorem 3.3.

[16] Siehe H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Mass. 1980, Theorem 3.4. Man betrachtet die Menge Γ aller Ideale von A welche nicht endlich erzeugt sind. Falls diese Menge nicht leer ist, so enthält sie nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element, sagen wir I. Dann ist I kein Primideal. Es gibt also Elemente $x, y \in A$ mit

$$xy \in I \text{ und } x \notin I \text{ jnd } y \notin I.$$

Die Ideale I + xA und I + yA sind echt größer als I, d.h.

$$I + xA \text{ und } I + yA \text{ sind endlich erzeugt.}$$

Es gibt insbesondere Element $u_1, \ldots, u_r \in I$ mit

$$I + yA = Au_1 + \ldots + Au_r + Ay.$$

Wegen $x \in I:y = \{a \in A \mid ay \in I\}$ ist I:y ein Ideal, das echt größer ist als I. Es ist also endlich erzeugt, sagen wir

$$I:y = Av_1 + \ldots Av_s .$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

$$I = Au_1 + \ldots + Au_r + Av_1y + \ldots + Av_sy.$$

Trivialerweise gilt "$\supseteq$". Sei $\alpha \in I$. Nach Wahl der $u_i$ gitl dann

$$\alpha = a_1u_1 + \ldots + a_ru_r + \beta y.$$

Es reicht zu zeigen, β ist eine Linearkombination der $v_i$. Wegen $\alpha \in I$ und $u_i \in I$ gilt $\beta y \in I$, also $\beta \in I:y = Av_1 + \ldots Av_s$.

(iv) Sei M ein noetherscher A-Modul. Dann ist A/Ann(M) ein noetherscher Ring.[17]

**1.4.5 Kriterium für noethersche Ringe (Satz von Formanek)**

Sei M ein endlich erzeugter A-Modul mit[18]

$$\mathrm{Ann}(M) = 0.$$

Die Menge der Teilmoduln von M der Gestalt

$$IM, I \text{ Ideal von } A,$$

genüge der aufsteigenden Kettenbedingung. Dann ist A noethersch.

**Beweis**. Wegen Ann(M) = 0 reicht es zu zeigen, M ist ein noetherscher A-Modul. Nehmen wir an,

M ist als A-Modul nicht noethersch.

Betrachten wir die folgende Menge.

$$\left\{ IM \mid \begin{matrix} I \text{ ist ein Ideal von } A \text{ und} \\ M/IM \text{ ist als A-Modul nicht noethersch} \end{matrix} \right\} \qquad (1)$$

Diese Menge ist nicht leer, denn sie enthält den trivialen Modul 0•M. Weil die Menge der IM der aufsteigenden Kettenbedingung genügt, enthält die Mengen (1) ein maximales Element. Sei IM ein solches maximales Element. Wir ersetzen M durch M/IM und A durch A/Ann(M/IM). Die Voraussetzungen des Satzes bleiben dabei erhalten. Wir können somit annehmen,

1. M ist als A-Modul nicht noethersch.
2. M/IM ist noethersch über A für jedes von Null verchiedene Ideal $I \subseteq A$.

Betrachten wir jetzt die folgende Menge.

$$\{N \mid N \subseteq M \text{ ist ein A-Teilmodul mit } \mathrm{Ann}(M/N) = 0\} \qquad (2)$$

Nach Voraussetzung ist M als A-Modul endlich erzeugt, sagen wir

$$M = Am_1+...+Am_r.$$

Ein A-Teilmodul $N \subseteq M$ liegt genau dann in der Mengen (2) wenn gilt

$$a(M/N) \neq 0 \text{ für jedes } a \in A - \{0\},$$

d.h.

$$\{ am_1,..., am_r\} \not\subseteq N \quad \text{für jedes } a \in A - \{0\}.$$

Ist die letztere Bedingung für die Moduln einer Kette erfüllt, so auch für die Vereinigung der Moduln dieser Kette. Die Menge (2) genügt also den Bedingungen des Zornschen Lemmas.[19] Sie enthält also ein maximales Element, sagen wir $N_0$. Ist der treue A-Modul $M/N_0$ noethersch, so ist auch A noethersch. Als endlich erzeugter A-Modul ist dann aber auch M noethersch im Widerspruch zu unserer Annahme. Wir ersetzen M durch $M/N_0$ und können damit annehmen,

1. M ist als A-Modul nicht noethersch.
2. M/IM ist noethersch über A für jedes von Null verchiedene Ideal $I \subseteq A$.
3. $\mathrm{Ann}(M/N) \neq 0$ für jeden von Null verschiedenen A-Teilmodul $N \subseteq M$.

---

[17] O.B.d.A. sei Ann(M) = 0. Man fixiere ein Erzeugendensystem von M, sagen wir $M = Am_1+...+Am_r$ und bette A als Teilmodul in $M^r$ ein vermittels

$$A \longrightarrow M^r, a \mapsto (am_1 ,..., am_r).$$

Als Teilmodul des noetherschen Moduls $M^r$ ist A noethersch.

[18] Solche Moduln heißen treu.

[19] Sie ist nicht leer, denn der triviale Teilmodul von M liegt in der Menge (2).

Es reicht zu zeigen, die erste Aussage kann nicht gleichzeitig mit den beiden anderen gelten. Zeigen wir also M ist noethersch. Dazu betrachten wir einen beliebigen nicht-trivialen A-Teilmodul

$$N \subseteq M.$$

Nach Aussage 3 gibt es ein $a \in A - \{0\}$ mit $a(M/N) = 0$, d.h.

$$aM \subseteq N.$$

Nach Aussage 2 ist M/aM noethersch, d.h. der Teilmodul N/aM ist endlich erzeugt, sagen wir

$$N = An_1 + ... + An_s + aM.$$

Weil M als A-Modul endlich erzeugt ist, gilt dasselbe für aM. Also ist N endlich erzeugt.
**QED**.

### 1.4.6 Satz von Eakin-Nagata

(i) Sei A Teilring eines noetherschen Rings[20] B, welcher ein endlich erzeugter A-Modul ist. Dann ist A noethersch.
(ii) Sei A Teilring eines nicht-kommutativen Rings[21] B, welcher als linker A-Modul endlich erzeugt ist und dessen rechte Ideale der aufsteigenden Kettenbedingung genügen. Dann ist A noethersch.
(iii) Teilring eines nicht-kommutativen Rings[22] B, welcher als linker A-Modul endlich erzeugt ist und dessen zweiseitige Ideale der aufsteigenden Kettenbedingung genügen. Dann ist A noethersch, falls A ganz im Zentrum von B liegt.

**Beweis**. Zu (i). Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Satz von Formanek.
Zu (ii). Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Satz von Formanek.
Zu (iii). Weil A im Zentrum liegt, sind die A-Moduln der Gestalt

$$IB, I \text{ Ideal von } A,$$

zweiseitige Ideale von B. Die Aussage folgt damit aus dem Satz von Formanek.
**QED**.

### 1.4.7 Kriterium für artinsche Ringe

Folgende Bedingungen sind äquivalent für A.
(i) A ist artinsch.
(ii) A hat als A-Modul über sich selbst endliche Länge.
(iii) A ist noethersch und jedes Primideal ist maximal.
**Beweis**.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Trivialerweise ist A noethersch. Sei $p \subseteq A$ ein Primideal. Dann liegt p in einem maximalen Ideal, sagen wir

$$p \subseteq m.$$

Dann gilt

$$\infty > \ell(A) \geq \ell(A/m^{n+1}) \geq \sum_{i=0}^{n} \ell(m^i/m^{i+1})$$

für jedes n. Also können nicht alle $\ell(m^i/m^{i+1}) > 0$ sein: es gibt ein i mit $m^i = m^{i+1}$. Nach NAK gibt es ein $a \in A$ mit

$$a\, m^i = 0 \text{ und } a = 1 + x \text{ mit } x \in m.$$

---

[20] kommuativ mit 1.
[21] mit 1.
[22] mit 1.

Insbesondere liegt a nicht in m, also erst recht nicht in p. Wegen

$$am^i = 0 \subseteq p$$

und weil p ein Primideal ist, folgt $m^i \subseteq p$, also $m \subseteq p$ also $m = p$.

(i) ⇒ (ii). 1.Schritt. A besitzt nur endliche viele maximale Ideale.
Angenommen, es gibt unendlich viele, sagen wir

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

Sei

$$I_j := p_1 \bullet \ldots \bullet p_j$$

da Produkt der ersten j dieser maximalen Ideale. Dann ist $I_j$ ganz in $p_j$ enthalten, während dies für $I_{j-1}$ nicht gilt. Insbesondere sind $I_j$ und $I_{j-1}$ verschieden. Wir erhalten so eine nicht-stationäre Kette

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$$

von Idealen von A, was nicht möglich ist, weil A Artinsch sein soll.
Wir bezeichnen im folgenden die maximalen Ideale von A mit

$$p_1, \ldots, p_r .$$

2. Schritt. Das Produkt $I := p_1 \bullet \ldots \bullet p_r$ der maximalen Ideale ist nilpotent.
Die absteigende Kette der Potenzen von I ist, weil A Artinsch ist, stationär, d.h. es gibt ein s mit

$$I^s = I^{s+1}.$$

Wir setzen

$$J := 0 : I^s := \{x \in A \mid xI^s = 0\}.$$

Dann gilt

$$J{:}I = (0 : I^s){:}I = 0{:}\ I^{s+1} = J.$$

Angenommen, J ist ein echtes Ideal von A. Weil A Artinsch ist gibt es in der Menge der Ideale von A, die J echt enthalten, ein minimales, sagen wir J':

$$J \subset J' \subseteq A.$$

Für jedes $x \in J' - J$ gilt dann $J' = J + xA$. Betrachten wir das Ideal

$$(J \subseteq)\ \ IJ' + J = IJ + Ix + J = Ix + J\ \ (\subseteq J') \qquad (1)$$

Wegen

$$I = p_1 \bullet \ldots \bullet p_r =^{23} p_1 \cap \ldots \cap p_r = \mathrm{rad}(A)$$

ist (1) von J' verschieden (denn andernfalls wäre nach NAK J' = J was der Wahl von J' widerspricht). Also ist (1) ein echter Teilmodul von J', und wegen der Minimalität von J' folgt

$$Ix + J = J.$$

Es folgt $Ix \subseteq J$, also $x \in J{:}I = J$, also $x \in J$ im Widerspruch zur Wahl von x. Wir haben gezeigt, J ist kein echtes Ideal von A,

$$J = A.$$

Dann gilt aber

$$\begin{aligned} I^s &= AI^s \\ &= J \bullet I^s \\ &= (0{:}I^s)\bullet I^s \qquad \text{(Definition von J)} \end{aligned}$$

[23] die $p_i$ sind paarweise komaximal.

$= 0.$

3. Schritt. Konstruktion einer Kompositionsreihe für A.
Wir betrachten die folgende Kette von Idealen von A.

$$
\begin{aligned}
&A \supset p_1 \supset p_1 p_2 \supset ... \supset p_1 \bullet ... \bullet p_r \ (= I) \\
&\supset Ip_1 \supset Ip_1 p_2 \supset ... \supset Ip_1 \bullet ... \bullet p_r \ (= I^2) \\
&\supset I^2 p_1 \supset I^2 p_1 p_2 \supset ... \supset I^2 p_1 \bullet ... \bullet p_r \ (= I^3) \\
&... \\
&\supset I^{s-1} p_1 \supset ... \supset I^{s-1} p_1 \bullet ... \bullet p_r = I^s = 0
\end{aligned}
$$

Alle Faktoren dieser Kette haben die Gestalt

$$I/p_i I$$

mit einem (endlich erzeugten) Ideal I von A. Diese Faktoren sind also endlich-dimensionalen Vektorräume über dem Körper $A/p_i$ und haben deshalb eine endliche Länge. Dann ist aber auch die Länge von A endlich.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Sei also A noethersch, und jedes Primideal von A sein maximal. Wir verwenden hier die Theorie der Zerlegung in Primärideale von E. Noether (siehe unten). Sei

$$0 = q_1 \cap ... \cap q_r$$

die Zerlegung des Nullideals von A in Primärideale.[24]

Definition

Ein Primärideal eines Ringes A ist ein echtes Ideal $q \subseteq A$, für welches die folgende Implikation besteht.

$$xy \in q, x \notin q \Rightarrow y^n \in q \text{ für ein n.}$$

Bemerkungen

(i) Die Primärideale von $\mathbb{Z}$ sind gerade die von einer Primzahlpotenz erzeugten Ideale. Primärideale verallgemeinern also den Begriff der Primzahlpotenz.

(ii) Für jedes Primärideal q ist $\sqrt{q}$ ein Primideal und heißt das zu q gehörige Primideal.

Bezeichne jetzt

$$p_i := \sqrt{q_i}$$

das zu $q_i$ gehörige Primideal. Nach Voraussetzung sind die $p_i$ maximale Ideale. Weil sie endlich erzeugt sind, gibt es eine natürliche Zahl s mit

$$p_i^s \subseteq q_i .$$

Es folgts

$$(p_1 \bullet ... \bullet p_r)^s \subseteq q_1 \cap ... \cap q_r = 0.$$

Wie im 3. Schritt der vorangehenden Implikation sehen wir, A hat endliche Länge. Insbesondere ist A Artinsch.

**QED**.

[24] Dies ist eine Verallgemeinerung des Satzes von der Zerlegung in Primfaktoren. Die Aussage, jede natürliche Zahl $\neq 1$ ist Produkt von Primzahlpotenzen, bekommt die Gestalt, jedes echte Ideal eines noetherschen Ring ist Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen.

# 2 Primideale

## *2.1 Quotientenringe und das Spektrum eines Rings*

### 2.1.1 Definition des Quotientenrings

Eine Teilmeng $S \subseteq A$ heißt multiplikativ, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. $1 \in S$
2. Für je zwei Elemente $x, y \in S$ gilt $xy \in S$.

Ein Quotientenring von A bezüglich der multiplikativen Menge S ist ein kommutativer Ring B mit 1 zusammen mit einem Homomorphismus von Ringen mit 1, sagen wir

$$f: A \longrightarrow B$$

mit

(i) $f(S) \subseteq B^*$.

(ii) Für jeden Homomorphismus von $g: A \longrightarrow B'$ von Ringen mit 1, für welchen

$$g(S) \subseteq B'^*,$$

gilt, gibt es genau einen Homomorphismus $\tilde{g}: B \longrightarrow B'$ mit der Eigenschaft, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B' \\ \downarrow & \swarrow \tilde{g} & \\ B' & & \end{array}$$

Bezeichnung:

$$S^{-1}A = A_S := B'.$$

**Bemerkungen**

(i) Der Quotientenring existiert. Man kann ihn beschreiben als die Menge

$$B' = \{\frac{a}{b} \mid a \in A, b \in S\}$$

der Äquivalenzklassen $\frac{a}{b}$ der Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in S$ modulo der Relation

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow \text{Es gibt ein } s \in S \text{ mit } s(ab' - ba') = 0.$$

Die Ringoperationen in B' sind dann gegeben durch

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}$$

$$\frac{a}{b} \bullet \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$$

(ii) Der Kern der natürlichen Abbildung $f: A \longrightarrow S^{-1}A$ besteht gerade aus den Elementen, die von einem Element von S annulliert werden,

$$\mathrm{Ker}(f) := \{a \in A \mid sa = 0 \text{ für ein } s \in S\}$$

**Beispiele für multiplikative Mengen**

1. Die Potenzen eines festen Elements aus A.
2. Das Komplement eines Primideals.
3. Die Mengen der Gestalt 1 + I mit einem echten Ideal I von A.

4. Für jede multiplikative Menge S ist auch $\tilde{S} := \{a \in A \mid ab \in S$ für ein $b \in A\}$ eine multiplikative Menge von A. Sie heißt Saturation von S. Es gilt $A_S = A_{\tilde{S}}$

### 2.1.2 Vergleich der Idealmengen von A und $S^{-1}A$

Seien $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge und $f: A \longrightarrow S^{-1}A$ die natürliche Abbildung in den Quotientenring

(i) Die Abbildung

$$\{\text{Ideale von } S^{-1}A\} \longrightarrow \{\text{Ideale von } A\}, I \mapsto f^{-1}(I) =: I \cap A.$$

ist injektiv. Ihr Bild besteht aus den Idealen J von A, mit $J : s = J$ für $s \in S$.[25] Genauer, es gilt[26]

$$(I \cap A)A_S = I. \qquad (1)$$

(ii) Die Menge der Primideale von $S^{-1}A$ läßt sich vermittels der Abbildung von (i) identifizieren mit den zu S disjunkten Primidealen von A.

(iii) Jedes Ideal von $A_S$ hat die Gestalt $IA_S$ mit einem Ideal I von A.[27]

(iv) Jedes Primideal von $A_S$ hat die Gestalt $pA_S$ mit einem Primideal p von A, für welches gilt $p \cap S = \emptyset$.[28]

(v) Jedes Primärideal von $A_S$ hat die Gestalt $qA_S$ mit einem Primärideal q von A, für welches gilt $q \cap S = \emptyset$.[29]

(vi) Quotientenringe von noetherschen Ringen sind noethersch.

(vii) Quotientenringe von artinschen Ringen sind artinsch.

### 2.1.3 Quotientenbildung und Faktorisierung

Seien $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge, $I \subseteq A$ ein Ideal und $\bar{S}$ das Bild von S beim natürlichen Homomorphismus $A \longrightarrow A/I$. Dann gilt[30]

---

[25] Sei $J \subseteq A$ ein Ideal mit der angegebenen Eigenschaft. Wir setzen $I := JA_S$. Dann gilt nach Konstruktion

$$J \subseteq I \cap A.$$

Sei $x \in I \cap A$. Dann gilt $\frac{x}{1} \in I = JA_S$, d.h. $\frac{x}{1} = \frac{a}{s}$ mit $a \in J$ und $s \in S$, d.h.

$$t\bullet(xs - a\bullet 1) = 0$$

für ein $t \in S$, d.h. $stx = ta \in J$, d.h. $x \in J : st = J$.

[26] Die Implikation "$\subseteq$" ist trivial. Beweisen wir "$\supseteq$". Sei $x \in I$, $x = \frac{a}{s}$ mit $a \in A$, $s \in S$. Dann ist

$$a \in I \cap A,$$

also $\frac{a}{1} \in (I \cap A)A_S$. Weil $\frac{s}{1}$ Einheit in $A_S$ ist, folgt $x = \frac{a}{s} = \frac{a}{1}\bullet(\frac{s}{1})^{-1} \in (I \cap A)A_S$ .

[27] Wegen (1).

[28] Wegen (1).

[29] Wegen (1).

[30] Sei B einer der beiden Ringe. Dann gibt es einen Homomorphismus

$$f: A \longrightarrow B$$

von Ringen mit 1, wobei gilt:

1. $f(I) = 0$.
2. $f(S) \subseteq B^*$.

$$A_S/IA_S \cong (A/I)_{\overline{S}}$$

### 2.1.4 Iterierte Quotientenbildung

Seien $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge und $f: A \longrightarrow A_S$ die natürliche Abbildung. Weiter existiere ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A_S \\ g\downarrow & \nearrow h & \\ B & & \end{array}$$

von Ringen mit 1.

Für jedes $b \in B$ existiere $s \in S$ mit $g(s) \cdot b \in g(A)$.

Dann ist $A_S$ ein Quotientenring von B. Genauer, es gilt

$$A_S = B_{g(S)} = B_T$$

mit $T = \{t \in B \mid h(t) \text{ ist Einheit in } A_S\}$.

**Beispiele**

1. Seien $p \subseteq A$ ein Primideal, $S = A - p$ und B wie im obigen Satz. Dann gilt

$$A_p = B_P \text{ mit } P := pA_p \cap B.$$

2. Enthalte die Menge $S \subseteq A$ des Satzes keine Nullteiler. Dann kann man A als Teilring von $A_S$ ansehen,

$$A \subseteq A_S ,$$

und für jeden Ring B zwischen A und $A_S$

$$A \subseteq B \subseteq A_S$$

ist $A_S$ ein Quotientenring von B.

3. Seien S und T zwei multiplikative Teilmengen des Rings A mit $S \subseteq T$ und sei T' das natürliche Bild von T in $A_S$. Dann gilt $(A_S)_{T'} = A_T$.

4. Seien p, q Primideale von A mit $p \subset q$, so gilt $(A_q)_p = A_p$.

### 2.1.5 Spektrum und maximales Spektrum eines Rings, Nullstellenmengen

Die Menge aller Primideale von A heißt <u>Spektrum</u> von A und wird mit

$$\text{Spec } A$$

bezeichnet.Die Menge der maximalen Ideale von A heißt <u>maximales Spektrum</u> von A und wird mit

$$\text{m-Spec}(A) \text{ oder } \Omega(A)$$

---

Außerdem faktorisiert sich jeder Homomorphismus $f': A \longrightarrow B'$ von Ringen mit 1, wobei gilt

1. $f'(I) = 0$
2. $f(S) \subseteq B'^*$

auf genau eine Weise über f.
Beide Seiten genügen also derselben Universalitätseigenschaft.

bezeichnet. Für jedes Primideal $p \subseteq A$ heißt der Quotientenkörper

$$\kappa(p) := Q(A/p)$$

des Restklassenkörpers von $A/p$ auch Restekörper von p. Für jedes $f \in A$ und jedes $p \in \mathrm{Spec}(A)$ setzen setzen wir

$$f(p) := \text{Bild von f beim natürlichen Homomorphismus } A \longrightarrow A/p \subseteq \kappa(p).$$

Zu jedem Element f von A gehört also eine Funktion

$$f: \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \vee\, \kappa(p), p \mapsto f(p),$$

auf dem Spektrum von A, welche Werte in der disjunkten Vereinigung der Restklassenkörper annimmt. Wir werden diese Funktion oft ebenfalls mit f bezeichnen (obwohl das Element f im allgemeinen nicht durch die Funktion f bestimmt ist).

Für jedes Ideal $I \subseteq A$ setzen wir

$$V(I) := \{p \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \subseteq p\} = \{p \in \mathrm{Spec}(A) \mid f(p) = 0 \text{ für jedes } f \in I\}$$

und werden auch sagen, V(I) ist die Nullstellenmenge von I in Spec(A) oder auch die Varietät von I in Spec (A).

**Bemerkungen**

(i) Da jeder von Null verscbiedene Ring ein nicht-triviales Ideal und damit ein maximales Ideal besitzt, gilt

$$A \neq 0 \Leftrightarrow \Omega(A) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Spec}(A) \neq \emptyset.$$

(ii) Maximale Ideale des Polynomrings und affiner Raum. Sei $A = k[x_1, ... , x_n]$ ein Polynomring über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz hat dann jedes maximale Ideal von A die Gestalt

$$m = (x - c_1 , ... , x - c_n ).$$

Die Restklassenkörper der maximalen Ideale sind also alle gleich k, und die natürliche Abbildung

$$A \longrightarrow A/m = \kappa(m) \xrightarrow{\cong} k, f(x) \mapsto f(x) \bmod m = f(c) \bmod m \mapsto f(c),$$

läßt sich mit der Auswertungsabbildung an der Stelle c identifizieren, d.h. mit der Abbildung, welche jedem Polynom in dessen Wert an der Stelle c zuordnet. Insbesondere lassen sich so die maximalen Ideale von A mit den Punkten des $k^n$ identifizieren,

$$k^n \xrightarrow{\cong} \Omega( k[x_1, ... , x_n] ), ( c_1 , ... , c_n ) \mapsto (x - c_1 , ... , x - c_n ).$$

und für $f \in A$ und $m \in \Omega(A)$ ist f(m) gerade der Wert von f im zu m gehörigen Punkt $c \in k^n$,

$$f(m) = f(c).$$

(iii) Primideale des Polynomrings und affiner Raum. Für jedes Primideal $p \subset A$ ist $\kappa(p) = Q(A/p)$ in der Situation von (ii) ein Erweiterungskörper von k. Bezeichne $c_i \in \kappa(p)$ die Restklasse der Unbestimmten $x_i$ im Faktorring A/p. Dann ist die natürliche Abbildung

$$A \longrightarrow A/p = \kappa(p), f(x) \mapsto f(x) \bmod p = f(c),$$

gerade die Abbildung, welche das Polynom f abbildet auf den Wert von f im Punkt c mit den Koordinaten $c_i$. Die Werte

$$f(p)$$

der $f \in A$ in Primidealen sind also gewöhliche Werte der f in Punkten, deren Koordinaten in irgendwelchen Erweiterungskörpern von k liegen.

(iv) Sei umgekehrt $c = (c_1, \ldots, c_n)$ ein Punkt mit Koordinaten $c_i$ aus einem Erweiterungskörper

$$K/k$$

von k. Dann ist die Auswertungsabbildung in c,

$$\varphi_c: A \longrightarrow K, f \mapsto f(c),$$

ein Homomorphismus von k-Algebren und induziert einen injektiven Homomorphismus

$$A/\mathrm{Ker}(\varphi_c) \longrightarrow K.$$

Insbesondere ist $p := \mathrm{Ker}(\varphi_c)$ Primideal und die Auswertungsabbildung $\varphi_c$ faktorisiert sich über A/p. Weil K ein Körper ist, faktoriesiert sich $\varphi_c$ sogar über $Q(A/p) = \kappa(p)$,

$$A \longrightarrow \kappa(p) \hookrightarrow K.$$

Identifiziert man $\kappa(p)$ mit einem Teilkörper von K, so wird die Auswertungsabbildung zur Abbildung $p \mapsto f(p)$. Wir haben damit die

$$\mathrm{Spec}\ k[x_1, \ldots, x_n]$$

beschrieben als etwas, was für die Gesamtheit der affinen Räume $K^n$ steht, wobei K die Erweiterungskörper des algebraisch abgeschlossenen Körpers k durchläuft.

(v) Maximale Ideale und Nullstellenmengen. Betrachten wir jetzt einen Faktorring des Polynomrings, sagen wir

$$A = k[x_1, \ldots, x_n]/I$$

mit einem Ideal $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ und einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Die maximalen Ideale von A entsprechen dann gerade den maximalen Idealen m des Polynomrings mit

$$I \subseteq m = ( x - c_1 , \ldots, x - c_n).$$

Die letztere Bedingung bedeutet gerade, für $f \in I$ gilt $f \in m$, d.h.

$$0 = f \bmod m = f(m) = f(x) \bmod m = f(c).$$

Mit anderen Worten,

$$\begin{aligned}\Omega(A) &= \{m \in \Omega(k[x]) \mid I \subseteq M\} \\ &= \{c \in k^n \mid f(c) = 0 \text{ für } f \in I\}\end{aligned}$$

ist gerade die Menge der gemeinsamen Nullstellen der Polynome des Ideals I. Läßt man als Nullstellen auch Punkte mit Koordinaten aus einem Erweiterungskörper von k zu[31], so muß man das maximale Spektrum von A durch das Spektrum Spec A ersetzen. Genauer,

$$\mathrm{Spec}\ A$$

besteht aus Konjugationsklassen über k von Nullstellen. Sei zum Beipspiel

$$A = k[x]/(f)$$

und

[31] und verzichtet auf die algebraische Abgeschlossenheit von k.

$$f = f_1^{e_1} \bullet ... \bullet f_r^{e_r}$$

die Zerlegung von f in paarweise teilfremde Potenzen von irreduziblen Polynomen. Die Menge Spec A steht dann für die Menge der Punkte des affinen Raumes

$$\mathrm{Spec}\ k[x] = \mathbb{A}_k^1$$

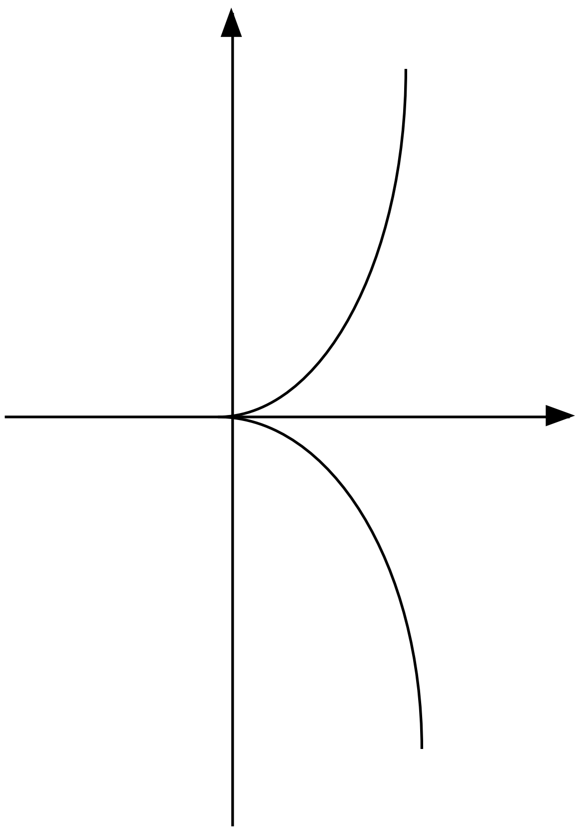
mit Koordinaten in einem Erweiterungskörper von k, welche Nullstellen von f sind. Genauer erhalten

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}\ A &= V(f) \\ &= V(f_1^{e_1}) \cup ... \cup V(f_r^{e_r j}) \\ &= V(f_1) \cup ... \cup V(f_r) \\ &= \{f_1 A , ... , f_r A\} \end{aligned}$$

Dabei kann man das Primideal $f_i A$ identifizieren mit einem gewöhlichen Punkt mit Koordinaten im Erweiterungskörper $k[x]/(f_i)$ von k, wobei die einzige Koordinate dieses Punktes gerade die Restklasse x ist, d.h. eine Nullstelle von $f_i$. Man beachte, je zwei Nullstellen von $f_i$ sind konjugiert über k. Alternativ kann man sich $f_1 A$ als die Gesamtheit der endlich vielen Nullstellen von $f_i$ vorstellen.

Betrachten wir eine weiteres (höherdimensionales) Beispiel. Sei

$$A = k[x, y]/(f) \text{ mit } f := x^3 - y^2.$$



Es ist nicht schwer zu zeigen, das von f erzeugte Ideal ist gerade der Kern der Auswertungsabbildung

$$k[x, y] \longrightarrow k(t), p(x, y) \mapsto p(t^2, t^3), \tag{1}$$

an der Stelle $(t^2, t^3)$, wobei t eine Unbestimmte bezeichne. Insbesondere ist f irreduzibel. Die Menge

$$\text{Spec } A = \{(\alpha^2, \alpha^3) \mid \alpha\in k\} \bigcup \{(t^2, t^3)\}$$

besteht gerade die gewöhnlichen (0-dimensionalen) Punkten mit Koordinaten aus k und einem weiteren (1-dimensionalen) Punkt $(t^2, t^3)$ mit Koordinaten im Erweiterungskörper k(t). Ersetzt man t durch eine andere Unbestimmte, so bleibt der Kern der Abbildung (1) unverändert, d.h. man erhält denselben Punkt.
Man beachte die einpunktige Menge

$$\{(t^2, t^3)\}$$

liegt dicht[32] in Spec A = $V(x^3 - y^2)$. Man nennt solche Punkte allgemeiner Punkte.

(vi) Der Fall von Ringen ohne Teilkörper. Die Konstruktionen von (iii) und (iv) lassen sich auf beliebige Ringe A verallgemeinern, welche einen Körper k enthalten. Die Mengen Spec A stehen dann für die Lösungen von nicht notwendig linearen Gleichungssystemen mit Koordinaten in den Erweiterungskörpern von k. Läßt man auch Ringe zu, die keinen Körper enthalten, so tritt ein neues Phänomen ein: man erhält Lösungen von Gleichungssystemen in Körpern unterschiedlicher Charakteristik. Zum Beipiel steht

$$\text{Spec } \mathbb{Z}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$$

für alle Punkte des Einheitskreises mit Koordinaten in allen Körpern (aller Charakteristiken), zum Beispiel auch für den Einheitskreis über dem Körper $\mathbb{Z}/(p)$ mit p Elementen.

(vii) Für je zwei Ideale I', I" eines Ringes A gilt

$$V(I') \bigcup V(I'') = V(I'\bullet I'') = V(I'\bigcap I'').$$ [33]

(viii) Für jedes Familie $\{I_\alpha\}$ von Idealen des Rings A gilt

$$\bigcap V(I_\alpha) = V(\sum_\alpha I_\alpha).$$ [34]

---

[32] Seien $(\alpha^3, \alpha^2) \in V(x^3 - y^2)$ ein beliebiger Punkt und U eine offene Umgebung dieses Punktes. Wir haben zu zeigen,

$$(t^3, t^2) \in U.$$

Zum Beweis können wir U bei Bedarf verkleinern. Wir können also annehmen, U ist eine offene Hauptmenge, sagen wir

$$U = D(g), g \in k[x, y].$$

Wegen $(\alpha^3, \alpha^2) \in U = D(g)$ gilt $g(\alpha^3, \alpha^2) \neq 0$. Dann gilt aber erst recht dasselbe, wenn man $\alpha\in k$ durch eine Unbestimmte ersetzt, d.h. es gilt $g(t^3, t^2) \neq 0$, also

$$(t^3, t^2) \in D(g) = U.$$

[33] Für p ∈ Spec A gilt

$$p\in V(I'\bullet I'') \Leftrightarrow p \supseteq I'\bullet I'' \Leftrightarrow p \supseteq I' \text{ oder } p \supseteq I'' \Leftrightarrow p \in V(I')\bigcup V(I'').$$

Aus $p \supseteq I'\bigcap I''$ folgt trivialerweise $p \supseteq I'\bullet I''$. Zusammen erhalten wir

$$V(I'\bigcap I'') \subseteq V(I'\bullet I'') = V(I') \bigcap V(I'').$$

Sei jetzt p nicht in $V(I'\bigcap I'')$. Dann gibt es ein $x \in I'\bigcap I''$, welches nicht in p liegt. Dann liegt aber auch

$$x^2 \in I'\bullet I''$$

nicht in p, d.h. p liegt nicht in $V(I'\bullet I'')$.

[34] Für p ∈ Spec A gilt

(ix) Die Mengen der Gestalt V(I) mit $I \subseteq A$ Ideal bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie von Spec A. Diese heißt <u>Zariski-Topologie</u> von Spec A. Die Mengen der Gestalt

$$D(f) := \{p \in \text{Spec } A \mid f(p) \neq 0\} = \{p \in \text{Spec } A \mid f \notin p\}$$

sind offen in der Zariski-Topologie. Sie heißen <u>offene Hauptmengen</u> und bilden eine Topologiebasis.

Spec A

ist <u>quasi-kompakt</u>, d.h. jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung[35].

(x) Für jeden Homomorphismus h: A $\longrightarrow$ Ringen betrachten wir die Abbildung

$$\text{Spec}(h)\colon \text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } A,\ p \mapsto h^{-1}(p).$$

Für jedes $f \in A$ gilt

$$\text{Spec}(h)^{-1}(D(f)) = D(h(f)).$$

Insbesondere ist Spec(h) stetig.[36]

---

$$p \in \bigcap V(I_\alpha) \Leftrightarrow p \supseteq I_\alpha \text{ für jedes } \alpha \Leftrightarrow p \supseteq \sum_\alpha I_\alpha \Leftrightarrow p \in V(\sum_\alpha I_\alpha)$$

[35] Trivialerweise gilt $V(A) = \varnothing$ und $V(\{0\})$ = Spec A. Zusammen mit (vii) und (viii) bedeutet das, die V(I) sind die abgeschlossenen Mengen einer Topologie von Spec A. Die Menge D(f) ist offen wegen

$$D(f) = \{p \mid f \notin p\} = \{p \mid fA \not\subseteq p\} = \text{Spec } A - V(fA).$$

Zeigen wir, die D(f) bilden eine Topologie-Basis, d.h. jede Menge der Gestalt

$$\text{Spec } A - V(I)\ ,\ I \text{ Ideal von } A,$$

ist Vereinigung von Mengen der Gestalt D(f).

Sei $\{f_\alpha\}$ ein Erzeugendensystem des Ideals I. Dann gilt für $p \in$ Spec A:

$$p \in \text{Spec } A - V(I) \Leftrightarrow f_\alpha \notin p \text{ für ein } \alpha \Leftrightarrow p \in D(f_\alpha) \text{ für ein } \alpha \Leftrightarrow p \in \bigcup D(f_\alpha).$$

Wir haben noch die Kompaktheit von Spec A zu zeigen. Sei eine offene Überdeckung von Spec A gegeben,

$$\text{Spec } A = \bigcup U_\alpha\ . \qquad (1)$$

Wir haben zu zeigen, bereits endlich viele der $U_\alpha$ überdecken Spec A. Zum Beweis können wir annehmen, die $U_\alpha$ sind offene Hauptmengen, sagen wir

$$U_\alpha = D(f_\alpha).$$

Wegen (1) liegt jedes Primideal p von A in einem $D(f_\alpha)$, d.h. $f_\alpha \notin p$. Deshalb liegt das von den $f_\alpha$ erzeugte Ideal

$$I := (f_\alpha \mid \alpha \text{ beliebig })$$

in keinem maximalen Ideal von A ist also gleich A. Es folgt $1 \in I$, d.h. 1 ist Linearkombination von endlich vielen $f_\alpha$, sagen wir von $f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_r}$, d.h.

$$(f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_r}) = A.$$

Kein Primideal p von A enthält alle $f_{\alpha_i}$. Jedes Primideal p liegt in mindestens einem $D(f_{\alpha_i})$, d.h.

$$D(f_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup D(f_{\alpha_r}) = \text{Spec A}.$$

(ix) Ist in (x) der Ring B der Quotientenring

$$B = A_f$$

bezüglich der Potenzen eines Elements $f \in A$ und h die natürliche Abbildung

$$h: A \longrightarrow A_f ,$$

so ist

$$\mathrm{Spec}(h): \mathrm{Spec}\, A_f \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A, q \mapsto q \cap A,$$

ein Homöomorphismus, welcher Spec $A_f$ mit der offenen Teilmenge D(f) von Spec A identifiziert.[37]

### 2.1.6 Quotientenmoduln

Seien M ein A-Modul und $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge. Dann ist

$$S^{-1}M := M_S := \{\frac{m}{s} \mid m \in M, s \in S\}$$

definiert als die Menge der Äquivalenzklassen $\frac{m}{s}$ der Menge M×S der Paare (m, s) bezüglich der folgenden Äquivalenzrelation.

$$(m, s) \sim (m', s') \Leftrightarrow \frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \Leftrightarrow t\bullet(s'm - sm') = 0 \text{ für ein } t \in S.$$

Die folgenden Definitionen sind korrekt und versehen die Mengen $M_S$ mit der Struktur eines $A_S$-Moduls.

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} := \frac{s'm + sm'}{ss'}$$

---

[36] Für q ∈ Spec B gilt

$$\begin{aligned} q \in \mathrm{Spec}(h)^{-1}(D(f)) &\Leftrightarrow \mathrm{Spec}(h)(q) \in D(f) \\ &\Leftrightarrow h^{-1}(q) \in D(f) \\ &\Leftrightarrow f \notin h^{-1}(q) \\ &\Leftrightarrow h(f) \notin q \\ &\Leftrightarrow q \in D(h(f)). \end{aligned}$$

[37] Wie wir wissen ist Spec(h) stetig und bildet Spec $A_f$ bijektive auf D(f) ab. Wir haben noch zu zeigen, die Abbildung

$$\mathrm{Spec}(h): \mathrm{Spec}(A_f) \longrightarrow D(f),$$

ist offen, d.h. sie bildet offene Mengen in offene Mengen ab. Dazu reicht es zu zeigen, daß das Bild einer offenen Hauptmenge stets offen ist, d.h. es reicht zu zeigen

$$\mathrm{Spec}(h)(D(a/f^n)) = D(f) \cap D(a).$$

Für p ∈ Spec A gilt:

$p \in \mathrm{Spec}(h)(D(a/f^n)) \Leftrightarrow p \in D(f)$, d.h. $p = pA_f$ , und $pA_f \in D(a/f^n)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow p \in D(f) \text{ und } a/f^n \notin pA_f \\ &\Leftrightarrow p \in D(f) \text{ und } a/1 \notin pA_f (\text{weil } f/1 \text{ Einheit ist in } A_f) \\ &\Leftrightarrow p \in D(f) \text{ und } a \notin pA_f \cap A = p \\ &\Leftrightarrow p \in D(f) \text{ und } p \in D(a) \\ &\Leftrightarrow p \in D(f) \cap D(a). \end{aligned}$$

$$\frac{a}{s} \bullet \frac{m}{t} := \frac{am}{st}$$

Im Fall $S := A - p$ mit einem Primideal p von A schreibt man

$$M_p := S^{-1}M$$

Die Menge

$$\mathrm{Supp}(M) := \{p \in \mathrm{Spec}\, A \mid M_p \neq 0\}$$

heißt Träger von M in Spec A.

**2.1.7 Eigenschaften von Quotientienmoduln**

(i) Für jeden A-Modul M und jede multiplikative Menge $S \subseteq A$ ist die Abbildung

$$M \longrightarrow M_S\ ,\ m \mapsto \frac{m}{1}$$

A-linear und besitzt den Kern

$$\{m \in M \mid sm = 0 \text{ für ein } s \in S\}$$

(ii) Für jeden endlich erzeugten A-Modul M, sagen wir

$$M = Am_1 + ... + Am_r$$

gilt[38]

$$\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{Ann}(M)).$$

(iii) $M_S \cong$[39] $M \otimes_A A_S$ .

---

[38] Es gilt:

$$\begin{aligned} p \in \mathrm{Supp}(M) &\Leftrightarrow M_p \neq 0 \Leftrightarrow \text{ein } m_i \text{ ist} \neq 0 \text{ in } M_p \text{ (liegt nicht in Ker}(M \longrightarrow M_p)) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Ann}(m_i) \subseteq p \text{ für ein } i \\ &\Leftrightarrow \bigcap \mathrm{Ann}(m_i) \subseteq p \qquad \text{(mit dem Durchschnitt liegt auch das Produkt in p)} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Ann}(M) \subseteq p \\ &\Leftrightarrow p \in V(\mathrm{Ann}(M)) \end{aligned}$$

[39] Die natürliche Abbildung $M \times A_S \longrightarrow M_S$ , $(m, a/s) \mapsto am/s$ , ist bilinear über A. Für jede Abbildung

$$b: M \times A_S \longrightarrow N$$

mit Werten in einem $A_S$-Modul N, welche bilinear über A ist, betrachte man die Abbildung

$$b':M\times S \longrightarrow N,\ (m, a) \mapsto b(m, 1/a).$$

Für $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$, d.h. $t\bullet(s'm - sm') = 0$ für ein $t \in S$ gilt

$$\begin{aligned} tss'(b'(m,s) - b'(m',s')) &= tss'(b(m,1/s) - b(m',1/s')) \\ &= b(m, ts') - b(m',ts) \\ &= b(ts'm, 1) - b(tsm', 1) \\ &= b(ts'm - tsm, 1) \\ &= b( 0, 1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

also

$$tss'b'(m,s) = tss'b(m',s') \text{ in } N.$$

Weil N ein $A_S$-Modul ist und tss' eine Einheit in $A_S$ ist, folgt $b'(m,s) = b(m',s')$. Die Abbildung b' induziert somit eine wohldefinierte Abbildung

$$\tilde{b}:M_S \longrightarrow N, \frac{m}{s} \mapsto b(m, 1/s).$$

Für diese ist das folgende Diagramm kommutativ

(iv) Für je zwei A-Moduln M und N und jede multiplikative Menge $S \subseteq A$ gilt

$$(M\otimes_A N)_S \cong M_S \otimes_{A_S} N_S\ ,$$

d.h. der Übergang zum Quotientenring kommutiert mit dem Tensorprodukt.[40]

(v) Seien M ein A-Modul und $m \in M$ ein Element mit

$$m = 0 \text{ in } M_p \text{ für jedes } p \in \Omega(A).$$

Dann gilt $m = 0$ in M.[41]

(vi) $A = \bigcap_{p\in\Omega(A)} A_p$ für jeden Integritätsbereich A.[42]

(vii) Sei M ein endlich erzeugter A-Modul mit

$$M\otimes_A \kappa(p) = 0 \text{ für jedes } p \in \Omega(A).$$

Dann gilt $M = 0$.[43]

---

$$\begin{tikzcd} M\times A_S \arrow[r] \arrow[dr, "b"'] & M_S \arrow[d, "\tilde{b}"] \\ & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (m,a/s) \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & am/s \arrow[d, mapsto] \\ & b(am;1/s) \end{tikzcd}$$

denn b ist bilinear. Weil $M_S$ von den Elementen der Gestalt m/s erzeugt wird, ist die Abbildung $\tilde{b}$ außerdem durch die Kommutativität dieses Diagramms eindeutig bestimmt. Mit anderen Worten, b faktorisiert sich auf genau eine Weise über $M_S$ Wir haben gezeigt $M_S$ besitzt die Universalitätseigenschaft von $M\otimes_A A_S$

[40]Es gilt

$$\begin{aligned} (M\otimes_A N)_S &= (M\otimes_A N)\otimes_A A_S && \text{(nach (iii))} \\ &= M\otimes_A (N\otimes_A A_S) \\ &= M\otimes_A N_S && \text{(nach (iii))} \\ &= M\otimes_A A_S \otimes_{A_S} N_S && \text{(weil } N_S \text{ ein } A_S\text{-Modul ist)} \\ &= M_S \otimes_{A_S} N_S && \text{(nach (iii))} \end{aligned}$$

[41] Es gilt

$$m = 0 \text{ in } M_p \Leftrightarrow sm = 0 \text{ für ein } s\in A-p \Leftrightarrow \mathrm{Ann}(m) \not\subseteq p.$$

Auf Grund der Voraussetzung liegt also das Ideal Ann(m) in keinem maximalen Ideal von A. Es gilt also $\mathrm{Ann}(m) = A$, d.h. $1 \in \mathrm{Ann}(m)$, d.h. $m = 1\bullet m = 0$.

[42] Weil A ein Integritäsbereich ist, lassen sich die Quotientenringe $A_p$ mit Teilringen des Quotientenkörpers K von A identifizieren. Der Durchschnitt auf der rechten Seite ist somit wohldefiniert. Wegen

$$A \subseteq A_p \text{ für jedes } p$$

gilt offensichtlich "$\subseteq$". Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Für jedes $x \in K$ betrachten wir das folgende Ideal von A.

$$I_x := \{a \in A \mid ax \in A\}$$

Für $x \in A_p$ gilt $I_x \not\subseteq p$. Liegt x im Durchschnitt auf der rechten Seite, so liegt das Ideal $I_x$ in keinem maximalen Ideal von A, d.h. es ist $I_x = A$, d.h. $1 \in I_x$ , d.h. $x = 1\bullet x \in A$.

[43] Nach Definition ist $\kappa(p) = A_p/pA_p$. Nach Voraussetzung ist also

(viii) Sei h: A $\longrightarrow$ B ein Homomorphismus von Ringen mit 1 und M ein endlich erzeugter B-Modul mit

$$M\otimes_A \kappa(p) = 0 \text{ für jedes } p \in \mathrm{Spec}(A).$$

Dann gilt M = 0.[44]

(ix) Exaktheit. Sei

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von A-Moduln und S $\subseteq$ A eine multiplikative Menge. Dann ist die zugehörige Sequenz der Quotientenmoduln

$$0 \longrightarrow M'_S \longrightarrow M_S \longrightarrow M''_S \longrightarrow 0$$

exakt.[45]

---

$$0 = M\otimes_A A_p/pA_p = M\otimes_A A_p/p\cdot M\otimes_A A_p = M_p/pM_p ,$$

d.h.

$$M_p = pM_p .$$

Nun ist $M_p$ ein endlich erzeugter Modul über dem lokalen Ring $A_p$ (mit dem Radikal $pA_p$). Nach NAK folgt

$$M_p = 0 \text{ für jedes } p \in \Omega(M).$$

Wegen (v) ist dann aber M = 0.

[44] Angenommen, M $\neq$ 0. Dann gibt es nach (v) ein maximales Ideal q $\subseteq$ B mit $M_q \neq 0$. Nach NAK ist dann

$$0 \neq M_q/qM_q$$

Wir setzen $p := q \cap A$ ($:= h^{-1}(q)$). Dann ist p ein Primideal von A,

$$p \in \mathrm{Spec}\ A,$$

mit $pM_q \subseteq qM_q$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned}
0 \neq M_q/pM_q &\cong M_q \otimes_{A_p} A_p/pA_p && (M_q \text{ ist ein } A_p\text{-Modul})\\
&= M_q \otimes_{A_p} \kappa(p) \\
&= M_q \otimes_{A_p} A_p \otimes_A \kappa(p) && (\text{Quotientenring von } \kappa(p) \text{ sind gleich } \kappa(p))\\
&= M_q \otimes_A \kappa(p) && (M_q \text{ ist ein } A_p\text{-Modul})\\
&= B_q \otimes_B M \otimes_A \kappa(p) && (\text{Definition von } M_q)
\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt ein Quotientenmodul von $M\otimes_A \kappa(p)$ ist ungleich Null. Dann muß aber auch $M\otimes_A \kappa(p)$ selbst ungleich Null sein. Dies steht im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen. Also muß M gleich Null sein.

[45] <u>Exaktheit an der Stelle</u> $M''_S$: Jedes Element von $M''_S$ hat die Gestalt $\frac{m''}{s}$ mit $m''\in M''$ und $s\in S$. Sei $m\in M$ ein Urbild von m in M. Dann ist $\frac{m}{s}$ ein Urbild von $\frac{m''}{s}$.

<u>Exaktheit an der Stelle</u> $M_S$: sei $\frac{m}{s}$ ein Element im Kern von $M_S \longrightarrow M''_S$ und bezeichne $m''\in M''$ das Bild von m bei $M \longrightarrow M''$. Dann ist $\frac{m''}{s} = 0$ in $M''_S$, d.h. es gibt ein $t\in S$ mit $tm'' = 0$. Dann

(x) Seien M ein A-Modul, $S \subseteq A$ ein multiplikative Teilmenge und

$$N', N'' \subseteq M$$

zwei Teilmoduln. Dann gilt in $M_S$:[46]

$$(N' \cap N'')_S = N'_S \cap N''_S$$

### 2.1.8 Offenheit verschiedener Mengen

Die Frage nach der Offenheit oder Abgeschlossenheit verschiedener Mengen gehört zu den zentralen Fragen der kommutativen Algebra. Die wichtigste von diesen Frage, nämlich die Frage nach der Offenenheit der Menge der nicht-singulären Punkte, können wir an dieser Stelle nocht nicht behandeln. Wir beschränken uns hier auf zwei einfache Beispiele.

Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt:

(i) Für jede nicht-negative ganze Zahl r ist die folgende Menge offen in Spec A.

$$U_r := \{p \in \text{Spec } A \mid M_p \text{ kann über } A_p \text{ von r Elementen erzeugt werden } \}$$

(ii) In M von endlicher Darstellung, so ist die folgende Menge offen in Spec A.

$$U_F := \{p \in \text{Spec } A \mid M_p \text{ ist frei als } A_p\text{-Modul}\}$$

**Beweis**. <u>Zu (i)</u>. Sei $p \in U_r$ dann gilt

$$M_p = A_p m_1/s_1 + ... + A_p m_r/s_r$$

mit $m_1, ... , m_r \in A$ und $s_1, ... , s_r \in A - p$. Weil die $s_i/1$ Einheiten in $A_p$ sind, können wir annehmen $s_1 = ... = s_r = 1$, d.h.

$$M_p = A_p m_1/1 + ... + A_p m_r/1$$

Betrachten wir die A-lineare Abbildung

$$\varphi: A^r \longrightarrow M, (a_1, ... , a_r) \mapsto \sum_{i=1}^{r} a_i m_i ,$$

und die zugehörige exakte Sequenz

$$A^r \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

---

liegt tm im Kern von $M \longrightarrow M''$, kann also als Element des Teilmoduls $M' \subseteq M$ aufgefaßt werden. Dann kommt aber $\frac{m}{s} = \frac{tm}{ts}$ von einem Element aus $M'_S$.

<u>Exaktheit an der Stelle</u> $M'_S$. Sei $m' \in M'$ und $\frac{m'}{s} \in M'_S$ sei Null in $M_S$. Dann gibt es ein $t \in S$ mit $tm' = 0$ in M. Dann ist aber $\frac{m'}{s} = \frac{tm'}{ts} = 0$ in $M'_S$.

[46] Man betrachte die injektive lineare Abbildung

$$M/N' \cap N'' \longrightarrow M/N' \oplus M/N'', m \bmod N' \cap N'' \mapsto (m \bmod N', m \bmod N'').$$

Wegen der vorangehenden Bemerkung ist dann auch die induzierte Abbildung

$$(M/N' \cap N'')_S \longrightarrow (M/N')_S \oplus (M/N'')_S,$$

injektiv, also auch

$$M_S/(N' \cap N'')_S \longrightarrow M_S/N'_S \oplus M_S/N''_S.$$

Letzteres ist gerade die Behauptung.

mit C = Koker $\varphi$ = M/ Im($\varphi$). Durch Übergang zum Quotientenring bezüglich S = A-q, q $\in$ Spec A, erhalten wir eine exakte Sequenz

$$A_q^r \longrightarrow M_q \longrightarrow C_q \longrightarrow 0$$

Weil die $m_i$ über $A_p$ ein Erzeugendensystem von $M_p$ bilden, gilt $C_q = 0$ für q = p. Nun ist der Faktormodul C des endlich erzeugten A-Moduls M ebenfalls endlich erzeugt. Nach Bemerkung (ii), Eigenschaften von Quotienten-Moduln ist Supp(C) abgeschlossen. Es gibt also eine offene Umgebung U von p,

$$p \in U$$

mit

$$C_q = 0 \text{ für jedes } q \in U.$$

Dann ist aber $A_q^r \longrightarrow M_q$ surjektiv für q $\in$ U, d.h. $M_q$ wird von r Elementen erzeugt über $A_q$ für q $\in$ U, d.h. U $\subseteq U_r$.

Zu (ii). Sei p $\in U_F$. Dann gibt es ein über $A_p$ linear unabhängiges Erzeugendensystem von $M_p$ , sagen wir

$$m_1/s_1 , \ldots , m_r/s_r \in M_p$$

Wie oben können wir annehmen,

$$s_1 = \ldots = s_r = 1$$

und wie oben betrachten wir die Abbildung $\varphi$ und die zugehörige exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A^r \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

mit C := Koker($\varphi$) und K := Ker($\varphi$). Wie wir gerade gesehen haben, gibt es eine offene Umgebung U von p mit $C_q = 0$ für q $\in$ U. Wir können annehmen, U ist ein eine offene Hauptmenge, sagen wir U = D(f). Indem wir A und alle beteiligten Moduln durch die Quotienten-Ringe bzw. Moduln bezüglich der Potenzen von f ersetzen, erreichen wir, daß o. B. d. A. gilt D(f) = 0, d.h. $C_q = 0$ für alle q $\in$ Spec A, d.h. C = 0 (nach Eigenschaft (v) von Quotientenmoduln). Wir können also annehmen, unsere exakte Sequenz hat die Gestalt

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A^r \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

Wir betrachten die zugehörigen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow K_q \longrightarrow A_q^r \longrightarrow M_q \longrightarrow 0$$

Für q = p ist $M_q$ ein freier $A_q$-Modul vom Rang r, also isomorph zu $A_q^r$. Nach A4.1.2 Freiheit und Projektivität über lokalen Ringen ist die Surjektion $A_q^r \longrightarrow M_q$ sogar ein Isomorphismus, d.h. es gilt

$$K_q = 0 \text{ für } q = p.$$

Nach Voraussetzung ist M von endlicher Darstellung. Also ist K ein endlich erzeugter A-Modul. Insbesondere ist der Träger von K abgeschlossen. Es gibt also eine offene Umgebung U von p mit

$$K_q = 0 \text{ für jedes } q \in U.$$

Dann ist aber

$$A_q^r \longrightarrow M_q$$

für jedes $q \in U$ ein Isomorphismus, d.h. $M_q$ ist frei über $A_q$, d.h. es gilt

$$U \subseteq U_F.$$

**QED**.

## *2.2 Dimensionstheorie I*

### 2.2.1 Kombinatorische Dimension und Krull-Dimension

Sei X ein topologischer Raum. Eine abgeschlossene Teilmenge

$$Z \subseteq X$$

heißt reduzibel, wenn sie Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen ist,

$$Z = Z' \bigcup Z'', Z' \neq Z, Z'' \neq Z, Z', Z'' \text{ abgeschlossen.}$$

Betrachten wir eine echt aufsteigende Kette der Länge r,

$$Z_0 \subset Z_1 \subset ... \subset Z_r,$$

von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X. Das Supremum dieser Längen über alle diese Ketten heißt kombinatorische Dimension von X und wird mit

$$\dim X := \sup \{ r \mid Z_0 \subset Z_1 \subset ... \subset Z_r, Z_i \text{ irreduzibel und abgeschlossen in X}\}$$

bezeichnet.

Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Betrachten wir eine echt aufsteigende Kette der Länge r,

$$p_0 \subset p_1 \subset ... \subset p_r,$$

von Primidealen von A. Das Supremum dieser Längen über alle diese Ketten heißt Krull-Dimension von A und wird mit

$$\dim A := \sup \{r \mid p_0 \subset p_1 \subset ... \subset p_r, p_i \text{ Primideal in A}\}$$

bezeichnet. Für jedes Primideal $p \in \operatorname{Spec} A$ heißt Supremum dieser Längen über alle Ketten, die ganz in p liegen Höhe von p und wird mit

$$\operatorname{ht} p := \sup \{r \mid p_0 \subset p_1 \subset ... \subset p_r \subseteq p, p_i \text{ Primideal in A }\}$$

bezeichnet. Das Suprmum der Längen von Ketten, die p ganz enthalten, heißt Kohöhe von p und wird mit

$$\operatorname{coht} p := \sup \{r \mid p \subseteq p_0 \subset p_1 \subset ... \subset p_r, p_i \text{ Primideal in A }\}$$

bezeichnet. Für jedes Ideal $I \subseteq A$ heißt

$$\operatorname{ht} I := \inf \{ \operatorname{ht} p \mid I \subseteq p \in \operatorname{Spec} A\}$$

Höhe des Ideals I. Für jeden A-Modul M definieren wir dessen Dimension als die Kohöhe seines Annullators,

$$\dim M := \dim A/\operatorname{Ann}(I).$$

**Bemerkungen**

(i) Die Krull-Dimension eines Rings ist gerade die kombinatorische Dimension seines Spektrums[47],

[47] Es reicht zu zeigen, die Abbildung

$$\{ \text{Primidealketten in A} \} \longrightarrow \{\text{Ketten irreduzibler Mengen in Spec A}\}$$

$$p_0 \subset p_1 \subset ... \subset p_r \mapsto V(p_r) \subset V(p_{r-1}) \subset ... \subset V(p_0)$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

1. Schritt: Beweis von (1).

Die Implikation "$\Leftarrow$" ist trivial: aus $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ folgt

$$V(I) = V(\sqrt{I}) = V(\sqrt{J}) = V(J).$$

Sei umgekehrt V(I) = V(J). Dann gilt

$$\bigcap_{I\subseteq p\in \mathrm{Spec}\ A}\ p = \bigcap_{J\subseteq p\in \mathrm{Spec}\ A}$$

also $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.

2. Schritt: V(I) ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $\sqrt{I}$ ist Primideal.

Zum Beweis können wir annehmen, $I = \sqrt{I}$. Nehmen wir an,

V(I) ist reduzibel,

sagen wir

$$V(I) = V(I') \cup V(I''). \tag{2}$$

O.B.d.A. können wir annehmen

$$I \subset I' \text{ und } I \subset I'' \tag{3}$$

(andernfalls können wir wegen $V(I)\supseteq V(I')$ die Menge V(I') durch $V(I')\cap V(I) = V(I'+I)$ ersetzen, d.h. I' durch I'+I, und analog für I''). Weiter können wir annehmen,

$$I' = \sqrt{I'} \text{ und } I'' = \sqrt{I''}.$$

Aus (2) erhalten wir dann $V(I) = V(I'\cap I'')$, also nach dem ersten Schritt

$$I = \sqrt{I} = \sqrt{I'\cap I''} = \sqrt{I'} \cap \sqrt{I''} = I'\cap I'' \supseteq I'\bullet I''.$$

Zusammen mit (3) bedeutet letzteres, $I = \sqrt{I}$ ist kein Primideal.

Nehmen wir jetzt umgekehrt an, $I = \sqrt{I}$ ist kein Primideal. Dann gibt es Elemente

$$a, b \in A - I \text{ mit } a\bullet b \in I.$$

Wegen

$$\sqrt{I+aA} \supseteq I + aA \supset I = \sqrt{I}$$

gilt dann $V(I+aA) \subset V(I)$ und analog erhalten wir $V(I+bA) \subset V(I)$. Es reicht zu zeigen,

$$V(I) = V(I+aA) \cup V(I+bA),$$

denn dann ist V(I) reduzibel. Trivialerweise gilt gilt "$\supseteq$". Sei $p \in V(I)$. Dann gilt

$a\bullet b \in I \subseteq p$,

also $a \in p$ oder $b \in p$, also $I+aA \subseteq p$ oder $I + bA \subseteq p$, also $p \in V(I+aA)$ oder $p \in V(I+bA)$, also

$$p \in V(I + aA) \cup V(I + bA).$$

3. Schritt: die obige Abbildung ist wohldefiniert.

Nach dem zweiten Schritt sind die $V(p_i)$ irreduziblen Mengen. Wir haben noch zu zeigen, sie sind paarweise verschieden. Trivialerweise gilt

$$V(p_i) \supseteq V(p_{i+1}).$$

Wären die beiden Mengen gleich, so wäre nach dem ersten Schritt

$$p_i = \sqrt{p_i} = \sqrt{p_{i+1}} = p_{i+1}$$

was nach Voraussetzung nicht der Fall ist.

4. Schritt: Die Abbildung ist bijektiv.

Es reicht zu zeigen, die Umkehrabbildung ist durch

$$Y \mapsto I(Y) := \{f \in A \mid f(p) = 0 \text{ für alle } p\in Y\}$$

gegeben, d.h. zu zeigen ist:

$$\dim A = \dim \operatorname{Spec} A.$$

Das folgt im wesentlichen aus der Äquivalenz

$$V(I) = V(J) \Leftrightarrow \sqrt{I} = \sqrt{J} \qquad (1)$$

(ii) Ist X ein noetherscher topologischer Raum, d.h. die Menge der offenen Teilmengen von X genügt der aufsteigenden (und die der abgeschlossenen der absteigenden) Kettenbedingung, so hat jede echt absteigende Kette von irreduziblen Teilmengen eine endlich Länge. Trotzdem kann die Dimension von X unendlich sein.

(iii) Zerlegung in irreduzible Komponenten. .Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Dann gilt:

1. Jede abgeschlossene Teilmenge $F \subseteq X$ ist Vereinigung von endlich vielen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen[48] $F_i$ , sagen wir

---

1. I(Y) ist ein Primideal für jede nicht-leere irreduzible Teilmenge $Y \subseteq \operatorname{Spec} A$.
2. $I(V(p)) = p$ für jedes Primideal $p \in \operatorname{Spec} A$.
3. $V(I(Y)) = Y$ für jede abgeschlossene Teilmenge Y von Spec A.

Zu 3. Sei $Y = V(I)$ abgeschlossen. Dann gilt

$$V(I(Y)) = Y \Leftrightarrow V(I(Y)) = V(I) \Leftrightarrow \sqrt{I(Y)} = \sqrt{I}$$

Nach Definition von I(Y) stimmt das Ideal I(Y) mit seinem Radikal überein (für $f \in A$ gilt $f(p) = 0$ genau dann, wenn eine Potenz von $f(p) \in \kappa(p)$ gleich Null ist). Es reicht somit zu zeigen,

$$I(V(I)) = \sqrt{I}\ .$$

Nach Definition sind alle $f \in I$ in allen Punkten von $Y = V(I)$ gleich Null, d.h. es gilt

$$I \subseteq I(Y),$$

also

$$\sqrt{I} \subseteq I(Y).$$

Sei umgekehrt $f \in I(Y)$. Dann ist f in allen Punkten von $Y = V(I)$ gleich Null, d.h.

$$f(p) = 0 \text{ für jedes } p \in \operatorname{Spec} A \text{ mit } I \subseteq p,$$

d.h.

$$f \in \bigcap_{I \subseteq p \in \operatorname{Spec} A} p = \sqrt{I}\ .$$

Zu 2. Es gilt

$$\begin{aligned} I(V(p)) &= \{f \in A \mid f(q) = 0 \text{ für jedes } q \in V(p)\} \\ &= \{f \in A \mid f \in q \text{ für jedes } q \in \operatorname{Spec} A \text{ mit } p \subseteq q\} \\ &= \{f \in A \mid f \in p\} \\ &= p. \end{aligned}$$

Zu 3. Sei $Y \subseteq \operatorname{Spec} A$ eine nicht-leere irreduzible Teilmenge, d.h.

$$Y = V(I)$$

mit einem echten Ideal $I \subseteq A$. Nach dem zweiten Schritt ist $\sqrt{I} =: p$ ein Primideal. Nach 2. ist damit

$$I(Y) = I(V(I)) = I(V(p)) = p$$

ein Primideal.

[48] Angenommen F ist nicht Vereinigung endlich vieler irreduzibler abgeschlossener Teilmengen. Dann ist $F_0$ nicht irreduzibel, d.h.

$$F = F_1 \cup ... \cup F_r \qquad (2)$$

2. Wählt man die Darstellung (2) von F derart, daß r minimal wird, so sind die irreduzublen abgeschlossenen Mengen $F_i$ durch F eindeutig bestimmt und heißen irreduzible Komponenten von F.[49]

3. Sind F,F',F" abgeschlossene Teilmengen von X mit F irreduzibel und

$$F \subseteq F' \cap F''.$$

Dann gilt $F \subseteq F'$ oder $F \subseteq F''$.[50]

(iv) Aus den Definitionen von Höhe und Kohöhe folgt unmittelbar

$$\text{ht } p = \dim A_p \text{ , coht } p = \dim A/p, \text{ ht } p + \text{coht } p \le \dim A.$$

Wir werden später sehen, die Höhe ist im Fall noetherscher Ringe stets endlich,

$$\text{ht } p < \infty \text{ für } p \in \text{Spec } A, \text{ A noethersch.}$$

(v) Aus (iii) und der Definition der Höhe eines Ideals $I \subseteq A$ folgt

---

$$F_0 = F' \cup F''$$

mit zwei echten Teilmengen F' und F" von $F_0$ , welche abgeschlossen sind. Eine von ihnen ist nicht Vereinigung von endlich vielen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen, sagen wir

$$F_1 = F',$$

denn anderenfalls hätte auch $F_0$ dieses Eigenschaft. Die Menge $F_1$ ist eine echte Teilmeng von $F_0$,

$$F_0 \supset F_1$$

Durch Wiederholen der obigen Argumentation mit $F_1$ anstelle von $F_0$ erhält man eine echte abgeschlossene Teilmenge von $F_1$, die nicht Vereinigung von endlich vielen irreiduziblen abgeschlossenen Teilmengen ist. Durch Wiederholen der Argumentation erhält man so eine unendlich absteigende nicht-stationäre Kette von abgeschlossenen Teilmengen von X, was nicht möglich ist, weil X noethersch sein soll.

[49] Das folgt im wesentlichen aus der nachfolgenden Aussage 3. Sind nämlich

$$F_1 \cup ... \cup F_r = F = F'_1 \cup ... \cup F'_r$$

zwei minimale Darstellungen von F als Vereinigung von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen, so gilt

$$F_i \subseteq F'_1 \cup ... \cup F'_r,$$

d.h. auf Grund der erwähnten Aussage 3 liegt $F_i$ gnaz in einer der Mengen $F'_j$. Nach demselben Argument liegt $F'_j$ ganz in einer der Mengen der linken Darstellung, sagen wir $F'_j \subseteq F_{i'}$ . Zusammen erhalten wir

$$F_i \subseteq F'_j \subseteq F_{i'} .$$

Wäre eine der Inklusionen echt, so könnte man $F_i$ weglassen, ohne daß sich die Vereinigung der übrigen F ändern würden, was im Widerspruch zur Minimalität von r steht. Also gilt

$$F_i = F'_j = F_{i'} .$$

Insbesondere stimmt die Menge der $F_i$ mit der Menge der $F'_j$ überein.

[50] Falls die Behauptung nicht gilt, sind $F\cap F'$ und $F\cap F''$ echte Teilmengen von F, und

$F = (F\cap F') \cup (F\cap F'')$

wäre eine Darstellung von F als Vereinigung von zwei echten Teilmengen, welche abgeschlossen sind. Eine solche Darstellung ist aber unmöglich, da F irreduzibel ist.

$$\text{ht } I + \dim A/I \le \dim A.$$

(vi) Für endlich erzeugte A-Moduln M gilt

$$\dim M = \dim A/\mathrm{Ann}(M) =^{51} \dim V(\mathrm{Ann}(M)) =^{52} \dim \mathrm{Supp}\, M.$$

(vii) Nagata nennt ht p Rang von p, coht p Dimension von p und dim A Altitude von A.

**Beispiele**

1. Jeder Körper ist 0-dimensional,

$$\dim k = 0 \text{ für } k \text{ Körper}.$$

2. Sei A ein Artinscher Ring. Dann besitzt A nur endlich viele maximale Ideale und deren Produkt ist nilpotent. Jedes Primideal enthält also eines dieser Ideale und ist damit maximal, d.h. es gilt

$$\dim A = 0 \text{ für A Artinsch.}$$

3. Jeder 0-dimensionale Integritätsbereich ist eine Körper.

$$\dim A = 0, \text{ A nullteilerfrei} \Rightarrow \text{A Körper.}$$

4. Sei A ein Hauptidealring, der kein Körper ist. Dann ist jedes von Null verschiedene Primideal maximal, d.h. es gilt

$$\dim A = 1.$$

Insbesondere ist $A = \mathbb{Z}$ und alllgemeiner jeder Dedekind-Ring 1-dimensional.

5. Sei $A = k[x_1, \dots , x_r]$ ein Polynom-Ring über einem Körper. Dann ist A ein Integritätsbereich. Wegen

$$k[x_1, \dots , x_r]/(x_1, \dots , x_i) \cong k[x_{i+1}, \dots , x_r]$$

ist $(x_1, \dots , x_i)$ für jedes i ein Primideal. Wir erhalten eine Primidealkette

$$(0) \subsetneq (x_1) \subsetneq (x_1 , x_2) \subsetneq \dots \subsetneq (x_1, \dots , x_r)$$

der Länge r, d.h. es gilt

$$\dim k[x_1, \dots , x_i] \ge r.$$

Wir werden bald sehen, es gilt sogar das Gleichheitszeichen,

$$\dim k[x_1, \dots , x_i] = r.$$

### 2.2.2 Katenäre Ringe

Ein Primideal-Kette

$$p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_r$$

heißt saturiert, wenn es kein Primideal gibt, welches echt zwischen zwei benachbarten Primidealen dieser Kette liegt.

Ein Ring A heißt katenär, wenn für je zwei Primideale $p', p \in \mathrm{Spec}\, A$ mit $p' \subsetneq p$ sind die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. Es gibt eine saturierte Primidealkette, welche mit p' beginnt und mit p endet.
2. Jede saturierte Primidealkette von p' nach p hat dieselbe Länge.

**Bemerkungen**

(i) Für jeden katenären lokalen Integritätsbereich A und jedes Primideal $p \in \mathrm{Spec}\, A$ gilt

$$\text{ht } p + \text{coht } p = \dim A.$$

(ii) Sei A ein lokaler noethersche Integritätsbereich mit

$$\text{ht } p + \text{coht } p = \dim A.$$

für jedes Primideal p von A. Dann ist A katenär. Der Beweis (vgl. Ratliff [3], 1972) ist schwierig und wird auf später verschoben.

---

51 Wir identifizieren hier V(I) mit Spec A/I.

52 weil M endlich erzeugt ist über A.

(iii) Praktisch jeder wichtige noethersche Ring, der in der Praxis auftritt, hat sich bisher als katenär erwiesen. Das erste Beispiel eines nicht-katenären noetherschen Rings geht auf Nagata zurück (Nagata [2], 1956).
(iv) Wir wenden uns jetzt der elementaren Dimensionstheorie der endlich erzeugten Algebren über einem Körper zu.

### 2.2.3 Proposition: endlich erzeugte Teilalgebren eines Erweiterungskörpers

Seien k ein Körper, L/k eine algebraische Körpererweiterung und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$. Dann gilt
(i) $k[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
(ii) Sei $\varphi: k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ der k-Algebra-Homomorphismus mit

$$\varphi(X_i) = \alpha_i$$

für jedes i. Dann ist der Kern von f ein maximales Ideal

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = (f_1(X_1), f_2(X_1, X_2), \dots, f_i(X_1, \dots, X_i), \dots, f_n(X_1, \dots, X_n)),$$

welches von n Polynomen der angegebenen Gestalt erzeugt wird. Außerdem kann man $f_i$ für jedes i <u>normiert</u> bezüglich $X_i$ wählen, d.h. der höchste Koeffizient als Polynom in $X_i$ ist gleich 1.

**Beweis**. Bezeichne

$$f_1(X_1)$$

das Mininmalpolynom von $\alpha_1$ über k. ´Dann ist $(f_1)$ ein maximales Ideal von $k[X_1]$, d.h.

$$k[\alpha_1] = k[X_1]/(f_1)$$

ist ein Körper. Insbesondere gilt

$$k[\alpha_1] = k(\alpha_1). \tag{1}$$

Weiter bezeichne

$$\varphi_2(X_2)$$

das Minimalpolynom von $\alpha_2$ über dem Teilkörper (1). Die Koeffizienten von $\varphi_2$ können als Polynome in $\alpha_1$ mit Koeffizienten aus k geschrieben werden (wegen (1)), und es gibt ein Polynom

$$f_2 \in k[X_1, X_2],$$

welches normiert in $X_2$ ist mit $f_2(\alpha_1, X_2) = \varphi_2(X_2)$. Insbesondere gilt

$$k[\alpha_1, \alpha_2] = k(\alpha_1)[\alpha_2] = k(\alpha_1, \alpha_2) = k(\alpha_1)[X_2]/(f_2(\alpha_1, X_2)).$$

Indem wir so fortfahren, erhalten wir für i = 1, ... , n ein Polynom

$$f_i(X_1, \dots, X_i) \in k[X_1, \dots, X_i],$$

welches normiert ist bezüglich $X_i$ mit

$$k[\alpha_1, \dots, \alpha_i] = k(\alpha_1, \dots, \alpha_i) = k(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})[X_i]/(f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, X_i)).$$

Nach Konstruktion gilt

$$f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_i) = 0,$$

d.h. jedes $f_i$ liegt im Kern von $\varphi$, d.h.

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \supseteq (f_1, \dots, f_n).$$

Es zu zeigen, es gilt sogar das Gleichheitszeichen. Sei P ein Polynom aus dem Kern,

$$P \in \mathrm{Ker}(\varphi).$$

Dann gilt

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0. \tag{2}$$

Wir dividieren P durch das normierte Polynom $f_n$,

$$P = Q_n \cdot f_n + R_{n-1}$$

Wegen (2) ist $P(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, X_n)$ ein Vielfaches von $f_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, X_n)$. Deshalb ist das Polynom in $X_n$

$$R_{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, X_n) = 0 \tag{3}$$

identisch Null, d.h. die Koeffizienten des Polynoms $R_{n-1}$ als Polynom in $X_n$ liegen im Kern von $\varphi$. Wir dividiren $R_{n-1}$[53] durch das in $X_{n-1}$ normierte Polynom $f_{n-1}$,

$$R_{n-1} = Q_{n-1} \cdot f_{n-1} + R_{n-2}$$

Weil die Koeffizienten von $R_{n-1}$ im Kern von $\varphi$ liegen, erhält man Vielfache von $f_{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, X_{n-1})$, wenn man für die ersten n-2 Unbestimmten die entsprechenden $\alpha$ einsetzt. Für das Restepolynom erhält man durch Einsetzen das Nullpolynom,

$$R_{n-2}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, X_{n-1}, X_n) = 0 \tag{4}$$

Indem wir so fortfahren, erhalten wir

$$P = \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot f_i + R_0(X_1, \dots, X_n),$$

wobei das Restpolynom $R_0(X_1, \dots, X_n)$ identisch Null ist. Also gilt

$$P = \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot f_i \in (f_1, \dots, f_n).$$

**QED**.

**2.2.4 Proposition: Teilalgebren mit positiven Transzendenzgrad**

Seien k ein Körper und

$$A := k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$$

eine endlich erzeugte nullteilerfreie k-Algebra mit dem Transzendenzgrad

$$r := \mathrm{tr.\,deg}_k\, A$$

(d.h. der Quotientenkörper von A habe den Transzendenzgrad r über k). Dann ist im Fall r > 0 die Algebra A kein Körper.

**Beweis**. O.B.d.A. sei

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r$$

eine Transzendenzbasis von A über k, d.h. die Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ seien algebraisch unabhängig und für jedes i sei $\alpha_i$ algebraisch über

$$K := k(\alpha_1, \dots, \alpha_r).$$

Weil $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ algebraisch sind über über K sind,gibt es nach 2.2.3 Polynome

[53] oder, was dasselbe ist, das Tupel der Koeffizienten von $R_{n-1}$.

$$f_i(X_{r+1}, \dots, X_i) \in K[X_{r+1}, \dots, X_i]$$

mit

$$K[\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n] \cong K[X_{r+1}, \dots, X_n]/(f_{r+1}, \dots, f_n), \tag{1}$$

wobei $f_i$ normiert ist bezüglich $X_i$. Bezeichnen wir den Grad von $f_i$ bezüglich $X_i$ mit $d_i$. Auf Grund der Konstruktion der $f_i$ im Beweis von 2.2.3 können wir annehmen, es gilt

$$d_i := \deg_{X_i} f_i = [K(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_i):K(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{i-1})]. \tag{2}$$

Die Koeffizienten der $f_i$ liegen in K. Wir können deshalb ein

$$g \in k[\alpha_1, \dots, \alpha_r] - \{0\}$$

finden mit

$$g \cdot f_i \in k[\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_{r+1}, \dots, X_n],$$

d.h. die Polynome $f_i$ lassen sich als Polynome mit Koeffizienten aus

$$B := k[\alpha_1, \dots, \alpha_r, g^{-1}] \ (\subseteq K)$$

schreiben,

$$f_{r+1}, \dots, f_n \in B[X_{r+1}, \dots, X_n].$$

Der weitere Beweis erfolgt in drei Schritten.

<u>1. Schritt</u>: $A[g^{-1}]$ besitzt als B-Modul das B-linear unabhängige Erzeugendensystem

$$\alpha_{r+1}^{e_{r+1}} \cdot \ldots \cdot \alpha_n^{e_n} \text{ mit } 0 \le e_i \le d_i \text{ für } i = r+1, \dots, n. \tag{3}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} A[g^{-1}] &= k[\alpha_1, \dots, \alpha_n, g^{-1}] = k[\alpha_1, \dots, \alpha_r, g^{-1}]\,[\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n] \\ &= B[\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n]. \end{aligned}$$

Jedes Element dieses Rings hat die Gestalt

$$P(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$$

mit einem Polynom $P \in B[X_{r+1}, \dots, X_n]$. Wegen (1) können wir P modulo der $f_i$ abändern, ohne daß sich das durch P repräsentierte Element ändert. Insbesondere können wir P durch das bezüglich $X_n$ normierte Polynom $f_n$ teilen und P durch den zugehörigen Rest ersetzen. Wir können also annehmen,

$$\deg_{X_n} P < \deg_{X_n} f_n = d_n$$

Anschließend können wir P durch das bezüglich $X_{n-1}$ normierte Polynom $f_{n-1}$ teilen und P durch den zugehörigen Rest ersetzen. Indem wir so fortfahren, sehen wir, daß wir für P ein Polynom wählen können mit

$$\deg_{X_i} P < d_i \text{ für } i = r+1, \dots, n.$$

Mit anderen Worten, P ist eine B-Linearkombination der Elemente (3), d.h. diese Elemente erzeugen $A[g^{-1}]$ über B.

Wir haben noch zu zeigen, die Elemente (3) sind B-linear unabhängig über B. Dazu reicht es zu zeigen, daß sie K-linear unabhängig sind.

Zumindest erzeugen sie eine nullteilerfreie Teilalgebra des Körpers (1), welche als K-Vektorraum endlich erzeugt ist. Diese Teilalgebra ist somit ein Körper, also gleich ihren

Quotientenkörper,also gleich (1). Es reicht also zu zeigen, die Anzahl der Erzeuger (3) ist gleich dem Körpergrad von (1) ist über K. Das ist aber gerade die Aussage von (2).
2. Schritt. B ist kein Körper.
Nach Wahl sind die $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ algebraisch unabhängig über k, d.h.wir können

$$k[\alpha_1, \dots, \alpha_r]$$

als Polynomring über k in r Unbestimmten ansehen. Wegen $r > 0$ (nach Voraussetzung) besitzt dieser Polynomring unendlich viele irreduzible Polynome.[54] Insbesondere gibt es ein irreduzibles Polynom

$$h \in k[\alpha_1, \dots, \alpha_r]$$

welches von allen Primteilern von g verschieden ist. Dann gilt[55]

$$h^{-1} \notin k[\alpha_1, \dots, \alpha_r, g^{-1}] \ (= B),$$

d.h. h ist keine Einheit von B. Insbesondere ist B kein Körper.
3. Schritt. A ist kein Körper.
Nach dem zweiten Schritt gibt es in B ein von Null verschiedenes echtes Ideal I,

$$0 \neq I \neq B.$$

Weil $A[g^{-1}]$ nach dem ersten Schritt ein freier B-Modul ist, dann

$$I\, A[g^{-1}]$$

ein von Null verschiedener echter Teilmodul von $A[g^{-1}]$. Dieser Teilmodul ist aber sogar ein Ideal von $A[g^{-1}]$. Es gibt also in $A[g^{-1}]$ ein von Null verschiedenes echtes Ideal. Insbesondere ist

$$A[g^{-1}] \text{ kein Körper.}$$

Wäre nun A ein Körper, so wäre $A[g^{-1}] = A$ und insbesondere wäre $A[g^{-1}]$ ein Körper, was, wie wir gerade gesehen haben, nicht der Fall ist.
**QED**.

### 2.2.5 Die maximalen Ideale eines Polynomrings über einem Körper

Seien k ein Körper und

$$m \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$$

ein maximales Ideal. Dann ist der Restklassenkörper

$$k[X_1, \dots, X_n]/m$$

ein algebraische Erweiterung von k.

Insbesondere besitzt dann das Ideal ein Erzeugendensystem aus n Elementen.

Ist k algbraisch abgeschlossen, so hat m die Gestalt

$$m = (X_1 - c_1, \dots, X_n - c_n) \text{ mit } c_1, \dots, c_n \in k.$$

**Beweis**. Betrachten wir den Körper

$$K := k[X_1, \dots, X_n]/m.$$

Bezeichne $\alpha_i$ die Restklasse von $X_i$ modulo m. Dann gilt

---

[54] Der Beweis ist derselbe wie Euklids Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen.

[55] Ließe sich $h^{-1}$ als Polynom in $\alpha_1, \dots, \alpha_r, g^{-1}$ schreiben, so gäbe es eine Potenz $g^m$ von g derart, daß sich $g^m/h$ als Polynom in $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ läßt. Dann wäre aber h einer der Primteiler von g.

$$K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n].$$

Weil K ein Körper ist, hat K nach 2.2.4 den Transzendenzgrad 0 über k, d.h. K ist algebraisch über k. Ebenfalls nach 2.2.4 besitzt m ein Erzeugendensystem aus n Elementen.
Nehmen wir jetzt an, k ist algebraisch abgeschlossen. Dann gilt K = k. Insbesondere ist jede der Unbestimmten $X_i$ kongruent modulo m zu einem Element von k, sagen wir zu $c_i \in k$. Dann gilt

$$(X_1 - c_1, \dots, X_n - c_n) \subseteq m.$$

Weil das Ideal links bereits ein maximales Ideal von $k[X_1, \dots, X_n]$ ist, muß sogar das Gleichheitszeichen gelten.
**QED**.

### 2.2.6 Algebraische Nullstellen

Seien k ein Körper mit der algebraischen Abschließung $\bar{k}$ und

$$\Phi \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$$

eine Menge von Polynomen mit Koeffizienten aus k. Eine algebraische Nullstelle von $\Phi$ ist ein n-Tupel

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \bar{k}^n$$

mit Koordinaten aus der algebraischen Abschließung $\bar{k}$ mit

$$f(\alpha) = 0 \text{ für jedes } f \in \Phi.$$

Mit anderen Worten eine algebraische Nullstelle von $\Phi$ ist eine gemeinsame Nullstelle der Elemente von $\Phi$, deren Koordinaten in der algebraischen Abschließung von k liegen.

### 2.2.7 Hilbertscher Nullstellensatz

Seien k ein Körper und $\Phi \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ eine Menge von Polynomen. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.

(i) Das von $\Phi$ erzeugte Ideal ist gleich $(1) = k[X_1, \dots, X_n]$ falls $\Phi$ keine algebraische Nullstelle besitzt.

(ii) Ist jede allgebraische Nullstelle von $\Phi$ eine Nullstelle des Polynoms

$$f \in k[X_1, \dots, X_n],$$

so liegt eine Potenz von f im von $\Phi$ erzeugten Ideal.

**Beweis**. Zu (i). Sei I das von $\Phi$ erzeugte Ideal. Angenommen, I ist von (1) verschieden, d.h. ein echtes Ideal. Dann gibt es ein maximales Ideal m des Polynomrings mit

$$I \subseteq m.$$

Nach 2.2.5 ist dann

$$K := k[X_1, \dots, X_n]/m$$

eine algebraische Körpererweiterung von k, kann also als Teilkörper der algebraischen Abschließung $\bar{k}$ von k aufgefaßt werden. Sei

$$\theta: k[X_1, \dots, X_n]/m = K \longrightarrow \bar{k}$$

ein k-Einbettung und bezeichne

$$\alpha_i := \theta(X_i \bmod m) \in$$

das Bild der Restklasse der i-ten Unbestimment. Für jedes

$$g \in m$$

gilt dann

$$\begin{aligned} 0 = \theta(0) &= \theta(g(X) \bmod m) && \text{(wegen } g \in m) \\ &= \theta(g(X_1+m,\dots,X_n+m)) && \text{(Definition der Operationen im Faktorring)} \\ &= g(\theta(X_1+m),\dots, \theta(X_n+m)) && (\theta \text{ ist ein Homomorphismus)} \\ &= g(\alpha_1, \dots , \alpha_n). \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, $\alpha := (\alpha_1, \dots , \alpha_n) \in \overline{k}^n$ ist algebraische Nullstelle von m, also erst recht von I, also auch von $\Theta$. Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $\Phi$ keine solche Nullstelle besitzt. Die Annahme, daß I ein echtes Ideal ist, ist also falsch, d.h. es gilt wie behauptet

$$I = (1).$$

Zu (ii). O.B.d.A. sei

$$f \neq 0.$$

Jede algebraische Nullstelle ist nach Voraussetzung eine Nullstelle von f, also keine Nullstelle von $1 - X_{n+1}\bullet f$, wobei $X_{n+1}$ eine weitere Unbestimmte bezeichne. Die Teilmenge

$$\Phi \bigcup \{1-X_{n+1}\bullet f\} \subseteq k[X_1, \dots , X_{n+1}]$$

besitzt somit keine algebraische Nullstelle, erzeugt also nach (i) das Ideal (1). Es gibt Polynome

$$f_i( X_1, \dots , X_n) \in \Phi$$

$$P_i(X_1, \dots , X_{n+1}), Q(X_1, \dots , X_{n+1}) \in k[X_1, \dots , X_{n+1}]$$

$(i = 1, \dots , s)$ mit

$$\begin{aligned} 1 = &\sum_{i=1}^{s} f_i( X_1, \dots , X_n)\bullet P_i(X_1, \dots , X_{n+1}) \\ &\qquad + (1-X_{n+1}\bullet f(X_1, \dots , X_n))Q(X_1, \dots , X_{n+1}). \end{aligned}$$

Dies ist eine Identität von Polynomen in $k[X_1, \dots , X_{n+1}]$. Die Identität bleibt somit erhalten, wenn man für $X_{n+1}$ den Werte $1/f$ einsetzt. Also gilt

$$1 = \sum_{i=1}^{s} f_i( X_1, \dots , X_n)\bullet P_i(X_1, \dots , X_n, 1/f(X_1, \dots , X_n)).$$

in $k(X_1, \dots , X_n)$. Durch Multiplikation mit einer hinreichend hohen Potenz von f , sagen wir $f^t$, erhalten wir eine Identität im Polynomring $k[X_1, \dots , X_n]$, durch welche $f^t$ ein Linearkombination der $f_i \in \Phi$ mit Koeffizienten aus $k[X_1, \dots , X_n]$ wird. Mit anderen Worten, $f^t$ liegt im von $\Phi$ erzeugten Ideal.

**QED**.

**Bemerkung**

Die Argumentation des zweiten Teils des obigen Beweises kann wie folgt formuliert werden: das von $\Phi$ erzeugte Ideal I erzeugt in der Lokalisierung $A_f$ das Einheitsideal (1), d.h.

$$1 \in A_f = . IA_f = \{\frac{a}{f^u} \mid a \in I, u \in \mathbb{N}\}$$

Also liegt eine Potenz von f in I.

**2.2.8 Das Radikal als Durchschnitt von maximalen Idealen**

Seien k ein Körper, A eine endlich erzeugte k-Algebra und I ein echtes Ideal von A. Dann ist das Radikal von I gerade der Durchschnitt aller maximalen Ideale, welche I enthalten:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq m \in \Omega(A)} m . \tag{1}$$

**Beweis**. Seien

$$A = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$$

und φ der k-Algebra-Homomorphismus

$$\varphi: k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], X_i \mapsto \alpha_i .$$

Weil φ surjektiv ist, reicht es die Behauptung für das vollständige Urbild von I bei φ zu beweisen, d.h. wir können annehmen,

$$A = k[X_1, \dots, X_n].$$

Die linke Seite von (1) ist offensichtlich in der rechten enthalten. Es reicht also, die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei also

$$f \in k[X_1, \dots, X_n]$$

ein Polynom, welches in jedem maximalen Ideal m liegt mit $I \subseteq m$. Wir haben zu zeigen, eine Potenz von f liegt in I. Nach dem zweiten Teil des Hilbertschen Nullstellensatzes reicht es zu zeigen, jede algebraische Nullstelle von I ist eine Nullstelle von f.

Sei

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \bar{k}$$

eine algebraische Nullstelle von I. Dann liegt I im Kern des k-Algebra-Homomorphismus

$$\varphi_\alpha: k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \bar{k}, P(X) \mapsto P(\alpha),$$

d.h.

$$I \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_\alpha) =: m_\alpha$$

Aus den Inklusionen

$$k \subseteq k[X_1, \dots, X_n]/ m_\alpha \subseteq \bar{k}$$

lesen wir ab, daß $k[X_1, \dots, X_n]/ m_\alpha$ eine algebraische Körpererweiterung von k ist.[56]

Insbesondere ist $m_\alpha$ ein maximales Ideal (welches I enthält), d.h. es gilt

$$f \in m_\alpha = \mathrm{Ker}(\varphi_\alpha),$$

also

$$0 = \varphi_\alpha(f) = f(\alpha).$$

Wir haben gezeigt, jede algebraische Nullstelle von I ist ein Nullstelle von f.

**QED**.

**Bemerkung**

Die obige Aussage ist sehr viel tiefliegender als die Aussage von 2.1, daß $\sqrt{I}$ gleich dem Durchschnitt aller Primoberideale von I ist. Die Bedingung, daß jedes Radikal gleich dem Durchschnitt der maximalen Oberideale ist, ist äquivalent zu der Aussage, daß sich jedes Primideal als Durchschnitt von maximalen schreiben läßt. Solche Ringe heißen Hilbert-Ringe oder auch Jacobson-Ringe. Sie wurden unabhängig voneinander durch O. Goldman [1] und W. Krull [7] untersucht. Siehe auch Kaplansky [1] und Bourbaki [1].

---

[56] Der Faktorring ist eine nullteilerfreie k-Algebra, die von endlich vielen algebraischen Elementen erzeugt wird, also ein endlich-dimensionaler Vektorraum, also ein Körper.

### 2.2.9 Dimension und Transzendenzgrad

Seien k ein Körper und A eine nullteilerfreie endlich erzeugte k-Algebra. Dann gilt

$$\dim A = \mathrm{tr.\,deg}_k\, A.$$

**Beweis**. Wir schreiben

$$A = k[X_1, \dots , X_n]/P$$

und setzen

$$r := \mathrm{tr.\,deg}_k\, A.$$

<u>1. Schritt</u>. $\mathrm{tr.\,deg}_k\, A \ge \dim A$.

Es reicht zu zeigen, für je zwei Primideale $P, Q \in \mathrm{Spec}\, k[X]$ des Polynomrings

$$k[X] := k[X_1, \dots , X_n],$$

welche echt ineinander liegen,

$$P \subsetneq Q$$

gilt

$$\mathrm{tr.\,deg}_k\, k[X]/Q < \mathrm{tr.deg}_k\, k[X]/P,$$

d.h. jede Vergrößerung des Primideals P führt zu einer Verkleinerung des Transzendenzgrades[57]. Die identische Abbildung des Polynomrings induziert wegen $P \subseteq Q$ eine Surjektion

$$k[X]/P \twoheadrightarrow k[X]/Q.$$

Die Urbilder eines Systems von algebraisch unabhängigen Elementen in k[X]/Q bilden somit ein algebraisch unabhängiges System von Elementen aus k[X]/P. Es gilt also

$$\mathrm{tr.\,deg}_k\, k[X]/Q \le \mathrm{tr.deg}_k\, k[X]/P.$$

Wir haben noch zu zeigen, daß die Ungleichung sogar echt ist. Angenommen, sie wäre nicht echt. Wir schreiben $\alpha_i$ für die Restklasse von $X_i$ modulo P und $\beta_i$ für die modulo Q, d.h.

$$k[X]/P = k[\alpha_1, \dots , \alpha_n]$$
$$k[X]/Q = k[\beta_1, \dots , \beta_n]$$

Wir können dabei annehmen, $\beta_1, \dots , \beta_r$ bilden eine Transzendenzbasis von k[X]/Q über k. Dann sind auch $\alpha_1, \dots , \alpha_r$ algebraisch unabhängig über k und wegen der Gleichheit der Transzendenzgrade bilden letztere Elemente eine Transzendenzbasis von k[X]/P über k. Wir setzen

$$S := k[X_1, \dots , X_r] - \{0\}.$$

Dies ist eine multiplikative Menge im Polynomring k[X], und wegen des algebraischen Unabhängigkeit der $\alpha_1, \dots , \alpha_r$ bzw. $\beta_1, \dots , \beta_r$ gilt

$$S \cap P = \emptyset \text{ und } S \cap Q = \emptyset.$$

Deshalb erzeugen P und Q im Quotientenring $k[X]_S$ echt ineinander liegende Primideale,

$$Pk[X]_S \subsetneq Qk[X]_S \qquad (1).$$

Mit

$$R := k[X_1, \dots , X_n]$$
$$K := k(X_1, \dots , X_r)$$

[57] Bei Vorliegen einer Primidealkette der Länge $\ell$, die mit P beginnt, kann man also den Transzendenzgrad $\ell$ mal verkleinern. Er muß also vorher mindestens $\ell$ gewesen sein.

gilt

$$R_S = K[X_{r+1}, \ldots , X_n]$$
$$R_S/PR_S \cong k(\alpha_1, \ldots , \alpha_r)[\alpha_{r+1}, \ldots , \alpha_n]$$

Insbesondere sind die Elemente von $R_S/PR_S$ algebraisch über

$$K = k(X_1, \ldots , X_r) = k(\alpha_1, \ldots , \alpha_r).$$

Nach 2.2.3 ist der Kern der natürlichen Abbildung

$$R_S = K[X_{r+1}, \ldots , X_n] \longrightarrow K[\alpha_{r+1}, \ldots , \alpha_n] = R_S/PR_S$$

ein maximales Ideal, d.h. $PR_S$ ist maximal in $R_S$. Das steht aber im Widerspruch zu (1), nämlich daß P und Q in $R_S$ echt ineinander liegende Primideale erzeugen.

2. Schritt. tr. $\deg_k A \le \dim A$.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach

$$r := \text{tr. } \deg_k A.$$

Im Fall r = 0 ist A endlich erzeugt und algebraisch über k, also ein Körper (z.B. nach 2.2.3). Betrachten wir den Fall r > 0.

Sei

$$A = k[\alpha_1,\ldots, \alpha_n] = A[X_1,\ldots, X_n]/P,$$

und sei $\alpha_1$ transzendent über k. Mit

$$S := k[X_1] - \{0\}, R := k[X_1,\ldots, X_n]$$

erhalten wir

$$R_S = k(X_1)[X_2,\ldots,X_n]$$
$$R_S/PR_S = k(\alpha_1)[\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$$

Nach Definition von r, Wahl von $\alpha_1$ und der letzten Identität hat $R_S/PR_S$ den Transzendenzgrad r - 1 über $k(\alpha_1)$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine echt aufsteigende Kette von Primidealen der Länge r-1 in $R_S$, sagen wir

$$PR_S = Q_0 \subset \ldots \subset Q_{r-1}. \qquad (2)$$

Wir setzen

$$P_i := Q_i \cap R.$$

Dann bilden die $P_i$ eine echt aufsteigende Kette von Primidealen von R,

$$P_0 \subset \ldots \subset P_{r-1},$$

welche disjunkt sind zu $S = k[X_1] - \{0\}$. Insbesondere ist $R/P_{r-1}$ nicht algebraisch über k (weil die Restklasse von $X_1$ es nicht ist), d.h. es gilt

$$\text{tr. } \deg_k R/P_{r-1} > 0.$$

Nach 2.2.5 ist $P_{r-1}$ nicht maximal in R, d.h. die Kette (2) läßt sich rechts um ein Primideal verlängern. Es gilt also

$$\dim A = \dim k[X]/P = \text{coht } P \ge r = \text{tr. } \deg_k A.$$

**QED**.

**2.2.10 Folgerung: die Dimension von Polynomringen über einem Körper**

Seien k ein Körper und $X_1, \ldots , X_n$ paarweise verschiedene Unbestimmte. Dann gilt

$$\dim k[X_1, \dots , X_n] = n.$$

**Beweis**. Folgt aus 2.2.9 und der Tatsache, daß

$$\mathrm{tr.deg}_k\, k[X_1, \dots , X_n] = \mathrm{tr.deg}_k\, k(X_1, \dots , X_n) = n$$

ist.

**QED**.

**2.2.11 Folgerung: Höhe und Kohöhe in Polynomringen**

Seien k ein Körper und $X_1, \dots , X_n$ paarweise verschiedene Unbestimmte. Dann gilt

$$\mathrm{ht}\, p + \mathrm{coht}\, p = n$$

für jedes Primideal p von $k[X_1, \dots , X_n]$.

**Beweis**.Sei

$$r := \mathrm{coht}\, p = \dim k[X]/p.$$

Weil k[X]/p eine nullteilerfrei endlich erzeugte k-Algebra ist, gilt dann auch

$$r = \mathrm{tr.\,deg.}_k\, k[X]/p \tag{1}$$

(nach 2.2.9). Wir können annehmen, die Unbestimmten

$$X_1, \dots , X_r$$

repräsentieren eine Transzendenzbasis von k[X]/p über k. Sei K der Körper

$$K := k(X_1, \dots , X_r) = k[X_1, \dots , X_r]_S$$

mit

$$S := k[X_1, \dots , X_r] - \{0\}$$

Nach Konstruktion liegt keines der Polynome von S in p,

$$S \subseteq k[X] - p,$$

d.h. $k[X]_p$ ist ein Quotientenring von $k[X]_S$. Insbesondere gilt

$$K[X_{r+1}, \dots , X_n] \subseteq k[X]_p,$$

und der Ring rechts ist die Lokalisierung des Rings links nach dem Primideal

$$pk[X]_p \cap K[X_{r+1}, \dots , X_n].$$

Die Abbildungen

$$q \mapsto q \cap K[X_{r+1}, \dots , X_n]$$

$$q \mapsto qk[X]_p$$

sind zueinander inverse Bijektionen, welche Spec $k[X]_p$ mit

$$\{q \in \mathrm{Spec}\, K[X_{r+1}, \dots , X_n] \mid q \subseteq pk[X]_p\}$$

identifizieren, d.h. es gilt

$$\mathrm{ht}\, p = \dim \mathrm{Spec}\, k[X]_p = \dim \{q \in \mathrm{Spec}\, K[X_{r+1}, \dots , X_n] \mid q \subseteq pk[X]_p\} \tag{2}$$

Nach Wahl der Unbestimmten $X_1,\dots,X_r$ sind modulo p alle $X_i$ algebraisch über K, d.h. die Elemente von

$$K[X_{r+1}, \dots , X_n]/pK[X_{r+1}, \dots , X_n]$$

sind algebraisch über K. Nach 2.2.3 ist $pK[X_{r+1}, \dots , X_n]$ ein maximales Ideal mit einem Erzeugendensystem Gestalt

$$f_{r+1}(X_{r+1}),\dots, f_i( X_{r+1}, \dots , X_i),\dots , f_n(X_{r+1}, \dots, X_n),$$

mit Polynomen $f_i$ wie in 2.2.3 beschrieben. Auf Grund der induktiven Konstruktion der $f_i$ erzeugen die Polynome

$$f_{r+1}(X_{r+1}),\ldots, f_i( X_{r+1}, \ldots , X_i)$$

für jedes i ein maximales Ideal von $K[X_{r+1}, \ldots , X_i]$ und damit ein Primideal von

$$K[X_{r+1}, \ldots , X_n].$$

Wir erhalten auf diese Weise eine echt aufsteigende Kette von Primidealen in diesem Ring, welche mit dem von p erzeugten maximalen Ideal endet. Aus (2) erhalten wir damit

$$\mathrm{ht}\, p \geq n - r,$$

Also

$$\mathrm{ht}\, p + \mathrm{coht}\, p \geq n.$$

Die umgekehrte Ungleichung ist trivial, weil der Polynomring $k[X_1, \ldots , X_n]$ die Dimension n hat.

**QED**.

## *2.3 Erzeugendenzahlen*

### 2.3.1 Bezeichnungen

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein endlich erzeugter A-Modul und

$$p \in \mathrm{Spec}\, A$$

ein Primideal. Dann heißt

$$\kappa(p) := A_p/pA_p = Q(A/p)$$

Restekörper von p in A. Dann ist

$$M\otimes_A\kappa(p) = M_p/pM_p$$

ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\kappa(p)$. Seine Dimension bezeichenen wir mit

$$\mu(p, M) := \dim_k M\otimes_A\kappa(p).$$

Es ist gerade die minimale Anzahl der Elemente eines Erzeugendensystems des $A_p$-Moduls $M_p$ (nach dem Lemma von Nakayama).

**Bemerkung**

Für zwei Primideale p, p' mit $p \subseteq p'$ gilt

$$\mu(p, M) \leq \mu(p', M)$$

(wegen $M_p = (M_{p'})_p$).

### 2.3.2 Satz von Forster (1964)

Seien A ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und

$$b(M) := \sup \{\mu(p, M) + \dim A/p \mid p \in \mathrm{Supp}\, M \}.$$

Dann besitzt M ein Erzeugendensystem aus b(M) Elementen.

**Bemerkung**

Es gibt eine bessere Abschätzung für die Erzeugendenzahl als die von Forster, nämlich die von Swan. Unsere Ziel ist es hier, den Satz von Swan zu beweisen. Zu diesem Zweck benötigen wir den von Swan eingeführten Begriff des j-Spektrums.

### 2.3.3 Begriff des j-Spektrums

Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Ein Primideal von A heißt j-Primideal, wenn es Durchschnitt maximaler Ideale ist. Die Menge aller j-Primideale von A wird mit

j-Spec A

bezeichnet und heißt j-Spektrum von A.

**Bemerkungen**

(i) Offensichtlich gilt

$$\text{j-Spec } A \subseteq \text{Spec } A.$$

Wir denken uns j-Spec A mit der Unterraum-Topologie der Zariski-Topologie von Spec(A) versehen.

(ii) Seien

$\mathbf{M} := \text{m-Spec } A$
$\mathbf{J} := \text{j-Spec } A$

Für jede abgeschlossene Teilmenge $F \subseteq \mathbf{J}$ gibt es dann ein Ideal $I \subseteq A$ mit

$$F = V(I) \cap \mathbf{J}.$$

Ein Primideal $p \in \text{Spec } A$ gehört genau dann zu F, wenn es Durchschnitt von Elementen aus $V(I) \cap \mathbf{M} = F \cap \mathbf{M}$ ist. Insbesondere ist F durch $F \cap \mathbf{M}$ bereits eindeutig festgelegt. Genauer: F ist die Abschließung von $F \cap \mathbf{M}$ in $\mathbf{J}$.[58]

(iii) Die Abbildung

$$\{\text{abgeschlossene Teilmengen } \mathbf{J}\} \longrightarrow \{\text{abgesclossene Teilmengen von } \mathbf{M}\},\ F \mapsto F \cap \mathbf{J},$$

ist bijektiv.[59] Insbesondere gilt:

(iv) Eine abgeschlossene Menge in **J** ist genau dann irreduzibel, wenn ihr Bild in **M** es ist.

(v) Der Raum **J** ist genau dann Noethersch, wenn **M** es ist.

(vi) Für die kombinatorischen Dimensionen von **J** und **M** gilt

$$\dim \mathbf{J} = \dim \mathbf{M}.$$

---

[58] Wegen $F \cap \mathbf{M} \subseteq F$ und F abgeschlossen gilt trivialerweise $\overline{F \cap \mathbf{M}} \subseteq F$. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion reicht es zu zeigen, für jede in **J** abgeschlossene Mengen F' mit $F \cap \mathbf{M} \subseteq F'$ gilt

$$F \subseteq F'.$$

Sei also F' eine in **J** abgeschlossene Menge mit $F \cap \mathbf{M} \subseteq F'$. Dann gilt

$$F' = V(I') \cap \mathbf{J}$$

mit einem Ideal $I' \subseteq A$.

Jedes Primideal $p \in F$ ist Durchschnitt von maximalen Idealen aus $F = V(I) \cap \mathbf{J}$. Diese maximalen Ideale liegen in $F \cap \mathbf{M} \subseteq F' = V(I') \cap \mathbf{J}$, enthalten also das Ideal I'. Also ist p ein Durchschnitt von maximalen Idealen mit $I' \subseteq p$. Es gilt also $p \in V(I') \cap \mathbf{J} = F'$.

Nach Voraussetzung gilt

$$V(I) \cap \mathbf{M} = F \cap \mathbf{M} \subseteq F' = V(I') \cap \mathbf{J}.$$

Jedes $p \in F$ ist Durchschnitt von maximalen Idealen von

[59] Die Abbildung ist wohldefiniert, weil jede abgeschlossene Menge von **J** die Gestalt $F = V(I) \cap \mathbf{J}$ hat, d.h. $F \cap M = V(I) \cap \mathbf{M}$ ist abgeschlossen in **M**. Die Abbildung ist injektiv auf Grund der letzten Bemerkung von (ii). Sie ist surjektiv, weil die abgeschlossene Menge $V(I) \cap \mathbf{M}$ von **M** das Bild der abgeschlossenen Menge $V(I) \cap \mathbf{J}$ von **J** ist.

(vii) Eine abgeschlossene Menge F von **J** ist genau dann irreduzibel, wenn es ein P∈F gibt mit[60]

$$F := V(P)\bigcap \mathbf{J}.$$

Das Primideal P ist durch F eindeutig bestimmt und heißt generischer Punkt von F.

(viii) Sei F = V(P) ⋂ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von J mit dem generischen Punkt P. Dann heißt die kombinarische Dimension von F auch j-Dimension von P und wird mit

$$\text{j-dim } P := \dim V(P) \bigcap J = \dim A/P$$

behzeichnet. Für jeden endlich erzeugten A-Modul und jedes j-Primideal p von A setzen wir

$$b(p, M) := \begin{cases} 0 & \text{falls } M_p = 0 \\ \text{j-dim } p + \mu(p,M) & \text{falls } M_p \neq 0 \end{cases}$$

**2.3.4 Satz von Swan**

Seien A ein kommutativer Ring mit A, für welchen m-Spec A noethersch ist, und M ein endlich erzeugter A-Modul. Wir nehmen an,

$$r := \sup \{b(b, M) \mid p \in \text{j-Spec } A\} < \infty$$

ist endlich. Dann besitzt M ein Erzeugendensystem aus r Elementen.

Zum Beweis benötigen wir das folgende

**Lemma**

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein endlich erzeugter A-Modul und

---

60 Sei F von der Gestalt F = V(P)⋂**J** mit einem Primideal P ∈ F. Angenommen F ist reduzibel, d.h.

$$F = F' \bigcup F''$$

mit echten abgeschlossenen Teilmengen F' und F''. Mit

$$F' = V(I')\bigcap \mathbf{J} \text{ und } F'' = V(I'')\bigcap \mathbf{J}$$

gilt

$$P \in F = F'\bigcup F'' = V(I') \bigcup V(I'').$$

Es gilt also I'⊆P oder I''⊆P. O.B.d.A. sei I'⊆P Dann gilt V(P) ⊆ V(I'), also

$$F = V(P)\bigcap \mathbf{J} \subseteq V(I')\bigcap \mathbf{J} = F'.$$

Insbesondere ist F' keine echte Teilmenge von F. Also ist F irreduzibel.

Sei umgekehrt eine irreduzible abgeschlossene Menge F von **J** gegeben, sagen wir F = V(I)⋂**J**. Sei P der Durchschnitt aller Elemente von F. Dann gilt I ⊆ P, also V(P) ⋂ **J** ⊆ V(I)⋂ **J**. Nach Wahl von P gilt aber auch die umgekehrte Inklusion, d.h. es ist

$$P \in F = V(I)\bigcap \mathbf{J} = V(P)\bigcap \mathbf{J}.$$

Es reicht zu zeigen, P ist ein Primideal. Angenommen es ist kein Primideal. Dann gibt es Elemente f,g∈A mit

$$fg \in P,\ f \notin P,\ g \notin P.$$

Jedes Primoberideal von P enthält f oder g, also ist

$$F = V(P+fA)\bigcap \mathbf{J} \bigcup V(P+gA)\bigcap \mathbf{J}. \qquad (1)$$

Wegen f ∉ P gibt es nach Definition von P ein Q' ∈ **J** mit P ⊆ Q' und f∉ Q'. Analog gibt es ein Q'' ∈ **J** mit P ⊆ Q'' und g∉Q''. Mit anderen Worten, (1) ist eine Darstellung von F als Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen. Weil F irreduzibel sein soll, ist das aber nicht möglich. Also ist die Annahme, P ist kein Primideal, falsch.

$p_1, \dots, p_n$ endlich viele Primideale mit

$$M\otimes_A\kappa(p_i) \neq 0 \text{ für } i = 1, \dots , n.$$

Dann gibt es ein Element $m\in M$ dessen natürliches Bild in

$$M\otimes_A\kappa(p_i)$$

für $i = 1, \dots , n$ ungleich 0 ist. Ein solches Element wollen wir erzeugend bezüglich $p_1, \dots , p_n$ nennen. Man beachte, diese Bedingung ist äquivalent zu

$$\mu(p_i , M/Am) = \mu(p_i , M) - 1 \text{ für } i = 1, \dots , n.$$

**Beweis** des Lemmas. O. B. d. A. können wir annehmen, daß $p_n$ minimal in der Menge der $p_1, \dots , p_n$ ist. Entsprechend können wir auch annehmen, $p_{n-1}$ ist minimal in der Menge der $p_1, \dots , p_{n-1}$, usw. Wir erreichen auf diese Weise, daß für $i = 1, \dots , n$ gilt:

$$p_i \text{ ist in keinem der Primideale } p_{i+1}, p_{i+1}, \dots , p_n \text{ enthalten.} \qquad (1)$$

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Sei also $n > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein Element

$$m' \in M,$$

welches erzeugend ist bezüglich $p_1, \dots , p_{n-1}$. Ist m' auch erzeugend bezüglich $p_n$, so ist weiter nichts zu beweisen. Sei also m' nicht erzeugend bezüglich $p_n$. Nach Voraussetzung ist $M\otimes_A\kappa(p_n) \neq 0$. Es gibt also ein Element

$$m'' \in M,$$

welches erzeugend bezüglich $p_n$ ist. Wegen (1) liegt keines der Primideale $p_i$ mit $i < n$ im Primideal $p_n$. Also liegt auch deren Produkt nicht in $p_n$. Wir können ein Element

$$a \in p_1\bullet\dots\bullet p_{n-1} - p_n$$

aus dem Produkt der $p_i$ mit $i < n$ finden, welches nicht in $p_n$ liegt. Das natürliche Bild von

$$m' + a\bullet m''$$

in $M\otimes_A\kappa(p_i)$ stimmt dann für $i = 1, \dots , n-1$ mit dem Bild von m' überein (nach Wahl von a), ist also ungleich Null. Das natürliche Bild dieses Elements in $M\otimes_A\kappa(p_n)$ ist gleich dem a-fachen des Bildes von m" und damit ebenfalls ungleich Null (nach Wahl von m" und a). Wir haben gezeigt, m' + am" ist erzeugend bezüglich $p_1, \dots , p_n$.

**QED**.

**Beweis von 2.3.4**. 1. Schritt. Es gibt nur endlich viele $p\in$j-Spec A mit $b(p,M) = r$.
Für $n = 1, 2, 3, \dots$ betrachten wir die Mengen

$$X_n := \{p \in \text{j-Spec } A \mid \mu(p, M) \geq n\}.$$

Die analog definierten Teilmengen von Spec A sind nach 2.1.8(i) abgeschlossen im Spektrum von A. Nach Definition der Topologie von **J** (als Unterraumtopologie von Spec A) ist dann aber auch $X_n$ abgeschlossen im j-Spektrum von A. Nach Voraussetzung ist m-Spec A noethersch. Dasselbe gilt damit auch für j-Spec A (vgl. Bemerkung 2.3.3 (v)). Insbesondere ist jede abgeschlossene Teilmenge von j-Spec A Vereinigung von endlich vielen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen. Wählt man die Anzahl dieser Teilmengen minimal, so sind diese Teilmengen eindeutig bestimmt und heißen <u>irreduzible</u> <u>Komponenten</u> (vgl. 2.2.1(iii)). Jedes $X_n$ besitzt also endlich viele irreduzible Komponenten. Seien

$$p_{n1}, \dots, p_{n\nu_n}$$

die allgemeinen Punkte der irreduziblen Komponenten von $X_n$.

Nach Voraussetzung ist M endlich erzeugt über A. Besitzt M ein Erzeugendensystem aus s Elementen so ist nach Definition $X_n = \emptyset$ für jedes $n > s$. Die Menge der Primideale

$$p_{ni}$$

ist somit endlich. Es reicht also zu zeigen, jedes $p \in$ j-Spec A mit $b(p, M) = r$ ist gleich einem der $p_{ni}$. Sei also

$$b(p, M) = r.$$

Wir betrachten die Zahl

$$n := \mu(p, M).$$

Dann gilt $p \in X_n$ also $p \supseteq p_{ni}$ für ein i und

$$n = \mu(p, M) \ge \mu(p_{ni}, M) = n. \qquad (2)$$

Man beachte, das Gleichheitszeichen rechts gilt wegen $p_{ni} \in X_n$. Angenommen, p ist verschieden von $p_{ni}$. Dann gilt

$$\text{j-dim } p < \text{j-dim } p_{ni},$$

also wegen (2) auch

$$r = b(p, M) < b(p_{ni}, M).$$

Nun ist aber r nach Definiton gerade der maximale Wert, den die Funktion b(?,M) annehmen kann auf j-Spec A. Die Ungleichung kann also nicht bestehen, d.h. die Annahmen, daß p von $p_{ni}$ ist falsch: p liegt in der endlichen Menge der $p_{ni}$.

<u>2. Schritt</u>. Beweis der Behauptung.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach r. Im Fall r = 0 gilt

$$M \otimes_A \kappa(p) = 0$$

für jedes maximale Ideal p von A, d.h. es ist M = 0 (nach 2.1.7 (vii)) und die Behauptung ist trivial. Sei also

$$r > 0.$$

Wir wählen ein Element m ∈ welches erzeugend ist bezüglich der endlich vielen Primpideale $p \in$ j-Spec A mit $b(p, M) = r$. Dann gilt

$$b(p, M/Am) \le r\text{-}1$$

für alle $p \in$ j-Spec A. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt M/Am ein Erzeugendensystem aus r-1 Elementen, d.h. M besitzt ein solches aus r Elementen.

**QED**.

## *2.4 Assoziierte Primideale und Primärzerlegung*

Ziel dieses Abschnitts ist eine weitgehende Verallgemeinerung des Satzes von der Zerlegung natürlcher Zahl in ein Produkt von Primzahlpotenzen. Für das folgende behalte man die folgende Tatsache im Auge. Ist

$$n = p_1^{n_1} \bullet \dots \bullet p_r^{n_r}$$

die Primfaktortzerlegung der natürlichen Zahl n, so gilt nach dem Chinesischen Restesatz

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/(p_1^{n_1})\times\ldots\times\mathbb{Z}(p_r^{n_r})$$

Für jede Primzahl p, die in der Faktorzerlegung von n nicht vorkommt, ist p modulo $p_i^{n_i}$ ein Einheit für jedes i, d.h. die Multiplikation mit p ist also Abbildung

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

injektiv. Andererseits ist das Primideal

$$p_i\mathbb{Z}$$

gerade der Annullator des Elements

$$(0, ...,0, p_i^{n_i-1} \bmod p_i^{n_i}, 0, ... , 0).$$

Die nachfolgende Definition des assoziierten Primideals zu einem gegebenen Modul ist durch diese Tatsache motiviert.

### 2.4.1 Assoziierte Primideale

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Ein zu M gehöriges Primideal (oder auch zu M assoziiertes Primideal) ist ein Primideal

$$p \in \text{Spec } A,$$

der Gestalt

$$p = \text{Ann } m = \{a \in A \mid am = 0\}$$

für ein m ∈ M, d.h. p ist Annullator eines Elements von M. Die Menge der assoziierten Primideal von M wird mit

$$\text{Ass}(M) = \text{Ass}_A(M)$$

bezeichnet. Für jedes Ideal $I \subseteq A$ heißen die assoziierten Primideale von A/I auch Primkomponenten von I oder auch Primdivisoren von I.

Ein Element a ∈ A heißt Nullteiler für M, falls es ein m ∈ M - {0} gibt mit am = 0. Andernfalls heißt das Element auch M-regulär.

### 2.4.2 Existenz assoziierter Primideale im noetherschen Fall

Seien A ein noetherscher kommutativer Ring mit 1 und M ≠ 0 ein A-Modul. Dann gilt:

(i) Jedes maximale Element in der Menge der Ideale

$$F := \{\text{Ann } m \mid m \in M - \{0\}\}$$

(bezüglich der Inklusionsrelation "$\subseteq$") ist ein assoziiertes Primideal von M. Insbsondere gilt Ass(M) ≠ ∅.[61]

(ii) Die Menge der nicht M-regulären Elemente von A ist gerade die Vereinigung

$$\bigcup \text{Ass}(M)$$

der assoziierten Primideale von M.

**Beweis**. Zu (i). Sei Ann m ein maximales Element der betrachteten Menge, und seien a,b ∈ A Elemente mit

$$abm = 0 \text{ und } bm \neq 0.$$

Dann gilt

$$a \in \text{Ann}(bm) \subseteq \text{Ann}(m).$$

Weil Ann(m) maximal sein soll, ist die Inklusion rechts nicht echt, d.h. es gilt sogar

[61] Weil A noethersch ist, besitzt jede nicht-leere Menge von Idealen von A ein maximales Element.

$$a \in \mathrm{Ann}(m).$$

Wir haben gezeigt, Ann(m) ist ein Primideal, und damit ein assoziiertes Primideal von M.

Zu (ii). Wir haben zu zeigen, jedes nicht M-reguläre Element von A liegt in

$$\bigcup \mathrm{Ass}(M)$$

(denn nach Definition ist jedes Element dieser Vereinigung umgekehrt auch nicht-regulär). Sei also $a \in A$ nicht M-regulär. Es gibt also ein

$$m \in M - \{0\}$$

mit $am = 0$, d.h.

$$a \in \mathrm{Ann}(m) \in F.$$

Die Menge der Elemente von F, welche das Element a enthalten, ist nicht leer. Weil A noethersch ist, enthält diese Menge ein maximales Element. Dies ist nach (i) ein Primideal

$$p \in \mathrm{Ass}(M).$$

Nach Konstruktion gilt $a \in p$, d.h. es ist $a \in p \subseteq \bigcup \mathrm{Ass}(M)$.

**QED**.

### 2.4.3 Verhalten von Ass(M) bei Quotientenbildung

Seine A ein kommutativer Ring mit 1 und $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge. Wir identifizieren Spec $A_S$ mit einem Unterraum von Spec A vermittels der Abbildung

$$\mathrm{Spec}\, A_S \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A,\ p \mapsto p \cap A.$$

Dann gilt:

(i) Für jeden $A_S$-Modul N gilt

$$\mathrm{Ass}_A(N) = \mathrm{Ass}_{A_S}(N),$$

(ii) Ist A noethersch, so gilt für jeden A-Modul M

$$\mathrm{Ass}(M_S) = \mathrm{Ass}(M) \cap \mathrm{Spec}(A_S).$$

**Beweis**. Zu (i). Beweis von "$\supseteq$".

Für $n \in N$ gilt

$$\mathrm{Ann}_A(n) = \mathrm{Ann}_{A_S}(n) \cap A.$$

Für $P \in \mathrm{Ass}_{A_S}(N)$ gilt deshalb auch $P \in \mathrm{Ass}_A(N)$.

Beweis von "$\subseteq$". Sei $p \in \mathrm{Ass}_A(N)$. Dann gibt es ein $n \in N - \{0\}$ mit

$$p = \mathrm{Ann}_A(n).$$

Die Elemente von S sind Einheiten in $A_S$ und annullieren deshalb keines der Elemente von $N - \{0\}$, insbesondere also auch nicht das Element n. Also gilt

$$p \cap S = \emptyset.$$

Deshalb ist $pA_S$ ein Primideal von $A_S$, und es gilt

$$pA_S = \{\tfrac{a}{b} \mid b \in S, an = 0\} = \{\tfrac{a}{b} \mid b \in S, \tfrac{a}{b}\cdot n = 0\} = \mathrm{Ann}_{A_S}(n)$$

Also gilt

$$pA_S \in \mathrm{Ass}_{A_S}(N).$$

Bei der oben beschriebenen Identifizieren von Spec $A_S$ mit einem Unterraum des Raums Spec A entspricht $pA_S$ aber gerade dem Primideal p.

Zu (ii). Beweis von "$\supseteq$". Sei $p \in \mathrm{Ass}(M) \cap \mathrm{Spec}(A_S)$.Dann gilt

$$p \cap S = \emptyset,$$

und es gibt ein m∈M mit

$$p = \{a \in A \mid am = 0\}.$$

Insbesondere ist $pA_S$ ein Primideal von $A_S$, und wie oben erhalten wir

$$pA_S = \{\frac{a}{b} \mid b \in S, am = 0\} = \mathrm{Ann}_{A_S}(\frac{m}{1}) \in \mathrm{Ass}(M_S).$$

Beweis von "$\subseteq$". Sei $P \in \mathrm{Ass}(M_S)$. Dann ist P ein Primideal der Gestalt

$$P = pA_S \text{ mit } p \in \mathrm{Spec}\ A, p = P \cap A, p \cap S = \emptyset$$

und es gibt Elemente $m \in M$, $s \in S$ mit

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{Ann}_{A_S}(\frac{m}{s}) \\ &= \{\frac{a}{b} \mid b \in S, a \in A, \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{s} = 0\} \\ &=^{62} \{\frac{a}{b} \mid b \in S, a \in A, \frac{a}{1} \cdot \frac{m}{1} = 0\} \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} p &= P \cap A \\ &= \{a \in A \mid \frac{a}{1} \cdot \frac{m}{1} = 0\} \\ &= \{a \in A \mid asm = 0 \text{ für ein } s \in S\}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist A ein noetherscher Ring, d.h. p ist endlich erzeugt, sagen wir

$$p = (a_1, \dots, a_n)A.$$

Weil die Zahl der $a_i$ endlich ist, gibt es ein $t \in S$ mit $a_i tm = 0$ für alle i.[63] Dann gilt aber $atm = 0$ für alle $a \in p$, also

$$\begin{aligned} p &= \{a \in A \mid asm = 0 \text{ für ein } s \in S\} \\ &\supseteq \{a \in A \mid atm = 0\} \\ &\supseteq p, \end{aligned}$$

also

$$p = \{a \in A \mid atm = 0\} = \mathrm{Ann}_A(tm) \in \mathrm{Ass}(M).$$

Wegen $p \cap S = \emptyset$ gitl aus $p \in \mathrm{Spec}(A_S)$.

**QED**.

---

[62] s/1 udn b/1 sind Einheiten in $A_S$

[63] Für jedes i gibt es ein solches t. Das Produkt aller dieser t ist ein Element der gesuchten Art.

**2.4.4. Beschreibung von Ass(M) mit Hilfe von Lokalisierungen**

Seien A ein noetherscher Ring (kommutativ mit 1), M ein A-Modul und $p \in \operatorname{Spec} A$. Dann gilt:

$$p \in \mathrm{Ass}_A(M) \Leftrightarrow pA_p \in \mathrm{Ass}_{A_p}(M_p).$$

**Beweis**. Dies ist ein Spezialfall von 2.4.3 (ii) mit $S = A - p$( wegen $pA_p \in \operatorname{Spec} A_p$).
**QED**.

**2.4.5 Ass(M) und exakte Sequenzen**

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von A-Moduln.Dann gilt

$$\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(M') \bigcup \mathrm{Ass}(M'').$$

**Beweis**. Sei $p \in \mathrm{Ass}(M)$. Dann gibt es einen Teilmodul

$$N \subseteq M,$$

welcher isomorph ist zu

$$N \cong A/p.$$

Weil p ein Primideal ist, ist für jedes $n \in N - \{0\}$ der Annullator von n gleich

$$\mathrm{Ann}(n) = A/p.$$

Falls $N \bigcap M' \neq 0$ ist, können wir n aus diesem Durchschnitt wählen und erhalten

$$p \in \mathrm{Ass}(M').$$

Fall $N \bigcap M' = \varnothing$ ist, ist die Einschränkung der Surjektion $M \longrightarrow M''$ auf N injektiv, d.h. M" enthält einen zu N isomorphen Teilmodul,

$$A/p = N \subseteq M''.$$

Dann gilt aber $p \in \mathrm{Ass}(M'')$.
**QED**.

**2.4.6 Ketten von Teilmoduln mit Faktoren der Gestalt A/p (im noetherschen Fall)**

Seien A ein noetherscher Ring (kommutativ mit 1) und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gibt es eine endliche echt aufsteigende Kette von Teilmoduln, sagen wir

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_n = M,$$

mit der Eigenschaft, daß für i = 1, ... , n eine Isomorphie von A-Moduln der Gestalt

$$M_i/M_{i-1} \cong A/p_i \text{ mit } p_i \in \operatorname{Spec} A$$

besteht.

**Beweis**. Sei $p_1 \in \mathrm{Ass}(M)$. Dann gibt es einen Teilmodul $M_1 \subseteq M$ mit

$$A/p_1 \cong M_1 = M_1/M_0.$$

Ist $M_1$ ein echter Teilmodul von M, so fixiere man ein

$$p_2 \in \mathrm{Ass}(M/M_1).$$

Ein Teilmodul von $M/M_1$ ist dann isomorph zu $A/p_2$. Bezeichnet $M_2$ dessen vollständiges Urbild in M bei der natürlichen Abbildung $M \longrightarrow M/M_1$j, so gilt

$$A/p_2 \cong M_2/M_1.$$

Indem man so fortfährt, erhält man eine echt aufsteigende Kette von Teilmoduln $M_i$ mit

$$M_i/M_{i-1} \cong A/p_i \text{ , } p_i \in \mathrm{Ass}(M/M_{i-1}).$$

Da M als endlich erzeugter A-Modul noethersch ist, bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab, d.h. es wird

$$M_i = M$$

für ein i.
**QED**.

### 2.4.7 Endlichkeit von Ass(M) und Vergleich mit Supp(M) (im noetherschen Fall)

Seien A ein noetherscher Ring (kommutativ mit 1) und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt:

(i) Ass(M) ist endlich.

(ii) $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$.

(iii) Die minimalen Elemente von Ass(M) und Supp(M) sind dieselben.

**Beweis**. Zu (i). Nach 2.4.6 und 2.4.5 gibt es endlich viele Primideale

$$p_1, \dots, p_r \in \mathrm{Spec}\ A$$

mit

$$\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(A/p_1) \cup \dots \cup \mathrm{Ass}(A/p_r).$$

Wegen $\mathrm{Ass}(A/p) = \{p\}$ für jedes Primideal p folgt daraus die Behauptung.

Zu (ii). Sei $p \in \mathrm{Ass}(M)$. Dann kann man A/p mit einem Teilmodul von M identifizieren und erhält so eine exakte Sequenz von A-Moduln

$$0 \longrightarrow A/p \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Durch Tensorieren mit $A_p$ über A erhält man nach 2.1.7 (ix) eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A_p/pA_p \longrightarrow M_p \longrightarrow M''_p \longrightarrow 0.$$

Wegen $A_p/pA_p \neq 0$ folgt $M_p \neq 0$, also $p \in \mathrm{Supp}(M)$.

Zu (iii). Sei $p \in \mathrm{Supp}(M)$ ein minimales Element. Dann gilt $M_p \neq 0$, also

| | | |
|---|---|---|
| $\emptyset$ | $\neq \mathrm{Ass}(M_p)$ | (nach 2.4.2) |
| | $= \mathrm{Ass}(M) \cap \mathrm{Spec}\ A_p$ | (nach 2.4.3(ii)) |
| | $\subseteq \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Spec}\ A_p$ | (nach (ii)) |
| | $= \{p\}$ | (weil p minimal in Supp(M) ist) |

Insbesondere gilt $p \in \mathrm{Ass}(M)$ und wegen (ii) ist p minimal in Ass(M).

Sei umgekehrt $p \in \mathrm{Ass}(M)$ minimales Element. Wegen (ii) gilt dann $p \in \mathrm{Supp}(M)$. Wäre p nicht minimal in Supp(M), so wäre wegen der gerade bewiesenen Aussage p auch nicht minimal in Ass(M).
**QED**.

### 2.4.8 Isolierte und eingebettete Komponenten

Seien A ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Weiter seien

$$P_1, \dots, P_r$$

die endlich vielen minimalen Elemente von Supp(M) (vgl. 2.4.7). Dann gilt

$$\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{Ann}\, M) = V(P_1) \cup \dots \cup V(P_r)$$

und die $V(P_i)$ sind die irreduziblen Komponenten der abgeschlossenen Menge Supp(M) (vgl. Bemerkugen 2.1.7 (ii) und 2.2.1(iii)). Die Primideale heißen auch isolierte assoziierte Primideale von M. Die übrigen Elemente von Ass(M) heißen auch eingebettete assoziierte Primideale von M.

**Bemerkungen**

(i) Im Fall

$$M = A/I$$

mit einem Ideal $I \subseteq A$ besteht

$$\mathrm{Supp}(M)$$

gerade aus den Primoberidealen von I. Die isolierten Primideale $P_i$ von M sind gerade die minimalen Primoberideale von I (und es gibt nur endlich viele solche Primoberideale).

(ii) Die assoziierten Primideale von A/I bilden die Analoga der Primteiler in der Zerlegung einer ganzen Zahl in Primzahlpotenzen. Wir kommen jetzt zu dem Begriff, welche den Begriff der Potenz einer Primzahl verallgemeinert. Man beachte, ist

$$n = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$$

die Zerlegung der natürlichen Zahl n in paarweise teilerfremde Primzahlpotenzen $p_i^{n_i}$, so entsprechen die Kerne der natürlichen Surjektionen

$$M := \mathbb{Z}/(n) \xrightarrow{\rho_i} \mathbb{Z}/(p_i^{n_i}) := \overline{M}_i$$

gerade den Primzahlpotenzen $p_i^{n_i}$. Deren Bilder $\overline{M}_i$ haben die Eigeschaft, daß die Multiplikation mit einer ganzen Zahl a,

$$\overline{M}_i \xrightarrow{a} \overline{M}_i$$

injektiv ist, wenn a teilerfremd ist zu $p_i$, und nilpoten ist andernfalls. Für die Kerne dieser Abbildungen

$$N_i := \mathrm{Ker}(\rho_i),$$

bedeutet das, es besteht die folgende Implikation.

$$m \in M - N_i\ ,\ am \in N_i \Rightarrow a^\nu M \subseteq N_i \text{ für ein } \nu.$$

Auf Grund der nachfolgenden Definition heißt eine Teilmodul $N_i$, für den diese Implikation besteht 'primär'.

### 2.4.9 Primäre Teilmoduln

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul und $N \subseteq M$ ein echter Teilmodul. Dann heißt N primär, wenn für jedes $a \in A$ und jedes $m \in M$ mit

$$m \notin N \text{ und } am \in N$$

eine natürliche Zahl $\nu$ existiert mit

$$a^\nu M \subseteq N.$$

Ein Primärideal des Rings A ist definiert als primärer A-Teilmodul von A.

**Bemerkungen**

(i) Die Bedingung an einen Teilmodul, ein Primärmodul zu sein läßt mit Hilfe seines Faktormoduls ausdrücken: ein Teilmodul $N \subseteq M$ ist genau dann ein Primärmodul, wenn jedes Element $a \in A$, welches ein Nullteiler bezüglich $M/N$ ist, eine Potenz besitzt, welche $M/N$ annulliert:

$$a \text{ nicht } M/N\text{-regulär} \Rightarrow a \in \sqrt{\mathrm{Ann}(M/N)}.$$

(ii) Man kann versuchen den Begriff des Primideals zum Begriff des Primmoduls zu verallgemeinern. Das hat sich jedoch bisher nicht als nützlich erwiesen.

### 2.4.10 Charakterisierung der primären Teilmoduln (noetherscher Fall)

Seien A ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und $N \subseteq M$ ein Teilmodul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) N ist primär in M.

(ii) $\mathrm{Ass}(M/N) = \{p\}$ besteht aus genau einem Element.

Sind die beiden Bedingungen erfüllt, so ist

$$I := \mathrm{Ann}(M/N)$$

ein Primärideal mit

$$\sqrt{I} = p.$$

**Beweis**. <u>(ii) ⇒ (i)</u>. Sei $\mathrm{Ass}(M/N) = \{p\}$. Nach dem gerade bewiesenen Aussage 2.4.7(iii) gilt dann

$$\mathrm{Supp}(M/N) = V(p),$$

und mit $I := \mathrm{Ann}(M/N)$ ist

$$V(I) = \mathrm{Supp}(M/N) = V(p)$$

(vgl. 2.1.7 (ii)) also

$$p = \sqrt{p} = \sqrt{I}$$

(vgl. Bemerkung 2.2.1 (i)). Ist nun $a \in A$ ein Nullteiler bezüglich M/N, so liegt in einem Ideal der Gestalt

$$\mathrm{Ann}(\overline{m}), \text{für eine } \overline{m} \in M/N - \{0\}.$$

Dieses liegt in einem Annullator eines Elements der maximal ist in der Menge aller solcher Annullatoren. Nach 2.4.2(i) ist letzterer ein assoziiertes Primideal von M/N, also gleich p. Es folgt

$$a \in p.$$

Wir haben gezeigt, $N \subset M$ ist primär in M.

<u>(i) ⇒ (ii)</u>. Sei $N \subset M$ primär in M und sei $p \in \mathrm{Ass}(M/N)$.
Ist a ein Element von p,

$$a \in p,$$

so ist a ein Nullteiler bezüglich M/N.[64] Weil $N \subset M$ primär ist in M, folgt

$$a \in \sqrt{I} \text{ mit } I := \mathrm{Ann}(M/N).$$

Wir haben gezeigt,

$$p \subseteq \sqrt{I}\ .$$

Wegen $p \in \mathrm{Ass}(M/N) \subseteq \mathrm{Supp}(M/N) = V(\mathrm{Ann}(M/N)) = V(I)$ gilt aber auch $I \subseteq p$, also $\sqrt{I} \subseteq p$. Zusammen erhalten wir also

$$p = \sqrt{I} \text{ mit } I := \mathrm{Ann}(M/N).$$

Wir haben gezeigt,

[64] Weil p der Annullator eines Elements von M/N ist.

$$\mathrm{Ass}(M/N) \subseteq \{p\}.$$

Weil N ein echter Teilmodul von M ist, gilt $M/N \neq 0$, also ist Ass(M/N) nicht leer, d.h.

$$\mathrm{Ass}(M/N) = \{p\}$$

besteht aus genau einem Element.

Es bleibt noch zu zeigen,

$$I = \mathrm{Ann}(M/N)$$

ist primär in A, falls (i) und (ii) erfüllt sind.

Seien $a, b \in A$ Elemente mit $ab \in I$ und $b \notin I$. Dann gilt

$$0 = ab\bullet M/N \text{ und } 0 \neq b\bullet M/N,$$

d.h. $a \in A$ ist ein Nullteiler für M/N. Dann ist aber die Multiplikation mit a nilpotent auf M/N (weil N primär ist in M), d.h. es gibt eine Potenz von a, sagen wir $a^n$, die im Annullator liegt:

$$a^n \in I.$$

Wir haben gezeigt, I ist ein Primär-Ideal.
**QED**.

### 2.4.11 Teilmoduln, die primär sind bezüglich eines Primideals

Seien A ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul, $N \subset M$ ein echter Teilmodul und $p \in \mathrm{Spec}\,(A)$ ein Primideal. Falls

$$\mathrm{Ass}(M/N) = \{p\}$$

nur aus dem Primideal p besteht, so sagt man, N ist p-primär in M, oder auch ein primärer Teilmodul in M zum Primideal p.

### 2.4.12 Der Durchschnitt primärer Teilmoduln zum selben Primideal

Seien A ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul, $p \in \mathrm{Spec}\, A$ und

$$N', N'' \subset M$$

zwei p-primäre Teilmoduln. Dann ist auch

$$N' \cap N''$$

ein p-primärer Teilmodul von M.
**Beweis**. Die A-lineare Abbildung

$$M \longrightarrow M/N' \oplus M/N'', m \mapsto (m,m),$$

hat den Kern $N' \cap N''$, induziert also eine Injektion

$$M/N' \cap N'' \hookrightarrow M/N' \oplus M/N''.$$

Damit gilt

$$\mathrm{Ass}(M/N' \cap N'') \subseteq \mathrm{Ass}(M/N') \cup \mathrm{Ass}(M/N'') = \{p\}.$$

**QED**.

### 2.4.13 Begriff des irreduziblen Teilmoduls

Seien A ein kommutativer Ring, M ein A-Modul und $N \subseteq M$ ein echter Teilmodul.

Dann heißt N reduzibel in M, falls es zwei echte Teilmoduln $N', N'' \subseteq M$ gibt, die N als echten Teilmodul enthalten, mit

$$N = N' \cap N''.$$

Andernfalls heißt N irreduzibel in M.
**Bemerkungen**

(i) Dieser Begriff hat nichts mit dem Begriff des irreduziblen Moduls in der Darstellungstheorie zu tun.
(ii) Jeder Teilmodul eines noetherschen Moduls M ist Durchschnitt endlich vieler irrduzibler Teilmoduln.[65]
(iii) Die Darstellung eines Teilmoduls als Durchschnitt von irreduzibler Teilmoduln ist im allgemeinen nicht eindeutig. Ist zum Beispiel K ein Körper und M ein endlich dimensionaler Vektorraum, so sind die irreduziblen Teilmoduln von M gerade die linearen Unterräume der Kodimension 1. Die anderen (echten) linearen Unterräume können dann auf viele verschiedenen Weisen als Durchschnitte von irreduziblen geschrieben werden.
(iv) Die Darstellung eines Teilmoduls $N \subset M$ als Durchschnitt von endlich vielen Teilmoduln von N, sagen wir

$$N = N_1 \cap ... \cap N_r ,$$

heißt irredundant, wenn keiner der Moduln $N_i$ weggelassen werden kann, ohne daß sich die rechte Seite ändert.

### 2.4.14 Irreduzible und Primärzerlegungen

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Die Darstellung

$$N = N_1 \cap ... \cap N_r$$

eines Teilmoduls $N \subset M$ als Durchschnitt von endlich vielen Teilmoduln $N_i \subset M$ heißt Zerlegung von N. Sie heißt irreduzible Zerlegung, wenn jeder der Moduln $N_i$ irreduzibel ist, sie heißt Primärzerlegung, wenn jeder der Moduln $N_i$ primär ist.
Seien jetzt A noethersch, M ein endlich erzeugter A-Modul und

$$N = N_1 \cap ... \cap N_r$$

eine irredundante Primärzerlegung mit

$$\mathrm{Ass}(M/N_i) = \{P_i\}$$

Gilt $P_i = P_j$ so ist auch der Teilmodul $N_i \cap N_j$ primär und gehört zum selben Primideal. Wir können also Teilmoduln $N_i$ zum selben Primideal so zusammenfassen, daß gilt

$$P_i \neq P_j \text{ für } i \neq j.$$

Eine irredundante Primärzerlegung von N mit dieser Eigenschaft heißt kürzeste Primärzerlegung von N, und die Teilmoduln $N_i$ , welche in dieser Zerlegung auftreten, heißen Primärkomponenten von N. Gehört die Primärkomponente $N_i$ von N zum Primideal P, d.h.,

$$\mathrm{Ass}(M/N_i) = \{P\},$$

so heißt $N_i$ auch P-primäre Komponente von N.

### 2.4.15 Satz von der Primärzerlegung

Seien A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1 und M ein endlich erzeugter A-Modul, Dann gilt:

---

[65] Sei F die Menge aller Teilmoduln von M, die keine solche endliche Darstellung besitzen. Falls F nicht-leer ist, besitzt die Menge, weil M noethersch ist, ein maximales Element, sage wir N. Dann ist N reduzibel, d.h. $N = N' \cap N''$ mit $N \subset N'$ und $N \subset N''$. Wegen der Maximalität von N besitzen N' und N'' eine endliche Darstellung durch irreduzible Moduln. Dann gilt dies aber auch für N, im Widerspruch zu $N \in F$. Dieser Widerpruch zeigt, das F leer sein muß.

(i) Jeder irrduzible Teilmodul von M ist primär.
(ii) Ist

$$N = N_1 \cap ... \cap N_r \text{ mit } Ass(M/N_i) = \{P_i\},$$

eine irredundante Primärzerlegung des echten Teilmoduls $N \subset M$, dann gilt

$$Ass(M/N) = \{ P_1,..., P_r\}.$$

(iii) Jeder echte Teilmodul $N \subset M$ besitzt eine Primärzerlegung. Ist N ein solcher Teilmodul und

$$P \in Ass(M/N)$$

ein minimales assoziierten Primideal von M/N, so ist

$$\varphi_p^{-1}(N_P)$$

gerade die P-primäre Komponente von N. Dabei sei

$$\varphi_P: M \longrightarrow M_P$$

gerade die natürliche Abbildung in den Quotientenring. Insbesondere sind die Primärkomponenten zu den minimalen assoziierten Primidealen eindeutig bestimmt.

**Beweis**.[66] Zu (i). Sei $N \subset M$ ein echter Teilmodul, welcher nicht primär ist. Wir haben zu zeigen, N ist reduzibel. Indem wir M durch M/N ersetzen, reduzieren wir den Beweis der Behauptung auf den Fall

$$N = 0.$$

Sei also N nicht primär. Nach 2.4.10 besteht dann

$$Ass(M) = Ass(M/N)$$

aus mindestens zwei Elementen, sagen wir

$$P_1, P_2 \in Ass(M), P_1 \neq P_2.$$

Der Modul M enthält dann Teilmoduln

$$K_i \subseteq M,$$

welche isomorph sind zu

$$K_i \cong A/P_i.$$

Wegen

$$Ann(a) = P_i \text{ für } a \in K_i - \{0\}$$

gilt

$$K_1 \cap K_2 = 0.$$

Also ist der Nullmodul in M reduzibel.
Zu (ii). Wie im Beweis von (i) können wir M durch M/N ersetzen, d.h. wir können o.B.d.A. annehmen,

$$0 = N = N_1 \cap ... \cap N_r.$$

In dieser Situation können wir M mit einem Teilmodul der direkten Summe der $M/N_i$ identifizieren,

$$M \subseteq M/N_1 \oplus ... \oplus M/N_r.$$

Deshalb gilt (nach 2.4.5)

$$Ass(M/N) = Ass(M) \subseteq Ass(M/N_1 \oplus ... \oplus M/N_r) = \cup_{i=1}^{r} Ass(M/N_i) = \{P_1,...,P_r\}.$$

Weil die Primärzerlegung irredudant sein soll, gibt es ein x mit

[66] Wir benötigen die Exakteheit des Quotienten-Funktors (vgl. 2.1.7).

$$0 \neq x \in N_2 \cap \ldots \cap N_r.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ann}(x) &= 0{:}x \\ &= (N_1 \cap \ldots \cap N_r){:}x \\ &= (N_1{:}x) \cap \ldots \cap (N_r{:}x) \\ &= N_1{:}x \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} I := N_1{:}M &= \{a \in A \mid aM \subseteq N_1\} \\ &= \{a \in A \mid a\bullet(M/N_1) = 0\} \\ &= \mathrm{Ann}_A(M/N_i) \end{aligned}$$

ein Primärideal mit $\sqrt{I} = P_i$ (nach 2.4.10, weil $N_i$ primär ist zum Primideal $P_i$), d.h. eine Potenz von $P_i$ liegt in I, sagen wir $P_1^\nu \subseteq I$, d.h. $P_1^\nu M \subseteq N_1$. Insbesondere gilt

$$P_1^\nu x \subseteq N_1.$$

also nach Wahl von x,

$$P_1^\nu x \subseteq N_1 \cap \ldots \cap N_r = 0,$$

d.h.

$$P_1^\nu x = 0.$$

Wir können eine nicht-negative ganze Zahl i wählen mit

$$P_1^i x \neq 0 \text{ und } P_1^{i+1} x = 0.$$

Sei

$$0 \neq y \in P_1^i x.$$

Dann gilt

$$P_1 y = 0. \tag{1}$$

Wegen $y \in N_2 \cap \ldots \cap N_r$ und $y \neq 0$ gilt $y \notin N_1$. Wegen $\mathrm{Ass}(M/N_1) = \{P_1\}$ liegen die Annullatoren der Elemente von $M/N_1 - \{0\}$ sämtlich in $P_1$ (nach 2.4.2(i)). Also ist

$$\mathrm{Ann}(y) \subseteq \mathrm{Ann}(y \bmod N_1) \subseteq P_1.$$

Zusammen mit (1) erhalten wir

$$\mathrm{Ann}(y) = P_1, \; y \in M,$$

d.h.

$$P_1 \in \mathrm{Ass}(M).$$

Dieselbe Argumentation zeigt $P_i \in \mathrm{Ass}(M)$ für jedes i.

Zu (iii). Nach 2.4.13 besitzt jeder Teilmodul von M eine irreduzible Zerlegung. Nach (i) ist dies auch eine Primärzerlegung. Für den weiteren Beweis können wir annehmen,

$$N = N_1 \cap \ldots \cap N_r \tag{2}$$

ist die kürzeste Primärzerlegung des echten Teilmoduls $N \subset M$ und das minimale assoziierte Primideal P ist gleich

$$P = P_1.$$

Aus (2) erhalten wir (siehe 2.1.7 (x))

$$N_P = (N_1)_P \cap \ldots \cap (N_r)_P.$$

Wie wir im Beweis von (ii) gesehen haben wird $M/N_i$ annulliert von einer Potenz von $P_i$. Weil $P_i$ für i > 1 nicht ganz in P liegt, gibt es Elemente in $P_i$, welche Einheiten in $A_P$ sind (und $M/N_i$ annullieren). Deshalb gilt

$$(M/N_i)_P = 0$$

also

$$(N_i)_P = M_P$$

für i = 2, ... , r. Es folgt

$$N_P = (N_1)_P$$

also

$$\varphi_P^{-1}(N_P) = \varphi_P^{-1}((N_1)_P) \supseteq N_1 \qquad (3)$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß auch rechts das Gleichheitszeichen gilt. Sei

$$m \in \varphi_P^{-1}((N_1)_P),$$

d.h. es gibt Elemente $n \in N_1$ und $s \in A - P$ mit

$$\frac{m}{1} = \frac{n}{s} \text{ in } M_P,$$

d.h. $s\bullet m - n$ wird von einem Element von S annulliert. Indem wir den Bruch $\frac{n}{s}$ geeignet erweitern, können wir annehmen,

$$s\bullet m - n = 0 \text{ in } M.$$

Mit anderen Worten, die Restklasse von m in $M/N_1$ wird von s annulliert. Wegen

$$\mathrm{Ass}(M/N_1) = \{P\}$$

und $s \notin P$ ist s ein $M/N_1$-reguläres Element (vgl. 2.4.2(ii)). Also ist die Restklasse von m selbst schon Null, d.h. es gilt

$$m \in N_1.$$

Wir haben gezeigt, in (3) gilt auch ganz rechts das Gleichheitszeichen, d.h. es ist

$$\varphi_P^{-1}(N_P) = N_1$$

die P-primäre Komponente von N.
**QED**.

# 3 Eigenschaften von Ring-Erweiterungen

## *3.1 Flachheit*

### 3.1.1 Definition

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M eine A-Modul. Dann heißt M flach über A oder auch A-flach, wenn für jede exakte Sequenz von A-Moduln

$$S: \ldots \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow \ldots$$

die zugehörige Sequenz

$$S\otimes_A M: \ldots \longrightarrow N'\otimes_A M \longrightarrow N\otimes_A M \longrightarrow N''\otimes_A M \longrightarrow \ldots$$

ebenfalls exakt ist. Der Modul M heißt treuflach über A, wenn für jede Sequenz S gilt

$$S \text{ ist exakt} \Leftrightarrow S\otimes_A M \text{ ist exakt.}$$

Sei f. A $\longrightarrow$ B ein Homomorphismus von Ringen. Dann heißt f flach, falls B als A-Modul flach ist. Man sagt in dieser Situation auch, B ist eine flache A-Algebra.

**Bemerkungen**

(i) Jede exakte Sequenz S kann man in kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

zerlegen. Deshalb kann man sich beim Überprüfen der Flachheit oder treuen Flachheit eines Moduls auf die Betrachtung kurzer exakter Sequenzen beschränken.

(ii) Das Tensorprodukt ist rechtsexakt, d.h. für jede kurze exake Sequenz von A-Moduln

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

und jeden A-Modul M ist die Sequenz

$$N'\otimes M \longrightarrow N\otimes M \longrightarrow N''\otimes M \longrightarrow 0$$

exakt. Deshalb kann man sich beim Überprüfen der Flachheit eines Moduls auf die Betrachtung von exakten Sequenzen der Gestalt

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N$$

beschränken (d.h. es reicht zu überprüfen, ob die Injektivität von Abbildungen erhalten bleibt).

(iii) Transitivität. Seien f: A $\longrightarrow$ B ein Ringhomomorphismus und N ein B-Modul. Dann gilt:

1. B ist A-flach und N ist B-flach $\Rightarrow$ N ist A-flach.[67]

2. B ist A-treuflach und N ist B-treuflach $\Rightarrow$ N ist A-treuflach.[68]

3. N ist B-treuflach und A-flach $\Rightarrow$ B ist A-flach.[69]

4. N ist treuflach über A und B $\Rightarrow$ B ist A-treuflach.[70]

(iv) Basiswechsel. Seien f: A $\longrightarrow$ B ein Ringhomomorphismus und M ein A-Modul. Dann gilt:

1. M ist flach über A $\Rightarrow$ $M\otimes_A B$ ist flach über B.[71]

---

[67] Sei S exakt über A. Dann ist $S\otimes_A B$ exakt, also ist auch

$$S\otimes_A B\otimes_B N = S\otimes_A N$$

exakt.

[68] Sei

$$S\otimes_A N = S\otimes_A B\otimes_B N$$

exakt. Dann ist auch $S\otimes_A B$ exakt, also ist es auch S.

[69] Sei S exakt über A. Dann ist auch

$$S\otimes_A N = S\otimes_A B\otimes_B N.$$

Weil N treuflach über B ist, ist auch $S\otimes_A B$ exakt.

[70] Sei $S\otimes_A B$ exakt. Dann ist auch

$$S\otimes_A B\otimes_B N = S\otimes_A N$$

exakt. Weil N treuflach ist über A, ist auch S exakt.

2. M ist treuflach über A $\Rightarrow$ $M\otimes_A B$ ist treuflach über B.[72]

### 3.1.2 Lokale Bedingungen für die Flachheit

Seien f: $A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und M ein B-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) M ist A-flach.

(ii) $M_P$ ist $A_p$-flach für jedes Primideal $P \in \mathrm{Spec}\, B$, wobei $p := A\cap P$ sei.

(iii) $M_P$ ist $A_p$-flach für jedes maximale Ideal $P \in \mathrm{Spec}\, B$, wobei $p := A\cap P$ sei.

**Beweis**.

1. Schritt: $M\otimes_A N \cong M\otimes_{A_S} N$ für $A_S$-Moduln M, N und $S \subseteq A$ multiplikativ.

Es gilt

$$\begin{aligned} M\otimes_A N &\cong M\otimes_{A_S} A_S\otimes_A A_S\otimes_{A_S} N && \text{(M,N sind } A_S\text{-Moduln)} \\ &\cong M\otimes_{A_S} (A_S)_S\otimes_{A_S} N && \text{(Definition von Quotienten-Moduln)} \\ &\cong M\otimes_{A_S} A_S\otimes_{A_S} N && \text{(Elemente von S sind Einheiten in } A_S) \\ &\cong M\otimes_{A_S} N && \text{(M ist } A_S\text{-Modul).} \end{aligned}$$

2. Schritt: (i) $\Rightarrow$ (ii).

Sei also M flach über A. Der Ring-Homomorphismus f: $A \longrightarrow B$ induziert einen Ring-Homomorphismus g: $A_p \longrightarrow B_P$ (auf Grund der Universalitätseigenschaft der Quotientenringe), und $M_P$ ist ein $B_P$-Modul.

Sei S ein exakte Sequenz von $A_p$-Moduln. Dann gilt

$$\begin{aligned} S\otimes_{A_p} M_P &\cong S\otimes_A M_P && \text{(nach dem ersten Schritt)} \\ &\cong S\otimes_A (M\otimes_B B_P) \end{aligned}$$

Nun ist $S\otimes_A M$ exakt, weil M flach ist über A, also ist auch $S\otimes_A M\otimes_B B_P$ exakt, weil $B_P$ flach ist über B (nach 2.1.7(ix)).

3. Schritt: (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Dies ist trivial.

4. Schritt: (iii) $\Rightarrow$ (i).

Sei

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \qquad (1)$$

eine exakte Sequenz von A-Moduln und bezeichne K den Kern der induzierten Abbildung $N'\otimes_A M \longrightarrow N\otimes_A M$, d.h. sei

---

[71] Sei S exakt über B. Dann ist auch

$$S\otimes_A M = S\otimes_B B\otimes_A M$$

exakt.

[72] Sei $S\otimes_B B\otimes_A M = S\otimes_A M$ exakt. Dann ist es auch S.

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow N'\otimes_A M \longrightarrow N\otimes_A M \qquad (2)$$

exakt. Wir haben zu zeigen, es gilt

$$K = 0.$$

Für jedes maximale Ideal

$$P \in \text{m-Spec } B$$

ist dann die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow K'_P \longrightarrow N'\otimes_A M_P \longrightarrow N\otimes_A M_P$$

exakt. Da $M_P$ ein $A_p$-Modul ist, d.h. $M_P \cong A_p\otimes_{A_p} M_P$, läßt sich diese Sequenz auch in der Gestalt

$$0 \longrightarrow K_P \longrightarrow N'\otimes_A A_p\otimes_{A_p} M_P \longrightarrow N\otimes_A A_p\otimes_{A_p} M_P$$

schreiben, also auch in der Gestalt

$$0 \longrightarrow K_P \longrightarrow N'_p\otimes_{A_p} M_P \longrightarrow N_p\otimes_{A_p} M_P \qquad (3)$$

Nun ist mit (1) auch die Sequenz $0 \longrightarrow N'_p \longrightarrow N_p$ exakt (weil die Quotientenbildung ein exakter Funktor ist nach 2.1.7(ix)), also nach Voraussetung (ii) auch

$$0 \longrightarrow N'_p\otimes_{A_p} M_P \longrightarrow N_p\otimes_{A_p} M_P.$$

Aus der Exaktheit von (3) lesen wir deshalb ab, es gilt

$$K_P = 0$$

für jedes maximale Ideal P von B. Dann gilt aber K = 0 (nach 2.1.7(v)).
**QED**.

### 3.1.3 Charakterisierung der Treuflachheit I

Seien A ein Ring und M ein A-Modul. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.
(i) M ist treuflach über A.
(ii) M ist flach über A und $M\otimes_A N \neq 0$ für jeden A-Modul $N \neq 0$.
(iii) M ist flach über A und $pM \neq M$ für jedes maximale Ideal $p \subseteq A$.

**Beweis**. (i) ⇒ (ii). Wäre $M\otimes_A N = 0$, so wäre die Sequenz, die aus

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

durch Tensorieren mit M über A entsteht, exakt, also müßte auch die Ausgangssequenz exakt sein, d.h. N = 0 im Widerspruch zur Wahl von N.

(ii) ⇒ (iii). Nach Voraussetzung ist

$$0 \neq M\otimes_A A/p \cong M/pM$$

für jedes maximale Ideal p von A. Also gilt $pM \neq M$.

(iii) ⇒ (ii). Nach Voraussetzung gibt es ein von Null verschiedenes Element in N, sagen wir

$$0 \neq n \in N.$$

Aus der Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow nA \longrightarrow N$$

erhalten wir die von

$$0 \longrightarrow M\otimes_A nA \longrightarrow M\otimes_A N.$$

Es reicht also, zu zeigen, $M\otimes_A nA \neq 0$, d.h. wir können annehmen,

$$N = nA.$$

Es gilt

$$An \cong A/Ann(n)$$

mit einem von A verschiedenen Ideal Ann(n) von A. Sei p ein maximales Ideal von A, welches dieses Ideal enthält,

$$Ann(n) \subseteq p \in \text{m-Spec } A.$$

Es gibt damit eine Surjektion

$$M\otimes N = M\otimes_A A/Ann(n) \twoheadrightarrow M\otimes_A A/p \cong M/pM.$$

Nach Voraussetzung (iii) ist der Modul rechts von Null verschieden. Dann ist es aber auch der Modul links.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei

$$S: N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$$

eine Sequenz von A-Moduln mit der Eigenschaft, daß

$$S\otimes_A M: N'\otimes_A M \xrightarrow{f_M} N\otimes_A M \xrightarrow{g_M} N''\otimes_A M$$

exakt ist. Wir haben zu zeigen, dann ist auch S exakt. Nach Voraussetzung gilt

$$g_M \circ f_M = (g\circ f)_M = 0_M = 0,$$

also

$$Im(g\circ f)\otimes_A M = Im(g_M \circ f_M) = Im(0) = 0.$$

Nach Voraussetzung (ii) folgt $Im(g\circ f) = 0$, d.h. $g\circ f = 0$, d.h.

$$Im(f) \subseteq Ker(g).$$

Wir haben noch die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei

$$H := Ker\ g/\ Im\ f.$$

Dann gilt, weil M flach ist über A,[73]

$$H\otimes M = Ker\ g \otimes M\ /\ Im\ g \otimes M = Ker(g_M)/Im(f_M) = 0.$$

Nach Voraussetzung (ii) folgt H = 0, d.h.

$$Im(f) = Ker(g).$$

**QED**.

### 3.1.4 Die Faser eines Morphismus affiner Spektren

Sei $f: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von kommuatativen Ringen mit 1. Wir bezeichnen mit

$${}^af: \text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } A, P \mapsto P\cap A := f^{-1}(P).$$

die zugehörige Abbildung der affinen Spektren. Für jedes $p \in \text{Spec } A$ ist dessen vollständiges Urbild bei ${}^af$ gleich

$${}^af^{-1}(p) = \{P \in \text{Spec } B \mid f^{-1}(P) = p\} = \text{Spec } B\otimes_A \kappa(p). \qquad (1)$$

Hinsichtlich des Gleichheitszeichens rechts wird dabei $\text{Spec } B\otimes_A \kappa(p)$ mit einer Teilmenge von Spec B identifiziert[74] mit Hilfe des natürlichen Homomorphismus

$$B \longrightarrow B\otimes_A \kappa(p), b \mapsto b\otimes 1.$$

Deshalb nennt man

---

[73] Man betrachte die exakte Sequenz $0 \longrightarrow Im(f) \longrightarrow Ker(g) \longrightarrow H \longrightarrow 0$.

[74] d.h. jedes Primideal von $B\otimes\kappa(p)$ wird mit dessen vollständigen Urbild in B identifiziert.

$$\text{Spec Spec } B\otimes_A \kappa(p)$$

auch <u>Faser</u> von ${}^a f$: über p und

$$B\otimes_A \kappa(p)$$

<u>Faser</u> von f über p.
**Beweis** der rechten Identität von (1). Wir setzen

$$C := B\otimes_A \kappa(p) \text{ und } S := A - p.$$

Weiter sei g die natürliche Abbildung

$$g: B \longrightarrow C, b \mapsto b\otimes 1.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} C &= B\otimes_A (A/p)_S && \text{(Definition von } \kappa(p)\text{)} \\ &= B\otimes_A A/p\otimes_A A_S && \text{(Definition des Quotienten-Moduls)} \\ &= B/pB\otimes_A A_S \\ &= (B/pB)_S \\ &= (B/pB)_{f(S)}. \end{aligned}$$

Die natürliche Abbildung g bekommt so die Gestalt

$$g: B \longrightarrow (B/pB)_{f(S)}, b \mapsto \frac{b \bmod pB}{1}.$$

Es folgt

$$\text{Spec } (B/pB)_{f(S)} \subseteq \text{Spec } B/pB \subseteq \text{Spec } B.$$

Dabei erfolgt die Identifikation der linken Menge mit einer Teilmenge der mittleren vermittels der natürlichen Abbildung

$$B/pB \longrightarrow (B/pB)_{f(S)}$$

auf den Qutienten-Ring und die Identifikation der mittleren mit einer Teilmenge der rechte vermittels der natürlichen Abbildung

$$B \longrightarrow B/pB, b \mapsto b \bmod pB,$$

auf den Faktorring. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{Spec } (B/pB)_{f(S)} &= \{\overline{P} \in \text{Spec } B/pB \mid \overline{P} \cap (f(S) \bmod pB) = \emptyset\} \\ \text{Spec } B/pB &= \{ P \in \text{Spec } B \mid pB \subseteq P\} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \text{Spec } C &= \text{Spec } (B/pB)_{f(S)} \\ &= \{ P \in \text{Spec } B \mid P \cap f(S) = \emptyset \text{ und } pB \subseteq P\} \\ &= \{ P \in \text{Spec } B \mid f^{-1}(P) \cap S = \emptyset \text{ und } p \subseteq P\} \\ &= \{ P \in \text{Spec } B \mid f^{-1}(P) \subseteq p \text{ und } p \subseteq f^{-1}(P)\} \\ &= \{ P \in \text{Spec } B \mid f^{-1}(P) = p\} \\ &= {}^a f^{-1}(p) \end{aligned}$$

**QED**.
**Bemerkung**
Mit den Bezeichnungen des Beweises wird jedes Primideal P der Faser $C = B\otimes_A \kappa(p)$ identifiziert mit dem Primideal

$${}^a g(P) = g^{-1}(P)$$

von Spec B identifiziert. Umgekehrt entspricht das Primideal

$$P \in {}^a f^{-1}(p) \subseteq \text{Spec } B$$

gerade dem Primideal

$$PB_S/pB_S \in \text{Spec } C$$

der Faser.

### 3.1.5 Charakterisierung der Treuflachheit II

Seien f: A $\longrightarrow$ B ein Homomorphismus von Ringen mit 1 und N ein B-Modul. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Ist N treuflach über A, so ist ${}^a f(\text{Supp } N) = \text{Spec } A$.

(ii) Ist N ein endlich erzeugter B-Modul, so sind folgende Aussage äquivalent.
1. N ist treuflach über A.
2. N ist flach über A und ${}^a f(\text{Supp } N) \supseteq$ m-Spec A.

**Beweis**. Zu (i). Sei $p \in \text{Spec } A$. Wir haben zu zeigen,

$$p \in {}^a f(\text{Supp } N).$$

Weil N treuflach ist über A, gilt

$$N \otimes_A \kappa(p) \neq 0.$$

(nach 3.1.3(ii)). Mit

$$C := B \otimes_A \kappa(p) \text{ und } N' := N \otimes_A \kappa(p) = N \otimes_B C$$

ist der C-Modul N' von Null verschieden. Es gibt also ein $P^* \in \text{Spec } C$ mit

$$N'_{P^*} \neq 0$$

(nach 2.1.7(v))[75], Wir setzen

$$P := P^* \cap B.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} N'_{P^*} &= N \otimes_B C_{P^*} \\ &= N \otimes_B (B_P \otimes_{B_P} C_{P^*}) \quad (C_{P^*} \text{ ist ein } B_P\text{-Modul}) \\ &= N_P \otimes_{B_P} C_{P^*} \quad (\text{Definition der Quotienten-Moduln}) \end{aligned}$$

Mit $N'_{P^*} \neq 0$ gilt also auch $N_P \neq 0$, d.h.

$$P \in \text{Supp}(N).$$

Wegen

$$P^* \in \text{Spec } C = {}^a f^{-1}(p)$$

(nach 3.1.4) gilt

$$p = {}^a f(P^*) =^{76} {}^a f(P) \in {}^a f(\text{Supp } N).$$

Zu (ii). Die Implikation 1. $\Rightarrow$ 2 ist trivial auf Grund von (i). Bleibt die umgekehrte Implikation. Sei also Bedingung 2 erfüllt. Wir haben zu zeigen, N ist treuflach über A. Nach 3.1.3 reicht es zu zeigen,

$$N/mN \neq 0$$

für jedes maximale Ideal $m \subseteq A$. Nach Voraussetzung 2 gibt es ein Primideal

---

[75] Es gibt ein $n \in N$ und ein maximales Ideal P* derart, daß n in $N'_{P^*}$ von Null verschieden ist.

[76] Wir identifizieren das Faser-Element $P^* \in \text{Spec } B \otimes_A \kappa(p)$ mit dem Element $P \in \text{Spec } B$.

$$P \in \text{Spec } B \text{ mit } N_P \neq 0 \text{ und } P \cap A = m.$$

Weil N ein endlich erzeugter B-Modul ist, gilt

$$N_P/mN_P \neq 0$$

(nach dem Lemma von Nakayama 1.2.3). Es folgt

$$0 \neq N_P/mN_P = (N/mN)_P$$

also $N/mN \neq 0$.
**QED**.

### 3.1.6 Lokale Homomorphismen

Seien (A, m) und (B, n) lokale Ringe und

$$f: A \longrightarrow B$$

ein lokaler Homomorphismus, d.h. ein Homomorphismus von Ringen mit 1 mit

$$f(m) \subseteq n.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) f ist flach.
(ii) f ist treuflach.

**Beweis**. (ii) $\Rightarrow$ (i). trivial.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Nach dem Kriterium 3.1.5 (ii) reicht es zu zeigen,

$$\text{m-Spec } A \subseteq {}^a f(\text{Spec } B).$$

Wegen m-Spec A = {m} reichte es zu zeigen, es gibt ein Primideal P∈Spec B mit

$$m = f^{-1}(P).$$

Letzterer Identität besteht für P = n, denn nach Vorausetzung ist f ein lokaler Homomorphismus, d.h. $f^{-1}(n)$ ist ein Primideal von A, welches das Ideal m enthält, d.h. es gilt

$$m = f^{-1}(n).$$

**QED**.

### 3.1.7 Beispiel: Quotienten-Ringe nur im trivialen Fall treuflach

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und $S \subseteq A$ eine multiplikativer Teilmenge. Die Bild der Abbildung

$$\text{Spec } A_S \longrightarrow \text{Spec } A, \qquad (1)$$

welche von der natürlichen Abbildung

$$A \longrightarrow A_S$$

in den Quotientenring kommt, besteht aus allen Primidealen $P \in \text{Spec } A$ mit

$$P \cap S = \varnothing. \qquad (2)$$

Die Abbildung (1) ist genau dann surjektiv, wenn Bedingung (2) für alle Primideale P von A erfüllt ist, d.h. wenn keine NIcht-Einheit in S liegt, d.h. wenn S ausschließlich aus Einheiten besteht.

Der flache Homomorphismus $A \longrightarrow A_S$ ist nur dann treuflach, wenn es sich um einen Isomorphismus handelt (nach dem Kriterium 3.1.5(ii)).

### 3.1.8 Durchschnitte und Quotienten-Ideale bei flachen Erweiterungen

(i) Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M,N zwei A-Modul mit

M flach über A

und

$$N', N'' \subseteq M$$

zwei Teilmoduln. Dann gilt für die Teilmoduln in $M\otimes_A N$

$$M\otimes_A N' \cap M\otimes_A N'' = M\otimes_A (N'\cap N'').$$

(ii) Seien $f: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe mit 1 und

$$I', I'' \subseteq A$$

zwei Ideale von A. Dann gilt

$$I'B \cap I''B = (I'\cap I'')B.$$

(iii) Ist in (ii) das Ideal I" endlich erzeugt, so gilt außerdem

$$(I'B):(I''B) = (I':I'')B.$$

**Beweis**. <u>Zu (i)</u>. Wir betrachten die A-lineare Abbildung

$$\varphi: N \longrightarrow N/N' \oplus N/N'', n \mapsto (n \bmod N', n \bmod N'').$$

Ihr Kern ist gleich $N'\cap N''$, sie definiert also eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N'\cap N'' \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi} N/N' \oplus N/N''.$$

Weil M flach ist über A erhält man durch Tensorieren mit M über A eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M\otimes_A (N'\cap N'') \longrightarrow M\otimes_A N \longrightarrow M\otimes_A N/M\otimes_A N' \oplus M\otimes_A N/M\otimes_A N''$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.
<u>Zu (ii)</u>. Dies ist ein Spezialfall von (i). Man setze

$$M = B, N = A, N' = I', N'' = I''$$

und beachte, daß die Teilmoduln

$$B\otimes_A I' \text{ und } B\otimes_A I''$$

von

$$B\otimes_A A \cong B, b\otimes a \mapsto ba, \qquad (1)$$

beim Isomorphismus (1) gerade den Idealen I'B und I"B entsprechen.
<u>Zu (iii)</u>. Sei

$$I'' = x_1A + ... + x_rA.$$

Dann gilt

$$I''B = x_1B + ... + x_rB.$$

Wir erhalten

$$I':I'' = I':x_1 \cap ... \cap I':x_r$$

$$I'B:I''B = I'B:x_1 \cap ... \cap I'B:x_r$$

und mit Hilfe von (ii):

$$(I':I'')B = (I':x_1)B \cap ... \cap (I':x_r)B$$

Es reicht also zu zeigen,

$$I'B:x = (I':x)B \text{ für jedes } x \in A. \qquad (2)$$

Zum Beweis betrachten wir die A-Lineare Abbildung

$$\varphi:; A \longrightarrow A/I', a \mapsto ax \bmod I'.$$

Ihr Kern ist gleich I':x, sie definiert also die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I':x \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} A/I'$$

Wir tensorieren mit B über A und erhalten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (I':x)\otimes_A B \longrightarrow A\otimes_A B \longrightarrow A\otimes_A B/I\otimes_A B.$$

Weil $A\otimes_A B$ isomorph zu B ist, bekommt diese exakte Sequenz die Gestalt

$$0 \longrightarrow (I':x)B \longrightarrow B \longrightarrow B/IB.$$

Der Kern der Abbildung rechts ist gleich I'B:x. Es gilt also tatssächlich (2).
**QED**.

### 3.1.9 Beispiel für eine Injektion, die nicht flach ist

Seien k ein Körper, x ein Unbestimmte über k und

$$A := k[x^2, x^3]$$

der Teilring des Polynom-Rings

$$B := k[x].$$

Dann besteht A aus den Polynomen ohne Lineargleid, und

$$x^2A \cap x^3A$$

besteht aus allen Polynomen, für welche die Koeffizienten vor

$$1, x, x^2, x^3, x^4$$

gleich Null sind, d.h.

$$x^2A \cap x^3A \quad = x^5B$$

und

$$(x^2A \cap x^3A)B \quad = x^5B.$$

Auf der anderen Seite ist

$$x^2B \cap x^3B \quad = x^3B,$$

d.h. es ist

$$(x^2A \cap x^3A)B \quad \ne x^2B \cap x^3B.$$

Nach 3.1.8 (ii) kann B nicht flach sein über A.

### 3.1.10 Eigenschaften treuflacher Homomorphismen

Sei f: $A \longrightarrow B$ ein treuflach Homomorphismus kommutativer Ringe mit 1.Dann gilt:

(i) Für jeden A-Modul M ist die natürliche Abbildung

$$M \longrightarrow M\otimes_A B,\ m \mapsto m\otimes 1,$$

injektive. Insbesondere ist f selbst injektiv.

(ii) Für jedes Ideal I von A gilt

$$IB \cap A = I.$$

**Beweis**. Zu (i). Sei m ein von Null verschiedenes Element von M,

$$0 \ne m \in M.$$

Wir haben zu zeigen,
Nach 3.1.3 ist

$$mA \otimes_A B \ne 0$$

ein von Null verschiedener Teilmodul von $M\otimes_A B$. Er besteht gerade aus den Elementen der Gestalt

$$ma \otimes b = m \otimes ab = (m\otimes 1)\bullet ab$$

mit $m \in M$, $a \in A$, $b \in B$, d.h. aus den Vielfachen von $m\otimes 1$. Es gilt also

$$(m\otimes 1)B \ne 0.$$

Das ist nur möglich, wenn $m\otimes 1$ in $M\otimes_A B$ von Null verschieden ist.

Zu (ii). Nach (i) ist die Abbildung

$$A/I \longrightarrow A/I \otimes_A B,\ x \mapsto x\otimes 1, \qquad (1)$$

injektiv. Wegen

$$A/I\otimes_A B \cong B/IB,\ (a \bmod I)\otimes b \mapsto ab \bmod IB,$$

ist (1) bis auf Isomorphie gerade die Abbildung

$$A/I \longrightarrow B/IB,\ a \bmod I \mapsto a \bmod IB.$$

Deren Kern ist gleich $I/IB\cap A$. Die Injektivität von (1) bedeutet also, es gilt

$$I = IB \cap A.$$

**QED**.

**3.1.11 Flachheit und lineare Gleichungssysteme**

(i) Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein flacher A-Modul. Weiter seien $a_{ij} \in A$ und $m_j \in M$ Elemente mit

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij}m_j = 0 \text{ für } i = 1, \dots , s.$$

Dann gibt es Elemente $a'_{jk} \in A$ und $m'_k \in B$ mit

$$m_j = \sum_{k=1}^{t} a'_{jk}m'_k \text{ für } j = 1, \dots ,s \text{ und}$$

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\, a'_{jk} = 0 \text{ für } i = 1, \dots , s \text{ und } k = 1, \dots , t.$$

Mit anderen Worten, die Lösung eines linearen Gleichungssystems in M mit Koeffizienten aus A läßt sich als A-Linearkombination von Lösungen in A desselben Systems schreiben.

(ii) Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Wenn sich die Lösung $(m_1,\dots,m_s)$ einer Gleichung

$$\sum_{j=1}^{s} a_j m_j = 0$$

in M mit Koeffizienten aus A stets als A-Linearkombination von Lösungen in A schreiben läßt, so ist M flach über A.

**Beweis**. Zu (i). Seien

$$\varphi: A^s \longrightarrow A^r$$

die A-lineare Abbildung mit der r×s-Matrix $(a_{ij})$ und

$$\varphi_M: M^s \longrightarrow M^r$$

die analog für M definierte A-lineare Abbildung. Dann gilt

$$\varphi_M = \varphi\otimes_A 1,$$

wenn 1 die identische Abbildung von M bezeichnet:

$$(\varphi\otimes_A 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_s \end{pmatrix} =^{77} (\varphi\otimes_A 1)(\sum_{j=1}^{s} e_j\otimes x_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{rj} \end{pmatrix} \otimes x_j$$

$$=^{78} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{s} a_{1j}x_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{s} a_{rj}x_j \end{pmatrix}$$

Weiter sei

$$K := \mathrm{Ker}(\varphi).$$

Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} A^s \xrightarrow{\varphi} A^r$$

erhalten wir durch Tensorieren die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K\otimes M \xrightarrow{i\otimes 1} M^s \xrightarrow{\varphi_M} M^r.$$

Nach Voraussetzung ist

$$\varphi_M \begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_s \end{pmatrix} = 0.$$

Deshalb liegt $\begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_s \end{pmatrix} =^{79} \sum_{j=1}^{r} e_j\otimes m_j$ im Bild von $i\otimes 1$, d.h.es gibt ein Element von $K\otimes M$, sagen wir

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} e_j a'_{jk} \otimes m'_k$$

dessen Bild in M gerade $\begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_s \end{pmatrix}$ ist, d.h. es ist

$$m_j = \sum_{k=1}^{t} a'_{jk} m'_k.$$

---

[77] Wir identifizieren $M^S$ mit $A^S\otimes M$. Dabei bezeichne $e_j$ den j-ten Standard-Einheitsvektor von $A^S$.

[78] Wir identifizieren $A^r\otimes M$ mit $M^r$.

[79] Wir identifizieren $M^S$ mit $A^S\otimes M$.

Weil $\sum_{j=1}^{s} e_j a'_{jk}$ in K liegt, gilt

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} a'_{jk} = 0$$

für jedes i und jedes k.
Zu (ii). Der Beweis wird sich als Folgerung aus der Aussage von 3.1.14 ergeben (vgl. die dortige Bemerkung).

**QED**.
**Bemerkung**
Für meisten der noch zu beweisenden Flachheitskriterien benötigen wir die Tor-Funktoren, welche als abgeleitete Funktoren des Tensor-Produkts definiert sind. Wir erinnern deshalb zunächst an den Begriff des abgeleiteten Funktors.

### 3.1.12 Abelsche Kategorien und abgeleitete Funktoren
**Definitonen**
Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt additiv, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. Die Kategorie $\mathcal{C}$ besitzt ein Null-Objekt, d.h. ein Objekt 0 von $\mathcal{C}$ derart, daß es für jedes Objekt X von $\mathcal{C}$ genau eine Morphismus
$$0 \longrightarrow X$$
gibt (d.h. 0 ist initiales Objekt) und genau einen Morphismus
$$X \longrightarrow 0$$
(d.h. 0 ist terminales Objekt).
2. In der Kategorie gibt es für je zwei Objekte X, Y deren Produkt[80]
$$X \times Y$$
und deren Koprodukt[81]
$$X \oplus Y.$$
3. Für je zwei Objekte X und Y von $\mathcal{C}$ besitzt die Hom-Menge
$$\mathrm{Hom}(X, Y)$$
die Struktur einer abelschen Gruppe, und zwar derart, daß für je drei Objekte X, Y, Z von $\mathcal{C}$ die Morphismen-Komposition
$$\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, Z), (f, g) \mapsto g\circ f,$$
eine bi-additive Abbildung ist.

**Bemerkung**
(i) Produkt und Koprodukt sind dann in natürlicher Weise isomorph.[82]
(ii) Aus Bedingung 3 ergibt sich, daß das neutrale Element von Hom(X, Y) gerade der eindeutig bestimmt Morphismus $X \longrightarrow Y$ ist, der sich über das 0-Objekt faktoriesiert.[83]

---

[80] d.h. ein Objekt X×Y zusammen mit zwei Morphismen $p_1: X\times Y \longrightarrow X$ und $p_2: X\times Y \longrightarrow Y$, welche Projektionen des Produkts heißen, so daß für jedes Objekt Z die Abbildung
$$\mathrm{Hom}(Z, X\times Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z, X) \times \mathrm{Hom}(Z,Y), f \mapsto (p_1\circ f, p_2\circ f),$$
bijektiv ist.
[81] d.h. ein Objekt X⊕Y zusammen mit zwei Morphismen $q_1:X \longrightarrow X\oplus Y$ und $q_2: Y \longrightarrow X\oplus Y$, welche Einbettungen des Koprodukts heißen, so daß für jedes Objekt Z die Abbildung
$$\mathrm{Hom}(X\oplus Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Z) \times \mathrm{Hom}(Y, Z), f \mapsto (f\circ q_1, f\circ q_2),$$
bijektiv ist.
[82] siehe zum Beispiel Bass [1].

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt abelsche Kategorie, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.
1. $\mathcal{C}$ ist eine additive Kategorie.
2. Jeder Morphismus von $\mathcal{C}$ besitzt einen Kern und einen Kokern (also auch ein Bild und ein Kobild).
3. Für jeden Morphismus f: X $\longrightarrow$ Y ist der natürliche Morphismus

$$\mathrm{Koim}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$$

ein Isomorphismus.

**Bemerkungen**

(i) Der Morphismus Koim(f) $\longrightarrow$ Im(f) läßt sich genauer wie folgt beschreiben.

Dazu beachte man zunächst, daß Kerne stets Monomorphismen sind (auf Grund der Eindeutigkeitsaussage ihrer Universalitätseigenschaft). Dadurch erhält das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Koke}(f) \\ & \mathrm{Koim}(f) \arrow[r, "\zeta"] \arrow[ur, "\varepsilon"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\alpha$ der Kern von f, $\beta$ der Kokern von f, $\gamma$ der Koker von $\alpha$ und $\delta$ der Kern von $\beta$,

$\gamma$ := Koker($\alpha$)
$\delta$ := Ker($\beta$)

Wegen $f\circ\alpha = 0$ faktorisiert sich f über den Kokern von $\alpha$, d.h. über $\gamma$. Auf diese Weise erhält man den Morphismus $\varepsilon$, der das obere Dreieck kommutativ macht. Es gilt also

$$\beta\circ\varepsilon\circ\gamma = \beta\circ f = 0$$

(nach Definitoin von $\beta$ als Kokern von f). Weiter ist $\gamma$ (als Kokern von $\alpha$) ein Epimorphismus. Deshalb gilt sogar

$$\beta\circ\varepsilon = 0.$$

Wegen der Universaltiätseigenschaft von $\delta$ (als Kern von $\beta$) faktoriesiert sich $\varepsilon$ über $\delta$. Wir erhalten so den Morphismus $\zeta$ , welcher durch die Kommutativität des Vierecks sogar eindeutig festgelegt ist.

(ii) Morphismen in abelschen Kategorien, die gleichzeitig Monomorphismen und Epimorphismen sind, sind Isomorphismen.

Ist nämlich f in (i) monomorph und epimorph, so sind $\alpha$ und $\beta$ trivial (d.h. Ker(f) und Koker(f) sind 0-Objekte). Für $\gamma$ und $\delta$ kann man deshalb die identischen Morphismen wählen. Dann ist aber f = $\zeta$, d.h. f ist ein Isomorphismus.

## Definitionen

Sei F: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein Funtor von abelschen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$. Ein solcher Funktor heißt additiv, wenn für je zwei Objekte X und Y von $\mathcal{C}$ die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X), F(Y)),\ f \mapsto F(f),$$

ein Gruppen-Homomorphismus ist. Ein additiver Funktor heißt exakt, wenn er exakte Sequenzen in exakte Sequenze überführt. Er heißt linksexakt, wenn für jede kurze exakte Sequenz

---

[83] Hom(0,Y) enthält genau ein Element 0 $\longrightarrow$ Y, dieses ist das neutrale Element der Gruppe Hom(0,Y). Die Komposition mit X $\longrightarrow$ 0 ist ein Gruppen-Homomorphismus (nach Bedingung 3), überführt also das neutrale Element ins neutrale Element.

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X' \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{C}$ die zugehörige Sequenz

$$0 \longrightarrow F(X') \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(X')$$

exakt ist. Analog heißt er rechtsexakt, wenn für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X' \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{C}$ die zugehörige Sequenz

$$F(X') \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(X') \longrightarrow 0$$

exakt ist.

**Beispiele**

1. Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge. Dann ist der Funktor
$$S^{-1}: A\text{-Mod} \longrightarrow S^{-1}A\text{ - Mod}, M \mapsto S^{-1}M,$$
auf der Kategorie der linken A-Moduln mit Werten in der Kategorie der linken $S^{-1}A$-Moduln exakt.
2. Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie. Dann sind für jedes Objekt X von $\mathcal{C}$ die Funktoren
$$\mathrm{Hom}(X, ?): \mathcal{C} \longrightarrow Ab, Y \mapsto \mathrm{Hom}(X,Y),$$
$$\mathrm{Hom}(?, X): \mathcal{C}^0 \longrightarrow Ab, Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, X)$$
linksexakt.
3. Sei A ein nicht notwendig kommutativer Ring mit 1. Dann ist für jeden rechten A-Modul N der Funktor
$$\otimes_A N: A\text{-Mod} \longrightarrow Ab, M \mapsto M\otimes_A N,$$
auf der Kategorie der linken A-Moduln rechtsexakt, und für jeden linken A-Modul M ist der Funktor
$$M\otimes_A: \text{Mod-}A \longrightarrow Ab, N \mapsto M\otimes_A N$$
auf der Kategorie der rechten A-Moduln ebenfalls rechtsexakt.

**Definitonen**

Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie. Ein Objekt X von $\mathcal{C}$ heißt <u>projektiv</u>, wenn der Funktor

$$\mathrm{Hom}(X, ?): \mathcal{C} \longrightarrow Ab, Y \mapsto \mathrm{Hom}(X,Y),$$

auf $\mathcal{C}$ mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen exakt ist. Das Objekt X heißt <u>injektiv</u>, wenn der Funktor

$$\mathrm{Hom}(?, X): \mathcal{C}^0 \longrightarrow Ab, Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, X)$$

exakt ist.

Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie. Man sagt $\mathcal{C}$ <u>besitzt genügend viele injektive Objekte</u>, wenn jedes Objekt ein Teilobjekt eines injektiven Objekts ist, d.h. für jedes Objekt X von $\mathcal{C}$ gibt es einen Monomorphismus

$$f: X \longrightarrow I,$$

dessen Zielobjekt I injektiv ist. Man sagt $\mathcal{C}$ <u>besitzt genügend viele projektive Objekte</u>, wenn jedes Objekt ein Faktorobjekt eines projektiven Objekts ist, d.h.für jedes Objekt X von $\mathcal{C}$ gibt es einen Epimorphismus

$$f: P \longrightarrow X,$$

dessen Quellobjekt P ein projektives Objekt ist.

**Beispiele**

1. Ein Objekt von A-Mod ist genau dann projektiv, wenn es ein direkter Summand eines freien A-Moduls ist. Insbesondere sind freie A-Moduln projektiv.[84]
2. Ein linker A-Modul I ist genau dann injektiv, wenn es für jedes linke Ideal $J \subseteq A$ und jede A-lineare Abbildung $f: J \longrightarrow I$ ein Element $g \in I$ gibt mit $f(a) = xg$ für jedes $x \in J$. Zum Beispiel sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektive $\mathbb{Z}$-Moduln.[85]
3. Die Kategorie A-Mod besitzt sowohl genügt viele injektive als auch genügend viele projektive Objekte.[86]

**Definitionen**

Sei $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein linksexaker Funktor zwischen abelschen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$. Die <u>rechtsabgeleiteten Funktoren</u> von F bilden eine Folge von additiven Funktoren

$$R^iF: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}\ ,\ i = 0, 1, 2\ , ...$$

mit folgenden Eigenschaften.

(i) $R^0F \cong F$.

(ii) Für jede kurze exakte Sequenz in $\mathcal{C}$,

$$E: 0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$$

gibt es funktorielle Morphismen $\delta^i$: $R^iF(X'') \longrightarrow R^{i+1}F(X')$ derart, daß die folgende Sequenz exakt ist.

$$... \longrightarrow R^iF(X') \longrightarrow R^iF(X) \longrightarrow R^iF(X'') \xrightarrow{\delta^i} F^{i+1}F(X') \longrightarrow ...$$

(iii) Für jeden Morphismus von kurzen exakten Sequenzen, d.h.für jedes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & 0 \\ & & f'\downarrow & & f\downarrow & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen sind die folgenden Diagramme kommutativ

$$\begin{array}{ccc} R^iF(X'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(X') \\ R^iF(f'')\downarrow & & \downarrow R^{i+1}F(f') \\ R^iF(Y'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(Y') \end{array}$$

für i = 0, 1, .... Mit anderen Worten die lange exakte Sequenz von (ii) hängt funktoriell von der kurzen exakten Sequenz E ab.

(iv) Für jedes $i > 0$ und jedes injektive Objekt I von $\mathcal{C}$ gilt

$$R^iF(I) = 0.$$

**Bemerkungen**

---

[84] Seien P ein projektives Objekt und $F \twoheadrightarrow P$ eine Surjektion mit F frei. Dann faktorisiert sich der identische Morphismus $P \longrightarrow P$ über F, d.h. P ist ein direkter Summand von F.

[85] Man beachte, $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptideal-Ring.

[86] Das erste ist tivial. Das zweite zeigt man am besten indem man den Begriff des erzeugenden Objekts einer Kategorie einführt und zeigt,
1. A ist ein Erzeuger von A-Mod ist.
2. Eine Kategorie mit Erzeuger besitzt genügent viele injektive Objekte.
vgl Grothendieck [1]. Einen direkten Beweis für die Existenz genügend vieler injektiver Objekte findet man im Buch von Cartan und Eilenberg [1].

(i) Sei F: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein rechtsexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$. Dann kann man F als linksexakten Funktor

$$F^0: \mathcal{C}^0 \longrightarrow \mathcal{D}^0$$

auffassen. Die zu den so aufgefaßten Funktor $F^0$ gehörigen rechtsabgeleitenen Funktoren heißen linksabgeleitete Funktoren von F und werden mit $L_iF$ bezeichnet.

(ii) Sei F: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein linksexakter Funktor und besitze $\mathcal{C}$ genügend viele injektive Objekte. Für jedes Objekt X von $\mathcal{C}$ können wir dann einen Monomorphismus

$$f: X \longrightarrow I$$

mit I injektiv finden und die zugehörige exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} I \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

betrachten (wobei $I \longrightarrow Y$ gerade der Kokern von f ist). Dazu gehören exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(I) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow R^1F(X) \longrightarrow R^1F(I)$$

und

$$R^iF(I) \longrightarrow R^iF(Y) \longrightarrow R^{i+1}F(X) \longrightarrow R^{i+1}F(I).$$

Weil die höheren abgeleiteten Funktoren nach Bedingung (iv) der Definiton für injektive Objekte triviale Werte annehmen, bekommen diese exakten Sequenzen die Gestalt

$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(I) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow R^1F(X) \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow R^iF(Y) \longrightarrow R^{i+1}F(X) \longrightarrow 0,$$

d.h. man hat wohldefiniert Isomorphismen

$$R^1F(X) \cong \mathrm{Koker}(F(I) \longrightarrow F(Y)) \cong \mathrm{Koker}(F(\mathrm{Koker}(f)))$$

und

$$R^{i+1}F(X) \cong R^iF(Y) \cong R^iF(\mathrm{Koker}(f)).$$

Man erhält damit Iterationsformeln mit denen man die Werte der abgeleiteten Funktoren, falls sie existieren, für vorgegebene Objekte berechnen kann.
Führt man die Iteration explizit aus, so erhält man folgende Rechenvorschrift für den i-ten abgeleiteten Funktor.

(iii) Sei F: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein linksexakter Funktor und besitze $\mathcal{C}$ genügend viele injektive Objekte. Für jedes Objekt X von $\mathcal{C}$ gibt es dann eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \ldots \qquad (2)$$

deren Objekte (mit eventueller Ausnahme von X) injektiv sind[87]. Durch Anwenden von F erhält man einen Komplex

---

[87] Die obige Sequenz (1) bildet den Anfang eines solchen Komplexes (mit $I^0 = I$). Das nächst Glied bekommt man, indem man einen Monomorphismus

$$Y \longrightarrow I^1$$

wählt und die zugehörige exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow I^1 \longrightarrow Y^1 \longrightarrow 0$$

betrachtet. Durch Zusammensetzen mit (1) erhält man eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow Y^1 \longrightarrow 0.$$

$$0 \longrightarrow F(I^0) \longrightarrow F(I^1) \longrightarrow F(I^2) \longrightarrow ...$$

Die Kohomologie dieses Komplexes an der n-ten Stelle ist dann kanonisch isomorph zu $R^nF(X)$,

$$R^nF(X) \cong H^n(F(I^*)).$$

Exakte Sequenzen der Gestalt (2) heißen <u>injektive Auflösungen</u> von X.

**Satz**

(i) Für jeden linksexakten Funktor

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

abelscher Kategorien existieren dessen rechtsabgeleiteten Funktoren, falls $\mathcal{C}$ genügend viele injektive Objekte besitzt.

(ii) Für jeden rechtsexakten Funktor

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

abelscher Kategorien existieren dessen linksabgeleiteten Funktoren, falls $\mathcal{C}$ genügend viele projektive Objekte besitzt.

### 3.1.13 Tor und Ext-Funktoren

Die Modul-Kategorien über einem (nicht notwendig kommutativen) Ring A mit 1 besitzt genügend viele injektive Objekte. Also existieren die linksabgeleitenten Funktoren

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, ?) := L_i(M\otimes_A ?): \text{Mod-A} \longrightarrow \text{Ab}$$

$$\mathrm{Tor}_i^A(?, N) := L_i(?\otimes_A N): \text{A-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$$

für jeden linken A-Modul M und jeden rechten A-Modul N. Aus der Bezeichnungsweise

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$$

ist nicht ersichtlich, ob es sich um den abgeleiten Funktor von $M\otimes_A ?$ oder von $?\otimes_A N$ handelt. Das hat den Grund, daß diese beiden Funktoren kanonisch isomorph sind. Sie werden deshalb als derselbe Funktor angesehen.

Analog existieren die rechtsabgeleiteten Funktoren

$$\mathrm{Ext}_A^i(M, ?) := R^i(\mathrm{Hom}_A(M,?)): \text{A-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$$

$$\mathrm{Ext}_A^i(?, N) := R^i(\mathrm{Hom}_A(?,N)): (\text{A-Mod})^0 \longrightarrow \text{Ab}$$

für beliebige linke A-Moduln M und N. Wieder läßt sich an der Bezeichnung

$$\mathrm{Ext}_A^i(M,N)$$

nicht erkennen, um welchen der beiden Funktoren es sich handelt. Das hat denselben Grund. Man geht deshalb in derselben Weise vor.

### 3.1.14 Flachheit und das Tensorprodukt mit Idealen

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) M ist A-flach.

(ii) Für jedes Ideal $I \subseteq A$ ist die natürliche Abbildung

$$I\otimes_A M \longrightarrow IM, a\otimes m \mapsto am,$$

ein Isomorphismus.

---

die weiteren Glieder Sequenz erhält man, indem man $Y^1$ in ein injektives Objekt einbettet und in derselben Weise wie bisher fortfährt.

(iii) Für jedes endlich erzeugte Ideal $I \subseteq A$ ist die natürliche Abbildung

$$I \otimes_A M \longrightarrow IM,\ a \otimes m \mapsto am,$$

ein Isomorphismus.

**Beweis**. (i) ⇒ (ii). Weil M flach ist über A, erhält man aus der natürlichen Inklusion

$$I \hookrightarrow A$$

durch Tensorieren die injektive A-lineare Abbildung

$$I \otimes_A M \rightarrowtail A \otimes_A M \cong M,\ a \otimes m \mapsto a \otimes m \mapsto am.$$

Das Bild dieser Abbildung ist gerade IM. Also ist die Abbildung von (ii) ein Isomorphismus.

(ii) ⇒ (iii). trivial.

(iii) ⇒ (ii). Wir haben zu zeigen, für jedes Ideal $I \subseteq A$ ist die Abbildung

$$I \otimes_A M \xrightarrow{\varphi} A \otimes_A M,\ a \otimes m \mapsto a \otimes m,$$

injektiv. Angenommen, sie ist es nicht. Dann gibt es Elemente

$$a_1, \dots, a_n \in I \text{ und } m_1, \dots, m_n \in M$$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes m_i \neq 0 \text{ in } I \otimes_A M \text{ und } \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes m_i = 0 \text{ in } M.$$

Sei $I' := a_1 A + \dots + a_n A$. Die Inklusionen $I' \hookrightarrow I \hookrightarrow$ induzieren dann A-lineare Abbildungen

$$I' \otimes_A M \xrightarrow{\varphi'} I \otimes_A M \xrightarrow{\varphi} A \otimes_A M,\ a \otimes m \mapsto a \otimes m \mapsto a \otimes m,$$

Sei $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes m_i$ das Element von $I' \otimes_A M$. Dann gilt

$$\varphi'(\alpha) \neq 0 \text{ und } \varphi(\varphi'(\alpha)) = 0.$$

Insbesondere ist $\alpha \in I' \otimes_A M$ von Null verschieden und das Bild von $\alpha$ in $A \otimes_A M$ gleich Null. Das widerspricht jedoch der Voraussetzung (iii).

(ii) ⇒ (i). Seien N ein A-Modul und $N' \subseteq N$ ein Teilmodul. Wir haben zu zeigen, die natürliche Inklusion

$$N' \hookrightarrow N$$

induziert eine injektive A-lineare Abbildung

$$N' \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M,\ n \otimes m \mapsto n \otimes m. \tag{1}$$

1. Schritt. Reduktion auf den Fall, daß N/N' endlich erzeugt ist.
Angenommen, die Behauptung ist richtig für alle Paare (N, N') mit N/N' endlich erzeugt.

Seien $N' \hookrightarrow N$ ein beliebiges Paar und seien

$$n_1, \dots, n_r \in N' \text{ und } m_1, \dots, m_r \in M$$

mit der Eigenschaft, daß die Summe

$$\sum_{i=1}^{r} n_i \otimes m_i$$

in $N \otimes_A M$ gleich Null ist. Wir haben zu zeigen, sie ist dann auch Null in $N' \otimes_A M$.

Dazu denken wir uns

$$N\otimes_A M = F(N\times M)/R$$

als Faktormodul des Moduls $F(N\times M)$ mit dem freien Erzeugendensystem $N\times M$ geschrieben nach dem Teilmodul R, der durch die Relationen der Bilinearität erzeugt wird:

$$(an, m) - (n, am) \qquad \text{mit } a\in A, n\in N, m\in M$$

$$(n'+n'', m) - (n', m) - (n'', m) \qquad \text{mit } n', n'' \in N, m \in M$$

(2)

$$(n, m'+m'') - (n, m') - (n, m'') \qquad \text{mit } n\in N, m', m'' \in M$$

Dann liegt

$$\sum_{i=1}^{r} (n_i, m_i) \tag{3}$$

im Teilmodul R, d.h. ist A-Linearkombination von endlich vielen der Elemente (2). Sei

$$N'' := N' + Ax_1 + ... + Ax_r$$

Dabei seien die $x_i$ sämtliche Elemente aus N, welche in dieser Darstellung von (3) als Linearkombination von Elementen der Gestalt (2) vorkommen. Dann gilt bereits

$$\sum_{i=1}^{r} n_i\otimes m_i = 0 \text{ in } N''\otimes_A M$$

Nun ist aber $N''/N'$ endlich erzeugt. Da für diesen Fall die Behauptung als richtig angenommen wurde, folgt $\sum_{i=1}^{r} n_i\otimes m_i = 0$ in $N'\otimes_A M$.

<u>2. Schritt</u>: Reduktion auf den Fall, daß $N/N'$ einfach erzeugt ist.
Auf Grund des ersten Schritts können wir annehmen, es gilt

$$N := N' + Ax_1 + ... + Ax_r$$

mit endlich vielen $x_i \in N$. Wir setzen

$$N_i := N' + Ax_1 + ... + Ax_i.$$

Die Inklusionen

$$N' = N_0 \hookrightarrow N_1 \hookrightarrow ... \hookrightarrow N_r = N$$

induzieren dann A-lineare Abbildungen

$$N'\otimes_A M = N_0\otimes_A M \longrightarrow N_1\otimes_A M \longrightarrow ... \longrightarrow N_r\otimes_A M = N\otimes_A M$$

Wir haben zu zeigen, die Zusammensetzung dieser Abbildungen ist injektiv. Dazu reicht es aber zu zeigen, je einzelne von ihnen ist injektiv. Wir können also o.B.d. A. annehmen, N hat die Gestalt

$$N = N' + xA.$$

<u>3. Schritt</u>. Der Fall $N = N' + xA$.
Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N/N' \longrightarrow 0.$$

Wir wenden den Funktor $\otimes_A M$ an und erhalten die exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_1^A(N/N', M) \longrightarrow N'\otimes_A M \longrightarrow N\otimes_A M \longrightarrow (N/N')\otimes_A M \longrightarrow 0.$$

Es reicht also zu zeigen,

$$\mathrm{Tor}_1^A(N/N', M) = 0.$$

Wegen $N = N' + xA$ ist die Abbildung

$$A \longrightarrow N/N', a \mapsto ax \bmod N',$$

surjektiv. Bezeichnet I den Kern dieser Abbildung, so gilt $N/N' \cong A/I$. Es reicht also zu zeigen,

$$\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$$

für jedes Ideal I. Dazu betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0.$$

Wir wenden den Funktor $\otimes_A M$ an und erhalten die exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_1^A(A, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) \longrightarrow I\otimes_A M \longrightarrow A\otimes_A M$$

Nach Voraussetzung (ii) ist die Abbildung ganz links injektiv. Die Abbildung links daneben ist somit die Null-Abbildung. Deshalb muß die Abbildung rechts surjektiv sein,

$$\mathrm{Tor}_1^A(A, M) \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(A/I, M).$$

Nun ist aber A als freier A-Modul projektiv. Deshalb gilt $\mathrm{Tor}_1^A(A, M)$. Dann muß aber auch

$$\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$$

gelten.
**QED**.
**Bemerkung**
Mit Hilfe der gerade bewiesenen Aussage können wir die bisher noch nicht bewiesene Teilaussage (ii) von 3.1.11 bewiesen. Sei die Bedingung dieser Teilaussage für den kommutativen Ring A und den A-Modul M erfüllt, und sei $I \subseteq A$ ein Ideal von A. Ein Element aus dem Kern der natürlichen Abbildung

$$I\otimes_A M \longrightarrow A\otimes_A M \cong M \tag{4}$$

ist ein Element der Gestalt

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \otimes m_i \text{ mit } a_i \in I, m_i \in M \text{ und } \sum_{i=1}^{r} a_i m_i = 0.$$

nach Voraussetzung von 3.1.11(ii) gilt dann

$$m_i = \sum_{j=1}^{s} a'_{ij} m'_j \text{ für } i = 1, \dots, r$$

mit Elementen $a'_{ij} \in A$ und $m'_j \in M$, wobei gilt

$$\sum_{i=1}^{r} a_i a'_{ij} = 0.$$

Dann gilt aber in $I\otimes_A M$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r} a_i \otimes m_i &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_i \otimes a'_{ij} m'_j \\ &= \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{r} a_i a'_{ij}\right) \otimes m'_j \\ &= \sum_{j=1}^{s} 0 \otimes m'_j \\ &= 0\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, die Abbildung (4) ist injektiv für jedes Ideal $I \subseteq A$. Nach 3.1.14 ist M flach über A.
**QED**.

**3.1.15 Ein Tor-Kriterium der Flachheit**
Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivlent.
(i) M ist A-flach.
(ii) $\mathrm{Tor}_i^A(M,N) = 0$ für jeden A-Modul N und jedes $i > 0$.
(iii) $\mathrm{Tor}_1^A(M,A/I) = 0$ für jedes Ideal $I \subseteq A$.

**Beweis**. <u>(i) ⇒ (ii)</u>. Sei eine projektive Auflösung

$$\dots \longrightarrow P_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

von N gegeben, d.h. eine exakte Sequenz von A-Moduln, wobei alle $P_i$ projektiv sind.
Anwenden des Funktors $M\otimes_A$ liefert, weil M flach ist über A, eine exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow M\otimes_A P_i \longrightarrow M\otimes_A P_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow M\otimes_A P_0 \longrightarrow M\otimes_A N \longrightarrow 0$$

Also gilt

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N) = H_i(M\otimes_A P_*) = 0.$$

<u>(ii) ⇒ (iii)</u>. trivial.

<u>(iii) ⇒ (i)</u>. Für jedes Ideal $I \subseteq A$ liefert die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) \longrightarrow M\otimes_A I \longrightarrow M\otimes_A A$$

Nach Voraussetzung (iii) ist der Tor-Modul links gleich Null. Also ist die Abbildung links für jedes Ideal $I \subseteq A$ injektiv. Nach 3.1.14 ist dann aber M flach über A.
**QED**.

**3.1.16 Flachheit und kurze exakte Sequenzen**
Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Falls M' und M" flach sind über A, so gilt dasselbe auch für M.

**Beweis**. Für jeden A-Modul N ist die Sequenz

$$\mathrm{Tor}_1^A(M',N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M'',N)$$

exakt. Falls M' und M" flach sind, so sind die beiden äußeren Tor-Moduln gleich Null. Deshalb gilt dasselbe auch für den mittleren Tor-Modul (und jedes N). Nach 3.1.15(iii) (mit $N = A/I$) ist M flach über A.
**QED**.
**Bemerkung**
Für jeden kommutiven Ring A mit sind die freien A-Moduln F offensichtlich treuflach.
Für jedes Sequenz S von A-Moduln ist dann nämlich

$$S\otimes_A F$$

eine direkte Summe von Kopien von S (d.h. S ist genau dann exakt, wenn $S\otimes_A F$ es ist).
Die nachfolgende Aussage zeigt, daß für endlich erzeugte A-Moduln umgekehrt aus der Flachheit über A die Freiheit folgt, sodaß in dieser Situation die Begriffe 'flach', 'treuflach' und 'frei' zusammenfallen.

### 3.1.17 Flachheit und lineare Unabhängigkeit im lokalen Fall

Seien (A, m) ein lokaler Ring und M ein flacher A-Modul. Weiter seinen

$$m_1, \dots , m_r \in M \qquad (1)$$

Elemente, deren Restklassen in M/mM,

$$\overline{m}_1, \dots , \overline{m}_r \in M/mM$$

linear unabhängig über A/m sind. Dann sind die Elemente (1) linear unabhängig über A.

Ist insbesondere M endlich erzeugt über A oder m nilpotent, so ist jedes minimale Erzeugendensystem von M über A sogar linear unabhängig, d.h. M ist frei über A.[88]
**Beweis**. Wir führen den Beweis durch Induktion nach r.
1. Fall. r = 1.
Sei $a \in A$ ein Element mit

$$a\bullet m_1 = 0.$$

Nach 3.1.11 (Flachheit und lineare Gleichungssysteme) gilt

$$m_1 = \sum_{j=1}^{s} a'_j m'_j \text{ mit } a'_j \in A \text{ und } m'_j \in M,$$

wobei außerdem noch

$$aa'_j = 0$$

gilt für jedes j. Nach Voraussetzung ist die Restklasse von $m_1$ in M/mM von Null verschieden, d.h. es ist $m_1 \notin mM$. Dann können aber nicht alle $a'_j$ in m liegen, d.h. mindestens eines von ihnen ist eine Einheit in A. Dann muß aber a = 0 gelten.
2. Fall: r beliebig.
Seien $a_1, \dots , a_r$ Elemente mit

$$\sum_{i=1}^{r} a_i m_i = 0. \qquad (2)$$

Wieder nach 3.1.11 gilt

$$m_i = \sum_{j=1}^{s} a'_{ij} m'_j \text{ mit } a'_{ij} \in A \text{ und } m'_j \in M,$$

wobei außerdem noch

$$\sum_{i=1}^{r} a_i a'_{ij} = 0.$$

gilt für jedes j. Nach Voraussetzung liegt $m_r$ nicht in mM. Deshalb muß eines der $a'_{rj}$ in A-m liegen, also eine Einheit sein. Deshalb ist $a_r$ eine A-Linearkombination der übrigen $a_i$, sagen wir

$$a_r = \sum_{i=1}^{r-1} a_i a'_i .$$

[88] Nach dem Lemma von Nakayama.

Durch Einsetzen in (2) erhalten wir

$$a_1(m_1+a'_1m_r) + ... + a_{r-1}(m_{r-1} +a'_{r-1}m_r) = 0.$$

Die Restklassen in M/mM der r-1 Elemente

$$m_1+a'_1m_r , ... , m_{r-1} +a'_{r-1}m_r$$

sind aber lineare unabhängig über A/m.Nach Induktionsvoraussetzung sind die Elemente selbst linear unabhängig über A. Also gilt

$$a_1 = ... = a_{r-1} = 0.$$

Dann ist aber auch $a_r = 0$.

**QED**.

### 3.1.18 Flachheit und der Hom-Funktor

Seien

$$f: A \longrightarrow B$$

ein flacher Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1 und

$$M, N$$

zwei A-Moduln. Ist M außerdem von endlicher Darstellung, so ist die natürliche A-lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_A(M, N)_A B \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(M\otimes_A B, N\otimes_A B), f\otimes b \mapsto (m\otimes b' \mapsto f(m)\otimes bb'),$$

ein Isomorphismus.

**Beweis**. Wir fixieren N und B und betrachten die beiden Funktoren

$$F, G: A\text{-Mod}^0 \longrightarrow A\text{-Mod}$$

mit

$$F(M) := \mathrm{Hom}_A(M, N)_A B$$
$$G(M) := \mathrm{Hom}_B(M\otimes_A B, N\otimes_A B)$$

Weil B flach ist über A, sind diese Funktoren linksexakt.

Die in der Behauptung beschriebene Abbildung definiert eine natürliche Transformation

$$\lambda: F \longrightarrow G.$$

Weil M von endlicher Darstellung ist, besteht eine exakte Sequenz

$$A^r \longrightarrow A^s \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Durch Anwenden von F und G erhalten wir ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
0\longrightarrow & F(M) & \longrightarrow & F(A^s) & \longrightarrow & F(A^r) \\
& \lambda\downarrow & & \lambda\downarrow & & \lambda\downarrow \\
0\longrightarrow & G(M) & \longrightarrow & G(A^s) & \longrightarrow & G(A^r)
\end{array}$$

Nun gilt $F(A^r) \cong N^r\otimes_A B$ und $G(A^r) \cong (N\otimes_A B)^r$, d.h. die vertikale Abbildung rechts ist ein Isomorphismus. Analog ist auch die vertikale Abbildung in der Mitte ein Isomorphismus. Deshalb dasselbe auch für die vertikale Abbildung links.

**QED**.

### 3.1.19 Hom und $S^{-1}$ kommutieren

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, $S \subseteq A$ ein multiplikative Menge und M, N zwei A-Moduln, wobei M von endlicher Darstellung sei. Dann gilt

$$\mathrm{Hom}_A (M, N)\otimes_A A_S \cong \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N_S).$$

**Beweis**. Dies ist der Spezialfall $B = A_S$ von 3.1.18.
**QED**.

### 3.1.20 Projektivitätskriterium für Moduln endlicher Darstellung

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul endlicher Darstellung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) M ist projektiv über A.
(ii) $M_m$ ist $A_m$-frei für jedes maximalen Ideal $m \subseteq A$.

**Beweis**. (i) ⇒ (ii). Als projektiver A-Modul ist M ein direkter Summand eines freien A-Moduls F, sagen wir

$$F \cong M \oplus M'.$$

Durch Anwenden des Funktors $\otimes_A A_m$ erhalten wir

$$F_m \cong M_m \oplus M'_m.$$

Dabei ist $F_m$ ein freier $A_m$-Modul. Der $A_m$-Modul $M_m$ ist direkter Summand eines freien Moduls, also projektiv. Über lokalen Ringen sind aber projektive Moduln sogar frei (vgl. 1.2.6).

(ii) ⇒ (i). Sei

$$N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0 \tag{1}$$

eine exakte Sequenz von A-Moduln. Wir wenden den Funktor $\mathrm{Hom}_A(M, ?)$ und betrachten die zugehörige Sequenz

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N'') \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Wir haben zu zeigen, diese ist exakt. Bezeichne C den Kokern der Abbildung links, so daß wir eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N'') \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

erhalten. Wir wenden den Funktor $\otimes_A A_m$ an und erhalten, weil M von endlicher Darstellung ist, eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_{A_m}(M_m,N_m) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A_m}(M_m, N''_m) \longrightarrow C_m \longrightarrow 0 \tag{3}$$

(vgl. 3.1.19). Weil nach Voraussetzung $M_m$ frei sein soll über $A_m$ (also $A_m$-flach ist), folgt aus der Exaktheit der Sequenz (1) die Surjektivität der linken Abbildung von (3). Deshalb gilt

$$C_m = 0$$

für jedes maximale Ideal m von A. Nach 2.1.7 (v) folgt C = 0. Also ist die Sequenz (2) exakt.
**QED**.

### 3.1.21 Freiheit projektiver Moduln von endlicher Darstellung

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul von endlicher Darstellung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) M ist projektiv über A.
(ii) M ist frei über A.

**Beweis**. (ii) ⇒ (i). trivial.

(i) ⇒ (ii). Nach 3.1.20 ist $M_m$ flach über $A_m$ für jedes maximale Ideal m von A. Dann ist aber auch M flach über A (nach 3.1.2 mit B = A).
**QED**.

### 3.1.22 Aufgaben

### Anhang: reine Teilmoduln (pure submoduls)

## *3.2 Vervollständigungen und das Lemma von Artin-Rees*

### 3.2.1 Die linearen Topologien eines Moduls

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Weiter sei

$$\mathcal{F} = \{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$

eine Familie von A-Teilmoduln von M,

$$M_\lambda \subseteq M,$$

mit einer gerichteten[89] Index-Menge $\Lambda$. Für je zwei $\lambda, \mu \in \Lambda$ gelte

$$M_\lambda \supseteq M_\mu \text{ falls } \lambda \le \mu.$$

Dann können wir M mit einer Topologie versehen, für welche die Mengen $M_\lambda$ eine Umgebebungsbasis von $0 \in M$ bilden. Die offenen Mengen dieser Topologie sind gerade Vereinigungen von Mengen der Gestalt[90]

$$m + M_\lambda \text{ mit } m \in M \text{ und } \lambda\in\Lambda.$$

Für jedes feste $m \in M$ bilden die Mengen der Gestalt $m + M_\lambda$ mit $\lambda\in\Lambda$ eine Umgebungsbasis von m (d.h. jede offene Umgebung von m enthält eine Menge dieser Gestalt). Die so definierte Topologie heißt die durch $\mathcal{F}$ definierte lineare Topologie von M.

**Bemerkungen**

(i) Bezüglich der durch $\mathcal{F}$ definieten linearen Topologie von M ist die additive Gruppe von M eine topologische Gruppe, d.h. die Abbildungen

$$s: M \times M \longrightarrow M, (m', m'') \mapsto m'+m'',$$

---

[89] d.h. $\Lambda$ ist eine Menge mit einer Halbordnung "≤" und für je zwei Elemente $\alpha, \beta \in \Lambda$ gibt es ein Element $\gamma\in\Lambda$ mit $\alpha \le \gamma$ und $\beta \le \gamma$.

[90] Man beachte, für je zwei $m', m'' \in M$ und je zwei $\lambda', \lambda''\in\Lambda$ und

$$m \in (m' + M_{\lambda'}) \cap (m'' + M_{\lambda''})$$

gilt

$$m = m' + x' = m'' + x''$$

mit $x'\in M_{\lambda'}$ und $x''\in M_{\lambda''}$. Sei $\lambda\in\Lambda$ derart, daß gilt $\lambda'\le\lambda$ und $\lambda''\le\lambda$, also

$$M_\lambda \subseteq M_{\lambda'} \cap M_{\lambda''}).$$

Dann gilt

$$m + M_\lambda \subseteq m' + x' + M_{\lambda'} = m' + M_{\lambda'}$$

und analog

$$m + M_\lambda \subseteq m'' + x'' + M_{\lambda''} = m'' + M_{\lambda''}.$$

Zusammen gilt

$m \in m + M_\lambda \subseteq (m' + M_{\lambda'}) \cap (m'' + M_{\lambda''})$,

d.h. die Durchschnitte der Gestalt $(m' + M_{\lambda'}) \cap (m'' + M_{\lambda''})$ sind Vereinigungen von Mengen der $m + M_\lambda$.

$$i{:}M \longrightarrow M,\ m \mapsto -m,$$

sind stetig.[91]

(ii) Bezüglich der linearen Topologie ist auch die Subtraktion

$$M \times M \longrightarrow M,\ (m', m'') \mapsto m'-m'',$$

stetig (als Zusammensetzung von s mit i).

(iii) Bezüglich der linearen Topologie ist für jedes $a \in A$ die Multiplikation mit a,

$$mult_a{:}M \longrightarrow M,\ m \mapsto am,$$

stetig.[92]

(iv) Die lineare Topologie ist separiert (Hausdorffsch) genau dann wenn gilt

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = 0.$$

(v) Für jedes $\lambda\in\Lambda$ ist $M - M_\lambda$ Vereinigung von Nebenklassen modulo $M_\lambda$, also offen. Mit anderen Worten, jedes $M_\lambda$ ist offen und abgeschlossen.

---

[91] Stetigkeit von s: Wir haben zu zeigen, für jedes $m \in M$ und jedes $\lambda\in\Lambda$ ist $s^{-1}(m + M_\lambda)$ offen. Sei

$$(m',m'') \in s^{-1}(m + M_\lambda).$$

Dann gilt

$$m'+m'' \in m + M_\lambda,$$

d.h.

$$m'+m'' - m \in M_\lambda,$$

d.h.

$$m'+ M_\lambda + m''+ M_\lambda - m \subseteq M_\lambda,$$

d.h.

$$s((m'+ M_\lambda)\times(m''+ M_\lambda)) \subseteq m + M_\lambda,$$

d.h.

$$(m'+ M_\lambda)\times(m''+ M_\lambda) \subseteq s^{-1}(m + M_\lambda).$$

Stetigkeit von i: Wir haben zu zeigen, für jedes $m \in M$ und jedes $\lambda\in\Lambda$ ist $i^{-1}(m+M_\lambda)$ offen. Es gilt

$$i^{-1}(m+M_\lambda) = -( m+M_\lambda) = -m - M_\lambda = (-m) + M_\lambda,$$

d.h. diese Menge ist offen.

[92] Wir haben zu zeigen, für jedes $m \in M$ und jedes $\lambda\in\Lambda$ ist $(mult_a)^{-1}(m + M_\lambda)$ offen. Sei

$$m' \in (mult_a)^{-1}(m + M_\lambda),$$

d.h.

$$am' \in m + M_\lambda.$$

Dann gilt

$$a(m'+ M_\lambda) = am' + aM_\lambda \in m + M_\lambda,$$

also

$$m' + M_\lambda \in (mult_a)^{-1}(m + M_\lambda).$$

(vi) Für jedes $\lambda\in\Lambda$ ist $M/M_\lambda$ diskrete bezüglich der Faktor-Topologie.[93]

(vii) Der mit der Faktor-Topologie versehene Modul $M/\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ heißt der zu M gehörige separierte Modul.

(viii) Im Fall M = A ist jedes der $M_\lambda$ ein Ideal von M. Deshalb ist auch die Multiplikation
$$m: A \times A \longrightarrow A, (a', a'') \mapsto a'a'',$$
eine stetige Abbildung.[94]

### 3.2.2 Die Vervollständigung bezüglich einer linearen Topologie

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul mit der durch die Familie
$$\mathcal{F} = \{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$
definierten linearen Topologie. Für je zwei $\lambda, \mu \in \Lambda$ mit $\lambda \le \mu$ gilt dann $M_\lambda \supseteq M_\mu$. Die identische Abildung auf M induziert dann eine lineare Surjektion
$$\varphi_{\lambda\mu}: M/M_\lambda \longrightarrow M/M_\mu$$
und für je drei Indizes aus $\Lambda$ mit $\lambda \le \mu \le \nu$ gilt
$$\varphi_{\mu\nu} \circ \varphi_{\lambda\mu} = \varphi_{\lambda\nu}.$$
Die $\varphi_{\lambda\mu}$ bilden ein projektives System, d.h. wir können den projektiven Limes
$$\begin{aligned}\hat{M} &:= \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \lambda\in\Lambda}} M/M_\lambda \\ &= \{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M/M_\lambda \mid \varphi_{\lambda\mu}(x_\lambda) = x_\mu \text{ für } \lambda, \mu \in \Lambda \text{ mit } \lambda \le \mu \}\end{aligned}$$
bilden. Dieser heißt Vervollständigung von M bezüglich der durch $\mathcal{F}$ gegebenen linearen Topologie.

---

[93] d.h. bezüglich der stärksten Topologie von $M/M_\lambda$, für welche die natürliche Abbildung
$$M \longrightarrow M/M_\lambda$$
stetig ist.

[94] Wir haben zu zeigen, für jedes $\lambda\in\Lambda$ und jedes $a \in A$ ist $m^{-1}(a + M_\lambda)$ eine offene Menge. Sei
$$(x,y) \in m^{-1}(a + M_\lambda),$$
d.h.
$$xy \in a + M_\lambda.$$
Dann gilt
$$(x + M_\lambda)\cdot(y+ M_\lambda) \subseteq xy + M_\lambda \subseteq a + M_\lambda,$$
also
$$m((x + M_\lambda)\times(y+ M_\lambda)) \subseteq m^{-1}(a + M_\lambda).$$

Dabei versehen wir die Faktor-Moduln $M/M_\lambda$ mit der diskreten Topologie, das direkte Produkt $\prod_{\lambda\in\Lambda} M/M_\lambda$ mit der zugehörigen Produkt-Topologie und $\hat{M}$ mit der Unterraum-Topologie des Produkts.

**Bemerkungen**

(i) Die lineare Topologie von $\hat{M}$. Für jedes $\lambda\in\Lambda$ bezeichne

$$\varphi_\lambda: \hat{M} \longrightarrow M/M_\lambda, (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto x_\lambda,$$

die Einschränkung auf $\hat{M}$ der Projektion auf die $\lambda$-te Koordinate. Die offenen Mengen von $\hat{M}$ sind dann gerade die Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen der Gestalt

$$\varphi_\lambda^{-1}(m + M_\lambda) \text{ mit } \lambda\in\Lambda \text{ und } m \in M.$$

Insbesondere bilden die Kerne der Abbildungen $\varphi_\lambda$

$$M_\lambda^* := \mathrm{Ker}(\varphi_\lambda)$$

eine Umgebungsbasis des neutralen Elements von $\hat{M}$. Die Topologie von $\hat{M}$ ist gerade die lineare Topologie zur Familie

$$\mathcal{F}^* := \{ M_\lambda^* \}_{\lambda\in\Lambda}$$

(ii) Die natürliche Einbettung von M in $\hat{M}$.Wir betrachten die Abbildung

$$\psi: M \longrightarrow \hat{M}, m \mapsto (m + M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}.$$

Die vollständigen Urbilder der Mengen $\varphi_\lambda^{-1}(m + M_\lambda)$ bei $\psi$ sind gerade die Mengen der Gestalt[95]

$$m + M_\lambda.$$

Da diese offen sind, ist $\psi$ stetig.

(iii) Vollständigkeit. Das Bild von $\psi$ liegt dicht in $\hat{M}$.[96] Ist $\psi$ ein Isomorphismus, so sagt man, der Modul M ist vollständig.[97]

---

[95] Es sind gerade die vollständigen Urbilder einzelner Elemente bei den Zusammensetzungen

$$M \xrightarrow{\psi} \hat{M} \xrightarrow{\varphi_\lambda} M/M_\lambda, m \mapsto (m + M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto m + M_\lambda.$$

[96] Für vorgegebenes $\xi := (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \hat{M}$ und vorgegebenes $\lambda\in\Lambda$ wähle man einen Repräsentanten $x \in M$ von $x_\lambda \in M/M_\lambda$. Dann gilt

$$\varphi_\lambda(\xi - \psi(x)) = \varphi_\lambda(\xi) - \varphi_\lambda(\psi(x)) = x_\lambda - (x + M_\lambda) = 0,$$

d.h. $\xi - \psi(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi_\lambda)$. Wir haben gezeigt, in jeder Umgebung von $\xi$ liegt ein Element aus dem Bild von $\psi$.

[97] In der Terminologie von Bourbaki bedeutet die Bijektivität von $\psi$, daß M vollständig und separiert ist.

(iv) Vollständigkeit von $\hat{M}$. Die Abbildungen $\varphi_\lambda : \hat{M} \longrightarrow M/M_\lambda$ sind surjektiv.[98] Sie induzieren deshalb Isomorphismen

$$\hat{M}/M^*_\lambda \xrightarrow{\cong} M/M_\lambda .$$

Deshalb ist die Vervollständigung von $\hat{M}$ isomorph zu $\hat{M}$, genauer die natürliche Abbildung $\hat{M} \longrightarrow \hat{\hat{M}}$ ist ein Isomorphismus. Mit anderen Worten, $\hat{M}$ ist vollständig.

(v) Äquivalente Umgebungsbasen. Sei

$$\mathcal{F}' = \{M'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'},$$

eine weitere Familie von A-Teilmoduln von M,

$$M'_\lambda \subseteq M,$$

mit einer gerichteten Index-Menge Λ' wobei ebenfalls

$$M'_\lambda \supseteq M'_\mu$$

gelte für je zwei $\lambda, \mu \in \Lambda$ mit $\lambda \le \mu$. Wir sagen, diese Familie $\mathcal{F}'$ ist äquivalent zur Familie $\mathcal{F}$, wenn es für jedes $\lambda\in\Lambda$ ein $\lambda'\in\Lambda'$ gibt mit

$$M'_{\lambda'} \subseteq M_\lambda$$

und umgekehrt für jedes $\lambda'\in\Lambda'$ ein $\lambda\in\Lambda$ mit

$$M_\lambda \subseteq M'_{\lambda'} .$$

Dies bedeutet gerade, daß jede offene Menge in der durch $\mathcal{F}$ definierten Topologie auch offen ist in der durch $\mathcal{F}'$ definierten Topologie und umgekehrt. Mit anderen Worten zwei solche Familien sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselbe Topologie definieren.

(vi) Unabhängigkeit der Vervollständigung von der definierenden Familie. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ zwei äquivalente Familien. Zu den Inklusionen der Moduln von $\mathcal{F}'$ in die von $\mathcal{F}$ gehören dann von der identischen Abbildung induzierte A-lineare Abbildungen

$$(\varprojlim_{\lambda\in\Lambda'} M/M'_\lambda \longrightarrow)\ M/M'_{\lambda'} \longrightarrow M/M_\lambda$$

Die Universalitätseigenschaft des projektiven Limes liefert damit eine A-lineare Abbildung

$$\varprojlim_{\lambda\in\Lambda'} M/M'_\lambda \longrightarrow \varprojlim_{\lambda\in\Lambda} M/M_\lambda \qquad (1)$$

Analog definieren die Inklusionen der Moduln von $\mathcal{F}$ in die von $\mathcal{F}'$ eine A-lineare Abbildung

$$\varprojlim_{\lambda\in\Lambda} M/M_\lambda \longrightarrow \varprojlim_{\lambda\in\Lambda'} M/M'_\lambda \qquad (2)$$

Auf Grund ihrer Konstruktion (mit Hilfe einer Universalitätseigenschaft) sind die beiden Abbildungen (1) und (2) zueinander isomorph. Die Vervollständigung von M bezüglich einer linearen Topologie hängt also nur von Tologie und nicht von der definierenden Familie ab.

---

[98] Weil die Zusammensetzung mit ψ gerade die natürliche Surjektion $M \longrightarrow M/M_\lambda$ ist.

(vii) Vervollständigung von Ringen. Im Fall M = A sind die Teilmoduln $M_\lambda$ Ideale von A und die $A/M_\lambda$ bilden ein inverses System von Ringen. Deshalb ist in diesem Fall

$$\hat{A} := \hat{M}$$

ein kommutativer Ring mit 1, und die natüliche Abbildung

$$A \longrightarrow \hat{A}\ ,\ a \mapsto (a \bmod M_\lambda)_{\lambda|\Lambda}$$

ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1. Die natürlichen Abbildungen

$$\hat{A} \longrightarrow A/M_\lambda, (a_\lambda \bmod M_\lambda)_{\lambda|\Lambda} \mapsto a_\lambda \bmod M_\lambda,$$

sind dann ebenfalls Homomorphismen von Ringen mit 1, und ihre Kerne

$$M^*_\lambda \subseteq \hat{A}$$

sind nicht nur A-Teilmoduln, sondern Ideale von $\hat{A}$.

### 3.2.2 Unterraum- und Faktor-Topologie zu einem Teilmodul

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul mit einer linearen Topologie, welche durch die Familie

$$\mathcal{F} = \{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$

von Teilmoduln gegeben sei. Weiter sei

$$N \subseteq M$$

ein Teilmodul. Dann gilt:

(i) Die Abschließung von N in M bezüglich der linearen Topologie von M gerade der Teilmodul

$$\overline{N} := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (N + M_\lambda)$$

von M.

(ii) Bezeichne $M'_\lambda$ das Bild von $M_\lambda$ bei der natürlichen Abbildung $M \longrightarrow M/N$.
Dann ist die Faktor-Topologie von M/N gerade die lineare Topologie, welche durch die Familie der $M'_\lambda$ definiert ist.

(iii) Folgende Bedingungen sind äquivalent.
(a) M/N ist separiert bezüglich der Faktor-Topologie.
(b) $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} (N + M) = N$.
(c) N ist abgeschlossen in M.

(iv) Die Unterraum-Topologie von N ist gerade die lineare Topologie, welche durch die A-Teilmoduln

$$N \cap M_\lambda \text{ mit } \lambda\in\Lambda$$

definiert ist.

**Beweis**. Zu (i). Es gilt

$$\begin{aligned} n \in \overline{N} &\Leftrightarrow ( n + M_\lambda) \cap N \neq \varnothing \text{ für jedes } \lambda \\ &\Leftrightarrow n \in N + M_\lambda \text{ für jedes } \lambda \\ &\Leftrightarrow n \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (N + M_\lambda). \end{aligned}$$

Zu (ii). Seien $G \subseteq M$ das vollständige Urbild der Teilmenge $G' \subseteq M/N$. Dann gilt:
G' ist offen bezügich der Faktor-Topologie von M/N

$\Leftrightarrow$ G ist offen in M

$\Leftrightarrow$ Für jedes $x \in G$ gibt es ein $\lambda$ mit $x + M_\lambda \subseteq G$

$\Leftrightarrow$[99] Für jedes $x \in G'$ gibt es ein $\lambda$ mit $x + M'_\lambda \subseteq G'$

Zu (iii). Es gilt:
M/N ist separiert

$\Leftrightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} M'_\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (N + M_\lambda) = N$ (d.h. es gilt (b))

$\Leftrightarrow$[100] N ist abgeschlossen (d.h. es gilt (c)).

Zu (iv). Die offenen Mengen von N in der Unterraum-Topologie von N sind gerade die Mengen der Gestalt

$$N \cap G \text{ mit } G \text{ offen in } M,$$

Für jedes $x \in N\cap G$ gilt deshalt $x \in G$, d.h. es gibt ein $\lambda$ mit $x + M_\lambda \subseteq G$. Wegen $x \in N$ folgt

$$x + N \cap M_\lambda \subseteq N \cap (x + M_\lambda) \subseteq N \cap G.$$

Mit anderen Worten, jede Teilmenge von N, die offen ist in der Unterraum-Topologie, ist auch offen in der linearen Topologie zur Familie der $N \cap M_\lambda$.

Sei jetzt G umgekehrt offen in der linearen Topologie zur Familie der $N \cap M_\lambda$. Dann hat G die Gestalt

$$G = \bigcup_{i\in I} ( x_i + N \cap M_{\lambda_i})$$

mit $x_i \in N$ für jedes i. Deshalb ist[101]

$$x_i + N \cap M_{\lambda_i} = N \cap (x_i + M_{\lambda_i}).$$

Es folgt

$$G = N \cap \widetilde{G} \text{ mit } \widetilde{G} = \bigcup_{i\in I} ( x_i + M_{\lambda_i}).$$

Insbesondere ist $\widetilde{G}$ offen in M, d.h. G ist offen in der Unterraum-Topologie von N.

**QED**.

### 3.2.3 Exaktheitseigenschaften der Vervollständigung

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul mit einer linearen Topologie, und $N \subseteq M$

---

[99] Wegen $N \subseteq G$.

[100] nach (i).

[101] Liegt eine Summe aus zwei Elementen in N und ist außerdem der eine Summand in N, so muß auch der andere Summand in N liegen.

ein Teilmodul. Wir versehen N mit der Unterraum-Topologie und M/N mit der Faktor-Topologie. Dann gilt:

(i) $0 \longrightarrow \hat{N} \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow (M/N)^{\wedge}$ ist eine exakte Sequenz von $\hat{A}$-Moduln. Außerdem ist $\hat{N}$ gerade die Abschließung von $\psi(N)$ in $\hat{M}$, wenn $\psi: M \longrightarrow \hat{M}$ bezeichnet.

(ii) Ist die Topologie von M außerdem durch eine (abzählbare) absteigende Kette

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \ldots$$

von A-Teilmoduln von M definiert, so ist sogar die Sequenz

$$0 \longrightarrow \hat{N} \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow (M/N)^{\wedge} \longrightarrow 0$$

exakt. Mit anderen Worten, es gilt

$$\hat{M}/\hat{N} \cong (M/N)^{\wedge}.$$

**Beweis**. Zu (i). Für jedes $\lambda$ ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow N/N\cap M_\lambda \longrightarrow M/N_\lambda \longrightarrow M/(N + M_\lambda) \longrightarrow 0$$

exakt. Mit

$$M' := M/N$$

erhält sie die Gestalt

$$0 \longrightarrow N/N\cap M_\lambda \longrightarrow M/M_\lambda \longrightarrow M'/M'_\lambda \longrightarrow 0$$

und durch Übergang zum projektiven Limes erhalten wir die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \hat{N} \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow \hat{M}'.$$

Exaktheit an der Stelle $\hat{M}$: ein Element

$$x = (x_\lambda \bmod M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

liegt genau dann mit Kern der Abbildung $\hat{M} \longrightarrow \hat{M}'$, wenn für jedes $\lambda$ gilt

$$x_\lambda \in N + M_\lambda.$$

Man kann also die $x_\lambda$ so abändern, daß für jedes $\lambda$ gilt

$$x_\lambda \in N,$$

ohne daß dabei x verändert wird. Die Bedingung

$$x_\lambda - x_\mu \in M_\lambda \text{ für } \lambda \le \mu$$

hat dann zur Folge, daß sogar

$$x_\lambda - x_\mu \in N \cap M_\lambda \text{ für } \lambda \le \mu$$

gilt. Dann ist aber

$$(x_\lambda \bmod N \cap M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

ein wohldefiniertes Element von $\hat{N}$, dessen Bild in $\hat{M}$ das vorgegebene Element x ist.

Exaktheit an der Stelle $\hat{N}$. ein Element

$$x = (x_\lambda \bmod N \cap M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

von $\hat{N}$ hat ein triviales Bild in $\hat{M}$, wenn gilt

$$x_\lambda \in M_\lambda \text{ für jedes } \lambda.$$

Wegen $x_\lambda \in N$ für jedes $\lambda$ gilt dann aber sogar $x_\lambda \in N \cap M_\lambda$ für jedes $\lambda$, d.h. x ist gleich Null in $\hat{N}$.

Wir haben nocht zu zeigen, daß $\hat{N}$ mit der Abschließung von $\psi(N)$ übereinstimmt. Ein Element

$$x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

von $\hat{M}$ liegt sogar in $\hat{N}$ genau dann, wenn für jedes $\lambda$ das Element $x_\lambda \in M/M_\lambda$ durch ein Element von N repräsentiert werden kann (siehe oben). Mit anderen Worten, für jedes $\lambda$ gibt es ein $n \in N$, welches bei

$$N \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow M/M_\lambda,\ n \mapsto (n \bmod M_\lambda) \mapsto n \bmod M_\lambda,$$

dasselbe Bild hat wie x bei

$$\hat{M} \longrightarrow M/M_\lambda,\ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto x_\lambda.$$

Das bedeutet aber, $x \in \psi(N) + M^*_\lambda$ für jedes $\lambda$, d.h. x liegt in der Abschließung von $\psi(N)$.

<u>Zu (ii)</u>. Sei jetzt $\Lambda = \{1,2, ...\}$ mit der gewöhnlichen linearen Ordnung versehen. Sei

$$\xi = (\xi_n)_{n=1,2,..} \in \hat{M}/\hat{N},\ \xi_n \in M/(N+M_n),$$

Wir wählen einen Repräsentanten $x_1 \in M$ von $\xi_1$ und einen Repräsentanten $y_2 \in M$ von $\xi_2$. Dann gilt

$$y_2 - x_1 \in N + M_1$$

d.h.

$$y_2 - x_1 = t_1 + m_1 \text{ mit } t \in N \text{ und } m_1 \in M_1.$$

Wir setzen

$$x_2 := y_2 - t_1 = x_1 + m_1.$$

Dann Repräsentiert $x_2$ sowohl $\xi_1$ als auch $\xi_2$.

Angenommen, wir haben bereits ein $x_n \in M$ gefunden, welches die Restklassen $\xi_1,...,\xi_n$ repräsentiert. Sei $y_{n+1}$ ein Repräsentant von $\xi_{n+1}$. Dann gilt

$$y_{n+1} - x_n \in N + M_n,$$

d.h.

$$y_{n+1} - x_n = t_n + m_n \text{ mit } t_n \in N \text{ und } m_n \in M_n.$$

Wir setzen

$$x_{n+1} = y_{n+1} - t_n = x_n + m_n$$

Dann repräsentiert $x_{n+1}$ die Restklasse $\xi_{n+1}$ und gleichzeitig alle vorherigen Restklassen $\xi_i$ für $i = 1, ... , n$. Insbesondere ist

$$x_{n+1} - x_n \in M_n,$$

d.h. die Familie

$$(x_n \bmod M_n)_{n=1,2,..}$$

ist ein Element von $\hat{M}$, dessen Bild in $\hat{M}/\hat{N}$ das vorgegebene Element $\xi$ ist.
**QED**.

### 3.2.4 Fortsetzung stetiger A-linearer Abbildungen

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und

$$f: M \longrightarrow N$$

ein Homomorphismus von A-Moduln M und N. Wir nehmen weiter an, daß die beiden Moduln mit linearen Topologien versehen sind, gegeben durch die Familien

$$\{M_\alpha\}_{\alpha\in I} \text{ bzw. } \{N_\beta\}_{\beta\in J} .$$

(i) Die Abbildung ist genau dann stetig, wenn es für jedes $\beta\in J$ ein $\alpha\in I$ gibt mit

$$f(M_\alpha) \subseteq N_\beta.$$

(ii) Ist f stetig, so gibt es genau eine stetige A-lineare Abbildung $\hat{f}: \hat{M} \longrightarrow \hat{N}$ mit der Eigenschaft, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{M} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{N} \end{array}$$

kommutativ ist. Dabei seien die vertikalen Abbildungen gerade die natürlichen Abbildungen in die Vervollständigungen.

(iii) Sind A und B kommutative Ringe mit 1, welche mit linearen Topologien versehen sind, und ist $f: A \longrightarrow B$ ein stetiger Homomorphismus von Ringen mit 1, so ist die nach (ii) existierende Abbildung $\hat{f}: \hat{A} \longrightarrow \hat{B}$ stetige Abbildung ein Homomorphismus von Ringen mit 1.

**Beweis**. Zu (i). trivial.

Zu (ii). Die Eindeutigkeitsaussage für $\hat{f}$ folgt aus der Stetigkeitsforderung an $\hat{f}$ und der Tatsache, daß das Bild der natürlichen Einbettung

$$M \longrightarrow \hat{M}, m \mapsto (m + M_\alpha)_{\alpha\in I},$$

dicht liegt in $\hat{M}$. Sei

$$\xi := (m_\alpha)_{\alpha\in I} \in \hat{M}$$

Wir definieren das Bild

$$\hat{f}(\xi) \in \hat{N}$$

von $\xi$ bei $\hat{f}$ als das Element

$$\hat{f}(\xi) := (n_\beta)_{\beta\in J} ,$$

dessen $\beta$-te Koordinate $n_\beta \in N/N_\beta$ wie folgt gegeben ist. Wir wählen ein $\alpha \in I$ derart, daß $f(M_\alpha) \subseteq N_\beta$ und definieren $n_\beta$ als das Bild von $m_\alpha$ bei der natürlichen Abbildung

$$M/M_\alpha \longrightarrow N/N_\beta,\ m \bmod M_\alpha \mapsto f(m) \bmod N_\beta. \tag{1}$$

Wegen der Bedingungen and die Koordinaten von $\xi \in \prod_{\alpha\in I} M/M_\alpha$ , welche $\xi$ als Element des inversen Limes definieren, hängt diese Definition nicht von der speziellen Wahl von $\alpha$ ab. Weil die Abbildungen (1) A-lineare Abbildungen sind, ist die so definierte Abbildung $\hat{f}$ ebenfalls A-linear. Weil sich die Abbildungen (1) in kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ M/M_\alpha \arrow[r] & N/N_\beta \end{tikzcd} \tag{2}$$

einfügen lassen (wobei die vertikalen Abbildungen die natürlichen Homomorphismen auf die Faktormoduln sind), bilden f und $\hat{f}$ zusammen mit den natürlichen Abbildungen in die Vervollständigungen ein kommutatives Viereck. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die Abbildung $\hat{f}$ stetig ist.
Die vertikalen Abbildungen des kommutativen Diagramms (2) faktorisieren sich über die natürlichen Abbildungen $M \longrightarrow \hat{M}$ und $N \longrightarrow \hat{N}$, und die Definition von $\hat{f}$ ist gerade so gewählt, daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} \hat{M} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d] & \hat{N} \arrow[d] \\ M/M_\alpha \arrow[r] & N/N_\beta \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} (m_\alpha) & \mapsto & (n_\beta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ m_\alpha & \mapsto & n_\beta \end{array}$$

für beliebige $\alpha \in I$, $\beta \in J$ mit $f(M_\alpha) \subseteq N_\beta$ kommutativ sind. Die Kerne der beiden vertikalen Abbildungen sind gerade gleich $\overset{*}{M}_\alpha$ bzw. $\overset{*}{N}_\beta$. Auf Grund der Kommutativität dieser Vierecke gilt somit

$$\hat{f}(\overset{*}{M}_\alpha) \subseteq \overset{*}{N}_\beta$$

für jedes Paar $(\alpha, \beta)$ mit $f(M_\alpha) \subseteq N_\beta$. Auf Grund der Statigkeit von f gibt es somit für jedes $\alpha \in I$ ein $\beta \in J$ mit $\hat{f}(\overset{*}{M}_\alpha) \subseteq \overset{*}{N}_\beta$. Mit anderen Worten, $\hat{f}$ ist stetig bezüglich der linearen Topologie von $\hat{M}$ und $\hat{N}$.
Zu (iii). Die Eigenschaft von $\hat{f}: \hat{A} \longrightarrow \hat{B}$, ein Homomorphismus von Ringen mit 1 zu sein, ergibt sich aus der entsprechenden Eigenschaft der Homomorphismen

$$M/M_\alpha \longrightarrow N/N_\beta$$

(mit M = A und N = B).

**QED**.

### 3.2.4 Adische Topologien

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein A-Modul. Die lineare Topologie von M, welche durch die Familine

$$\{I^n M\}_{n=1,2,..}$$

gegeben ist, heißt I-adische Topologie von M. Analog heißt die lineare Topologie von A, welche durch die Familie

$$\{I^n\}_{n=1,2,..}$$

gegeben ist, I-adische Topologie von A. Die Vervollständigungen $\hat{A}$ und $\hat{M}$ von A bzw. M bezüglich der I-adischen Topologien heißt auch I-adische Vervollständigungen.

**Bemerkungen**

(i) Es ist leicht zu sehen, daß $\hat{M}$ die Struktur eines $\hat{A}$-Moduls hat. Für

$$\xi := (m_i)_{i=1,2,..} \in \hat{M} \text{ und } \alpha := (a_i)_{i=1,2,..} \in \hat{A}$$

kann man

$$\alpha\xi := (a_i m_i)_{i=1,2,..}$$

setzen.

(ii) Eine Folge $\{m_i\}_{i=1,2,..}$ von Elementen aus M ist heißt Cauchy-Folge, wenn es für jede natürliche Zahl r eine natürliche Zahl s gibt mit

$$m_{i+1} - m_i \in I^r M \text{ für alle } i > s.$$

Ein Modul M mit einer I-adischen Topologie ist genau dann vollständig (im obigen Sinne, daß $\hat{M} = M$ gilt), wenn jede Cauchy-Folge einen eindeutig besimmten Limes besitzt.

(iii) Ein Modul M mit einer I-adischen Topologie ist genau dann vollständig, wenn es für jede Folge $\{m_i\}_{i=1,2,..}$ von Elementen aus M mit

$$m_{i+1} - m_i \in I^i M \text{ für jedes } i$$

ein Element $m \in M$ gibt mit

$$m - m_i \in I^i M \text{ für jedes } i.$$

### 3.2.5 Eigenschaften I-adisch vollständiger Ringe und Moduln

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein A-Modul.

(i) Ist A vollständig in der I-adischen Topologie, so gilt $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$.

(ii) Ist M vollständig in der I-adischen Topologie und $a \in I$ ein Element, so ist die Multiplikation mit 1 + a ein Automorphismus $M \longrightarrow M$.

**Beweis**. Zu (i). Für $a \in I$ ist die Reihen

$$1 - a + a^2 - a^3 + \ldots$$

konvergent in A und der Limes ist invers zu 1 + a. Mit anderen Worten

$$1 + aA \in A^*$$

für jedes $a \in I$. Nach Definition von rad(A) gilt $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$.

Zu (ii). Nach Voraussetzung ist $M = \hat{M}$, also ein $\hat{A}$-Modul. Nach (i) ist das natürliche - Bild von 1 + a eine Einheit von $\hat{A}$. Die Multiplikation mit diesem Element ist somit ein Automorphismus.
**QED**.

**3.2.6 Henselsches Lemma**
Sei (A, m) ein lokaler Ring, welcher m-adisch vollständig ist.
Weiter sei

$$F \in A[X]$$

ein normiertes Polynom, für welches das zugehörige Polynom

$$\bar{F} \in k[X]$$

mit Koeffizieten im Restekörper k := A/m in ein Produkt von teilerfremden normierten Polynomen zerfällt, sagen wir

$$\bar{F} = gh,\ g, h \in k[X] \text{ normiert und teilerfremd.}$$

Dann gibt es normierte Polynome

$$G, H \in A[X] \text{ mit } F = GH \text{ und } \bar{G} = g \text{ und } \bar{H} = h.$$

**Beweis**. Wir fixieren irgendwelche normierten Polynome

$$G_1, H_1 \in A[X] \text{ mit } \bar{G}_1 = g \text{ und } \bar{H}_1 = h.$$

Dann gilt

$$F \equiv G_1H_1 \bmod mA[X].$$

Nehmen wir induktiv an, wir haben bereits normierte Polynome

$$G_n, H_n \in A[X] \text{ mit } \bar{G}_n = g \text{ und } \bar{H}_n = h$$

und (1)

$$F \equiv G_nH_n \bmod m^nA[X]$$

konstruiert. Wir können dann schreiben

$$F - G_nH_n = \sum_i \omega_iU_i \text{ mit } \omega_i \in m^n \text{ und } U_i \in A[X] \text{ und } \deg U_i < \deg F.$$

Weil g und h teilerfremd sind, also eine Linearkombination besitzen, die gleich 1 ist, gibt es für jedes i Elemente $v_i, w_i \in k[X]$ mit $gv_i + hw_i = \bar{U}_i$. Dabei können wir das Polynom $v_i$ durch seinen Rest bei der Division durch h ersetzen und $w_i$ entsprechend abändern, d.h. wir können annehmen

$$\deg v_i < \deg h.$$

Dann gilt $\deg hw_i = \deg(\bar{U}_i - gv_i) < \deg F$, also

$$\deg w_i < \deg g.$$

Wir fixieren Polynome $V_i, W_i \in A[X]$ mit

$$\bar{V}_i = v_i \text{ und } \bar{W}_i = w_i, \deg V_i = v_i, \deg W_i = \deg w_i$$

und setzen

$$G_{n+1} := G_n + \sum_i \omega_iW_i$$

$$H_{n+1} := H_n + \sum_i \omega_i V_i$$

Dann gilt

$$F - G_{n+1}H_{n+1} = F - (G_n + \sum_i \omega_i W_i)( H_n + \sum_i \omega_i V_i)$$

$$= \sum_i \omega_i U_i - G_n \bullet \sum_i \omega_i V_i - \sum_i \omega_i W_i \bullet H_n$$

$$+ \sum_i \omega_i W_i \bullet \sum_i \omega_i V_i$$

Wegen $\omega_i \in m^n$ liegt die letzte Summe in $m^{n+1}A[X]$. Modulo $m^{n+1}A[X]$ erhalten wir

$$F - G_{n+1}H_{n+1} = \sum_i \omega_i( U_i - G_n V_i - W_i \bullet H_n)$$

Nach Wahl der $V_i$ und $W_i$ liegen die Koeffizienten der $\omega_i$ sämtlich in $mA[X]$. Zusammen ergibgt sich

$$F - G_{n+1}H_{n+1} \in m^{n+1}A[X].$$

Wir erhalten damit für jedes n eine Zerlegung von F modulo $m^nA[X]$ wie in (1). Für n gegen $\infty$ konvergieren die Folgen $\{G_n\}$ und $\{H_n\}$ gegen Polynome

$$G, H \in A[X]$$

mit

$$F = G \bullet H \text{ und } \overline{G} = g \text{ und } \overline{H} = h.$$

**QED**.

### 3.2.7 Lemma von Nakayame im vollständigen Fall

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein A-Modul. Weiter gelte

1. A ist vollständig in der I-adischen Toplogie.
2. M ist separiert in der I-adischen Topologie.

Dann bilden Elemente

$$m_1, ..., m_r \in M,$$

deren Restklassen den Modul M/IM über A/I erzeugen, ein Erzeugendensystem von M über A.

**Beweis**. Nach Voraussetzung gilt

$$M = \sum_{i=1}^{r} Am_i + IM.$$

Durch Multiplikation mit $I^\nu$ erhalten wir

$$I^\nu M = \sum_{i=1}^{r} I^\nu m_i + I^{\nu+1}M \text{ für } \nu = 1,2, ...$$

Sei jetzt $\xi \in M$ vorgegeben. Wir wollen zeigen, $\xi$ läßt sich als Linearkombination der $m_i$ schreiben. Zunächst hat $\xi$ die Gestalt

$$\xi = \sum_{i=1}^{r} a_{i,0} m_i + \xi_1 \text{ mit } a_{i,0} \in A \text{ und } \xi_1 \in IM.$$

Analog hat $\xi_1$ die Gestalt

$$\xi_1 = \sum_{i=1}^{r} a_{i,1} m_i + \xi_2 \text{ mit } a_{i,1} \in I \text{ und } \xi_1 \in I^2M.$$

Indem wir so fortfahren erhalten wir Darstellungen

$$\xi_\nu = \sum_{i=1}^{r} a_{i,\nu} m_i + \xi_{\nu+1} \text{ mit } a_{i,\nu} \in I^\nu \text{ und } \xi_{\nu+1} \in I^{\nu+1}M$$

für $\nu = 1,2, ....$ Weil A vollständig ist, konvergiert die Reihe

$$a_i = a_{i,0} + a_{i,1} + ... + a_{i,\nu} + ...$$

für jedes i. Durch ineinander Einsetzen der Formeln für die $\xi_\nu$ erhalten wir

$$\xi - \sum_{i=1}^{r} a_i m_i \in I^\nu M \text{ für } \nu = 1, 2, ...$$

Weil M separiert ist, folgt

$$\xi - \sum_{i=1}^{r} a_i m_i \in \bigcap I^\nu M = \{0\},$$

d.h. es gilt

$$\xi \in \sum_{i=1}^{r} Am_i$$

für jedes $\xi \in M$.

**QED**.

**3.2.8 Lemma von Artin-Rees**

Seien A ein noetherscher Ring (kommutativ mit 1), M ein endlich erzeugter A-Modul,

$$N \subseteq M$$

ein Teilmodul und

$$I \subseteq A$$

ein Ideal. Dann gibt es ein natürliche Zahl $c \in \mathbb{N}$ mit

$$I^n M \cap N = I^{n-c}(I^c M \cap N)$$

für jede natürliche Zahl $n > c$.

**Beweis**. Die Inklusion "$\supseteq$" besteht trivialerweise (für beliebiges c). Wir haben die umgekehrte Inklusion (für geeignetes c) zu beweisen. Wir beginnen mit der Konstruktion eines geeigneten c.

Weil A noethersch ist, ist das Ideal I endlich erzeugt, sagen wir

$$I = a_1 A + ... + a_r A.$$

Als endlich erzeugter Modul über dem noetherschen Ring A ist M noethersch, also insbesondere endlich erzeugt, sagen wir

$$M = m_1 A + ... + m_s A.$$

Jedes Element von $I^n M$ läßt sich in der Gestalt

$$\sum_{i=1}^{s} f_i(a)\bullet m_i$$

schreiben, wobei $f_i(X) = f_i\,(X_1,...,X_r) \in A[X_1,...,X_r]$ ein homogenes Polynom vom Grad n ist und a abkürzend für $a_1, \dots, a_r$ steht. Wir setzen

$B \quad := A[X_1,...,X_r]$

$J_n \quad := \{ (f_1, \dots, f_s) \in B^S \mid f_i \text{ homogen vom Grad } n, \sum_i f_i(a)\bullet m_i \in N\}$

$C \quad :=$ der von $\bigcup J_n$ erzeugte A-Teilmodul von $B^S$

Da $B^S$ als endlich erzeugter Modul über dem noetherschen Ring B noethersch, also insbesondere endlich erzeugt ist, können wir

$$C \quad = Bc_1 + \dots + Bc_t$$

schreiben, wobei jedes der $c_i$ ein Element aus $\bigcup J_n$ ist, sagen wir

$$c_i \quad = (c_{i1}, \dots, c_{is}) \in J_{d_i}.$$

Wir setzen

$$c \quad := \max\{ d_1, \dots, d_t\}.$$

Wir haben zu zeigen, es gilt

$$I^n M \cap N \subseteq I^{n-c}(I^c M \cap N)$$

für jedes n > c. Sei

$$\eta \in I^n M \cap N.$$

Wir schreiben

$$\eta = \sum_{i=1}^{s} f_i(a)\bullet m_i \text{ mit } (f_1, \dots, f_s) \in J_n.$$

Nach Definition von C liegt das s-Tupel der $f_i$ in C, d.h. es gilt

$$(f_1, \dots, f_s) = \sum_{j=1}^{t} p_j(X)\bullet c_j \text{ mit } p_j \in B = A[X_1,...,X_r].$$

Die linke Seite ist ein s-Tupel, dessen Koordinaten homogene Polynome des Grades n sind. Die Glieder auf der rechten Seite mit einem von n verschiedenen Grad müssen sich also gegenseitig wegheben. Wir können deshalb annehmen,

$p_j$ ist homogen vom Grad $n - d_j$

(andernfalls können wir alle Glieder mit einem von $n - d_j$ verschiedenen Grad weglassen). Wir erhalten

$$\eta = \sum_{i=1}^{s} f_i(a)\bullet m_i = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} p_j(a)c_{ji}(a)m_i$$

$$= \sum_{j=1}^{t} p_j(a)\bullet \sum_{i=1}^{s} c_{ji}(a)m_i$$

und

$$\sum_{i=1}^{s} c_{ji}(a)m_i \in I^{d_j}M$$

also

$$I^{c-d_j} \sum_{i=1}^{s} c_{ji}(a)m_i \subseteq I^c M$$

Nach Wahl der $c_{ji}$ liegt die Summe links in N, d.h. es gilt

$$I^{c-d_j} \sum_{i=1}^{s} c_{ji}(a)m_i \subseteq I^c M \cap N$$

Wir multiplizieren mit $I^{n-c}$ und erhalten

$$I^{n-d_j} \sum_{i=1}^{s} c_{ji}(a)m_i \subseteq I^{n-c} \cdot I^c M \cap N \tag{1}$$

Für $n > c$ ist $p_j(a) \in I^{n-d_j}$. Also liegt

$$p_j(a) \cdot \sum_{i=1}^{s} c_{ji}(a)m_i$$

in der linken Seite von (1), also erst recht in der rechten. Summation über alle j ergibt

$$\eta \in I^{n-c} \cdot I^c M \cap N.$$

**QED**.

### 3.2.9 Die Unterraum-Topologie einer I-adischen Topologie

Seien A ein noetherscher Ring (kommutativ mit 1), M ein endlich erzeugter A-Modul,

$$N \subseteq M$$

ein Teilmodul und

$$I \subseteq A$$

ein Ideal. Wir versehen M mit der I-adischen Topologie. Dann ist die Unterraum-Topologie von N gerade die I-adische Topologie.

**Beweis**. Nach der gerade bewiesenen Aussage von 3.2.8 gilt mit den dort verwendeten Bezeichnungen

$$I^n N \subseteq I^n M \cap N \subseteq I^{n-c} N$$

für jedes $n > c$. Die erste Inklusion bedeutet, die offenen Mengen der Unterraum-Topologie sind offen bezüglich der I-adischen Topologie. Die zweite bedeutet, die I-adische offenen Mengen von N sind offen bezüglich der Unterraum-Topologie.
**QED**.

### 3.2.10 Vervollständigen durch Tensorieren

Seien A ein noetherscher Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter A-Modul.

Wir schreiben $\hat{A}$ und $\hat{M}$ für die I-adischen Vervollständigungen von A bzw. M. Dann gilt

$$M \otimes_A \hat{A} \cong \hat{M}.$$

Ist insbesondere A vollständig in der I-adischen Topologie, so auch M.
**Beweis**. Nach 3.2.3 ist die I-adische Vervollständigung einer exakten Sequenz exakt. Betrachten wir eine exakte Sequenz der Gestalt

$$A^r \longrightarrow A^s \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Durch Übergang zur den Vervollständigungen erhalten wir, da die Vervollständigung mit endlichen direkten Summen kommutiert, eine exakte Sequenz

$$\hat{A}^r \longrightarrow \hat{A}^s \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow 0.$$

und damit ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{A}^r & \longrightarrow & \hat{A}^s & \longrightarrow & \hat{M} & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ A^r \otimes_A \hat{A} & \longrightarrow & A^s \otimes_A \hat{A} & \longrightarrow & M \otimes_A \hat{A} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen seien dabei induziert durch die natürlichen Abbildungen in die Vervollständigungen. Die beiden linken vertikalen Abbildungen sind dabei Isomorphismen. Dasselbe gilt deshalb auch für die rechte vertikale Abbildung.
**QED**.

### 3.2.11 Flachheit der Vervollständigung

Seien A ein noetherscher Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal und $\hat{A}$ die I-adische Vervollständigung.

Dann ist $\hat{A}$ flach über A.

**Beweis**. Nach 3.1.14 reicht es zu zeigen, für jedes Ideal $J \subseteq A$ ist die natürliche Abbildung

$$J \otimes \hat{A} \longrightarrow \hat{A},\ x \otimes a \mapsto xa,$$

injektiv. Nach 3.2.10 ist aber $J \otimes \hat{A} = \hat{J}$, und die natürliche Abbildung $\hat{J} \longrightarrow \hat{A}$ ist injektiv (nach 3.2.3 und 3.219).

**QED**.

### 3.2.12 Durchschnittsatz von Krull (allgemeine Variante)

Seien A ein noetherscher Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein eindlich erzeugter A-Modul. Wir setzen

$$N := \bigcap_{n=0}^{\infty} I^n M.$$

Dann gibt es ein Element $a \in I$ mit $a \equiv 1 \bmod I$ und $aN = 0$.
**Beweis**. Nach dem Lemma von Nakayame reicht es zu zeigen,

$$IN = N.$$

Nach dem Lemma von Artin-Rees gilt

$$I^n M \cap N \subseteq IN$$

für hinreichend großes N. Die linke Seite stimmt aber nach Definition von N mit N überein.
**QED**.

### 3.2.13 Durchschnittsatz von Krull (spezielle Variante)

(i) Seien A ein noetherscher Ring und $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$ ein Ideal von A. Dann ist für jeden endlich erzeugten A-Modul M die I-adische Topologie separiert und jeder Teilmodul ist abgeschlossen in M.

(ii) Für jeden noetherschen Integritätbereich A und jedes echte Ideal $I \subseteq A$ gilt

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I^n = \{0\}.$$

**Beweis**. Zu (i). Das Element a des vorigen Satzes liegt in der vorliegenden Situation in keinem maximalen Ideal von A, ist also eine Einheit. Mit aN = 0 gilt deshalb N = 0, d.h. M ist separiert. Für jeden Teilmodul M' $\subseteq$ M ist auch M/M' separiert, also ist M' nach 3.2.2 abgeschlossen.

Zu (ii). Wir wenden den vorangehende Satze 3.2.12 an mit M = A. Weil 1 nicht in I liegt, mußt dann das Element a von Null verschieden sein. Weil A ein Integritätsbereich ist, gilt mit $a\cdot \bigcap_{n=0}^{\infty} I^n = 0$ sogar $\bigcap_{n=0}^{\infty} I^n = 0$.

**QED**.

**3.2.14 Die I-adische Vervollständigung von M/JM**

Seien A ein noetherscher Ring, I und J Ideale von A und M ein endlich erzeugter A-Modul. Wir verwenden die Bezeichnungen $\hat{}$ für die I-adische Vervollständigung und $\psi$ für die natürliche Einbettung in die Vervollständigung. Es gilt:

(i) $(JM)^\wedge = J\hat{M}$ = Abschließung von $\psi(M)$ in $\hat{M}$.

(ii) $(M/JM)^\wedge = \hat{M}/J\hat{M}$.

**Beweis**. Zu (i). Nach 3.2.3 und 3.2.9 ist

$$(JM)^\wedge$$

der Kern der natürlichen Abbildung $\hat{M} \longrightarrow (M/JM)^\wedge$ und (nach 3.2.3) die Abschließung von $\psi(JM)$ in $\hat{M}$, d.h. es ist

$$(JM)^\wedge = \text{Abschließung von } \psi(M) \text{ in } \hat{M}.$$

Fixieren wir ein Erzeugendensystem von J,

$$J = a_1A + ... + a_rA$$

und betrachten die A-lineare Abbildung

$$\varphi: M^r \longrightarrow M, (m_1, ... , m_r) \mapsto a_1m_1 + ... + a_r m_r.$$

Dann ist die Sequenz

$$M^r \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\mu} M/JM \longrightarrow 0,$$

wobei $\mu$ die natürliche Abbildung auf den Faktor bezeichne, exakt. Wir gehen zu den I-adischen Vervollständigungen über und erhalten eine exakte Sequenz

$$\hat{M}^r \xrightarrow{\hat{\varphi}} \hat{M} \xrightarrow{\hat{\mu}} (M/JM)^\wedge \longrightarrow 0.$$

Die Abbildung $\hat{\varphi}$ ist dabei durch dieselbe Formel gegeben wie $\varphi$. Deshalb gilt

$$(JM)^\wedge = \operatorname{Ker}(\hat{\mu}) = \operatorname{Im}(\hat{\varphi}) = J\hat{M}.$$

Zu (ii). Folgt aus 3.2.3 und (i).

**QED**.

**3.2.15 Beispiel: Der formale Potenzreihen-Ring als Vervollständigung**

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und $X_1, ... , X_n$ Unbestimmte. Dann ist die

$(X_1, \dots, X_n)$-adische Vervollständigung von $A[X_1, \dots, X_n]$ gerade der formale Potenzreihen-Ring $A[[X_1, \dots, X_n]]$.

**Beweis**. Wir setzen $R := A[X_1, \dots, X_n]$, $S := A[[X_1, \dots, X_n]]$ und

$$I := (X_1, \dots, X_n)R.$$

Die natürlichen Abbildungen

$$S \longrightarrow S/(X_1, \dots, X_n)^r = R/I^r$$

induzieren auf Grund der Universalitätseigenschaft von $\hat{R}$ einen Ring-Homomorphismus

$$\alpha: \hat{R} \longrightarrow S, (p_n \bmod I^n) \mapsto p.$$

Dabei ist p die formale Potzenzreihe, deren Glieder des Grades < n mit den Gliedern des Grades < n des Polynoms $p_n$ übereinstimmt für n = 1, 2, .... Weiter hat man eine Abbildung

$$\beta: S \longrightarrow :\hat{R}, p \mapsto (p_n \bmod I^n),$$

wobei $p_n$ aus der formalen Potenzreihe p entstehe, indem man in p alle Gliedes eines Grades $\geq$ n wegläßt. Aus der Beschreibung der beiden Abbildungen liest man ab, daß sie zueinander invers sind.

**QED**.

### 3.2.16 Die Vervollständigung eines Rings und formale Potenzreihen

Seien A ein noetherscher Ring und

$$I = (a_1, \dots, a_r) \subseteq A$$

ein Ideal. Dann ist die I-adische Vervollständigung von A isomorph zu

$$\hat{A} = A[[X_1, \dots, X_n]]/(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n).$$

Insbesondere ist $\hat{A}$ noethersch (vgl. 1.4.4).

**Beweis**. Wir setzen

$B := A[X_1, \dots, X_n]$

$I' := (X_1, \dots, X_n)B$

$J := (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)B$

Dann gilt

$B/J \cong A$

und die I-adische Topologie von A entspricht dabei gerade der I'-adische Topologie des B-Moduls B/J. Wir verwenden $\hat{\ }$ zur Bezeichnung der I'-adische Topologie und erhalten (nach 3.2.14)

$$(B/J)^{\wedge} = \hat{B}/\hat{J} = \hat{B}/J\hat{B} = A[[X_1, ... , X_n]]/(X_1 - a_1, ... , X_n - a_n).$$

**QED**.

### 3.2.17 Die Topologie der I-adischen Vervollständigung

Seien A ein noetherscher Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal und M endlich erzeugter A-Modul. Bezeichne $\hat{M}$ die I-adische Vervollständigung von M. Dann gilt:

(i) Die Topologie des A-Moduls $\hat{M}$ ist gleich der I-adischen Topologie.

(ii) Die Topologie des $\hat{A}$-Moduls $\hat{M}$ ist gleich der $I\hat{A}$-adischen Topologie.

**Beweis**. Zu (i). Bezeichne

$$M_n^* := \mathrm{Ker}(\hat{M} \longrightarrow M/I^nM)$$

dein Kern der natürlichen Abbildung $\hat{M} \longrightarrow M/I^nM$. Dann ist die Topologie von $\hat{M}$ gerade die lineare Topologie, welche durch die Familie der $M_n^*$ gegeben ist. Somit reicht es zu zeigen,

$$M_n^* = I^n\hat{M}. \tag{1}$$

Weil $M/I^nM$ diskret ist bezüglich der I-adischen Topologie, so ist

$$(M/I^nM)^{\wedge} = M/I^nM.$$

Nach 3.2.14 ist Kern der natürlichen Abbildung

$$\hat{M} \longrightarrow (M/I^nM)^{\wedge} = M/I^nM$$

gleich $I^n\hat{M}$. Also gilt (1).

Zu (ii). Folgt aus (1) und den Identitäten

$$I^n\hat{M} = I^n\hat{A}\hat{M} \text{ und } I^n\hat{A} = (I\hat{A})^n.$$

**QED**.

### 3.2.18 Kriterium für die treue Flachheit der Vervollständigung

Seien A ein noetherscher Ring und $I \subseteq A$ ein Ideal. Wir denken uns A mit der I-adischen Topologie versehen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$.

(ii) Jedes Ideal von A ist eine abgeschlossene Teilmenge von A.

(iii) Die I-adische Vervollständigung $\hat{A}$ von A ist treuflach über A.

**Beweis**. (i) $\Rightarrow$ (ii). Das ist die Aussage des Krullschen Durchschnittsatzes 3.2.13.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Weil $\hat{A}$ flach ist über A (3.2.11), reicht es zu zeigen,

$$m\hat{A} \neq \hat{A}$$

für jedes maximale Ideal m von A. Nach Voraussetzung ist {0} eine abgeschlossene Teilmenge von A, d.h.

$$\bigcap I^n = \{0\}.$$

Die natürliche Einbettung in die Vervollständigung

$$A \longrightarrow \hat{A}$$

ist somit injektiv. Nach 3.2.14 ist $m\hat{A}$ die Abschließung von m in $\hat{A}$. Nach Voraussetzung ist aber m abgeschlossen in A, d.h. es ist

$$m\hat{A} \cap A = m.$$

Weil das Einselement nicht in m liegt, kann es damit auch nicht in $m\hat{A}$ liegen, d.h. es gilt

$$m\hat{A} \neq \hat{A}.$$

<u>(iii) $\Rightarrow$ (i)</u>. Weil $\hat{A}$ treuflach über A ist, gilt nach 3.1.10

$$m\hat{A} \cap A = m$$

für jedes maximale Ideal m von A.

Nach dem Krullschen Durchschnittsatz 3.2.13 und 3.2.2 ist jeder $\hat{A}$-Teilmodul von $\hat{A}$ abgeschlossen. Insbesondere ist also

$$m\hat{A} \text{ abgeschlossen in } \hat{A}.$$

Weil die natürliche Abbildung $A \longrightarrow \hat{A}$ stetig ist, ist damit auch

$$m = m\hat{A} \cap A \text{ abgeschlossen in } A.$$

Wäre I nicht in m, so wäre auch $I^n$ nicht in m, also

$$m + I^n = A$$

für jedes n. Dann wäre aber die Abschließung von m,

$$m = \bigcap (m + I^n) = A.$$

Dies steht im Widerspruch zur Annahme, daß m ein maximales Ideal von A sein soll. Wir haben gezeigt, I liegt in jedem maximalen Ideal von A, d.h. es gilt $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$.

**QED**.

### 3.2.19 Defintion: Zariski-Ring

Ein noetherscher Ring A, für welchen die Bedingungen des vorangehenden Satzes erfüllt sind (für ein geeignet gewähltes Ideal I), heißt <u>Zariski-Ring</u>, und das Ideal I heißt <u>Definitionsideal</u> des Zariski-Rings A.

**<u>Bemerkungen</u>**

(i) Ein Definitionsideal eines Zariski-Ring ist nicht eindeutig bestimmt. Jedes andere Ideal von A, welches dieselbe Topologie wie I definert, ist ebenfalls ein Definiiotnsideal.

(ii) Das wichtigste Beispiel für einen Zariski-Ring ist das eines noetherschen lokalen Rings (A, m) mit dessen maximalen Ideal als Definitionsideal. Die m-adische Topologie von A heißt auch <u>natürliche Topologie</u> des lokalen Rings A.

(iii) Wenn wir von der Vervollständigung eines lokalen Rings sprechen, so verstehen wir darunter stets die m-adische Vervollständigung, falls dies nicht explizit anders gefordert wird.

### 3.2.20 Die Vervollständigung eines semi-lokalen Rings

Seien A ein noetherscher semi-lokaler Ring mit den maximalen Idealen

$$m_1, \ldots , m_r$$

und

$$I := \mathrm{rad}(A) = m_1 \cap \ldots \cap m_r .$$

Dann ist die I-adische Vervollständigung $\hat{A}$ von A gleich dem direkten Produkt

$$\hat{A} = \hat{A}_1 \times .. \times \hat{A}_r.$$

Dabei sei $A_i := A_{m_i}$ die Lokalisierung von A in $m_i$ und $\hat{A}_i$ die Vervollständigung des lokalen Rings $A_i$.

**Beweis**. Da die $m_i$ paarweise verschiedene maximale Ideale sind, gilt

$$m_i^n + m_j^n = A \text{ für } i \neq j$$

(d.h.sie sind paarweise komaximal). Nach dem Chinesischen Restsatz gilt dann

$$I = m_1 \cap \ldots \cap m_r = m_1 \bullet \ldots \bullet m_r$$

Und

$$A/I^n \cong A/m_1^n \times \ldots \times A/m_r^n \quad (1)$$

Für jedes i ist der Faktorring $A/m_i^n$ lokal, d.h. es gilt

$$A/m_i^n \cong (A/m_i^n)_{m_i} \cong A_{m_i}/m_i^n A_{m_i}$$

Aus (1) erhalten wir durch Übergang zum inversen Limes

$$\begin{aligned}\hat{A} &\cong \varprojlim_n A_{m_1}/m_1^n A_{m_1} \times \ldots \times \varprojlim_n A_{m_r}/m_r^n A_{m_r} \\ &= \hat{A}_1 \times .. \times \hat{A}_r.\end{aligned}$$

Dabei ist $\hat{A}_i = \varprojlim_n A_{m_i}/m_i^n A_{m_i}$ die Vervollständigung des lokalen Rings $A_{m_i}$ bezüglich der natürlichen Topologie.

**QED**.

### 3.2.21 Zusammenfassung

Sein (A, m) ein lokaler noetherscher Ring. Dann gilt:

(i) $\bigcap_{n=0}^{\infty} m^n = \{0\}$.

(ii) $\bigcap_{n=0}^{\infty} (N + m^n M) = N$

für jeden endlich erzeugten A-Modul M und jeden Teilmodul $N \subseteq M$.

(iii) Die Vervollständigung $\hat{A}$ von A in der natürlichen Topologie ist treuflach über A. Insbesondere ist die natürliche Einbettung $A \longrightarrow \hat{A}$ injektiv und es gilt

$I\hat{A} \cap A = I$ für jedes Ideal $I \subseteq A$.

(iv) $\hat{A}$ ist ein lokaler noetherscher Ring mit dem maximalen Ideal $m\hat{A}$. Er hat denselben Restkörper wie A. Allgemeiner gilt $\hat{A}/m^n\hat{A} = A/m^n$ für jede natürliche Zahl n.

(v) Ist A vollständig und $I \subset A$ ein echtes Ideal von A, so ist A/I ein vollständiger lokaler Ring.

**Bemerkungen**

(i) Die Lokalisierung $A_p$ eine vollständigen lokalen Rings A in einem Primideal p ist im allgemeinen nicht vollständig.

(ii) Jeder Artinsche lokale Ring (A, m) ist vollständig (weil sein Radikal m nilpotent ist).

## *3.3 Ganze Erweiterungen*

### 3.3.1 Definition: ganze Erweiterung

Sei A ein Teilring eines (kommutativen) Rings B (mit 1). Wir sagen in dieser Situation, B sei eine Erweiterung von A. In dieser Situation sagen wir, ein Element $b \in B$ ist ganz über A, wenn Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeffizienten aus A ist, d.h. wenn eine Relation der Gestalt

$$b^n + a_1 b^{n-1} + ... + a_n = 0 \text{ mit } a_i \in A$$

besteht. Das Polynom

$$X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_n$$

heißt dann Ganzheitspolynom für b über A. Ist jedes Element von B ganz über A, so heißt B ganz über A oder auch ganze Erweiterung von A.

### 3.3.2 Kriterium für die Ganzheit eines Elements, die ganze Abschließung

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und B eine Erweiterung von A. Dann gilt:

(i) Für ein Element $b \in B$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.
1. b ist ganz über A.
2. A[b] ist ein endlich erzeugter A-Modul.
3. b liegt in einem Zwischenring C, $A \subseteq C \subseteq B$, welcher als A-Modul endlich erzeugt ist.

(ii) Sei $\tilde{A}$ die Menge der Elemente von B, welche ganz sind über A. Dann ist $\tilde{A}$ ein Ring zwischen A und B, $A \subseteq \tilde{A} \subseteq B$. Er heißt ganze Abschließung von A in B.

**Beweis**. Zu (i). 1. ⇒ 2. Sei

$$f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_n \in A[X]$$

ein Ganzheitspolynom für $b \in B$. Für vorgegebenes $P(X) \in A[X]$ betrachten wir den Rest r(X), der bei Division von P durch f entsteht,

$$P(X) = Q(X) \cdot f(X) + r(X), Q(X), r(X) \in A[X], \deg r < \deg f = n.$$

Diese Division mit Rest kann ausgeführt werden, weil der höchste Koeffizient von f gleich 1 ist. Dann gilt

$P(b) = r(b)$,

d.h. jedes Polynom in b kann durch ein Polynom in b eines Grades n geschrieben werden. Der Teilring

$$A[b] = A + Ab + Ab^2 + ... + Ab^{n-1}$$

von B ist als A-Modul endlich erzeugt.

2. ⇒ 3. Bedingung 3 ist mit C := A[b] erfüllt.

3. ⇒ 1. Sei C ein Ring zwischen A und B,

$$A \subseteq C \subseteq B,$$

welcher als A-Modul endlich erzeugt wird und das Element b enthält. Wir schreiben C in der Gestalt

$$C = A\bullet c_1 + ... + A\bullet c_n.$$

Wegen $b \in C$ liegen die Produkte der Erzeuger $c_i$ mit b ebenfalls in C, d.h.

$$b\bullet c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j \text{ mit } a_{ij} \in A.$$

Es folgt

$$\sum_{j=1}^{n} (b\bullet\delta_{ij} - a_{ij})\bullet c_j = 0 \text{ für } i = 1, ... , n.$$

Wir betrachten die Matrix mit den Einträgen $b\bullet\delta_{ij} - a_{ij}$. Multiplikation der i-ten Gleichung mit der adjungierten Unterdeterminante zur Position (i, j') mit festtem j' und Aufsummieren der Produkte liefert nach dem Entwicklungssatz für Determinanten[102]

$$\det(b\bullet\delta_{ij} - a_{ij})\bullet c_{j'} = 0$$

für jedes j'. Da ein Linearkombination der $c_{j'}$ gleich $1 \in C$ ist, folgt

$$\det(b\bullet\delta_{ij} - a_{ij}) = 0.$$

Dies ist ein Ganzheitspolynom für b über A, d.h. b ist ganz über A.

Zu (ii). Sind $b', b'' \in \tilde{A}$, d.h. sind b' und b'' ganz über A, so ist

$$A[b']$$

ein endlich erzeugter A-Modul und, weil b'' auch ganz ist über A[b'],

$$A[b', b'']$$

ein endlich erzeugter A[b']-Modul. Zusammen ergibt sich, daß

$$A[b', b'']$$

ein endlich erzeugter A-Modul ist. Da die Elemente $b'b''$ und $b' \pm b''$ in diesem A-Modul liegen, sind sie nach (i) ganz über A, d.h. sie liegen in $\tilde{A}$. Mit anderen Worten, $\tilde{A}$ ist ein (kommutativer) Ring (mit 1).

**QED**.

### 3.3.3 Definition: normale Ringe

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und B ein Erweiterung von A. Falls A mit seiner ganzen Abschließung in B übereinstimmt, so heißt A ganz abgeschlossen in B. Ist A insbesondere ein Integritätsbereicht, welcher ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist, so heißt A ganz abgeschlossener Integritätsbereich. Ein normaler Ring ist ein kommutativer Ring A mit 1, welcher die Eigenschaft hat, daß für jedes Primideal $p \in \operatorname{Spec} A$ die Lokalisierung $A_p$ ein ganz abgeschlossnere Integritätsbereich ist.

**Bemerkungen**

(i) Der Begriff "normaler Ring" wird oft in dem Sinne verwendet, daß man darunter einen ganz abgeschlossenen Integritätsbereich versteht.

(ii) Die obige Definition geht auf Serre und Grothendieck zurück.

(iii) Ist A eine noetherscher Ring, welcher normal ist im Sinne der obigen Definition 3.3.3, so kann man zeigen, daß A isomorph ist zum direkten Produkt

$$A \cong A/p_1 \times ... \times A/p_r ,$$

[102] Wie beim Beweis der Cramerschen Regel.

wobei $p_1, \dots, p_r$ die minimalen Primideale von A bezeichnen sollen. Jeder der Faktoren $A/p_i$ ist dann ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich (vgl. Aufgabe 9.11 bei Matsumura).

(iv) Umgekehrt ist das direkte Produkt einer endlichen Anzahl von ganz abgeschlossenen Integritätsbereichen normal (siehe unten).

### 3.3.4 Die ganze Abgeschlossenheit der ganzen Abschließung

Seien $A \subseteq C \subseteq B$ ineinander liegende Ringe. Dann gilt:

(i) Ist $b \in B$ ganz über C und C ganz über A, so ist b ganz über A.
(ii) Die ganze Abschließung von A in B ist ganz abgeschlossen in B.

**Beweis**. Zu (i). Nach Voraussetzung gibt es ein Ganzheitpolynom

$$f(X) = X^n + c_1X^{n-1}+\dots+c_n \in C[X]$$

für b über C. Weil die Koeffizienten $c_i$ in C liegen, sind sie ganz über A. Deshalb ist

$$A[c_1, \dots, c_n] \tag{1}$$

ein endlich erzeugter A-Modul. Die Koeffizienten des Ganzheitspolynoms f liegen in im Ring (1). Deshalb ist b sogar ganz über (1). Dann ist aber

$$A[c_1, \dots, c_n, b]$$

ein endlich erzeugter Modul über (1) und damit über A. Insbesondere ist b ganz über A.
Zu (ii). Sei C die ganze Abschließung von A in B. Dann ist C ganz über A und nach (i) ist jedes über C ganze Element ganz über A, liegt also in C. Mit anderen Worten, C ist ganz abgeschlossen in B.
**QED**.

### 3.3.5 Beispiel: ZPE-Ringe

Jeder ZPE-Ring ist ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich.
**Beweis**. Sei A ein ZPE-Ring. Dann ist A nach Definiton ein Integritätsbereich. Sei

$$K := Q(A)$$

der Quotientenkörper von A und $b \in K$ ein über A ganzes Element. Wir haben zu zeigen $b \in A$. Nach Voraussetzung gibt es ein Ganzheitspolynom

$$f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n \in A[X].$$

Wir schreiben $b = \frac{r}{s}$ mit $r, s \in A$. Weil A ein ZPE-Ring ist, können wir annehmen,

r und s sind teilerfremd.

Wir setzen b in f(X) ein und erhalten in K:

$$0 = f(b) = f(\tfrac{r}{s}) = (\tfrac{r}{s})^n + a_1(\tfrac{r}{s})^{n-1} + \dots + a_n.$$

Multiplikation mit $s^n$ führt zu einer Identität in A:

$$0 = r^n + a_1r^{n-1}s + a_2r^{n-2}s^2 + \dots + a_ns^n.$$

Alle Summanden auf der rechten Seite mit eventueller Ausnahme des ersten sind durch s teilbar. Dann muß aber auch der erste Summand durch s teilbar sein:

$$s \mid r^n.$$

Das bedeutet, jeder Primfaktor von s ist auch ein Primfaktor von r. Weil r und s teilerfremd sein sollen, ist dies nur möglich, wenn in s keine Primfaktoren vorkommen. Mit anderen Worten, s ist ein Einheit. Dann gilt aber

$$b = \frac{r}{s} \in A.$$

**QED**.

### 3.3.6 Beispiel für eine ganze Abschließung

Seien k ein Körper und t eine Unbestimmte. Wir setzen

$$A := k[t^2, t^3] \subseteq k[t] =: B.$$

Dann ist B ein ZPE-Ring, also ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich. Nun ist t ganz über A, also B ein endlich erzeugter A-Modul, also B ganz über A. Mit anderen Worten, B ist die ganze Abschließung von A im Quotienten Körper k(t) von A.

**Bemerkung**

Es ist nicht schwer einzusehen, daß

$$A \cong k[X, Y]/(Y^2 - X^3)$$

gilt. Der Ring A ist also gerade der Koordinaten-Ring der semikubischen Parabel. Diese hat eine Singularität im Ursprung. Die Tatsache, daß A nicht ganz abgeschlossen ist steht im Zusammenhang mit der Existenz dieser Singularität.

### 3.3.7 Ganze Abschließung und Quotientenbildung

Seien $A \subseteq B$ ineinander liegende Ringe, $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge und $\widetilde{A}$ die ganze Abschließung von A in B. Dann gilt:

(i) Die ganze Abschließung von $A_S$ in $B_S$ ist gerade $\widetilde{A}_S$.

(ii) Ist A ganz abgeschlossen in B, so ist auch $A_S$ ganz abgeschlossen in $B_S$.

**Beweis**. Zu (i). Sei $b \in B_S$ ganz über $A_S$. Wir wählen ein Ganzheitpolynom

$$f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n \in A_S[X]$$

von b über $A_S$ und schreiben

$$b = \frac{b'}{s}, a_i = \frac{a'_i}{s} \text{ mit } b', a'_i \in A \text{ und } s \in S.$$

Man beachte, weil die Anzahl der $a_i$ endlich ist, kann man durch Erweitern der Brüche erreichen, daß überall im Nenner dassselbe Element steht. Wir setzen in f für X den Wert b ein und multiplizieren mit $s^n$. Das Ergebnis ist ein Element

$$s^n\bullet f(b) = b'^n + a'_1b'^{n-1} + sa'_2b'^{n-2} + s^2a'_3b'^{n-3} + ... + s^{n-1}a'_n$$

von B, dessen Bild in $B_S$ gleich Null ist. Deshalb wird dieses Element von einem Element $t \in S$ annulliert. Multiplikation mit der n-ten Potenz von t ergibt dann aber auch gleich Null:

$$\begin{aligned} 0 &= (t\bullet s)^n\bullet f(b) \\ &= (tb')^n + ta'_1(tb')^{n-1} + t^2sa'_2(tb')^{n-2} + t^3s^2a'_3(tb')^{n-3} + ... + t^ns^{n-1}a'_n. \end{aligned}$$

Diese Identität zeigt, $tb' \in B$ ist ganz über A, d.h. $tb' \in \widetilde{A}$. Dann gilt aber

$$b = \frac{b'}{s} = \frac{tb'}{ts} \in \widetilde{A}_S.$$

Wir haben gezeigt, die ganze Abschließung von $A_S$ in $B_S$ liegt in $\widetilde{A}_S$. Sei umgekehrt $b \in \widetilde{A}_S$. Wir haben zu zeigen, b ist ganz über A. Nach Voraussetzung hat b die Gestalt

$$b = \frac{b'}{s}$$

mit $b' \in \widetilde{A}$ und $s \in S$. Insbesondere ist b' ganz über A. Sei

$$f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n \in A[X]$$

ein Ganzheitspolynom von b' über A. Es gilt

$$0 = f(b') = b'^n + a_1b'^{n-1} + ... + a_n$$

in B. Wir wenden den natürlichen Homomorphismus $B \longrightarrow B_S$ und erhalten in $B_S$

$$0 = s^n\bullet(\frac{b'}{s})^n + s^{n-1}a_1(\frac{b'}{s})^{n-1} + s^{n-2}a_2(\frac{b'}{s})^{n-2} + ...$$

Da das Bild von s in $B_S$ ein Einheit ist, können wir diese Identität durch $s^n$ teilen. Wir erhalten

$$0 = b^n + \frac{a_1}{s}b^{n-1} + \frac{a_2}{s^2}b^{n-2} + ... + \frac{a_n}{s^n}.$$

Mit anderen Worten, b ist ganz über $A_S$.

Zu (ii). Sei A ganz abgeschlossen in B. Dann ist die ganze Abschließung von A in B gleich

$$\tilde{A} = A.$$

Nach (i) ist die ganze Abschließung von $A_S$ in $B_S$ gleich

$$\tilde{A}_S = A_S.$$

Mit anderen Worten $A_S$ ist ganz abgeschlossen in $B_S$.

**QED**.

### 3.3.8 Ganzheit und algebraische Körpererweiterungen

Seien A ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper K und L/K eine algebraische Körper-Erweiterungen. Für jedes Element $\alpha \in L$ sind dann die folgenden Bedingungen äquivalent.

(i) $\alpha$ ist ganz über A.

(ii) Die Koeffizienten des Minimalpolynoms von $\alpha$ über A liegen in A.[103]

**Beweis**. Bezeichne

$$f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n \in K[X]$$

das Minimalpolynom von $\alpha$ über K.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Nach Vorauissetzung liegen die Koeffizienten $a_i$ in A. Also ist f ein Ganzheitspolynom von $\alpha$ über A, d.h. $\alpha$ ist ganz über A.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Bezeichne $\overline{L}$ eine algebraische Abschließung von L. Dann zerfällt f über $\overline{L}$ in Linearfaktoren,

$$f(X) = (X - \alpha_1)\bullet...\bullet(X - \alpha_n).$$

Weil f irreduzibel über K ist, gibt es für jedes i einen K-Isomorphismus

$$K(\alpha_i) \cong K[X]/(f(X)) \cong K(\alpha),$$

welcher $\alpha$ in $\alpha_i$ überfführt. Jedes Ganzheitspolynom für $\alpha$ ist dami auch ein solches für $\alpha_i$. Insbesondere sind die $\alpha_i$ ganz über A. Wegen

$$a_1, ... , a_n \in A[\alpha_1, ... , \alpha_n]$$

[103] d.h. diese Polynom ist ein Ganzheitspolynom von $\alpha$ über A.

sind dann aber auch die $a_i$ ganz über A (und liegen in K). Weil A nach Voraussetzung ganz abgeschlossen ist, folgt

$$a_1, \dots, a_n \in A,$$

d.h. es gilt (ii).
**QED**.

**3.3.9 Beispiel einer ganz abgeschlossenen quadratischen Erweiterung**
Seien A ein ZPE-Ring, in welchem 2 eine Einheit ist, und

$$f \in A$$

ein quadrat-freies Element, d.h. es gebe kein Primelement in A, durch dessen Quadrat f teilbar ist. Dann ist

$$A[\sqrt{f}]$$

ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich.
**Beweis**. Seien

$$K := Q(A)$$

der Quotienten-Körper von A und $\alpha = \sqrt{f}$ eine Quadratwurzel aus f, d.h.

$$\alpha^2 = f.$$

1. Fall: $\alpha \in K$.
Nach Wahl von $\alpha$ ist $\alpha$ ganz über A. Als ZPE-Ring ist A ganz abgeschlossen in K (nach 3.3.5). Also gilt $\alpha \in A$, also ist $A[\sqrt{f}] = A$ trivialer (als ZPE) ganz abgeschlossen.

2. Fall: $\alpha \notin K$.
Der Quotientenkörper von

$$A[\sqrt{f}] = A[\alpha]$$

ist dann

$$K(\alpha) = K + K\alpha.$$

Jedes Element $\xi \in K(\alpha)$ hat die Gestalt

$$\xi = x + y\alpha \text{ mit } x, y \in K.$$

Das Minimalpolynom von $\xi$ ist gleich

$$X^2 - 2xX + (x^2 - fy^2).$$

Nehmen wir an,

$$\xi \text{ ist ganz über } A[\alpha].$$

Weil $A[\alpha] = A + A\alpha$ ganz ist über A, ist dann $\xi$ auch ganz über A. Nach 3.3.8 liegen die Koeffizienten des Minimalpolynoms von $\xi$ über A in A, d.h.

$$2x \in A \text{ und } x^2 - fy^2 \in A.$$

Nach Voraussetzung ist 2 ein Einheit in A. Es folgt deshalb

$$x \in A,$$

also $fy^2 \in A$.
Schreiben wir y in der Gestalt

$$y = \frac{u}{v} \text{ mit } u, v \in A \text{ und } u, v \text{ teilerfremd.}$$

Dann gilt

$$fu^2 \in v^2 A.$$

Für jeden Primteiler p von v gilt damit $p^2 \in fu^2$. Weil f quadrat-frei ist, folgt $p \in u^2$, also p|u. Jeder Primteiler von u teilt somit v. Weil u und v teilerfremd sind, ist dies nur möglich, wenn v keinen Primteiler besitzt, d.h. wenn v ein Einheit von A ist. Dann gilt aber

$$y \in A.$$

Zusammen erhalten wir

$$\xi = x + y\alpha \in A[\alpha]$$

für jedes über $A[\alpha]$ ganze Element $\xi \in K(\alpha)$. Mit anderen Worten $A[\alpha]$ ist ganz abgeschlossen.
**QED**.

### 3.3.10 Ganze Erweiterungen und die Körper-Eigenschaft

Seien B ein Integritätbereich und $A \subseteq B$ ein Teilring mit der Eigenschaft, daß B ganz ist über A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) A ist ein Körper.
(ii) B ist ein Körper.

**Beweis**. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $b \in B - \{0\}$. Weil B ganz ist über A, besteht in B eine Identität

$$b^n + a_1 b^{n-1} + ... + a_n = 0 \text{ mit } a_i \in A \text{ für alle } i.$$

Weil B ein Integritätbereich und $b \neq 0$ ist, können wir annehmen,

$$a_n \neq 0,$$

Weil A ein Körper ist, ist damit $a_n$ eine Einheit in A und damit auch in B. Also ist

$$b\bullet(b^{n-1} + a_1 b^{n-2} + ... + a_{n-1}) = -a_n$$

eine Einheit in B. Dasselbe gilt dann auch für den Faktor b der linken Seite. Wir haben gezeigt, jedes von Null verschiedene Element von B ist eine Einheit in B. Mit anderen Worten, B ist ein Körper.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $a \in A - \{0\}$. Weil B ein Körper ist, besitzt a ein Inverses in B, sagen wir

$$b := a^{-1} \in B.$$

Weil B ganz ist über A, besteht eine Identität

$$b^n + a_1 b^{n-1} + ... + a_n = 0 \text{ mit } a_i \in A \text{ für alle } i.$$

Multiplikation mit $a^{n-1}$ liefert

$$b + a_1 + a_2 a + ... + a_n a^{n-1} = 0.$$

Alle Summanden auf der linken Seite - mit eventueller Ausnahme des ersten - liegen in A. Dann liegt aber auch der erste Summand in A, d.h. a besitzt in A ein Inverses. Wir haben gezeigt, jedes von Null verschiedene Element von A besitzt ein Inverses, d.h. A ist ein Körper.
**QED**.

### 3.3.11 Übereinander liegende maximale Ideale

Seien A ein Ring und B eine ganze Erweiterung von A. Dann gelten folgende Aussagen.
(i) Ist $P \subseteq B$ ein maximales Ideal von B, so ist $A \cap P$ ein maximales Ideal von A.
(ii) Ist $p \subseteq A$ ein maximales Ideal von A, so gibt es ein Primideal $P \subseteq B$ mit

$$A \cap P = p,$$

und jedes solche Primideal P von B ist maximal in B.

**Beweis**. 1. Schritt: Seien $P \subseteq B$ ein Primideal und $p := P \cap A$. Dann gilt:

$$P \text{ ist maximal in } B \Leftrightarrow p \text{ ist maximal in } A.$$

Die natürliche Einbettung $A \hookrightarrow B$ induziert einen injektiven Homomorphismus

$$A/p \longrightarrow B/P$$

von Ringen mit 1. Weil P ein Primideal ist, ist B/P ein Integritätsbereich. Weil B ganz ist über A, ist B/P ganz über A/p. Nach 3.3.10 gilt

$$B/P \text{ ist ein Körper} \Leftrightarrow A/p \text{ ist ein Körper.}$$

Das ist aber gerade die Behauptung des ersten Schritts.

Zum Beweis der Aussagen (i) und (ii) reicht es zu zeigen:

2. Schritt: Über jedem maximalen Ideal $p \subseteq A$ liegt ein maximales Ideal $P \subseteq B$.

Sei $p \subseteq A$ ein maximales Ideal von A. Es reicht zu zeigen,

$$pB \neq B,$$

denn dann gibt es ein maximales Ideal $P \subseteq B$ mit $pB \subseteq P$, und außerdem ist

$1 \notin P\cap A$,

d.h. $P\cap A$ ist ein echtes Ideal von A mit $p \subseteq P\cap A$. Weil p maximal in A ist, folgt

$$p = P\cap A.$$

Zeigen wir also, es gilt

$$pB \neq B.$$

Angenommen, es ist $pB = B$. Dann gibt es Elemente $p_i \in p$ und $b_1 \in B$ $(i = 1, \ldots, r)$ mit

$$\sum_{i=1}^{r} p_i b_i = 1.$$

Wir setzen

$$C := A[b_1, \ldots, b_r] \ (\subseteq B).$$

Nach Konstruktion gilt

$$pC = C. \tag{1}$$

Mit B ist auch C ganz über A, also als A-Modul endlich erzeugt, sagen wir

$$C = Ac_1 + \ldots + Ac_s$$

Wegen (1) bestehen Relationen

$$c_i = \sum_{i=1}^{r} q_{ij} c_j \text{ mit } q_{ij} \in p$$

für $i = 1, \ldots, s$. Es folgt

$$0 = \sum_{i=1}^{r} (\delta_{ij} - q_{ij} c_j).$$

Wir betrachten die Matrix der $\delta_{ij} - q_{ij} c_j$. Indem wir die i-te obige Identität mit der adjungierten Unterdeterminante zur Position (i, j') multiplizieren und die entstehenden Produkte addieren, erhalten wir nach dem Entwicklungssazt

$$\det(\delta_{ij} - q_{ij} c_j) \cdot c_{j'} = 0 \text{ für jedes } j'.$$

Weil eine Linearkombination der $c_j$, gleich 1 ist, folgt

$$\det(\delta_{ij} - q_{ij} c_j) = 0.$$

Wegen $q_{ij} \in p$ bekommt diese Identität modulo p die Gestalt

$$1 \equiv 0 \bmod p.$$

Es folgt $1 \in p$, was im Widerspruch dazu steht, daß p ein maximales Ideal von A sein soll. Die Annahme $pB = B$ ist also falsch.

**QED**.

**3.3.12**

Seien A ein Ring, B eine ganze Erweiterung von A und $p \subseteq A$ ein Primideal von A. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) Es gibt ein Primideal $P \subseteq B$, welches über p liegt, d.h.mit $P \cap A = p$.

(ii) Keine zwei über p liegende Primideal $P \subseteq B$ sind ineinander enthalten.

(iii) Seien
- A ein ganz-abgeschlossener Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper K,
- L/K eine normale Körper-Erweiterung im Sinne der Galois-Theorie (d.h. L/K ist algebraisch und mit jedem $\alpha \in L$ liegen alle Konjugierten von $\alpha$ ebenfalls in L).
- B die ganze Abschließung von A in L.

Dann sind je zwei über $p \subseteq A$ liegende Primideale von B konjugiert zueinander.

**Beweis**.
**QED**.

**Aufgaben**

11.
Sei A ein noetherscher Integritätsbereich und $p_1,\ldots, p_r$ dessen (paarweise verschiedene) minimalen Ideale. Wir nehmen an,

$$A_p$$

ist ein Integritätsbereich für jedes Primideal $p \in \text{Spec } A$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $\text{Ass } A = \{ p_1,\ldots, p_r \}$.

(ii) $p_1 \cap \ldots \cap p_r = \sqrt{0} = 0$.

(iii) $p_i + \bigcap_{j\neq i} p_j = A$ für $i = 1, \ldots , r$.

(iv) $A \cong A/p_1 \times \ldots \times A/p_r$ .

## Literatur


Cartan, H., Eilenberg, S.
[1] Homological algebra, Princeton University Press 1956.
Bass, H.
[1] Algebraic K-theory, Benjamin, New York 1968.
Bourbaki, N.
[1] Bourbaki, N.: Algebre commutative, Hermann, Paris 1961-63
Goldmann, O.
[1] Goldman, O.: Hilbert rings and the Hilbert Nullstellensatz, Math. Z. 54 (1951), 136-40
Grothendieck, A.
[1] Sur quelques points d' algèbre homologique, Tohoku Math. J. 2:9 (1957), 119-221
Kaplansky, I.
[1] Kaplansky, I.: Commutative rings, Allyn and Bacon, 1970

Krull, W.
[7] Krull, W.: Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie, Math. Z. 54 (1951), 354-87

# Index

## —K—



## —L—



## —M—



## —N—



## —O—



## —P—



## —Q—



## —R—

# Inhalt