Zentrale einfache Algebren und Galois-Kohomologie

frei nach
Philippe Gille und Tamás Szamuely
siehe
http://www.cambridge.org/uk/catalogue.asp?isbn=9780521861038

Vorlesungszeiten

Dienstag	11.15-12.45 Uhr Seminarraum 3-11 Augustusplatz
Mittwoch	11.15-12.45 Uhr Seminarraum 3-11 Augustusplatz

7. Die K-Theorie von Milnor

In diesem Kapitel untersuchen wir die in Kapitel 4 eingeführten K-Gruppen von Milnor (gibt zwei grundlegende Konstruktionen in dieser Theorie: die der zahmen Symbole, welche Analoga zu den Residuen-Abbildungen der Kohomologie, und die der Norm, welche die Körpernorm $N_{K/k}: K^\times \longrightarrow k^\times$ einer endlichen Körper-Erweiterung auf den Fall der höheren K-Gruppen verallgemeinert. Erstere sind natürlich relativ einfach zu konstruieren. Der Nachweis für die Korrektheit der zweiten Konstruktion ist dagegen ziemlich trickreich. Dies hat zur Folge, daß dieses Kapitel recht technisch ist. Es gibt trotzdem eine Zahl interessanter Ergebnisse. Von diesen erwähnen wir das Reziprozitätsgesetz von Weil für das zahme Symbol über dem Funktionenkörper einer Kurve, ein Reziprozitätsgesetz von Rosset und Tate und die Betrachtungen von Bloch und Tate zur Bloch-Kato-Vermutung.

Der größte Teil des Materials in diesem Kapitel stammt aus den drei klassische Arbeiten von Milnor [1], Bass-Tate [1] und Tate [4]. Das Theorem von Kato zur Korrektheit der Definition der Norm-Abbildung tritt im zweiten Teil von dessen Abhandlung zur Klassenkörpertheorie von höherdimensionalen lokalen Körpern auf (Kato [1]) zusammen mit einer Beweis-Skitze.

7.1 Das Zahme Symbol

7.1.1 Die Multiplikation des K-Rings von Milnor

Wir erinnern daran, die n-te K-Gruppe von Milnor,

$$K_n^M(k) := (k^\times)^{\otimes n} / < a_1 \otimes ... \otimes a_n \mid a_i + a_j = 1 \text{ für ein } (i,j)>,$$

des Körpers k ist definiert als Faktorgruppe der n-ten Tensorpotenz $(k^\times)^{\otimes n}$ der multiplikativen Gruppe des Körper k modulo der Untergruppe, welche von allen Elementen der folgenden Gestalt erzeugt wird:

$$a_1 \otimes ... \otimes a_n \text{ mit } a_i + a_j = 1$$

für mindestens ein Paar (i,j) von unterschiedlichen Indizes. Insbesondere ist

$$K_0(k) =^{[1]} \mathbb{Z} \text{ und } K_1(k) = k^\times.$$

Die Elemente von $K_n^M(k)$ heißen Symbole, und wir schreiben

$$\{a_1,...,a_n\} := \text{Restklasse von } a_1 \otimes ... \otimes a_n \text{ in } K_n^M(k).$$

Die obigen Bedingungen der Gestalt

$$a_i + a_j = 1$$

[1] Auf der rechten Seite steht die additive Gruppe der ganzen Zahlen.

werden oft auch Steinberg-Relationen genannt.

Bemerkungen

(i) Die K-Gruppen von Milnor verhalten sich funktoriell bezüglich Körpererweiterungen: ist

$$\phi: k \subseteq K$$

eine natürliche Einbettung eines Teilkörpers in einen Erweiterungsörper, so hat man einen natürlichen Homomorphismus

$$i_{K/k}: K_n^M(k) \longrightarrow K_n^M(K),\ \{a_1,...,a_n\} \mapsto \{a_1,...,a_n\},$$

welcher durch die n-te Tensorpotenz von ϕ induziert wird. Das Bild von

$$\alpha \in K_n^M(k)$$

bei dieser Abbildung werden wir oft mit

$$\alpha_K := i_{K/k}(\alpha)$$

bezeichnen.

(ii) Die Tensorprodukt-Paarung

$$(k^\times)^{\otimes n} \times (k^\times)^{\otimes m} \longrightarrow (k^\times)^{\otimes(n+m)},\ (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\otimes\beta,$$

erhält die Steinberg-Relationen, induziert also eine bilineare Abbildung

$$K_n^M(k) \times K_m^M(k) \longrightarrow K_{n+m}^M(k)\ ,\ (\alpha, \beta) \mapsto \{\alpha, \beta\},$$

d.h. es gilt

$$\{\alpha+\alpha', \beta\} = \{\alpha, \beta\} + \{\alpha', \beta\} \text{ und } \{\alpha, \beta+\beta'\} = \{\alpha, \beta\} + \{\alpha, \beta'\}$$

und insbesondere für n = m = 1[2]:

$$\{\alpha\bullet\alpha', \beta\} = \{\alpha, \beta\} + \{\alpha', \beta\} \text{ und } \{\alpha, \beta\bullet\beta'\} = \{\alpha, \beta\} + \{\alpha, \beta'\}$$

(iii) Durch das Produkt von (ii) bekommt die direkte Summe

$$K_*^M(k) := \oplus_{n=0}^\infty K_n^M(k)$$

die Struktur eines graduierten Rings. Dieser Ring ist kommutativ im graduierten Sinne (d.h. superkommutativ) auf Grund der nachfolgenden Aussage. Nach Konstruktion handelt es sich um eine Faktor-Algebra der Tensor-Algebra:

$$K_*^M(k) = T_{\mathbb{Z}}(k^*)/(\ a \otimes(1-a) \mid a\in k^* - \{1\})$$

7.1.2 Superkommutativität der K-Gruppen-Multiplikation

Für $\alpha\in K_n^M(k)$ und $\beta\in K_m^M(k)$ gilt

$$\{\alpha, \beta\} = (-1)^{nm} \{\beta, \alpha\}.$$

Zum Beweis benötigen wir die folgende Aussage.

---

[2] Die Elemente von $K_n^M(k)$ sind endliche Summen von Elementen der Gestalt

$$\{a_1,...,a_n\}$$

mit $a_i\in k^*$. Im Fall n = 1, d.h. für

$$K_1^M(k) = k^*$$

ist die Summe in $K_1^M(k)$ identisch mit dem Produkt in k^*.

Lemma

Für beliebige Elemente x, $y \in k^\times$ gilt in $K_2^M(k)$:

$$\{x, -x\} = 0 \text{ und } \{x, x\} = \{x, -1\}.$$

Beweis des Lemmas.

In K_2^M gilt:

$$\{x, -x\} + \{x, -(1-x)x^{-1}\} = \{x, 1-x\} \quad \text{(Linearität bzgl. des zweiten Arguments)}$$
$$= 0 \quad \text{(Steinberg-Relation)}$$

Damit gilt

$$\{x, -x\} = -\{x, -(1-x)x^{-1}\}$$
$$= -\{x, 1 - x^{-1}\}$$
$$= \{x^{-1}, 1 - x^{-1}\} \quad \text{(Linearität bzgl. des ersten Arguments)}$$
$$= 0 \quad \text{(Steinberg-Relation).}$$

Damit ist die erste Identität bewiesen. Zum Beweis der zweiten berechnen wir die Differenz der beiden Seiten. Es gilt

$$\{x, x\} - \{x, -1\} = \{x, x/(-1)\} = \{x, -x\} = 0.$$

Das erste Gleichheitszeichen besteht wegen der Linearität bzgl. des zweiten Arguments. Das letzte wegen der bereits bewiesenen ersten Identität.

QED.

Beweis der Superkommutativität. Es gilt

$$0 = \{xy, -xy\} \quad \text{(erste Identität des Lemmas)}$$
$$= \{x,-x\}+\{x,y\}+\{y,x\}+\{y,-y\} \quad \text{(Bilinearität)}$$
$$= \{x, y\} + \{y, x\} \quad \text{(erste Identität des Lemmas)}$$

Damit ist die Behauptung für den Fall n = m = 1 bewiesen.

Die Fälle n = 0 bzw. m = 0 sind trivial (weil für abelsche Gruppen die Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{Z}$ von links mit der von rechts übereinstimmt). Der allgemeine Fall wird durch Induktion nach m+n bewiesen. Die Fälle, daß m+n gleich 0, 1 oder 2 ist, sind bereits bewiesen. Sei also

$$m+n > 2.$$

Einer der beiden Summanden m und n ist somit ≥ 2.O.B.d.A. können wir annehmen

$$n \geq 2.$$

Weil die beiden Seiten der zu beweisenden Identität von 7.1.2 linear in α sind, können wir annehmen, α hat die Gestalt

$$\alpha = \{a_1,\ldots,a_n\}.$$

Mit $\alpha' := \{a_1\}$ und $\alpha'' := \{a_2,\ldots,a_n\}$ gilt dann

$$\{\alpha, \beta\} = \{\{\alpha', \alpha''\}, \beta\}$$
$$= \{\alpha', \{\alpha'', \beta\}\} \quad \text{(Assoziativgesetz)}$$
$$= (-1)^{(n-1)m} \{\alpha', \{\beta, \alpha''\}\} \quad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$
$$= (-1)^{(n-1)m} \{\{\alpha', \beta\}, \alpha''\} \quad \text{(Assoziativgesetz)}$$
$$= (-1)^{(n-1)m} (-1)^{1\cdot m}\{\{\beta, \alpha'\}, \alpha''\} \quad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$
$$= (-1)^{nm} \{\beta, \{\alpha',\alpha''\}\} \quad \text{(Assoziativgesetz)}$$
$$= (-1)^{nm} \{\beta, \alpha\}$$

QED.

7.1.3 Beispiel: endliche Körper

Sei F eine endlicher Körper. Dann gilt

$$K_n^M(F) = 0 \text{ für jedes } n > 1.$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, jedes Element der Gestalt

$$\alpha = \{a_1,...,a_n\} \text{ mit } n > 1$$

ist Null (denn jedes Element von $K_n^M(F)$ ist eine Summe von endlich vielen Elementen dieser Gestalt). Nun ist aber α Produkt von $\{a_1, a_2\}$ und $\{...,a_n\}$. Es reicht also zu zeigen,

$$\{a_1, a_2\} = 0 \text{ in } K_2^M(F).$$

Sei ω ein Erzeuger der endlichen zyklischen Gruppe F^*. Dann sind a_1 und a_2 Potenzen von ω. Wegen der Bilinearität der Symbole reicht es zu zeigen,

(1) $$\{\omega, \omega\} = 0.$$

Wir zeigen zunächst

(2) $$2\bullet\{\omega, \omega\} = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} 2\bullet\{\omega, \omega\} &= 2\bullet\{\omega, -1\} && \text{(Lemma von 7.1.2)} \\ &= \{\omega, (-1)^2\} && \text{(Bilinearität)} \\ &= \{\omega, 1\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist (2) bewiesen. Zum Abschluß des Beweises reicht es somit, eine ungerade ganze Zahl zu finden, deren Produkt mit $\{\omega, \omega\}$ gleich Null ist.

Für den weiteren Beweis unterscheiden wir zwischen den beiden Fällen, daß die Charakteristik von F gerade bzw. ungerade ist.

<u>1. Fall</u>: $\# F = 2^m$.

Dann hat F^* die Ordnung $2^m - 1$, d.h. die (2^m-1)-te Potenz von ω ist 1. Es folgt

$$0 = \{1, \omega\} = \{\omega^{2^m-1}, \omega\} = (2^m-1)\bullet\{\omega, \omega\}.$$

Weil $2^m - 1$ ungerade ist, folgt die Behauptung.

<u>2. Fall</u>: $\# F =: q = p^m$, p ungerade Primzahl.

Wir verwenden ein Argument wie in 1.3.6.Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: F^* \longrightarrow F^{*2}, x \longrightarrow x^2.$$

Die Fasern dieser Abbildung bestehen aus genau zwei Elementen (mit jedem Urbild ist dessen Negatives ein weiteres Element derselben Faser). Also besteht

$$\varphi(F'^*) = F^{*2}$$

aus

$$\#F^*/2 = (q - 1)/2$$

Elementen. Deshalb bestehen die Mengen

$$\{x \mid x \in F^* - F^{*2}\} \text{ und } \{1 - x \mid x \in F^* - F^{*2}\}$$

aus jeweils (q-1)/2 Elementen. Wären sie disjunkt, so würde ihre Vereinigung aus q-1 Elementen bestehen, also gleich F^* sein. Das ist aber nicht möglich, denn 1 liegt in keiner der beiden Mengen (weil 1 ein Quadrat ist in F und 0 nicht in F^* liegt). Also sind die beiden Mengen nicht disjunkt. Es gibt also Elemente

$$a, b \in F^* - F^{*2} \text{ mit } a = 1 - b,$$

d.h.

$$a + b = 1.$$

Wir schreiben a und b als Potenzen des Erzeugers ω, sagen wir

$$a = \omega^i \text{ und } b = \omega^j.$$

Weil a und b keine Quadrate sind in F, sind i und j ungerade,

$$i, j \text{ ungerade.}$$

Wegen a + b = 1 gilt

$$0 = \{ a, b \} = \{\omega^i, \omega^j\} = ij\bullet\{\omega , \omega\}.$$

Weil i•j ungerade ist, folgt die Behauptung.

QED.

Bemerkung

Wie wir in Kapitel 6 gesehen haben, ist ein grundlegendes Hilfmittel bei der Untersuchung der Galois-Kohomologie von diskret bewerteten Körpern die Einführung von Residuum-Abbildungen. Unser nächsten Ziel besteht jetzt darin, das Analogon der Residuum-Abbildung für die K-Theorie von Milnor zu konstruieren.

7.1.4 Der Fall diskret bewerteter Körper

Seien K ein Körper und

$$v: K^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$$

eine diskrete Bewertung von K[3]. Den zugehörigen Bewertungsring bezeichnen wir mit

---

[3] d.h. v ist ein surjektiver Gruppen-Homomorphismus mit $v(x+y) \ge \inf\{v(x), v(y)\}$.

Typische Beispiele

• Die p-adische Bewertung

$$v_p: \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Z}, r \mapsto v_p(r),$$

mit $v_p(r) = n$, falls in der Primfaktorzerlegung von r die Primzahl p mit dem Exponenten n vorkommt.

Gewöhnlich schreibt man

$$v(x) = \infty,$$

falls x = 0 ist.

• Der Homomorphismus

$$k(x)^* \longrightarrow \mathbb{Z}, \frac{f}{g} \mapsto \deg(g)\text{-}\deg(f), \tag{1}$$

welcher jedes Polynom auf dessen negativen Grad abbildet.

Weiter ist für jedes irreduzible Polynom π von k[x] durch

$$k(x)^* \longrightarrow \mathbb{Z}, f \mapsto \mathrm{ord}_\pi(f),$$

eine diskrete Bewertung definiert. Dabei bezeichne $\mathrm{ord}_\pi(f)$ die Ordnung von f in π. Genauer: ist f ein Polynom,, in welchem π in der n-ten Potenz vorkommt (aber nicht in der (n+1)-ten), so gilt

$$\mathrm{ord}_\pi(f) = n$$

und für je zwei Polynome f, g ist

$$\mathrm{ord}_\pi(f/g) = \mathrm{ord}_\pi(f) - \mathrm{ord}_\pi(g).$$

Ist π ein lineares Polynom $\pi = x - p$, so ist $\mathrm{ord}_\pi(f)$ gerade die <u>Nullstellen-Polstellen-Ordnung</u> der rationalen Funktion f im Punkt p. Man kann zeigen, jede nicht-triviale diskrete Bewertung von k(x), die auf k* trivial ist (identisch gleich 0), ist von der oben angegebenen Gestalt.

Ist der Körper k algebraisch abgeschlossen, so ist jedes irreduzible Polynom linear, d.h. die Bewertungen von k(x)* entsprechen gerade den Punkten der projektiven Geraden über k (wobei die Bewertung (1) dem unendlich fernen Punkt entspricht).

• Kompakte Riemannsche Flächen. Seien X eine kompakte Riemannsche Fläche und $\mathcal{M}(X)$ der Körper der meromorphen Funktionen auf X. Für jeden Punkt $p \in X$ ist durch

$$\mathcal{M}(X)^* \longrightarrow \mathbb{Z}, f \mapsto \mathrm{ord}_p(f),$$

eine diskrete Bewertung definiert, wenn $\mathrm{ord}_p(f)$ die Nullstellen-Polstellen-Ordnung der meromorphen Funktion f bezeichnet. Man erhält auf diese Weise eine Bijektion zwischen den Punkten von X und den diskreten Bewertungen von $\mathcal{M}(X)$, die auf $\mathbb{C}$ triviale sind.

$$A := \{a \in A \mid v(a) \ge 0\}.$$

Weiter fixieren wir einen lokalen Parameter,

$$\pi \in A,\ v(\pi) = 1.$$

Dann läßt sich jedes Element von $x \in K^\times$ auf genau eine Weise in der Gestalt

$$x = u\pi^i \text{ mit } u \in A^*$$

schreiben.[4] Die Gruppe

$$K_n^M(K)$$

wird also von den Elementen der Gestalt

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, \pi\} \text{ und } \{u_1, \ldots, u_n\} \text{ mit } u_1, \ldots, u_2 \in A^*$$

erzeugt (wegen der Multi-Linearität der Symbole und der graduierten Kommutativität der Multiplikation)[5].

7.1.5 Die zahmen Symbole und die Spezialisierungsabbildungen

Sei K ein diskret bewerteter Körper mit dem Bewertungsring A und dem Restklassenkörper κ. Dann gibt es genau einen Gruppen-Homomorphismus

$$\partial^M: K_n^M(K) \longrightarrow K_{n-1}^M(\kappa)$$

mit

$$\partial^M(\{u_1, \ldots, u_{n-1}, \pi\}) = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}\}$$

für jeden lokalen Parameter π von A und beliebige Einheiten $u_1, \ldots, u_{n-1}$ von A. Dabei bezeichne $\bar{u}$ das Bild von u beim natürlichen Homomorphismus $A \longrightarrow \kappa$.

Zu vorgegebenen lokalen Parameter π gibt es außerdem genau einen Gruppen-Homomorphismus

$$s_\pi^M: K_n^M(K) \longrightarrow K_n^M(\kappa)$$

mit

$$s_\pi^M(\pi^{i_1}u_1, \ldots, \pi^{i_n}u_n) = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$$

für alle n-Tupel ganzer Zahlen $(i_1, \ldots, i_n)$ und alle n-Tupel $(u_1, \ldots, u_n)$ von Einheiten aus A.

Die Abbildung ∂^M heißt zahmes Symbol oder auch Residuum der K-Theorie von Milnor. Die Abbildungen s_π^M heißen Spezialisierungsabbildungen.

Bemerkung

• In der modernen algebraischen Geometrie ist der Begriff des Punktes so definiert, daß für jede (glatte) Kurve X im projektiven Raum mit dem rationalen Funktionenkörper k(X) eine Bijektion zwischen den Punkten von X und den diskreten Bewerteungen

$$k(X)^* \longrightarrow \mathbb{Z},$$

die auf dem Grundkörper k trivial sind, besteht.

[4] Insbesondere ist A ein lokaler Ring mit dem einzigen maximalen Ideal $m(A) = \pi \bullet A$. Der Körper

$$\kappa(K) = \kappa(A) := A/\pi A$$

heißt Restklassenkörper von A bzw. K.

[5] Man beachte, nach dem Lemma von 7.1.2 gilt $\{\pi, \pi\} = \{\pi, -1\}$, und -1 ist eine Einheit.

Wir weisen darauf hin, daß s_π^M von der Wahl des lokalen Parameters π abhängt, während ∂^M unabhängig von der Wahl von π ist.

Beweis. Eindeutigkeit. Die Eindeutigkeit der Abbildung s_π^M ergibt sich aus der Tatsache, daß sich jedes Element von K^* in der Gestalt

$$\pi^n u$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ und $u \in A^*$ schreiben läßt. Die Eindeutigkeit der Abbildung ∂^M ist eine Konsequenz von 7.1.4: die Gruppe $K_n^M(K)$ wird von den Elementen der Gestalt

$$\{u_1, \ldots, u_{n-1}, \pi\} \text{ und } \{u_1, \ldots, u_n\}$$

erzeugt, und es ist

$$\{u_1, \ldots, u_n\} = \{u_1, \ldots, u_{n-1}, \pi u_n\} - \{u_1, \ldots, u_{n-1}, \pi\}.$$

Man beachte, die Unabhängigkeit der Abbildung ∂^M von der Wahl des Parameters π is äquivalent zu der Aussage, daß

$$\partial^M(\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}) = 0$$

gilt für beliebige Einheiten $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des Bewertungsrings von K.

Existenz. Die Existenz der beiden Abbildungen werden wir simultan beweisen unter Verwendung eines Arguments von Serre. Dazu betrachten wir die freie graduiert kommutative $K_*^M(\kappa)$-Algebra

$$K_*^M(\kappa)[x] \tag{3}$$

mit dem Erzeuger x, dessen Grad gleich 1 sein soll. Die Elemente dieser Algebra sind gerade die Polynome

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i x^i$$

in x mit Koeffizienten aus (3) mit der üblichen Addition. Bei der Multiplikation ist zu beachten, daß

$$\alpha x = - x\alpha$$

gilt, d.h.

$$(\sum_i \alpha_i x^i)\bullet(\sum_j \beta_j x^j) = \sum_{i,j} \alpha_i x^i \beta_j x^j = \sum_{i,j} (-1)^i \alpha_i \beta_j x^{i+j}.$$

Weiter sei

$$K_*^M(\kappa)[\xi] = K_*^M(\kappa)[x]/(x^2 - \{-1\}x) \tag{4}$$

die Faktor-Algebra von (3) nach dem von $x^2 - \{-1\}x$ erzeugten zweiseitigen Ideal, wobei ξ die Restklasse von x bezeichne. Es gilt dann

$$K_*^M(\kappa)[\xi] = K_*^M(\kappa) + K_*^M(\kappa)\bullet\xi \tag{5}$$

und

$$K_*^M(\kappa)[\xi] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_n$$

mit

$$L_n := K_n^M(\kappa) + K_{n-1}^M(\kappa)\cdot\xi \quad , L_0 = K_0^M(\kappa) = \mathbb{Z} \qquad (6)$$

Man beachte, diese letzte Zerlegung definiert auf (4) die Struktur eines graduierten Rings: für

$$\alpha = \alpha' + \alpha''\xi \in L_n \text{ und } \beta = \beta' + \beta''\xi \in L_m$$

gitl

$$\begin{aligned}\alpha\cdot\beta &= \alpha'\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta''\xi + \alpha''\xi\cdot\beta' + \alpha''\xi\cdot\beta''\xi\\ &= \alpha'\cdot\beta' + (\alpha'\cdot\beta'' - \alpha''\cdot\beta')\xi - \alpha''\cdot\beta''\xi^2\\ &= \alpha'\cdot\beta' + (\alpha'\cdot\beta'' - \alpha''\cdot\beta' - \alpha''\cdot\beta''\cdot\{-1\})\xi \in L_{n+m}\end{aligned}$$

Wir fixieren einen lokalen Parameter $\pi\in K$ und betrachten den Gruppen-Homomorphismus[6]

$$d_\pi: K^\times \longrightarrow L_1 = \kappa^\times \oplus \mathbb{Z}\xi,\ u\cdot\pi^i \mapsto \overline{u} + i\xi\ ,$$

wobei wie bisher der Querstrich den Übergang zu den Restklassen modulo π bezeichne. Wir gehen zur n-ten Tensorpotenz über, setzen mit der Abbildung $(L_1)^{\otimes n} \longrightarrow L_n$ zusammen, welche durch die Multiplikation in $K_*^M(\kappa)[\xi]$ induziert wird, und erhalten einen Gruppen-Homomorphismus

$$d_\pi^n: (K^\times)^{\otimes n} \longrightarrow L_n = K_n^M(\kappa) + K_{n-1}^M(\kappa)\cdot\xi\ ,\quad x_1\otimes\ldots\otimes x_n \mapsto d_\pi x_1\cdot\ldots\cdot d_\pi x_n$$

d.h.

$$d_\pi^n(\pi^{i_1}u_1\otimes \ldots \otimes\pi^{i_n}u_n) = (\overline{u}_1 + i_1\xi)\cdot\ldots\cdot(\overline{u}_n + i_n\xi) \qquad (7)$$

für Einheiten $u_1, \ldots , u_n$ des Bewertungsrings von K und ganze Zahlen $i_1, \ldots , i_n$. Wir setzen mit den beiden Projektionen

$$\pi_1: L_n \longrightarrow K_n^M(\kappa) \text{ und } \pi_2: L_n \longrightarrow K_{n-1}^M(\kappa)$$

zusammen. Mit

$$s_\pi^M := \pi_1\circ d_\pi^n: (K^\times)^{\otimes n} \longrightarrow K_n^M(\kappa)$$

$$\partial^M := \pi_2\circ d_\pi^n: (K^\times)^{\otimes n} \longrightarrow K_{n-1}^M(\kappa)$$

gilt dann

$$s_\pi^M(\pi^{i_1}u_1\otimes \ldots \otimes\pi^{i_n}u_n) =^{7} \{\overline{u}_1\ , \ldots ,\ \overline{u}_n\}$$

---

[6] Man beachte, es gilt

$$\begin{aligned}d_\pi(u\cdot\pi^i) + d_\pi(v\cdot\pi^j) &= (\overline{u} + i\xi) + (\overline{v} + j\xi)\\ &= \overline{uv} + (i+j)\xi\end{aligned}$$

denn die Gruppen-Operation in $\kappa^\times$ ist gerade die Multiplikation der Körper-Elemente. Es folgt

$$\begin{aligned}d_\pi(u\cdot\pi^i)+ d_\pi(v\cdot\pi^j) &= d_\pi(uv\cdot\pi^{i+j})\\ &= d_\pi(u\pi^i\cdot v\pi^j).\end{aligned}$$

[7] Auf der rechten Seite steht gerade der homogene Bestandteil des Grades 0 bezüglich ξ des Ausdrucks auf der rechten Seite von (7).

und

$$\partial^M(u_1 \otimes \ldots \otimes u_{n-1} \otimes \pi) =^8 \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}\}.$$

Außerdem ist

$$\partial^M(u_1 \otimes u_2 \otimes \ldots \otimes u_n) =^9 0$$

für beliebige Einheiten u_i des Bewertungsrings von K.

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, die Abbildung (7) faktorisiert sich über den Milnor-Gruppe $K_n^M(K)$, denn dann gilt dasselbe auch für die eben definierten Abbildungen s_π^M uns ∂^M.

Wir haben also zu zeigen, Tensor-Produkte von Elementen aus $K^\times$, welche den Steinberg-Relationen genügen, gehen bei d_π^n in die Null über. Dazu reicht es zu zeigen,

$$d_\pi(x) \bullet d_\pi(1-x) = 0 \text{ in } L_2 = K_2^M(\kappa) \oplus K_1^M(\kappa) \bullet \xi \qquad (8)$$

für jedes $x \in K^\times$.

Dazu beachten wir zunächst, die Multiplikation $L_1 \times L_1 \longrightarrow L_2$ ist durch die folgende Formel gegeben.

$$\begin{aligned}(x + i\xi) \bullet (y + j\xi) &= \{x, y\} + x \bullet j\xi + i\xi \bullet y + i\xi \bullet j\xi \\ &= \{x, y\} + \{x^j\} \bullet \xi - \{y^i\} \bullet \xi - ij \bullet \xi^2 \\ &= \{x, y\} + \{x^j\} \bullet \xi - \{y^i\} \bullet \xi - ij \bullet \{-1\} \bullet \xi \\ &= \{x, y\} - (\{x^{-j}\} + \{y^i\} + ij \bullet \{-1\}) \bullet \xi \\ &= \{x, y\} - \{x^{-j} y^i (-1)^{ij}\} \bullet \xi\end{aligned}$$

d.h.

$$(x + i\xi) \bullet (y + j\xi) = \{x, y\} + \{(-1)^{ij} x^j y^{-i}\} \bullet \xi \qquad (9)$$

Zum Beweis von (8) schreiben wir jetzt

$$x = u \bullet \pi^i$$

mit einer ganzen Zahl i und einer Einheit u aus dem Bewertungsring von K.

<u>1. Fall</u>. $i > 0$.

Das Element $1 - x = (1-x) \bullet \pi^0$ ist dann eine Einheit mit derselben Restklasse wie 1 im Körper $\kappa^\times$. Damit ist

$$d_\pi(1-x) = \bar{1} + 0 \bullet \xi = 0,$$

d.h. (8) gilt weil der zweite Faktor trivial ist.

<u>2. Fall</u>. $i < 0$.

---

[8] Nach (7) hat man

$$\begin{aligned}d_\pi^n(u_1 \otimes \ldots \otimes u_{n-1} \otimes \pi) &= (\bar{u}_1 + 0 \bullet \xi) \bullet \ldots \bullet (\bar{u}_{n-1} + 0 \bullet \xi) \bullet (1 + \xi) \\ &= \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}, 1\} + \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}\}\xi\end{aligned}$$

[9] Nach (7) hat man

$$\begin{aligned}d_\pi^n(u_1 \otimes u_2 \otimes \ldots \otimes u_n) &= (\bar{u}_1 + 0 \bullet \xi) \bullet (\bar{u}_2 + 0 \bullet \xi) \bullet \ldots \bullet (\bar{u}_n + 0 \bullet \xi) \\ &= \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\} + 0 \bullet \xi\end{aligned}$$

Es gilt

$$1 - x = 1 - u\cdot\pi^i = (-u + \pi^{-i})\cdot\pi^i$$

also

$$d_\pi(1-x) = \overline{-u} + i\xi$$

also

$$\begin{aligned} d_\pi(x)\cdot d_\pi(1-x) &= (\bar{u} + i\xi)\cdot(-\bar{u} + i\xi) \\ &= \{\bar{u}, -\bar{u}\} + \{(-1)^{i^2}\,\bar{u}^i(-\bar{u})^{-i}\}\cdot\xi \text{ (nach (9))} \\ &= \{\bar{u}, -\bar{u}\} + \{(-1)^{i^2}\,(-1)^{-i}\}\cdot\xi \\ &= \{\bar{u}, -\bar{u}\} + \{1\}\cdot\xi \\ &= 0 \qquad \text{(vgl. das Lemma von 2.1.2).} \end{aligned}$$

<u>3. Fall</u>. $i = 0$.
Mit anderen Worten, x ist eine Einheit (im Bewertungsring von K). Ist 1 - x keine Einheit, so gilt die Behauptung auf Grund von Fall 1 (mit x und 1 - x vertauscht). Wir können also annehmen, die Elemente x und 1 - x sind beide Einheiten im Bewertungsring von K. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_\pi(x)\cdot d_\pi(1-x) &= (\bar{u} + 0\cdot\xi)\cdot(\overline{1-u} + 0\cdot\xi) \\ &= \{\bar{u}, \overline{1-u}\} \\ &= \{\bar{u}, 1 - \bar{u}\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

auf Grund der Steinberg-Relationen.
QED.

7.1.6 Beispiel: die klassische Formel für das zahme Symbol

Das zahme Symbol

$$\partial^M: K_1(K) \longrightarrow K_0(\kappa)$$

ist gerade die Bewerung $v: K^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$.[10] Das zahme Symbol

$$\partial^M: K_2(K) \longrightarrow K_1(\kappa)$$

is durch die Formel

$$\partial^M(\{a, b\}) = (-1)^{v(a)\cdot v(v)}\cdot \overline{a^{v(b)}b^{-v(a)}}$$

gegeben.[11] Dies ist die klassische Formel für das zahme Symbol der Zahlentheorie. Sie hat ihren Ursprung in der Theorie des Hilbert-Symbols.

7.1.7 Bemerkungen

(i) Der Leser hat möglicherweise den gerechtfertigten Verdacht, daß zwischen den zahmen Symbolen und den Spezialisierungsabbildungen Relationen bestehen.Tatsächlich gilt für $\{a_1,...,a_n\} \in K_n^M(K)$ und jeden lokalen Parameter:

$$s_\pi^M(\{a_1,...,a_n\}) = \partial^M(\{a_1,...,a_n, -\pi\}).$$

(ii) Das Verhalten des zahmen Symbols bei Körper-Erweiterungen läßt sich wie folgt beschreiben. Seien L/K eine Körpererweiterung,

[10] Siehe die Definition von d_π im Beweis von 7.1.5 und die daran anschließende Definition von ∂^M.

[11] Siehe Formel (9) im Beweis von 2.1.5 und die dortige Definition von ∂^M.

$$v_L: L^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$$

eine diskrete Bewertung, welche die gegebene diskrete Bewerung $v: K^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$ fortsetzt,

$$\kappa_L$$

der Restklassenkörper von v_L und e der Verzweigungsindex[12] (bezüglich v). Bezeichnet ∂_L^M das zahme Symbol bezüglich v_L so gilt

$$\partial_L^M(\alpha_L) = e\bullet\partial^M(\alpha)$$

für jedes $\alpha\in K_n^M(K)$.

(iii) Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Beschreibung von Kern und Kokern des zahmen Symbols. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein.

$$U_n^0 \subseteq K_n^M(K)$$

sei die Untergruppe, welche von den Symbolen der Gestalt

$$\{u_1, \dots , u_n\} \tag{1}$$

erzeugt wird, wobei die u_i Einheiten im Bewertungsring der gegebenen diskreten Bewerung v von K sind. Außerdem sei

$$U_n^1 \subseteq U_n^0$$

die Untergruppe, die von den Elementen (1) erzeugt wird, für welche außerdem noch die Restklasse des ersten Elements u_1 im Restklassenring v gleich 1 ist.

Beweis. Zu (i). Für $a_{n-1} = \pi^i u_{n-1}$ mit einer Einheit u_1 und einer ganzen Zahl i erhält man

$$\{ a_1,\dots,a_{n-1}, -\pi\} = i\bullet\{ a_1,\dots, a_{n-2},\pi, -\pi\} + \{ a_1,\dots, a_{n-2}, u_{n-1},-\pi\}.$$

Dabei ist der erste Summand rechts gleich Null auf Grund der ersten Identität des Lemmas von 7.1.2. Indem man diese Argumentation mit den übrigen a_i wiederholt, reduziert man den Beweis auf den Fall, daß alle a_i Einheiten sind. Dann besteht die Identität aber auf Grund der Definitionen von s_π^M und ∂^M in 7.1.5.

Zu (ii). Seien π und ρ lokale Parameter für v bzw. v_L. Dann gilt

$$\pi = \rho^e\bullet u_L$$

mit einer Einheit u_L im Bewertungsring von v_L. Für beliebige (n-1)-Tupel

$$(u_1, \dots , u_{n-1})$$

von Einheiten bezüglich v gilt dann mit $\alpha := \{u_1, \dots , u_{n-1}, \pi\}$:

$$\alpha_L = \{u_1, \dots , u_{n-1}, \pi\}_L = e\bullet\{u_1, \dots , u_{n-1}, \rho\} + \{u_1, \dots , u_{n-1}, u_L\}.$$

---

[12] d.h. der lokale Parameter π von v läßt sich in der Gestalt

$$\pi = u_L\bullet(\pi_L)^e$$

schreiben mit einem einem lokalen Parameter π_L von v_L und einer Einheit u_L aus dem Bewertungsring von v_L.

Der zweite Summand rechts wird dabei von ∂_L^M in die Null abgebildet, d.h.

$$\begin{aligned}\partial_L^M(\alpha_L) &= e\bullet\partial_L^M(\{u_1, \dots , u_{n-1}, \rho\})\\ &= e\bullet\{\bar{u}_1, \dots , \bar{u}_{n-1}\}\\ &= e\bullet \partial^M(\alpha)\end{aligned}$$

QED.

7.1.8 Kern und Kokern des zahmen Symbols

Seien K ein Körper und v: $K^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine diskrete Bewertung mit dem Parameter π und dem Restklassenkörper κ. Dann sind die beiden folgenden Sequenzen exakt.

$$0 \longrightarrow U_n^0 \longrightarrow K_n^M(K) \xrightarrow{\partial^M} K_{n-1}^M(\kappa) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow U_n^1 \longrightarrow K_n^M(K) \xrightarrow{(s_\pi^M, \partial^M)} K_n^M(\kappa) \oplus K_{n-1}^M(\kappa) \longrightarrow 0$$

Dabei bezeichne

$$U_n^0 \subseteq K_n^M(K)$$

die Untergruppe, welche von den Symbolen der Gestalt $\{u_1, \dots , u_n\}$ erzeugt wird, wobei jedes u_i eine Einheit des Bewertungsrings von v sei. Weiter sei

$$U_n^1 \subseteq U_n^0$$

die Untergruppe, die von den Symbolen der Gestalt $\{u_1, \dots , u_n\}$ erzeugt wird, wobei zusätzlich u_1 eine 1-<u>Einheit</u> ist, d.h. das Bild im Restklassenkörper sei trivial.

Beweis. Auf Grund der Konstruktionen in 7.1.5 ergibt sich, daß ∂^M und s_π^M surjektiv sind und die betrachteten Sequenzen Komplexe sind.
Bezeichne im folgenden

$$A$$

den Bewertungsring der Bewertung v: $K^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Zum Beweis der Exaktheit der ersten Sequenz definieren wir die Umkehrung der durch ∂^M induzierten Abbildung

$$\bar{\partial}^M: K_n^M(K)/U_n^0 \longrightarrow K_{n-1}^M(\kappa).$$

Diese Umkehrung sei durch die folgende Abbildungsvorschrift gegeben.

$$\psi: K_{n-1}^M(\kappa) \longrightarrow K_n^M(K)/ U_n^0, \{\bar{u}_1, \dots , \bar{u}_{n-1}\} \mapsto \{u_1, \dots , u_{n-1}, \pi\} \bmod U_n^0.$$

Es ist klar, daß es sich bei ψ um die Umkehrung von $\bar{\partial}^M$ handelt, falls eine solche existiert.[13] Wir haben zu zeigen, die Definition von ψ ist korrekt. Wir beschränken uns dabei auf den Fall n = 2. Der allgemeine Fall wird analog behandelt. Untersuchen wir also, wie sich

$$\{u, \pi\}$$

---

[13] Die beiden Zusammensetzungen von ψ und $\bar{\partial}^M$ sind gleich der identischen Abbildungen, denn diese Zusammensetzungen wirken auf den Erzeugern der Gruppen wie die identische Abbildung.

ändert, wenn wir die Einheit u durch u - πv mit $v \in A$ ersetzen. Es gilt

$$\begin{aligned}\{u - \pi v, \pi\} - \{u, \pi\} &= \{1 - \pi v u^{-1}, \pi\} \\ &= \{1 - \pi v u^{-1}, \pi v u^{-1}\} - \{1 - \pi v u^{-1}, v u^{-1}\} \qquad (1)\end{aligned}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite ist Null (auf Grund der Steinberg-Relationen) und der zweite liegt in U_2^0. Damit ist ψ korrekt definiert und die erste Sequenz ist exakt.

Beim Beweis der Exaktheit der zweiten Sequenz gehen wir in derselben Weise vor: wir zeigen, die durch $(s_\pi^M \,.\, \partial^M)$ induzierte Abbildung

$$\tilde{\varphi}: K_n^M(K)/U_n^1 \longrightarrow K_n^M(\kappa) \oplus K_{n-1}^M(\kappa) \qquad (2)$$

besitzt eine Umkehrung

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 : K_n^M(\kappa) \oplus K_{n-1}^M(\kappa) \longrightarrow K_n^M(K)/U_n^1.$$

Die Abbildung $\varphi_2: K_{n-1}^M(\kappa) \longrightarrow K_n^M(K)/U_n^1$ wird dabei in derselben Weise definiert wie die Abbildung ψ,

$$\varphi_2 (\{\bar{u}_1, \dots , \bar{u}_{n-1}\}) := \{ u_1, \dots , u_{n-1}, \pi\} \bmod U_n^1$$

Die Korrektheit der Definition wird dabei in derselben Weise nachgewiesen wie im Fall der Abbildung ψ. Man beachte, der zweite Summand rechts von (1) liegt sogar in U_2^1. Die Abbildung $\varphi_1: K_n^M(\kappa) \longrightarrow K_n^M(K)/U_n^1$. definieren wir durch die Formel

$$\varphi_1 (\{\bar{u}_1, \dots , \bar{u}_n\}) := \{u_1, \dots , u_n\} \bmod U_n^1$$

Beim Beweis der Korrektheit der Definition beschränken wir uns wieder auf den Fall n = 2. Der allgemeine Fall wird analog behandelt. Die Korrektheit der Definitoin im Fall n = 2 ergibt sich aus

$$\{u_1, u - \pi v \} - \{u_1, u\} = \{u_1, 1 - \pi v u^{-1}\} \in U_2^1.$$

(wir verwenden hier die graduierte Kommutativität der Multiplikation in $K_*^M(K)$, vgl. 7.1.2)). Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi\circ(s_\pi^M \,.\, \partial^M) (\{u_1, \dots , u_n\}) &= \varphi(\{\bar{u}_1, \dots , \bar{u}_n\}, 0) \\ &= \varphi_1 (\{\bar{u}_1, \dots , \bar{u}_n\}) \\ &= \{u_1, \dots , u_n\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\varphi\circ(s_\pi^M \,.\, \partial^M) (\{ u_2, \dots , u_n, \pi\}) &=^{14} \varphi(0, \{\bar{u}_2, \dots , \bar{u}_n\}) \\ &= \varphi_2 (\{\bar{u}_2, \dots , \bar{u}_n\}) \\ &= \{ u_2, \dots , u_n, \pi\}\end{aligned}$$

Auf den Erzeugern von $K_n^M(K)/U_n^1$ is somit $\varphi\circ\tilde{\varphi}$ die Identität, d.h.

[14] Das erste Argument von φ auf der rechten Seite ist Null, weil der Koeffizient von π auf der linken Seite gleich 1 ist.

$$\varphi\circ\tilde{\varphi} = \mathrm{Id}.$$

Insbesondere ist $\tilde{\varphi}$ injektiv[15] und φ ist surjektiv. Weiter ist

$$\tilde{\varphi}\circ\varphi_1(\{\bar{u}_1, \dots , \bar{u}_n\}) = \tilde{\varphi}(\{u_1, \dots , u_n\}) = (\{\bar{u}_1, \dots , \bar{u}_n\} , 0)$$

$$\tilde{\varphi}\circ\varphi_2(\{\bar{u}_1, \dots , \bar{u}_{n-1}\}) = \tilde{\varphi}(\{\pi, u_1, \dots , u_{n-1}\}) = (0, \{\bar{u}_1, \dots , \bar{u}_{n-1}\}),$$

d.h. $\tilde{\varphi}\circ\varphi$ ist auf jeden der beiden direkten Summanden des Definitionsbereichs gleich der identischen Abbildung. Es folgt

$$\tilde{\varphi}\circ\varphi \quad = \mathrm{Id}.$$

QED:

7.1.9 Der vollständige Fall

In der Situation von 7.1.8 seien K <u>vollständig</u>[16] bezüglich der Bewertung von K. Dann induziert die Abbildung $(s_\pi^M . \partial^M)$ für jede natürliche Zahl m, die in κ umkehrbar ist, einen Isomorphismus

$$K_n^M(K)/mK_n^M(K) \xrightarrow{\cong} K_n^M(\kappa)/mK_n^M(\kappa) \oplus K_{n-1}^M(\kappa)/mK_{n-1}^M(\kappa).$$

Beweis. Auf Grund der zweiten exakten Sequenz von 7.1.8 reicht es zu zeigen,

$$mU_n^1 = U_n^1.$$

Wegen der Multilinearität der Multiplikation in $K_*^M(K)$ reicht es, diese Identität für n = 1 zu überprüfen, d.h.

$$mU_1^1 = U_1^1.$$

Sei

$$u \in U_1^1 \ (\subseteq K^\times).$$

Weil m umkehrbar ist in κ, können wir das Henselsche Lemma auf das Polynom

$$x^m - u$$

anweden, und erhalten, daß u eine m-te Potenz einer 1-Einheit ist, also in $m\bullet U_1^1$ liegt.

QED.

7.2 Die exakte Sequenz von Milnor und das Lemma von Bass-Tate

7.2.1 Die Situation

Wir beschreiben jetzt die Milnor-K-Theorie des rationalen Funktionenkörpers

$$k(t)$$

---

[15] d.h. die Sequenz in exakt in der Mitte.

[16] Bezeichne v die Bewertung von K. Dann gibt eine reelle Zahl $\rho\in(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß durch

$$d(x, y) := \rho^{v(x - y)}$$

eine Metrik auf dem Körper K definiert ist. Der Körper heißt vollständig, wenn er vollständig bezüglich dieser Metrik ist.

und konstruieren ein Analogon zur exakten Sequenz von Fadejev, das auf Milnor zurückgeht.

Wir erinnern daran, daß die diskreten Bewertungen von k(t), welche trivial auf k sind, gerade den lokalen Ringen der abgeschlossenen Punkte P der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_k$ entsprechen. Wie bisher bezeichnen wir mit

$$\kappa(P)$$

den Restklassenkörper von P und mit $v_P: k(t)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ die zugehörige Bewertung. Für jeden Punkt

$$P \neq \infty$$

ist ein lokaler Parameter gerade durch ein normiertes irreduzibles Polynom

$$\pi_P \in k[t]$$

gegeben. Für

$$P = \infty$$

können wir

$$\pi_P = t^{-1}$$

als lokalen Parameter verwenden. Der Grad der Körpererweiterung $[\kappa(P):k]$ heißt auch Grad des Punktes P,

$$\deg P = [\kappa(P):k] = \deg \pi_P .$$

Auf Grund des vorangehenden Abschnitts haben wir zahme Symbole

$$\partial^M_P : K^M_n(k(t)) \longrightarrow K^M_{n-1}(\kappa(P))$$

und Spezialisierungsabbildungen

$$s^M_{\pi_P} : K^M_n(k(t)) \longrightarrow K^M_n(\kappa(P)).$$

Da jedes Element von $k(t)^*$ eine Einheit ist für fast alle Bewertungen von k(t), d.h. für alle mit eventueller Ausnahme von endlich vielen, liegt das Bild der Abbildung

$$\partial^M := (\partial^M_P): K^M_n(k(t)) \longrightarrow \prod_{P\in\mathbb{P}^1_0 - \{\infty\}} K^M_{n-1}(\kappa(P)),\ x \mapsto (\partial^M_P(x))_{P\in\mathbb{P}^1_0 - \{\infty\}} ,$$

sogar in der direkten Summe, d.h. wir haben eine Abbildung

$$\partial^M := (\partial^M_P): K^M_n(k(t)) \longrightarrow \oplus_{P\in\mathbb{P}^1_0 - \{\infty\}} K^M_{n-1}(\kappa(P)),\ x \mapsto (\partial^M_P(x))_{P\in\mathbb{P}^1_0 - \{\infty\}} ,$$

7.2.2 Eine exake Sequenz (von Milnor)

Die Sequenz

$$0 \longrightarrow K^M_n(k) \longrightarrow K^M_n(k(t)) \xrightarrow{\partial^M} \oplus_{P\in\mathbb{P}^1_0 - \{\infty\}} K^M_{n-1}(\kappa(P)) \longrightarrow 0$$

ist exakt und zerfällt mit Hilfe der Spezialisierungsabbildung im Fernpunkt.

$$s^M_{t^{-1}} : K^M_n(k(t)) \longrightarrow K^M_n(\kappa(\infty)) = K^M_n(k)$$

Dabei bezeichne $\mathbb{P}^1_0$ die Menge der abgeschlossenen Punkte der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_k$ (d.h. die Menge der Punkte der Dimension 0 des Schemas $\mathbb{P}^1_k$).

Beweis. Man beachte, für n = 1 erhält man die Sequenz

$$0 \longrightarrow k^* \longrightarrow k(t)^* \xrightarrow{\partial^M} \oplus_P \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

$$\partial^M(u\bullet(\pi_1)^{i_1}\bullet\ldots\bullet(\pi_r)^{i_r}) =^{17} (\ \ldots, i_1, \ldots, i_r, \ldots\ )$$

deren Exaktheit gerade bedeutet, daß sich jede rationale Funktion in ein Potenzprodukt irreduzibler Polynome (mit ganzen Exponenten) zerlegen läßt, wobei die Zerlegung eindeutig bis auf Faktoren aus k* ist.

Die Abbildung $s^M_{t^{-1}}$ ist offensichtlich linksinvers zur natürlichen Abbildung

$$K^M_n(k) \longrightarrow K^M_n(k(t)).$$

Die Sequenz zerfällt also, falls sie exakt ist.

Der Beweis im allgemeinen Fall verwendet eine Filtration

$$K^M_n(k) = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_d \subset \ldots \subset \bigcup_{d=0}^{\infty} L_d = K^M_n(k(t)),$$

wobei L_d die Untergruppe bezeichne, die von den Symbolen

$$\{f_1, \ldots, f_n\}$$

erzeugt wird, deren Koordinaten f_i Polynome vom Grad $\leq d$ sind. Der entscheidende Schritt im Beweis ist die Aussage des folgenden Lemmas.

Lemma

Für jedes $d > 0$ induziert der Homomorphismus ∂^M einen Isomorphismus

$$\partial^M_d : L_d/L_{d-1} \longrightarrow \oplus_{\deg(P)=d} K^M_{n-1}(\kappa(P)).$$

Beweis des Lemmas.

Ist P ein abgeschlossener Punkt des Grades d, so ist die Abbildung ∂^M_P trivial auf den Elementen von L_{d-1}.[18] Die Abbildungen ∂^M_P mit deg P = d definieren also einen Homomorphismus

$$\partial^M_d : L_d/L_{d-1} \longrightarrow \oplus_{\deg(P)=d} K^M_{n-1}(\kappa(P)).$$

Die Abbildung ∂^M_d ist somit wohldefinert. Wir haben zu zeigen, daß sie bijektiv ist. Zu diesem Zweck konstruieren wir die zu ∂^M_d inverse Abbildung.

Für jedes Element $\bar{a} \in \kappa(P)$ gibt es genau ein Polynom $a \in k[t]$ des Grades $\leq d - 1$ mit der Restklasse $\bar{a}$ in $\kappa(P)$.[19] Für jeden Punkt P des Grades d erhalten wir so eine Abbildung

---

[17] Nach 7.1.6 ist ∂^M_P auf K^M_1 gerade die zugehörige Bewertung.

[18] Die Erzeuger sind von der Gestalt $\{f_1, \ldots, f_n\}$ mit Polynomen f_i eines Grades $\leq$ d-1. Aus Gradgründen sind die f_i teilerfremd zum lokalen Paramter π_P, also Einheiten im Bewertungsring. Dann ist aber $\partial^M\{f_1, \ldots, f_n\} = 0$.

$$\kappa(P)^*\times\ldots\times\kappa(P)^* \longrightarrow L_d/L_{d-1}, (\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n) \mapsto \{a_2, \ldots, a_n, \pi_P\} \bmod L_{d-1} \qquad (1)$$

Zeigen wir, die Abbildung ist multilinear. Sei also für ein i,

$$\bar{a}_i = \bar{b}_i\bullet\bar{c}_i$$

und vergleichen wir a_i mit $b_i\bullet c_i$. Sind die beiden Elemente gleich, so ergibt sich die zu beweisende Relation aus der Linearität des Symbols $\{\pi_P, a_2, \ldots, a_n\}$ bezüglich a_i. Andernfalls besteht eine Relation der Gestalt

$$b_i\bullet c_i = a_i - \pi_P\bullet f_i$$

mit einem Polynom $f_i \in k[t]$ eines Grades $\le$ d-1. Es folgt

$$1 = \frac{f_i\bullet\pi_P}{a_i} + \frac{b_i\bullet c_i}{a_i} \qquad (2)$$

also in $K_n^M(k(t))$:

$$\begin{aligned}\{a_2, \ldots, b_i\bullet c_i, \ldots, a_n, \pi_P\} - \{a_2, \ldots, a_n, \pi_P\} &= \{a_2, \ldots, b_i\bullet c_i/a_i, \ldots, a_n, \pi_P\}\\ &= \{a_2, \ldots, b_i\bullet c_i/a_i, \ldots, a_n, \pi_P\bullet f_i/a_i\} - \{a_2, \ldots, b_i\bullet c_i/a_i, \ldots, a_n, f_i/a_i\}\\ &= -\{a_2, \ldots, b_i\bullet c_i/a_i, \ldots, a_n, f_i/a_i\} \quad \text{(wegen (2))}\end{aligned}$$

Das letzte Element liegt in L_{d-1}, d.h. die Abbildung (1) ist tatsächlich multilinear und definiert damit einen Gruppen-Homomorphismus

$$(\kappa(P)^*)^{\otimes n} \longrightarrow L_d/L_{d-1}, \bar{a}_2\otimes \ldots \otimes\bar{a}_n \mapsto \{a_2, \ldots, a_n, \pi_P\} \bmod L_{d-1}$$

---

[19] Ein Element von $x \in k(t)^*$ ist genau dann eine Einheit bezüglich v_P, wenn x ein Potenzprodukt von irreduziblen Polynomen ist, die alle teilerfremd sind zu π_P. Der Bewertungsring von v_P ist somit gerade der lokale Ring

$$A_P := k[t]_{(\pi_P)}$$

(im Fall P = ∞ ersetze von t durch t^{-1}) und der Restklassenkörper ist gleich

$$\kappa(P) = k[t]_{(\pi_P)}/(\pi_P).$$

Betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_P & \twoheadrightarrow & \kappa(P) \\ \cup & & \cup \\ k[t] & \twoheadrightarrow & k[t]/(\pi_P) \end{array}$$

dessen obere Zeile gerade aus Quotientenringen der Ringe der unteren Zeile besteht. Der Körper rechts oben ist gerade der Quotientenkörper der Rings rechts unten. Letzterer Ring ist aber selbst schon ein Körper (weil π_P ein irreduzibles Polynom ist), also ist die rechte vertikale Inklusionsabbildung gerade die identische Abbildung.

Elemente, die den Steinberg-Relationen genügen, liegen offensichtlich[20] im Kern dieses Homomomorphismus, sodaß dieser einen Homomorphismus

$$h_P: K^M_{n-1}(\kappa(P)) \longrightarrow L_d/L_{d-1}\ , \{\bar{a}_2, \dots , \bar{a}_n\} \mapsto \{a_2, \dots , a_n, \pi_P\} \bmod L_{d-1}$$

induziert. Nach Konstruktion ist die P-te Koordinate von

$$\partial^M_d \circ h_P\,(x)$$

für jedes $x = \{\bar{a}_2, \dots , \bar{a}_n\}$ gleich x. Außerdem sind alle anderen Koordinaten von

$$\partial^M_d \circ h_P\,(x)$$

gleich Null (weil für $P' \neq P$ vom Grade d nicht nur $a_2, \dots , a_n$ Einheiten bezüglich $v_{P'}$ sind, sondern auch π_P eine solche ist). Mit

$$h := \sum_{\deg(P)=d} h_P : \oplus_{\deg(P)=d} K^M_{n-1}(\kappa(P)) \longrightarrow L_d/L_{d-1}$$

gilt deshalb

$$\partial^M_d \circ h = \mathrm{Id}.$$

Insbesondere ist ∂^M_d surjektiv und h ist injektiv. Wir haben noch zu zeigen, ∂^M_d ist injektiv. Zu diesem Zwecke reicht es zu zeigen,

h ist surjektiv.

Für den Abschluß des Beweises (vgl. Milnor [1, Lemma 2.5]) reicht es zu zeigen, das Bild von h enthält ein Erzeugendensystem von L_d/L_{d-1}. Zum Beweis betrachten wir ein Element

$$\{ g_{s+1}, \dots , g_n, f_s, \dots , f_1\} \in L_d\ , \tag{3}$$

wobei $f_1, \dots , f_s \in k[t]$ Polynome vom Grad d und $g_{s+1}, \dots , g_n \in k[t]$ solche eines Grades < d seien. Es reicht zu zeigen, die Restklasse dieses Elements in L_d/L_{d-1} liegt im Bild von h.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach s.
<u>1. Fall</u>: s = 0. Das Element (3) ist kongruent 0 modulo L_{d-1}, seine Restklasse liegt also trivialerweise im Bild von h.
<u>2. Fall</u>: s = 1. Ist das Polynom f_1 reduzibel, so ist das Element (3) wieder kongruent 0 modulo L_{d-1} und seine Restklasse liegt wieder trivialerweise im Bild von h. Nehmen wir also an, f_1 ist irreduzibel und schreiben f_1 in der Gestalt

$$f_1 = c \bullet \pi$$

mit $c \in k^*$ und einem normierten irreduziblen Polynom π des Grade d. Sei P der Punkt vom Grad d mit $\pi_P = \pi$. Dann liegt die Restklasse des Elements (3) im Bild von h_P:

---

[20] Gilt $\bar{a}_i + \bar{a}_j = 1$, so ist $a_i + a_j - 1$ ein Polynom eines Grades ≤ d-1, welches durch π_p teilbar ist. Aus Gradgründen muß dann aber $a_i + a_j - 1 = 0$ gelten.

$$\begin{aligned}\{ g_2, \dots , g_n, f_1\} &= \{g_2, \dots , g_n, c\} + \{ g_2, \dots , g_n, \pi_P\}\\ &= 0 + \{ g_2, \dots , g_n, \pi_P\}\\ &= \{ g_2, \dots , g_n, \pi_P\}\end{aligned}$$

d.h.

$$\{ g_2, \dots , g_n, f_1\} \bmod L_{d-1} = h_P\{ \bar{g}_2, \dots , \bar{g}_n\}.$$

Erst recht liegt diese Restklasse damit auch im Bild von h.
<u>3. Fall</u>: $s > 1$. Wir schreiben f_2 in der Gestalt

$$f_2 = - cf_1 + g$$

mit $c \in k^*$ und einem Polynom $g \in k[t]$ eines Grades $< d$. Es gilt

$$\frac{cf_1}{g} + \frac{f_2}{g} = 1,$$

also

$$\begin{aligned}0 &= \{\frac{cf_1}{g}, \frac{f_2}{g}\} = (\{c\} + \{f_1\} - \{g\})\bullet(\{f_2\} - \{g\})\\ &= \{c, f_2\} - \{c, g\} + \{f_1, f_2\} - \{f_1, g\} - \{g, f_2\} + \{g, g\}\end{aligned}$$

also

$$\{f_1, f_2\} = \{c, g\} + \{f_1, g\}+\{g, f_2\} - \{c, f_2\} - \{g, g\}.$$

Wir multiplizieren diesen Ausdruck mit $- \{g_{s+1}, \dots , g_n, f_s, \dots , f_3\}$ und sehen, daß sich das Element (3) als ganzzahlige Linearkombination von Elementen mit verkleinerten s schreiben läßt. Nach Induktionsvoraussetzung liegt die Restklasse des Elements (3) damit im Bild von h.
QED (Lemma).

Beweis von 7.2.2. Durch Induktion nach d sehen wir mit Hilfe des Lemmas, daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow L_0 \longrightarrow L_d \longrightarrow \oplus_{\deg P \le d} K^M_{n-1}(\kappa(P)) \longrightarrow 0$$

für jedes $d > 0$ exakt ist.[21] Diese exakten Sequenzen bilden ein direktes System bezüglich der natürlichen Inklusionen der beteiligten Gruppen. Übergang zum direkten Limes liefert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow L_0 \longrightarrow K^M_n(k(t)) \longrightarrow \oplus_{P \text{ beliebig}} K^M_{n-1}(\kappa(P)) \longrightarrow 0$$

Wegen $L_0 =$[22] $K^M_n(k)$ ist das aber gerade die gesuchte exakte Sequenz.
QED.

---

[21] Im Fall $d = 1$ ist das gerade die Aussage des Lemmas. Den Induktionsschritt erhält man aus dem 3×3-Lemma.
[22] Zunächst hat man nur die natürliche Abbildung

$$K^M_n(k) \longrightarrow L_0 , \{a_1,\dots,a_n\} \mapsto \{ a_1,\dots,a_n\},$$

welche nach Definition von L_0 surjektiv ist. Ihre Zusammensetzung mit

$$s^M_\pi: K^M_n(k(t)) \longrightarrow K^M_n(k) \text{ mit } \pi = t \in k[t]$$

ist aber gerade die identische Abbildung. Also ist die Abbildung auch injektiv.

7.2.3 Die Norm-Abbildungen

Da die Milnor-Sequenz 7.2.2 zerfällt, besitzt der Homomoprhismus ∂^M einen Schnitt

$$\psi^M: \oplus_{P\in\mathbb{P}^1_0 - \{\infty\}} K^M_{n-1}(\kappa(P)) \longrightarrow K^M_n(k(t)),$$

dessen Einschränkung auf den P-ten direkten Summanden wir mit

$$\psi^M_P: K^M_{n-1}(\kappa(P)) \longrightarrow K^M_n(k(t)),\ P \in \mathbb{P}^1_0 - \{\infty\}$$

bezeichnen wollen. Nach Konstruktion gilt

$$\partial^M_P \circ \psi^M_Q = \begin{cases} \mathrm{Id}_{K^M_{n-1}(\kappa(P))} & \text{für } P = Q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für jeden abgeschlossenen Punkt P von $\mathbb{P}^1_k$ definieren wir eine <u>Norm-Abbildung</u>

$$N_P: K^M_n(\kappa(P)) \longrightarrow K^M_n(k)$$

indem wir setzen

$$N_P := -\partial^M_\infty \circ \psi^M_P \text{ für } P \neq \infty$$

und

$$N_\infty := \mathrm{Id}$$

7.2.4 Eine Summenformel für die Schnitte ψ^M_P

Seien k ein Körper und t eine Unbestimmte. Dann gilt

$$\alpha = s_{t^{-1}}(\alpha) + \sum_{P\in\mathbb{P}^1_0} (\psi^M_P \circ \partial^M_P)(\alpha)$$

für jedes n > 0 und jedes $\alpha \in K^M_n(k(t))$.

Beweis. Seien

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen und

$$r : B \longrightarrow A$$

eine linke Inverse zu f. Dann zerfällt B in eine direkte Summe

$$B = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(r).$$

Zunächst hat man nur eine Summen-Zerlegung, denn jedes Element b ∈ B läßt sich in der Gestalt

$$b = f(r(b) + (b - f(r(b)) \qquad (1)$$

schreiben, wobei der erste Summand rechts offensichtlich in Im(f) liegt und der zweite in Ker(r):

$$\begin{aligned} r(b - f(r(b)) &= r(b) - r(f(r(b))) \\ &= r(b) - r(b) \\ &= b. \end{aligned}$$

Diese Summen-Zerlegung ist direkte, denn für

$$b \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(r)$$

kann man ein a ∈ A finden mit

$$b = f(a),$$

und

$$0 = r(b) = r(f(a)) = a,,$$

also $\quad b = f(a) = f(0) = 0.$

Weiter gilt wegen der Exaktheit der Sequenz

$$\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(r) = 0$$

Insbesondere ist die Einschränkung g auf Ker(r) injektiv. Wegen
$g(B) = g(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(r)) = g(\mathrm{Im}(f)) + g(\mathrm{Ker}(r)) = 0 + g(\mathrm{Ker}(r)) = g(\mathrm{Ker}(r))$,
ist diese Einschränkung auch surjektiv, d.h. die Einschränkung

$$g|_{\mathrm{Ker}(r)}: \mathrm{Ker}(r) \longrightarrow C$$

ist ein Isommorphismus, und

$$\psi := (g|_{\mathrm{Ker}(r)})^{-1}: C \longrightarrow \mathrm{Ker}(r) \subseteq B$$

ein Schnitt von g. Aus (1) erhalten wir, weil der zweite Summand rechts in Ker(r)) liegt,

$$\begin{aligned} b &= f(r(b)) + \psi(g(b - f(r(b))) \\ &= f(r(b)) + \psi(g(b) - g(f(r(b)))) \\ &= f(r(b)) + \psi(g(b)) - 0) \qquad \text{(wegen } g\circ f = 0) \\ &= f(r(b)) + \psi(g(b)). \end{aligned}$$

Dies ist gerade die gesuchte Identität, wenn die obige exakte Sequenz die Sequenz von 7.2.2 ist und r der dort angegebene Schnittt $s^M_{t^{-1}}$.

QED.

7.2.5 Reziprozitätsgesetz von Weil

Sei k ein Körper. Dann gilt

$$\sum_{P\in\mathbb{P}^1_0} (N_P \circ \partial^M_P)(\alpha) = 0$$

für jedes $\alpha\in K^M_n(k(t))$. Dabei bezeichne $\mathbb{P}^1_0$ die Menge der abgeschlossenen Punkte der projektiven Geraden über k.

Beweis. Für $P \neq \infty$ gilt

$$\begin{aligned} \partial^M_P\big(\alpha - \sum_{Q\neq\infty} (\psi^M_Q \circ \partial^M_Q)(\alpha)\big) &= \partial^M_P(\alpha) - \sum_{Q\neq\infty} (\partial^M_P \circ \psi^M_Q \circ \partial^M_Q)(\alpha) \\ &= \partial^M_P(\alpha) - \partial^M_P(\alpha) \qquad \text{(Definition der } \psi^M_P \text{ in 7.2.3)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Auf Grund der exakten Sequenz von Milnor (vgl. 7.2.2) liegt

$$\beta := \alpha - \sum_{Q\neq\infty} (\psi^M_Q \circ \partial^M_Q)(\alpha) \qquad (1)$$

in $K^M_n(k)$. Insbesondere ist $\partial_\infty(\beta) = 0$. Wir wenden ∂_∞ auf (1) an und erhalten die Behauptung.

QED.

Bemerkung

Die ursprüngliche Formulierung des Reziprozitätsgesetzes von Weil bezog sich auf den Fall n = 2 und hatte die Gestalt

$$\sum_{P\in\mathbb{P}^1_0} (N_{\kappa(P)/k}\circ\partial^M_P(\alpha) = 0.$$

Man beachte, in dieser Situation haben die zahmen Symbole ∂^M_P eine explizite Beschreibung (vgl. 7.1.6). Um diese Formel aus 7.2.5 abzuleiten, müssen wir zeigen, die Norm-Abbildung der Milnor-K-Theorie stimmt im Grad 1 mit der gewöhnlichen Körper-Norm überein. Dies wird sich aus dem zweiten Teil von 7.2.7 ergeben. Zunächst berechnen wir aber die Norm der Milnor-K-Theorie für einen trivialen Spezialfall.

7.2.6 Beispiel: die Norm für Punkte des Grades 1

Für jeden Punkt $P \in \mathbb{P}^1_0$ des Grades 1 ist die Norm-Abbildung

$$N_P: K^M_n(k) \longrightarrow K^M_n(k)$$

gerade die identische Abbildung.

Beweis. Für $P = \infty$ ist dies nach Definition der Fall. Sei also $P \neq \infty$. Als lokalen Parameter können wir dann ein Polynom der Gestalt

$$\pi_P = t - a \text{ mit } a \in k$$

verwenden. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} K^M_{n-1}(k) = K^M_{n-1}(\kappa(\infty)) & \xleftarrow{-\partial^M_\infty} & K^M_n(k(t)) & \xrightarrow{\partial^M_K} & \oplus_{P\in\mathbb{P}^1_0-\{\infty\}} K^M_{n-1}(\kappa(P)) \\ & \alpha\nwarrow & \cup & \swarrow\psi^M & \\ & & \mathrm{Ker}(s^M_{t-1}) & & \end{array}$$

Die Norm-Abbildung N_P ist gerade die Einschränkung auf den P-ten direkten Summanden der Zusammensetzung der beiden unteren Abbildungen

$$N_P = \alpha\circ\psi^M_P$$

Wir betrachten zunächst den

<u>Spezialfall</u>: $a = 0$.

Für $c_1, \ldots, c_{n-1} \in k^* - \{1\}$ gilt

$$\partial^M_P\{ c_1, \ldots, c_{n-1}, t\bullet(1 - c_1) \} = \{ c_1, \ldots, c_{n-1} \}, \qquad (1)$$

denn mit $\pi_P = t$ ist auch $t\bullet(1 - c_1)$ ein Parameter. Weiter ist

$$s^M_{t-1}\{ c_1, \ldots, c_{n-1}, t\bullet(1 - c_1) \} = \{ c_1, \ldots, c_{n-1}, 1 - c_1 \} = 0$$

(auf Grund der Steinberg-Relationen). Das Argument von ∂^M_P auf der linken Seite von (1) liegt also im Kern von s^M_{t-1}. Desshalb ist

$$\psi^M_P\{ c_1, \ldots, c_{n-1} \} = \{ c_1, \ldots, c_{n-1}, t\bullet(1 - c_1) \}$$

$$= - \{ c_1, \dots , c_{n-1}, \frac{1}{t\bullet(1 - c_1)} \}$$

Die letzte Koordinate auf der rechten Seite ist nun ein Parameter im Punkt ∞. Deshalb gilt

$$N_P \{ c_1, \dots , c_{n-1} \} = \partial^M_\infty \{ c_1, \dots , c_{n-1}, \frac{1}{t\bullet(1 - c_1)} \}$$
$$= \{ c_1, \dots , c_{n-1}\}$$

Mit anderen Worten, N_P ist im Fall a = 0 die identische Abbildung. Betrachten wir den verbleibenden

Spezialfall: $a \neq 0$

Die obige Rechnung mit t - a anstelle von t liefert

$$N_P \{ c_1, \dots , c_{n-1} \} = \partial^M_\infty \{ c_1, \dots , c_{n-1}, \frac{1}{(t-a)\bullet(1 - c_1)} \}.$$

Wir haben zu zeigen, der Ausdruck auf der rechten Seite ist gleich $\{ c_1, \dots , c_{n-1}\}$. Dazu reicht es zu zeigen, die letzte Koordinate des Symbols rechts ist ein Paramter im Punkt ∞, d.h. der Wert dieser Koordinate bezüglich der zu ∞ gehörigen Bewertung v ist gleich 1. Es gilt

$$\begin{aligned} v(\frac{1}{(t-a)\bullet(1 - c_1)}) &= v((t-a)^{-1}) \\ &= - v(t - a) \\ &= - v(\frac{t-a}{t} \bullet t) \\ &= - v(\frac{t-a}{t}) - v(t) \\ &= - v(1 - a\bullet t^{-1}) + v(t^{-1}) \\ &= 0 + 1 \end{aligned}$$

weil t^{-1} Parameter im Punkt ∞ ist.

QED.

7.2.7 Die Norm für kleine Grade

Seien k ein Körper und P ein abgeschlossener Punkt der projektiven Geraden über k. Dann gilt:

(i) Für n = 0 ist die Norm-Abbildung

$$N_P: K^M_0(\kappa(P)) \longrightarrow K^M_0(k),\ x \mapsto [\kappa(P):k]\bullet x,$$

gerade die Multiplikation mit dem Grad der Körper-Erweiterung $\kappa(P)/k$.

(ii) Für n = 1 ist die Norm-Abbildung

$$N_P: K^M_1(\kappa(P)) \longrightarrow K^M_1(k)$$

gerade die Norm-Abbildung der Körper-Erweiterung $\kappa(P)/k$.

Zum Beweis dieser Aussage benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma

Seien K/k eine Körper-Erweiterung und

$$P \in (\mathbb{P}^1_k)_0$$

ein abgeschlossener Punkt der projektiven Geraden über k. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} K_n^M(\kappa(P)) & \xrightarrow{N_P} & K_n^M(k) \\ (i_{k(Q)/k(P)})\downarrow & & \downarrow i_{K/k} \\ \oplus_{P|Q} K_n^M(\kappa(Q)) & \xrightarrow{\sum e_Q N_Q} & K_n^M(K) \end{array}$$

Dabei soll die Bezeichnung P|Q bedeuten, daß die direkte Summe über alle abgeschlossen Punkte

$$Q \in (\mathbb{P}^1_K)_0$$

der projetiven Geraden über K zu erstrecken ist, welche über P liegen. Mit

$$e_Q$$

bezeichnen wir den Verzweigungsindex der Bewertung v_Q, welche v_P auf K(t) fortsetzt, d.h.

$$v_Q = e_Q \bullet v_P \text{ auf } k(t)^*.$$

Beweis des Lemmas.
Nach Bemerkung 7.1.7 (ii) ist für jeden über P liegenden Punkt Q das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} K_{n+1}^M(k(t)) & \xrightarrow{e_Q \partial_P^M} & K_n^M(\kappa(P)) \\ i_{K(t)/k(t)}\downarrow & & \downarrow i_{\kappa(Q)/\kappa(P)} \\ K_{n+1}^M(K(t)) & \xrightarrow{\partial_Q^M} & K_n^M(\kappa(Q)) \end{array}$$

d.h. für $\alpha \in K_{n+1}^M(k(t))$ ist

$$\partial_Q^M(\alpha|_{K(t)}) = (e_Q \partial_P^M(\alpha))|_{\kappa(Q)}.$$

Speziell für

$$\alpha = \psi_P(\beta) \text{ mit } \beta \in K_n^M(\kappa(P))$$

erhalten wir

$$\partial_Q^M(\psi_P(\beta)|_{K(t)}) = (e_Q \partial_P^M(\psi_P(\beta)))|_{\kappa(Q)} = (e_Q \beta)|_{\kappa(Q)}$$

Das letzte Gleichheitszeichen rechts ergibt sich aus der Definiton von ψ_P in 7.2.3. Wir wenden ψ_Q an und bilden die Summe über alle Q, welche über P liegen:

$$\sum_{P|Q} \psi_Q \partial_Q^M(\psi_P(\beta)|_{K(t)}) = \sum_{P|Q} e_Q \bullet \psi_Q(\beta|_{\kappa(Q)})$$

Auf der linken Seite kann man die Summe auch über sämtliche Punkte Q erstrecken: die hinzukommenden Summanden sind gleich Null.[23] Wir können deshalb die Identität von 7.2.4 verwenden um die linke Seite zu berechnen:

---

[23] Für einen Punkt Q', der über einem von P verschiedenen Punkt P' liegt ist die Zusammensetzung der Abbildungen $|_{K(t)}$ und $\partial^M_{Q'}$ gleich $e_{Q'} \partial^M_{P'}$ (wegen des obigen Diagramms). Also ist nach 7.2.3

$$\psi_P(\beta)|_{K(t)} - s_{t}\text{-}1(\psi_P(\beta)|_{K(t)}) = \sum_{P|Q} e_Q \bullet \psi_Q(\beta|_{\kappa(Q)}).$$

Nach Definition liegt nun aber das Bild der Abbildung ψ_P im Kern von s_t-1, d.h. es ist

$$\psi_P(\beta)|_{K(t)} = \sum_{P|Q} e_Q \bullet \psi_Q(\beta|_{\kappa(Q)}).$$

Wir wenden ∂^M_∞ an und erhalten die Behauptung des Lemmas. Man beachte, ∂^M_∞ kommutiert mit der Erweiterungsabbildung $i_{K/k}$.

QED (Lemma).

Beweis von 7.2.7. Wir wenden das Lemma für den Fall an, daß K eine algebraische Abschließung von k ist. In diesem Fall haben alle Punkte $Q \neq \infty$ den Grad 1 und die Norm-Abbildungen N_Q sind nach 7.2.6 identische Abbildungen. Das kommutative Diagramm des Lemmas bekommt die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
K^M_n(\kappa(P)) \arrow[r, "N_P"] \arrow[d, "(i_{k(Q)/k(P)})"'] & K^M_n(k) \arrow[d, "i_{K/k}"] \\
\oplus_{P|Q} K^M_n(\kappa(Q)) \arrow[r, "\sum e_Q"] & K^M_n(K)
\end{tikzcd}$$

Für n = 0 und n = 1 sind die beiden vertikalen Abbildungen injektiv.

<u>1. Fall</u>. n = 0. Das hat Diagramm die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "N_P"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\
\mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
g \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & N_P(p) \arrow[d, mapsto] \\
(g,\ldots,g) \arrow[r, mapsto] & \sum_{P|Q} e_Q g
\end{tikzcd}$$

Wegen der Injektivität der vertikalen Abbildungen ist N_P gerade die Multiplikation mit

$\sum_{P|Q} e_Q$. Wir haben zu zeigen

$$\sum_{P|Q} e_Q = [\kappa(P):k]$$

Zum Beweis schreiben wir[24]

$$\kappa(P) = k[t]/(\pi_P).$$

Über der algebraischen Abschließung K von k hat das irreduzible Polynom π_P die Gestalt

---

$$\partial^M_{Q'}(\psi_P(\beta)|_{K(t)}) = e_{Q'} \partial^M_{P'} \psi_P(\beta) = 0.$$

[24] Im Fall P = ∞ ersetze man t durch t^{-1}.

$$\pi_P = (t - \alpha_1)^{e_1} \cdot \ldots \cdot (t - \alpha_r)^{e_r}$$

mit paarweise verschiedenen $\alpha_i \in K$. Die über $(\pi_P) \subseteq k[t]$ liegenden Primideale von $K[t]$ sind gerade die von $t - \alpha_i$ erzeugten[25]:

$$Q_i = (t - \alpha_i) \subseteq K[t].$$

Der Bewertungsring zum Punkt Q_i ist gerade die Lokalisierung des Polynomrings $K[t]$ im Primideal Q_i :

$$A_{Q_i} = K[t]_{Q_i}.$$

Das maximale Ideal dieses Rings wird von

$$\pi_{Q_i} = t - \alpha_i$$

erzeugt. Die Faktoren $t - \alpha_j$ mit $j \neq i$ sind teilerfremd zu π_{Q_i}, also Einheiten in A_{Q_i}. Deshalb gilt in A_{Q_i}:

$$\pi_P = u_i \cdot (\pi_{Q_i})^{e_i}$$

mit einer Einheit u_i von A_{Q_i}. Mit anderen Worten, der Verzweigungsindex im Punkt Q_i ist gleich

$$e_{Q_i} = e_i .$$

Damit gilt

$$\sum_{P|Q} e_Q = \sum_{i=1}^{r} e_{Q_i} = \sum_{i=1}^{r} e_i = \deg \pi_P = [\kappa(P): k],$$

wie behauptet.

<u>2. Fall</u>: $n = 1$.

Wir verwenden die Bezeichnungen des ersten Falls und beachten, wegen der Irreduziblität von π_P gilt

$$e_1 = \ldots = e_r =: e.$$

Im Fall der Charakteristik 0 (oder allgemeiner, falls $\kappa(P)/k$ eine separable Erweiterung ist), gilt

$$e = 1,$$

und im Fall einer positiven Charakteristik p ist e eine Potenz der Primzahl p,

$$e =^{26} p^{\ell}.$$

Das obige kommutative Diagramm hat die Gestalt

---

[25] Sei $Q \subseteq K[t]$ ein Primideal, welches über dem Primideal $P := (\pi_P) \subseteq k[t]$ liegt, d.h. es gelte

$$Q \cap k[t] = P.$$

Dann gilt $\pi_P \in Q$. Weil Q ein Primideal ist, folgt $t - \alpha_i \in Q$ für ein i, d.h. $Q_i \subseteq Q$, d.h. $Q_i = Q$.

[26] e ist der Inseparabilitätsgrad der Erweiterung $\kappa(P)/k$.

$$\begin{array}{ccc} \kappa(P)^* & \xrightarrow{N_P} & k^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \kappa(Q_1)^*\oplus\ldots\oplus\kappa(Q_r)^* & \longrightarrow & K^* \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \beta & \mapsto & N_P(\beta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\beta_1,\ldots,\beta_r) & \mapsto & \prod_{i=1}^{r} (\beta_i)^{e_i} \end{array}$$

Dabei bezeichne β_i das Bild von β bei der natürlichen Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \kappa(P) = k[t]/(\pi_P) & \longrightarrow & K[t]/(t - \alpha_i) = \kappa(Q_i) \cong K \\ \overline{g(t)} & \mapsto & \overline{g(t)} & \mapsto & g(\alpha_i) \end{array}$$

Dabei bezeichne $\overline{g(t)}$ die Restklasse eines Polynoms $g(t) \in k[t]$ in $\kappa(P)$. Wir können dabei annehmen, daß g einen Grad hat, der kleiner als der Grad von π_P ist,

$$\deg g < \deg \pi_P =: d.$$

Ist ξ die Restklasse von t in $\kappa(P)$, so hat jedes $\beta\in\kappa(P)$ die Gestalt

$$\beta = c_{d-1}\xi^{d-1} + c_{d-2}\xi^{d-2}+\ldots+ c_0$$

mit eindeutig bestimmten $c_i \in k$, d.h.

$$\beta = g(\xi) = \overline{g(t)} \text{ mit } g(t) := \sum_{i=0}^{d-1} c_i t^i \in k[t].$$

Wegen der Injektivität der rechten vertikalen Abbildung des obigen Diagramms gilt

$$N_P(\beta) = \prod_{i=1}^{r} (\beta_i)^{e_i} = \prod_{i=1}^{r} (g(\alpha_i))^{e_i} = (\prod_{i=1}^{r} g(\alpha_i))^e$$

Die Elemente $g(\alpha_i) \in K$ sind die Konjugierten des Elements β in der algebraischen Abschließung K von k (mit geeigneten Vielfachheiten gezählt). Im separablen Fall e = 1 steht also auf der rechten Seite gerade die Körper-Norm von β.

$$N_P(\beta) = N_{\kappa(P)/k}(\beta). \qquad (1)$$

Im inseparablen Fall liegt die "gewöhnliche" Körper-Norm $\prod_{i=1}^{r} g(\alpha_i)$ von β im allgemeinen nicht im Grundkörper k. Man muß sie noch in die e-te Potenz (e = Inseparabilitätsgrad) erheben, um ein Element des Grundkörpers zu erhalten. Man definiert deshalb im inseparablen Fall die Norm von β als die e-te Potenz der "gewöhnlichen" Körper-Norm. Mit anderen Worten, die Identität (1) gilt allgemein.
QED.

7.2.8 Die Projektionsformel für die Norm

Seien k ein Körper, $P \in (\mathbb{P}^1_k)_0$ ein abgeschlossener Punkt der projektiven Geraden über k und

$$K = \kappa(P).$$

Dann gilt

$$N_P \{\alpha_K, \beta\} = \{\alpha, N_P(\beta)\}$$

für beliebige Elemente

$$\alpha \in K_m^M(k) \text{ und } \beta \in K_n^M(K).$$

Beweis. Da beide Seiten der zu beweisenden Identität linear in α und β sind, können wir annehmen,

$$\alpha = \{a_1, \dots , a_m\} \text{ mit } a_i \in k^* - \{1\}$$

$$\beta = \{b_1, \dots , b_n\} \text{ mit } b_i \in K^* - \{1\}$$

Außerdem könnne wir annehmen, die Koordinaten a_i und b_i sind von 1 verschieden, denn andernfalls ist $\alpha = 0$ bzw. $\beta = 0$, und die zu beweisende Identität gilt trivialerweise.

Für $P = \infty$ ist N_P die identische Abbildung, d.h. die Behauptung ist trivial. Wir können also annehmen,

$$P \neq \infty.$$

Bezeichne

$$\pi_P = c_0 + c_1 t + \dots + c_{d-1} t^{d-1} + t^d \in k[t]$$

einen Parameter im Punkt P (d.h. ein irreduzibles Polynom).

Wir schreiben im folgenden

$$a, b$$

abkürzend für

$$a_1, \dots , a_m, b_1, \dots , b_n$$

und

$$a, b(t)$$

abkürzend für

$$a_1, \dots , a_m, b_1(t), \dots , b_n(t)$$

wobei $b_i(t) \in k[t]$ das eindeutig bestimmte Polynom eines Grade $< d$ bezeichne, welches des Element $b_i \in K = k[t]/(\pi_P)$ repräsentiert.

Es gilt

$$\partial_P^M\{ a, b(t), \pi_P \cdot (1 - a_1) \} = \{ a, b \} \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned} s_{t^{-1}}^M\{ a, b(t), \pi_P \cdot (1 - a_1) \} &= s_{t^{-1}}^M\{ a, b(t), (\pi_P(t)/t^d) \cdot t^d \cdot (1 - a_1) \} \\ &= s_{t^{-1}}^M\{ a, b(t), (1+c_{d-1}t^{-1}+\dots) \cdot t^d \cdot (1 - a_1) \} \\ &= \{ a, b , 1 - a_1 \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(auf Grund der Steinberg-Relationen). Das Argument von ∂_P^M auf der linken Seite von (1) liegt also im Kern von $s_{t^{-1}}^M$. Desshalb ist

$$\begin{aligned} \psi_P^M\{ a, b \} &= \{ a, b(t) , \pi_P \cdot (1 - a_1) \} \\ &= \{ a, b(t) , (\pi_P(t)/t^d) \cdot t^d \cdot (1 - a_1) \} \\ &= \{ a, b(t), (1+c_{d-1}t^{-1}+\dots) \cdot t^d \cdot (1 - a_1) \} \end{aligned}$$

also

$$N_P\{ a, b \} = -\partial_\infty \psi_P^M\{ a, b \}$$
$$= -\partial_\infty\{ a, b(t) ,(1+c_{d-1}t^{-1}+...)\bullet t^d\bullet(1 - a_1) \}$$
$$= -\partial_\infty\{ a, b(t) ,(1+c_{d-1}t^{-1}+...)\bullet t^d\bullet(1 - a_1) \}$$

Wir schreiben jetzt jede der n+1 letzten Koordinaten des Symbols rechts in der Gestalt

$$u(t^{-1})\bullet(t^{-1})^\nu$$

mit einer ganzen Zahl ν und einem Polynom u, dessen Absolutglied aus k und von Null verschieden ist. Wir erhalten so einen Ausdruck

$$N_P\{ a, b \} = -\partial_\infty\{ a, u_1(t^{-1})\bullet(t^{-1})^{\nu_1}, ... , u_{n+1}(t^{-1})\bullet(t^{-1})^{\nu_{n+1}}\}$$

Wegen der Multilinearität des Ausdrucks auf der rechten Seite, können wir diesen als Summe schreiben, wobei die Summanden dadurch entstehen, daß man auf alle möglichen Weisen in den Produkten einen der beiden Faktoren streicht. Bei den Faktoren der Gestalt $(t^{-1})^\nu$ kann man außerdem den Exponenten ν als Faktor for die Funktion ∂_∞ ziehen und man kann durch Permutieren von Koordinaten die Argumente der Gestalt t^{-1} in den letzten Koordinaten sammeln. Man erhält

$$N_P\{ a, b \} = \sum (\nu_{i_1}\bullet...\bullet\nu_{i_x})(-1)^{s(i_1,...,i_x)}\bullet\partial_\infty \{a, u_{j_1}(t^{-1}), ... , u_{j_y}(t^{-1}), t^{-1}, ... , t^{-1}\}$$

Die Summe wird dabei über alle möglichen Zerlegungen

$$\{i_1 ,..., i_x\} \cup \{j_1, ... , j_y\} = \{1, ... , n+1\}, x + y = n+1,$$

der Menge $\{1, ... , n+1\}$ in zwei disjunkte Teilmengen erstreckt. Wir können annehmen

$$i_1 < ... < i_x \text{ und } j_1 < ... < j_y .$$

Das Vorzeichen $(-1)^{s(i_1,...,i_x)}$ hängt dabei nur vom Tupel $(i_1 ,..., i_x)$ ab. Wegen

$$\{ t^{-1}, t^{-1}\} = \{ t^{-1}, -1\}$$

können wir auch schreiben

$$N_P\{ a, b \} = \sum (\nu_{i_1}\bullet...\bullet\nu_{i_x})(-1)^{s(i_1,...,i_x)}\bullet\partial_\infty \{a, u_{j_1}(t^{-1}), ... , u_{j_y}(t^{-1}), t^{-1}, -1, ... ,-1\}$$
$$= \sum (\nu_{i_1}\bullet...\bullet\nu_{i_x})(-1)^{s(i_1,...,i_x)+x-1}\bullet\partial_\infty \{a, u_{j_1}(t^{-1}), ... , u_{j_y}(t^{-1}), -1, ... ,-1, t^{-1}\}$$

Die letzte Koordinate der Symbole unter der Summe ist ein Parameter im Punkt ∞. Alle anderen Koordinaten sind Einheiten im Bewertungsring von ∞. Damit ist

$$N_P\{ a, b \} = \sum (\nu_{i_1}\bullet...\bullet\nu_{i_x})(-1)^{s(i_1,...,i_x)+x-1} \{a, u_{j_1}(0), ... , u_{j_y}(0), -1, ... ,-1\}$$
$$= \{a\}\bullet\sum (\nu_{i_1}\bullet...\bullet\nu_{i_x})(-1)^{s(i_1,...,i_x)+x-1} \{u_{j_1}(0), ... , u_{j_y}(0), -1, ... ,-1\}$$

Diese Formel gilt auch für m = 0 und {a} = 1, d.h.

$$N_P\{ b \} = \sum (\nu_{i_1} \bullet\ldots\bullet \nu_{i_x})(-1)^{s(i_1,\ldots,i_x)+x-1} \{u_{j_1}(0), \ldots , u_{j_y}(0), -1, \ldots ,-1\}.$$

Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned} N_P\{ a, b \} &= \{a\}\bullet N_P\{ b \} \\ &= \{a, N_P\{ b \}\}, \end{aligned}$$

d.h. es gilt die Behauptung.
QED.

7.2.9 Das Bass-Tate-Lemma

Seien k ein Körper und K := k(a) eine einfache algebraische Körpererweiterung vom Grad

$$d := [K:k].$$

Dann wird $K^M_*(K)$ als $K^M_*(k)$-Modul von den Elementen der folgenden Gestalt erzeugt.

$$\{\pi_1(a), \pi_2(a), \ldots , \pi_m(a)\}$$

mit normierten irreduziblen Polynomen

$$\pi_1, \pi_2, \ldots , \pi_m \in k[t],$$

welche der Bedingung

$$\deg \pi_1 < \deg \pi_2 < \ldots < \deg \pi_m \le d - 1$$

genügen.

Bemerkungen

(i) Das Bild des natürlichen Homomorphismus $K^M_*(k) \longrightarrow K^M_*(K)$ liegt im allgemeinen nicht im Zentrum von $K^M_*(K)$. Die linke Modulstruktur des "großen" Rings über dem kleinen ist also im allgemeinen von der rechten Modulstruktur verschieden. Da die Multiplikation in $K^M_*(K)$ aber graduiert kommutativ ist, besitzten beide Modulstrukturen dieselben Erzeugendensysteme aus homogenen Elementen.

(ii) Zum Beweis der obigen Aussage benötigen wir zunächst das folgende Lemma, welches ein Erzeugendensystem der in 7.2.2 eingeführten Untergruppen

$$L_d \subseteq K^M_n(k(t))$$

beschreibt (und welche nach Definition von den Symbolen $\{f_1 , \ldots , f_n\}$ erzeugt werden,, deren Koordinaten Polynome vom Grad ≤ d aus k[t] sind).

Lemma

Die Untergruppe

$$L_d \subseteq K^M_n(k(t))$$

wird erzeugt von den Symbolen der Gestalt

$$\{a_1, \ldots , a_m , \pi_{m+1} , \ldots , \pi_n\} \qquad (1)$$

mit $a_i \in k^*$ und $\pi_j \in k[t]$ normiert irreduzibel, wobei die Bedingung

$$\deg \pi_{m+1} < \dots < \deg \pi_m \le d$$

erfüllt ist.

Beweis. Nach Definition wird L_d von den Symbolen der Gestalt

$$\{f_1 , \dots , f_n\},$$

wobei die $f_i \in k[t]$ Polynome vom Grad $\le$ d sind. Jedes der f_i können wir in ein Produkt von normierten irreduziblen Faktoren zerlegen und einem Faktor aus k*. Da die Symbole multilinear und graduiert kommutativ sind, erhalten wir ein Erzeugendensystem der Gestalt (1), wobei anstelle der obigen Bedingung an die Grad zunächst nur fordern können, daß anstelle der echten Ungleichungen nur $\le$ steht:

$$\deg \pi_{m+1} \le \dots \le \deg \pi_m \le d \qquad (2)$$

gilt.

Wir haben zu zeigen, jedes Element der Gestalt (1), für welches nur die abgeschwächten Gradbedingungen (2) gelten, kann als Linearkombination von Elementen geschrieben werden, für welche alle Grad-Ungleichungen echt sind.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach d. Im Fall d = 0 haben die definierenden Erzeuger von L_d bereits die geforderte Gestalt (1) (mit m = n) und die Aussage ist trivial. Sei jetzt

$$d > 0$$

und betrachten wir ein Symbol der Gestalt (1), wobei wir zulassen daß in der Gradbedingung an einigen Stellen die Ungleichung nicht echt zu sein braucht. Sei

$$s$$

die Anzahl der Stellen, an denen die Ungleichung nicht echt ist. Wir führen den weiteren Beweis durch Induktion nach s. Im Fall s = 0 ist nichts zu beweisen: das Element (1) hat dann bereits die geforderte Gestalt. Sei jetzt

$$s > 0.$$

und sei

$$\pi := \pi_i$$

die erste Koordinate in (1), die denselben Grad hat wie die nachfolgende Koordinate

$$\rho := \pi_{i+1},$$

d.h.

$$\deg \pi = \deg \rho \le d.$$

Im Fall

$$\deg \pi = \deg \rho < d.$$

können wir die Induktionsvoraussetzung bezüglich d auf das Symbol

$$\{a_1, \dots , a_m , \pi_{m+1} , \dots , \pi_{i+1}\}$$

anwenden und dieses als Linearkombinantion von Symbolen mit echten Grad-Ungleichungen schreiben. Multiplikation mit $\{ \pi_{i+2} , \dots , \pi_n \}$ liefert eine Darstellung von (1) als Linearekombination von Symbolen, auf welche sich die Induktionsvoraussetzung bezüglich s anwenden läßt. Wir könnena also annehmen,

$$\deg \pi = \deg \rho = d.$$

Division mit Rest liefert

$$\rho = \pi + f \text{ mit } f \in k[t] \text{ und } \deg f < d.$$

also

$$1 = \frac{\pi}{\rho} + \frac{f}{\rho} \tag{3}$$

Es gilt

$\{\pi_i, \pi_{i+1}\} = \{\pi, \rho\}$

$= \{\pi/\rho, \rho\} + \{\rho, \rho\}$ (Linearität bzgl. der 1. Koordinate)

$= \{\pi/\rho, \rho\} + \{\rho, -1\}$ (Lemma von 7.1.2).

$= \{\pi/\rho, f\} - \{\pi/\rho, f/\rho\} + \{\rho, -1\}$ (Linearität bzgl. der 2. Koordinate)

$= \{\pi/\rho, f\} + \{\rho, -1\}$ (wegen (3))

$= \{\pi, f\} - \{\rho, f\} + \{\rho, -1\}$ (Linearität bzgl. der 1. Koordinate)

$= \{f, \rho\} - \{f, \pi\} - \{-1, \rho\}$ (graduierte Kommutativität)

Das Symbol $\{\pi_i, \pi_{i+1}\}$ ist somit Linearkombination von Symbolen, für welche Grad-Ungleichung echt ist. Durch Multiplikation mit

$\{a_1, \dots, a_m, \pi_{m+1}, \dots, \pi_{i-1}\}$ von links und $\{\pi_{i+2}, \dots, \pi_n\}$ von rechts

erhalten wir eine Darstellung von (1) als Linearkombination von Symbolen, auf welche sich die Induktionsvoraussetzung bezüglich s anwenden läßt.

QED.

Beweis von 7.2.9. Sei π_P das Minimalpolynom von a über k. Es definiert einen abgeschlossenen Punkt P des Grades d von $\mathbb{P}^1_k$. Nach dem Lemma von 7.2.2 definiet das zahme Symbol einen surjektiven Homomorphismus

$$\partial^M_P : L_d \longrightarrow K^M_n(\kappa(P))$$

und es ist $\kappa(P) = k(a)$.

Auf Grund des vorangehenden Lemmas wird

$$K^M_n(k(a))$$

erzeugt von den Symbolen der Gestalt

$$\partial^M_P(\{a_1, \dots, a_m, \pi_{m+1}, \dots, \pi_{n+1}\}), \tag{1}$$

wobei die a_i in k* liegen und die $\pi_j \in k[t]$ mormierte irreduzible Polynome sind mit

$$\deg \pi_{m+1} < \dots < \deg \pi_m \le d.$$

Im Fall $\pi_{n+1} \neq \pi_P$ sind alle π_j Einheiten im Bewertungsring der zu P gehörigen Bewertung, d.h. (1) ist gleich Null (nach Definition von ∂^M_P). Im Fall $\pi_{n+1} = \pi_P$ ist (1) gleich

$$\{a_1, \dots, a_m\} \cdot \{\pi_{m+1}(a), \dots, \pi_n(a)\} = \{a_1, \dots, a_m, \pi_{m+1}(a), \dots, \pi_n(a)\} \tag{2}$$

Deshalb erzeugen die Symbole der Gestalt (2) gerade die Gruppe $K^M_n(k(a))$, d.h. es gilt die Behauptung.

QED.

7.2.10 Folgerung

Sei K/k eine endliche Körpererweiterung, welche einer der beiden folgenden Bedingungen genügt.

1. K/k ist eine quadratische Erweiterung, d.h. [K:k] = 2.

2. K/k hat als Grad eine Primzahl p und jede Erweiterung von k mit einem zu p teilerfremden Grad ist trivial..

Dann wird $K^M_*(K)$ als linker $K^M_*(k)$-Modul erzeugt von $K^M_1(K) = K^*$. Mit anderen Worten, die Produkt-Abbildungen

$$K^M_{n-1}(k)\times K^* \longrightarrow K^M_n(K),\ (\alpha, c) \mapsto \{\alpha, c\}$$

sind surjektiv.

Beweis. In beiden Fällen entsteht K aus k durch die Adjunktion eines einzelnen Elements. Außerdem sind die einzigen nomierten irreduziblen Polynom eines Grades < [K:k] die linearen Polynome x - c, $c \in k$. Die Aussage folgt damit direkt aus 7.2.9.

QED.

Bemerkungen

(i) Die zweite Bedingung von 7.2.10 ist erfüllt, wenn k eine maximale algebraische Erweiterung eines Körpers k_0 ist, deren endliche Teilerweiterungen einen zu p teilerfremden Grad besitzten (genannt auch <u>maximale zu p teilerfremde Erweiterung</u>).

(ii) Ist k_0 perfekt oder von der Charakteristik p, so ist der Fixkörper

$$k = (k_s)^S$$

ein Körper dieser Art, wenn k_s eine separable Abschließung von k bezeichnet und S eine Pro-p-Sylow-Untergruppe der Galois-Gruppe $G(k_s/k)$ ist.

(iii) Ist k_0 weder perfekt noch von der Charakteristik p, so kann man für k eine maximale zu p teilerfremde Erweiterung einer perfekten Abschließung von k_0 nehmen.

(vi) Im nächsten Abschnitt wollen wir die Konstruktion der Norm auf den Fall von nicht notwendig einfachen Körpererweiterungen verallgemeinern.

7.3 Die Norm-Abbildung

7.3.1 Die Axiome

Sei K/k eine endliche Körpererweiterung. In diesem Abschnitt konstruieren wir Norm-Abbildungen

$$N_{K/k}: K^M_n(K) \longrightarrow K^M_n(k)$$

für alle nicht-negativen ganzen Zahlen n, welche die folgenden Eigenschaften haben.

1. Für n = 0 ist $N_{K/k}: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ die Multiplikation mit [K:k].
2. Für n = 1 ist $N_{K/k}: K^* \longrightarrow k^*$ die Körpernorm.
3. <u>Projektionsformel</u>. Für $\alpha\in K^M_n(k)$ und $\beta\in K^M_n(K)$ gilt
$$N_{K/k}(\{\alpha_K , \beta\}) = \{\alpha, N_{K/k}(\beta)\}.$$
4. <u>Komposition</u>. Für jeden Körperturm K'/K/k von endlichen Erweiterungen gilt
$$N_{K'/k} = N_{K/k}\circ N_{K'/K}.$$

Außerdem sollte eine vernünftige Norm-Abbildung verträglich mit den Korestriktionsabbildungen auf der Galois-Kohomologie bezüglich des Galois-Symbols. Diese Frage werden wir im nächsten Abschnitt diskutieren.

Bemerkungen

(i) Für jede Norm-Abbildung, die die obigen Eigenschaften 1-3 besitzt, ist die Zusammensetzung

$$N_{K/k}\circ i_{K/k}: K_n^M(k) \longrightarrow K_n^M(K) \longrightarrow K_n^M(k)$$

gerade die Multiplikation mit

$$[K:k].$$

Das ist offensichtlich für n = 0 und n = 1 und für allgemeines n ergibt sich dies induktiv aus der Projektionsformel.

(ii) Ist K = k(a) eine einfache algebraische Körpererweiterung, so definiert das Minimalpolynom von a über k einen abgeschlossenen Punkt P von $\mathbb{P}_k^1$ mit K $\cong$ $\kappa(P)$: Die Norm-Abbildung N_P von 7.2.7 hat die Eigenschaften 1 und 2 (nach 7.2.7) und 3 (nach 7.2.8). Diese Abbildung ist somit ein natürlicher Kanditat für die Norm $N_{K/k}$. Es bleibt dann jedoch immer noch zu zeigen, daß die so definierte Norm nur von der Erweiterung K/k und nicht von der speziellen Wahl des Erzeugerrs a abhängt.

(iii) Im Fall K = k(a) führen wir die folgende Bezeichnung ein:

$$N_{a/k}: K_n^M(k(a)) \longrightarrow K_n^M(k)$$

sei die Normabbildung $N_{a/k} = N_P$ zum abgeschlossenen Punkt P $\in \mathbb{P}_k^1$, welcher durch das Minimalpolynom von a über k gegeben ist.

7.3.2 Definition der Norm-Abbildung einer endlichen Körpererweiterung

Seien K/k eine endliche Körpererweiterung und $a_1, \dots, a_r \in K$ ein Erzeugendensystem von K/k,

$$K = k(a_1, \dots, a_r).$$

Wir betrachten den Körperturm

$$k \subseteq k(a_1) \subseteq k(a_1, a_2) \subseteq \dots \subseteq k(a_1, \dots, a_r) = k$$

und setzen

$$N_{a_1,\dots,a_r/k} = N_{a_r/k(a_1,\dots,a_{r-1})}\circ N_{a_{r-1}/k(a_1,\dots,a_{r-2})}\circ \dots \circ N_{a_2/k(a_1)}\circ N_{a_1/k}$$

Bemerkung

Die Abbildungen $N_{a_1,\dots,a_r/k}$ haben die Eigenschaften 1-4 von 7.3.1. Für die ersten drei Eigenschaften folgt das aus Bemerkung 7.3.1 (ii) und für die letzte Eigenschaft aus der Definition. Außerdem ist

$$N_{a_1,\dots,a_r/k}\circ i_{K/k} = [K:k]$$

(nach Bemerkung 7.3.1 (i)).

7.3.3 Satz von Kato

Sei K/k eine endliche Körpererweiterung, die von den Elementen $a_1, \dots, a_r \in K$ erzeugt wird. Dann hängt die Abbildung

$$N_{a_1,\dots,a_r/k}: K_n^M(K) \longrightarrow K_n^M(k)$$

(von 7.3.2) nicht von der speziellen Wahl der $a_1, \dots, a_r$ ab.

Bemerkungen

(i) Der Satz erlaubt uns die Definition

$$N_{K/k} = N_{a_1,\ldots,a_r/k}: K_n^M(K) \longrightarrow K_n^M(k)$$

für jedes (für ein) Erzeugendensystem a_1 , ... , a_r der endichen Körpererweiterung K/k, ohne daß dadurch Mehrdeutigkeiten auftreten.

(ii) Der Rest dieses Abschnitt beschäftigt sich mit dem Beweis des Satzes von Kato. Wir geben aber vorher noch eine direkte Folgerung dieses Satzes an.

7.3.4 Folgerung: Invarianz bei Automorphismen

Seien K/k eine endlichen Körpererweiterung und $\sigma: K \longrightarrow K$ ein k-Automorphismus. Dann gilt

$$N_{K/k} \circ \sigma = N_{K/k}$$

Beweis. Auf Grund von 7.3.3 gilt

$$N_{a_1,\ldots,a_r/k} = N_{\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_r)/k}$$

für jedes Erzeugendensystem a_1 , ... , a_r von K über k.

QED.

Bemerkung

Ein wichtiger Schritt beim Beweis des Satzes von Kato ist die nachfolgende Reduktionsaussage, die im wesentlichen auf Bass und Tate zurückgeht.

7.3.5 Reduktionssatz

Angenommen, es gibt eine Primzahl p mit der Eigenschaft, daß der Satz von Kato 7.3.3 für alle Körper k richtig ist, deren endliche Erweiterungen mit einem zu p teilerfremden Grad trivial sind. Dann gilt der Satz von Kato für beliebige Körper k.

Zum Beweis benötigen wir einige Lemmata.

Lemma 1 (Ordnung der Elemente von Ker i_K)

Sei K/k eine algebraische Körpererweiterung. Dann ist der Kern der Körperwechsel-Abbildung

$$i_{K/k}: K_n^M(k) \longrightarrow K_n^M(K)$$

eine Torsionsgruppe. Im Fall

$$[K:k] < \infty$$

wird dieser Kern vom Körpergrad [K:k] annulliert.

Beweis. Bezeichne $\{K_i\}$ die Familie der endlichen Teilerweiterungen von K/k. Dann gilt

$$K_n^M(K) = \varinjlim_i K_n^M(K_i).$$

Es reicht deshalb, den zweiten Teil der Behauptung für endliche Körpererweiterungen zu beweisen. Wir haben zu zeigen,

$$[K:k]\bullet\mathrm{Ker}(i_{K/k}) = 0.$$

Nach Bemerkung 7.3.2 ist die Multiplikation mit [K:k] gleich der Komposition

$$N_{a_1,\ldots,a_r/k} \circ i_{K/k} ,$$

wobei a_1 , ... , $a_r \in$ ein Erzeugendensystem von K über k bezeichne. Es gilt aber bereits

$$i_{K/k}(\mathrm{Ker}_{K/k}) = 0.$$

QED.
Als nächstes erinnern wir an einige elementare Aussagen der kommutativen Algebra.

Lemma 2 (Chinesischer Restesatz)
Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und

$$I_1 , \dots , I_n \subseteq R$$

Ideale mit

$$I_j + I_1\bullet\dots\bullet I_{j-1}\bullet I_{j+1}\bullet\dots\bullet I_n = R \text{ für } j = 1, \dots , n. \tag{1}$$

Dann gilt

(i) $R/ I_1\cap..\cap I_n \longrightarrow R/I_1\oplus\dots\oplus R/I_n , \bar r \mapsto (\bar r , \dots , \bar r)$,

ein Isomorphismus von Ringen mit 1, wenn $\bar r$ die Restklasse von $r\in R$ in den verschiedenen Faktorringen bezeichnet und die direkte Summe rechts mit der koordinatenweisen Multiplikation von versehen wird.

(ii) $I_1\bullet\dots\bullet I_n = I_1\cap..\cap I_n$.

Beweis. Zu (i). Die natürliche Abbildung

$$\alpha:R \longrightarrow R/I_1\oplus\dots\oplus R/I_n, r \mapsto (\bar r , \dots , \bar r), \tag{2}$$

ist mit der eben definierten Multiplikation auf der direkten Summe rechts ein Homomorphismus von Ringen mit 1 und hat den Kern $I_1\cap..\cap I_n$. Auf Grund des Homomorphiesatzes reicht es zu zeigen, die Abbildung (2) ist surjektiv. Dazu reicht es zu zeigen, jedes Elemente der Gestalt

$$r\bullet e_j , r \in R ,$$

liegt im Bild, wobei e_i den Vektor bezeichne, desssen i-te Koordinaten die Restklasse von 1 in R/I_j ist und dessen übrige Koordinaten Null sind. Man beachte, jedes Element der direkten Summe rechts ist eine Summe von Elementen dieser Gestalt. Weil die Abbildung (2) eine R-lineare Abbildung von Moduln über R ist, reicht es zu zeigen, die Vektoren

$$e_j$$

liegen im Bild. Wegen (1) gibt es Elemente

$$a_j \in I_j , \quad b_j \in I_1\bullet\dots\bullet I_{j-1}\bullet I_{j+1}\bullet\dots\bullet I_n$$

mit

$$a_j + b_j = 1,$$

d.h.

$$b_j \equiv 1 - a_j \equiv 1 \bmod I_j$$
$$b_j \equiv 0 \bmod I_i \text{ für } i \neq j.$$

Es gilt also $\alpha(b_j) = e_j$ und e_j liegt tatsächlich im Bild von α.

Zu (ii). Trivialerweise gilt "$\subseteq$". Die umgekehrte Inklusion beweise wir durch Induktion nach n. Im Fall n = 1 ist die Aussage trivial. Sei n > 1. Nach Induktionsvorausetzung gilt

$$I_1\bullet\dots\bullet I_n = I_1\bullet(I_2\cap\dots\cap I_n) \tag{3}$$

Wir haben zu zeigen, jedes Element

$$x \in I_1 \cap .. \cap I_n$$

liegt im Ideal auf der rechten Seite von (3). Dazu verwenden wir die oben gewählten Elemente a_j und b_j. Wegen $1 = a_1 + b_1$ gilt

$$x = 1 \bullet x = a_1 x + b_1 x$$

Wegen $a_1 \in I_1$ und der Wahl von x liegt der erste Summand $a_1 x$ in der rechten Seite von (3),

$$a_1 x \in I_1 \bullet (I_2 \cap ... \cap I_n)$$

Nach Wahl von b_1 gilt

$$b_1 \in I_2 \bullet ... \bullet I_n \subseteq I_2 \cap ... \cap I_n$$

Deshalb liegt auch der zweite Summand $b_1 x$ in der rechten Seite von (3). Dasselbe gilt damit auch für x.
QED.

Lemma 3 (Produkt-Zerlegung von Algebren endlicher Dimension)
Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Es existiere ein Teilkörper

$$k \subseteq R,$$

über welchem R eine endliche Vektorraum-Dimension besitzt,

$$\dim_k R < \infty.$$

Dann gilt:

(i) R besitzt nur endlich viele maximale Ideale, sagen wir

$$m_1 , ... , m_r.$$

(ii) Jedes der Ideale $m_i R_{m_i}$ ist nilpotent, sagen wir

$$m_i^{e_i} R_{m_i} = 0.$$

(iii) Für jedes i und jede $n \ge e_i$ induziert die natürliche Abbildung $R \longrightarrow R_{m_1}$ einen Isomorphismus

$$R/m_i^n \xrightarrow{\cong} R_{m_1} \text{ für jedes } n \ge e_i$$

(iv) Für beliebige nicht-negative ganze Zahlen $i_1,...,i_r$ gilt

$$(m_1)^{i_1} \cap ... \cap (m_n)^{i_r} = (m_1)^{i_1} \bullet ... \bullet (m_n)^{i_r}$$

Im Fall $i_1 \ge e_1 , ... , i_r \ge e_r$ ist dieses Ideal das Null-Ideal.

(v) Die natürliche Abbildung

$$R \longrightarrow R_{m_1} \oplus ... \oplus R_{m_r} \quad r \mapsto (r, ... , r) ,$$

ist ein Isomorphismus von Ringen mit 1, wenn man die direkte Summe rechts mit der koordinatenweisen Multiplikation versieht.

Bemerkung

Die Bedingung an R, ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper zu sein, kann man durch die Bedingung ersetzen, daß R ein Modul endlicher Länger über sich selbst ist.

Beweis. Wir beachten zunächst, jedes Ideal von R ist ein k-linearer Unterraum. Jede aufsteigende Kette von Idealen von R muß wegen dim R < ∞ stationär sein, d.h.

R ist noethersch.

Dieselbe Argumentation zeigt, auch jede absteigende Kette von Idealen von R ist stationär, d.h.

R ist artinsch.

Seien $m_1, \dots, m_n$ (r > 1) paarweise verschiedene maximale Ideale von R. Wir wenden den Chinesichen Restesatz mit

$$I_j := (m_j)^{e_j}, e_j \in \mathbb{N}$$

an. Dazu müssen wir zeigen,

$$I_j + I_1 \bullet \dots \bullet I_{j-1} \bullet I_{j+1} \bullet \dots \bullet I_r = R \text{ für } j = 1, \dots, n.$$

Wäre diese Identität falsch für ein j, so gäbe es ein maximales Ideal m von R mit

$$I_j + I_1 \bullet \dots \bullet I_{j-1} \bullet I_{j+1} \bullet \dots \bullet I_r \subseteq m.$$

Weil der erste Summand in m liegt, folgt $m_j \subseteq m$, und weil m_j maximal ist sogar

$m_j = m$. Weil der zweite Summand in m liegt, folgt $m_i \subseteq m$ für ein $i \neq j$, also $m_i = m$. Nach Voraussetzung sollen aber die m_i paarweise verschieden sein. Wir haben gezeigt, die Ideale I_i genügen den Bedingungen des Chinesischen Restesatzes. Wir erhalten

$$(m_1)^{i_1} \cap \dots \cap (m_n)^{i_n} = (m_1)^{i_1} \bullet \dots \bullet (m_n)^{i_n} \tag{1}$$

für beliebige natürlichen Zahlen $i_1, \dots, i_n$. Außerdem haben wir Isomorphismen

$$R/(m_1)^{i_1} \bullet \dots \bullet (m_n)^{i_n} \xrightarrow{\cong} R/(m_1)^{i_1} \oplus \dots \oplus R/(m_n)^{i_n}, \quad \bar{r} \mapsto (\bar{r}, \dots, \bar{r}), \tag{2}$$

von Ringen mit 1.

<u>Zu (i)</u>. Aus (2) lesen wir ab,

$$\dim_k R \ge \sum_{j=1}^{n} \dim_k R/(m_j)^{i_j} \ge \sum_{i=1}^{n} \dim_k R/m_i \ge n$$

Die Anzahl der maximalen Ideale von R ist somit durch die Dimension von R über k beschränkt. Im folgenden sei deren Anzahl gleich r.

<u>Zu (ii)</u>. Sei $m = m_i$. Für jedes Ideal J von R_m gilt

$$(J \cap R) \bullet R_m = J.$$

Insbesondere ist durch

$$J \mapsto J \cap R$$

ein injektive Abbildung der Mengen der Ideale von R_m in die Menge der Ideale von R gegeben, welche die Relation "$\subseteq$" erhält. Mit R ist damit auch der Ring R_m noethersch und artinsch,

R_m ist noethersch und artinsch.

Das Ideal mR_m ist endlich erzeugt. Es reicht zu zeigen, mR_m besitzt ein Erzeugendensystem aus nilpotenten Elementen. Dies reduziert die Behauptung von (iii) auf die Aussage:

Jedes Element $x \in m$ ist nilpotent in R_m.

Wir betrachten die absteigende Kette von Idealen

$$xR_m \supseteq x^2R_m \supseteq x^3R_m \supseteq \ldots$$

Diese ist stationär. Es gibt somit eine natürliche Zahl n mt

$$x^nR_m = x^{n+1}R_m ,$$

also

$$x^n = a \bullet x^{n+1} \text{ für ein } a \in R_m,$$

d.h.

$$x^n(1-ax) = 0 \text{ in } R_m$$

Wegen $x \in m$ kann aber $1 - ax$ nicht im maximalen Ideal mR_m von R_m liegen, d.h. das Element $1 - ax$ ist eine Einheit in R_m. Es folgt

$$x^n = 0.$$

Damit ist die Aussage von (ii) bewiesen.

<u>Zu (iii)</u>. Sei wie bisher $m = m_i$ für ein fest gewähltes i. Die natürliche Abbildung

$$R \longrightarrow R_m$$

induziert für jede natürliche Zahl n eine Abbildung

$$R/m^n \longrightarrow R_m/m^nR_m. \tag{3}$$

Nach Konstruktion ist der rechte Ring ein Quotientenring des linken. Genauer, der rechte Ring ist die Lokalisierung des linken bezüglich des maximalen Ideals

$$mR/m^nR.$$

Nun ist aber R/m^n bereits selbst schon ein lokaler Ring mit dem einzigen maximalen Ideal mR/m^nR. Die Lokalisierung nach diesem maximalen Ideal stimmt also mit dem Ring selbst überein. Mit anderen Worten, die natürliche Abbildung (3) ist für jedes n ein Isomorphismus. Nach (ii) gilt

$$m^nR_m = 0$$

für jede natürliche Zahl n mit $n \ge e := e_i$.

<u>Zu (iv)</u>. Die Gleichheit von Durchschnitt und Produkt hatte sich bereits beim Beweis von (ii) ergeben (vgl. (1)). Zeigen wir, daß wir unter der angegebenen Zusatzbedingung das Null-Ideal erhalten. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\beta: R \longrightarrow R_{m_1} \oplus \ldots \oplus R_{m_r}.$$

Dies ist ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1, wenn man die direkte Summe rechts mit der koordinatenweisen Multiplikation versieht. Für jedes

$$x \in \mathrm{Ker}(\beta)$$

und jedes i ist $x = 0$ in R_{m_i} , d.h. es gibt ein Element $x_i \in R - m_i$ mit

$$x_i x = 0.$$

Betrachten wir den Annullator von x in R,

$$\mathrm{Ann}(x) := \{r \in R \mid rx = 0\}$$

Dies ist ein Ideal von R, welches das Element x_i enthält. Wegen $x_i \notin m_i$ gilt also

$$\mathrm{Ann}(x) \not\subseteq m_i .$$

Mit anderen Worten, das Ideal Ann(x) liegt in keinem maximalen Ideal von R. Es folgt

$$1 \in \mathrm{Ann}(x),$$

also $1 \bullet x = 0$. Wir haben gezeigt, der Kern von β ist trivial, d.h. β ist injektiv. Wir identifizieren mit Hilfe von β den Ring R mit einem Teilring der direkten Summe rechts.

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, das von

$$I := (m_1)^{e_1} \bullet \ldots \bullet (m_r)^{e_r}$$

in $R_{m_1} \oplus \ldots \oplus R_{m_r}$ erzeugte Ideal ist gleich Null. Es gilt

$$\begin{aligned} I\bullet(R_{m_1} \oplus \ldots \oplus R_{m_r}) &\subseteq (IR_{m_1}) \oplus \ldots \oplus (I R_{m_r}) \\ &\subseteq (m_1)^{e_1} R_{m_1} \oplus \ldots \oplus (m_r)^{e_r} R_{m_r} \end{aligned}$$

Nach Wahl von e_i (in (ii)) ist der i-te direckte Summand rechts gleich Null (für jedes i).

<u>Zu (v)</u>. Wie wir am Anfang des Beweises gesehen haben, besteht für beliebige natürliche Zahlen $i_1, \ldots , i_n$ ein Isomorphismus

$$R/(m_1)^{i_1} \bullet \ldots \bullet (m_n)^{i_n} \xrightarrow{\cong} R/(m_1)^{i_1} \oplus \ldots \oplus R/(m_n)^{i_n}, \quad \bar r \mapsto (\bar r, \ldots , \bar r),$$

(vgl. (2)). Gilt zusätzlich $i_\nu \ge e_\nu$ für jedes ν, so ist der Ring auf der linken Seite gerade gleich R (nach (iv)) und der auf der linken gerade $R_{m_1} \oplus \ldots \oplus R_{m_r}$ (nach (iii)).

QED.

Beispiel

Seien K/k eine endliche Körpererweiterung und L/k eine beliebige Körpererweiterung. Dann ist die Algebra

$$R := L\otimes_k K \cong L\otimes_k k^{[K:k]} \cong L^{[K:k]}$$

als L-Vektorraum endlich erzeugt, genügt also den Bedingungen des vorangehenden Lemmas. Insbesondere besitzt sie nur endlich viele maximale Ideale, sagen wir

$$M_1 , \ldots , M_r \subseteq L\otimes_k K ,$$

und $L\otimes_k K$ zerfällt ins direkte Produkt der Lokalisierungen,

$$L\otimes_k K = R_1 \times \ldots \times R_r , R_i := R_{M_i} = R/M_i^{e_i}.$$

Im Fall einer einfachen algebraischen Körpererweiterung

$$K = k(a)$$

können wir die Sitation genau beschreiben. Sei

$f \in k[x]$

das Minimalpolynom von a über k und

$$f = c\bullet(f_1)^{u_1}\bullet\ldots\bullet(f_s)^{u_s} , c \in k^*, \tag{1}$$

die Zerlegung von f in Potenzen von paarweise teilerfremden normierten irreduziblen Faktoren

$$f_i \in L[x].$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} L\otimes_k K &\cong L\otimes_k k[x]/(f) \\ &\cong L[x]/(f) \\ &\cong L[x]/(\,(f_1)^{u_1}\bullet\ldots\bullet(f_s)^{u_s}\,) \\ &\cong L[x]/(\,(f_1)^{u_1}) \times \ldots \times L[x]/(\,(f_s)^{u_s}\,) \end{aligned}$$

wobei die letzte Isomorphie nach dem Chinesischen Restesatzt besteht (denn die f_i erzeugen paarweis verschiedene maximale Ideale). Wir sehen in dieser Situation, die Anzahl der maximalen Ideale ist gleich

$$r = s,$$

d.h. die Anzahl der teilerfremden Faktoren in der Zerlegung von f über L
Weiter sind die Zahlen e_i in der allgemeinen Situation sind gerade

$$e_i = u_i\ ,$$

d.h. die Exponenten die in der Zerlegung von f über L auftreten. Ist

$$P \in \mathbb{P}^1_k$$

der abgeschlossene Punkt der projektiven Geraden mit dem Parameter

$$\pi_p = f,$$

so ist der Bewertungsring der zugehörigen diskreten Bewertung gerade die Lokalisierung

$$R_P = k[x]_{(f)}$$

Die über P liegenden Punkte

$$Q_j \in \mathbb{P}^1_L$$

der projektiven Geraden über L haben dann die Parameter

$$\pi_{Q_j} = f_j$$

und die zugehörigen Bewertungsrings sind gleich

$$R_{Q_j} = L[x]_{(f_j)}$$

Da jedes f_i mit $i \ne j$ in R_{Q_j} eine Einheit ist, bekommt die Zerlegung (1) in R_{Q_j} die Gestalt

$$\pi_p = u_{Q_j}\bullet(\pi_{Q_j})^{e_j} \text{ mit einer Einheit } u_{Q_j} \in R_{Q_j}.$$

mit anderen Worten, der Exponent $e_j = u_j$ in der Zerlegung (1) ist gerade der <u>Verzweigungsindex</u> von L/k im Punkt Q_j.

Lemma 4 (Verhalten der Norm bei Basiswechsel)
Seien in der obigen Situation

$$K = k(a_1, \ldots , a_s)$$

eine endliche Körpererweitung mit den Erzeugern $a_1, \ldots , a_s \in K$ und

$$L_j = R_j/M_j.$$

Weiter sei

$$p_j: L\otimes_k K \cong R_1/M_1^{e_1}\times\ldots\times R_r/M_s^{e_s} \longrightarrow R_j/M_{M_j} = L_j$$

die j-te natürliche Projektion. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc}
K_n^M(K) & \xrightarrow{N_{a_1,\ldots,a_s/k}} & K_n^M(k) \\
\oplus i_{L_j/K}\downarrow & & \downarrow i_{L/k} \\
\oplus_{j=1}^r K_n^M(L_j) & \xrightarrow{\sum e_j N_{p_j(a_1),\ldots,p_j(a_s)/L}} & K_n^M(L)
\end{array}$$

Beweis. Im Fall s = 1 ist dies gerade die Aussage des Lemmas von 7.2.7. Der weitere Beweis erfolgt jetzt durch Induktion nach s. Sei also

$$s > 1.$$

Wir zerlegen die Erweiterung K/k in eine einfache Teilerweiterujng und eine mit nur s-1 Erzeugern und schreiben für jede dieser Teilerweiterungen das zugehörige Diagramm auf. Genauer, wir schreiben

$$k(a_1)\otimes_k L = \oplus R_j$$

mit gewissen lokalen Ringen R_j (welche L-Algebren sind, die als L-Vektorräume eine endliche Dimension besitzten). Jede der endlich-dimensionalen L-Algebren $K\otimes_{k(a_1)}R_j$ läßt sich weiter zerlegen in lokale Ringe, sagen wir

$$K\otimes_{k(a_1)}R_j = \oplus R_{ij} .$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
K\otimes_k L &\cong K\otimes_{k(a_1)}k(a_1)\otimes_k L \\
&\cong K\otimes_{k(a_1)} (\oplus R_j) \\
&\cong \oplus R_{ij} .
\end{aligned}$$

Bezeichne L_j den Restklassenkörper der lokalen Algebra R_j und L_{ij} den von R_{ij}. Weiter bezeichne

$$e_j$$

den Exponenten der ersten Potenz des maximalen Ideals von R_j, welche gleich 0 ist, und analog

$$e_{ij}$$

den zu R_{ij} gehörigen Expoenten des maximalen Ideals. Wir erhalten dann das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc}
K_n^M(K) & \xrightarrow{N_{a_2,\ldots,a_s/k(a_1)}} & K_n^M(k(a_1)) & \xrightarrow{N_{a_1/k}} & K_n^M(k) \\
\oplus\, i_{L_{ij}/K}\downarrow & & \downarrow \oplus\, i_{L_j/k(a_1)} & & \downarrow i_{L/k} \\
\oplus_{ij} K_n^M(L_{ij}) & \xrightarrow{\sum e_{ij}e_j^{-1} N_{p_{ij}(a_2),\ldots,p_{ij}(a_s)/L_j}} & \oplus_j K_n^M(L_j) & \xrightarrow{\sum e_j N_{p_j(a_1)/L}} & K_n^M(L)
\end{array}$$

Das rechte Viereck ist dabei kommutativ auf Grund des bereits behandelten Falls $s = 1$. Das linke Viereck ist kommutativ nach Induktionsvoraussetzung. Die sich so ergebende Kommutativität des äußeren Vierecks ist gerade die Behauptung.
QED.

Beweis des Reduktionssatzes
Sei K/k eine endliche Körpererweiterung mit
$$K = k(a_1, \dots, a_r) = k(b_1, \dots, b_s).$$
Wir bezeichnen mit
$$\Delta \subseteq K_n^M(k)$$
die Untergruppe, welche von allen Elementen der Gestalt
$$N_{a_1,\dots,a_r/k}(\alpha) - N_{b_1,\dots,b_s/k}(\alpha) \text{ mit } \alpha \in K_n^M(K)$$
erzeugt wird. Wir haben zu zeigen,
$$\Delta = 0.$$
Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm
$$\begin{array}{ccc} K_n^M(K) & \xrightarrow{N_{a_1,\dots,a_r/k}} & K_n^M(k) \\ \oplus i_{L_j/K}\downarrow & & \downarrow i_{L/k} \\ \oplus_{j=1}^r K_n^M(L_j) & \xrightarrow{\sum e_j N_{p_j(a_1),\dots,p_j(a_r)/L}} & K_n^M(L) \end{array}$$

von Lemma 4 für den Fall, daß $L = \bar{k}$ die algebraische Abschließung von k ist. In dieser Situation gilt $L_j = L$ für alle j, und die untere horizontale Abbildung ist eine Summe von identischen Abbildungen. Mit anderen Worten, die linke und die untere Abbildung hängen nicht von der speziellen Wahl der a_i: die e_j sind die Exponenten der minimalen Potenzen der maximalen Ideale von $K \otimes_k \bar{k}$, die in den zugehörigen lokalen Ringen gleich Null sind. Der Vergleich mit dem analogen Diagramm für die b_i zeigt,
$$i_{\bar{k}/k} \circ N_{a_1,\dots,a_r/k}(\alpha) = i_{\bar{k}/k} \circ N_{b_1,\dots,b_s/k}(\alpha) \text{ für jedes } \alpha \in K_n^M(K),$$
also
$$\Delta \subseteq \mathrm{Ker}(i_{\bar{k}/k}).$$
Nach Lemma 1 ist
$$\Delta \text{ Torsionsgruppe.}$$
Bezeichne
$$\Delta_p := \{x \in \Delta \mid x \text{ wird von einer Potenz von p annulliert}\}$$
die p-primäre Komponente von p. Es reicht zu zeigen,
$$\Delta_p = 0 \text{ für jede Primzahl p.}^{27}$$

Wir fixieren eine Primzahl p und betrachten das obige kommutative Diagramm für den Fall, daß L eine maximale zu p teilerfremde Erweiterung von k ist (vgl. 7.2.10). Jede endliche Erweiterung von L mit einem zu p teilerfremden Grad ist somit trivial. Nach

[27] Δ ist die direckte Summe der Δ_p, vgl. die erste Fußnote im Beweis von 4.5.20.

Annahme des Reduktionssatzes gilt der Satz von Kato für den Körper L. Die untere Zeile des Diagramms ist unabhängig von der speziellen Wahl der a_i (und hängt nur von den Erweiterungen L_j/L ab. Insbesondere gilt

$$i_{L/k}(N_{a_1,...,a_r/k}(\alpha)) = {}_{L/k}(N_{b_1,...,b_s/k}(\alpha)) \text{ für jedes } \alpha \in K_n^M(K),$$

also

$$i_{L/k}(\Delta) = 0,$$

also

$$i_{L/k}(\Delta_p) = 0.$$

Es reicht also zu zeigen,

$$i_{L/k}|_{\Delta_p} \text{ ist injektiv.}$$

Wie schon bemerkt hat jede endliche Teilerweiterung L'/k von L/k einen zu p teilerfremden Grad und nach Lemma 1 wird

$$\mathrm{Ker}(i_{L'/k})$$

von diesem Grad annulliert:

$$[L':k]\bullet\mathrm{Ker}(i_{L'/k}) = 0.$$

Jedes Element aus dem Kern von

$$i_{L/k}: K_n^M(k) \longrightarrow K_n^M(L)$$

wird deshalb von einer zu p teilerfremden Zahl annulliert.[28] Dann ist aber

$$i_{L/k}|_{\Delta_p} \text{ injektiv.}^{29}$$

QED.

7.3.6 Vereinbarung zur Situation für den verbleibenden Teil des Abschnitts

Im verbleibenden Teil dieses Abschnitts sei

$$p$$

ein fest gewählte Primzahl und

$$k$$

ein Körper mit der Eigenschaft, daß jede endliche Erweiterung mit einem zu p teilerfremden Grad trivial ist.

7.3.7 Eigenschaften von maximalen zu p teilerfremden Erweiterungen

Seien k wie in 7.3.6 und K/k eine endliche Körpererweiterung. Dann gilt:

(i) K ist ebenfalls wie in 7.3.6.

(ii) Es gibt eine Teilerweiterung K'/k von K/k mit K'/k normal vom Grad p.

Beweis. Zu (i). Der Fall K = k ist trivial. Wir können annehmen , K/k ist eine Erweiterung vom Grad > 1. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung mit

$$[L:K] \text{ teilerfremd zu p.}$$

Wir haben zu zeigen, [L:K] = 1.

---

[28] $K_n^M(L)$ ist der direkte Limes der $K_n^M(L')$. Ein Element von $K_n^M(k)$ ist genau dann gleich Null in der Gruppe $K_n^M(L)$, wenn es in einem der $K_n^M(L')$ gleich Null ist.

[29] Ein Element, welches von einer p-Potenz und von einer zu p teilerfremden ganzen Zahl annulliert wird, wird von 1 annulliert, ist also Null.

Wir betrachten zunächst den

<u>1. Fall</u>: L/k ist separabel.
Als endliche separable Erweiterung ist L/k einfach. Seien

$$L = k(a)$$

und $f(x) \in k[x]$ das irreduzible Polynom von a über k. Weiter sei

$$\widetilde{L}$$

der Zerfällungskörper von f über k. Weil f(x) separabel ist über k, ist

$$\widetilde{L}/k$$

eine Galois-Erweiterung. Sei

$$S \subseteq G(\widetilde{L}/k)$$

eine p-Sylow-Untergruppe der Galois-Gruppe von $\widetilde{L}/k$ und

$$F := \widetilde{L}^S$$

der zugehörige Fixkörper. Nach dem Hauptsatz der Galois-Theorie gilt

$$G(\widetilde{L}/F) = S,\ [\widetilde{L}: F] = \# S = \text{maximale p-Potenz, welche } [\widetilde{L}:k] = G(\widetilde{L}/k) \text{ teilt.}$$

Deshalb ist

$$[F:k] = [\widetilde{L}:k]/[\widetilde{L}:F] \text{ teilerfremd zu p.}$$

Nach Wahl von k gilt [F:k] = 1, F = k, d.h.

$$[L:K] \mid [\widetilde{L}:k] = [\widetilde{L}:F] = \# S = \text{Potenz von p.}$$

Weil [L:K] nach Voraussetzung teilerfremd zu p sein soll, folgt

$$[L:K] = 1.$$

<u>2. Fall:</u> K/k ist rein inseparabel.

Nach Voraussetzung ist [K:k] eine Potenz der Charakteristik von k. Nach Wahl von k ist [K:k] nicht teilerfremd zu p, d.h.

$$p = \mathrm{Char}(k) \text{ und } [K:k] = \text{eine Potenz von p.}$$

Wir haben zu zeigen, L = K. Wir nehmen an L ist ein echter Oberkörper on K,

$$[L:K] > 1.$$

und führen dies zum Widerspruch, indem wir eine echte endliche Erweiterung von k konstruieren, deren Grad teilerfremd zu p ist.

Wegen [L:K] teilerfremd zu p ist

$$L/K \text{ separabel,}$$

sagen wir

$$L = K(a),\ f(a) = 0,$$

wobei

$$f(x) \in K[x]$$

das Minimalpolynom von a über K bezeichne. Weil K/k rein inseparabel ist, gibt es eine p-Potenz

$$q = p^{\ell}$$

mit der Eigenschaft, daß das Bild des Ring-Homomorphismus

$$\alpha: K \longrightarrow K,\ x \mapsto x^q$$

in k liegt. Sei

$$f^{\alpha}(x) \in k[x]$$

das Polynom, das man aus f erhält durch Erheben aller Koeffizienten in die q-te Potenz. Weil L/K separabel ist, sind die Nullstellen von f in einer algebraischen Abschließung $\overline{k}$ von k paarweise verschieden, sagen wir

$$f(x) = (x - \alpha_1)\bullet\ldots\bullet(x-\alpha_r) \text{ mit } \alpha_1, \ldots , \alpha_r \in \overline{k} \text{ paarweise verschieden.}$$

Nun ist die Abbildung $\alpha: \overline{k} \longrightarrow \overline{k},\ x \mapsto x^q$, als Homomorphismus von Ringen mit 1, der auf einem Körper $\overline{k}$ definiert ist, injektiv. Es folgt

$$f^{\alpha}(x) = (x - \alpha(\alpha_1))\bullet\ldots\bullet(x- \alpha(\alpha_r)) \text{ mit } \alpha(\alpha_1), \ldots , \alpha(\alpha_r) \in \overline{k} \text{ paarweise verschieden,}$$

d.h. f^{α} hat keine mehrfachen Nullstellen.

Nach Konstruktion gilt

$$(f^{\alpha})(a^q) = f(a)^q = 0,$$

d.h. a^q ist separabel über k. Wäre $a^q \in k$, so wäre auch $a^q \in K$, d.h. $L = K(a)$ wäre rein inseparabel über K, im Widerspruch zur Tatsache, daß L/K aus Gradgründen separabel ist. Damit ist

$$k(a^q)/k \text{ echte separable Körpererweiterung.}$$

Es reicht zu zeigen,

$$[k(a^q) : k] \text{ ist teilerfremd zu } p, \tag{1}$$

denn dieser Widerspruch zu Wahl von k zeigt dann, daß die Annahme der Echtheit der Erweiterung L/K falsch sein muß. Zum Beweis von (1) betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & L \\
K \arrow[ur, hook, "d_1"] \arrow[r, tail, "d_2"] & K(a^q) \arrow[u, hook] \\
k \arrow[u, hook, "e_1"] \arrow[r, tail, "d_3"] & k(a^q) \arrow[u, hook, "e_2"']
\end{tikzcd}$$

Die Bezeichnungen über und neben den Pfeilen sollen dabei die Grade der entsprechenden Körpererweiterungen angeben. Nach Wahl von L/K ist d_1 teilerfremd zu p,

$$ggT(d_1, p) = 1.$$

Der Grad der Teilerweiterung $K(a^q)/K$ ist ein Teiler der Erweiterung L/K, d.h.

$$ggT(d_2 , p) = 1.$$

Zum Beweis von (1) reicht es somit zu zeigen, $d_3 = d_2$. Zum Beweis beachten wir, die horizontalen Pfeile des Diagramms, bezeichnen separable Körpererweiterungen. Die linke vertikale Erweiterung ist nach Voraussetzung des 2. Falles rein inseparabel. Dasselbe gilt damit auch für die rechte vertikale Erweiterung. Damit gilt

$$\begin{aligned}
d_3 &= [k(a^q): k] \\
&= [k(a^q): k]_s && (k(a^q)/k \text{ ist separabel})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [K(a^q):k(a^q)]_s \cdot [k(a^q): k]_s && (K(a^q)/k(a^q) \text{ ist rein inseparabel})\\
&= [K(a^q):k]_s && \\
&= [K(a^q):K]_s \cdot [K: k]_s && \\
&= [K(a^q):K]_s && (K/k \text{ ist rein inseparabel})\\
&= [K(a^q):K] && (K(a^q)/K \text{ ist separabel})\\
&= d_2 &&
\end{aligned}$$

Der Index s bezeichne dabei den Separabilitätsgrad der Erweituerungen.

3. Fall: K/k separabel.
Falls auch L/K separabel ist, folgt die Behauptung aus dem ersten Fall. Wir können also annehmen,

L/K ist nicht separabel.

Wir zerlegen die Erweiterung L/K in eine maximale separable Teilerweiterung L'/K und eine rein inseparable Erweiterung L/L'. Nach dem 1. Fall ist dann L' = K, d.h.

$$L/K \text{ ist rein inseparabel.} \qquad (1)$$

Wir schreiben L in der Gestalt

$$L = k(a_1, \dots, a_r)\ ,\ f_1(a_1) = \dots = f_r(a_r) = 0,$$

wobei

$$f_i(x) \in k[x]$$

das Minimalpolynom von a_i über k bezeichne. Sei

$$\tilde{L}$$

der Zerfällungskörper von $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_r$ über k. Dieselbe Konstruktion mit K anstelle von L liefert eine Galois-Erweiterung

$$\tilde{K}$$

von k. Situation:

$$\begin{array}{ccccc}
k & \subset & \tilde{K} & \subset & \tilde{L}\\
\| & & \cup & & \cup\\
k & = & \tilde{K}^G & \subseteq & \tilde{L}^G
\end{array} \qquad (2)$$

mit

$$G := \mathrm{Aut}_k\, \tilde{L} \cong \mathrm{Aut}_K\, \tilde{K}.$$

Die Isomorphie rechts wird dabei durch die Einschränkungsabbildung

$$\mathrm{Aut}_k\, \tilde{L} \longrightarrow \mathrm{Aut}_k\, \tilde{K}\ ,\ \sigma \mapsto \sigma|_{\tilde{K}}\ .$$

Man beachte, weil $\tilde{K}$ normal über k ist, ist diese Abbildung wohldefiniert. Weil L/K, also auch $\tilde{L}/\tilde{K}$ rein inseparabel ist, ist sie injektiv. Die Surjektivität sieht man wie folgt. Sei

$$\tau \in \mathrm{Aut}_k\, \tilde{K} \text{ und } \alpha \in \tilde{L}.$$

Wir wenden τ auf die Koeffizienten des Minimalpolynoms $g \in \widetilde{K}[x]$ von α über $\widetilde{K}$ an und erhalten ein Minimalpolynom g^{τ} für ein über k zu α konjugiertes Element β, welches nach Definition von $\widetilde{L}$ in $\widetilde{L}$ liegen muß. Weil mit α auch β rein inseparabel über $\widetilde{K}$ ist, ist β durch g^{τ} eindeutig festgelegt. Wir setzen

$$\sigma(\alpha) = \beta.$$

Es ist nicht schwer, einzusehen, daß σ ein Automorphismus von $\widetilde{L}$ über k ist mit

$$\sigma|_{\widetilde{K}} = \tau.$$

Die obige Abbildung ist also tatsächlich ein Isomorphismus.
Angenommen die Erweiterung L/K ist echt,

$$[L:K] > 1.$$

Dann ist auch die Erweiterung $\widetilde{L}/\widetilde{K}$ echt[30] und damit auch die Erweiterung[31]

$$\widetilde{L}^G/\widetilde{K}^G$$

denn die Erweiterung $\widetilde{L}/\widetilde{L}^G$ und $\widetilde{K}/\widetilde{K}^G$ sind Galois-Erweiterungen desselben Grades

$$[\widetilde{L}:\widetilde{L}^G] = [\widetilde{K}:\widetilde{K}^G] = \# \, G.$$

(d.h. aus $\widetilde{L}^G=\widetilde{K}^G$ würde $\widetilde{L}=\widetilde{K}$ folgen). Es gilt also

$$[\widetilde{L}^G:\widetilde{K}^G] = [\widetilde{L}:k] > 1.$$

Sei

$$\alpha \in \widetilde{L}^G - \widetilde{K}^G.$$

Weil $\widetilde{L}/\widetilde{K}$ rein inseparabel ist, gibt es eine Potenz q der Charakteristik von k mit

$$\alpha^q \in \widetilde{K}.$$

Mit α ist aber auch die q-te Potenz invariant bei den Elementen von G, d.h.

$$\alpha^q \in \widetilde{K}^G = k.$$

Mit anderen Worten

$$k(\alpha) / k \tag{3}$$

ist eine echte und rein inseparable Erweiterung des Grades q.[32] Man beachte, nach Wahl von L ist der Grad der Erweiterung L/K teilerfremd zu p. Wegen der reinen Inseparabilität von L/K ist dieser Grad eine Potenz von char(k), d.h.

char(k) ist teilerfremd zu p.

Nun ist aber q eine Potenz von char(k), d.h. der Grad von (3) ist teilerfremd to p. Die Existenz einer solchen Erweiterung widerspricht aber der Wahl von k. Dieser Widerspruch zeigt, es gilt L = K.

<u>4. Fall</u>: K/k beliebig.
Wir zerlegen K/k in eine separable und eine rein inseparable Erweiterung,

---

[30] L enthält Elemente, die rein inseparabel über K sind, also nicht in $\widetilde{K}$ liegen (denn $\widetilde{K}/K$ ist Galoissch, also separabel).
[31] Man betrachte das Diagramm (2).
[32] Man wähle für q die kleinste Potenz von char(k), mit $\alpha^q \in k$.

$$k \subseteq k' \subseteq K.$$

Nach dem 3. Fall hat mit k auch k' die Eigenschaft von 7.3.6. Nach dem zweiten Fall hat mit k' auch K die Eigenschaft von 7.3.6.

Zu (ii) haben zu zeigen, es gibt eine normale Teilerweiterung des Grades p von K/k.

1. Fall: K/k ist rein inseparabel.
Sei q die Charakteristik von k,

$$q := \mathrm{char}(k).$$

Dann ist [K:k] eine Potenz von q. Nach Wahl von k kann diese nicht teilerfremd zu p sein, d.h. es gilt

$$q = p.$$

Für jedes Element $\alpha \in K$ gibt es eine Potenz p^{ℓ} von p mit $\alpha^{p^{\ell}} \in k$. Inspesondere gibt es ein Element $\alpha \in K-k$ mit $\alpha^p \in k$. Dann ist $k(\alpha)/k$ eine rein inseparable Erweiterung des Grades

$$[k(\alpha):k] = p$$

und das Minimalpolynom von α über k ist gleich

$$x^p - \beta \in k[x] \text{ mit } \beta = \alpha^p.$$

Wegen

$$x^p - \beta = (x - \alpha)^p$$

ist $k(\alpha)$ der Zerfällungskörper dieses Polynoms über k, d.h.

$$k(\alpha)/k \text{ ist normal.}$$

Wir haben gezeigt, $k(\alpha)/k$ ist eine Erweiterung der gesuchten Art.
2. Fall: K/k ist nicht rein inseparabel.
Wir zerlegen K/k in eine echte separable Erweiterung und eine rein inseparable,

$$k \subsetneq K' \subseteq K,\ K'/k \text{ separabel, } K/K' \text{ ein inseparabel.}$$

Es reicht dann zu zeigen, K'/k besitzt eine normale Teilerweiterung des Grades p. Wir können also annehmen,

$$K/k \text{ ist separabel (und } [K:k] > 1).$$

Wir schreiben K in der Gestalt

$$K = k(a)$$

und bezeichnen mit $f \in k[x]$ das Minimalpolynom von f über k. Seien

$$\tilde{K}$$

der Zerfälliungskörper von f über k und

$$G := G(\tilde{K}/k)$$

die Galois-Gruppe von $\tilde{K}/k$. Auf Grund von Aussage (ii) ist G eine p-Gruppe[33].

[33] d.h. eine Gruppe von p-Potenzordnung. Um das einzusehen, betrachte man (wie bereits weiter oben) eine p-Sylow-Untergruppe $S \subseteq G$ und den zu S gehörigen Fixkörper $F = \tilde{K}^S$. Dann ist

$$[\tilde{K}:F] = G(\tilde{K}/F) = S$$

gleich der höchsten p-Potenz, welche die natürliche Zahl $[\tilde{K}:k] = \# G$ teilt, also ist

$$[F:k] = [\tilde{K}:k]/\,[\tilde{K}:F]$$

teilerfremd zu p. Nach Wahl von k muß dann aber F = k sein, d.h.

$$G = G(\tilde{K}/k) = G(\tilde{K}/F) = S$$

Wegen [K:k] > 1 ist

$$G(\widetilde{K}/K) \subset G \text{ eine echte Untergruppe.}$$

Sei H eine echte Untergruppe von G maximaler Ordnung mit

$$U := G(\widetilde{K}/K) \subseteq H \subset G.$$

Nach der Theorie der p-Gruppen ist dann H ein Normalteiler von G vom Index p von G (vgl. Suzuki [1], Folgerung zu Theorem 1.6)[34]. Wir gehen zu den Fixkörpern über,

---

ist eine Gruppe von p-Potenzordnung.

[34] Man verwende die Tatsache, daß jede p-Gruppe ein nicht-triviales Zentrum besitzt und führe den Beweis durch Induktion nach

$$n := \# G.$$

Der Fall n = p oder allgemeiner der

Fall 1: G abelsch

ist einfach. Dann ist U selbst ein Normalteiler und man kann das Zentrum von G/U verwenden um U durch einen echt größeren Normalteiler zu ersetzen. Diesen Prozeß kann man solange wiederholen bis

$$G/U \text{ abelsch wird.}$$

Jetzt kann man den Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppe verwenden, um zu erreichen, daß gilt

$$G/U \cong \mathbb{Z}/p^{\ell}\mathbb{Z}.$$

Das vollständige Urbild von $p\mathbb{Z}/p^{\ell}\mathbb{Z}$ beim natürlichen Homomorphismus $G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^{\ell}\mathbb{Z}$ ist dann eine Gruppe H der gesuchten Art.

Fall 2. G nicht abelsch.

Sei C das (nicht-triviale) Zentrum von G. Wir betrachten die Inklusion

$$U/C\cap U \hookrightarrow G/C.$$

Falls diese echt ist, so kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden und einen Normalteiler $\overline{H}$ vom Index p in G/C finden mit

$$U/C\cap U \hookrightarrow \overline{H} \hookrightarrow G/C.$$

Das vollständige Urbild von $\overline{H}$ bei der natürlichen Abbildung $G \longrightarrow G/C$ ist dann der gesuchte Normalteiler H.

Wir können damit annehmen, die obige Inklusion ist nicht echt, $U/C\cap U = G/C$, d.h.

$$G = U \bullet C.$$

Wir betrachten eine Normalreihe

$$\{e\} = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_r = C,$$

deren Faktoren den Index p haben (welche nach dem Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppe existiert).Weil U eine echte Untergruppe von G ist, gibt es ein i mit

$$U\bullet C_i \neq G \text{ und } U\bullet C_{i+1} = G.$$

Weil C_{i+1} die Vereinigung von p Nebenklassen modulo C_i ist, ist $G = U\bullet C_{i+1}$ die Vereinigung von p Nebenklassen modulo $U\bullet C_i$, d.h.

$$1 < [G: U\bullet C_i] \le p.$$

Weil G ein p-Gruppe ist, folgt

$$[G : U\bullet C_i] = p.$$

Weil die C_i im Zentrum von G liegen, ist $U\bullet C_i$ ein Normalteiler in $G = U\bullet C_{i+1}$. Mit anderen Worten $H = U\bullet C_i$ ist der gesuchte Normalteiler.

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{K}^G & \subseteq & \tilde{K}^H & \subseteq & \tilde{K}^{G(\tilde{K}/K)} \\ \| & & & & \| \\ k & & & & K \end{array}$$

Nach dem Hauptsatz der Galois-Theorie ist

$$\tilde{K}^H/k$$

eine normale Körper-Erweiterung des Grades

$$[\tilde{K}^H:k] = [\tilde{K}:k] / [\tilde{K}:\tilde{K}^H] = \# G / \# H = [G:H] = p.$$

QED.

7.3.8 Erweiterungen vom Grad p

Seien k wie in 7.3.6 und K/k eine Erweiterung von Grad p. Wir schreiben

$$K = k(a).$$

Dann hängen die Norm-Abbildungen

$$N_{a/k}: K_n^M(K) \longrightarrow K_n^M(k) \qquad (1)$$

nicht von der speziellen Wahl des Elements a ab.

Beweis. Sei P ein abgeschlossener Punkt der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_k$ dessen zugehöriges normiertes irreduzibles Polynom $\pi_P \in k[x]$ gerade das Minimalpolynom von a über k ist. Auf Grund der Voraussetzung 7.3.6 hinsichtlich des Körpers k wird die Gruppe

$$K_n^M(K)$$

von den Symbolen der Gestalt

$$\{\alpha_K , \beta\} \text{ mit } \alpha \in K^M_{n-1}(k) \text{ und } \beta \in K^*$$

erzeugt (nach 7.2.10). Es gilt

$$\begin{aligned} N_{a/k}(\{\alpha_K , \beta\}) &= N_P(\{\alpha_K , \beta\}) && \text{(nach Definition von } N_{a/k}) \\ &= \{\alpha, N_P(\beta)\} && \text{(Projektionsformel 7.2.8)} \\ &= \{\alpha, N_{a/k}(\beta)\} && \text{(nach Definition von } N_{a/k}) \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist unabhängig von a[35], d.h. die Abbildung (1) nimmt auf einem Erzeugendensystem des Definiitonsbereichs Werte an, die nicht von a abhängen.

QED.

Bemerkungen

(i) In den Konstruktionen des Beweises des Reduktionssatzes bleibt die Bedingung, eine Erweiterung des Grades p oder 1 zu sein, erhalten. Die obige Aussage hat deshalb zur Folge, daß die Abbildung

$$N_{a/k}: K_n^M(k(a)) \longrightarrow K_n^M(k)$$

für den Fall daß [K:k] eine Primzahl ist, nicht von der speziellen Wahl von a abhängt, und zwar auch ohne die zusätzliche Annahme, daß k der Bedingung von 7.3.6 genügen muß.

(ii) Für jede Körpererweiterung L/K von Primzahlgrad (oder vom Grad 1) ist somit

$$N_{L/K}: K_n^M(L) \longrightarrow K_n^M(K)$$

eine wohldefinierte Abbildung, die im Fall L = K(a) mit $N_{a/K}$ übereinstimmt (ohne die in 7.3.6 angegebene Zusatzbedingung an einen der Körper).

---

[35] Wegen $\beta \in K^*$. Die Norm $N(\beta)$ ist das Produkt von [K:k] Konjugierten von β.

Wir werden deshalb von jetzt an für Erweiterungen L/K von Primzahlgrad meist die Bezeichnung $N_{L/K}$ anstelle der Bezeichnung $N_{a/K}$ verwenden.

(iii) Die nachfolgende Aussage beschreibt die Verträglichkeit des zahmen Symbols mit der Normabbildung. Der Körper k spielt in dieser Aussage keine Rolle. Die Vereinbarung 7.3.6 hat deshalb keine einschränkende Wirkung auf die in dieser Aussage auftretenden Körper.

7.3.9 Normale Erweitungen von vollständig bewerteten Körpern

Seien

$$v: K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$

eine diskrete Bewertung des Körpers K,

$$K'/K$$

eine normale Körpererweiterung, deren Grad

$$[K':K] = p$$

eine Primzahl ist und

$$v': K'^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$

eine über v liegende Bewertung[36]. Wir nehmen an,

K ist vollständig.

Dann ist für jede nicht-negative ganze Zahl das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} K_n^M(K') & \xrightarrow{\partial^M_{K'}} & K_{n-1}^M(\kappa') \\ N_{K'/K}\downarrow & & \downarrow N_{\kappa'/\kappa} \\ K_n^M(K) & \xrightarrow{\partial^M_K} & K_{n-1}^M(\kappa) \end{array}$$

Dabei bezeichne κ den Restklassenkörper von v und κ' den von v'.

<u>Ausnahme</u>: im Fall K'/K rein inseparabel und total verzweigt muß man, um die Kommutativität zu erhalten, das obere zahme Symbol mit p^2 multiplizieren.

Die Notizen von Sridharan [1] waren für uns nützlich beim Aufschreiben des nachfolgenden Beweises. Wir beginnen mit einigen Lemmata.

Lemma 1 (Der Körpergrad als Summe der ef)

Wir betrachten das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K & \subseteq & L \\ \cup & & \cup \\ R & \subseteq & S \end{array}$$

Dabei seien

L/K	eine endliche Körpererweiterung
R	ein diskreter Bewertungsring mit dem Quotientenkörper K
S	die ganze Abschließung von R in L

Weiter bezeichne p das maximale Ideal von R und

$$q_1, \dots, q_r$$

[36] d.h. die zugehörigen Bewertungsringe und ebenfalls die zugehörigen Bewertungsideale liegen ineinander.

die maximalen Ideale des Dedekind-Rings S (es gilt $q_i \cap R = p$). Wir schreiben

$$e_i = e(v_{q_i}/v_p)$$

für den Verzweigungsindex von q_i über p und

$$f_i := [S/q_i : R/p]$$

für den Relativgrad von q_i über p. Es gilt

(i) $\dim_{R/p} S/pS = \sum_{i=1}^{r} e_i f_i$

(ii) Folgende Bedingungen sind äquivalent:
 (a) S ist als R-Modul endlich erzeugt.
 (b) S ist ein freier R-Modul.
 (c) $\dim_{R/p} S/pS = [L:K]$

(iv) Die Bedingungen von (ii) sind erfüllt, falls die Erweiterung L/K separabel ist.

(iii) Die Bedingungen von (ii) sind erfüllt, falls K vollständig ist (mit r = 1).

Beweis. Zu (i). S/pS ist ein noetherscher Ring der Dimension 0, also ein artinscher Ring (also als Modul über sich selbst von endlicher Länge). Insbesondere ist S/pS isomorph zur direkten Summe der Lokalisierung,

$$S/pS = (S/pS)_{q_1} \oplus \ldots \oplus (S/pS)_{q_r} \tag{1}$$

Die Lokalisierungen $(S/pS)_{q_i}$ sind artinsche lokale Ringe. Insbesondere sind deren maximale Ideale

$$\bar{q}_i = q_i \bullet (S/pS)_{q_i}$$

nilpotent. Wir betrachten die zugehörigen Ketten von Idealen

$$0 = (\bar{q}_i)^{e_i} \subseteq (\bar{q}_i)^{e_i-1} \subseteq \ldots \subseteq (\bar{q}_i)^1 = (\bar{q}_i)^0 = (S/pS)_{q_i} \tag{2}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\dim_{R/p} S/pS &= \sum_{i=1}^{r} \dim_{R/p}(S/pS)_{q_i} && \text{(wegen (1))}\\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{e_i-1} \dim_{R/p} (\bar{q}_i)^j/(\bar{q}_i)^{j+1} && \text{(wegen (2))}\\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{e_i-1} \dim_{R/p} ((q_i^j + pS)/(q_i^{j+1} + pS))_{q_i}
\end{aligned}$$

Die S-Moduln unter der Summe

$$((q_i^j + pS)/(q_i^{j+1} + pS))_{q_i}$$

werden von q_i annulliert, sind also Vektorräume über S/q_i. Damit erhalten wir

$$\dim_{R/p} S/pS = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{e_i-1} f_i \bullet \dim_{S/q_i} ((q_i^j + pS)/(q_i^{j+1} + pS))_{q_i}$$

Sei jetzt π_i ein Parameter des diskreten Bewertungsrings S_{q_i}. Dann gilt

$$q_i S_{q_i} = \pi_i S_{q_i} \text{ und } pS_{q_i} = (\pi_i)^{e_i} S_{q_i}$$

also

$$\dim_{R/p} S/pS = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{e_i-1} f_i \bullet \dim_{S/q_i} \pi_i^j S_{q_i} / \pi_i^{j+1} S_{q_i}$$

Die Multiplikation mit π_i^j induziert ein Bijektionen

$$S_{q_i} \longrightarrow \pi_i^j S_{q_i},\ \pi_i S_{q_i} \longrightarrow \pi_i^{j+1} S_{q_i} \text{ und } S_{q_i} / \pi_i S_{q_i} \longrightarrow \pi_i^j S_{q_i} / \pi_i^{j+1} S_{q_i}.$$

Mit $\pi_i S_{q_i} = q_i S_{q_i}$ folgt

$$\begin{aligned} \dim_{R/p} S/pS &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{e_i-1} f_i \bullet \dim_{S/q_i} S_{q_i} / \pi_i S_{q_i} \\ &= \sum_{i=1}^{r} f_i e_i \bullet \dim_{S/q_i} S_{q_i} / q_i S_{q_i} \\ &= \sum_{i=1}^{r} f_i e_i \bullet \dim_{S/q_i} S/ q_i S \\ &= \sum_{i=1}^{r} f_i e_i . \end{aligned}$$

Zu (ii). (a) $\Rightarrow$ (b). Ein endlich erzeugter Modul über einem diskreten Bewertungsring ist frei.

(b) $\Rightarrow$ (a) und (b) $\Rightarrow$ (c). Sei $S = \oplus_{i\in I} R$. Dann ist

$$SK = \oplus_{i\in I} RK = \oplus_{i\in I} K \subseteq L$$

ein K-linearer Unterraum des endlich-dimensionalen K-Vektorraums L, also endlich-dimensional. Die Index-Menge I muß endlich sein. Insbesondere ist S als R-Modul endlich erzeugt, d.h. es gilt (a).
Weiter ist SK eine nullteilerfreie K-Algebra endlicher Dimension über K, also ein Körper. Weil L ein Quotientenkörper von S also auch von SK ist, folgt

$$SK = L.$$

Damit ist

$$[L:K] = \dim_K SK = \# I = \mathrm{rg}_R S = \dim_{R/p} S/pS$$

(c) $\Rightarrow$ (b). Seien $u_1, \ldots, u_n \in S$ Elemente, deren Restklassen eine Basis des R/p-Vektorraums über S/pS bilden. Dann gilt

$$n = \dim_{R/p} S/pS = [L:K].$$

Wir betrachten den R-Modul

$$M = Ru_1 + \ldots , Ru_n \quad (\subseteq S \subseteq L)$$

Die Erzeuger u_i sind R-linear unabhängig, denn eine nicht-triviale R-lineare Relation

$$r_1 u_1 + \ldots + r_n u_n = 0$$

kann man durch Kürzen mit einer geeigneten Potenz eines Parameters so abändern, daß einer der Koeffizienten eine Einheit wird. Dann läßt sich aber eines der u_i als R-

Linearkombination der anderen schreiben. Dasselbe gilt auch für die Restklassen der u_i in S/pS. Das ist aber nicht möglich nach Wahl der u_i. Die u_i bilden also tatsächlich ein R-linear unabhängiges Erzeugendensystem von M. Es reicht zu zeigen,

$$M = S.$$

Sei $s \in S$. Wir betrachten den R-Modul

$$N := M + sR.$$

Als endlich erzeugter Modul über dem diskreten Bewertungsring R ist N ein freier R-Modul, sagen wir

$$N = R\cdot v_1 + ... + R\cdot v_m \text{ mit } v_1, ..., v_m \text{ linear unabhängig über R.}$$

Über K erzeugen die v_i einen K-linearen Unterraum N•K von L, der den Raum M•K enthält. Wegen dim L = dim M•K = n folgt

$$m = n.$$

Die natürlichen Einbettungen

$$M \subseteq N \subseteq S$$

induzieren lineare Abbildungen von Vektorräumen über R/p:

$$M/pM \longrightarrow N/pN \longrightarrow S/pS.$$

Nach Wahl der u_i ist die Zusammensetzung dieser beiden Abbildung surjektiv. Außerdem sind die beiden äußeren Vektorräume n-dimensional und der Raum in der Mitte ist höchsten n-dimensional. Zusammen sehen wir: die drei Räume haben dieselbe Dimension n und die beiden Abbildungen sind Isomorphismen. Es folgt

$$N = M + pN$$

Da der Modul N endlich erzeugt ist, folgt nach dem Lemma von Nakayama

$$N = M.$$

Insbesondere ist $s \in M$. Wir haben gezeigt

$$S = M$$

ist ein freier R-Modul.

Zu (iv). Im Fall L/K separabel ist die ganze Abschließung S von R in L ein endlich erzeugter R-Modul, d.h. Bedingung (ii) (a) ist erfüllt.

Zu (v). Sei K vollständig. Mit K hat auch der endlich-dimensionale K-Vektorraum L die Struktur eines topologischen Raums, und L ist vollständig bezüglich dieser Topologie.

Über der Bewertung zum diskreten Bewertungsring R liegt genau eine diskrete Bewertung von L. Der zugehörige Bewertungsring ist gerade die ganze Abschließung S von R in L. Die durch S definierte diskrete Bewertung definiert eine Topologie auf L, die mit der oben definierte Produkt-Topologie von L über K übereinstimmt.

Fixiert man eine Basis von L über K, so ist eine Folge in L genau dann konvergent, wenn alle Koordinaten bezüglich der eingeführten Basis konvergieren.

Bezeichne q das maximale Ideal des diskreten Bewertungsrings S.

Der Ring

$$R = \{x \in K \mid v_p(x) \le 0\}$$

ist eine abgeschlossene Teilmenge von K, also ebenfalls vollständig. Nach (i) ist

$$S/pS$$

ein endlich-dimensionaler Vektorraum über R/p, sagen wir

$$\dim_{R/p} S/pS = n\ (<\infty).$$

Seien $u_1, \dots, u_n \in S$ Elemente, deren Restklassen eine Basis des R/p-Vektorraums über S/pS bilden. Dann gilt

$$S = R\cdot u_1 + \dots R\cdot u_n + pS = R\cdot u_1 + \dots R\cdot u_n + q$$

also

$$S = R\cdot u_1 + \dots R\cdot u_n + q^{\ell} \text{ für } \ell = 1, 2, 3, \dots$$

Für jedes $s \in S$ und vorgegebenes ℓ gibt es

$$s' \in M := R\cdot u_1 + \dots R\cdot u_n$$

mit $s - s' \in p^{\ell}S$. Mit anderen Worten, es gibt eine Folge von Elementen aus M, die gegen s konvergieren. Es reicht zu zeigen,

M ist abgeschlossen in L,

denn dann ist $S = M = R\cdot u_1 + \dots R\cdot u_n$ ein endlich erzeugter R-Modul, d.h. Bedingung (ii) (a) ist erfüllt. Wie wir bereits weiter oben gesehen haben sind die u_i linear unabhängig (über R also auch über K), d.h. M ist als topologischer Unterraum von

$$L = K \times \dots \times K$$

gerade das direkte Produkt

$$M \cong R \times \dots \times R \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$$

von endlich vielen Exemplaren der abgeschlossene Menge R, also abgeschlossen. **QED**.

Lemma 2 (Der Satz für spezielle Symbole)
Die Verträglichkeitsaussage der 7.3.9 ist richtig für Symbole der Gestalt

$$\alpha = \{a_1, \dots, a_{n-1}, a'\} \in K_n^M(K') \text{ mit } a_i \in K^* \text{ und } a' \in K'.$$

Beweis des Lemmas. Wir erinnern daran, das Symbol ist multilinear, graduiert kommutativ und es gilt $\{x, x\} = \{x, -1\}$ (nach dem Lemma von 7.1.2). Wir können deshalb beim Beweis des Lemmas annehmen, es gilt[37]

$$v(a_i) = 0 \text{ für } i > 1.$$

Bezeichnungen:

$f := [\kappa':\kappa]$ Relativgrad
$e :=$ Verzweigungsindex von v' über v.[38]

Da nach Voraussetzung der Körper K vollständig ist, gibt es neben v' keine weitere über v liegende diskrete Bewertung von K'. Insbesondere gilt

$$v'\circ\sigma = v'.$$

für jeden K-Automorphismus

$$\sigma: K' \longrightarrow K'$$

und

$$e\cdot f = [K':K].$$

Damit erhalten wir für jedes $x \in K'^*$

---

[37] Da sich jedes Element als Produkt aus einer Einheit und einer Parameter-Potenz schreiben läßt.
[38] d.h. für $x \in K$ gilt $v'(x) = e\cdot v(x)$.

$$
\begin{aligned}
v(N_{K'/K}(x)) &= \frac{1}{e}\bullet v'(N_{K'/K}(x)) && \text{(Definition von e)}\\
&= \frac{1}{e}\bullet v'(x^{[K':K]}) && \text{(Konjugierte haben denselben Wert)}\\
&= \frac{1}{e}\bullet [K':K]\bullet v'(x)\\
&= f\bullet v(x)
\end{aligned}
$$

Wir haben gezeigt

$$v\circ N_{K'/K} = f\circ v'. \tag{1}$$

Für den weiteren Beweis haben wir vier Fälle zu unterscheiden, je nachdem ob a_1 und a' Einheiten bezüglich der Bewertungen v bzw. v' von K bzw. K' sind oder nicht. Im Fall von Nichteinheiten können wir dabei wegen der Multiplinearität der Symbole stets annehmen, es handelt sich um Parameter.

<u>1. Fall</u>: $v(a_1) = v'(a') = 0$.

Es gilt dann

$$v(N_{K'/K}(a')) = f\bullet v'(a') = 0$$

also

$$
\begin{aligned}
\partial^M_K(N_{K'/K}(\alpha)) &= \partial^M_K(\{a_1, \dots , a_{n-1}, N_{K'/K}(a')\}) && \text{(Projektionsformel)}\\
&= 0 && \text{(alle Koordinaten von } \alpha \text{ sind Einheiten)}
\end{aligned}
$$

Auf der anderen Seite ist

$$
\begin{aligned}
N_{\kappa'/\kappa}(\partial^M_K(\alpha)) &= N_{\kappa'/\kappa}(0) && \text{(alle Koordinaten von } \alpha \text{ sind Einheiten)}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Die Behauptung gilt also in diesem Spezialfall.

<u>2. Fall</u>: $v(a_1) = 0$ und $v'(a') = 1$.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
N_{\kappa'/\kappa}(\partial^M_K(\alpha)) &= N_{\kappa'/\kappa}(\partial^M_K(\{a_1, \dots , a_{n-1}, a'\})) && \text{(Definition von } \alpha\text{)}\\
&= N_{\kappa'/\kappa}(\{\bar a_1, \dots , \bar a_{n-1}\}) && \text{(Definition von } \partial \text{)}\\
&= f\bullet \{\bar a_1, \dots , \bar a_{n-1}\}) && \text{(vgl. Bemerkung 7.3.2)[39]}
\end{aligned}
$$

Auf der anderen Seite ist

$$v(N_{K'/K}(a')) = f\bullet v'(a') = f,$$

d.h.

$$N_{K'/K}(a') = u\bullet\pi^f$$

mit einer Einheit u und einem Parameter π bezüglich der Bewertung v von K. Damit ist

$$
\begin{aligned}
N_{K'/K}(\alpha) &= N_{K'/K}(\{a_1, \dots , a_{n-1}, a'\}) && \text{(Definition von } \alpha\text{)}\\
&= \{a_1, \dots , a_{n-1}, u\bullet\pi^f\} && \text{(Projektionsformel)}\\
&= f\bullet \{a_1, \dots , a_{n-1}, \pi\} + \{a_1, \dots , a_{n-1}, u\}
\end{aligned}
$$

Es folgt

---

[39] N∘i = Körpergrad, wir betrachten hier $\{\bar a_1, \dots , \bar a_{n-1}\}$ als Element der K-Gruppe über κ und eine Zeile vorher als Element der K-Gruppe über κ'.

$$\partial^M_K(N_{K'/K}(\alpha)) = f\bullet \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}\} + \partial^M_K(\{a_1, \dots, a_{n-1}, u\}).$$

Der zweite Summand ist Null, da alle Koordinaten des Symbols Einheiten sind. Wir sehen, auch in diesem Fall sind die beiden Seiten der behaupteten Identität gleich.

<u>3. Fall</u>: $v(a_1) = 1$ und $v'(a') = 0$.

Wir schreiben

$$a_1 = u'\bullet\pi'^e$$

mit einer Einheit u' und einem Paramter π' bezüglich der Bewertung v' von K'. Es folgt

$$\partial^M_{K'}(\alpha) = \partial^M_{K'}(\{a_1, \dots, a_{n-1}, a'\}) \quad \text{(Definition von } \alpha\text{)}$$
$$= \partial^M_{K'}(\{u', a_2, \dots, a_{n-1}, a'\}) + e\bullet\partial^M_{K'}(\{\pi, a_2, \dots, a_{n-1}, a'\})$$

Der erste Summand ist Null, weil alle Koordinaten des Symbols Einheiten sind. Wir erhalten

$$\partial^M_{K'}(\alpha) = e(-1)^{n-1}\bullet\{\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n-1}, \bar{a}'\}$$

und auf Grund der Projektionsformel

$$N_{\kappa'/\kappa}\circ\partial^M_{K'}(\alpha) = e(-1)^{n-1}\bullet\{\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n-1}, N_{\kappa'/\kappa}(\bar{a}')\}$$
$$= (-1)^{n-1}\{\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n-1}, N_{\kappa'/\kappa}(\bar{a}')^e\}$$

Wegen[40]

$$N_{\kappa'/\kappa}(\bar{a}')^e = \overline{N_{K'/K}(a')} \tag{2}$$

erhalten wir

$$N_{\kappa'/\kappa}\circ\partial^M_{K'}(\alpha) = (-1)^{n-1}\{\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n-1}, \overline{N_{K'/K}(a')}\}$$
$$= (-1)^{n-1}\partial^M_K\{a_2, \dots, a_{n-1}, N_{K'/K}(a'), \pi\}$$
$$=^{41} (-1)^{n-1}\partial^M_K\{a_2, \dots, a_{n-1}, N_{K'/K}(a'), a_1\}$$
$$= \partial^M_K\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, N_{K'/K}(a')\}$$
$$= \partial^M_K\circ N_{K'/K}(\alpha).$$

<u>4. Fall</u>: $v(a_1) = v'(a') = 1$.

Wir schreiben

$$a' = \pi'$$
$$a_1 = \pi$$
$$\pi = u'\bullet\pi'^e$$

mit einer Einheit u' bezüglich v'. Wie bei der Behandlung des zweiten Fall schreiben wir außerdem

$$N_{K'/K}(\pi') = u\bullet\pi^f$$

mit einer Einheit u bezüglich der Bewertung v von K. Es gilt

---

[40] Siehe Cassels & Fröhlich, Algebraic Number Theory, Academic Press, New York 1967, die Bemerkung nach Lemma 5.2, Kapitel I: Local fields.

[41] π und $a_1 = u'\bullet\pi'^e$ unterscheiden sich um einen Faktor, der eine Einheit bezüglich der Bewertung von v ist.

$$\partial^M_{K'}(\alpha) = \partial^M_{K'}(\{ \pi , a_2, \dots , a_{n-1}, \pi'\}) \qquad \text{(Definition von } \alpha)$$
$$=^{\text{[42]}} \partial^M_{K'}(\{u', a_2, \dots , a_{n-1}, \pi'\} + e \{ \pi' , a_2, \dots , a_{n-1}, \pi'\})$$
$$=^{\text{[43]}} \partial^M_{K'}(\{u', a_2, \dots , a_{n-1}, \pi'\} - e \{ -1 , a_2, \dots , a_{n-1}, \pi'\})$$
$$= \partial^M_{K'}(\{(-1)^e u', a_2, \dots , a_{n-1}, \pi'\}) \quad \text{(Linearität)}$$
$$= \{(-1)^e \overline{u}', \overline{a}_2, \dots , \overline{a}_{n-1}\}$$

also

$$N_{K'/K} \circ \partial^M_{K'}(\alpha) =^{\text{[44]}} \{(-1)^{ef} N_{K'/K}(\overline{u}'), \overline{a}_2, \dots , \overline{a}_{n-1}\}$$

Andererseits ist

$$\partial^M_K \circ N_{K'/K}(\alpha) = \partial^M_K \circ N_{K'/K}(\{ \pi , a_2, \dots , a_{n-1}, \pi'\}) \qquad \text{(Definition von } \alpha)$$
$$=^{\text{[45]}} \partial^M_K (\{ \pi , a_2, \dots , a_{n-1}, u\cdot\pi^f\})$$
$$= \partial^M_K(\{ \pi , a_2, \dots , a_{n-1}, u\} + f\cdot\{ \pi , a_2, \dots , a_{n-1}, \pi\})$$
$$= \partial^M_K(\{ \pi , a_2, \dots , a_{n-1}, u\} + f\cdot\{ \pi , a_2, \dots , a_{n-1}, -1\})$$
$$= \partial^M_K(\{ \pi , a_2, \dots , a_{n-1},(-1)^f u\}$$
$$= (-1)^{n-1} \{ \overline{a}_2, \dots , \overline{a}_{n-1},(-1)^f \overline{u}\}$$
$$= - \{(-1)^f \overline{u}, \overline{a}_2, \dots , \overline{a}_{n-1}\}$$
$$= \{(-1)^f \overline{u}^{-1}, \overline{a}_2, \dots , \overline{a}_{n-1}\}$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen

$$(-1)^{ef} N_{K'/K}(\overline{u}') = (-1)^f \overline{u}^{-1} \text{ falls } \pi = u'\cdot\pi'^e \text{ und } N_{K'/K}(\pi') = u\cdot\pi^f. \qquad (3)$$

Auf Grund der bereits behandelten Fälle 2 und 3 können wir a' und a_1 bei Bedarf mit Einheiten bzgl. v' bzw. v multiplizieren (beide Seiten der zu beweisenden Identität verändern sich dadurch um dieselben Summanden). Mit anderen Worten wir können bei Bedarf π' und π durch beliebige andere Parameter ersetzen: es reicht, die Identität (3) für irgendein Paar von Parametern zu beweisen.

Fall A: $e = 1$.

Wir können $\pi = \pi'$ annehmen. Dann ist $N_{K'/K}(\pi') = \pi$ (wegen $\pi' = \pi \in K$), also

$$u = u' = 1.$$

Die Identität (3) ist dann trivialerweise richtig.

Fall B: $e \neq 1$.

---

[42] wegen $\pi = u'\cdot\pi'^e$.

[43] wegen $\{\pi', \pi'\} = \{\pi', -1\}$. Durch (n-2) Vertauschung bewege man die letzte Koordinaten in die zweite Position. Dann wende man die Identität $\{\pi', \pi'\} = \{\pi', -1\}$ and und bewege die erste Koodinate in die letzte Position.

[44] $(-1)^e$ liegt im Grundkörper. Die Norm dieses Elements ist gleich seiner f -ten Potenz, $f = [K':K]$

[45] wegen der Projektionsformel und der Identität $N_{K'/K}(\pi') = u\cdot\pi^f$

Wegen ef = [K':K] = p Primzahl gilt dann

$$e = p \text{ und } f = 1.$$

Die Erweiterung K'/K ist dann <u>total verzweigt</u>.[46] Das Element π' ist dann Nullstelle eines <u>Eisenstein-Polynoms</u>

$$f(x) = X^e - c_1 X^{e-1} \pm \ldots + (-1)^e c_e \in K[x],$$

d.h.

$$v(c_i) \ge 1 \text{ für } i = 1, \ldots, e\text{-}1 \text{ und } v(c_e) = 1,$$

und es gilt[47]

$$K' = K(\pi') \text{ und } S = R[\pi'].$$

Wir können $\pi = c_e$ setzen und erhalten

$$N_{K'/K}(\pi') = c_e = \pi,$$

d.h.

$$u = 1.$$

Zur Berechung von u' beachten wir $u'^{-1} = \frac{\pi'^e}{\pi}$. Es gilt

$$0 = f(\pi')/\pi = u'^{-1} - \frac{c_1}{\pi}\pi'^{e-1} + \frac{c_2}{\pi}\pi'^{e-2} \pm \ldots + (-1)^e \frac{c_e}{\pi}$$

Weil f ein Eisenstein-Polynom ist, sind die Quotienten $\frac{c_i}{\pi}$ Elemente von R. Wir gehen zu den Restklassen modulo π' über und erhalten wegen $\frac{c_e}{\pi} = 1$ in κ' die Identität

$$\overline{u}'^{-1} + (\overline{-1})^e = 0,$$

d.h. es gilt

$$\overline{u}' = (\overline{-1})^{e+1}.$$

Die linke Seite von (3) bekommt damit die Gestalt

$$\text{LHS} = (-1)^{ef} N_{\kappa'/\kappa}((\overline{-1})^{e+1}) = (\overline{-1})^{ef + (e+1)f} = (\overline{-1})^{(2e+1)f} = (\overline{-1})^f.$$

Für die rechte Seite von (3) erhalten wir

$$\text{RHS} = (-1)^f \, \overline{1}^{-1} = (\overline{-1})^f.$$

Die Identität (3) besteht also auch im total verzweigten Fall.
QED.

Beweis von 7.3.9.

(Verträglichkeit von zahmen Symbol und Norm im Fall normaler Erweiterungen K'/K des Grades p über vollständigen Körpern K).
Sei

$$\alpha \in K_n^M(K').$$

Wir haben zu zeigen

$$\partial_K^M(N_{K'/K}(\alpha)) = N_{\kappa'/\kappa}(\partial_{K'}^M(\alpha)). \qquad (1)$$

<u>1. Schritt</u>: Beschreibung der Beweisidee.
Wir betracthen eine weitere endliche Körpererweiterung,

$$L/K \text{ endlich},$$

[46] vgl. Cassels & Fröhlich, Kapitel I, §6, die Definition vor Proposition 6.1.
[47] vgl. Cassels & Fröhlich, Kapitel I, §6, Proposition 6.1.

und das folgende zugehörige Diagramm.

$$
\begin{tikzcd}
\oplus_j K^M_n(L_j) \arrow[rr, "\oplus_j \partial^M_{L_j}"] \arrow[dr, "(N_{L_j/L})"] & & \oplus_j K^M_{n-1}(\kappa_j) \arrow[dr, "(N_{\kappa_{j}/\kappa_L})"] & \\
& K^M_n(L) \arrow[rr, "\partial^M_L"] & & K^M_{n-1}(\kappa_L) \\
K^M_n(K') \arrow[uu, "(e_L \tilde{e}_j i_{L_j})"] \arrow[rr, "\partial^M_{K'}"] \arrow[dr, "N_{K'/K}"] & & K^M_{n-1}(\kappa') \arrow[uu, "(\tilde{f}_j i_{\kappa_{L_j}})"] \arrow[dr, "N_{\kappa'/\kappa}"] & \\
& K^M_n(K) \arrow[uu, "e_L i_L"] \arrow[rr, "\partial^M_K"] & & K^M_{n-1}(\kappa) \arrow[uu, "i_{\kappa_L}"]
\end{tikzcd}
\qquad (2)
$$

Das Viereck am Boden ist gerade das Diagramm, dessen Kommuativität wir beweisen wollen. Das obere Viereck wird sich für verschiedene von uns gewählte Körper L als kommutativ erweisen (zumindest für das von uns fest gewählte Element α).

Der Faktor e_L , mit welchem die linke vertikale Abbildung i_L des vorderen Vierecks multipliziert wird, sei gerade der Verzweigunsindex

$$e_L = e(L/K)$$

von L/K. Nach Bemerkung 7.1.7 (ii) ist dann das vordere Viereck kommutativ.

Die direkten Summen im oberen Teil des hinteren Vierecks sollen von der Zerlegung

$$K'\otimes L = K'\otimes_K L = A_1 \times \ldots \times A_r$$

in ein direktes Produkt von lokalen Ringen kommen: die L_j seien gerade die dabei auftretenden Restklassenkörper und κ_{L_j} bezeichne den Restklassenkörper des Bewertungsrings von L_j der über dem Bewertungsring von K liegt.

Die natürliche Zahl $\tilde{e}_j$, welche als Faktor der j-ten Komponente i_{L_j} vertikalen Abbildung hinten links auftritt, sei gerade der Exponent der ersten Potenz des maximalen Ideals des j-ten lokalen Rings A_j in der Zerlegung von $K'\otimes L$, welche gleich Null ist.

$$m(A_j)^{\tilde{e}_j} = 0.$$

Nach 7.3.5, Lemma 4, ist dann das linke seitliche Viereck kommutativ. Man beachte, der zusätzliche Faktor e_L vor den Komponenten der vertikalen Abbildung hinten links ist notwendig für die Kommutativität, da die vertikale Abbildung vorn links ebenfalls mit diesem Faktor multipliziert wird.

Die natürliche Zahl $\tilde{f}_j$ sei in analoger Weise durch die Zerlegung

$$\kappa'\otimes\kappa_L = \kappa'\otimes_\kappa\kappa_L = B_1\times\ldots\times B_{r'},$$

in ein direktes Produkt lokaler Ringe definiert (siehe unten), sodaß das seitliche Viereck rechts nach 7.3.5, Lemma 4, ebenfalls kommutativ wird. Damit diese Definition der $\tilde{f}_j$ überhaupt sinnvoll wird, ist jedoch zu zeigen, daß die Zerlegung von $\kappa'\otimes\kappa_L$ in ein Produkt lokaler Ring mit der von $K'\otimes_K L$ in dem Sinne verträglich ist, daß dieselbe Anzahl von Faktoren auftritt,

$$r = r',$$

und daß die Restklassenkörper der lokalen Ring B_j gerade die Restklassenkörper der Bewertungsringe der L_j sind.

Das hintere Viereck ist nach Nach Bemerkung 7.1.7 (ii) kommutativ, falls gilt

$$e_L\tilde{e}_j = e(L_j/K')\tilde{f}_j \text{ für jedes } j.$$

Kann man nun den Körper L so wählen, daß außer den gerade beschriebenen seitlichen und hinteren Vierecken auch noch das obere Viereck kommutativ wird (zu mindest für das gegebene Element α), so hängt das Bild von α in der Gruppe vorn oben rechts nicht von der Wahl der Abbildungen des Diagramms ab, die man dabei zusammensetzt. Insbesondere haben dann die beiden Seiten von (1) in dieser Gruppe dasselbe Bild, d.h. die Differenz der beiden Seiten

$$\delta := \partial^M_K(N_{K'/K}(\alpha)) - N_{\kappa'/\kappa}(\partial^M_{K'}(\alpha)) \tag{3}$$

liegt im Kern der vertikalen Abbildung vorn rechts,

$$\delta \in \mathrm{Ker}(i_{\kappa_L}).$$

Nach 7.3.5, Lemma 1, wird der Kern von i_{κ_L} vom Körpergrad annulliert,

$$[\kappa_L:\kappa]\bullet\delta = 0.$$

Die Beweisidee besteht nun darin, zwei solche Körpererweiterungen L/K zu wählen, für die die Körpergrade, welche δ annullieren, teilerfremd sind (sodaß δ selbst gleich Null sein muß).

<u>2. Schritt</u>: Die Zerlegungen von $K'\otimes_K L$ und $\kappa'\otimes_\kappa\kappa_L$ sind im oben beschriebenen Sinne verträglich, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(a) L/K ist eine endliche Körpererweiterung, deren Grad teilerfremd ist zu p.

(b) L = K'.

In diesen beiden Fällen sind nicht nur die beiden seitlichen Vierecke von (2) kommutativ, sondern auch das hintere Viereck allerdings mit der Ausnahme
K'/K rein inseparabel und total verzweigt (e(K'/K) = [K':K]). In diesem Fall gilt

$$\partial^M_K(N_{K'/K}(\alpha)) = p^2 \bullet N_{\kappa'/\kappa}(\partial^M_{K'}(\alpha)).$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein.

R Bewertungsring der gegebenen diskreten Bewertung $v: K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$.

R' Bewertungsring der gegebenen diskreten Bewertung $v': K'^* \longrightarrow \mathbb{Z}$.

S Bewertungsring der über v liegenden Bewertung $v_L : L^* \longrightarrow \mathbb{Z}$.

S_j Bewertungsring der über v liegenden Bewertung $v_j : L_j^* \longrightarrow \mathbb{Z}$

Seien weiter

$$p \subseteq R,\ p' \subseteq R',\ q \subseteq S,\ q_j \subseteq S_j$$

die zugehörigen Bewertungsideale und entsprechend

$\kappa := R/p$

$\kappa' := R'/p'$

$\kappa_L := S/q$

$\kappa_j := S_j/q_j$

die Restklassenkörper. Weil K vollständig ist, sind v', v_L und die v_{L_j} die einzigen über v liegenden Bewertungen der entsprechenden Körper. Insbesondere ist

R' = ganze Abschließung von R in K'
S = ganze Abschließung vond R in L
S_j = ganze Abschließung vond R in L_j

Weil K vollständig ist, sind R', S und die S_j endlich erzeugte freie R-Moduln, also ist auch

$$R' \otimes_R S$$

ein endlich erzeugter freier Modul über R, R' und S. Insbesondere ist das Tensorprodukt $R' \otimes_R S$ ganz über R, R' und S. Die natürlichen Abbildungen

$$K' \longrightarrow K' \otimes \mathbb{L} \twoheadrightarrow A_j \twoheadrightarrow L_j \text{ und } L \longrightarrow K' \otimes \mathbb{L} \twoheadrightarrow A_j \twoheadrightarrow L_j \qquad (4)$$

sind injektiv (sie sind Homomorphismen von Ringen mit 1 und haben Körper als Definitionsbereiche). Auf Grund der Surjektivität von $K' \otimes \mathbb{L} \twoheadrightarrow A_j \twoheadrightarrow L_j$ erzeugen die Bilder von K' und L in L den Körper L_j, d.h. es ist

$$L_j \cong K'L$$

isomorph zum Kompositum von K' und L. Als Körper sind die L_j paarweise isomorph (über K). Das Bild $(R'S)_j$ von $R' \otimes_R S$ in L_j ist damit zum "Kompositum" von R' und S isomorph,

$$(R'S)_j \cong R'S := \{\sum_\nu r'_\nu s_\nu \mid r'_\nu \in R',\ s_\nu \in S\}$$

Die Einschränkungen der Abbildungen (4) auf R' bzw. S sind ebenfalls injektiv:

$$R' \hookrightarrow L_j\,,\; S' \hookrightarrow L_j\,.$$

Das vollständige Urbild des maximalen Ideals $m(A_j)$ von A_j bei

$$R' \longrightarrow K' \longrightarrow K'\otimes L \twoheadrightarrow A_j \text{ bzw. } S \longrightarrow L \longrightarrow K'\otimes L \twoheadrightarrow A_j$$

liegt aber im Kern dieser Abbildungen, d.h. für diese vollständigen Urbilder gilt

$$R'\bigcap m(A_j) = 0 \text{ und } S\bigcap m(A_j) = 0.$$

Weiter gilt

$$K\otimes_R(R'\otimes_R S) = (K\otimes_R R')\otimes_R S = K'\otimes_R S = K'\otimes_K K\otimes_R S = K'\otimes_K L,$$

d.h. $K'\otimes_K L$ ist der Quotientenring von $R'\otimes_R S$ bezüglich der Nennermenge $R - \{0\}$. Die Multiplikation mit Elementen aus $R - \{0\}$ induziert auf $R'\otimes_R S$ injektive Abbildungen.[48] Die Elemente von $R - \{0\}$ sind also Nicht-Nullteiler, d.h. die natürliche Abbildung in den Quotientenring ist injektiv,

$$R'\otimes_R S \rightarrowtail K'\otimes L = A_1\times\ldots\times A_r.$$

Wir fassen die bisher eingeführten Bezeichnungen in einem kommutativen Diagramm zusammen.

$$\begin{tikzcd}
\times_j L_j \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & \times_j S_j \arrow[r, two heads] \arrow[d, phantom, "\cup"] & \times_j S_j/q_j \\
\times_j A_j \arrow[u, two heads] \arrow[d, equal] & \times_j (R'S)_j \arrow[ul] & \kappa'\otimes_\kappa \kappa_L \arrow[u] \arrow[d, equal] \\
K'\otimes_K L \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & R'\otimes_R S \arrow[r, two heads] \arrow[u] & R'/p'\otimes_{R/p} S/q
\end{tikzcd} \qquad (5)$$

Die Abbildung rechts oben ergibt sich dabei nach dem Homomorphiesatz aus der Tatsache, daß für jedes j die Abbildung

$$R'\otimes_R S \longrightarrow \times_j (R'S)_j \subseteq \times_j S_j \twoheadrightarrow S_j \twoheadrightarrow S_j/q_j$$

die Ideale $p'\otimes S$ und $R'\otimes q_j$ in die Null überführt.[49]

---

[48] Weil K vollständig ist, sind R' und S,also auch $R'\otimes S$ endlich erzeugte R-Moduln, also frei über dem diskreten Bewertungsring R.

[49] Der Kern von $\times_j (R'S)_j \subseteq \times_j S_j \twoheadrightarrow S_j \twoheadrightarrow S_j/q_j$ ist gleich

$$(R'S)_1\times\ldots\times(R'S)_{j-1}\times(R'S)_j\bigcap q_j \times (R'S)_{j+1}\times\ldots\times(R'S)_r$$

Nun ist nach Definition R'S die ganze Abschließung von R in L_j, also auch die R'S. Insbesondere ist S_j ganz über R'S, d.h. $(R'S)_j\bigcap q_j$ ist ein maximale Ideal von $\times_j (R'S)_j$. Damit ist der Kern von

$$R'\otimes_R S \twoheadrightarrow \times_j (R'S)_j \subseteq \times_j S_j \twoheadrightarrow S_j \twoheadrightarrow S_j/q_j$$

ein maximales Ideal von $R'\otimes_R S$. Weil letzterer Ring ganz ist über R' und S, ist das Urbild dieses maximalen Ideals in R' und S gleich p' bzw. q. Also liegen $p'(R'\otimes_R S)$ und $q(R'\otimes_R S)$ im Kern der betrachteten Abbildung.

Bemerkung. Bezüglich der mittleren vertikalen Abbildung von (5) ist $\times_j S_j$ gerade die ganze Abschließung von $R'\otimes_R S$ in $\times_j L_j$.[50]

Bezeichne Ω die Menge der von Null verschiedenen maximalen Ideale. Unser Ziel ist es, eine Bijektion

$$\Omega(K'\otimes_K L) \xrightarrow{\cong} \Omega(\kappa'\otimes_\kappa \kappa_L)$$

zu konstruieren, wobei in den zugehörigen Faktormengen nach diesen Idealen dem Körper L_j gerade der Restklassenkörper κ_j von L_j bezüglich der Bewertung v_j entsprechen soll.

Der Modul $R'\otimes_R S$ ist über R, R' und S endlich erzeugt, als Ring also ganz über R, R' und S. Jedes maximale Ideal x von $R'\otimes_R S$ schneidet sich mit R', R und S in einem maximalen Ideal $x\cap R' = p'$, $x\cap R = p$, $x\cap S = q$ von R', R und S. Es definiert so ein maximales Ideal von

$$R'/q'\otimes_{R/p} S/q = \kappa'\otimes_\kappa \kappa_L.$$

Es besteht eine Bijektion

$$\Omega(\kappa'\otimes_\kappa \kappa_L) \xrightarrow{\cong} \Omega(R'\otimes_R S),\ x \mapsto \text{vollständiges Urbild bei } R'\otimes_R S \twoheadrightarrow \kappa'\otimes_\kappa \kappa_L.$$

Es reicht also, eine Bijektion

$$\Omega(K'\otimes_K L) \xrightarrow{\cong} \Omega(R'\otimes_R S)$$

zu konstruieren.

Die maximalen Ideal von $K'\otimes_K L = A_1\times\ldots\times A_r$ sind von der Gestalt

$$A_1\times\ldots\times A_{j-1}\times m(A_j)\times A_{j+1}\ldots\times A_r$$

[50] Für $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \in \times_j S_j$ ist jedes $\alpha_j \in S_j$ ganz über R bezüglich des natürlichen Homomorphismus

$$R \longrightarrow S \longrightarrow R'\otimes S \longrightarrow K'\otimes L,$$

Seien

$$f_j(\alpha_j) = 0$$

eine Ganzheitsgleichung und $f = f_1\bullet\ldots\bullet f_r$. Dann gilt

$$f(\alpha) = (f(\alpha_1), \ldots , f(\alpha_r)) = (0, \ldots , 0) = 0,$$

d.h. α ist ganz über R, also auch über $R'\otimes S$. Sei jetzt umgekehrt

$$\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \in \times_j L_j$$

ganz über $R'\otimes S$ und

$$0 = f(\alpha) = (f(\alpha_1), \ldots , f(\alpha_r))$$

ein Ganzheitsgleichung. Dann gilt für jedes j auh $f(\alpha_j) = 0$, d.h. $\alpha_j \in L_j$ ist ganz über $R'\otimes S$, also auch über R. Also gilt $\alpha_j \in S_j$ für jedes j, d.h. $\alpha\in\times_j S_j$.

Das Bild eines solchen Ideals in $L_1 \times \ldots \times L_r$ bei der linken vertikalen Abbildung von (5) hat die Gestalt

$$L_1 \times \ldots \times L_{j-1} \times 0 \times L_{j+1} \ldots \times L_r$$

Schneidet man es mit $S_1 \times \ldots \times S_r$ so erhält man

$$S_1 \times \ldots \times S_{j-1} \times 0 \times S_{j+1} \ldots \times S_r$$

Der zu letzteren Ideal gehörige Faktorring ist isomorph zum lokalen Ring S_j , es gibt also genau ein maximales Ideal von $S_1 \times \ldots \times S_r$, das dieses Ideal enthält, nämlich

$$S_1 \times \ldots \times S_{j-1} \times q_j \times S_{j+1} \ldots \times S_r$$

Weil S_j ganz ist über R (also auch über R'S), ist der Durchschnitt $R'S \cap q_j$ ein maximales Ideal von R'S. Deshalb ist das vollständige Urbild jedes maximalen Ideals von $S_1 \times \ldots \times S_r$ in $R' \otimes_R S$ ein maximales Ideal.Wir haben so eine injektive Abbildung konstruiert:

$$\Omega(K' \otimes_K L) \rightarrowtail \Omega(R' \otimes_R S) \qquad (6)$$

$$\text{Urbild von } L_1 \times \ldots \times L_{j-1} \times 0 \times L_{j+1} \ldots \times L_r \mapsto \text{Urbild von } S_1 \times \ldots \times S_{j-1} \times q_j \times S_{j+1} \ldots \times S_r$$

Um die Bijektivität dieser Abbildung zu beweisen, reicht es zu zeigen, daß die beiden Mengen $\Omega(\ldots)$ aus derselben Anzahl r von Elementen bestehen. Genauer, es reicht zu zeigen

$$\# \Omega(R' \otimes_R S) \le \# \Omega(K' \otimes_K L) \ (= r).$$

Weil K'/K eine Körpererweiterung von Primzahlgrad p ist, ist sie einfach, sagen wir

$$K' = K(\alpha) = K[x]/(f), \ \alpha \in K' - K,$$

mit einem irreduziblen normierten Polynom

$$f \in K[x].$$

Wir betrachten die Zerlegung von f in irreduzible Faktoren über L, sagen wir

$$f = f_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{e_r}, \ f_i \in L[x] \text{ irreduzibel und paarweise teilerfremd.}$$

Nach dem Chinesischen Restesatz ist dann

$$K' \otimes_K L \cong L[x]/(f) = \times_{j=1}^{r} A_j$$

mit

$$A_j = L[x]/(f_j^{e_j}) , \ L_j = L[x]/(f_j)$$

Sei $\tilde{L}/K$ eine normale Körpererweiterung, welche den Körper K'L enthält. Jeder Automorphismus von

$$\mathrm{Aut}_K K'$$

läßt sich dann zu einem Automorphismus von $\mathrm{Aut}_K \tilde{L}$ fortsetzen. Weil K'/K nach Voraussetzung normal ist, operiert die Gruppe $\mathrm{Aut}_K K'$ transitiv auf den Nullstellen von f. Dasselbe gilt dann aber auch für $\mathrm{Aut}_K \tilde{L}$ t ist die natürliche Operation letzterer Gruppe auf der Mengen der f_i transitiv. Insbesondere ist

$$\deg f_1 = ... = \deg f_r \text{ und } \tilde{e}_1 = ... = \tilde{e}_r := \tilde{e}.$$

Wir erhalten

$$\dim_K K' = \dim_L K'\otimes_K L = \sum_{j=1}^{r} \dim_L A_j = \sum_{j=1}^{r} \tilde{e}_j \cdot \dim_L L_j = \tilde{e} \cdot r \cdot \dim_L L_j ,$$

d.h.

$$p = [K':K] = \tilde{e} \cdot r \cdot [L_j:L] \qquad (7)$$

Fall (a): [L:K] und [K':K] = p sind teilerfremd.
Die Körpererweiterung K'L hat dann den Grad [L:K] • [K':K] über K. Deshalb ist die natürliche Surjektion

$$K'\otimes_K L \longrightarrow K'L,\ x\otimes y \mapsto xy,$$

ein Isomorphismus (weil beide K-Vektorräume dieselbe Dimension haben). Das Tensorprodukt ist somit selbst bereits ein Körper, d.h. es gilt

$$r = 1,\ \tilde{e} = 1,\ [K'L:L] = p = [K':K]$$

also

$$e(K'/K)\cdot f(K'/K) = e(K'L/L)\cdot f(K'L/L) \quad (= p) \qquad (8)$$

Wegen

$$\begin{aligned} [K'L:K] &= [K'L:K']\cdot[K':K] = [K'L:L]\cdot[L:K] \\ &= [K'L:K']\cdot p = p\cdot[L:K] \end{aligned}$$

folgt weiter

$$[K'L:K'] = [L:K]$$

d.h.

$$e(K'L/K')\cdot f(K'L/K') = e(L/K)\cdot f(L/K) \quad \text{(teilerfremd zu p)} \qquad (9)$$

Da die Relativgrade die Körpergrade teilen, folgt aus der Teilerfremdheit der Körpergrade [K':K] und [L:K], die der Grade $[\kappa':\kappa]$ und $[\kappa_L:\kappa]$. Damit ist auch die Surjektion

$$\kappa'\otimes_\kappa \kappa_L \longrightarrow \kappa'\kappa_L,\ x\otimes y \mapsto xy,$$

ein Isomorphismus und $\kappa'\otimes_\kappa \kappa_L$ bereits selbst ein Körper. Wir erhalten damit

$$r = \#\,\Omega(K'\otimes_K L) = 1 = \#\,\Omega(\kappa'\otimes_\kappa \kappa_L) = r'.$$

Für die zu den Zerlegungen der Tensorprodukte gehörigen Zahlen $\tilde{e}$ und $\tilde{f}$ gilt

$$\tilde{e} = \tilde{f}.$$

Die Bedingung für die Kommutativität des hinteren Vierecks von (2) bekommt damit die Gestalt

$$e(L/K) = e(K'L/K').$$

Aus den kommutativen Diagrammen

$$\begin{array}{ccc} K' & \subseteq & K'L = L_j \\ \cup & & \cup \\ K & \subseteq & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R' & \subseteq & R'S \subseteq S_j \\ \cup & & \cup \\ R & \subseteq & S \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \kappa' & \subseteq & \kappa'\kappa_L \subseteq \kappa_j \\ \cup & & \cup \\ \kappa & \subseteq & \kappa_L \end{array}$$

lesen wir ab,

$$\begin{aligned} e(K'L/K) &= e(K'L/K')\cdot e(K'/K) = e(K'L/L)\cdot e(L/K) && \text{(1. Viereck)} \\ f(K'L/K) &= f(K'L/K')\cdot f(K'/K) = f(K'L/L)\cdot f(L/K) && \text{(1. Viereck)} \qquad (10) \end{aligned}$$

$$[\kappa'\kappa_L:\kappa] = [\kappa'\kappa_L:\kappa']\bullet[\kappa':\kappa] = [\kappa'\kappa_L:\kappa_L]\bullet[\kappa_L:\kappa] \quad \text{(3. Viereck)}$$

Nach (8) und (9) beschreiben die ersten beiden Zeilen von (10) zwei Zerlegungen derselben natürlichen Zahlen in zwei teilerfremde Faktoren (wobei einer der Faktoren ein Teiler von p ist). Auf Grund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung folgt

$$\begin{aligned} e(K'L/K') &= e(L/K),\ e(K'L/L) = e(K'/K)\\ f(K'L/K') &= f(L/K),\ f(K'L/L) = f(K'/K)\end{aligned}$$

Insbesondere sehen wir, daß die Bedingung für die Kommutativität des hinteren Vierecks von (2) erfüllt ist.

Wir haben noch zu zeigen, der in der Zerlegung von $\kappa'\otimes_\kappa \kappa_L$ auftrenden Körper $\kappa'\kappa_L$ ist gerade der Restklassenkörper κ_j des in der Zerlegung von $K'\otimes_K L$ auftretenden Körpers K'L

$$\kappa_j = \kappa'\kappa_L.$$

Allgemein wissen wir nur, daß der Körper rechts im Körper links enthalten ist (wegen der vertikalen Inklusion in der Mitte von (5)).

Weil die Relativgrade die Körpergrade teilen besteht auch die dritte Zeile von (10) aus zwei Zerlegungen in teilerfremde Faktoren (wobei einer der Faktoren ein Teiler von p ist), d.h. analog folgt

$$\begin{aligned} [\kappa'\kappa_L:\kappa'] &= [\kappa_L:\kappa],\ [\kappa'\kappa_L:\kappa_L] = [\kappa':\kappa]\\ &= f(L/K) \qquad\qquad = f(K'/K)\end{aligned}$$

Wegen $\kappa'\kappa_L \subseteq \kappa_j$ ist außerdem

$$f(L/K) = [\kappa'\kappa_L:\kappa'] \le [\kappa_j:\kappa'] = f(K'L/K') = f(L/K)$$

es gilt somit sogar das Gleichheitszeichen, d.h. es ist

$$\kappa'\kappa_L = \kappa_j .$$

Wir haben gezeigt, des als Faktor von $\kappa'\otimes_\kappa \kappa_L$ auftretende Körper ist gerade der Restklassenkörper zur Bewertung des Körpers, welcher also Faktor von auftritt.

Fall (b). L = K'.
Es gilt

$$S = R',\ q = p',\ \kappa_L = \kappa'$$

Fall (b1). K'/K ist separabel.
Weil

$$K' = K(\alpha)$$

normal ist über K, zerfällt das Minimalpolynom $f \in K[x]$ von α über K' in paarweise teilerfremde lineare Faktoren,

$$f = f_1\bullet\ldots\bullet f_r,\ f_i \in L[x] \text{ irreduzibel und paarweise teilerfremd.}$$

Nach dem Chinesischen Restesatz ist dann

$$K'\otimes_K L \cong L[x]/(f) = \times_{j=1}^r L[x]/(f_j) = \times_{j=1}^r L$$

Für jedes j gilt

$$A_j = L_j = L = K',\ \tilde{e}_j = \tilde{e} = 1.$$

Vergleich der Dimensionen über L liefert

$$r = \dim_L K'\otimes_K L = \dim_K K' = [K':K] = p.$$

Diagramm (5) hat die Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} K'^p & \supseteq & R'^p & \twoheadrightarrow & \kappa'^p \\ \| & & \| & & \uparrow \\ K'^p & \supseteq & R'^p & & \kappa'\otimes_\kappa \kappa' \\ \| & & \uparrow & & \| \\ K'\otimes_K K' & \supseteq & R'\otimes_R R' & \twoheadrightarrow & R'/p'\otimes_{R/p} R'/p' \end{array} \qquad (5')$$

Über jedem maximalen Ideal von

$$R'\otimes_R S = R'\otimes_R R'$$

liegt ein maximales Ideal der ganzen Abschließung R'^p von $R'\otimes_R R'$ in K'^p, und über verschiedenen solchen maximalen Ideale liegen verschiedene maximalen Ideal von R'^p. Damit gilt

$$\#\,\Omega(R'\otimes_R S) \le \#\,\Omega(R'^p) = p = r = \#\,\Omega(K'\otimes_K K') = \#\,\Omega(K'\otimes_K L)$$

Die Anzahl der lokalen Ringe in den Zerlegungen von

$$K'\otimes_K L = K'\otimes_K K' \text{ und } \kappa'\otimes_\kappa \kappa_L = \kappa'\otimes_\kappa \kappa'$$

sind also gleich,

$$r = r' = p.$$

Auf Grund der Zerlegung

$$\kappa'\otimes_\kappa \kappa' \cong B_1\times\ldots\times B_p$$

von $\kappa'\otimes_\kappa \kappa'$ in das direkte Produkt von p lokalen Ringen erhalten wir

$$p = [K':K] \ge^{51} [\kappa':\kappa] = \dim_{\kappa'} \kappa'\otimes_\kappa \kappa' = \sum_{j=1}^{p} \dim_{\kappa'} B_j \ge p \qquad (11)$$

Es gilt also an allen Stellen das Gleichheitszeichen. Insbesondere ist für jedes j der lokale Ring

$$B_j = \kappa'$$

bereits ein Körper. Die in der Faktorzerlegung von $\kappa'\otimes_\kappa \kappa_L$ auftretenden Körper sind gerade die Restklassenkörper κ' der Bewertungsringe derjenigen Körper, die in der Restklassenzerlegung von $K'\otimes_K L$ auftreten.

Außderdem gilt

$$\tilde{f} = 1.$$

Die Bedingung für die Kommutativität des hinteren Vierecks von (2) bekommt damit die Gestalt

$$e(L/K) = e(L_j/K')$$

Wegen L = K' und L_j = K'L = K'K' = K' steht auf der rechten Seite 1, d.h.die Bedingung lautet

$$e(K'/K) = 1.$$

[51] Genauer gilt $[K':K] = e(K'/K)\cdot f(K'/K) \ge f(K'/K) = [\kappa':\kappa]$.

Wegen

$$[K':K] = e(K'/K)\bullet f(K'/K) = e(K'/K)\bullet[\kappa':\kappa]$$

ist das aber der Fall, weil in (11) überall das Gleichheitszeichen gilt (also auch ganz links).

Fall (b1). K'/K ist inseparabel.

Weil $[K':K] = p$ ein Primzahl ist, ist dann sogar

$$K'/K \text{ rein inseparabel.}$$

Weil

$$K' = K(\alpha)$$

normal ist über K, zerfällt das Minimalpolynom $f \in K[x]$ von α über K' in ein p-te Potenz eines linearen Polynoms,

$$f = (x - \alpha)^p,\ \alpha \in K'.$$

Das Tensorprodukt

$$K'\otimes_K L = K'\otimes_K K' = K'[x]/(x - \alpha)^p$$

ist ein lokaler Ring, die erste Potenz des maximalen Ideals, welche Null ist, ist die p-te. Wir erhalten:

$$r = 1,\ \tilde{e} = p,\ A_j = K'[x]/(x - \alpha)^p,\ L_j = K'.$$

Das kommutative Diagramm (5) hat die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
K' & \supseteq & R' \arrow[r, two heads] & R'/p' \\
K'[x]/(x-\alpha)^p \arrow[u, two heads] & & R' \arrow[u, equal] & \kappa'\otimes_\kappa \kappa' \arrow[u] \\
K'\otimes_K K' \arrow[u, equal] & \supseteq & R'\otimes_R R' \arrow[u] \arrow[r, two heads] & R'/p'\otimes_{R/p} R'/p' \arrow[u, equal]
\end{tikzcd} \qquad (5'')$$

Über jedem maximalen Ideal von $R'\otimes_R S = R'\otimes_R R'$ liegt ein maximales Ideal der ganzen Abschließung R' dieses Tensorprodukt in K', und über verschiedenen solchen maximalen Idealen liegen verschiedene maximale Ideal von R'. Weil R' ein lokaler Ring ist, folgt

$$\#\,\Omega(R'\otimes_R S) \le \Omega(R') = 1 = r = \Omega(K'\otimes_K L).$$

Zusammen erhalten wir, $\kappa'\otimes_\kappa \kappa_L = \kappa'\otimes_\kappa \kappa'$ ist ein lokaler Ring. Anhand der natürlichen Surjektion

$$\kappa'\otimes_\kappa \kappa' \twoheadrightarrow \kappa',\ x\otimes y \mapsto xy,$$

sehen wir, der Restklassenkörper dieses Ring ist κ', d.h. gleich dem Restklassenkörper des Bewertungsrings von K', dem einzigen Körper der als Faktor von $K'\otimes_K L$ auftritt.

Die beiden seitlichen Vierecke von (2) sind somit verträglich. Wir haben noch zu zeigenm daß die Bedingung

für die Kommutativität des hinteren Vierecks von (2) erfüllt ist.

$$e(L/K)\tilde{e} = e(L_j/K')\tilde{f}.$$

Wegen L = K', d.h. $L_j = K'L = K'K' = K'$ und $\tilde{e} = p$ hat sie in der vorliegenden Situation die Gestalt

$$e(K'/K)\bullet p = \tilde{f}.$$

Zum Erzeugen der Körperweiterung $K' = K(\alpha)$ können wir, weil $[K':K] = p$ eine Primzahl ist, ein beliebiges Element $\alpha \in K' - K$ verwenden. Insbesondere können wir für α einen Parameter der Bewertung $v':K'^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ verwenden,

$$v'(\alpha) = 1.$$

Wegen $\alpha^p \in K$ können wir den Wert von α^p bezüglich der Bewertung $v: K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ von K berechnen. Es gilt

$$p = v'(\alpha^p) = e(K'/K)\bullet v(\alpha^p).$$

also

$$v(\alpha^p) = 1 \text{ und } e(K'/K) = p$$

oder

$$v(\alpha^p) = p \text{ und } e(K'/K) = 1$$

<u>Im zweiten Fall muß</u> $p = [K':K] = e(K'/K)\bullet f(K'/K)$ gelten

$$[\kappa':\kappa] = f(K'/K) = p,$$

d.h. der lokale Ring $\kappa'\otimes_\kappa \kappa'$ mit dem Restklassenkörper κ' hat die Länge

$$\dim_{\kappa'} \kappa'\otimes_\kappa \kappa' = [\kappa':\kappa] = p$$

über κ'. Es gilt $\tilde{f} = p$, d.h. die Bedingung für die Kommutativität des hinteren Vierecks von (2) ist erfüllt.

<u>Im ersten Fall muß</u> wegen $p = [K':K] = e(K'/K)\bullet f(K'/K)$ gelten

$$[\kappa':\kappa] = f(K'/K) = 1,$$

d.h. $\kappa' = \kappa$, also $\kappa'\otimes_\kappa \kappa' \cong \kappa'$, also $\tilde{f} = 1$, d.h. das hintere Viereck von (2) ist nicht kommutativ. Dafür sind die Normen des oberen Vierecks von (2) aus identische Abbildungen, d.h. dieses Viereck ist trivialerweise kommutativ. Für das Bild

$$\alpha' = i_{K'}(\alpha) = i_{L_j}(p^2\alpha)$$

von $p^2\alpha = e_L \tilde{e}\,\alpha$ in der K-Gruppe von $L_j = K'$, erhalten wir

$$0 = \partial_L^M(N_{L_j/L}(\alpha')) - N_{\kappa_j/\kappa_L}(\partial_{L_j}^M(\alpha')).$$

Für die beiden Glieder rechts gilt

$$\partial_L^M(N_{L_j/L}(\alpha')) = \partial_L^M (e_L i_L N_{K'/K}(\alpha)) \text{ (Kommutativität des linken Vierecks)}$$

$$= i_{\kappa_L} \partial_K^M N_{K'/K}(\alpha) \quad \text{(Kommutativität des rechten Vierecks)}$$

und

$$N_{\kappa_j/\kappa_L}(\partial^M_{L_j}(\alpha')) = N_{\kappa_j/\kappa_L}(\tilde{f}\, i_{\kappa_{L_j}}\, \partial^M_{K'}(p^2\alpha))\ (L_j = K',\ i_{\kappa_{L_j}} = \mathrm{id},\ \tilde{f} = 1)$$
$$= i_{\kappa_L} N_{\kappa'/\kappa} \partial^M_{K'}(p^2\alpha) \text{ (Kommutativität des Vierecks rechts)}$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} 0 &= i_{\kappa_L}(\partial^M_K N_{K'/K}(\alpha) - N_{\kappa'/\kappa}\partial^M_{K'}(p^2\alpha)) \\ &= i_{\kappa_L}(\partial^M_K N_{K'/K}(\alpha) - p^2\bullet N_{\kappa'/\kappa}\partial^M_{K'}(\alpha)) \end{aligned}$$

Wegen $e(K'/K) = p = [K':K]$ gilt weiter $1 = f(K'/K) = [\kappa':\kappa]$, also

$$\kappa_L = \kappa' = \kappa.$$

Insbesondere ist i_{κ_L} die identische Abbildung. Wir erhalten

$$\partial^M_K N_{K'/K}(\alpha) = p^2\bullet N_{\kappa'/\kappa}\partial^M_{K'}(\alpha).$$

Bemerkung 1.
Das Diagramm (2) hat im zuletzt beschriebenen Fall

K'/K rein inseparabel vom Grad p
K'/K total verzweigt
K vollständig

die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
K^M_n(K') \arrow[rr, "\partial^M_{K'}"] \arrow[dr, "N_{K'/K'}"] & & K^M_{n-1}(\kappa') \arrow[dr, "N_{\kappa'/\kappa'}"] & \\
& K^M_n(K') \arrow[rr, "\partial^M_{K'}"] & & K^M_{n-1}(\kappa') \\
K^M_n(K') \arrow[uu, "p^2 i_{K'}"] \arrow[rr, "\partial^M_{K'}"] \arrow[dr, "N_{K'/K}"] & & K^M_{n-1}(\kappa') \arrow[uu, "i_{\kappa'}"] \arrow[dr, "N_{\kappa'/\kappa}"] & \\
& K^M_n(K) \arrow[uu, "p\, i_K"] \arrow[rr, "\partial^M_K"] & & K^M_{n-1}(\kappa) \arrow[uu, "i_{\kappa_L}"]
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist das hintere Viereck nicht kommutativ. Es wird kommutativ, wenn man die untere horizontale Abbildung dieses Vierecks mit p^2 multipliziert.

Bemerkung 2.
Der Fall

$$v(\alpha^p) = 1 \text{ und } e(K'/K) = p$$

ist tatsächlich möglich.

Beispiel:

$$K = k((t)),\ k = F_p\ ,\ \pi = t,\ R := k[[t]]$$

Dann ist $K' = k((T))$, $R' := k[[T]]$, $T := \sqrt{t}$. Es gilt

$$[K':K] = p$$
$$f(K':K) = [k:k] = 1,\ e(K':K) = p$$

<u>3. Schritt</u>: δ wird von einer zu p teilerfremden natürlichen Zahl annulliert.
Wir betrachten die maximale zu p teilerfremde Erweiterung

$$K^{(p)}/K$$

von K (vgl. Bemerkung 7.2.10(i)). Der Körper $K^{(p)}$ genügt den Bedingungen von 7.3.6 (d.h. alle Erweiterungen eines zu p teilerfremden Grades sind trivial). Wir wenden 7.2.10 auf die endliche Erweiterung

$$K'K^{(p)}/\ K^{(p)} \tag{12}$$

(des Grades p)[52] an und sehen, daß $K^M_*(K'K^{(p)})$ als Modul über $K^M_*(K^{(p)})$ erzeugt wird von den Elementen aus

$$K^M_1(K'K^{(p)}) = K'K^{(p)} - \{0\}. \tag{13}$$

Mit anderen Worten, die Erweiterung (7) genügt den Bedingungen von Lemma 2. Die Differenz (3),

$$\delta := \partial^M_K(N_{K'/K}(\alpha)) - N_{\kappa'/\kappa}(\partial^M_{K'}(\alpha)),$$

mit (12) anstelle von K'/K und $i_{K^{(p)}}(\alpha)$ anstelle von α ist somit gleich Null. Nun ist (13) direkter Limes der K-Gruppen zu den endlichen Teilerweiterungen von (12). Es gibt deshalb eine endliche Teilerweiterung

$$L/K$$

von $K^{(p)}/K$ mit der Eigenschaft, daß die zu (3) analoge Differenz für das Bild von α in $K^M_1(K'L)$ gleich Null ist:

$$\delta^L := \partial^M_L(N_{K'L/L}(\alpha_{K'L})) - N_{\kappa'_L/\kappa_L}(\partial^M_{K'L}(\alpha_{K'L})) = 0. \tag{14}$$

Dann ist aber das Bild von α in der Gruppe vorn rechts oben bei den Abbildungen des Diagramms (2) unabhängig von der speziellen Wahl der Zusammensetzungen, d.h. das in (3) definierte Element δ liegt im Kern der vertikalen Abbildung vorn rechts und es gilt

$$[\kappa_L : \kappa]\bullet\delta = 0.$$

Nach Wahl von L ist $[\kappa_L : \kappa]$ eine zu p teilerfremde natürliche Zahl.

<u>4. Schritt</u>. δ wird von einer Potenz von p anulliert (außer im Fall K'/K rein inseparabel und total verzweigt).
Wir betrachten das Diagramm (2) mit L = K'. Für jedes j ist dann

---

[52] Im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K & \subseteq & K' \\ \cap & & \cap \\ K^{(p)} & \subseteq & K'K^{(p)} \end{array}$$

ist die obere Erweiterung vom Grad p und die endlichen Teilerweiterungen der linken Erweiterung haben einen zu p teilerfremden Grad. Der Grad der unteren Erweiterung mup deshalb p sein.

$$L_j = K'L = K'K' = K'$$

Die Normabbildungen im oberen Viereck sind sämtlich identische Abbildungen. Das obere Viereck ist somit trivialerweise kommutativ. Alle anderen Vierecke (mit eventueller Ausnahme des unteren) sind kommutativ nach dem 2. Schritt (Fall (b)). Also liegt δ im Kern der veritkalen Abbildung vorn links,

$$i_{\kappa'}(\delta) = 0$$

(wegen L = K' ist $\kappa_L = \kappa'$). Es folgt

$$[\kappa':\kappa]\bullet\delta = 0.$$

Der Körpergrad [κ':κ] ist ein Teiler von [K':K] = p, also gleich p oder 1.
QED.

7.3.10 Verträglichkeit von zahmen Symbol und Norm
Seien k wie in 7.3.6 und L/k eine normale Körpererweiterung vom Grad p. Dann ist das folgende Diagramm für jede natürliche Zahl und jeden abgeschlossenen Punkt $P \in \mathbb{P}^1_k$ der projektiven Geraden kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} K_n^M(L(t)) & \xrightarrow{\oplus\partial_Q} & \oplus_{P|Q} K_{n-1}^M(\kappa(Q)) \\ N_{L(t)/k(t)}\downarrow & & \downarrow\oplus N_{\kappa(Q)/\kappa(P)} \\ K_n^M(k(t)) & \xrightarrow{\partial_P} & K_{n-1}^M(\kappa(P)) \end{array}$$

Beweis.
QED.

Bemerkung
Die nachfolgende Aussage wird sich als der entscheidende Schritt im Beweis des Satzes von Kato herausstellen.

7.3.11 Die Norm eines Kompositums von Körpern
Seien k wie in 7.3.6 und L/k eine normale Körpererweiterung des Grades p. Weiter sei

k(a)/k

eine einfache algebraische Erweiterung. Wir nehmen an, L und k(a) beide Teilkörper einer algebraischen Erweiterung von k und bezeichnen mit

L(a)

das Kompositum dieser beiden Körper. Dann ist für jede nicht-negative ganze Zahl das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} K_n^M(L(a)) & \xrightarrow{N_{a/L}} & K_n^M(L) \\ N_{L(a)/k(a)}\downarrow & & \downarrow N_{L/k} \\ K_n^M(k(a)) & \xrightarrow{N_{a/k}} & K_n^M(k) \end{array}$$

Beweis.
QED.

7.3.12 Beweis des Satzes von Kato 7.3.3

7.4 Reziprozitätsgesetze

7.5 Anwendungen auf das Galois-Symbol

7.6 Das Galois-Symbol für den Fall von Zahlenkörpern

8. Symbole in positiver Charakteristik

Aufgaben

A4 Kommutative Algebra

A4.x Vollständige lokale Ringe

A4.x.5 Henselsches Lemma

Seien A ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit dem maximalen Ideal m und

$$f \in A[x]$$

ein Polynom mit Koeffizienten in A. Ist

$$\alpha \in A$$

ein Element mit

$$f(\alpha) = 0 \text{ und } f'(\alpha) \notin m,$$

so gibt es ein Element

$$\beta \in A$$

mit

$$f(\beta) = 0 \text{ und } \alpha - \beta \in m.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Newton-Approximation (vgl. z.B. Lang [3], Chap. XII, Prop. 7.6 oder Serre [2], Chap. II, Prop. 7 oder den Beweis von A.26 in der Monographie von Gille und Szamuely).
QED.

Literatur

Amitsur, Shimshon, A.

[1] Generic splitting fields of central simple algebras, Ann. of Math. (2) 62 (1955), 8-43
[2] On central division algebras, Israel J. Math. 12 (1972), 408-420.

Artin, Michael

[1] Brauer-Severi varieties, in Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Wilrijk 1981), Lecture Notes in Math. 917, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982, 194-210.

Bass, Hyman, and Tate, John

[1] The Milnor ring of a global field, in Algebraic K-theory II, Lecture Notes in Math. 342, Springer, Berlin 1973, 349-446.

Berhuy, Grégory, Fings, Christoph

[1] On the second trace form of central simple algebras in characteristic two, Manuscripta Math. 106 (2001), 1-12.

Brauer, Richard

[1] Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen I, Math. Zeit. 28 (1928), 677 - 696, II 31 (1930), 733-747.
[2] Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern, J. reine angew. Math. 166 (1932), 241-252.

Cartan, Henri, und Eilenberg, Samuel

[1] Homological algebra, Princeton University Press, Princeton 1956.

Cartier, Pierre

[1] Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique, Bull. Soc. Math. France 86 (1958), 177-251.

Châtelet, François

[1] Variations sur un thème de H. Poincaré, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. III. Sér. 61 (1944), 249-300

Colliot-Thélène, Jean-Louis, Ojanguren, Manuel, Parimala, Raman

[1] Quadratic forms over fraction fields of two-dimensional Henselian rings and Brauer groups of related schemes, in Algebra, arithmetic and geometry, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math, vol 16, Bombay 2002, 185-217.

Grothendieck, Alexander

[1] Techniques de descente et théorems d'existence en geometrie algebrique I: Généralités. Descent par morphismes fidélement plats, Sém. Bourbaki, exp. 190 (1960); reprinted by Société Mathématique de France, Paris 1995.
[2] Revétements étales et groupe fondamental (SGA 1), Lecture Notes in Mathematics 224, Springer-Verlag Berlin 1971; reprinted as vol. 3 of Documents Mathématicques, Société Mathématique de France, Paris 2003.
[3] Le groupe de Brauer I, II, III, in Dix Exposés sur la Cohomologie de Schémas, North-Holland, Amsterdam/Masson, Paris 1968, 46-188.

Gruenberg, Karl, W.

[1] Profinite groups, in Algebraic Number Theory (J.W.S. Cassels and A.Fröhlich, eds), Academic Press, London 1967, 116-127.

Herstein, I.N.

[1] Noncommutative rings, John Wiley and Sons, 1968

Jacobson, Nathan

[1] Abstract derivations and Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 42 (1937), 206-224.
[2] Basic algebra II, 2nd edition, W.H. Freeman & Co., New York 1989.
[3] Finite-dimensional division algebras over fields, Springer, Berlin 1996.

Jahnel, Jörg

[1] The Brauer-Severi variety associated with a central simple algebra: a survey, preprint available from the author's homepage.

de Jong, Aise Johan

[1] The period-index problem for the Brauer group of an algebraic surface, Duke Math. J. 123 (2004), 71-94

Gille, Ph., Szamuely, T.

Central simple algebras and Galois Cohomology

Kang, Ming-Chang

[1] Constructions of Brauer-Severi-Varieties and norm hypersurfaces, Canad. J. Math. 42 (1990), 230-238.

Kato, Kazuya

[1] A generalization of local class field theory by using K-groups.
Part I: J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 26 (1979), 303-376
Part II: J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 27 (1980), 603-683

[2] Galois cohomology of complete discrete valuation fields, in Algebraic K-theory, Part II (Oberwohlfach, 1980), Lecture Notes in Math. 967 (1982), 215-238.

[3] Residue homomorphisms in Milnor K-theory, in Galois groups and their representations (Nagoya, 1981), Adv. Stud. Pure Math., Vol. 2, North-Holland, Amsterdam 1983, 153-172.

[4] Milnor K-theory and the Chow group of zero cycles, in Applications of algebraic K-theory to algebraci geometry and number theory, Contemp Math., Vol. 55/2, Amer. Math. Soc., Providence, 1986, 241-253.

Knus, Max-Albert

[1] Sur la forme d' Albert et le produit tensoriel de deux algèbres de quaternions, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B 45 (1993), 333-337.

Knus, Max-Albert, Merkurjev, Alexander, Rost, Markus, Tignol, Jean-Pierre

[1] The book of involutions, Amerikan Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 44, American Mathematical Society, Providence 1998.

Lam, Tsit-Yuen

[1] Introduction to quadratic forms over fields, Graduate Studies in Mathematics 67, American Mathematical Society, Providence 2005.

Lang, Serge

[1] On quasi-algebraic closure, Ann. of Math. (2) 55 (1952), 373-390.

[2] Algebraic groups over fininite fields, Amer. J. Math. 78 (1956), 555-563.

[3] Algebra, 3. Auflage, Addison-Wesley 1993.

Milnor, John W.

[1] Algebraic K-theory and quadratic forms, Invent. Math. 9 (1970), 318-344.

[2] Introduction to algebraic K-theory, Annals of Mathematics Studies 72, Princeton University Press 1971.

Pierce, Richard

[1] Associative algebras, Springer-Verlag, New-York, Berlin 1982

Roquette, Peter

[1] On the Galois cohomology of the projective linear group and its applications to the construction of generic splitting fields of algebras, Math. Ann. 150 (1963), 411-439.

Saltman, David, J.

[3] Lectures on division algebras, American Mathematical Society Providence 1999.
[4] Division algebras over p-adic curves, J. Ramanujan Math. Soc. 12 (1997), 25-47; correction, ibid 13 (1998), 125-129.

Segre, Benjamino

[1] Questions arithmétiques sur les variétés algébriques, Colloques Internat. Centre Nat. Rech. Sci., vol 24 (1950), 83-91.

Serre, Jean-Pierre

[1] Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p, in Symposium international de topologia algebraica, Mexico City, 1958, 24-53.
[2] Corps Locaux, Hermann, Paris 1962, [English translation: Local Fields, Springer-Verlag, 1979]
[3] Lectures on the Mordell-Weil Theorem, Vieweg, Braunschweig, 1989.
[4] Cohomologie Galoisienne, 5e éd. , révisée et complétée, Lecture Notes in Mathematics 5, Springer-Verlag, Berlin 1994. [English translation: Galois Cohomology, Springer-Verlag, Berlin 2002]

Severi, Francesco

[1] Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica, Mam. Accad. Ital., Mat. 3 (1932), 1-52.

Shatz, Stephen S.

[1] Profinite groups, arithmetic, and geometry, Annals of Mathematics Studies 67, Princeton University Press 1972.

Sridharan, Ramaiyengar

[1] (in collaboration with Raman Parimala) 2-Torsion in Brauer groups: A Theorem of Merkurjev, notes from a course held at ETH Zürich in 1984/85, available from the homepage of M.-A. Knus.

Suzuki, Michio

[1] Group theory I, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 247, Springer Verlag, New York 1982

Tate, John

[1] Genus change in inseparable extensions of function fields, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 400-406
[2] Global class field theory, in Algebraic Number Theory (J.W.S. Cassels and A. Fröhlich, eds), Academic Press, London 1967, 162-203.
[3] Symbols in arithmetic, in Actes du Congress International des Mathématiciens (Nice 1970), Tome 1, Gauthier-Villars, Paris 1971, 201-211.
[4] Relations between K_2 and Galois cohomology, Invent. Math. 36 (1976), 257-274.
[5] On the torsion in K_2 of fields, in Algebraic number theory (Kyoto, 1976), Japan Soc. Promotion Sci., Tokyo 1977, 243-261.

Tregub, S.L.

[1] Birational equivalence of Brauer-Severi-Varieties, Uspechi Mat. Nauk. 46 (1991), 217-218, English translation in Russian Math. Surveys 46 (1992), 229.

Voevodsky, Vladimir

[1] Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$-coefficients, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci 98 (2003), 59-104.

Weibel, Charles

[1] An introduction to homological algebra, Cambrigde Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambrigde University Press 1994
[2] Introduction to algebraic K-theory, book in preparation, parts available in the authors homepage.

Weil, André

[1] The field of definition of a variety, Amer. J. Math. 78 (1956), 509-524
[2] Basic Number Theory, 3rd edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 144, Springer-Verlag, New York, Berlin 1974.

Index

Inhalt