Zentrale einfache Algebren und Galois-Kohomologie

frei nach
Philippe Gille und Tamás Szamuely
siehe
http://www.cambridge.org/uk/catalogue.asp?isbn=9780521861038

4. Die Kohomologische Brauer-Gruppe

Wir verwenden jetzt die im vorigen Kapitel entwickelte Kohomologie-Theorie zur Untersuchung der Brauer-Gruppe. Wir müssen jedoch vorher eine etwas modifizierte Konstruktion einführen, welche berücksichtigt, daß die absolute Galois-Gruppe durch ihre endlichen Faktoren bereits vollständig festgelegt ist. Mit anderen Worten, wir haben zunächst noch die Kohomologie-Theorie der proendlichen Gruppen zu entwickeln. Als Ergebnis unserer Bemühungen wird sich herausstellen, daß man die Brauer-Gruppe mit einer zweiten Kohomologie-Gruppe (disemal mit Koeffizienten in einem G-Modul) identifizieren kann. Dies wird uns in die Lage versetzen, einfache Beweise für die grundlegenden Tatsachen bezüglich der Brauer-Gruppe anzugeben, zum Beispiel der Tatsache, daß es eine Torsionsgruppe ist. Wir werden auch die Grundlagen der Index-Theorie und der Perioden von zentralen einfachen Algebren mit Hilfe der Kohomologie-Theorie behandeln. Schließlich wird hier eines der Hauptobjekte für die Untersuchungen in diesem Buch auftreten: das Galois-Symbol.

Die Kohomologie-Theorie der proendlichen Gruppe ist von John Tate in den späten Fünfziger Jahren eingeführt worden und war durch die Garben-theoretischen Betrachtungen von Alexander Grothendieck motiviert. Tates ursprüngliches Ziel bestand in der Entwicklung eines geeigneten Formalismus für die Klassenkörper-Theorie. Tate selbst hat seine Arbeit nie veröffentlicht, sodaß diese erst durch den Artikel [4] von Serre, der auch viele eigene Beiträge enthält, einer größeren mathematischen Gemeindschaft zugänglich wurde. Es war Brauer selbst, der die Brauer-Gruppe unter Verwendung seiner Faktorsysteme als zweite Kohomologie-Gruppe beschrieben hat. Serre verdanken wir die Einsicht, daß die Abstiegstheorie benutzt werden kann für einen mehr begrifflichen Beweis. Das Galois-Symbol ist von Tate in Zusammenhang mit der algebraischen Theorie des Potenzreste-Symbols definiert worden, einem Gegenstand, welcher in den sechziger Jahren intensiv von Bass, Milnor, Moore, Serre und anderen untersucht wurde.

4.1. Proendliche Gruppen und Galois-Gruppen

Es wird keine Überraschung sein, daß die Hauptanwendung der im vorigen Kapitel entwickelten kohomologischen Techniken im Fall auftritt, daß G die Galois-Gruppe einer endlichen Körpererweiterung ist. Es wird jedoch nützlich sein, auch den Fall unendlicher Galois-Erweiterungen zu betrachten, und insbesondere die Erweiterung

$$k_s/k,$$

wobei k_s eine separable Abschließung von k bezeichnet.

4.1.1 Wiederholung zur Galois-Theorie

Eine möglicherweise unendliche Körper-Erweiterung

$$K/k$$

heißt Galois-Erweiterung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

1. K/k ist algebraisch, d.h. jedes Element von K ist Nullstelle eines nicht-konstanten Polynoms mit Koeffizienten aus k.
2. K/k ist separabel, d.h. die irreduziblen Polynome aus k[x] mit einer Nullstelle in K besitzen keine mehrfachen Nullstellen (in einer algebraischen Abschließung von k).

3. K/k ist normal, d.h. die irreduziblen Polynome aus k[x] mit einer Nullstelle in K zerfallen über K in Linearfaktoren.[1].

Die Gruppe der k-Automorphismen $K \longrightarrow K$ wird dann mit

$$\mathrm{Gal}(K/k)$$

bezeichnet.

Bemerkungen

(i) Ein grundlegendes Beispiel für eine unendliche Galois-Erweiterung ist die Erweiterung

$$k_s/k$$

falls k eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ oder ein endlicher Körper ist.

(ii) Jede Galois-Erweiterung K/k ist Vereinigung von endlichen Galois-Erweiterungen. Für jedes Element

$$\alpha\in K$$

gilt nämlich

$$\alpha \in k_\alpha \subseteq K,$$

wenn k_α den Zerfällungskörper des Minimalpolynoms von α über k bezeichnet, und

$$k_\alpha/k$$

ist eine endliche Teilerweiterung von K/k (welche Galois ist).

(iii) Das in (ii) beschriebene Phänomen hat eine weitreichende Konsequenz für die Galois-Gruppe Gal(K/k). Die Gruppe ist nämlich bereits durch ihre endlichen Faktorgruppen festgelegt. Wir werden dies demnächst beweisen, nachdem wir für diese Aussage eine genauere Formulierung gegeben haben.

(iv) Zur Motivierung dieser präzisierten Aussage betrachten wir einen Körperturm

$$k \subseteq L \subseteq M$$

endlichen Galois-Teilerweiterungen (über k) in der unendlichen Galois-Erweiterung K/k. Nach Definition des Begriffs Galois-Erweiterung ist die Abbildung

$$\Phi_{ML}: \mathrm{Gal}(M/k) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/k),\ \sigma \mapsto \sigma|_L,$$

wohldefiniert. Für jede weitere Galois Teilerweiterung N/k mit $M \subseteq L$ gilt offensichtlich

$$\Phi_{NL} = \Phi_{ML}\circ\Phi_{NM}.$$

Es ist naheliegend, zu erwarten, daß die Gruppe Gal(K/k) in irgendeinem Sinne der Limes der Gruppen Gal(M/k), wenn M gegen K geht, ist. Die Gruppen Gal(M/k) sollten dann Faktorgruppen der Gruppe Gal(K/k) werden. Wir gehen jetzt zur konkreteren Beschreibung der Situation über.

4.1.2 (Filtrierte) inverse Systeme von Gruppen

Ein (filtriertes) inverses System von Gruppen oder auch projektives System besteht aus

1. einer halbgeordneten Menge $(\Lambda, \leq)$, welche gerichtet ist in dem Sinne, daß es für je zwei Elemente $\alpha,\beta\in\Lambda$ ein $\gamma\in\Lambda$ gibt mit $\alpha\leq \gamma$ und $\beta \leq \gamma$.

---

[1] Für je zwei Nullstellen eines solchen irreduziblen Polynoms gibt es dann einen k-Automorphismus $K \longrightarrow K$, der diese Nullstellen ineinander überführt.

Äquivalente Bedingungen:

1. K/k ist Zerfällungskörper einer Familie von Polynomen mit Koeffizienten in k.
2. Jeder k-Homomorphismus $K \longrightarrow \overline{K}$ mit Werten in einer algebraischen Abschließung von K hat das Bild K.

2. Aus einer Gruppe G_α für jedes $\alpha\in\Lambda$.
3. Aus einem Gruppen-Homomorphismus $\phi_{\alpha\beta}:G_\beta\longrightarrow G_\alpha$ für je zwei α, $\beta\in\Lambda$ mit $\alpha\le\beta$.

Dabei gelte

(*) $$\phi_{\alpha\gamma} = \phi_{\alpha\beta}\circ\phi_{\beta\gamma}$$

für je drei α, β, $\gamma\in\Lambda$ mit $\alpha\le\beta\le\gamma$.
Der <u>inverse Limes</u> dieses inversen System oder auch <u>projektiver Limes</u> ist definiert als die folgende Untergruppe des direkten Produkts der G_α.

$$\lim_{\substack{\longleftarrow\\ \alpha\in\Lambda}} G_\alpha := \{(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha \mid \phi_{\alpha\beta}(g_\beta) = g_\alpha \text{ für alle } \alpha,\beta\in\Lambda \text{ mit } \alpha\le\beta\}.$$

Wir werden das inverse System, d.h. die Familie der $\phi_{\alpha\beta}$ in der Bezeichnung des Limes nicht konkretisieren. Es wird aus dem jeweiligen Kontext klar sein, welches inverse System gemeint ist.
Eine <u>proendliche Gruppe</u> ist eine Gruppe, welche inverser Limes eines inversen Systems von endlichen Gruppen ist.

Bemerkung

Die angegebene Konstruktion ist nicht spezifisch für die Kategorie der Gruppen. Man kann inverse Limiten in derselben Weise für Mengen, Moduln und sogar topologische Räume definieren.

4.1.3 Beispiele

1. Endliche Gruppen

Jede endliche Gruppe G ist proendlich. Als Index-Menge $\Lambda:= \mathbb{N}$ kann man die natürlichen Zahlen nehmen, für jedes $n \in \mathbb{N}$ kann man $G_n := G$ setzen. Und als Abbildungen $\varphi_{\alpha\beta}$ die identischen Abbildungen.

2. Die proendliche Vervollständigung einer Gruppe

Für jede Gruppe G kann man die Familie der Faktorgruppen G/H, welche endlich sind wie folgt in ein inverses System verwandeln. Als Index-Menge Λ verwende man die Menge aller Normalteiler

$$H \subseteq G$$

mit endlichem Index,

$$(G:H) < \infty.$$

Für je zwei Normalteiler H', H" von G mit endlichem Index schreibe man

$$H' \le H'' \text{ falls gilt } H' \supseteq H''.$$

Weil der Durchschnitt von je zwei Normalteilern H',H" mit endlichem Index wieder ein Normalteiler mit endlichem Index[2] ist, ist die halbgeordnete Menge Λ gerichtet im oben

[2] Trivialerweise ist $H'\cap H''$ wieder ein Normalteiler. Die Endlichkeit des Indexes von $H'\cap H''$ erkennt man mit Hilfe der exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow H'/H'\cap H'' \longrightarrow G/H'\cap H'' \longrightarrow G/H' \longrightarrow 1$$

und der Inklusion

$$H'/H'\cap H'' \cong H'H''/H'' \subseteq G/H''$$

definierten Sinne. Für je zwei Elemente H', H'' mit $H' \le H''$, d.h. $H' \supseteq H''$ hat man auf Grund des Homomorphiesatzes eine natürliche Surjektion

$$G/H'' \longrightarrow G/H',\ g \bmod H'' \mapsto g \bmod H'.$$

Diese Surjektionen verwendet man als die Homomorphismen des inversen Systems. Bedingung (*) von 4.1.2 ist dann offensichtlich erfüllt. Der inverse Limes dieses Systems heißt <u>proendliche Vervollständigung</u> von G und wird mit

$$\hat{G}$$

bezeichnet. Die Familie der natürlichen Surjektionen

$$G \longrightarrow G/H \text{ mit } H \in \Lambda$$

definiert einen Homomorphismus

$$G \longrightarrow \hat{G}.$$

3. Die proendliche Vervollständigung von $\mathbb{Z}$

Die Normalteiler mit endlichem Index von $\mathbb{Z}$ sind gerade die Untergruppen $n\mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$, wobei sich die Untergruppe nicht ändert, wenn man n durch -n ersetzt. Die Index-Menge Λ kann man deshalb mit der Menge der natürlichen Zahlen identifizieren,

$$\Lambda = \mathbb{N}.$$

Für je zwei natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $a \le b$ im Sinne des vorigen Beispiels,

$$a \le b \Leftrightarrow a\mathbb{Z} \supseteq b\mathbb{Z} \Leftrightarrow a \mid b,$$

genau denn, wenn a ein Teiler von b ist.

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

wobei der inverse Limes bezüglich der natürlichen Surjektionen

$$\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\ ,\ g \bmod a \mapsto g \bmod b,$$

für alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit $b \mid a$ gebildet wird.

4. p-adische Zahlen

Betrachtet man nur die Normalteiler von $\mathbb{Z}$, bei denen der (endliche) Index eine Potenz einer fest gewählten Primzahl $p \in \mathbb{N}$ ist, so heißt der zugehörige inverse Limes

$$\hat{\mathbb{Z}}_p := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

additive Gruppe der <u>p-adischen Zahlen</u>. Der inverse Limes wird genommen bezüglich des Systems der natürlichen Surjektionen

(1) $$\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^b\mathbb{Z},\ x \bmod p^a \mapsto x \bmod p^b,$$

für alle Paare (a,b) natürlicher Zahlen mit $a \ge b$. Eine p-adische Zahl kann man sich vorstellen als eine "Potenzreihe" der Gestalt

(2) $$\alpha := \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$$

mit ganzen Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Z}$ mit $0 \le a_i < p$. Jeder solche Ausdruck definiert für jedes $a\in\mathbb{N}$ ein Element

$$\alpha \bmod p^a := \sum_{i=0}^{a-1} a_i p^i \bmod p^a \in \mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}\ .$$

Die so definierten Elemente der Gruppen $\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}$ gehen bei den Abbildungen (1) ineinander über, d.h. die Familie

$$(\alpha \bmod p^a)_{a\in\mathbb{N}}$$

ist ein Element des inversen Limes $\hat{\mathbb{Z}}_p$. Es ist nicht schwer, zu sehen, daß man auf diese Weise alle Elemente von $\hat{\mathbb{Z}}_p$ erhält, und daß die Koeffizienten der Reihe (2) durch das zugehörige Element von $\hat{\mathbb{Z}}_p$ eindeutig festgelegt sind:

Es gilt

$$\sum_{i=0}^{a-1} a_i p^i \le \sum_{i=0}^{a-1} (p-1)p^i = (p-1)\sum_{i=0}^{a-1} p^i = (p-1)\bullet\frac{p^a-1}{p-1} = p^a - 1 < p^a,$$

Die Restklassen von zwei solchen Summen sind deshalb genau dann gleich, wenn die Repräsentanten gleich sind,

$$\sum_{i=0}^{a-1} a_i p^i \equiv \sum_{i=0}^{a-1} b_i p^i \bmod p^a \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{a-1} a_i p^i = \sum_{i=0}^{a-1} b_i p^i \Leftrightarrow a_i = b_i \text{ für } i = 0, \dots , a-1.$$

4.1.4 Die Galois-Gruppe als proendliche Gruppe

Sei K/k eine Galois-Erweiterung. Dann bilden die Galois-Gruppen der endlichen Galois-Teilerweiterungen L/k von K/k zusammen mit den Einschränkgungsabbildungen

$$\Phi_{LL'}: \mathrm{Gal}(L/k) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L'/k) \text{ für } L' \subseteq L$$

ein inverses System, dessen inverser Limes isomorph ist zur Galois-Gruppe Gal(K/k). Insbesondere ist Gal(K/k) eine proendliche Gruppe.

Beweis. Es reicht zu zeigen, der Gruppen-Homomorphismus

$$\Phi: \mathrm{Gal}(K/k) \longrightarrow \prod_{L/k} \mathrm{Gal}(L/k), \sigma \mapsto (\sigma|_L)_{L/k},$$

wobei rechts der Körper L alle Teilerweiterungen von K/k durchläuft, die endlich und Galoissch sind, ist injektiv und hat als Bild gerade den inversen Limes

$$\varprojlim_{L/k} \mathrm{Gal}(L/k).$$

Beweis der Injektivität. Sei $\sigma\in\mathrm{Gal}(K/k)$ von der identischen Abbildung verschieden. Dann gibt es ein Element

$$\alpha\in K \text{ mit } \sigma(\alpha) \ne \alpha.$$

Das Minimalpolynom f_α von α über k zerfällt über K in Linearfaktoren.[3] Entstehe

$$L \subseteq K$$

durch Adjunktion der Nullstellen von f_α in K zu k. Dann ist L endlich über k und als Zerfällungskörper von f_α auch normal. Mit anderen Worten, L/k ist eine endlich Galois-Teilerweiterung von K/k. Nach Konstruktion ist $\sigma|_L$ nicht die identische Abbildung, d.h. $\Phi(\sigma)$ ist vom neutralen Element der Bild-Gruppe verschieden.

Beschreibung des Bildes von Φ. Da die Familie $\Phi(\sigma)$ aus den Einschränkungen von ein und desselben Homomorphismus σ besteht, gehen die Glieder dieser Familie beim Einschränkung ineinander über, d.h. es gilt

[3] Weil K/k normal ist.

$$\Phi(\sigma) \in \varprojlim_{L/k} \mathrm{Gal}(L/k) \text{ für jedes } \sigma \in \mathrm{Gal}(K/k).$$

Sei jetzt umgekehrt eine Familie aus dem inversen Limes gegeben, sagen wir

(1) $$(\sigma_L)_{L/k} \in \varprojlim_{L/k} \mathrm{Gal}(L/k).$$

Für jede endliche Galois-Teilerweiterung L/k ist dann

$$\sigma_L: L \longrightarrow L$$

ein k-Automorphismus und für je zwei solche Teilerweiterungen L/k und L'/k mit $L \subseteq L'$ gilt

$$\sigma_{L'}|_L = \sigma_L.$$

Für jedes $\alpha \in K$ und jede endliche Galois-Teilerweiterungen L/k von K/k mit $\alpha \in L$ setzen wir

$$\sigma(\alpha) := \sigma_L(\alpha).$$

Wir haben zu zeigen, diese Definition $\sigma(\alpha)$ ist unabhängig von der speziellen Wahl der Teilerweiteung L/k. Sei L'/k eine weitere endliche Galois-Teilerweiterung von K/k mit $\alpha \in L'$. Dann gibt es eine endliche Galois-Teilerweiterung L''/k von K/k mit

$$L \subseteq L'' \text{ und } L' \subseteq L''.$$

Dann ist aber

$$\sigma_L(\alpha) = \sigma_{L''}(\alpha) = \sigma_{L'}(\alpha).$$

Wir haben damit eine Abbildung

$$\sigma: K \longrightarrow K$$

konstruiert mit

$$\sigma|_L = \sigma_L \text{ für jede endliche Galois-Teilerweiterung } L/k \text{ von } K/k.$$

Insbesondere ist σ ein k-Automorphismus. Nach Konstruktion ist $\phi(\sigma)$ die vorgegebene Familie (1).

QED.

4.1.5 Bemerkung

Für jede Galois-Erweiterung K/k sind die Projektionen

$$\mathrm{Gal}(K/k) = \varprojlim_{L/k} \mathrm{Gal}(L/k) \subseteq \prod_{L/k} \mathrm{Gal}(L/k) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/k),\ (\sigma_L)_{L/k} \mapsto \sigma_L,$$

auf die endlichen Galois-Teilerweiterungen L/k von K/k surjektive Gruppen-Homomorphismen.[4]

4.1.6 Beispiel: endliche Körper

Seien $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper und $\mathbb{F}_s$ eine separable Abschließung von $\mathbb{F}$. Dann gibt es für jede natürliche Zahl n genau einen Teilkörper

$$\mathbb{F}_n \subseteq \mathbb{F}_s \text{ mit } [\mathbb{F}_n:\mathbb{F}] = n.$$

Nach dem Hauptsatz der Galois-Theorie ist die Galois-Gruppe der Erweiterung $\mathbb{F}_n/\mathbb{F}$ eine Gruppe der Ordnung

[4] Die angegebene Abbildung ist gerade die Einschränkung auf L. Jeder k-Automorphismus

$$L \longrightarrow L$$

läßt sich zu einem k-Automrophimusm $K \longrightarrow \bar{K}$ fortsetzen, wenn $\bar{K}$ eine algebraische Abschließung von K bezeichnet. Weil K/k normal ist, ist dies aber sogar ein k-Automorphismus $K \longrightarrow K$.

$$\# \operatorname{Gal}(\mathbb{F}_n/\mathbb{F}) = [\mathbb{F}_n : \mathbb{F}] = n$$

Sehen wir uns die Elemente dieser Gruppen etwas genauer an. Ist p die Charakteristik der betrachteten Körper und besteht $\mathbb{F}$ aus p^f Elementen,

$$\# \mathbb{F} = p^f$$

so ist $\mathbb{F}_n$ gerade der Körper mit p^{fn} Elementen in $\mathbb{F}_s$.

$$\# F_n = p^{fn}.$$

Bezeichnet

$$F: \mathbb{F}_s \longrightarrow \mathbb{F}_s,\ x \mapsto x^p,$$

den <u>Frobenius-Automorphismus</u>, so wird die Galois-Gruppe

$$\operatorname{Gal}(\mathbb{F}_n/\mathbb{F}) = < F^f>$$

von der f-ten Potenz von F erzeugt. Man beachte

$$F^f(x) = x^{p^f} = x \text{ für } x \in \mathbb{F}$$

nach dem kleinen Fermatschen Satz, d.h.

$$F^f: \mathbb{F}_n \longrightarrow \mathbb{F}_n$$

ist ein $\mathbb{F}$-Automorphismus. Analog läßt die n-te Potenz F^{fn} von F^f den Körper $\mathbb{F}_n$ elementweise fest. Es ist nicht schwer, einzusehen, daß dies die ersten Potenz von F^f ist, die auf $\mathbb{F}_n$ trivial operiert. Wir erhalten damit Isomorphismen,

(1) $$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Gal}(\operatorname{Gal}(\mathbb{F}_n/\mathbb{F}),\ g \bmod n \mapsto F^{fg}|_{\mathbb{F}_n}.$$

Für je zwei natürliche Zahlen m und n mit

$$m \mid n$$

gilt $\mathbb{F}_m \subseteq \mathbb{F}_n$ und die Einschränkungsabbildung

$$\operatorname{Gal}(\mathbb{F}_n/\mathbb{F}) \longrightarrow \operatorname{Gal}(\mathbb{F}_m/\mathbb{F})$$

entspricht beim Isomorphismus (1) gerade der natürlichen Abbildung

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ g \bmod n \mapsto g \bmod m.$$

Damit ist die Galois-Gruppe der separablen Abschließung

$$\operatorname{Gal}(\mathbb{F}_s/\mathbb{F}) \cong \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \hat{\mathbb{Z}}$$

gerade die proendliche Vervollständigung von $\mathbb{Z}$.

4.1.7 Beispiel: Laurent-Körper

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und

$$k((t)) := Q(k[[t]])$$

der Körper der formalen Laurent-Reihen in t mit Koeffizienten in k (d.h. der Quotienten-Körper des Rings k[[t]] der formalen Potenzreihen in t mit Koeffizienten aus k)[5].

---

[5] Weil k[[t]] nur ein maximales Ideal besitzt und dieses von t erzeugt wird, besteht k((t)) gerade aus den Quotienten der Gestalt

$$p(t)/t^n$$

mit einer formalen Potenzreihe $p(t) \in k[[t]]$ und einer ganzen Zahl n.

Sei L/k((t)) eine endliche Körpererweiterung des Grades n. Mit verschiedenen Methoden läßt sich dann zeigen, daß L die Gestalt

(1) $$L = k((t))(\sqrt[n]{t}).$$

hat. Als algebraisch abgeschlossener Körper enthält k eine primitive n-te Einheitswurzel, sagen wir

$$\zeta \in k.$$

Aus einer Nullstelle des Minimalpolynoms $T^n - t$ erhält man durch Multiplikation mit den Potenzen von ζ alle Nullstellen. Die Abbildung

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/k((t))),\ i \bmod n \mapsto (\sqrt[n]{t} \mapsto \zeta^i \cdot \sqrt[n]{t}),$$

ist wohldefiniert und injektiv, also ein Isomorphismus. Wie im vorigen Abschnitt erhalten wir

$$\mathrm{Gal}(k((t))_s/k((t))) \cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \hat{\mathbb{Z}}$$

<u>Zum Beweis von</u> (1). Weil k die Charakteristik 0 hat, hat L nach dem Satz vom primitiven Element die Gestalt

$$L = k((t))(\alpha).$$

Weil

$$A = k[[t]]$$

vollständig ist bezüglich der t-adischen Topologie ist die ganze Abschließung

$$\mathcal{O} \subseteq L$$

von k[[t]] in der endlichen Körpererweitung L ein diskreter Bewertungsring.[6] Sein maximales Ideal

$$m = \pi\mathcal{O}$$

wird von einem einzigen Element erzeugt. Die Unbestimmte t läßt sich also in der Gestalt

$$t = u \cdot \pi^m$$

mit einer Einheit u von O. Dabei ist das Produkt aus dem Verzweigungsindex und dem Grad der Restklassenkörpererweiterung gerade gleich dem Grad n der Erweiterung L/k((t)).[7] Weil k algebraisch abgeschlossen ist, folgt

$$m = n.$$

Die Einheit u läßt sich als Potenzreihe in π mit Koeffizienten aus k schreiben, wobei das Absolutglied von Null verschieden ist. Da k algebraisch abgeschlossen ist, läßt sich u auch als n-te Potenz einer Einheit schreiben[8], d.h.

$$t = (v \cdot \pi)^n.$$

Damit gilt

$$k((t))(\sqrt[n]{t}) \subseteq k((\sqrt[n]{t})) \subseteq L.$$

Der Körper links ist nun aber schon vom Grad n über k((t)), d.h. es gilt

$$L = k((t))(\sqrt[n]{t}) = k((t))[T]/(T^n - t).$$

Alternativ kann man den Satz über implizite Funktionen für formale Potenzreihen verwenden[9] oder auch Eigenschaften von Puiseux-Reihen.[10]

---

[6] vgl. Cassels & Fröhlich, Algebraic Number Theory, Chapter I, §4, Proposition 4.2.

[7] vgl. Cassels & Fröhlich, Chapter I, §5, Proposition 5.3.

[8] nach dem Henselschen Lemma.

[9] Für einen Beweis siehe Kurke, Pfister, Roczen: Algebraische Geometrie und Henselsche Ringe, Abschnitt 2.1. Das Buch ist mit Vorsicht zu genießen, denn es ist voller Fehler.

[10] vgl. O.-H. Keller: Vorlesungen über algebraische Geometrie, Kapitel 5, Abschnitt 5.1.2.

QED.

4.1.8 Die natürliche Topolgie der proendlichen Gruppen

Proendliche Gruppen sind in natürlicher Weise mit einer Topologie versehen. Sei

$$G$$

inverser Limes des inversen Systems

$$\{G_\alpha, \phi_{\alpha\beta}: G_\beta \longrightarrow G_\alpha\},$$

wobei die G_α endliche Gruppen seien. Wir versehen die Gruppen G_α mit der diskreten Topologie, deren direktes Produkt

$$\prod_\alpha G_\alpha$$

mit der Produkt-Topologie und schließlich

$$G \subseteq \prod_\alpha G_\alpha$$

mit der Unterraum -Topologie.

Bemerkungen

(i) Die natürlichen Projektionen ϕ_α:$G \longrightarrow G_\alpha$ sind stetige Abbildungen.

(ii) Eine Teilmeng $U \subseteq G$ ist genau dann offen, wenn sie als endlicher Durchschnitt von endlich vielen vollständigen Urbildern bei den ϕ_α geschrieben werden kann.[11]

(iii) Die vollständigen Urbilder bei ϕ_α sind die Vereinigungen von Mengen der Gestalt

$$g\bullet\mathrm{Ker}(\phi_\alpha) \text{ mit } g\in G.$$

Die offenen Umgebungen von 1 sind damit gerade die endlichen Durchschnitte von Kernen der ϕ_α. Da die Index-Menge der α gerichtet ist, gibt es für jede offene Umgebung U des neutralen Elements von G ein α mit

$$1 \in \mathrm{Ker}\, \Phi_\alpha \subseteq U.$$

Wir haben gezeigt:

(iv) Die Kerne der natürlichen Projektionen $G \longrightarrow G_\alpha$ bilden eine <u>Umgebungsbasis</u> von $1 \in G$.

(v) Man kann jedes G_α des inversen System durch den Durchschnitt der Bilder der $\phi_{\alpha\beta}$ - oder, was dasselbe ist, durch die Bilder der natürlichen Abbildungen $G\longrightarrow G_\alpha$ - ersetzen, ohne daß sich der inverse Limes des System ändert. Man kann also stets annehmen, daß die Abbildungen

$$\phi_{\alpha\beta}: G_\beta \longrightarrow G_\alpha$$

des Systems (und damit die Abbildungen $G\longrightarrow G_\alpha$) surjektiv sind. Es gilt dann

$$G \cong \varprojlim G/U,$$

wobei U die offenen Untergruppen durchläuft. Die Gruppen

$$G/U$$

[11] Nach Definiton der Produkt-Topologie und wegen der Diskretheit der Topologien der G_α.

heißen auch die endlichen natürlichen Faktoren oder auch Standard-Faktoren der proendlichen Gruppe G.

4.1.9 Lemma: Die Abgeschlossenheit der inversen Limiten im Produkt
Sei

$$\{G_\alpha, \phi_{\alpha\beta}: G_\beta \longrightarrow G_\alpha\},$$

ein inverses System von diskreten Gruppen. Dann ist der inverse Limes

$$G := \varprojlim_\alpha G_\alpha$$

eine abgeschlossene Untergruppe des direkten Produkts $\prod_\alpha G_\alpha$.

Beweis. Sei $g = (g_\alpha)$ ein Element des Produkts $\prod_\alpha G_\alpha$, welches nicht im inversen Limes G liegt. Wir haben zu zeigen, es gibt eine offene Umgebung

$$U \subseteq \prod_\alpha G_\alpha$$

von g, welche disjunkt ist zu G. Bezeichne $p_\alpha: \prod_\alpha G_\alpha \longrightarrow G_\alpha$ die Projektion auf den α-ten direkten Faktor. Weil g nicht im inversen Limes liegt gibt es zwei Indizes α und β mit

$$\phi_{\alpha\beta}(g_\beta) \neq g_\alpha.$$

Wir setzen

$$U := p_\alpha^{-1}(g_\alpha) \cap p_\beta^{-1}(g_\beta).$$

Dann ist U eine offene Teilmenge des Produkts (weil die Topolgie von G_α und G_β diskret ist). Die Menge U besteht aus allen Familien, deren α-te Koordinate gleich g_α und deren β-te Koordinaten gleich g_β ist. Insbesondere hat U keine Elmente mit dem inversen Limes G gemeinsam.
QED.

4.1.10 Kompaktheit und totale Zusammenhangslosigkeit
Sei G eine proendliche Gruppe. Dann gilt:
(i) G ist kompakt.
(ii) G ist total unzusammenhängend (d.h. die einzigen zusammenhängenden Teilmengen sind die einpunktigen Mengen).
(iii) Die offenen Untergruppen von G sind gerade die abgeschlossenen Untergruppen mit endlichem Index.

Beweis. Zu (i). Endliche Gruppen sind kompakt. Also sind direkte Produkte von endlichen Gruppen kompakt (nach Tichonov). Als abgeschlossene Untergruppe eines solchen direkten Produktes ist dann aber auch G kompakt.
Zu (ii). Sei G inverser Limes des Systems

$$\{G_\alpha, \phi_{\alpha\beta}: G_\beta \longrightarrow G_\alpha\},$$

mit G_α endlich (und diskret) für jedes α.

Für jede zusammenhängende Teilmenge $X \subseteq G$ ist dann das Bild von X in G_α zusammenhängend, also einpunktig (da G_α diskret ist). Also kann auch X nur aus einem Punkt bestehen.
Zu (iii). Sei U eine offene Untergruppe von G. Dann ist U das Komplement der Vereinigung aller Nebenklassen

$$gU, g \in G,$$

mit $gU \neq U$, also Komplement einer offenen Menge, also abgeschlossen. Die Anzahl dieser Nebenklassen muß endlich sein, weil G kompakt ist, d.h. U hat endlichen Index.

Sei umgekehrt $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe mit endlichem Index. Dann ist H das Komplement der endlichen Vereinigung aller Nebenklassen

$$gH, g \in G,$$

mit $gH \neq H$, also Komplement einer abgeschlossenen Mengen, also offen.
QED.

4.1.11 Bemerkung

Die proendlichen Gruppen lassen sich als diejenigen topologischen Gruppen charakterisieren, welche kompakt und total unzusammenhängend sind, vgl. Grünberg [1].

Wir sind jetzt in der Lage, den Hauptsatz der Galois-Theorie für unendliche Körpererweiterungen zu formulieren und zu beweisen. Man beachte, für jede Teilerweiterung L von K/k ist auch K/L eine Galois-Erweiterung, und

$$\mathrm{Gal}(K/L)$$

ist in natürlicher Weise eine Untergruppe der Galois-Gruppe Gal(K/k).

4.1.12 Hauptsatz der Galois-Theorie (Krull)

Seien K/k eine Galois-Erweiterung und $L \subseteq K$ eine Teilerweiterung. Dann ist Gal(K/L) eine abgeschlossene Untergruppe von Gal(K/k). Die Zuordnung

$$\{\text{Teilerweiterungen von } K/k\} \longrightarrow \{\text{abgeschlossene Untergruppen von } \mathrm{Gal}(K/k)\}$$

$$L \mapsto \mathrm{Gal}(K/L)$$

ist eine Bijektion zwischen der Menge der Teilerweiterungen von K/k und den abgeschlossenen Untergruppen von Gal(K/k) mit der Umkehrung

$$H \mapsto K^H.$$

Die offenen Untergruppen entsprechen dabei den endlichen Teilerweiterungen.

Beweis. 1. Schritt: Gal(K/L) ist offen für jede endliche Teilerweiterung L/k von K/k.
Sei L eine endliche Teilerweiterung von K/k. Weil K/k Galoissch,, ist L separabel über k und liegt in einer endlichen Galois-Teilerweiterung M/k von K/k,

$$L \subseteq M.$$

Die Gruppe Gal(M/k) ist eine der endlichen Faktorgruppen von Gal(K/k),

$$\Phi_M: \mathrm{Gal}(K/k) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(M/k),\ \sigma \mapsto \sigma|_M.$$

Sei

$$U_L := \Phi_M^{-1}(\mathrm{Gal}(M/L))$$

das vollständige Urbild der Untergruppe $\mathrm{Gal}(M/L) \subseteq \mathrm{Gal}(M/k)$. Weil Φ_M stetig ist und die Topologie von Gal(M/k) diskret, ist

$$U_L \subseteq Gal(K/k)$$

eine offene Untergruppe.

Behauptung 1: $U_L = Gal(K/L)$.

Nach Definition ist die Einschränkung der Elemente von U_L auf M eine Abbildung, die L elementweise fest läßt. Also gilt

$$U_L \subseteq Gal(K/L).$$

Umgekehrt erhält man durch Einschränken eines Elements von Gal(K/L) auf M eine Abbildung von Gal(M/L), d.h. es besteht die umgekehrte Inklusion.

Wir haben gezeigt, für jede endliche Teilerweiterung L/k von K/k ist die Gruppe

$$U_L = Gal(K/L)$$

offen.

2. Schritt: Gal(K/L) ist abgeschlossen für beliebige Teilerweiterungen L/k von K/k.

Sei L/k eine beliebige Teilerweiterung von K/k. Wir schreiben den Körper L als Vereinigung seiner endlichen Teilerweiterungen L_α,

$$L = \bigcup_\alpha L_\alpha.$$

Für jedes α ist dann $Gal(K/L_\alpha)$ eine offene Untergruppe und als solche auch abgeschlossen (vgl. 4.1.10(iii)). Also ist auch der Durchschnitt

$$\bigcap_\alpha Gal(K/L_\alpha)$$

abgeschlossen. Dieser Durchschnitt ist aber gleich Gal(K/L).

3. Schritt: Für jede abgeschlossene Untergruppe H gilt $Gal(K/K^H) = H$.

Sei $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Wir bezeichnen mit

$$L := K^H$$

den Fixkörper von H. Es gilt dann trivialerweise

$$H \subseteq Gal(K/L).$$

Zum Beweis der Gleichheit betrachten wir ein Element

$$\sigma \in Gal(K/L).$$

Sei

$$U_M := Ker(\Phi_M: Gal(K/k) \longrightarrow Gal(M/k))$$

eine der offenen Mengen der natürlichen Topologie-Basis des neutralen Elements in Gal(K/k).[12] Das Bild von $H \subseteq Gal(K/L)$ bei Φ_M liegt dann in Gal(M/L).

Behauptung 2. $\Phi_M(H) = Gal(M/L)$.

Andernfalls wäre $\Phi_M(H)$ eine echte Untergruppe und hätte einen Fixkörper L', der echt größer ist als L (auf Grund des Hauptsatzes der Galois-Theorie für endliche Erweiterungen),

$$L \subset L' \subseteq M.$$

Nach Definiton von L bleibt aber kein Element von M-L fest bei allen Elementen von H.

[12] d.h. M/k ist eine endliche Galois-Teilerweiterung von K/k.

Aus der gerade bewiesenen Behauptung 2 folgt insbesondere, daß es ein $h\in H$ gibt mit demselben Bild wie σ in Gal(M/L), d.h.

$$h|_M = \sigma|_M ,$$

d.h. $h\sigma^{-1} \in \mathrm{Ker}(\Phi_M) = U_M$, d.h. $h\in \sigma U_M$, d.h.

$$\sigma U_M \cap H \neq \emptyset.$$

Da die U_M eine Umgebungsbasis der 1 in Gal(K/k) bilden, bedeutet dies, jede Umgebung von σ besitzt gemeinsame Punkte von H. Weil H abgeschlossen ist, folgt

$$\sigma\in H.$$

4. Schritt: $K^{\mathrm{Gal}(K/L)} = L$ für jede Teilerweiterung L/k von K/k.
Trivialerweise gilt "$\supseteq$". Beweisen wir "$\subseteq$".

Für jedes $\alpha\in K-L$ besitzt das Minimalpolynom von α über L mindestens zwei Nullstellen (weil es keine mehrfachen Nullstellen besitzt). Diese liegen beide in K (weil K normal über L ist), d.h. es gibt einen L-Automorphismus von K, welcher α in ein von α verschiedenes Element abbildet. Also liegt α nicht in $K^{\mathrm{Gal}(K/L)}$.
5. Schritt: Für offene Untergruppen H ist K^H/k eine endliche Teilerweiterung von K/k.

Sei H eine offene Untergruppe von Gal(K/k). Weil die Untergruppen U_M mit M/k endlich und Galoissch eine Umgebungsbasis der 1 bilden, gibt es ein M mit

$$U_M \subseteq H.$$

Insbesondere gilt mit den obigen Bezeichnungen

$$H = \mathrm{Gal}(K/L)$$

und

$$L = K^H \subseteq K^{U_M} =^{13} K^{\mathrm{Gal}(K/M)} =^{14} M.$$

Insbesondere ist L/k eine endliche Teilerweiterung von K/k.
QED.

4.1.13 Bemerkung
Für unendliche Erweiterungen K/k enthält die Gruppe Gal(K/k) viele Untergruppen, die nicht abgeschlossen sind. Zum Beispiel sind zyklische Untergruppen gewöhnlich nicht abgeschlossen. Als Beispiel kann man die zyklische Untergruppe von $\hat{\mathbb{Z}}$ oder $\hat{\mathbb{Z}}_p$ nehmen, die von 1 erzeugt wird.

4.2. Die Kohomologie der proendlichen Gruppen

4.2.1 Vorbemerkung
In diesem Abschnitt ordnen wir den proendlichen Gruppen

$$G = \varprojlim_{\alpha} G_\alpha$$

[13] nach Definition von U_M

[14] Nach dem 4. Schritt.

ein anderes System von Kohomologie-Gruppen zu, welches vom bisher konstruierten für unendliche G verschieden ist, die proendliche Struktur von G berücksichtigt und für Anwendungen geeigneter ist.

4.2.2 Definition

Unter einem (diskreten) topologischen G-Modul A oder auch stetigen Modul über einer proendlichen Gruppe

$$G = \varprojlim_{\alpha} G_\alpha$$

wollen wir einen G-Modul A verstehen mit der Eigenschaft, daß der Stabilisator

$$\{g \in G \mid ga = a\}$$

für jedes $a \in A$ eine offene Untergruppe von G ist.

Bemerkungen

(i) Wir werden stets annehmen (wenn nicht explizit anders gefordert), daß G-Moduln A mit der diskreten Topologie versehen sind. Die obige Forderung bedeutet dann gerade, daß die Operation

$$G \times A \longrightarrow A,\ (g, a) \mapsto ga,$$

von G auf A eine stetige Abbildung ist,[15] wenn man G mit der proendlichen Topologie versieht.

(ii) Ist $G_\alpha = G/U_\alpha$ einer der natürlichen endlichen Faktoren von G, so ist A^{U_α} in natürlicher Weise ein G_α-Modul. Die natürliche Surjektion

$$\phi_{\alpha\beta}: G_\beta \longrightarrow G_\alpha \text{ (mit } U_\beta \subseteq U_\alpha)$$

zwischen je zwei solchen endlichen Faktoren induziert eine Inflationsabbildung

$$\mathrm{Inf}_\alpha^\beta: H^i(G_\alpha, A^{U_\alpha}) \longrightarrow H^i(G_\beta, A^{U_\beta}) \text{ für jedes } i = 0.$$

Weiter implizieren die Verträglichkeitsbedingungen

$$\phi_{\alpha\gamma} = \phi_{\alpha\beta} \circ \phi_{\beta\gamma}$$

daß die Kohomologie-Gruppen $H^i(G_\alpha, A^{U_\alpha})$ zusammen mit den $\mathrm{Inf}_\alpha^\beta$ ein direktes System bilden im folgenden Sinne.[16]

---

[15] Sei A stetig. Für jedes $a \in A$ und jedes Paar $(g,b) \in G \times A$ mit $gb = a$ ist die Menge

$$\begin{aligned}\{g' \mid g'b = a\} \times \{b\} &= \{g' \mid g'b = gb\} \times \{b\} \\ &= \{g'g^{-1} \mid g'g^{-1}gb = gb\}g \times \{b\} \\ &= \{g' \mid g'gb = gb\}g \times \{b\} \\ &= \{g' \mid g'a = a\}g \times \{b\}\end{aligned}$$

eine offene Teilmenge des Produkts $G \times A$, welche das Urbild (g,b) von a bei der Produkt-Abbildung enthält. Mit anderen Worten, die Produkt-Abbildung $G \times A \longrightarrow A$ ist stetig.

Sei umgekehrt die Produkt-Abbildung stetig. Dann ist für jedes $a \in A$ die Menge

$$\{(g,b) \in G \times A \mid gb = a\}$$

offen in $G \times A$. Das Urbild dieser Menge bei der Einbettung

$$G \hookrightarrow G \times A,\ g \mapsto (g,a),$$

ist dann aber offen in G, d.h. $\{(g,a) \in G \times A \mid ga = a\}$ ist offen in G.

[16] Die Abbildung $\mathrm{Inf}_\alpha^\beta$ kommt im wesentlichen von einer Komplex-Abbildung

$$P_{*\alpha} \longrightarrow P_{*\beta}$$

4.2.3 (Filtrierte) direkte Systeme von abelschen Gruppen

Ein (filtriertes) direkes System oder auch induktives System von abelschen Gruppen besteht aus

1. einer gerichteten halbgeordneten Menge $(\Lambda, \leq)$,
2. einer abelschen Gruppen B_α für jedes $\alpha\in L$,
3. einem Gruppen-Homomorphismus $\psi_{\alpha\beta}: B_\alpha \longrightarrow B_\beta$ für je zwei Elemente $\alpha,\beta\in\Lambda$ mit $\alpha \leq \beta$.

Dabei wird gefordert, daß für je drei $\alpha,\beta,\gamma\in\Lambda$ mit $\alpha\leq\beta\leq\gamma$ gilt

$$\psi_{\alpha\gamma} = \psi_{\beta\gamma}\circ\psi_{\alpha\beta}.$$

Der direkte Limes oder auch induktive Limes eines solchen Systems ist definiert als die Faktorgruppe der direkten Summe

$$\underset{\alpha\in\Lambda}{\overset{\lim}{\longrightarrow}} G_\alpha := \oplus_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha /\langle b_\alpha - \psi_{\alpha\beta}(b_\alpha) \mid \alpha,\beta\in\Lambda\ ,\ \alpha\leq\beta\ ,\ b_\alpha\in B_\alpha \rangle$$

aller B_α nach der Untergruppe, die von allen Elementen der Gestalt

$$b_\alpha - \psi_{\alpha\beta}(b_\alpha) \text{ mit } b_\alpha\in B_\alpha \text{ und } \alpha\leq\beta$$

erzeugt wird.[17] Mit anderen Worten, man identifiziert die Elemente der G_α, die bei einer der Abbildungen $\psi_{\alpha\beta}$ ineinander übergehen.

Bemerkungen

(i) Der Begriff des induktiven Systems für abelsche Gruppen mit Zusatz-Struktur (zum Beispiel der für Ringe oder Moduln) wird analog definiert.

(ii) Für jedes Element x des direkten Limes gibt es ein $\alpha\in\Lambda$ und ein $x_\alpha\in B_\alpha$ derart, daß x die Restklasse des Bildes von x_α in der direkten Summe $\oplus_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$ ist.[18]

(iii) Sind $x_\alpha\in B_\alpha$ und $x_\beta\in B_\beta$ zwei Elemente wie in (ii). Dann repräsentieren diese genau dann dasselbe Element des direkten Limes, wenn es ein $\gamma\in\Lambda$ gibt mit

$$\alpha\leq \gamma \text{ und } \beta \leq \gamma \text{ und } \psi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = \psi_{\beta\gamma}(x_\beta).$$

(iv) Die direkten Systemen bilden eine Kategorie und der direkte Limes ist ein Funktor auf dieser Kategorie mit Wertern in der Kategorie der abelschen Gruppen,

$$\underset{\alpha\in L}{\overset{\lim}{\longrightarrow}} : (\text{direkte Systeme über } \Lambda) \longrightarrow \text{Ab}.$$

---

einer projektiven Auflösung des trivialen $\mathbb{Z}$ über G_α in eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ über G_β, welche die identische Abbildung $\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ fortsetzt. Die Zusammensetzung einer solchen Komplex-Abbildung mit einer analogen Abbildung $P_{*\beta} \longrightarrow P_{*\gamma}$ liefert aber gerade eine Komplex-Abbildung

$$P_{*\alpha} \longrightarrow P_{*\gamma}\ ,$$

die zur Berechung von $\mathrm{Inf}_\alpha^\gamma$ verwendet werden kann.

[17] Man beachte, Minuend und Subrahend sind aus unterschiedlichen direkten Summanden.

[18] Zunächst gibt es endlich viele x_α, so daß deren Summe in $\oplus_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$ das Element x repräsentiert. Da Λ gerichtet, ist kann man aber eine obere Schranke β für diese endlich vielen α in Λ finden. Die Summe der $\psi_{\alpha\beta}(x_\alpha)$ in B_β ist dann ein Element der gesuchten Art.

Expliziter: sind $(B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$ und $(C_\alpha, \rho_{\alpha\beta})$ zwei induktive Systeme zur selben Index-Menge Λ und ist für jedes $\alpha\in\Lambda$ ein Homomorphismus

$$\lambda_\alpha : B_\alpha \longrightarrow C_\alpha$$

gegeben, wobei gelte

$$\lambda_\beta \circ \psi_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} \circ \lambda_\alpha,$$

so hat man einen Homomorphismus

$$\lambda: \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \longrightarrow \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha,\ [(b_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}] \mapsto [(\lambda_\alpha(b_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}],$$

welcher direkter Limes oder auch induktiver Limes der λ_α heißt.

4.2.4 Die Kohomologie der proendlichen Gruppen

Seien $G = \varprojlim_\alpha G_\alpha$ eine proendliche Gruppe und A ein stetiger G-Modul. Für jedes $i \ge 0$ definieren wir die i-te stetige Kohomologie

$$H^i_{cont}(G, A)$$

als direkten Limes über das in 4.2.2 konstruierte direkte System der Inflationsabbildungen

$$\mathrm{Inf}^\beta_\alpha : H^i(G_\alpha, A^{U_\alpha}) \longrightarrow H^i(G_\beta, A^{U_\beta}).$$

Ist insbesondere

$$G = \mathrm{Gal}(k_s/k)$$

die Galois-Gruppe der separablen Abschließung k_s eines Körpers k, so schreiben wir auch

$$H^i(k, A) := H^i_{cont}(\mathrm{Gal}(k_s/k), A)$$

und nennen diese Gruppe i-te Galois-Kohomologie des Körpers k mit Werten in A.

4.2.5 Beispiel

Seiein G eine proendliche Gruppe und $A = \mathbb{Z}$ der triviale Modul über G. Dann gilt

$$H^1_{cont}(G, \mathbb{Z}) = 0.$$

Diese Gruppe ist nämlich der direkte Limes

$$H^1(G/U, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{Ab}(G/U, \mathbb{Z})$$

über die Normalteiler $U \subseteq$ mit endlichem Index. Da G/U eine Torsionsgruppe ist und $\mathbb{Z}$ eine torsionsfreie Gruppe, gibt es nur den trivialen Homomorphismus $G/U \longrightarrow \mathbb{Z}$, d.h. die Hom-Gruppen rechts sind trivial.

4.2.6 Vergleich der stetigen mit der diskreten Kohomologie

(i) Nach Definition ist

$$H^0_{cont}(G, A) = \varinjlim_\alpha H^0(G/U_\alpha, A^{U_\alpha}) = \varinjlim_\alpha (A^{U_\alpha})^{G/U_\alpha} = A^G = H^0(G, A).$$

(ii) Ebenfalls nach Definition gilt für endliche Gruppen G

$$H^i_{cont}(G, A) = H^i(G, A).$$

(iii) Für $i > 0$ und G unendlich sind die Gruppen

$$H^i_{cont}(G, A) \text{ und } H^i(G, A).$$

im allgemeinen verschieden.

Zum Beispiel hat man für i = 1, G = $\hat{\mathbb{Z}}$ und den trivialen G-Modul A = $\mathbb{Q}$:

$$H^1_{cont}(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = 0,$$

weil $\mathbb{Q}$ torsionsfrei ist. Andererseits ist

(1) $$H^1(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}_{Ab}(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q})$$

die Gruppe der Homomorphismen $\hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Nun ist aber $\mathbb{Q}$ eine teilbare abelsche Gruppe (d.h. die Gleichung nx = y mit $n \in\mathbb{N}$ und $y \in\mathbb{Q}$ ist stets lösbar in $\mathbb{Q}$). Deshalb läßt sich jeder Homomorphismus

$$C \longrightarrow \mathbb{Q}$$

einer Untergruppe C einer Gruppe B stets fortsetzen zu einem Homomorphismus $B \longrightarrow \mathbb{Q}$ (vgl. Weibel [1], S. 39, oder Cartan & Eilenberg [1], S.8, man beachte, der Beweis benutzt das Lemma von Zorn). Indem man dies anwendet auf die natürliche Einbettung

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

der Untergruppe $\mathbb{Z}$ von $\hat{\mathbb{Z}}$, sieht man, daß (1) nicht-trivial ist.

4.2.7 Vereinbarung

Von jetzt an wollen wir automatisch unter den Kohomologie-Gruppen von proendlichen Gruppen stets die stetigen Kohomologie-Gruppen verstehen und den Index 'cont' weglassen.

Wir kommen jetzt zur grundlegenden Eigenschaft der Kohomologie der proendlichen Gruppen.

4.2.8 Torsion in der proendlichen Kohomologie

Für jede proendlichen Gruppe und jeden stetigen G-Modul A ist

$$H^i(G, A) \text{ für jedes } i > 0$$

eine Torsionsgruppe.

Ist p eine Primzahl und G eine <u>pro-p-Gruppe</u>, d.h. inverser Limes von Gruppen von p-Potenz-Ordnung, so sind diese Kohomologie-Gruppen sogar p-Torsionsgruppen.

Beweis. Nach 3.3.9 werden die Kohomologie-Gruppen

$$H^i(G/U, A)$$

der endlichen Faktoren G/U von der Gruppen-Ordnung # G/U annulliert. Durch Übergang zum direkten Limes erhält man die Behauptung.[19]

QED.

4.2.9 $\mathbb{Q}$-Vektorräume mit stetiger Gruppen-Operation

Seien G eine proendliche Gruppe und V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit einer stetigen G-Operation. Dann gilt

---

[19] Weil jedes Element von $\varinjlim_{\alpha} B_\alpha$ im Bild eines der Homomorphismen $B_\alpha \longrightarrow \varinjlim_{\alpha} B_\alpha$ liegt.

$$H^i(G, V) = 0 \text{ für jedes } i > 0.$$

Beweis. Aus der Definition der Kohomologie ergibt sich, daß die Kohomologie-Gruppen in der beschriebenen Situation $\mathbb{Q}$-Vektorräume sind. Da sie gleichzeitig Torsionsgruppen sind (im Fall $i > 0$), müssen sie Null sein.
QED.
Bemerkung
Wir erinnern daran, die für die letzten Ergebnisse zentrale Aussage 3.3.9, daß die Kohomologie endlicher Gruppen von der Gruppen-Ordnung annulliert werden, war die Folgerung aus einer Aussage zur Zusammensetzung von Restriktions- und Korestriktionsabbildungen. Wir passen jetzt die Definition dieser Abbildungen an die proendliche Situation an.

4.2.10 Restriktion, Corestriktion und Inflation

Seien G eine proendliche Gruppe, $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und A ein stetiger G-Modul. Die stetige Restriktion

$$\mathrm{Res}: H^i(G, A) \longrightarrow H^i(H,A)$$

ist dann definiert als direkter Limes der gewöhnlichen Restriktionen

$$H^i(G/U_\alpha, A^{U_\alpha}) \longrightarrow H^i(H/H\cap U_\alpha, A^{U_\alpha}).$$[20]

Dabei wird der direkte Limes über die natürlichen endlichen Faktoren G/U_α von G erstreckt.

Sei $H \subseteq G$ eine offene Untergruppe von G. Dann ist die stetige Corestriktion

$$\mathrm{Cor}: H^i(H, A) \longrightarrow H^i(G,A)$$

definiert als direkter Limes der gewöhnlichen Corestriktionen

$$H^i(H/H\cap U_\alpha, A^{U_\alpha}) \longrightarrow H^i(G/U_\alpha, A^{U_\alpha}).$$

Sei schließlich $H \subseteq G$ ein abgeschlossener Normalteiler. Dann ist die stetige Inflation

$$\mathrm{Inf.}\ H^i(G/H, A^H) \longrightarrow H^i(G, A)$$

definiert als direkter Limes der gewöhnlichen Inflationsabbildungen

$$H^i((G/U_\alpha)/(HU_\alpha/U_\alpha), A^H) \longrightarrow H^i(G/U_\alpha, A^{U_\alpha}).$$

Bemerkung
Ist G eine endliche Gruppe, so stimmen die eben definierten stetigen Varianten von Restriktion, Korestriktion und Inflation mit den gewöhnlichen Varianten überein.

4.2.11 Koinduzierte Moduln

Seien G eine proendliche Gruppe, $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und A ein stetiger H-Modul. Dann definiert man den Modul

$$M_H^G(A) := \varinjlim_{\alpha} \mathrm{Hom}_{H/H\cap U_\alpha}(\mathbb{Z}[G/U_\alpha], A^{U_\alpha})$$

als direkten Limes über die offenen Untergruppen U_α von G. In Analogie zu 3.3.1 Operiert G wie folgt auf den Elementen des direkten Limes.

Ist ϕ ein Element des direkten Limes und $\sigma \in G$, so wählen wir einen Repräsentanten

[20] Die Durchschnitte $H\cap U_\alpha$ durchlaufen eine Umgebungsbasis von offenen Untergruppen der 1 von G. Der direkte Limes über diese Durchschnitte ist deshalb derselbe wie der über alle endlichen Faktoren von H.

$$\phi_\alpha : \mathbb{Z}[G/U_\alpha] \longrightarrow A^{U_\alpha}$$

von ϕ (mit einem geeigneten α). Das Element

$$\sigma\bullet\phi$$

des direkten Limes wird dann repräsentiert durch die Abbildung

$$\sigma\bullet\phi_\alpha : \mathbb{Z}[G/U_\alpha] \longrightarrow A^{U_\alpha},\ x \mapsto \phi_\alpha(x\sigma_\alpha)$$

Dabei bezeichne σ_α die Restklasse von σ in G/U_α. Die Operation ist wohldefiniert[21] und stetig[22].

Bemerkungen

(i) Wir verwenden hier in Analogie zu Vereinbarung 4.2.7 eine alte Bezeichnung $M_H^G(A)$ für einen neuen Modul.

(ii) Jedes Element eines stetigen G-Moduls A wird von einer der offenen Untergruppen U_α stabilisiert, d.h. es gilt

$$A = \bigcup A^{U_\alpha}.$$

Die Auswertungsabbildung $\phi \mapsto \phi(1)$ definiert deshalb einen Isomorphismus

$$M_G^G(A) \cong A.$$

(iii) Der Isomorphismus von Shapiro,

$$H^i(G, M^G(A)) \cong H^i(H, A),$$

gilt auf Grund sehr ähnlicher Argumente wie im Fall der nicht-stetigen koinduzierten Moduln.

(iv) Man kann die stetigen Restriktions- und Korestriktionsabbildungen auch mit Hilfe des Shapiro-Isomorphismus definieren, indem man die Konstruktion von Kapitel 3 immitiert.

4.2.12 Die Zusammensetzung von Restriktion und Korestriktion

Seien G eine proendliche Gruppe, $H \subseteq G$ eine offene Untergruppe mit dem Index n und A ein stetiger G-Modul. Dann ist die Zusammensetzung

$$Cor\circ Res: H^i(G, A) \longrightarrow H^i(G, A)$$

für jedes i ≥ gerade die Multiplikation mit n (vgl. 3.3.8).
Insbesondere ist

$$Res: H^i(G, A) \longrightarrow H^i(H, A)$$

injektiv auf der Untergruppe der Elemente von $H^i(G, A)$, deren Torsion teilerfremd ist zu n.[23]

---

[21] Sei ϕ_β ein weiterer Repräsentant von ϕ. Dann gibt es ein γ mit $\alpha \le \gamma$ und $\beta \le \gamma$ und

$$\phi_{\gamma\alpha}{}^\circ\phi_\alpha = \phi_{\gamma\beta}{}^\circ\phi_\beta$$

Dabei bezeichne $\phi_{\gamma\alpha}: G/U_\gamma \longrightarrow G/U_\alpha$ die natürliche Abbildung und $\phi_{\gamma\beta}$ sei analog definiert.
Dann gilt aber auch

$$\phi_{\gamma\alpha}{}^\circ(\sigma\phi_\alpha) = \phi_{\gamma\beta}{}^\circ(\sigma\phi_\beta),$$

d.h. $\sigma\phi_\alpha$ und $\sigma\phi_\beta$ repräsentieren dasselbe Element des direkten Limes.

[22] Verwendet man zur Definition von $\sigma\bullet\phi$ den Repräsentanten ϕ_α, so liegt U_α im Stabilisator von ϕ.

[23] d.h. die von einer natürlichen Zahl annulliert werden, die teilerfremd ist zu n.

Beweis. Nach Konstruktion von Res und Cor als direkte Limiten von Abbildungen bestehen kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^i(G/U_\alpha, A^{U_\alpha}) & \xrightarrow{\text{Cor}\circ\text{Res}} & H^i(G/U_\alpha, A^{U_\alpha}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(G,A) & \xrightarrow{\text{Cor}\circ\text{Res}} & H^i(G,A) \end{array}$$

Dabei sind die vertikalen Abbildungen die natürlichen Abbildungen in den direkten Limes. Jede Element von $H^i(G,A)$ kommt von einem Element von $H^i(G/U_\alpha, A^{U_\alpha})$ (mit einem von Element zu Element verschiedenen α). Nach 3.3.8 ist die obere Zeile gerade die Multiplikation mit n. Also muß das auch für die untere Zeile gelten.
Der zweite Teil der Behauptung kommt von der Tatsache, daß ein Element, welches von zwei verschiedenen teilerfremden natürlichen Zahlen annulliert wird, selbst schon Null ist.
QED.

4.2.13 Kriterium für die Injektivität der Restriktion

Seien G eine proendliche Gruppe, p eine Primzahl und $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe mit der Eigenschaft, daß das natürliche Bild von H in jedem endlichen Faktor von G einen Index hat, der teilerfremd zu p ist.
Dann ist für jeden stetigen G-Modul A die Restriktion

$$H^i(G, A) \longrightarrow H^i(H, A)$$

injektiv auf der p-Torsionsuntergruppe von $H^i(G, A)$.
Beweis. Sei

$$x \in H^i(G, A)$$

ein Element von p-Potenzordnung mit

$$\text{Res}(x) = 0 \text{ in } H^i(H, A).$$

Für jede offene Untergruppe U_α von G liegt dann das Bild von x in $H^i(G/U_\alpha, A^{U_\alpha})$ im Kern der Restriktion

(1) $$H^i(G/U_\alpha, A^{U_\alpha}) \longrightarrow H^i(HU_\alpha/U_\alpha, A^{U_\alpha})$$

Der Index n_α von HU_α/U_α in G/U_α ist nach Voraussetzung teilerfremd zu p. Mit x hat auch das natürliche Bild von x im Definitonsbereich von (1) eine p-Potenzordnung, d.h. eine Ordnung die teilerfremd ist zum Index n_α. Nach 4.2.13 (angewandt auf (1)) ist das Bild von x in

$$H^i(G/U_\alpha, A^{U_\alpha})$$

gleich Null für jedes α. Also ist x selbst schon Null.
QED.

4.2.14 Definition: pro-p-Sylow-Gruppen

Seien G eine proendliche Gruppe und p eine Primzahl. Eine Untergruppe $S \subseteq G$ heißt <u>pro-p-Sylow-Untergruppe</u>, wenn S eine pro-p-Gruppe ist (d.h. inverser Limes von Gruppen von p-Potenzordnung) mit der Eigenschaft, daß das natürlichen Bild von S in jedem endlichen Faktor von G einen Index hat, der teilerfremd ist zu p.

4.2.15 Die Existenz der pro-p-Sylow-Untergruppen

Seien G eine proendliche Gruppe und p eine Primzahl. Dann besitzt G mindestens eine pro-p-Sylow-Untergruppe. Je zwei solche Untergruppen sind konjugiert.

Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

4.2.16 Projektive Limiten von nicht-leeren Mengen

Der projektive Limes eines Systems von nicht-leeren Mengen ist nicht leer.
Beweis. Sei

$$\{X_\alpha, \phi_{\alpha\beta}: X_\beta \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$$

ein projektives System von nicht-leeren Mengen X_α. Falls die Abbildungen $\phi_{\alpha\beta}$ surjektiv sind, so ist der inverse Limes trivialerweise nicht-leer.[24]
Betrachten wir den allgemeinen Fall. Weil X_α endlich ist, gibt es in der Teilmengen-Familie

$$\{\phi_{\alpha\beta}(X_\beta) \mid \beta = \alpha\}$$

ein minimales Element bezüglich der Inklusion, sagen wir

$$Y_\alpha \subseteq X_\alpha.$$

Dann ist

$$\{Y_\alpha, \phi_{\alpha\beta}| X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$$

ein inverses System von Mengen, dessen Abbildungen surjektiv sind und welches denselben inversen Limes besitzt.
QED.

4.2.17 Beweis von 4.2.15

Wir schreiben G als inverses System von endlichen Gruppen G_α,

$$G = \varprojlim_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha.$$

Für jedes α bezeichne

$$S_\alpha$$

die Menge der p-Sylow-Untergruppen von G_α. Zur Theorie der p-Sylow-Untergruppen, siehe S. Lang [1]. Die S_α bilden ein projektives System von Mengen. Nach 4.2.16 gibt es mindestens ein Element in inversen Limes, sagen wir

$$S \in \varprojlim_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha.$$

Nach Konstruktion ist das natürliche Bild von S in G_α ein p-Sylow-Untegruppe von G_α (für jedes α), und S läßt sich mit dem inversen Limes dieser p-Sylow-Untergruppe identifizieren. Insbesondere hat S die Struktur einer pro-p-Sylow-Untergruppe von G.

Sind S und S' zwei pro-p-Sylow-Untergruppen von G, so gehen deren natürliche Bilder in G_α ineinander über bei der Konjugation mit einem geeigneten Element

$$x_\alpha \in G_\alpha.$$

---

[24] Man fixiere ein Element in einem X_α, wähle Urbilder bei den $\phi_{\alpha\beta}$ für alle $\beta = \alpha$ und dann noch Bilder dieser Urbilder bei allen weiteren β.

Bezeichne $X_\alpha \subseteq G_\alpha$ die Menge aller dieser Elemente x_α. Dann bilden die Mengen X_α ein inverses System von Mengen. Dessen inverser Limes X ist nicht leer nach 4.2.16. Für jedes $x \in X$ gehen S und S' ineinander über bei der Konjugation mit x.

4.2.18 Die Restriktionen auf die pro-p-Sylow-Untergruppen

Seien G eine proendliche Gruppe und $S \subseteq G$ eine pro-p-Sylow-Untergruppe. Dann sind die Restriktionen

$$\mathrm{Res}: H^i(G, A) \longrightarrow H^i(S, A)$$

injektiv auf den p-Torsionsuntergruppen für jedes i = 0 und jeden stetigen G-Modul A.
Beweis. Die Untergruppe $S \subseteq G$ genügt den Bedingungen von 4.2.13.
QED.

4.2.19 Das stetige Cup-Produkt

Seien G eine pro-endliche Gruppe und A, B zwei stetige G-Moduln. Dann bezeichne

$$A \otimes B$$

das Tensorprodukt über $\mathbb{Z}$ mit der G-Operation

$$\sigma\bullet(a\otimes b) = (\sigma\bullet a)\otimes(\sigma\bullet b) \text{ für } \sigma\in G,\ a\in A,\ b\in B.$$

Auf diese Weise wird $A\otimes B$ zum stetigen G-Modul.[25] Für jedes offen Untergruppe U von G definiert das Cup-Produkt eine Paarung[26]

$$H^i(G/U, A^U)\times H^j(G/U, B^U) \longrightarrow H^{i+j}(G/U, (A\otimes B)^U),\ (a,b) \mapsto a\cup b.$$

Dabei gilt

$$\mathrm{Inf}(a\cup b) = \mathrm{Inf}(a) \cup \mathrm{Inf}(b).$$

für je zwei offene Untergruppen U, V mit $V \subseteq U$ und die Inflationsabbildungen zur natürlichen Surjektion $G/V \longrightarrow G/U$. Durch Übergang zum direkten Limes erhält man die Cup-Produkt-Abbildung

$$H^i(G, A)\times H^j(G, B) \longrightarrow H^{i+j}(G, A\otimes B),\ (a,b) \mapsto a\cup b.$$

Bemerkungen

(i) Es folgt unmittelbar aus den Eigenschaften des gewöhnlichen Cup-Produkts, daß das stetige Cup-Produkt assoziativ und graduiert kommutativ ist.
Wie das gewöhnliche Cup-Produkt genügt es den Verträglichkeitsformeln mit Restriktion, Korestriktion und Inflation wie in 3.4.12.

(ii) Wie wir sehen werden, ist es auch mit den Zusammenhangshomomorphismen im Sinne von 3.4.10 verträglich. Um das einzusehen, müssen wir jedoch zunächst die lange Kohomologie-Sequenz konstruieren.

4.3 Die Verträglichkeit des Cup-Produkts mit den Zusammenhangshomomorphismen

4.3.1 Die exakte Kohomologie-Sequenz

Seien G eine proendliche Gruppe und

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

---

[25] Jedes Element von $A\otimes B$ ist Summe von endlich vielen Elementen der Gestalt $a\otimes b$. Die Elemente a und b werden jeweils von einer offenen Untergruppe $U \subseteq G$ stabilisiert. Der Stabilisater eines jeden Elements von $A\otimes B$ enthält somit den Durchschnitt von endlich vielen offenen Untergruppen, also eine offene Untergruppe, und ist somit selbst offen.

[26] Wir verwenden die natürlichen Abbildung $A^U\times B^U \longrightarrow (A\otimes B)^U$.

eine exakte Sequenez von stetigen G-Moduln. Dann besteht eine lange exakte Sequenz von abelschen Gruppen

$$\ldots \longrightarrow H^i(G, A) \longrightarrow H^i(G, B) \longrightarrow H^i(G, C) \longrightarrow H^{i+1}(G, A) \longrightarrow \ldots$$

(welche mit $H^0(G, A)$ beginnt).

Zum Beweis benötigen wir zunächst einige formale Eigenschaften direkter Limites.

4.3.2 Exaktheit des direkten Limes-Funktors

Seien $(A_\alpha, \phi_{\alpha\beta})$, $(B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$ und $(C_\alpha, \rho_{\alpha\beta})$ drei direkte Systeme zur selben Index-Menge Λ. Weiter sei für jedes $\alpha\in\Lambda$ eine exakte Sequenz

$$A_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} B_\alpha \xrightarrow{\mu_\alpha} C_\alpha$$

von stetigen G-Moduln geben mit der Eigenschaft, daß das folgende Diagramm kommutativ ist für je zwei Indizes $\alpha, \beta\in\Lambda$ mit $\alpha \le \beta$.

$$\begin{array}{ccccc}
A_\alpha & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & B_\alpha & \xrightarrow{\mu_\alpha} & C_\alpha \\
\phi_{\alpha\beta}\downarrow & & \psi_{\alpha\beta}\downarrow & & \rho_{\alpha\beta}\downarrow \\
A_\beta & \xrightarrow{\lambda_\beta} & B_\beta & \xrightarrow{\mu_\alpha} & C_\alpha
\end{array}$$

Dann ist auch die Limes-Sequenz

$$\varinjlim_{\alpha} A_\alpha \xrightarrow{\lambda} \varinjlim_{\alpha} B_\alpha \xrightarrow{\mu} \varinjlim_{\alpha} C_\alpha$$

exakt.

Beweis. Das Lemma folgt unmittelbar aus der Beschreibung der Elemente des direkten Limes in den Bemerkungen 4.2.3 (ii) und 4.2.3 (iii).

QED.

Für die nachfolgende Aussage benötigen wir einige im Anhang A2 bewiesenen Eigenschaften direkter Limites.

4.3.3 Verträglichkeit der Kohomologie mit direkten Limites

Seien G eine proendliche Gruppe und $(A_\alpha, \phi_{\alpha\beta})$ ein direktes System von stetigen G-Moduln. Insbesondere sollen die $\phi_{\alpha\beta}$ G-Homomorphismen sein. Dann gilt:

(i) $\varinjlim_{\alpha} A_\alpha$ ist ein stetiger G-Modul.

(ii) Die Gruppen $H^i(G, A_\alpha)$ bilden zusammen mit den durch die $\phi_{\alpha\beta}$ induzierten Abbildungen ein direktes System von abelschen Gruppen.

(iii). Es besteht ein natürlicher Isomorphismus

$$\varinjlim_{\alpha} H^i(G, A_\alpha) \xrightarrow{\cong} H^i(G, \varinjlim_{\alpha} A_\alpha).$$

Beweis. Zu (i). Sei $x \in \varinjlim_{\alpha} A_\alpha$. Wir haben zu zeigen, der Stabilisator von x,

$$\mathrm{Stab}(x) := \{gx \mid gx = x\},$$

ist eine offene Teilmenge von G. Sei

$$x_\alpha \in A_\alpha$$

ein Repräsentant von x. Nach Definition des stetigen G-Moduls gibt es dann einen offenen Normalteiler $U \subseteq G$ mit[27]

$$Ux_\alpha = \{x_\alpha\}.$$

Dann gilt aber auch $Ux = \{x\}$, d.h. $U \subseteq \mathrm{Stab}(x)$. Weil Stab(x) eine Untergruppe von G ist, ist damit Stab(x) sogar offen.

Zu (ii). Jede der Abbildungen

$$\phi_{\alpha\beta}: A_\alpha \longrightarrow A_\beta \text{ mit } \alpha \le \beta$$

ist ein ein G-Homomorphismus, induziert also Abbildungen

$$(1) \qquad H^i(G, A_\alpha) \longrightarrow H^i(G, A_\beta),$$

Für je drei Indizes mit $\alpha \le \beta \le \gamma$ haben wir weiter ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & A_\alpha \arrow[dl, "\phi_{\alpha\beta}"'] \arrow[dr, "\phi_{\alpha\gamma}"] & \\ A_\beta \arrow[rr, "\phi_{\beta\gamma}"] & & A_\gamma \end{tikzcd}$$

von Moduln über G. Durch Übergang zur Kohomologie erhalten wir die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} & H^i(G, A_\alpha) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ H^i(G, A_\beta) \arrow[rr] & & H^i(G, A_\gamma) \end{tikzcd}$$

Mit anderen Worten, die Abbildungen (1) bilden ein projektives System.

Zu (iii). Seien $U \subseteq G$ ein offener Normalteiler von G und

$$P_*^U \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

die projektive Standard-Auflösung des trivialen Moduls $\mathbb{Z}$ über G/U (vgl. 3.2.1). Für jeden offenen Normalteiler $V \subseteq G$ mit $V \subseteq U$ ist dies auch eine exakte Sequenz von Moduln über G/V und die natürlichen Surjektion $G/V \longrightarrow G/U$ induziert einen (surjektiven) Komplex-Morphismus

$$P_*^V \longrightarrow P_*^U$$

über der identischen Abbildung $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Für je drei offene Normalteiler $U, V, W \subseteq G$ mit

$$W \subseteq V \subseteq U$$

ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P_*^W \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ P_*^V \arrow[rr] & & P_*^U \end{tikzcd}$$

kommutativ. Wir wenden den Funktor $\mathrm{Hom}_G(?, A_\alpha)$ an und erhalten ein kommutatives Diagramm

[27] Weil die offenen Normalteiler von G eine Umgebungsbasis von $1 \in G$ bilden.

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Hom}_G(P_*^W, A_\alpha) & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \mathrm{Hom}_G(P_*^V, A_\alpha) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_G(P_*^U, A_\alpha) \end{array}$$

Die Komplexe $\mathrm{Hom}_G(P_*^U, A_\alpha)$ bilden also (für jedes feste α) ein direktes System von abelschen Gruppen. Es folgt

$$\varinjlim_U \mathrm{Hom}_G(P_*^U, A_\alpha) = \mathrm{Hom}_G(\varprojlim_U P_*^U, A_\alpha).$$

und

$$\varinjlim_\alpha \varinjlim_U \mathrm{Hom}_G(P_*^U, A_\alpha) = \mathrm{Hom}_G(\varprojlim_U P_*^U, \varinjlim_\alpha A_\alpha) = \varinjlim_U \mathrm{Hom}_G(P_*^U, \varinjlim_\alpha A_\alpha)$$

Als exakter Funktor kommutiert der direkte Limes mit der Bildung von Kernen und Kokernen, also auch mit dem Übergang zur Kohomologie. Wir erhalten

$$\varinjlim_\alpha \varinjlim_U H^i(\mathrm{Hom}_G(P_*^U, A_\alpha)) = \varprojlim_U H^i(\mathrm{Hom}_G(P_*^U, \varinjlim_\alpha A_\alpha)),$$

d.h.

$$\varinjlim_\alpha \varinjlim_U H^i(G/U, A_\alpha) = \varprojlim_U H^i(G/U, \varinjlim_\alpha A_\alpha),$$

d.h.

$$\varinjlim_\alpha H^i(G, A_\alpha) = H^i(G, \varinjlim_\alpha A_\alpha).$$

QED.

4.3.4 Beweis von 4.3.1

Die Homomorphismen

$$H^i(G, A) \longrightarrow H^i(G, B) \text{ und } H^i(G, B) \longrightarrow H^i(G, C)$$

ergeben sich aus dem endlichen Fall,

$$H^i(G/U, A^U) \longrightarrow H^i(G/U, B^U) \text{ und } H^i(G/U, B^U) \longrightarrow H^i(G/U, C^U)$$

(U offener Normalteiler) durch Übergang zum direkten Limes.

<u>1. Schritt</u>. Konstruktion des Zusammenhangshomomorphismus

(1) $$\partial: H^i(G, C) \longrightarrow H^{i+1}(G, A)$$

betrachten wir einen offenen Normalteiler $U \subseteq G$ und setzen

$$K_U := \mathrm{Koker}(B^U \longrightarrow C^U).$$

Da B und C stetige G-Moduln ist, lassen sie sich als Vereinigung aller B^U bzw. aller C^U schreiben. Aus der Exaktheit der Sequenz

$$B^U \longrightarrow C^U \longrightarrow K_U \longrightarrow 0$$

erhalten wir durch Übergang zum direkten Limes

$$B \longrightarrow C \longrightarrow \varinjlim_U K_U \longrightarrow 0.$$

Weil $B \longrightarrow C$ nach Voraussetzung surjektiv ist, folgt

(2) $$\varinjlim_U K_U = 0.$$

Aus der langen Kohomologie-Sequenz zur kurzen exakten Sequenz[28]

$$0 \longrightarrow B^U/A^U \longrightarrow C^U \longrightarrow K_U \longrightarrow 0$$

erhalten wir durch Übergang zum direkten Limes die exakte Sequenz

$$\varinjlim_U H^{i-1}(G/U,K_U) \longrightarrow \varinjlim_U H^i(G/U,B^U/A^U) \longrightarrow \varinjlim_U H^i(G/U,C^U) \longrightarrow \varinjlim_U H^i(G/U,K_U).$$

Wegen (2) sind die Limites rechts und links gleich Null,[29] die mittlere Abbildung also ein Isomorphismus:

(3) $$\varinjlim_U H^i(G/U, B^U/A^U) \xrightarrow{\cong} H^i(G, C).$$

Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A^U \longrightarrow B^U \longrightarrow B^U/A^U \longrightarrow 0$$

liefert für jeden offenen Normalteiler U den Zusammenhangshomomophismus

(4) $$H^i(G/U, B^U/A^U) \longrightarrow H^{i+1}(G/U, A^U).$$

Mit Hilfe von (3) und (4) definieren wir jetzt wie folgt den Zusammenhangshomomorphimus (1). Für vorgegebenes

$$\gamma \in H^i(G, C)$$

wählen wir ein Urbild bei der Abbildung (3). Dieses wird repräsentiert durch ein Element

$$\gamma' \in H^i(G/U, B^U/A^U) \text{ für ein } U.$$

Das Bild von γ' bei der Abbildung (4) repräsentiert ein Element des zugehörigen direkten Limes. Dieses definieren wir als das Bild von γ beim Zusammenhangshomomorphismus (1).

$$\partial\gamma \in \varinjlim_U H^{i+1}(G/U, A^U) = H^{i+1}(G, A).$$

<u>2. Schritt</u>: Korrektheit der Definiton der Abbildung (1).
Für je zwei Repräsentanten γ' des Urbilds von γ bei (3) gibt es einen offenen Normalteiler V von G derart, daß die Bilder dieser Repräsentanten in $H^i(G/V, B^V/A^V)$ übereinstimmen. Ihre Bilder bei (4) repräsentieren deshalb dasselbe Element des direkten Limes.

Damit ist die lange Kohomologie-Sequenz konstruiert. Wir haben noch deren Exaktheit zu beweisen.

<u>3. Schritt</u>: Exaktheit an der Stelle $H^i(G, B)$.
Die Komposition

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

ist nach Voraussetzung Null. Also gilt dasselbe auch für die Kompositionen

$$A^U \longrightarrow B^U \longrightarrow C^U$$

und

$$H^i(G/U, A^U) \longrightarrow H^i(G/U, B^U) \longrightarrow H^i(G/U, C^U).$$

Durch Übergang zum direkten Limes erhalten wir, die Komposition

---

[28] Wir identifizieren A mit einem Teilmodul von B. Dann gilt

$$\mathrm{Kern}(B^U \longrightarrow C^U) = \mathrm{Ker}(B \longrightarrow C) \cap B^U = A \cap B^U = A^U.$$

[29] Wir ordnen die Menge der Produkte U×V von je zwei offenen Normalteilern von G mit $V \subseteq U$ durch Inklusion. Die Mengen der Produkte der Gestalt U×U ist dann kofinal in dieser Menge. Deshalb gilt

$$\varinjlim_U H^i(G/U, K_U) = \varinjlim_V \varinjlim_U H^i(G/V, K_U) = \varinjlim_V H^i(G/V, \varinjlim_U K_U) = \varinjlim_V H^i(G/V, 0) = 0.$$

$$H^i(G, A) \longrightarrow H^i(G, B) \longrightarrow H^i(G, C).$$

ist Null, d.h. das Bild der linke Abbildung liegt im Kern der rechten. Wir haben noch die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei

$$\gamma \in H^i(G, B)$$

im Kern der rechten Abbildung. Das bedeutet, ein Repräsentant $\tilde{\gamma}$ von γ liegt im Kern einer der Abbildungen

$$H^i(G/U, B^U) \longrightarrow H^i(G/U, C^U).$$

Jede dieser Abbildungen faktorisiert sich über $H^i(G/U, B^U/A^U)$. Wegen (3) ist das Bild von $\tilde{\gamma}$ in einer dieser letzteren Kohomologie-Gruppen Null. Deshalb kann man den Repräsentanten $\tilde{\gamma}$ so abändern, daß er im Bild einer der Abbildungen

$$H^i(G/U, A^U) \longrightarrow H^i(G/U, B^U).$$

liegt (wegen der langen Kohomologie-Sequenz zu $0 \longrightarrow A^U \longrightarrow B^U \longrightarrow B^U/A^U \longrightarrow 0$). Das zugehörige Urbild repräsentiert im direkten Limes $H^i(G, A)$ das gesuchte Urbild von γ.

<u>4. Schritt</u>: Exaktheit an der Stelle $H^i(G, A)$.
Zeigen wir zunächst, die Abbildung

(5) $$H^{i-1}(G, C) \longrightarrow H^i(G,A) \longrightarrow H^i(G, B)$$

ist die Null-Abbildung. Sei $\gamma \in H^{i-1}(G, C)$ ein vorgegebenes Element und

$$\tilde{\gamma} \in H^{i-1}(G/U, B^U/A^U)$$

ein Repräsentant von γ (vgl. (3)). Die Zusammensetzung

$$H^{i-1}(G/U, B^U/A^U) \longrightarrow H^i(G/U, A^U) \longrightarrow H^i(G/U, A^U)$$

ist die Null-Abbildung (wegen der Exaktheit der Kohomologie-Sequenz zu $0 \longrightarrow A^U \longrightarrow B^U \longrightarrow B^U/A^U \longrightarrow 0$). Das Bild von $\tilde{\gamma}$ bei dieser Abbildung ist aber ein Repräsentant des Bildes von γ bei (5). Also ist (5) die Null-Abbildung.

Wir haben noch zu zeigen, der Kern der rechten Abbildung von (5) liegt im Bild der linken Abbildung. Sei also

$$\alpha \in \mathrm{Ker}(H^i(G,A) \longrightarrow H^i(G, B)).$$

Dann gibt es einen Repräsentanten $\tilde{\alpha}$ von α, welcher im Kern einer Abbildung der Gestalt

$$H^{i-1}(G/U, A^U) \longrightarrow H^i(G/U, B^U).$$

liegt, also im Bild von (4). Sei

$$\alpha' \in H^i(G/U, B^U/A^U)$$

ein Urbild von $\tilde{\alpha}$. Da repräsentiert α' ein Element von $H^{i-1}(G, C)$ (vgl. (4)), dessen Bild in $H^i(G, A)$ gerade das vorgegebene Element α ist.

<u>5. Schritt</u>: Exaktheit an der Stelle $H^i(G, C)$.
Wir haben zu zeigen,

(6) $$H^{i-1}(G, B) \longrightarrow H^{i-1}(G, C) \longrightarrow H^i(G,A)$$

ist die Null-Abbildung. Sei

$$\beta \in H^{i-1}(G, B)$$

beliebig. Wir wählen einen Repräsentanten

$$\tilde{\beta} \in H^{i-1}(G/U, B^U).$$

von β. Dessen Bild bei

(7) $$H^{i-1}(G/U, B^U) \longrightarrow H^{i-1}(G/U, B^U/A^U) \longrightarrow H^i(G/U, A^U).$$

repräsentiert gerade das Bild von β bei (6). Die Abbildung (7) ist aber die Null-Abbildung (wegen der Exaktheit der Kohomologie-Sequenz zu $0 \longrightarrow A^U \longrightarrow B^U \longrightarrow B^U/A^U \longrightarrow 0$).

Es bleibt noch zu zeigen, der Kern der rechten Abbildung von (6) liegt im Bild der linken Abbildung.

Sei

$$\gamma \in \mathrm{Ker}(H^{i-1}(G, C) \longrightarrow H^i(G,A)).$$

Dann gibt es einen Repräsentanten $\tilde{\gamma} \in H^{i-1}(G/U, B^U/A^U)$, welches im Kern der Abbildung (4) liegt (mit i-1 anstelle von i). Dann liegt aber $\tilde{\gamma}$ auch mit Bild von

$$H^{i-1}(G/U, B^U) \longrightarrow H^{i-1}(G/U, B^U/A^U).$$

Sie γ' ein Urbild von $\tilde{\gamma}$. Diese repräsentiert ein Element von $H^{i-1}(G, B)$, dessen Bild gerade das vorgegebene Element γ ist.

QED.

4.3.5 Bemerkungen

(i) Eine elegantere Methode, das obige Ergebnis zu beweisen, besteht darin, die stetigen Kohomologie-Gruppen direkt als Ext-Gruppen in der Kategorie der stetigen G-Moduln zu konstruieren. Die lange exakte Kohomologie-Sequenz ist dann eine formale Konsequenz, genau so wie im vorigen Kapitel. Wir haben den obigen etwas mühseligeren Weg gewählt um zu betonen, daß alle grundlegenden Fakten zur Kohomologie der proendlichen Gruppen aus dem endlichen Fall durch Übergang zum Limes folgen.

(ii) Man beachte die wichtige Tatsache, im Spezialfall, daß die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

zerfällt, d.h. es gibt einen G-Modul-Homomorphismus $s:C \longrightarrow B$ mit $p \circ s = \mathrm{Id}$, so gilt auf Grund der Funktorialität der Kohomologie dasselbe auch für die induzierten Abbildungen

$$p_*: H^i(G, B) \longrightarrow H^i(G, C) \text{ und } i_*: H^i(G, C) \longrightarrow H^i(G, B),$$

d.h. die lange Kohomologie-Sequenz zerfällt in kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow H^i(G, A) \longrightarrow H^i(G, B) \longrightarrow H^i(G, C) \longrightarrow 0.$$

Wir werden dies im folgenden häufig anwenden.

(iii) Die exakten Sequenzen des vorigen Kapitels, welchen Inflation und Restriktion miteinander verbinden (vgl. 3.3.18), bestehen auch im Fall der stetigen Kohomologie:

4.3.6 Folgerung: Die Inf-Res-Sequenzen

Seien G eine proendliche Gruppe, $H \subseteq G$ ein abgeschlossener Normalteiler und A ein stetiger G-Modul. Weiter sei $i > 1$ eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß die Gruppen

$$H^j(H, A) = 0 \text{ für } j = 1, 2, \dots, i-1$$

trivial sind. Dann gibt es einen natürlichen Homomorphismus

$$\rho_{i,A}: H^i(H, A)^{G/H} \longrightarrow H^{i+1}(G/H, A^H),$$

welcher Bestandteil der folgenden exakten Sequenz ist

$$0 \longrightarrow H^i(G/H, A^H) \xrightarrow{Inf} H^i(G,A) \xrightarrow{Res} H^i(H, A)^{G/H} \longrightarrow H^{i+1}(G/H, A^H) \xrightarrow{Inf} H^{i+1}(G,A).$$

Beweis. Die Aussage ergibt sich aus 3.3.18 und der Tatsache, daß der direkte Limes-Funktor exakt ist (vgl. 4.3.2).
QED.

4.3.7 Folgerung: Kummer-Theorie

Seien k ein Körper und m eine natürche Zahl, die teilerfremd zur Charakteristik von k ist. Dann besteht ein natürlicher Isomorphismus

$$k^{\times}/k^{\times m} \cong H^1(k, \mu_m).$$

Dabei bezeichnet μ_m die Gruppe der m-ten Einheitswurzeln (in einer fixierten separablen Abschließung k_s von k) mit der Operatation der Galois-Gruppe $G = G(k_s/k)$, welche von der Operation von G auf k_s kommt.

Zum Beweis benötigen wir eine stetige Version des Satzes 90 von Hilbert:

4.3.8 Der stetige Satz 90 von Hilbert

$H^1(k,k_s^{\times}) = 0$ für jeden Körper k.

Beweis. Sei K/k eine endliche Galois-Erweiterung mit $K \subseteq k_s$. Dann bestehen für

$$U = Ker(G := G(k_s/k) \longrightarrow G(K/k)) = G(k_s/K)$$

die natürlichen Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^1(G/U, k_s^{\times U}) &= H^1(G(K/k), k_s^{\times} \cap k_s^U) \\ &= H^1(G(K/k), k_s^{\times} \cap K) && \text{(Galois-Theorie,4.1.12)} \\ &= H^1(G(K/k), K^{\times}) \\ &= 0 && \text{(Satz 90 von Hilber).} \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt durch Übergang zum direkten Limes.
QED.

4.3.9 Beweis des Satzes von Kummer 4.3.7

Wir betrachten die exakte Sequenz von stetigen Moduln über $G = G(k_s/k)$:

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow k_s^{\times} \xrightarrow{m} k_s^{\times} \longrightarrow 1,$$

wobei hier das m über dem Pfeil den Übergang zur m-ten Potenz bezeichne. Man beachte, letztere Abbildung ist surjektiv, weil m teilerfremd zur Charakteristik von k ist: $x^m - a$ ist deshalb ein separables Polynom über k_s für jedes $a \in k_s$, hat also in der separablen Abschließung k_s eine Nullstelle. Auf Grund der zugehörigen langen Kohomologie-Sequenz erhalten wir die Exaktheit von

$$H^0(k, k_s^{\times}) \xrightarrow{m} H^0(k, k_s^{\times}) \longrightarrow H^1(k, \mu_m) \longrightarrow H^1(k, k_s^{\times}).$$

Die Kohomologie-Gruppe rechts ist Null nach 4.3.8. Die beiden Kohomologie-Gruppen links sind gleich

$$H^0(k, k_s^\times) = (k_s^\times)^G = k^\times$$

und die Abbildung links besteht gerade im Erheben in die m-te Potenz.

4.3.10 Bemerkung

Man beachte, es war an dieser Stelle wesentlich, daß wir die separable Erweiterung k_s und die Galois-Kohomolgie verwendet haben: im endlichen Fall steht uns eine kurze exakte Sequenz wie die obige nicht zur Verfügung.

Als Folgerung aus dem obigen Satz von Kummer geben wir Kummers ursprüngliche Formulierung der Aussage an.

4.3.11 Folgerung: Kummer-Theorie II

Seien k ein Körper und m einer zur Charakteristik von k teilerfremde natürliche Zahl. Wir nehmen weiter an, k enthält eine primitive m-te Einheitswurzel ω. Dann hat jede endliche Galois-Erweiterung von k mit einer zu $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ isomorphen Galois-Gruppe die Gestalt

$$k(\alpha)/k_s^\times \text{ und } \alpha^m \in k^\times$$

mit $\alpha\in k$.

Beweis. Eine Galois-Erweiterung der angegebenen Art entspricht einer Faktorgruppe von

$$G = G(k_s/k),$$

die isomorph ist zu $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Betrachten wir die zugehörige Surjektion

$$\lambda: G \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Nach Voraussetzung gilt $\mu_m \subseteq k^\times$, also

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) &= H^1(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \text{ (weil G trivial operiert auf } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \\ &= H^1(k, \mu_m). \end{aligned}$$

Die zweite Isomorphie hängt von der Wahl von ω ab. Nach 4.3.7 entspricht λ gerade der Restklasse eines $a \in k^\times$ modulo $k^{\times m}$. Wir wählen für α eine m-te Wurzel aus a. Die Definition des Zusammenhangshomomorphismus

$$k^\times \longrightarrow H^1(k, \mu_m),\ a \mapsto \alpha \mapsto (\sigma \mapsto \alpha/\sigma(\alpha))$$

zeigt dann,

$$\mathrm{Ker}(\lambda) = \{\sigma\in G \mid \alpha/\sigma(\alpha) = 1\} = \{\sigma\in G \mid \sigma|_{k(\alpha)} = \mathrm{Id}\ \} = G(k_s/k(\alpha)),$$

Die zugehörige Körpererweiterung ist also

$$(k_s)^{\mathrm{Ker}(\lambda)} = k(\alpha).$$

QED.

4.3.12 Folgerung: Artin-Schreier-Theorie

Seien k ein Körper der Charakteristik p > 0 und bezeichne $\wp$ den Endomorphismus

$$\wp: k \longrightarrow k,\ x \mapsto x^p - x,$$

der additiven Gruppe von k. Dann besteht ein natürlicher Isomorphismus

$$k/\wp(k) \cong H^1(k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma, welches manchmal auch additive Version des Satzes 90 von Hilbert genannt wird, denn es betrachtet die additive Gruppe des Körpers k_s (betrachtet als $G(k_s/k)$-Modul) anstelle der multiplikativen.

4.3.13 Der additve Satz 90 von Hilbert

Für jeden Körper k und jede natürliche Zahl i (> 0) gilt

$$H^i(k, k_s^+) = 0.$$

Beweis. Sei K/k eine Galois-Erweiterung des endlichen Grades n mit der Gruppe

$$G := G(K/k) = \{1 = \sigma_1,...,\sigma_n\}.$$

Nach dem Satz über die Normalbasis gibt es ein Element $x\in K$ mit der Eigenschaft, daß die Elemente

$$\sigma_1(x), \dots , \sigma_n(x) \in K$$

eine k-Vektorraumbasis von K bilden. Mit anderen Worten, als G-Modul ist K isomorph zu

$$K \cong k\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G] \cong M^G(A)$$

Die zweite Isomorphie ergibt sich dabei aus 3.3.5 (iii). Nun sind aber koinduzierte Moduln kohomologisch trivial (nach dem Lemma von Schapiro 3.3.3), d.h. es es gilt

$$H^i(G(K/k), K) = 0$$

für jede endliche Galois-Erweiterung. Wir gehen zum direkten Limes über und erhalten so die Behauptung.

QED.

Bemerkung

In der Charakteristik 0 kommt man ohne den Satz über die Normalbasis aus: der Koeffizienten-Modul k_s ist in diesem Fall ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Man kann also 4.2.9 anwenden. Wir benötigen hier aber den Fall der Charakteristik p > 0.

4.3.14 Beweis von 4.3.12

Der Endomorphismus $\wp$ läßt sich auf die additive Gruppe der separablen Abschließung fortsetzen,

(1) $\wp: k_s^+ \longrightarrow k_s^+, x \mapsto x^p - x.$

Sein Kern ist gerade der Primkörper

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

mit p Elementen. Außerdem ist die Abbildung (1) surjektiv, denn für jedes $a\in k_s$ ist das Polynom $x^p - x - a$ separabel, hat also eine Nullstelle in k_s. Wir erhalten so eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_p \longrightarrow k_s^+ \xrightarrow{\wp} k_s^+ \longrightarrow 0$$

von stetigen G-Moduln. Aus der zugehörigen langen Kohomologie-Sequenz und dem additiven Satz 90 von Hilbert erhalten wir die Behauptung.

4.3.15 Bemerkungen

(i) In analoger Weise wie beim Beweis von 4.3.11 zeigt man, daß jede endliche Galois-Erweiterung von k mit der Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ die Gestalt $k(\alpha)/k$ hat mit einer Nullstelle α eines Polynoms der Gestalt $x^p - x - a$ mit $a \in k$.

(ii) Es gibt eine Verallgemeinerung des Artin-Schreier-Theorems auf den Fall von Potenzen von p, welche auf Witt zurückgeht. Die Beweis-Idee ist dieselbe wie oben. Anstelle der additiven Gruppe von k_s hat man sogenannte Witt-Vektoren zu verwenden (vgl. Serre [2]).

4.4 Eine alternative Beschreibung der Brauer-Gruppe

Das Hauptziel dieses Abschnitts besteht darin, die Brauer-Gruppe eines Körpers k mit der Galois-Kohomologie-Gruppe $H^2(k, k_s^\times)$ zu identifizieren - einer Kohomologie-Gruppe, welche zugänglicher ist als die Gruppe $H^1(k,, PGL_\infty)$, welche in Kapitel 2 aufgetreten ist. Zu diesem Zweck haben wir zunächst die nicht-kommutative exakte Sequenz von 2.6.1 fortzusetzen.

4.4.1 Eine nicht-kommutative exakte Sequenz

Seien G eine Gruppe und

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 1$$

eine exakte Sequenz von Gruppen mit G-Operation. Dabei seien B und C nicht notwendig kommutativ. Von A setzen wir voraus, daß es sich um eine kommutative Gruppe handelt, die ganz im Zentrum von B liegt,

$$A \subseteq C(B).$$

Dann besteht eine exakte Sequenz von punktierten Mengen

$$1 \longrightarrow A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G \longrightarrow H^1(G, A) \longrightarrow H^1(G, B) \longrightarrow H^1(G, C) \longrightarrow H^2(G,A).$$

Beweis. Abgesehen vom letzten Glied wurde die Sequenz bereits konstruiert und deren Exaktheit bewiesen (vgl. 2.6.1).

<u>Konstruktion der Abbildung</u> ?: $H^1(G, C) \longrightarrow H^2(G,A)$.

Seien $[c] \in H^1(G, C)$ eine beliebige Kohomologie-Klasse und

$$c: G \longrightarrow C, \sigma \mapsto c_\sigma,$$

ein repräsentierender 1-Kozyklus. Für jedes $c_\sigma \in C$ wählen wir ein Urbild

$$b_\sigma \in B$$

bei der gegebenen Surjektion $B \longrightarrow C$. Weil c ein Kozyklus ist, liegt für je zwei Elemente $\sigma, \tau \in G$ das Element

$$b_\sigma \sigma(b_\tau) b_{\sigma\tau}^{-1}$$

im Kern der Abbildung $B \longrightarrow C$, also im Bild von $A \longrightarrow B$. Weil letztere Abbildung injektiv ist, können wir A mit einer Untergruppe von B identifizieren und annehmen,

$$a_{\sigma,\tau} := b_\sigma \sigma(b_\tau) b_{\sigma\tau}^{-1} \in A.$$

Die Abbildung

(1) $$G\times G \longrightarrow A, (\sigma, \tau) \mapsto a_{\sigma,\tau},$$

hängt nur von der Kohomolgie-Klasse [c] von c ab: wenn wir nämlich den Kozyklus c ersetzen durch den Kozyklus

$$\sigma \mapsto \gamma^{-1} c_\sigma \sigma(\gamma)$$

(mit $\gamma \in C$), so erhalten wir anstelle von $a_{\sigma,\tau}$ ein Element

$$
\begin{aligned}
&(\beta^{-1} b_\sigma \sigma(\beta))\sigma(\beta^{-1} b_\tau \tau(\beta))(\beta^{-1} b_{\sigma\tau} \sigma\tau(\beta))^{-1}\\
&\quad = \beta^{-1} b_\sigma \sigma(b_\tau \tau(\beta))\sigma\tau(\beta^{-1}) b_{\sigma\tau}^{-1} \beta\\
&\quad = \beta^{-1} b_\sigma \sigma(b_\tau) b_{\sigma\tau}^{-1} \beta\\
&\quad = \beta^{-1} a_{\sigma,\tau} \beta
\end{aligned}
$$

mit einer Anhebung β von γ entlang $B \longrightarrow C$.[30] Weil A im Zentrum von B liegen soll, ist der letzte Ausdruck gleich $a_{\sigma,\tau}$.

Durch direktes Nachrechnen sieht man, die Abbildung ist ein 2-Kozyklus, d.h.

$$\sigma(a_{\tau,\nu}) a_{\sigma\tau,\nu}^{-1} a_{\sigma,\tau\nu} a_{\sigma,\tau}^{-1} = 1,$$

(vgl. 3.2.3 Beispiel 2), d.h. (1) repräsentiert ein Element

$$[a_{\sigma,\tau}] \in H^2(G, A)$$

Wir haben noch zu zeigen, dieses Element ändert sich nicht, wenn wir die Anhebungen b_σ der c_σ durch andere Anhebungen, sagen wir durch

$$b'_\sigma := a_\sigma b_\sigma \text{ mit } a_\sigma \in A$$

ersetzen. Der zugehörige 2-Kozyklus ist dann

$$
\begin{aligned}
a'_{\sigma,\tau} &:= a_\sigma b_\sigma \sigma(a_\tau b_\tau)(a_{\sigma\tau} b_{\sigma\tau})^{-1}\\
&= a_\sigma b_\sigma \sigma(a_\tau)\sigma(b_\tau) b_{\sigma\tau}^{-1} a_{\sigma\tau}^{-1}
\end{aligned}
$$

Weil A im Zentrum von B liegt, können wir den letzten Ausdruck auch schreiben als

$$
\begin{aligned}
a'_{\sigma,\tau} &:= a_\sigma \sigma(a_\tau) a_{\sigma\tau}^{-1} b_\sigma \sigma(b_\tau) b_{\sigma\tau}^{-1}\\
&= a_\sigma \sigma(a_\tau) a_{\sigma\tau}^{-1} a_{\sigma,\tau}
\end{aligned}
$$

d.h. $\{a'_{\sigma,\tau}\}$ unterscheidet sich von $\{a_{\sigma,\tau}\}$ um den Korand[31] $\{\sigma(a_\tau) a_{\sigma\tau}^{-1} a_\sigma\}$, repräsentiert also dasselbe Element von $H^1(G, A)$.

<u>Exaktheit an der Stelle</u> $H^1(G, C)$:

Die eben konstruierte Abbildung ? ist trivial für die Elemente im Bild von

(2) $$H^1(G, B) \longrightarrow H^1(G, C).$$

Liegt nämlich [c] in diesem Bild, so kann man für die oben konstruierte Familie der b_σ einen 1-Kozyklus $G \longrightarrow B$ wählen, also $a_{\sigma\tau} = 1$ für alle σ und alle τ.

Sei $[c] \in H^1(G, C)$ umgekehrt ein Element aus dem Kern der Abbildung ?. Wir wählen einen repräsentierenden 1-Kozyklus

---

[30] Wir haben hier eine sehr spezielle Anhebung der zweiten Kozyklus entlang $B \longrightarrow C$ gewählt. Wir werden jedoch gleich die Abhängigkeit des Ergebnisses von der Wahl der Anhebung untersuchen.

[31] A ist kommutativ

$$c: G \longrightarrow C,\ \sigma \mapsto c_\sigma,$$

für [c]. Die Familie der oben konstruierten Elemente $a_{\sigma,\tau} = b_\sigma \sigma(b_\tau) b^{-1}_{\sigma\tau} \in A$ bildet dann einen 2-Korand $G\times G \longrightarrow A$, d.h. es gibt Element $a_\sigma \in A$ mit

$$b_\sigma \sigma(b_\tau) b^{-1}_{\sigma\tau} = \sigma(a_\tau) a^{-1}_{\sigma\tau} a_\sigma,$$

Weil A kommutativ ist und im Zentrum von B liegt, können wir diese Identität in der folgenden Gestalt schreiben.

$$a^{-1}_\sigma b_\sigma \sigma(a^{-1}_\tau b_\tau)(a^{-1}_{\sigma\tau} b_{\sigma\tau})^{-1} = 1.$$

Mit anderen Worten, ersetzen wir die Anhebung b_σ von c_σ durch die Anhebung $a^{-1}_\sigma b_\sigma$, so erhalten wir einen Korand $G \longrightarrow B$. Die Familie der $a^{-1}_\sigma b_\sigma$ repräsentiert ein Urbild von [c] bei der Abbildung (2).
QED.

4.4.2 Warnung
Die Aussage von 4.4.1 ist im allgemeinen falsch, wenn A nicht im Zentrum von B liegt.

4.4.3 Konstruktion von Abbildungen δ_m
Seien K/k eine endliche Galois-Erweiterung mit der Gruppe

$$G = G(K/k)$$

und m eine natürliche Zahl. Wir wenden Aussage 4.4.1 auf die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow K^\times \longrightarrow GL(m, K) \longrightarrow PGL(m, K) \longrightarrow 1$$

an und erhalten eine exakte Sequenz punktierter Mengen

$$H^1(G, GL(m, K)) \longrightarrow H^1(G, PGL(m, K)) \xrightarrow{\delta_m} H^2(G, K^\times).$$

Bemerkung
Unser nächstes Ziel ist es die Zusammenhangshomomorphismen δ_m in Beziehung zu setzen zu den in 2.4.7 konstruierten Abbildungen

$$\lambda_{m,n}: H^1(G, PGL(m, K)) \longrightarrow H^1(G, PGL(mn, K)).$$

4.4.4 Eine Familie von kommutativen Vierecken
Seien K/k eine endliche Galois-Erweiterung mit der Gruppe

$$G = G(K/k)$$

und m, n natürliche Zahlen. Dann bilden die Abbildungen δ_m von 4.4.3 und $\lambda_{m,n}$ von 2.4.7 ein kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(G, PGL(m,K)) & \xrightarrow{\delta_m} & H^2(G,K^\times) \\ \lambda_{m,n}\downarrow & & \downarrow Id \\ H^1(G,PGL(mn,K)) & \xrightarrow{\delta_{mn}} & H^2(G,K^\times) \end{array}$$

Beweis. Seien $[c]\in H^1(G, PGL(m,K))$ ein Element und

(1) $$c: G \longrightarrow PGL(m,K),\ \sigma \mapsto c_\sigma,$$

ein repräsentierender 1-Kozyklus. Das Bild von [c] bei δ_m wird dann repräsentiert durch den 2-Kozyklus

$$a: G\times G \longrightarrow K^{\times},\ (\sigma,\tau) \mapsto a_{\sigma,\tau} \quad \text{mit } a_{\sigma,\tau}\bullet \mathrm{Id}_m := b_\sigma \sigma(b_\tau) b_{\sigma\tau}^{-1}.$$

Dabei bezeichne $b_\sigma \in GL(m,K)$ einen Repräsentanten von c_σ und Id_m die $m\times m$-Einheitsmatrix. Einen Repräsentanten für das Bild

$$\lambda_{m,n}([c])$$

erhält man, indem man in (1) Repräsentanten b_σ von c_σ durch die Block-Matrix

$$b'_\sigma = \begin{pmatrix} b_\sigma & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & b_\sigma \end{pmatrix}$$

ersetzt die aus n Exemplaren der Matrix b_σ auf der Hauptdiagonaloen und sonst lauter Null-Matrizen besteht. Das Element

$$\delta_{m,n}(\lambda_{m,n}([c]))$$

wird also repräsentiert durch den 2-Kozyklus

$$a': G\times G \longrightarrow K^{\times},\ (\sigma,\tau) \mapsto a'_{\sigma,\tau},$$

wobei $a'_{\sigma,\tau}$ den Eintrag auf der Hauptdiagonalen der Skalarmatrix

$$b'_\sigma \sigma(b'_\tau) b'^{-1}_{\sigma\tau}$$

bezeichnet, d.h. $a'_{\sigma,\tau} = a_{\sigma,\tau}$.

QED.

4.4.5 Konstruktion der Abbildungen δ_∞

Sei K/k eine endliche Galois-Erweiterung. Indem wir die Vereinigung der punktierten Mengen $H^1(G, PGL(m, K))$ bezüglich der Abbildungen $\lambda_{m,n}$ (d.h. deren direkten Limes), erhalten wir aus 4.4.4 eine Abbildung

$$\delta_\infty: H^1(G, PGL(\infty, K)) \longrightarrow H^2(G, K^{\times})$$

(deren Einschränkung auf $H^1(G, PGL(m,K))$ gerade δ_m ist).

Bemerkung
Wir erinnern daran, daß der Definitionsbereich dieser Abbildung nach 2.4.12 die Struktur einer Gruppe besitzt.

4.4.6 Relationstreue der Abbildung δ_∞

Die Abbildung

$$\delta_\infty: H^1(G, PGL(\infty, K)) \longrightarrow H^2(G, K^{\times})$$

von 4.4.5 ist ein Gruppen-Homomorphismus.

Beweis. Nach 2.4.6 wird die Gruppen-Struktur von $H^1(G, PGL(\infty, K))$ durch die Abbildungen

$$H^1(G, PGL(n, K)) \times H^1(G, PGL(m, K)) \longrightarrow H^1(G, PGL(mn, K)).$$

definiert, die induziert werden durch Abbildungen

$$PGL(n, K) \times PGL(m, K) \longrightarrow PGL(nm, K),\ ([\varphi], [\psi]) \mapsto [\varphi\otimes\psi],$$

der Koeffizienten-Gruppen, die ihrerseits vom Tensorprodukt

$$GL(n, K) \times GL(m, K) \longrightarrow GL(nm, K), (\varphi, \psi) \mapsto \varphi\otimes\psi,$$

linearer Endomorphismen kommen.
Seien jetzt

$$[c] \in H^1(G, PGL(n, K)) , [d] \in H^1(G, PGL(m, K))$$

vorgegebene Elemente. Wir haben zu zeigen,

$$\delta_{mn}([c]\bullet[d]) = \delta_n([c])\bullet\delta_m([d])$$

Wir wählen repräsentierende 1-Kozyklen

$$G \longrightarrow PGL(n, K), \sigma\mapsto [c_\sigma], \text{ und } G \longrightarrow PGL(m, K), \sigma\mapsto [d_\sigma],$$

für [c] bzw. [d]. Für jedes $\sigma\in G$ seien $c_\sigma\in GL(n,K)$ und $d_\sigma\in GL(m,K)$ geeignete lineare Automorphismen, die die entsprechenden Elemente der projektiven linearen Gruppen repräsentieren. Dann wird

$$[c]\bullet[d] \in H^1(G, PGL(mn, K))$$

repräsentiert durch den 1-Kozyklus

$$\sigma \mapsto [c_\sigma\otimes d_\sigma] \in Aut(K^n\otimes K^m)/K^* = Aut(K^{nm})/K^* = PGL(mn, K).$$

Nach Defnition (vgl. erster Teil des Beweises von 4.4.1) werden die Elemente

$$\delta_n([c]) = [a], \delta_m([d]) = [b] \text{ und } \delta_{mn}([c]\bullet[d]) = [x]$$

repräsentiert durch die 2-Kozyklen

$$a: \sigma \mapsto a_{\sigma,\tau} = c_\sigma\sigma(c_\tau)c_{\sigma\tau}^{-1} \in K^\times\bullet Id_n \cong K^\times,$$

$$b: \sigma \mapsto b_{\sigma,\tau} = d_\sigma\sigma(d_\tau)d_{\sigma\tau}^{-1} \in K^\times\bullet Id_m \cong K^\times,$$

$$x: \sigma \mapsto x_{\sigma,\tau} = (c_\sigma\otimes d_\sigma)\sigma(c_\tau\otimes d_\tau)(c_{\sigma\tau}\otimes d_{\sigma\tau})^{-1} \in K^\times\bullet Id_{mn} \cong K^\times.$$

(wenn wir die Gruppe $K^\times$ mit deren natürlichen Bildern in GL(n,K), GL(m,K) und GL(mn,K) identifizieren, d.h. die Elemente von $K^\times$ mit den zugehörigen Skalarmatrizen). Die Endomorphismen c_σ und d_τ operieren auf unterschiedlichen Tensor-Faktoren, d.h. diese Operationen kommutieren.[32] Deshalb gilt

$$\begin{aligned} x_{\sigma, \tau} &= (c_\sigma\otimes d_\sigma)\sigma(c_\tau\otimes d_\tau)(c_{\sigma\tau}\otimes d_{\sigma\tau})^{-1} \\ &=c_\sigma\sigma(c_\tau)c_{\sigma\tau}^{-1}\otimes d_\sigma\sigma(d_\tau)d_{\sigma\tau}^{-1}. \\ &= a_{\sigma,\tau}\otimes b_{\sigma,\tau} \qquad \text{in } GL(mn,K) \end{aligned}$$

Für die zugehörigen 2-Kozyklen erhalten wir

$$[x] = [a]\bullet[b] \text{ in } H^1(G, K^\times),$$

d.h.

$$\delta_{mn}([c]\bullet[d]) = \delta_n([c]) \bullet \delta_m([d]).$$

QED.

---

[32] d.h. $(c_\sigma\otimes 1)\bullet(1\otimes d_\tau) = c_\sigma\otimes d_\tau = (1\otimes d_\tau)\bullet(c_\sigma\otimes 1)$. Die Einträge c_{ij} der Matrix zur Einheit $\alpha\in K\otimes_k K$ sind durch die Bedingung

$$\alpha\bullet(\omega_i\otimes 1) = \sum_{j=1}^m c_{ji}\bullet\omega_j\otimes 1$$

gegeben. Ersetzen wir α durch $\sigma(\alpha)$, so läuft dies darauf hinaus, c_{ij} durch $\sigma(c_{ij})$ zu ersetzen.

4.4.7 Theorem: Bijektivität der Abbildung δ_∞

Die Abbildung

$$\delta_\infty: H^1(G, PGL(\infty, K)) \longrightarrow H^2(G, K^\times)$$

von 4.4.5 ist ein Gruppen-Isomorphismus.

Beweis. Da die punktierte Menge $H^1(G, PGL(\infty, K))$ die Vereinigung der punktierten Mengen $H^1(G, PGL(m,K))$ ist, reicht es zu zeigen, der Kern aller Einschränkungen

$$\delta_\infty|_{H^1(G,PGL(m;k))} = \delta_m$$

ist trivial. Wegen der Exaktheit der Sequenz

$$H^1(G, GL(m, K)) \longrightarrow H^1(G, PGL(m, K)) \xrightarrow{\delta_m} H^2(G, K^\times)$$

von 4.4.3 reicht es zu zeigen

$$H^1(G, GL(m, K))$$

ist trivial. Das ist aber gerade die Aussage des Satzes 90 von Hilbert (vgl. 2.3.8).

Wir haben noch die Surjektivität von δ_∞ zu beweisen, d.h. wir haben zu zeigen, jedes Element von $H^2(G, K^\times)$ liegt im Bild von mindestens einer der Abbildungen δ_m. Wir werden hier sogar zeigen, die Abbildung

$$\delta_m: H^1(G, PGL(m,K)) \longrightarrow H^2(G, K^\times)$$

ist surjektiv, falls

$$m = \# G$$

die Ordnung von G ist.

Zum Beweis betrachten wir den K-Vektorraum

$$K\otimes_k K$$

mit der G-Modul-Struktur,[33] die durch die Operation von G auf dem zweiten Faktor gegeben ist,

$$\sigma\bullet(c'\otimes c'') := c'\otimes\sigma(c'').$$

Durch Wahl einer k-Vektorraum-Basis für den ersten Tensor-Faktor (d.h. eines Isomorphismus des letzteren mit k^m) wird das Tensor-Produkt isomorph zu K^m,

$$K\otimes_k K \cong K^m.$$

Die Multiplikation mit einem umkehrbaren Element von $K\otimes_k K$ definiert einen K-linearen Automorphismus $K\otimes_k K \longrightarrow K\otimes_k K$ und man erhält so einen Gruppen-Homomorphismus

$$(K\otimes_k K)^\times \longrightarrow GL(m, K),\ x \mapsto \text{Multiplikation mit } x.$$

Dieser läßt sich wie folgt in ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen einfügen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & K^\times & \longrightarrow & (K\otimes_k K)^\times & \longrightarrow & (K\otimes_k K)^\times/K^\times & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & K^\times & \longrightarrow & GL(m,K) & \longrightarrow & PGL(m,K) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

[33] K-Vektorraum-Struktur komme ebenfalls von der K-Vektorraum-Struktur des zweiten Tensor-Faktors.

Dabei soll Abbildung links oben von der Einbettung in den zweiten Tensor-Faktor kommen,

$$K^\times \longrightarrow (K\otimes_k K)^\times,\ c \mapsto 1\otimes c.$$

Alle Abbildungung den Diagramms sind dann verträglich mit der Operation der Galois-Gruppe G.[34] Wir gehen zur Kohomologie über und erhalten ein kommutatives Diagramm mit exakter oberer Zeile:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(G,(K\otimes_k K)^\times/K^\times) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(G,K^\times) & \longrightarrow & H^2(G,(K\otimes_k K)^\times) \\ \downarrow & & \| & & \\ H^1(G,PGL(m,K)) & \xrightarrow{\delta_m} & H^2(G,K^\times) & & \end{array}$$

Zum Beweis der Surjektivität von δ_m reicht es, die von α zu beweisen. Wegen der Exaktheit der oberen Zeile wiederum reicht es zu zeigen,

$$H^2(G, (K\otimes_k K)^\times) = 0.$$

Dazu wiederum reicht es zu zeigen, daß $(K\otimes_k K)^\times$ ein koinduzierter G-Modul ist.

Zum Beweis schreiben wir die endliche Galois-Erweiterung K/k als einfache Erweiterung

$$K = k[x]/(f)$$

mit einem irreduziblen Polynom $f\in k[x]$. Ist $\alpha\in K$ eine Nullstelle von f, so gilt

$$f(x) = \prod_{\sigma\in G} (x - \sigma(\alpha)).$$

wobei die $\sigma(\alpha)$ paarweise verschieden sind (denn K/k ist separabel). Wir schreiben jetzt den ersten Tensor-Faktor (d.h. den mit der trivialen Operation) von $K\otimes_k K$ in der Gestalt k[x]/(f) und erhalten

$$\begin{aligned} K\otimes_k K &\cong K[x]/(f) \\ &\cong K[x]/(\prod_{\sigma\in G} (x - \sigma(\alpha))) \\ &\cong \oplus_{\sigma\in G} K[x]/(x - \sigma(\alpha)) \\ &\cong \oplus_{\sigma\in G} K\sigma \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Isomorphie nach dem Chinesischen Restesatz besteht. Die Operation von G auf dem Tensorprodukt entspricht dabei der folgenden Operation auf der direkten Summe

$$G \times (\oplus_{\sigma\in G} K\sigma) \longrightarrow \oplus_{\sigma\in G} K\sigma,\ (\sigma, \sum_{\tau\in G} c_\tau\tau) \mapsto \sum_{\tau\in G} \sigma(c_\tau)\sigma\tau\ ,.$$

Die Multiplikation der Tensor-Algebra entspricht nach dem Chinesischen Restesatz gerade der "koordinatenweisen" Multiplikation[35]:

---

[34] Für die mittlere vertikale Abbildung kommt das von der Tatsache, daß zu der fixierten Basis ω_1 $,...,\omega_m$ von K über k, die zugehörige Basis $\omega_1\otimes 1,...,\omega_m\otimes 1$ von $K\otimes_k K$ über K invariant bezüglich der Operation von G ist.

$$(\sum_{\tau\in G} c_\tau\tau)\bullet(\sum_{\tau\in G} d_\tau\tau) = \sum_{\tau\in G} c_\tau d_\tau\tau .$$

Insbesondere bestehen für die multiplikativen Gruppen die mit den G-Operationen verträglichen Isomorphien

$$(K\otimes_k K)^\times \cong \oplus_{\sigma\in G} K^\times\bullet\sigma = K^\times\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G] \cong \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}[G], K^\times)$$

Mit anderen Worten, $(K\otimes_k K)^\times$ ist ein koinduzierter G-Modul.

QED.

Bemerkung

Wir halten hier fest, der obige Beweis zeigt sehr viel mehr als im Theorem angegeben, nämlich die Injektivität der Abbildungen

$$\delta_m: H^1(G, PGL(m, K)) \longrightarrow H^2(G, K^\times)$$

von 4.4.3 für jedes m und die Surjektivität im Fall, daß m die Ordnung der Galois-Gruppe G(K/k) ist.

4.4.8 Folgerung: die Abbildungen $\lambda_{m,n}$ und δ_m sind Gruppen-Isomorphismen

Sei K/k eine endliche Galois-Erweiterung des Grades n mit der Galois-Gruppe

$$G = G(K/k).$$

Dann sind die Abbildungen

$$\lambda_{n,m}: H^1(G, PGL(n, K)) \longrightarrow H^1(G, PGL(mn, K))$$

von 2.4.7 bijektiv für alle m.

Außerdem besitzt die punktierte Menge

$$H^1(G, PGL(n, K))$$

eine Gruppen-Struktur mit der Multiplikation

$$H^1(G, PGL(n, K)) \times H^1(G, PGL(n, K)) \longrightarrow H^1(G, PGL(n^2, K)) \cong H^1(G, PGL(n, K))$$

,

und die Abbildung

$$\delta_n: H^1(G, PGL(n, K)) \longrightarrow H^2(G, K^\times)$$

ist ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

Beweis.Wir betrachten das kommutative Diagramm von 4.4.4 mit m und n vertauscht. Die linke vertikale Abbildung ist dann gerade die uns interessierende, und die obere horizontale ist die Bijektion[36] δ_n. Die untere horizontale Abbildung ist injektiv nach der obigen Bemerkung, also auf Grund der Bijektivität von δ_n ebenfalls bijektiv. Also sind $\lambda_{n,m}$ und δ_{nm} zueinander inverse Bijektionen.

Der verbleibende Teil der Aussage folgt nun aus Theorem 4.4.7: die Einschränkung von δ_∞ auf $H^1(G, PGL(n, K))$ ist gerade δ_n und die Einschränkung der Multiplikation von $H^1(G, PGL(\infty, K))$ auf $H^1(G, PGL(n, K))$ nach Definition gerade die oben angegebene Multiplikationsabbildung.

QED.

---

[35] Die Projektionen auf die einzelnen direkten Summanden sind Ring-Homomorphismen.

[36] vgl. die obige Bemerkung zu 4.4.7.

4.4.9 Die Brauergruppe als zweite Kohomologie-Gruppe

Seien k ein Körper, k_s eine separable Abschließung von k und K/k eine endliche Galois-Erweiterungen. Dann bestehen natürliche Isomorphien von abelschen Gruppen

$$\mathrm{Br}(K/k) \cong H^2(G, K^\times) \text{ und } \mathrm{Br}(k) \cong H^2(k, k_s^\times).$$

Beweis. Die erste Isomorphie folgt aus Theorem 4.4.7 und 2.4.13. Die zweiter erhält man aus der ersten (und 2.4.13) durch Übergang zum direkten Limes.
QED.
Bemerkung
Dieser Satz hat einige Konsequenzen. Die nachfolgende Aussage ist ziemlich aufwendig, wenn man sie sie direkt im Kontext der zentralen einfachen Algebren beweisen wollte, und beinahe trivial im kohomologischen Kontext.

4.4.10 Die Torsionsgruppen-Eigenschaft der Brauer-Gruppe

Sei K/k eine Galois-Erweiterung der Ordnung $n < \infty$. Dann ist die Ordnung jeden Elements von

$$\mathrm{Br}(K/k)$$

ein Teiler von n. Insbesondere ist Br(k) für jeden Körper k eine abelsche Torsionsgruppe.

Beweis. Das folgt aus der Aussage 3.3.9, daß die Kohomologie $H^i(G,A)$ einer endlichen Gruppe von der Gruppen-Ordnung annulliert wird (für $i > 0$).
QED.

4.4.11 Die Torsionsteile der Brauergruppe

Seien k ein Körper und m eine zur Charakteristik von k teilerfremde natürliche Zahl. Dann ist der m-Torsions-Untergruppe der Brauergruppe isomorph zu

$$_m\mathrm{Br}(k) \cong H^2(k, \mu_m).$$

Dabei bezeichnet wie bisher $\mu_m \subseteq k_s$ die Gruppe der m-ten Einheitswurzeln mit der natürlichen Operation der Galois-Gruppe $G := G(k_s/k)$.

Beweis. Wir verwenden die exakte G-Modul-Sequenz

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow k_s^\times \xrightarrow{m} k_s^\times \longrightarrow 1,$$

des Beweises 4.3.9 des Satzes von Kummer, wobei die mit m bezeichnete Abbildung der Übergang zur m-ten Potenz ist. Diese Abbildung ist surjektiv, weil für jedes $a \in k_s^\times$ das Polynom $x^m - a$ separabel ist, also eine Nullstelle in $k_s^\times$ besitzt. Wir gehen zu Kohomologie über und erhalten die exakte Sequenz

$$H^1(k, k_s^\times) \longrightarrow H^2(k, \mu_m) \longrightarrow H^2(k, k_s^\times) \xrightarrow{m} H^2(k, k_s^\times)\ .$$

Die Gruppe links ist trivial nach dem stetigen Satz 90 von Hilbert (4.3.8). Die Abbildung links kommt vom erheben der Elemente von $k_s^\times$ in die m-te Potenz. Dies entspricht dem Übergang zur m-ten Tensor-Potenz der zugehörigen k-linearen Automorphismen von k_s und damit der Multiplikation mit m auf der additiv geschriebenen Gruppe

$$H^2(k, k_s^\times) = \mathrm{Br}(k).$$

Es folgt die Behauptung.
QED.

4.4.12 Die relative Brauer-Gruppe für zyklische Erweiterungen

Sei K/k eine zyklische Galois-Erweiterung (endlicher Ordnung). Dann besteht eine natürliche Isomorphie

$$\mathrm{Br}(K/k) \cong k^\times/N_{K/k}(K^\times).$$

Beweis. Nach 4.4.9 ist

$$\mathrm{Br}(K/k) \cong H^2(G, K^\times).$$

Weil G zyklisch ist, hat die Kohomologie-Gruppe rechts die Gestalt

$$H^2 (G, K^\times) \cong (K^\times)^G/N\bullet K^\times = k^\times/N_{K/k}(K^\times).$$

(vgl. 3.2.9), wenn N die Summe in $\mathbb{Z}[G]$ der Elemente von G bezeichnet.
QED.
Bemerkungen

(i) Im Fall $k = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ ist besteht $N_{K/k}(K^\times) = \{|z|^2 : z\in\mathbb{C}\}$ gerade aus den positiven reellen Zahlen, d.h.

$$\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \mathrm{Br}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times/(\mathbb{R}_{>0})^\times = \{+1,-1\}.$$

Es gibt also bis auf Isomorphie genau zwei Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$, die hamiltonschen Quaternionen $\mathbb{H}$ und $\mathbb{R}$ selbst.

(ii) Für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k ist k/k die separable Abschließung, die Normabbildung ist die identische Abbildung, also

$$\mathrm{Br}(k) = \{1\},$$

d.h. k ist die einzige Divisionsalgebra über k.

4.4.13 Eine Exakte Sequez von Brauer-Gruppen

Sei K/k eine endliche Galois-Erweiterung. Dann besteht eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}(K/k) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{Br}(K).$$

Beweis. Nach 4.3.6 besteht eine exakte Sequenz

(1) $$0\longrightarrow H^2(G/H, A^H)\xrightarrow{\mathrm{Inf}}H^2(G,A)\xrightarrow{\mathrm{Res}}H^2(H, A)^{G/H}\longrightarrow H^3(G/H, A^H)\xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^3(G,A).$$

für jede proendliche Gruppe G, jede abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ und jeden stetigen G-Modul A mit

(2) $$H^1(H, A) = 0.$$

Wir betrachten den Fall

$$G := G(k_s/k),\ H := G(k_s/K) \text{ und } A = k_s^\times.$$

Bedingung (2) ist dann erfüllt (nach dem stetigen Satz 90 von Hilbert 4.3.8). Nach dem Hauptsatz der Galois-Theorie ist

$$G/H = G(K/k) \text{ und } (k_s^\times)^H = K^\times$$

Die linke Kohomologie-Gruppe der Sequenz (1) ist somit

$$H^2(G/H, A^H) = H^2(G(K/k), K^\times) \quad = \mathrm{Br}(K/k).$$

Für die zweite erhalten wir

$$H^2(G,A) \quad = H^2(k, k_s^\times) \quad = \mathrm{Br}(k).$$

Die dritte Kohomologie-Gruppe ist offensichtlich eine Untergruppe von

$$H^2(H, A) \quad = H^2(K, k_s^\times) \quad = \mathrm{Br}(K).$$

QED.
Bemerkung

Die Sequenz besteht auch im Fall, daß K/k nicht Galoisch ist: die Elemente im Kern von

$$\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{Br}(K)$$

sind gerade die zentralen einfachen k-Algebren, welche über K zerfallen, d.h. die Elemente von Br(K/k).

4.5 Index und Periode

In diesem Abschnitt verwenden wir die kohomologische Theorie der Brauer-Gruppe zum Beweis der grundlegenden Ergebnisse, die sich auf zwei wichtige Invarianten der zentralen einfachen Algebren beziehen. Wir werden hier durchgehend annehmen, daß der Grundkörper

$$k \text{ unendlich}$$

ist. In Kapitel 6 werden wir sehen, die Brauergruppe eines endlichen Körpers ist trivial, so daß die nachfolgende Untersuchung in diesem Fall gegenstandslos wäre. Wir beginnen mit der Definition der ersten der beiden Invarianten.

4.5.1 Der Index einer zentralen einfachen Algebra

Seien k ein endlicher Körper und A eine zentrale einfache k-Algebra. Der Index von A über k ist definiert als Grad derjenigen Divisionsalgebra D über k, für welche A isomorph ist zu einem Matrizen-Ring über D,

$$\mathrm{ind}_k A := \deg_k D,\ D \text{ Divisionsalgebra mit } A \cong M_n(D) \text{ für ein } n.$$

Bemerkungen

(i) Die Divisionsalgebra D existiert und ist bis auf Isomorphie eindeutigbestimmt auf Grund des Satzes von Wedderburn 2.1.5 .

(ii) Für jede Divisionsalgebra ist der Index gleich dem Grad.

(iii) Der Index einer zentralen einfachen k-Algebra A hängt nur von deren Klasse in der Brauer-Gruppe Br(k) ab: er hängt nur von der Isomorphie-Klasser der zu A gehörigen Divisionsalgebra D ab, und diese ist für je zwei Brauer-äquivalente k-Algebren bis auf Isomorphie dieselbe.

(iv) Es gilt genau dann

$$\mathrm{ind}_k(A) = 1,$$

wenn A zerfällt.

4.5.2 Kriterium für das Zerfallen über einer Erweiterung

Sei D eine zentrale Divisionsalgebra über dem endlichen Körper k. Wir nehmen an, D enthält einen Teilkörper

$$K \subseteq D$$

dessen Grad über k gleich dem Index von D ist,

$$[K:k] = \mathrm{ind}_k(D).$$

Dann zerfällt D über K.

Beweis. Bezeichne D^{op} die zu D entgegengesetzte k-Algebra. Dann besteht eine Isomorphie

(1) $$D\otimes_k D^{op} \cong \mathrm{End}_k(D),\ a\otimes b \mapsto \rho_a \circ \lambda_b : x \mapsto bxa,$$

(vgl. den Beweis von 2.4.10)[37]. Ist $K \subseteq D$ ein Teilkörper, so besteht auf Grund der Kommutativität von K auch eine Inklusion

$$K \subseteq D^{op},$$

und wir erhalten eine Injektion

$$\iota: D\otimes_k K \longrightarrow \mathrm{End}_k(D).$$

[37] Dabei bezeichne R_a die Multiplikation mit a von rechts und L_b die mit b von links.

Die Abbildungsvorschrift von (1) zeigt, das Bild von ι liegt sogar in $End_K(D)$,

$$Im(\iota) \subseteq End_K(D)$$

(auf Grund der Kommutativität von K). Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, es gilt sogar das Gleichheitszeichen, denn dann ist $D\otimes_k K \cong End_K(D)$, d.h. D zerfällt über K. Zum Beweis des Gleichheitszeichens genügt es zu zeigen, beide Algebren besitzen dieselbe Dimension über K,

$$\dim D\otimes_k K = \dim_K End_k(D).$$

Zum Beweis identifizieren wir $End_K(D)$ mit der Matrizen-Algebra

$$End_K(D) = M_n(K)$$

Dabei ist

(2) $n =^{38} \dim_K D = \dim_k D/[K:k] = (\deg_k D)^2/[K:k] =^{39} (\mathrm{ind}_k D)^2/[K:k] =^{40} \mathrm{ind}_k D.$

Wir erhalten

$$\dim_K End_K(D) = n^2$$

und

$$\dim_K D\otimes_k K = \dim_k D = \dim_K D\bullet[K:k] =^{41} n\bullet \mathrm{ind}_k(D) = n^2$$

QED.

4.5.3 Der Grad separabler Zerfällungskörper

Jede zentrale einfache k-Algebra A zerfällt über einer separablen Körper-Erweiterung K/k des Grades $\mathrm{ind}_k A$.

Der Beweis verwendet den Begriff des reduzierten charakteristischen Polynoms verwendet.

4.5.4 Reduziertes charakteristisches Polynom

Seien k ein Körper, A eine zentrale einfache k-Algebra und $a \in A$ ein Element. Dann heißt das Polynom

$$P_a(T) := Nrd(T-a) \in k[T]$$

reduziertes charakteristisches Polynom von a. Dabei bezeichne

$$Nrd: A \longrightarrow k$$

die reduzierte Norm 2.5.1 der Algebra A.

Bemerkungen

(i) Ist $\bar{k}$ eine algebraische Abschließung von k, so wird A über $\bar{k}$ isomorph zu einer Matrizen-Algebra

$$A \hookrightarrow A\otimes_k \bar{k} \cong M_n(\bar{k}).$$

Die reduzierte Norm ist dann gerade die Einschränkung auf A der Determinante auf der Matrizen-Algebra und das reduzierte charakteristische Polynom von a wird zum charakteristischen Polynom der zu a gehörigen Matrix M_a.

---

[38] Die Endomorphismen-Algebra eines n-dimensionalen K-Vektorraums ist gerade die Algebra der $n\times n$-Matrizen über K.

[39] Für Divisionsalgebren stimmen die Begriffe Grad und Index überein.

[40] Nach Voraussetzung soll $K \subseteq D$ eine Teilkörper sein, mit $[K:k] = \mathrm{ind}_k D$.

[41] Weil nach Voraussetzung $[K:k] = \mathrm{ind}_k D$ gelten soll.

(ii) Insbesondere sind die Koeffizienten von $P_a(T)$ Polynome in den Einträgen von M_a

4.5.5 Existenz von Elementen mit separablen reduzierten charakteristischen Polynom (Fehler)[42]

Seien k ein unendlicher Körper, A eine zentrale einfache k-Algebra. Dann gibt es ein Element $a \in A$, dessen reduziertes charakteristisches Polynom keine mehrfachen Nullstellen besitzt.

Beweis. Bezeichne $\bar{k}$ eine algebraische Abschließung von k. Wir wählen einen Isomorphismus

$$\varphi: A \otimes_k \bar{k} \longrightarrow M_n(\bar{k})$$

und identifizieren das reduzierte charakteristische Polynom $P_a(T)$ mit der Determinante von $T \bullet Id - M_a \in M_n(\bar{k})$. Sei

$$D(a) := \mathrm{Res}(P_a, P'_a)$$

die Diskriminante von P_a. Dies ist ein Polynom in den Koeffizienten von M_a welches genau dann Null ist, wenn P_a mehrfache Nullstellen besitzt. Die Menge der a, für welche P_a keine mehrfachen Nullstellen besitzt ist gerade die durch D gegebene Zariski-offene Menge

$$\{a : D(a) \neq 0\}$$

des $\bar{k}$-Vektorraums $A \otimes_k \bar{k} = \mathbb{A}^{n^2}_{\bar{k}}$ und D ist dort ein nicht-triviales Polynom. Weil k nach Voraussetzung unendlich ist, ist die Einschränkung von D auf $A = \mathbb{A}^{n^2}_k$ nicht identisch Null, d.h. es gibt ein $a \in A$ mit $D(a) \neq 0$, d.h. P_a hat keine mehrfachen Nullstellen.

QED.

4.5.6 Beweis von 4.5.3

Wir können annehmen, A ist eine Divisionsalgebra. Nach A3.12[43] gibt es einen maximalen Teilkörper

$$k \subseteq K \subseteq A,$$

welcher separabel über k ist. Nach A3.7[44] gilt

---

[42] Sei $a \in A - k$ und $K := k[a]$. Dann ist $K \subseteq A$ eine echte Teilalgebra von A (weil K kommutativ ist). Nach Konstruktion ist K invariant bei der Multiplikation mit a. Die Matrix M_a zur k-linearen Abbildung

$$A \longrightarrow A,\ x \mapsto ax,$$

ist die direkte Summe von Exemplaren der Matrix N zur Multiplikation mit a auf K,

$$M_a = N^r \text{ mit } r > 1.$$

Das charakteristische Polynom von M_a ist somit eine r-te Potenz.

[43] vgl. Herstein, Noncommutative rings, Theorem 4.3.3.

[44] Nach Herstein, Theorem 4.2.2 gilt

(1) $$[K:k] = \dim_K A.$$

$$\dim_k K = \dim_K A = \deg_k A = \mathrm{ind}_k A$$

Der Körper K genügt also den Bedingungen von 4.5.2. Also zerfällt A über k.
QED.

4.5.7 Die relative Brauer-Gruppe als Kern

Seien k_s eine separable Abschließung des Körpers k und K/k eine endliche Teilerweiterung von k_s/k des Grades n. Dann induziert der Zusammenhangshomomophismus

$$\delta_n : H^1(k, PGL(n, k_s)) \longrightarrow Br(k)$$

eine bijektive Abbildung

$$\mathrm{Ker}(H^1(k, PGL(n, k_s)) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(K, PGL(n, k_s))) \longrightarrow Br(K/k).$$

Zum Beweis benötigen wir das folgende Aussage der Galois-Theorie

4.5.8 Der koinduzierte Modul zu einer endlichen Galois-Erweiterung

Seien k_s eine separable Abschließung des Körpers k und K/k eine endliche Teilerweiterung von k_s/k des Grades n. Wir betrachten die Galois-Gruppen

$$G := G(k_s/k) \text{ und } H := G(k_s/K).$$

Die Gruppe G operiere auf

$$K\otimes_k k_s$$

vermittels des zweiten Faktors, d.h.

$$\sigma\bullet(c\otimes d) = c\otimes\sigma(d) \text{ für } \sigma\in G,\ c\in K,\ d\in k_s.$$

Dann besteht eine Isomorphie von G-Moduln

$$(K\otimes_k k_s)^\times \cong M_H^G(k_s^\times)$$

Beweis. Nach dem Satz vom primitiven Element hat K die Gestalt

$$K = k(\alpha) \text{ für ein } \alpha\in K.$$

Bezeichne f das Minimal-Polynom von α über k (so daß K gerade der Zerfällungskörper von f über k ist). Wir wählen ein Repräsentantensystem

$$1 = \sigma_1 , \sigma_2 , \dots , \sigma_n \in G$$

für die Restklassen von G modulo H. Die Einschränkungen der σ_i auf K sind dann gerade die Elemente von G(K/k),[45] d.h. die Nullstellen von f sind gerade die $\sigma_i(\alpha)$,

---

Sei n der Index der k-Algebra A, d.h.

$$\mathrm{ind}_k A =^{44} \deg_k A = n \text{ und } A\otimes_k \bar{k} = M_n(\bar{k}).$$

Dann gilt

$$n^2 = \dim_k A = \dim_K A\bullet[K:k] =^{44} [K:k]^2$$

also

$$[K:k] = n = \mathrm{ind}_k A.$$

[45] Es sind gerade die Bilder der σ_i bei der natürlichen Surjektion

$$G = G(k_s/k) \longrightarrow G(K/k),\ \sigma \mapsto \sigma|_K$$

mit dem Kern $H = G(k_s/K)$.

$$f(x) = (x - \sigma_1(\alpha))\bullet\ldots\bullet(x - \sigma_n(\alpha)).$$

Wir erhalten einen G-Modul-Isomorphismus[46]

$$\begin{aligned}K\otimes_k k_s &\cong k[x]/(f)\otimes_k k_s\\ &\cong k_s[x]/(f)\\ &\cong \oplus_{i=1}^n k_s[x]/(x - \sigma_i(\alpha)) \qquad \text{(Chinesischer Restesatz)}\\ &\cong k_s\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G/H]\\ &\cong^{47} \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], k_s)\\ &= M_H^G(k_s).\end{aligned}$$

---

[46] vgl. die analoge Rechnung am Ende des Beweises von 4.4.7.

[47] Wir schreiben $A := k_s$, identifizieren $k_s\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G/H]$ mit einer direkte Summe von Exemplaren von A,

$$k_s\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G/H] = A^{(G/H)}$$

(je ein direkter Summand für jedes σ_i) und betrachten die Abbildung

$$\alpha:\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], A) \longrightarrow A^{(G/H)},\ f \mapsto (\sigma_i f(\sigma_i^{-1}))_{i=1,\ldots,n}.$$

Ein H-Homomorphismus f auf $\mathbb{Z}[G]$ ist festgelegt, wenn man seien Wert auf jeder H-Nebenklasse an einer Stelle kennt, also zum Beispiel wenn man die Werte $f(\sigma_i)$. Umgekehrt kann die Werte für je ein Element jeder Nebenklassen festlegen. Dann gibt es genau einen H-Homomorphismus mit diesen Werten. Das bedeutet aber gerade, die Abbildung α ist bijektiv.

Für jedes $f\in\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], A)$ und jedes $\sigma\in G$ ist $\sigma\bullet f$ die Abbildung die Abbildung mit

$$(\sigma\bullet f)(x) = x\bullet\sigma$$

(vgl. die Definition in 3.3.1). Berechnen wir die i-te Koordinate $\alpha(\sigma\bullet f)$. Dazu schreiben wir

$$\sigma\sigma_j = \sigma_i h_i.$$

Die i.-te Koordinate von $\alpha(\sigma\bullet f)$ ist dann gleich

$$\begin{aligned}\alpha(\sigma\bullet f)_i &= \sigma_i(\sigma\bullet f)(\sigma_i^{-1})\\ &= \sigma_i f(\sigma_i^{-1}\sigma)\\ &= \sigma_i f(h_i\sigma_j^{-1})\\ &= \sigma_i h_i f(\sigma_j^{-1}) \qquad \text{(weil f ein H-Homomorphismus ist)}\\ &= \sigma\sigma_j f(\sigma_j^{-1})\\ &= \sigma\bullet\alpha(f)_j\end{aligned}$$

Mit anderen Worten, auf die j-te Koordinate von $\alpha(f)$ wird σ angewandt und das Ergebnis wird in die i-te Koordinate geschrieben.

Wir sehen, die zugehörige Operation von $\sigma\in G$ auf $A^{(G/H)}$ besteht darin, σ auf jede Koordinate des Elements von $A^{(G/H)}$ anzuwenden und außerdem die Koordinaten so zu permutieren, wie die Multiplikation mit σ die H-Nebenklassen von G permutiert. Mit anderen Worten, es ist gerade die G-Operation von $k_s\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G/H]$.

Durch Übergang zu den umkehrbaren Elementen erhalten wir die Behauptung.
QED.

4.5.9 Beweis von 4.5.7
Wir haben bereits die Injektivität von δ_n gezeigt (sogar die von δ_∞ - vgl. 4.4.7). Es reicht also die Surjektivität der Abbildung zu beweisen. Dazu betrachten wir die exakte Sequenz von G-Modul-Homomorphismen

$$1 \longrightarrow k_s^\times \longrightarrow (K\otimes_k k_s)^\times \longrightarrow (K\otimes_k k_s)^\times/k_s^\times \longrightarrow 1,$$

wobei die Injektion links durch $c \mapsto 1\otimes c$ gegeben ist und die Operation von G auf dem mittleren Modul von der Galois-Operation auf dem zweiten Tensor-Faktor kommt. Wir gehen zur Kohomologie bezüglich $G = G(k_s/k)$ über und erhalten die exakte Sequenz

(1) $$H^1(G, (K\otimes_k k_s)^\times/k_s^\times) \xrightarrow{\alpha} H^2(G, k_s^\times) \longrightarrow H^2(G, (K\otimes_k k_s)^\times).$$

Für Gruppe rechts erhalten wir mit Hilfe des vorhergehenden Abschnitts 4.5.8 und des Lemmas von Schapiro 3.3.3:

$$H^2(G, (K\otimes_k k_s)^\times) \cong H^2(G, M_H^G(k_s^\times)) \cong H^2(H, k_s^\times) \cong Br(K)$$

Die Gruppe in der Mitte ist

$$H^2(G, k_s^\times) = Br(k)$$

die Brauer-Gruppe von k. Auf Grund der exakten Sequenz von Brauer-Gruppen 4.4.13[48] liefert damit die linke Abbildung von (1) eine Surjektion

$$\alpha: H^1(G, (K\otimes_k k_s)^\times/k_s^\times) \longrightarrow Br(K/k).$$

Der Rest des Beweises wiederholt im wesentlichen die Argumentation des Beweises von 4.4.7.

Die Multiplikation mit einem umkehrbaren Element von $K\otimes_k k_s$ definiert einen K-linearen Automorphismus des n-dimensionalen k_s-Vektorraums $K\otimes_k k_s \longrightarrow K\otimes_k k_s$ und man erhält so einen Gruppen-Homomorphismus

$$(K\otimes_k K)^\times \longrightarrow GL(n, k_s),\ x \mapsto \text{Multiplikation mit } x.$$

Dieser läßt sich wie folgt in ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen einfügen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & k_s^\times & \longrightarrow & (K\otimes_k k_s)^\times & \longrightarrow & (K\otimes_k k_s)^\times/k_s^\times & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & k_s^\times & \longrightarrow & GL(n,k_s) & \longrightarrow & PGL(n,k_s) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Dabei soll die Abbildung links oben von der Einbettung in den zweiten Tensor-Faktor kommen,

$$k_s^\times \longrightarrow (K\otimes_k k_s)^\times,\ c \mapsto 1\otimes c.$$

Alle Abbildungung den Diagramms sind dann verträglich mit der Operation der Galois-Gruppe G.[49] Wir gehen zur Kohomologie über und erhalten ein kommutatives Diagramm mit exakter oberer Zeile:

[48] vgl. die Bemerkung in Anschluß an den Beweis von 4.4.13.

$$\begin{array}{ccccc} H^1(G,(K\otimes_k k_s)^\times/k_s^\times) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(G,k_s^\times) & \longrightarrow & H^2(G,(K\otimes_k k_s)^\times) \\ \downarrow & & \| & & \\ H^1(G,PGL(n,k_s)) & \xrightarrow{\delta_n} & H^2(G,k_s^\times) & & \end{array}$$

Wie wir gerade gezeigt haben ist das Bild der linken oberen Abbildung α die relative Brauer-Gruppe Br(K/k). Jedes Element $u \in Br(K/k)$ kommt deshalb von einem Element v aus der linken unteren Gruppe,

$$v \in H^1(G, PGL(n, k_s)),\ \delta_n(v) = u \in Br(K/k) \subseteq H^2(G, k_s^\times).$$

Wir haben noch zu zeigen, v liegt sogar im Kern der Restriktion (von G auf H).
Nun ist der Zusammenhangshomomorphismus δ_n verträglich mit den Restriktionen

$$\text{Res: } H^1(G, PGL(n, k_s)) \longrightarrow H^1(H, PGL(n, k_s))$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Res: } H^2(G, k_s^\times) & \longrightarrow & H^2(H, k_s^\times) \\ \| & & \| \\ Br(k) & & Br(K) \end{array}$$

d.h.

$$\delta_n(Res(v)) = Res(\delta_n(v)) = Res(u) = 0$$

Das Gleichheitszeichen rechts gilt dabei wegen $u \in Br(K/k)$ (vgl. die exakte Sequenz 4.4.13). Es folgt

$$Res(v) \in Ker(\delta_n: H^1(H, PGL(n, k_s)) \longrightarrow H^2(H, k_s^\times)).$$

Aus dem Beweis von 4.4.7 wissen wir, die Abbildungen δ_m sind für alle m injektiv (vgl. die Bemerkung hinter dem Beweis von 4.4.7), d.h. es gilt

$$Res(v) = 0,$$

d.h.

$$v \in Ker(\text{Res: } H^1(G, PGL(n, k_s)) \longrightarrow H^1(H, PGL(n, k_s))).$$

QED.

4.5.10 Charakterisierung des Index I (als ggT)

Sei A eine zentrale einfache k-Algebra. Dann ist

$$ind_k(A) = ggT\{ [K:k] \mid K/k \text{ endlich separabel, A zerfällt über K}\}$$

der größte gemeinsame Teiler der Grade endlicher separabler Körpererweiterungen K/k, für welche A zerfällt über K.

Beweis. Nach 4.5.3 gibt es eine separable Körper-Erweiterung des Grades

$$i := ind_k(A),$$

über welcher A zerfällt. Es reicht deshalb zu zeigen:

(*) Ist K/k eine endliche separable Körpererweiterung, über welcher A zerfällt, so gilt

$$i \mid [K:k]..$$

Sei K/k endlich und separabel des Grades n und derart, daß A über K zerfällt. Die Klasse von A in Br(K/k) kommt von einem Element von $H^1(k, PGL(n, k_s))$. Nach

---

[49] Für die mittlere vertikale Abbildung kommt das von der Tatsache, daß zu einer fixierten Basis $\omega_1, ..., \omega_m$ von K über k, die zugehörige Basis $\omega_1 \otimes 1, ..., \omega_m \otimes 1$ von $K \otimes_k K$ über K invariant bezüglich der Operation von G ist.

Theorem 2.4.4 komm dieses Element von einer zentralen einfachen k-Algebra A' des Grades n, welche über K zerfällt. Insbesondere gilt[50]

$$\mathrm{ind}_k A' \mid \deg_k A' = n.$$

Da die Algebren A und A' dasselbe Element der Brauergruppe repräsentieren, ist ihr Index jedoch gleich (vgl. Bemerkung 4.5.1(iii)), d.h.

$$i = \mathrm{ind}_k A = \mathrm{ind}_k A' \mid \deg_k A' = n.$$

QED.

4.5.11 Charakterisierung des Index II (als Minimum).

Sei A eine zentrale einfache k-Algebra. Dann ist

$$\mathrm{ind}(A) = \min \{[K:k] \mid K/k \text{ endliche separabel, } A \text{ zerfällt über } K\}$$

der kleinste Grad einer endlichen separablen Körpererweiterung von k , über welcher A zerfällt.

Beweis. Folgt aus 4.5.10 und 4.5.3.

QED.

4.5.12 Der Index von Algebren die in Br(k) dieselbe Untergruppe erzeugen

Seien A und B zentrale einfache Algebren über dem Körper k, welche in Br(k) dieselbe Untergruppe erzeugen. Dann gilt

$$\mathrm{ind}_k A = \mathrm{ind}_k B.$$

Beweis. Bezeichnen wir mi "$\sim$" die Brauer-Äquivalenz. Nach Voraussetzung gibt es eine natürliche Zahlen m mit

$$A^{\otimes m} \sim B,$$

d.h. die beiden Algebren besitzen isomorphe Matrizen-Algebren,

$$M_a(A^{\otimes m}) \cong M_b(B) \tag{1}$$

für geeignet gewählte natürliche Zahlen a und b.

Nach 4.5.11 gibt es eine separable Körper-Erweiterung K/k derart, daß

$$[K:k] = \mathrm{ind}_k A$$

ist und A über K zerfällt, d.h. A ist isomorph zu einer Matrizen-Algebra über k. Dann gilt aber letzteres auch für $A^{\otimes m}$ und wegen (1) auch für $M_b(B)$. Nach Bemerkung 4.5.1 ist damit

$$1 = \mathrm{ind}_K M_b(B\otimes_k K) =^{51} \mathrm{ind}_K B\otimes_k K,$$

d.h. B zerfällt über K Auf Grund der Beschreibung des Index als Minimum in 4.5.11 folgt

$$\mathrm{ind}_k B \le [K:k] = \mathrm{ind}_k A.$$

Aus Symmetrie-Gründen besteht auch die umgekehrte Ungleichung.

QED.

4.5.13 Teilbarkeitsrelationen

Seien K/k eine endliche separable Körper-Erweiterung und A eine zentrale einfache k-Algebra. Dann gilt

---

[50] Ist $A' = M_m(D')$ mit einer Divisionsalgebra D', so ist

$$\dim_k A' = m^2 \cdot \dim_k D'$$

also

$$\deg A' = m \cdot \deg D' = m \cdot \mathrm{ind}\, A'.$$

[51] Brauer-äquivalente Algebren haben denselben Index (nach Bemerkung 4.5.1(ii)).

$$\mathrm{ind}_K\, A\otimes_k K \mid \mathrm{ind}_k(A) \mid [K:k]\bullet\mathrm{ind}_K(A\otimes_k K).$$

Beweis. Die linke Teilbarkeit folgt aus der Charakterisierung des Index als größten gemeinsamen Teiler in 4.5.10.[52] Zum Beweis der rechten wählen wir eine endliche separable Körper-Erweiterung K'/K mit

$$[K':K] = \mathrm{ind}_K\, A\otimes_k K,$$

über welcher $A\otimes_k K$ zerfällt. Eine solche existiert nach 4.5.3. Dann ist aber K' auch ein Zerfällungskörper für A. Die Charakterisierung des Index als größten gemeinsamen Teiler in 4.5.10 liefert

$$\mathrm{ind}_k\, A \mid [K':k] = [K:k]\bullet[K':K] = [K:k]\bullet\mathrm{ind}_K\, A\otimes_k K$$

QED.

4.5.14 Erweiterungen mit einem zum Index teilerfremden Grad

SeienK/k eine endliche separable Körper-Erweiterung und A eine zentrale einfache k-Algebra mit

$$\mathrm{ind}_k A \text{ teilerfremd zu } [K:k].$$

Dann gilt

$$\mathrm{ind}_k A = \mathrm{ind}_K(A\otimes_k K).$$

Insbesondere ist $A\otimes_k K$ eine Divisionsalgebra, falls A eine ist.

Beweis. In der zweiten Teilbarkeitsbeziehung von 4.5.13 kann man den Faktor [K:k] auf der rechten Seite weglassen (wegen der Teilerfremdheit).
QED.

Wir wenden uns jetzt der zweiten angekündigten Invarianten zu.

4.5.15 Die Periode einer zentralen einfachen Algebra

Die <u>Periode</u> oder auch der <u>Exponent</u> einer zentralen einfachen Algebra A über dem Körper k ist definiert als die Ordnung von deren Äquivalenzklasse in Br(k). Sie wird mit

$$\mathrm{per}(A)$$

bezeichnet.

4.5.16 Die Teiler von Index und Periode (Brauer)

Seien k ein Körper und A eine zentrale einfache k-Algebra. Dann gilt:

(i) $\mathrm{per}(A) \mid \mathrm{ind}_k(A)$.

(ii) In den Primfaktorzerlegungen von per(A) und $\mathrm{ind}_k(A)$ kommen dieselben Primzahlen vor.

Zum Beweis von (ii) benötigen wir die folgende Aussage.

4.5.17 Lemma

Seien A eine zentrale einfache k-Algebra und p eine Primzahl welche die Periode von A nicht teilt. Dann zerfällt A über einer endlichen separablen Körper-Erweiterung K/k mit einem zu p teilerfremden Grad.

Beweis. Sei L/k eine endliche Galois-Erweiterung mit der Eigenschaft, daß Br(L/k) die Klasse der Algebra A enthält[53],

---

[52] Jeder Körper-Erweiterung, über welcher A zerfällt, ist auch einer Erweiterung, über welcher $A\otimes_k K$ zerfällt.

[53] z.B. kann man für L einen Zerfällungskörper von A wählen.

$$[A] \in Br(L/k).$$

Bezeichne weiter

$$P \subseteq G(L/k)$$

eine p-Sylow-Untergruppe und

$$K := L^P,$$

deren Fixkörper. Dann ist

$$Br(L/K) \cong H^2(G(L/K), L^\times) \cong H^2(P, L^\times).$$

Weil die Ordnung von P nach Konstruktion eine Potenz von p ist, ist diese Brauer-Gruppe eine p-Torsions-Gruppe (nach 3.3.9). Die Ordnung des Bildes von [A] bei der Restriktionsabbildung

$$Res: Br(L/k) \longrightarrow Br(L/K)$$

muß also eine p-Potenz sein. Nach Voraussetzung soll aber per(A) teilerfremd zu p sein. Das Bild von [A] bei der Restriktion ist also trivial. Mit anderen Worten, A zerfällt über K. Nach Konstruktion ist der Grad

$$[K:k] = [L:k]/[L:K] = \#Gal(L/k)/\#Gal(L/K) = \#Gal(L/k)/\#P$$

teilerfremd zu p.

QED.

4.5.18 Beweis von 4.5.16

Zu (i). Nach 4.5.3 gibt es eine separable Körper-Erweiterung K/k des Grades

$$[K:k] = ind_k A,$$

sodaß A über K zerfällt. Nach 4.5.7 liegt $[A] \in Br(k)$ im Kern der Restriktionsabbildung

$$Res: Br(k) \longrightarrow Br(K).$$

einen separablen Zerfällungskörper von A dessen Grad über k gleich $ind_k A$ ist. Nach

Wir setzen mit der Korestriktion $Cor: Br(K) \longrightarrow Br(k)$ zusammen und sehen so, daß [A] annulliert wird bei der Multiplikation mit dem Index

$$n = (G(k_s/k):G(k_s/K)) =^{54} [K:k] =^{55} ind_k A$$

(vgl. 4.2.12):

$$n \bullet [A] = 0.$$

Die Ordnung von [A] ist also ein Teiler von n, d.h. es gilt die Aussage von (i).

Zu (ii). Sei p eine Primzahl, welche teilerfremd zu per(A) ist. Nach Lemma 4.5.17 gibt es einen separablen Zerfällungskörper K von A (über k) mit

$$[K:k] \text{ teilerfremd zu } p.$$

Auf Grund der Charakterisierung von $ind_k A$ als größten gemeinsamen Teiler (vgl. 4.5.10) ist damit

---

[54] Sei L/k eine Galois-Erweiterung, welche den Körper K enthält. Dann gilt

$$G(k_s/L)) = Ker(G(k_s/k) \longrightarrow G(L/k), \sigma \mapsto \sigma|_L)$$

$$G(k_s/L)) = Ker(G(k_s/K) \longrightarrow G(L/K), \sigma \mapsto \sigma|_L)$$

also

$$[L:k] = \# G(L/k) = \# G(k_s/k)/G(k_s/L))$$

$$[L:K] = \# G(L/K) = \# G(k_s/K)/G(k_s/L))$$

und damit

$$[K:k] = [L:k]/[L:K] = \#(G(k_s/k)/G(k_s/K)) = n$$

[55] nach Wahl von K.

$$\mathrm{ind}_k\, A \text{ teilerfremd zu } p.$$

Zusammen mit der Aussage von (i), $\mathrm{per}(A) \mid \mathrm{ind}_k A$ liefert dies die Behauptung von (ii).

4.5.19 Ein Problem

Es ist eine interessante und im hohem Maße offene Frage, welches die möglichen Werte des Quotienten

$$\mathrm{ind}(A)/\mathrm{per}(A) = ?$$

für eine zentrale einfache Algebra A sind. M. Artin [1] vermutet zum Beispiel,

$$\mathrm{ind}_k(A) = \mathrm{per}(A) \text{ für Körper } k \text{ einer kohomologischen Dimension } 2.$$

(zur Definiton der kohomologischen Dimension siehe 6.1.8).
Von dieser Vermutung weiß man, daß sie in den folgenden Fällen richtig ist.

- für arithmetische Körper (siehe 6.3.10 und 6.5.5 und 6.5.6)
- für Funktionenkörper von komplexen Flächen (de Jong [1])
- für Vervollständigungen letzterer in den glatten Punkten (Colliot-Thélène-Ojanguren-Parimala [1]).

Ein anderes interesantes Ergebnis in diesem Kontext stammt von Saltman [4]: Ist k der Funktionen-Körper einer über den p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ definierten Kurve, so gilt

$$\mathrm{ind}(A)/\mathrm{per}(A) \le 2$$

für jede zentrale einfache k-Algebra A mit per(A) teilerfremd zu p.

4.5.20 Dekompositionssatz von Brauer

Seien k ein Körper und D eine zentrale Divisionsalgebra über k, deren Index die Primfaktorzerlegung

$$\mathrm{ind}_k(D) = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}$$

besitzt. Dann gibt es bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte zentrale Divisionsalgebren $D_1,\ldots,D_r$ über k mit

$$\mathrm{ind}_k\, D_i = p_i^{m_i} \text{ für } i = 1, \ldots , r$$

und

$$D = D_1 \otimes_k \ldots \otimes_k D_r.$$

Beweis. Die Brauer-Gruppe ist eine Torsionsgruppe (vgl. 4.4.10). Sie zerfällt deshalb in eine direkte Summe ihrer p-primären Torsionsuntergruppen,[56]

---

[56] Sei $x \in \mathrm{Br}(k)$ ein Element der Ordnung $n = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}$. Wir definieren

$$a_i$$

als das Produkt aller $p_j^{m_j}$ mit $j \ne i$. Dann ist $a_i x$ ein Element der Ordnung $p_i^{m_i}$,

$$\mathrm{ord}(a_i x) = p_i^{m_i}.$$

Weiter sind die a_i teilerfremd, d.h. es gilt

$$1 = \sum_{i=1}^{r} a'_i a_i \text{ für geeignete } a'_i \in \mathbb{Z},$$

d.h.

$$Br(k) = \oplus_{p \text{ Primzahl}} Br(k)(p).$$

Die Klasse von D läßt sich entsprechend als Summe

(1) $$[D] = [D_1]+...+[D_r]$$

schreiben mit Divisionsalgebren D_i , deren Klassen $[D_i] \in Br(k)(p_i)$ eine Ordnung besitzen, welche gleich einer Potenz einer Primzahl p_i ist. Das Tensorprodukt

$$A := D_1 \otimes_k ... \otimes_k D_r$$

hat den Grad

$$\deg_k A = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{ind}_k(D_i)$$

und den Index

(2) $$\mathrm{ind}_k(A) = \deg_k(D)$$

(da letzterer für Brauer-äquivalente Algebren derselbe ist, vgl. Bemerkung 4.5.1(iii)). Insbesondere ist der Index von D,

(3) $$\mathrm{ind}_k(D) \mid \prod_{i=1}^{r} \mathrm{ind}_k(D_i)$$

eine Teiler des Produkts der Indizes der D_i.

Nach 4.5.3 zerfällt jede zentrale einfache k-Algebra über einer separablen Erweiterung, deren Grad gleich dem Index der Algebra ist. Durch wiederholtes Anwenden dieser Tatsache finden wir für jedes i eine endliche separable Erweiterung

$$K_i/k \text{ mit } [K_i:k] \text{ teilerfremd zu } p_i$$

über welcher alle D_j mit $j \neq i$ zerfallen.[57] Wegen (1) haben dann aber

$$D \otimes_k K_i \text{ und } D_i \otimes K_i$$

dieselbe Klasse in $Br(K_i)$. Insbesondere gilt

$$\mathrm{ind}_{K_i}(D_i \otimes K_i) = \mathrm{ind}_{K_i}(D \otimes_k K_i) \mid \mathrm{ind}_k(D).$$

$$x = \sum_{i=1}^{r} a'_i a_i x$$

und der i-te Summand hat als Ordnung eine Potenz von p_i. Wir haben noch die Eindeutigkeit der Zerlegung zu beweisen. Angenommen die Zerlegung wäre nicht eindeutig. Dann gäbe es eine nicht-triviale Zerlegung der Null,

(*) $$0 = x_1 + ... + x_r \text{ mit } \mathrm{ord}(x_i) = p_i^{m_i}.$$

Weil a_i teilerfremd zu p_i ist, ist die Multiplikation mit a_i auf den Elementen von p_i-Potenzordnung injektiv. Es reicht also zu zeigen,

$$a_i x_i = 0 \text{ für jedes i.}$$

Bei Multiplikation von (*) mit a_i werden aber alle Summanden der rechten Seite von (*) annulliert (mit eventueller Ausnahme des i-ten Summanden).

[57] Nach Wahl von D_j hat D_j als Periode eine Potenz von p_j. Dasselbe gilt anch 4.5 dann aber auch für den Index (nach 4.5.16 (ii)).

(nach 4.5.13). Die Algebren $D_i \otimes K_i$ sind nach wie vor Divisionsalgebren über K_i vom Index $\mathrm{ind}_k D_i = p_i$-Potenz (weil der Grad von K_i über k teilerfremd zu diesem Index ist, vgl. 4.5.14), d.h.

$$\mathrm{ind}_k(D_i) \mid \mathrm{ind}_k(D).$$

Zusammen mit (3) erhalten wir damit

(4) $$\mathrm{ind}_k(D) = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{ind}_k(D_i) =^{58} \mathrm{ind}_k A.$$

Die Algebren D und A haben dieselbe Brauer-Klasse (nach (1)). Außerdem gilt

$$\mathrm{ind}_k A =^{59} \prod_{i=1}^{r} \mathrm{ind}_k(D_i) =^{60} \prod_{i=1}^{r} \deg_k(D_i) =^{61} \deg_k A$$

Insbesondere ist auch A eine Divisionsalgebra. Als Brauer-äquivalente Divisisonsalgebren sind D und A aber isomorph,

$$D \cong A,$$

d.h. es existiert die behauptete Zerlegung.

Umgekehrt erhält man aus einer Zerlegung der behaupteten Art eine Summen-Zerlegung (1). Aus deren Eindeutigkeit folgt dann aber die Eindeutigkeit der D_i bis auf Isomorphie (weil es nach Wedderburn in jeder Brauerklasse genau eine Divisionsalgbra gibt bis auf Isomorphie).

QED.

4.6 Das Galois-Symbol

Die Untersuchung des Galois-Symbols ist einer der wichtigsten Gegenstände dieses Buches. Das Galois-Symbol ist eine Abbildung

$$h^n_{k,m}: K^M_n(k) \longrightarrow H^n(k, \mu_m^{\otimes n})$$

von der n-ten Milnor-K-Gruppe $K^M_n(k)$ des Körpers k mit Werten in der n-ten Galois-Kohomologie von k mit Werden in der n-ten Tensor-Potenz der Gruppe der m-ten Einheitswurzeln. Wir beginnen mit der Definition der K-Gruppen von Milnor und beschreiben dann die Konstruktion dieser Abbildung.

Bemerkung

Wir erinnern daran,

$$\mu_m = \{\zeta \in k_s^\times \mid \zeta^m = 1\}$$

war definiert als die Gruppe der m-ten Einheitswurzeln in einer fixierten separablen Abschließung

$$k_s$$

des Körpers k und ist mit der Operation der Galois-Gruppe $G(k_s/k)$ versehen, die durch Einschränken der natürlichen Operation dieser Gruppe auf k_s entsteht.

4.6.1 Die K-Gruppe von Milnor des Körpers k

Seien k ein Körper und n > 1 eine natürliche Zahl. Die n-te K-Gruppe von Milnor des Körpers k,

---

[58] Wegen (2).

[59] nach (4).

[60] Weil die D_i Divisionsalgebren sind.

[61] Weil A das Tensorprodukt der D_i ist.

$$K_n^M(k)$$

ist definiert als die Faktorgruppe des n-fachen Tensorprodukts

$$k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \ldots \otimes_{\mathbb{Z}} k^\times$$

nach der Untergruppe, die von allen Elementen

$$a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$$

erzeugt wird, für welche es Indizes i und j gibt mit

$$a_i + a_j = 1.$$

Für $a_1, \ldots, a_n \in k^\times$ bezeichnen wir die Restklasse des Elements $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ in der n-ten K-Gruppe mit

$$\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Die Elemente dieser Restklassen-Gruppe werden wir Symbole nennen.
Wir setzen außerdem

$$K_0^M(k) = \mathbb{Z} \text{ und } K_1^M(k) = k^\times$$

und nennen diese Gruppen auch 0-te bzw. 1-te Milnor-K-Gruppe.

4.6.2 Konstruktion

Seien k ein Körper und m eine natürliche Zahl welche teilerfremd zur Charakteristik von k ist,

$$\mathrm{ggT}(m, \mathrm{char}(k)) = 1.$$

Das Cup-Produkt definiert dann eine Abbildung

$$H^1(k, \mu_m)) \otimes \ldots \otimes H^1(k, \mu_m)) \longrightarrow H^n(k, \mu_m^{\otimes n}),\ c_1 \otimes \ldots \otimes c_n \mapsto c_1 \cup \ldots \cup c_n$$

des n-fachen Tensorprodukts von $H^1(k, \mu_m))$ über $\mathbb{Z}$ mit Werten in der n-ten Galois-Kohomologie von k. Die Gruppe $G(k_s/k)$ operiert dabei auf $\mu_m^{\otimes n}$ vermittels

$$\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \sigma(x_1) \otimes \ldots \otimes \sigma(x_n) \text{ für } \sigma \in G(k_s/k) \text{ und } x_i \in \mu_m.$$

Auf Grund des Satzes von Kummer (vgl. 4.3.7) gilt

$$H^1(k, \mu_m)) \cong k^\times/(k^\times)^m,$$

d.h. es besteht eine Surjektion

$$\partial: k^\times \twoheadrightarrow H^1(k, \mu_m))$$

mit dem Kern $(k^\times)^m$, welche wir im folgenden Kummer-Abbildung nennen wollen. Durch Zusammensetzen dieser Surjektion mit dem Cup-Produkt erhalten wir eine Abbildung

$$\partial^n: k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \ldots \otimes_{\mathbb{Z}} k^\times \longrightarrow H^n(k, \mu_m^{\otimes n}),\ c_1 \otimes \ldots \otimes c_n \mapsto \partial(c_1) \cup \ldots \cup \partial(c_n).$$

Bemerkung

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, diese Abbildung faktorisiert sich über die n-te K-Gruppe von Milnor. Die auf der Milnor-Gruppe induzierte Abbildung wird dann das zu konstruierende Galois-Symbol sein.

4.6.3 Einige Elemente aus dem Kern von ∂^n

Seien k eine Körper, m eine zur Charakteristik von k teilerfremde natürliche Zahl und

$$a_1,...,a_n \in k^\times$$

mit der Eigenschaft, daß es Indizes i,j,

$$\leq i \leq j \leq n$$

gibt für welche

$$a_i + a_j = 1$$

ist. Dann gilt

$$\partial^n(a_1 \otimes ... \otimes a_n) = 0,$$

wenn ∂^n die in 4.6.2 konstruierte Abbildung bezeichnet.

Zum Beweis benötigen wir die folgende Aussage.

4.6.4 Zwei kommutative Diagramme

Sei K/k eine endliche separable Körper-Erweiterung. Dann sind die folgenden beiden Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} k^\times & \xrightarrow{\partial_k} & H^1(k,\mu_m) \\ i\downarrow & & \downarrow\mathrm{Res} \\ K^\times & \xrightarrow{\partial_K} & H^1(K,\mu_m) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K^\times & \xrightarrow{\partial_K} & H^1(K,\mu_m) \\ N_{K/k}\downarrow & & \downarrow\mathrm{Cor} \\ k^\times & \xrightarrow{\partial_k} & H^1(k,\mu_m) \end{array}$$

Dabei bezeichne i: $k^\times \longrightarrow K^\times$ die natürliche Einbettung.

Beweis. Im Kontext der Definitonen von Restriktion und Korestriktion haben wir gesehen, daß diese Abbildungen mit den Zusammenhangshomomorphismen zu exakten Sequenzen der Koeffizienten-Gruppen kommutieren[62]. Das gilt insbesondere für die kurze exakte (Kummer-) Sequenz

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow k_s^\times \xrightarrow{m} k_s^\times \longrightarrow 1.$$

Mit anderen Worten, man erhält kommutative Diagramme, wenn man die linken vertikalen Abbildungen i bzw. $N_{K/k}$ durch die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} H^0(k, k_s^\times) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & H^0(K, k_s^\times) \\ \| & & \| \\ k^\times & & K^\times \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} H^0(K, k_s^\times) & \xrightarrow{\mathrm{Cor}} & H^0(k, k_s^\times) \\ \| & & \| \\ K^\times & & k^\times \end{array}.$$

ersetzt. Nun ist aber Res fur die 0-te Kohomologie gerade die natürliche Einbettung i, d.h. das linke Diagramm ist tatsächlich kommutativ. Die Korestriktion wird mit Hilfe eines Repräsentantensystems

$$\sigma_1,...,\sigma_n \in G(k_s/k)$$

der Restklassen modulo $G(k_s/K)$ definiert (vgl. 3.3.7). Für die 0-te Kohomologie ist sie gerade durch die Abbildungsvorschrift (vgl. 3.3.7)

$$\Phi \mapsto \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \bullet \Phi(\sigma_j^{-1} 1) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \bullet \Phi$$

gegeben (wenn der Koeffizienten-Modul A eine additive Gruppe ist). Speziell für die multiplikative Gruppe $A = K^\times$ erhält man gerade die Norm-Abbildung.

---

[62] vgl. 3.3.11 Beispiel 1.

QED.

4.6.5 Beweis von 4.6.3

Auf Grund der Superkommutativität des Cup-Produkts können wir annehmen, es gilt

$$i = 1 \text{ und } j = 2.$$

Auf Grund der Assoziativität des Cup-Produkts können wir annehmen

$$n = 2,$$

d.h. es reicht zu zeigen, für jedes $a \in k^\times$ ist

$$\partial^2(a\otimes(1-a)) = \partial(a)\cup\partial(1-a)$$

die triviale Kohomologie-Klasse.

Zum Beweis betrachten wir die Zerlegung

$$x^m - a = \prod_{\ell=1}^{s} f_\ell \in k[x]$$

des Polynoms x^m-a in irreduzible Faktoren $f_\ell \in k[x]$. Für jedes ℓ fixieren wir eine Nullstelle α_ℓ in k_s,

$$f_\ell(\alpha_\ell) = 0,\ \alpha_\ell \in k_s,$$

und setzen

$$K_\ell := k(\alpha_\ell).$$

Wir erhalten

$$1 - a = \prod_{\ell=1}^{s} f_\ell(1) \overset{63}{=} \prod_{\ell=1}^{s} N_{K_\ell/k}(1-\alpha_\ell).$$

Weil ∂^2 ein Gruppen-Homomorphismus ist, folgt

$$\partial^2(a\otimes(1-a)) = \partial(a)\cup \sum_{\ell=1}^{s} \partial(N_{K_\ell/k}(1-\alpha_\ell)).$$

Auf Grund des zweiten kommutativen Diagramms von 4.6.4 können wir den Ausdruck rechts auch schreiben als

$$\partial^2(a\otimes(1-a)) = \partial(a)\cup \sum_{\ell=1}^{s} \mathrm{Cor}_k^{K_\ell}\partial(1-\alpha_\ell) = \sum_{\ell=1}^{s} \mathrm{Cor}_k^{K_\ell}(\mathrm{Res}_k^{K_\ell}\,\partial(a)\cup\partial(1-\alpha_\ell)).$$

Das Gleichheitszeichen rechts kommt von der Projektionsformel 3.4.12. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, das Bild von a beim Zusammenhangshomomorphismus

$$\partial: K_\ell^\times \longrightarrow H^1(K_\ell, \mu_m)$$

zur Kummer-Sequenz ist Null. Der Kern dieses Zusammenhangshomomorphismus besteht gerade aus dem m-ten Potenzen $(K_\ell^\times)^m$. Wegen

$a = \alpha_\ell^m$ und $\alpha_\ell \in K_\ell$ liegt a tatsächlich im Kern dieser Abbildung.

---

[63] Man denke sich $f_\ell(x)$ in Linearfaktoren zerlegt. Einer dieser Linearfaktoren ist $x - \alpha_\ell$. Die übrigen erhält man, indem man α_ℓ durch seine Konjugierten ersetzt, d.h. $f_\ell(1)$ ist das Produkt der Konjugierten von $1-\alpha_\ell$.

4.6.6 Das Galois-Symbol

Seien k ein Körper und m eine natürliche Zahl welche teilerfremd zur Charakteristik von k ist,

$$ggT(m, char(k)) = 1.$$

Die in 4.6.2 konstruierte Abbildung

$$\partial^n: k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \ldots \otimes_{\mathbb{Z}} k^\times \longrightarrow H^n(k, \mu_m^{\otimes n}),\ c_1 \otimes \ldots \otimes c_n \mapsto \partial(c_1) \cup \ldots \cup \partial(c_n).$$

faktorisiert sich nach 4.6.3 über die n-te Milnorsche K-Gruppe des Körper k. Die induzierte Abbildung

$$h^n_{k,m}: K^M_n(k) \longrightarrow H^n(k, \mu_m^{\otimes n})$$

heißt n-tes Galois-Symbol von k.

4.6.7 Bloch-Kato-Vermutung

Seien k ein Körper und m eine natürliche Zahl welche teilerfremd zur Charakteristik von k ist,

$$ggT(m, char(k)) = 1.$$

Dann induziert das Galois-Symbol einen Isomorphismus

$$K^M_n(k) \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow H^n(k, \mu_m^{\otimes n}).$$

Bemerkungen

(i) Der Fall, daß m eine Potenz von 2 ist, wird auch als Milnor-Vermutung bezeichnet. Die Verknüpfung der Vermutung mit den Namen von Bloch und Kato ist nicht sicher aber allgemein akzeptiert.
(ii) Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial.
(iii) Für $n = 1$ ist das gerade der Satz von Kummer.
(iv) Der Fall $n = 2$ ist Gegenstand von Kapitel 9 dieses Buches.
(v) Der Fall n beliebig und m eine Potenz von 2 wurde von Voevodsky [1] bewiesen.
(vi) Ein Beweis des allgemeinen Falls ist von Voevodsky und Rost angekündigt, die Einzelheiten sind jedoch nur teilweise zugänglich.

4.6.8 Satz von Merkurjev-Suslin

Die Bloch-Kato-Vermutung ist richtig für $n = 2$.

Bemerkung

Im nachfolgenden Abschnitt werden wir den Zusammenhang dieser Aussage mit der in 2.5.7 formulierten erklären, die wir ebenfalls Satz von Merkurjev-Suslin genannt haben.

4.7 Zyklische Algebren und Symbole

4.7.1 Die Situation

Wir setzen hier die Untersuchungen des vorigen Abschnitts fort, konzentieren uns jedoch auf den Fall,

$$n = 2.$$

Wir nehmen fürs erste an, daß der Grundkörper k eine zu m teilerfremde Charakteristik besitzt und eine m-te primitive Einheitswurzel enthält,

m teilerfremd zu char(k)

$\omega \in k$, ω primitive m-te Einheitswurzel.

Das Symbol $h^2_{k,m}$ nimmt Werte in $H^2(k, \mu_m^{\otimes 2})$ an. Wir fixieren einen Isomorphismus

$$\mu_m \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ \omega \mapsto 1,$$

und identifizieren auf diese Weise den Wertevorrat dieses Symbols,

(1) $$H^2(k, \mu_m^{\otimes 2}) \cong H^2(k, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong H^2(k, \mu_m) \cong {}_m\mathrm{Br}(k),$$
mit den m-Teilungspunkten der Brauergruppe Br(k), vgl. 4.4.11. Wir weisen darauf hin, diese Folge von Isomorphismen hängt von der Wahl der Einheitswurzel ω ab.

4.7.2 Symbole von $K_2^M(k)$ und zyklishen k-Algebren

Seien a, b $\in k^\times$. Dann entspricht bei den Isomorphismen von 4.7.1(1) das Element
$$h^2_{k,m}(\{a,b\}) \in H^2(k, \mu_m^{\otimes 2})$$
gerade die Brauer-Äquivalenz-Klasse
$$[(a,b)_\omega^{-1}] \in {}_m\mathrm{Br}(k)$$
der zur zyklischen Algebra $(a,b)_\omega$ von 2.5.5 entgegengesetzten k-Algebra.

Bemerkungen

(i) Wie wir in 2.5.3 und 2.5.6 gesehen haben, zerfällt die Algebra $(a,b)_\omega$ über einer Galois-Erweiterung K/k des Grades m, d.h. des gilt (nach 4.5.16 und 4.5.10)
$$\mathrm{per}((a,b)_\omega \mid \mathrm{ind}\,(a,b)_\omega \mid m,$$
d.h diese Algebra repräsentiert tatsächlich ein Element von ${}_m\mathrm{Br}(k)$.

(ii) Aus der Aussage 4.7.2 ergibt sich, daß der Satz von Merkurjev-Suslin, wie wir ihn in 2.5.7 formuliert haben aus der Surjektivität von $h^2_{k,m}$ folgt (unter der Annahme, $\omega \in k$). Im folgenden wollen wir deshalb unter dem Satz von Merkurjev-Suslin die allgemeinere Aussage von 4.6.6 verstehen.

(iii) Bevor wir uns dem Beweis der obigen Aussage zuwenden, erinnern wir an einige Konstruktionen im Zusammenhang mit dem Satz von Kummer 4.3.7.

4.7.3 Eine Beschreibung der Kummer-Abbildung $\partial: k^\times \longrightarrow H^1(k, \mu_m)$

Sei k ein Körper, welcher eine primitive m-te Einheitswurzel
$$\omega \in k$$
enthält. Identifiziert man
$$H^1(k, \mu_m) \cong^{64} H^1(k, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) =^{65} \mathrm{Hom}(G(k_s/k), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}),$$
so entspricht (vgl. den Beweis von 4.3.11) das Bild $\partial(a)$ von $a \in k^\times$ bei der Kummer-Abbildung gerade einem Charakter
$$\lambda: G(k_s/k) \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$
mit $\lambda(\sigma) = 1$,[66] wobei σ einen k-Automorphismus

---

[64] Wir identifizieren μ_m mit $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ indem wir ω in die Restklasse der 1 abbilden.

[65] Weil $G = G(k_s/k)$ auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ trivial operiert, sind die 1-Kozyklen von G gerade die Homomorphismen und die 1-Koränder sind alle identisch Null.

[66] Der zu a gehörige Charakter ist nach dem Beweis von 4.3.11 die Abbildung
$$G(k_s/k) \longrightarrow \mu_m,\ \sigma \mapsto \alpha/\sigma(\alpha),$$
Speziell für den angegebenen Automorphis erhalten wir als Bild die Einheitwurzel ω, die gerade dem Erzeuger 1 von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ entspricht.

$$\sigma: k_s \longrightarrow k_s\,,\ \sqrt[m]{a} \mapsto \omega\cdot\sqrt[m]{a},$$

bezeichnet, der eine m-te Wurzel $\sqrt[m]{a}$ aus a in $\omega\cdot\sqrt[m]{a}$ abbildet. Den Kern dieses Charakters haben im Beweis von 4.3.11 berechnet, es ist

$$\mathrm{Ker}(\lambda) = G(k_s/k(\alpha)),$$

d.h. λ induziert einen Isomorphismus

$$\tilde{\lambda}: G(k(\alpha)/k) = G(k_s/k)/G(k_s/k(\alpha)) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Nach 2.5.6 ist dann die k-Algebra $(a,b)_\omega$ isomorph[67] zur zyklischen k-Algebra $(\tilde{\lambda}, b)$,

$$(a,b)_\omega = (\tilde{\chi}, b).$$

4.7.4 Die zyklische Algebra (χ, b) als Cup-Produkt

Seien k ein Körper, m > 0 eine natürliche Zahl und

$$K/k$$

eine zyklische Galois-Erweiterung des Grades m mit der Gruppe G. Weiter seien

$$\chi: G \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

ein Isomorphismus und

$$\tilde{\chi}: G(k_s/k) \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

eine Anhebung von χ zu einem Charakter auf der absoluten Galois-Gruppe von k. Schließlich sei

$$\delta: H^1(k, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(k, \mathbb{Z})$$

der Zusammenhangshomomorphismus zur kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Dann ist für jedes $b\in k^\times$ das Bild von $(\delta(\tilde{\chi}), b)$ beim Cup-Produkt

$$H^2(k, \mathbb{Z}) \times H^0(k, k_s^\times) \longrightarrow H^2(k, k_s^\times) \cong \mathrm{Br}(k)$$

gerade die Brauer-Äquivalenz-Klasse der zyklischen k-Algebra (χ, b),

$$\delta(\tilde{\chi})\cup b = [(\chi, b)].$$

Beweis. Wir erinnern an die Konstruktion der k-Algebra (χ,b) in 2.5.3 mit Hilfe des Galois-Abstiegssatzes 2.3.7.
Der Isomorphismus χ definiert einen injektiven Homomorphismus

$$z(b): G \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{PGL}(m, K),$$

wobei die zweite Abbildung die Restklasse von 1 auf die Klasse F(b) der umkehrbaren $m\times m$-Matrix

$$\tilde{F}(b) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

[67] Weil χ den Automorphismus $\sigma: k(\sqrt[m]{a}) \longrightarrow k(\sqrt[m]{a})\,,\ \sqrt[m]{a} \mapsto \omega\cdot\sqrt[m]{a}$, in die Restklasse von 1 abbildet.

abbildet. Weil die Einträge der Matrix $\widetilde{F}(b)$ im Grundkörper k liegen, bleibt F(b) invariant unter der Operation von G auf PGL(m,K), d.h. z(b) läßt sich 1-Kozyklus ansehen und definiert ein Element von

$$H^1(G, PGL(m,K))$$

und damit eine zentrale einfache k-Algebra (χ,b) des Grades m. Genauer,

$$(\chi, b) := ({}_{z(b)}M_m(K))^G,$$

wenn ${}_{z(b)}M_m(K)$ die Matrizen-Algebra über K mit der durch z(b) getwisteten Operation bezeichnet. Wie wir in 2.5.3 gesehen haben, gilt

$$\widetilde{F}(b)^m = b\bullet Id_m. \tag{1}$$

Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{m} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \longrightarrow 1 \\ & b\downarrow & & \widetilde{F}(b)\downarrow & & F(b)\downarrow & \\ 1 \longrightarrow & K^\times & \longrightarrow & GL(m,K) & \longrightarrow & PGL(m,K) & \longrightarrow 1 \end{array}$$

Dabei sollen die mit b, $\widetilde{F}(b)$ und F(b) bezeichneten Abbildungen die Gruppen-Homomorphismen bezeichnen, welche den Erzeuger 1 bzw. 1 mod m in das entsprechende Element abbilden.[68] Die Kommutativität des rechten Quadrats folgt aus der Identität (1), die des linken Quadrats aus der Definiton von F(b). Wir gehen zu den langen exakten Kohomologie-Sequenzen über und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^2(G,\mathbb{Z}) \\ F(b)_*\downarrow & & b_*\downarrow \\ H^1(G,PGL(m,K)) & \xrightarrow{\delta_m} & H^2(G,K^\times) \end{array},$$

dessen horizontale Abbildungen Zusammenhangshomomorphismen sind. Den Isomorphismus χ läßt sich als Element

$$\chi\in Hom(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) =^{69} H^1(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$$

der linken oberen Kohomologie-Gruppe auffassen und wird bei $F(b)_*$ in die Klasse des Kozyklus z(b) abgebildet[70],

$$F(b)_*(\chi) = [z(b)].$$

Deshalb ist

$$\delta_n(F(b)_*(\chi)) = \delta_n[z(/b)] = [(\chi,b)]$$

gerade die Klasse der durch z(b) definierten zentralen einfachen k-Algebra (χ,b). Auf Grund der Kommutativität des Vierecks folgt

$$[(\chi,b)] = b_*(\delta(\chi)). \tag{2}$$

Wir haben jetzt die rechte Seite dieser Identität als Cup-Produkt zu interpretieren. Dazu erinnern wir an die Definiton des Cup-Produkts

$$H^2(G, \mathbb{Z}) \times H^0(G, K^\times) \longrightarrow H^2(G, K^\times), ([x],[y]) \mapsto [x]\cup[y]$$

in 3.4.9: man wähle Repräsentanten

---

[68] Die rechte vertikale Abbildung ist wohldefiniert wegen (1).

[69] G operiert trivial auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

[70] nach Definition von z(b) (und der durch F(b) induzierten Abbildung $F(b)_*$).

$$x: \mathbb{Z}[G\times G]\longrightarrow\mathbb{Z},\ y: \mathbb{Z}\longrightarrow K^\times$$

der Klassen [x], [y], bilde das zugehörige Tensorprodukt der Abbildungen,

$$x\otimes y: \mathbb{Z}[G\times G] \longrightarrow K^\times$$

und gehe zur zugehörige Kohomologie-Klasse über. Im Fall y = b ist $x\otimes y$ gerade das Produkt der Abbildung x mit b, d.h. $[x]\cup[b] = b_*([x])$. Die Identität (2) erhält damit die Gestalt

$$[(\chi,b)] = \delta(\chi)\cup b$$

in $H^2(G, K^\times) = Br(K/k)$. Wir wenden auf diese Identität die Inflationsabbildung zur natürlichen Surjektion

$$\rho{:}G' := G(k_s/k) \longrightarrow G = G(K/k),\ \sigma \mapsto \sigma|_K.$$

mit dem Kern $H' := Ker(\rho) = G(k_s/K)$ an,

$$\begin{array}{ccc} Inf: H^2(G'/H', (k_s^\times)^{H}) & \longrightarrow & H^2(G',k_s^\times) \\ \| & & \| \\ H^2(G, K^\times) & & Br(k) \\ \| & & \\ Br(K/k) & & \end{array}$$

welche die relative in die absolute Brauer-Gruppe einbettet und erhalten in Br(k):

$$\begin{aligned}[(\chi,b)] &= Inf(\delta(\chi)\cup b)\\ &=^{71} Inf(\delta(\chi))\cup Inf(b)\\ &=^{72} \delta(Inf(\chi))\cup Inf(b)\end{aligned}$$

Die beiden Inflationsabbildungen[73] der letzten Zeile lassen sich explizit beschreiben.

$$Inf: H^2(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(G',\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$$

$$\begin{array}{ccc} Inf: H^0(G,K^\times) & \longrightarrow & H^0(G',k_s^\times) \\ \| & & \| \\ (K^\times)^G & & (k_s^\times)^{G'} \\ \| & & \| \\ k^\times & & k^\times \end{array}$$

Die zweite ist die identische Abbildung,

$$[(\chi,b)] = \delta(Inf(\chi))\cup b,$$

die erste wird induziert durch die Abbildung, welche jedem Homomorphismus

$$G \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

auf dessen Zusammensetzung mit ρ abbildet. Wegen $\chi\circ\rho = \tilde{\chi}$, erhalten wir

$$[(\chi,b)] = \delta(\tilde{\chi})\cup b$$

wie behauptet.
QED.

---

[71] Verträglichkeit der Inflation mit dem Cup-Produkt, vgl. 3.4.12(ii).
[72] Verträglichkeit der Inflation mit Zusammenhangshomomorphismen, vgl. 3.3.11 Beispiel 2
[73] Sämtlich hier auftretenden Inflationsabbildung gehören zur Surjektion ρ: $G'\longrightarrow G$.

4.7.5 Beschreibung der Norm-Reste-Abbildung
Seien k ein Körper, m > 0 eine natürliche Zahl,

$$K/k$$

eine zyklische Galois-Erweiterung des Grades m mit der Gruppe G und

$$\chi: G \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

ein Isomorphismus. Dann wird der Isomorphismus

$$H^2(G, K^\times) \cong k^\times/N_{K/k}(K^\times)$$

von 4.4.12 induziert durch die Abbildung

$$k^\times \longrightarrow H^2(G, K^\times)\ ,\ b \mapsto [(\chi,b)].$$

Beweis. Nach 3.4.13 (iii) wird der Isomorphismus von 4.4.12 induziert durch die Cup-Multiplikation

$$k^\times \longrightarrow H^2(G, K^\times)\ ,\ b \mapsto \delta(\chi)\cup b$$

mit dem Bild $\delta(\chi)\in H^2(G, \mathbb{Z})$ von $\chi\in\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = H^1(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ beim Zusammenhangshomomorphismus δ: $H^1(G, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(G, \mathbb{Z})$ zur exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Wie wir gerade beim Beweis von 4.7.4 gesehen haben ist aber $\delta(\chi)\cup b$ gerade die Brauer-Äquivalenz-Klasse der zyklischen Algebra (χ,b).
QED.

4.7.6 Kriterium für das Zerfallen der zyklischen Algebra (χ,b)
Die Brauer-Äquivalenz-Klasse der zyklischen k-Algebra (χ,b) zur Galois-Erweitrung K/k ist genau dann trivial, wenn b im Bild der Norm-Abbildung $N_{K/k}: K^\times \longrightarrow k^\times$ liegt.
Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus 4.7.5.
QED.

4.7.7 Folgerung
Seien k ein Körper, m > 0 eine natürliche Zahl,

$$K/k$$

eine zyklische Galois-Erweiterung des Grades m mit der Gruppe G und

$$A$$

eine zentrale einfache k-Algebra, die über K zerfällt. Dann gilt:
(i) Es gibt einen Isomorphismus

$$\chi: G \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

und ein Element $b\in k^\times$ mit der Eigenschaft, daß A Brauer-Äquivalent zu (χ,b) ist,

$$[A] = [(\chi,b)].$$

(ii) Hat A außerdem den Grad m, so gilt sogar $A \cong (\chi,b)$.
Beweis. Zu (i). Weil A über K zerfällt, liegt die Brauer-Äquivalenz-Klasse von A in der relativen Brauer-Gruppe,

$$[A] \in \mathrm{Br}(K/k) = H^2(G, K^\times).$$

Die Behauptung folgt damit aus der Surjektivität der Abbildung

$$k^\times \longrightarrow H^2(G, K^\times)\ ,\ b \mapsto [(\chi,b)].$$

von 4.7.5 (wobei der Isomorphismus beliebig vorgegeben werden kann).

Zu (ii). Die zu A nach (i) gehörige zyklischen k-Algebra (χ, b) hat dann denselben Grad wie A. Brauer-Äquivalente k-Algebren desselben Grades sind aber isomorph.[74]

QED.

4.7.8 Beweis von 4.7.2

Wir verwenden die Bezeichnungen von 4.7.4. Auf Grund der dortigen Beschreibung der Brauer-Klasse der zyklischen Algebra (χ, b),

$$\delta(\tilde{\chi})\cup b = [(\chi, b)] \text{ in } Br(k) = H^2(k, k_s^\times),$$

reicht es zu zeigen,

$$(1) \qquad - \delta(\tilde{\chi})\cup b = \tilde{\chi}\cup\partial(b)$$

wobei das Cup-Produkt rechts gerade die Abbildung

$$H^1(k, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times H^1(k, \mu_m) \longrightarrow H^1(k, \mu_m^{\otimes 2}) =^{75} {}_mBr(k).$$

sei und $\partial: k^\times \longrightarrow H^1(k, \mu_m)$ die Kummer-Abbildung. Der Isomorphismus

$$\tilde{\chi}: G \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

der in 4.7.4 beliebig gewählt werden kann, sei dabei gerade der Isomorphismus λ von 4.7.3, d.h.

$$\partial(a) = \tilde{\chi} \text{ und } (a,b)_\omega = (\tilde{\chi}, b).^{76}$$

Die zu beweisende Identität ist aber ein Spezialfall der allgemeinen Identität 3.4.11 (mit i = bzw. die proendliche Variante davon. Wir verwenden hier, daß δ bzw. ∂ Zusammenhangshomomorphismen zu den exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow k_s^\times \xrightarrow{m} k_s^\times \longrightarrow 1$$

sind und die Paarung

$$\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} k_s^\times \longrightarrow k_s^\times,\ x\otimes c \mapsto c^x,$$

trivial ist $m\mathbb{Z}\otimes\mu_m$.

4.7.9 Folgerung

Seien k ein Körper, der eine primitive m-te Einheitswurzel ω enthält und $a,b \in k^\times$. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.

(i) Das Bild $h^2_{k,m}(\{a,b\})$ des Symbols $\{a,b\}$ ist trivial.

(ii) Die zyklische k-Algebra $(a,b)_\omega$ zerfällt.

---

[74] Beide k-Algebren sind nach Wedderburn (bis auf Isomorphie) Matrizen-Algebren über der einzigen Divisionsalgebra D in ihrer Brauer-Klasse, sagen wir $M_a(D)$ bzw. $M_b(D)$. Da sie denselben Grad, also dieselbe Dimension, über k besitzen, muß a = b gelten, d.h. sie sind isomorph.

[75] vgl. 4.7.1(1).

[76] d.h. die rechte Seite von (1) ist gerade das Bild des Symbols $\{a,b\}$ bei der Bloch-Kata-Abbildung $h^2_{k,m}$.

(iii) Das Element b liegt im Bild der Normabbildung $N_{K/k}: K := k(\sqrt[m]{a}) \longrightarrow k$.

Bemerkungen

(i) Man beachte, die Äquivalenz (ii) ⇔ (iii) verallgemeinert die Äquivalenz (i) ⇔ (iv) von 1.1.11.

(ii) Da die ersten beiden Aussagen symmetrisch in a und b sind, ist b genau dann Norm eines Elements von $k(\sqrt[m]{a})$, wenn a Norm eines Elements von $k(\sqrt[m]{b})$. Aussage dieses Typs heißt gewöhnlich Reziprozitätsgesetz.

Beweis. (i) ⇔ (ii). Ergibt sich aus der Beschreibung von $h^2_{k,m}$ in 4.7.2.

(ii) ⇔ (iii). Ergibt sich aus der Beschreibung der Norm-Reste-Abbildung in 4.7.5.
QED.

Aufgaben

1 Die Topologie proendlicher Gruppen

Man zeige, der einer proendlichen Gruppe zugrunde liegende topologische Raum ist ein Hausdorff-Raum.

2 Hauptsatz der Galois-Theorie

Man zeige, in der Korrespondenzu des Hauptsatzes der Galois-Theorie 4.1.12 entsprechen die in K/k enthaltenen Galois-Erweiterungen L/k den abgeschlossenen Normalteilern von G(K/k).

3 Stetige Koketten

Seien G eine proendliche Gruppe und A ein stetiger G-Modul. Man definiere die Gruppe

$$C^d_{cont}(G, A)$$

der stetigen i-Koketten als die Untergruppe derjenigen Abbildungen von

$$\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G^{i+1}], A),$$

deren Einschränkung auf G^{i+1} stetig ist, wenn man G^{i+1} mit der Produkt-Topologie versieht. Man zeige, die Korand-Operatoren δ^{i*} des Komplexes C*(G, A) von 3.2.1 bilden $C^i_{cont}(G, A)$ in $C^{i+1}_{cont}(G, A)$ ab, und die Kohomologie-Gruppe des so entstehenden Komplexes $C^*_{cont}(G, A)$ sind isomorph zur stetigen Kohomologie

$$H^*_{cont}(G,A).$$

4 Die Einheiten modulo der m-ten Potenzen

Seien m>0 eine natürliche Zahl und k ein Körper mit einer primitiven m-ten Einheitswurzel $\omega \in k$. Wir betrachten die zyklische Erweiterung

$$K := k(\sqrt[m]{a})$$

des Grades m von k.

(i) Man zeige, die Gruppe

$$(K^\times/K^{\times m})^{G(K/k)}$$

wird von $k^\times$ und $\sqrt[m]{a}$ erzeugt (Hinweis: man verwende die exakte Inf-Res-Sequenz 3.3.15).

(ii) Man finde eine explizite Beschreibung des Kokerns der Abbildung

$$k^\times/k^{\times m} \longrightarrow (K^\times/K^{\times m})^{G(K/k)}$$

5 Satz 90 von Hilbert

Geben Sie einen Beweis des verallgemeinerten Satzes 90 von Hilbert 2.6.5 an unter Verwendung der Injektivität des Gruppen-Homomorphismus

$$\delta_\infty: H^1(G, PGL(\infty, K)) \longrightarrow H^2(G, K^\times).$$

6 Satz von Frobenius

Man zeige, $Br(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei die nicht-triviale Klasse von den Hamiltonschen Quaternionen repräsentiert wird.

7

Seien p eine Primzahl und k ein Körper der Charakteristik 0 mit der absoluten Galois-Gruppe

$$G(\bar{k}/k) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

(i) Man zeige $Br(k) \cong Br(k)/pBr(k) \cong k^\times/k^{\times p}$ man verwende die Kummer-Sequenz und die Periodizität der Kohomologie zyklischer Gruppen).

(ii) Durch Berechnung von Br(k) in einer anderen Weise zeige man,

$$N_{\bar{k}/k}(\bar{k}^\times) = k^{\times p}.$$

(iii) Man zeige, die obige Situation ist nur möglich im Fall p = 2 und $\bar{k} = k(\sqrt{-1})$.

(iv) Man zeige außerdem, in der obigen Situation kann man k mit der Struktur eines geordneten Körpers versehen (Hinweis: man wähle die Quadrate als positive Elemente).

8 Körper mit endlicher absoluter Galois-Gruppe

Unter Verwendung der vorangehenden Aufgabe beweise man den folgenden Satz von E.Arting und O.Schreier: ist k ein Körper der Charakteristik 0, dessen absolute Galois-Gruppe endlich ist, so gilt

$$\bar{k} = k(\sqrt{-1}),$$

und k hat die Struktur eines geordneten Körpers. (Hinweis: man nehme eine p-Sylow-Untergruppe der Galois-Gruppe und verwende die Tatsache, daß p-Gruppen auflösbar sind).

Anmerkung: Artin und Schreier haben sogar gezeigt, daß die Voraussetzung der Charakteristik 0 weglassen kann.

9 Zyklische Algebren

(i) Man zeige, für zyklische k-Algebren gilt

$$(\chi,b')\otimes(\chi,b'') \cong (\chi, b'b'') \text{ und } (\chi, b)^{op} \cong (\chi,b^{-1}).$$

(ii) Folgende Aussagen sind äquivalent:
1. Die zyklischen k-Algebren (χ,b') und (χ,b'') sind isomorph.
2. Der Quotient b'/b'' ist Norm eines Elements der zu χ gehörigen zyklischen Erweiterung.

5. Severi-Brauer-Varietäten

5.0 Vorbemerkungen

5.0.1 Zum Gegenstand des Kapitels

In Kapitel 1 haben wir jeder Quaternionen-Algebra über einem Körper k der Charakteristik $\neq 2$ einen Kegelschnitt zugeordnet mit der Eigenschaft, daß dieser Kegelschnitt genau dann einen k-rationalen Punkt besizt, die die Algebra über k zerfällt.

Wir wollen jetzt die Korrespondenz auf den Fall beliebiger Dimensionen (und Grundkörper) verallgemeinern: jeder zentralen einfachen k-Algebra A des Grades n wollen wir eine über k definierte Varietät X der Dimension n-1 zuordnen, die genau dann einen k-ratiionalen Punkt besitzt, wenn die Algebra A zerfällt.

Beide Objekte, A und X, werden einer Klasse in $H^1(G, PGL(n,K))$ entsprechen, wobei K ein Galoisscher Zerfällungskörper von A ist mit der Gruppe G.

Die so entstehenden Varietäten heißen Severi-Brauer-Varietäten. Sie sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß sie über der algebraischen Abschließung von k zu einem projektiven Raum isomorph sind. Diese Tatsache wird uns in die Lage versetzen eine alternative geometrische Konstruktion der Brauer-Gruppe anzugeben.

Ein anderes zentrales Ergebnis dieses Kapitels ist der Satz von Amitsur, welcher besagt, daß für Brauer-Severi-Varietäten X mit dem Funktionenkörper k(X) der Kern der natürlichen Abbildung

$$Br(k) \longrightarrow Br(k(X))$$

eine zyklische Gruppe ist, die von der Klasse von X erzeugt wird. Dieses scheinbar technischen Ergebnis (welches das in Kapitel 1 bewiesenen Satz von Witt verallgemeinert) hat sehr fruchtbare Anwendungen.

Am Ende des Kapitels stellen wir eine dieser Anwendungen vor, weche auf Saltman zurückgeht und besagt, daß man alle zentralen einfachen k-Algebren eines festen Grades n, die die n-ten Einheitswurzeln enthalten, zyklisch machen kann durch Überganng zu einer großen Körpererweiterung von k.

5.0.2 Zur Geschichte des Gegenstands

Severi-Brauer-Varietäten wurden in der bahnbrechenden Arbeit von Châtelet[1] eingeführt unter dem Namen Brauer-Varietäten. Praktisch alle Ergebnisse in der ersten Hälfte dieses Kapitels stammen aus dieser Arbeit. Die Bezeichnung 'Severi-Brauer-Varietät' wurde von Beniamino Segre in seiner Note [1] geprägt, wo er sich unzufrieden damit zeigte, daß Châtelet Severis Vorarbeiten zu diesem Gegenstand ignoriert hatte.

Tatsächlich werden Severi-Brauer-Varietäten in der Arbeit [1] von Severi in einem klassischen geometrischen Kontext untersucht, und der Satz, welcher heute als Satz von Châtelet bekannt ist, wird dort in einigen Fällen bewiesen. Amüsanterweise nennt Severi die betrachteten Varietäten Segre-Varietäten. Diese Bezeichnung bezieht sich jedoch nicht auf Benjamino sondern auf dessen Onkel zweiten Grades Corrado Segre. Die grundlegende Arbeit von Amitsur [1] war die erste, welche die Bedeutung des birationalen Standpunkts im Kontext der Severi-Brauer-Varietäten für die Untersuchung der zentralen einfachen Algebren betonte. Diese Beobachtung war ein Meilenstein auf dem Weg, der schließlich zum Beweis des Satzes von Merkurjev-Suslin führte.

5.1 Grundlegende Eigenschaften

In Kapitel 2 haben wir als eine Folge des Satzes von Wedderburn gesehen, daß wir die zentralen einfachen k-Algebren als endlich-dimensionalen k-Algebren definieren können, die über einer endlichen Körper-Erweiterung K/k isomorph werden zu einer vollen Matrizen-Algebra.

Als Folgerung aus der Abstiegstheorie haben wir gesehen, für den Fall, daß der Zerfällungskörper K eine Galois-Erweitrung ist, kann man die zentrale einfache Algebra mit Hilfe der Automorphismen-Gruppe PGL(n,K) von $M_n(K)$ beschreiben.

Nun ist aber PGL(n, K) auch die Automorphismengruppe des (n-1)-dimensionalen projektiven Raumes $\mathbb{P}^{n-1}_K$ (wenn man diesen als algebraische Varietät betrachtet). Dies motiviert die folgende Definition.

5.1.1. Definition

Eine Severi-Brauer-Varietät über dem Körper k ist eine projektive algebraische Varietät X über k mit der Eigenschaft, daß es eine endliche Körper-Erweiterung K/k gibt, so daß X über K isomorph wird zum projektiven Raum,

$$X_K := X\times_k K \text{ ist isomorph zu } \mathbb{P}^{n-1}_K.$$

Der Körper K heißt in dieser Situation Zerfällungskörper von X.

Bemerkungen

(i) Eine k-Varietät X ist genau dann eine Severi-Brauer-Varietät, wenn

(1) $$X_{\bar{k}} \cong \mathbb{P}^{n-1}_{\bar{k}}$$

gilt, wobei $\bar{k}$ eine algebraische Abschließung des Körper k bezeichne. Die Notwendigkeit dieser Aussage ist klar. Sie ist auch hinreichend, weil die Koeffizienten der endlich vielen Polynome, die den Isomorphismus definieren in einer endlichen Körper-Erweiterung von k liegen.

(ii) Auf Gruind von allgemeinen Betrachtungen der algebraischen Geometrie ist eine Severi-Brauer-Varietät glatt. Die Annahme, daß X projektiv ist, ist überflüssig: man kann zeigen, eine algebraische Varietät (d.h. ein separiertes Schema endlichen Typs) über k, welche über einer endlichen Körper-Erweiterung isomorph ist zu einer projektiven Varietät, ist selbst schon projektiv.

(iii) Beispiele für Severi-Brauer-Varietäten sind die in Kapitel 1 aufgetretenen ebenen Kegelschnitte der projektiven Ebene. Im nächsten Abschnitt beschreiben wir eine allgemeine Methode zur Konstruktion von Beispielen.

(iv) Wir kommen jetzt zum grundlegenden Ergebnis in Bezug auf Severi-Brauer-Varietäten. Für seine Formulierung verwenden wir die folgende Bezeichnungsweise. Eine über k definierte abgeschlossene Teilvarietät

$$Y \hookrightarrow X$$

der k-Varietät X heißt getwistet-lineare Teilvarietät von X, falls Y eine Severi-Brauer-Varität ist und außerdem über der algebraischen Abschließung $\bar{k}$ von k die Einbettung

$$Y_{\bar{k}} \hookrightarrow X_{\bar{k}}$$

isomorph wird zur Einbettung einer lineare Teilvarietät in den projektiven Raum $\mathbb{P}^{n-1}_{\bar{k}}$.

5.1.2 Satz von Châtelet

Sei X eine Severi-Brauer-Varietät der Dimension n-1 über dem Körper k. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) X ist über k isomorph zum projektiven Raum $\mathbb{P}^{n-1}_k$.

(ii) X ist über birational isomorph zum projektiven Raum $\mathbb{P}^{n-1}_k$.

(iii) X besitzt einen k-rataionalen Punkt.

(iv) X enthält eine getwistet-lineare Teilvarietät $D \hookrightarrow X$ der Kodimension 1.

Bemerkungen

(i) Gewöhnlich wird die Äquivalenz

$$(i) \Leftrightarrow (iii)$$

als Satz von Châtelet bezeichnet.

(ii) Die einzige Implikation, deren Beweis nicht mehr oder weniger klar ist, ist die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (iv). Den unten angeführten sehr schönen Beweis haben wir von Endre Szabó erhalten. Dieser Beweis verwendet einige elementare Begriffe der algebraischen Geometrie.

(iii) Für weniger geometrisch orientierte Leser verweisen wir auf Abschnitt 5.3, wo ein alternativer Beweis unter der Voraussetzung, daß X einen Galoisschen Zerfällungskörper besizt, angegeben wird. In 5.1.5 werden wir sehen, dies Bedingung ist stets erfüllt.

Beweis. <u>(i) $\Rightarrow$ (ii)</u>. Trivial, denn jeder Isomorphismus ist auch ein birationaler Isomorphismus.

<u>(ii) $\Rightarrow$ (iii)</u>. Nach Voraussetzung besitzen X und $\mathbb{P}_k^{n-1}$ über k isomorphe Zariski-offene Teilmengen. Eine Zariski-offene Teilmenge des projektiven Raumes $\mathbb{P}_k^{n-1}$ besitzt aber stets einen k-rationalen Punkt. Also gilt (iii).

<u>(iv) $\Rightarrow$ (i)</u>. Die nach Voraussetzung existierende Teilvarietät D von X ist ein Divisor. Wir betrachten das zugehörige lineare System

$$|D|,$$

welches eine rationale Abbildung

$$\phi_D: X \longrightarrow \mathbb{P}_k^m$$

mit Werten in einem projektiven Raum definiert. Über $\bar{k}$ D zu einer Hyperebene. Die zu D gehörige rationale Abbildung ist somit (über $\bar{k}$) ein Isomorphismus mit dem (n-1)-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-1}$. Insbesondere ist m = n-1 und ϕ_D ist in allen Punkten von X definiert und auf der Menge der Punkte von X injektiv. Außerdem induziert ϕ_D auf den lokalen Ringen Isomorphismen und ist damit ein Isomorphismus.

<u>(iii) $\Rightarrow$ (iv)</u>.

QED.

A0 Algebraische Geometrie

A0.1 Affine und quasi-projektive Varietäten

A0.1.1 Affine und projektive Varietäten

Eine (über k definierte affine) <u>Varietät</u> V im affinen Raum $\mathbb{A}_k^n$ ist definiert als Nullstellenmenge einer Menge

$$M \subseteq A := k[x_1,...,x_n]$$

von Polynomen: für jede Körpererweiterung K/k ist die Menge der K-rationalen Punkte dieser Varietät definiert als

$$V(K) := \{(c_1, \dots , c_n) \in K^n \mid f(c_1, \dots , c_n) = 0 \text{ für jedes } f \in M \}$$

Die zu M gehörige Varietät wird mit V(M) bezeichnet. Die Menge ihrer K-rationalen Punkte also mit V(M)(K).

Eine (projektive) Varietät V im projektiven Raum $\mathbb{P}^n_k$ ist definiert als Nullstellenmenge einer Menge

$$M \subseteq A := k[x_0,\dots, x_n]$$

von ________nen Polynomen: für jede Körpererwerweiterung K/k ist die Menge der K-rationalen Punkte dieser Varietät definiert als

$$V(K) := \{(c_0, \dots , c_n) \in \mathbb{P}^n_K \mid f(c_0, \dots , c_n) = 0 \text{ für jedes } f \in M \}.$$

Die zu M gehörige Varietät wird mit V(M) bezeichnet. Die Menge ihrer K-rationalen Punkte also mit V(M)(K). Die Varietät V = V(M) selbst werden wir mit der Abbildung

$$K = V(K)$$

auf der Menge der Körpererweiterungen K/k identitizieren.

Bemerkungen

(i) Ist

$$K := \overline{k}$$

die algebraische Abschließung von k, so nennt man

$$V(K)$$

auch die Menge der geometrischen Punkte der Varietät V. Oft kann man eine Varietät V einfach mit der Menge ihrer geometrischen Punkte identifizieren. Wenn in den nachfolgenden Bemerkungen Varietäten wie Mengen behandelt werden - zum Beispiel, wenn von Vereinigungen und Durchschnitten die Rede ist - so beziehen sich diese Aussagen zunächst nur auf die Mengen der geometrischen Punkte.
Bei dieser Betrachtungsweise geht jedoch Information verloren (nämlich die bezüglich des Teilkörpers k). Wir werden deshalb den Begriff des Punktes soweit verallgemeinern, das solche Aussagen auch für K = k gelten.

(ii) Ersetzt man die Menge M durch das von M erzeugte Ideal

$$<M> := \{a_1m_1+\dots+a_rm_r \mid m_1,\dots,m_r\in M,\ a_1, \dots , a_r \in A\},$$

so gilt

$$V(M) = V(<M>),$$

d.h. man kann von der Menge der definierenden Gleichungen immer annehmen, daß sie ein Ideal bilden.

(iii) der Polynomring A noethersch ist, hat jedes Ideal ein endliches Erzeugendensystem und man kann das Ideal <M> durch ein Erzeugendensystem des Ideals ersetzen, zum Beispiel also durch eine endliche Teilmenge. Für jedes M gibt es also endlich viele Polynome $f_1, \dots f_r \in A$ mit

$$V(M) = V(f_1, \dots f_r).$$

(iv) Es ist leicht zu zeigen, daß der Durchschnitt einer beliebigen Familie von Varietäten eine Varietät ist und daß die Vereinigung endlich vieler Varietäten eine Varietät ist:

$\bigcap V(I_\alpha) = V(\sum_\alpha I_\alpha)$ und $V(I_1) \bigcup V(I_2) = V($[77]$I_1\cdot I_2) = V(I_1\bigcap I_2)$ für Ideale I_j.

---

[77] $I_1\cdot I_2$ bezeichnet das Produkt-Ideal, d.h. das von den Produkten

$$a_1\cdot a_2 \text{ mit } a_1\in I_1 \text{ und } a_2\in I_2$$

erzeugte Ideal.

(v) ät heißt (geometrisch)[78] irreduzibel, wenn sie nicht Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen ist.
Zum Beispiel ist die Hyperfläche

$$V(f)$$

genau dann irreduzibel, wenn f ein irreduzibles Polynom ist. Ein Kreis ist irreduzibel. Die Vereinigung zweier unterschiedlicher Kreise ist es nicht. Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln sind irreduzibel. Die Vereinigung zweier Geraden ist es nicht.

(vi) Jede Varietät ist Vereinigung von endlich vielen irreduziblen.

(vii) Im Fall

$$K := \overline{k}$$

können wir für jede affine[79] Varietät

$$V = V(I)$$

ein Ideal definieren:

$$I(V) := \{f \in := K[x_1,...,x_n] \mid f(p) = 0 \text{ für jeden Punkt } p \in V\}.$$

Es gilt dann

$$I(V) = \sqrt{I} := \{f \in k[x_1,...,x_n] \mid f^m \in I \text{ für eine natürliche Zahle m }\}.$$

Diese Aussage ist eine Variante des sogenannten Hilbertschen Nullstellensatzes.
Man beachte, trivialerweise gilt für jedes Ideal

$$V(I) = V(\sqrt{I}).$$

Wir bekommen auf diese Weise eine bijektive Abbildung

$$\{ \text{ afffine Varitäten im } \mathbb{A}^n_K\} \longrightarrow \{ \text{ Ideale } I \subseteq K[x_1,...,x_n] \text{ mit } I = \sqrt{I} \ \}, V = V(I),$$

mit der Umkehrabbildung I = V(I).

(viii) Eine Varietät V = V(I) ist genau dann irreduzibel, wenn das Radikal des definierenden Ideals I ein Primideal ist:

$$V \text{ irreduzibel} \Leftrightarrow \sqrt{I} \text{ ist Primideal.}$$

(ix) Eine affine Varietät V(I) heißt reduziert, wenn wenn das definierende Ideal I mit seinem Radikal übereinstimmt. Eine projektive Varietät heiß reduziert, wenn sie Vereinigung affiner reduzierter Varietäten ist (die mit offenen Teilmengen identifiziert werden können - siehe unten).

(x) Für jedes irreduzible Polynom f ist

$$V(f)$$

reduziert und irreduzibel. Für jedes Primideal I ist V(I) irreduzibel.

A0.1.2 Die Zariski-Topologie

Sei V eine affine (bzw. projektive) Varietät. Die Menge der in V enthaltenen affinen (bzw. projektiven) Varietäten bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, welche Zariski-Topologie heißt. Die offenen Mengen von V sind von der Gestalt

$$V - W$$

mit einer affinen (bzw. projektiven) Varietät. Eine Menge dieser Gestalt, wobei W durch ein einziges Polynom f definiert ist, heißt offene Hauptmenge und wird mit

---

[78] Der Zusatz ‘geometrisch’ soll darauf hinweisen, daß wir uns auf die Menge der geometrischen Punkte der Varietät beziehen. Ohne diesen Zusatz sind die ‘verallgemeinerten Punkte’ der Varietät gemeint.

[79] Eine analoge Konstruktion ist auch im projektiven Fall möglich: I(V) ist dann das Ideal, das von allen homogenen Polynomen erzeugt wird, die auf V identisch Null sind. Allerdings gilt dann für das definierende Ideal I von V im allgemeinen nicht mehr

$$I(V) = \sqrt{I}.$$

Beispiel: die Ideale (1) und $(x_0,...,x_n)$ haben dieselbe Nullstellenmenge (nämlich die leere Menge) aber verschiedene Radikale: das zweite Ideal ist ein Primideal, stimmt also mit seinem Radikal überein. Letzteres ist somit vom gesamten Ring, d.h. von (1) verschieden.

$$D(f) = D_V(f)$$

bezeichnet. Eine offene Teilmenge einer projektiven Varietät heißt auch quasi-projektive Varietät.

Bemerkungen

(i) Die offenen Hauptmengen bilden eine Topologie-Basis der Zariski-Topologie, d.h. jede offene Menge ist Vereinigung endlich vieler offener Hauptmengen. Zum Beispiel ist

$$\mathbb{A}^n_k - V(f_1,..., f_m) = D(f_1)\cup...\cup D(f_m)$$

(ii) Die Mengen

$$U_i := \mathbb{P}^n_k - V(x_i) = \{[x_0,...,x_n] \in \mathbb{P}^n_k \mid x_i \neq 0\}$$

sind offene Hauptmengen im projektiven Raum. Jede von ihnen läßt sich mit dem affinen Raum identifizieren vermittels

$$\mathbb{A}^n_k \longrightarrow U_i, (x_1,...,x_n) = [x_1,...,x_{i-1}, 1, x_{i+1},...,x_n].$$

Da jeder Punkt im projektiven Raum eine von Null verschiedene projektive Koordinate besitzt, gilt

$$\mathbb{P}^n_k = U_0 \cup ... \cup U_n .$$

Der projektive Raum wird also vom afinen Räumen überdeckt. Analog sieht man, daß jede projektive Varietät überdeckt wird durch affine Varietäten. Insbesondere sind affine Varietäten quasi-projektiv.

(ii) Die affinen und die projektiven Varietäten sind (quasi-)kompakt bezüglich der Zariski-Topologie.

A0.1.3 Reguläre Funktionen und Abbildungen

Seien

$$V \subseteq \mathbb{A}^n_k$$

eine affine Varietät und

$$f, g \in k[x_1,...,x_n]$$

zwei Polynome, wobei g auf V nicht identisch Null sein soll. Dann ist

$$V - V(g)$$

eine nicht-leere offene Menge und

$$V - V(g) \longrightarrow k, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)},$$

eine wohldefinierte Abbildung. Eine auf einer offenen Teilmenge

$$U \subseteq V$$

definierte Abbildung

$$U \longrightarrow k,$$

welche lokal von der Gestalt (1) ist, heißt reguläre Funktion. Der Ring der auf U regulären Abbildungen wird mit

$$\mathcal{O}_V(U)$$

bezeichnet. Im Fall U = V schreibt man auch

$$k[V] := \mathcal{O}_V(V).$$

Die Definition der regulären Funktion ist auch auf die offenen Teilmengen projektiver Varietäten anwendbar (da sich diese durch offene affine Teilmengen überdecken lassen).

Eine reguläre Abbildung

$$f: U \longrightarrow U'$$

affiner Varietäten ist eine Abbildung, deren Koordinatenfunktionen reguläre Funktionen sind. Solche Abbildungen sind stetig bezüglich der Zariski-Topologie.

Eine reguläre Abbildung

$$f: U \longrightarrow U'$$

quasi-projektiver Varietäten ist eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, daß für jeden Punkt $p' \in U'$, jede affine offene Umgebung $W' \subseteq U'$, jeden Punkt $p \in f^{-1}(p')$ und jede affine offene Umgebung $W \subseteq f^{-1}(W')$ die Einschränkung

$$f|_W: W \longrightarrow W'$$

eine reguläre Abbildung affiner Varietäten ist. Man beachte, wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U' \\ \cup & & \cup \\ W & \xrightarrow{f} & W \\ \Psi & & \Psi \\ p & & p' \end{array}$$

Bemerkungen

(i) Man kann zeigen, für jede affine Varietät $V \subseteq A_k^n$ sind alle regulären Abbildungen

$$V \longrightarrow k$$

von der Gestalt

$$V \longrightarrow k,\ x \mapsto p(x),$$

mit einem Polynom $p \in k[x_1,...,x_n]$. Mit anderen Worten, die Einschränkungsabbildung

$$k[x_1,...,x_n] \longrightarrow k[V],\ p = p|_V\ ,$$

ist surjektiv. Im Fall $k = \bar{k}$ ist der Kern dieser Abbildung gerade das Radikal $\sqrt{I}$ des definierenden Ideals von V (nach Bemerkung 1.4.1 (ii)). Wir können also k[V] mit dem Faktorring

(1) $$k[x_1,...,x_n]/\sqrt{I}$$

identifizieren.

(ii) Um infinitesimale Betrachtungen zu ermöglichen (und Zugang zu den Methoden der modernen algebraischen Geometrie zu bekommen) werden wir statt desssen den Ring

(2) $$k[V] := k[x_1,...,x_n]/I$$

als den Ring der regulären Funktionen auf der Varietät V = V(I) ansehen (und zwar für beliebige Körper k, die nicht algebraisch abgeschlossen sein müssen). Dieser Ring heißt auch Koordinatenring der affinen Varietät V = V(I).

(iii) Beispiel. Um den Unterschied zwischen den beiden Ringen (1) und (2) zu verstehen, betrachten wir die Ideale

$$I = (y) \subseteq k[x,y] \text{ und } J = (y^2) \subseteq k[x, y].$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß

$$\sqrt{J} = I$$

gilt. Die Varietät V(I) hat die Gleihung

$$y = 0,$$

ist also gerade die x-Achse im $\mathbb{A}^2_k$. Die Punkte der Varietät V(J) sind dieselben wie die von V(I). Die beiden Varietäten sind jedoch als verschieden anzusehen, da sie unterschiedliche Koordinatenringe haben:

$$k[V(I)] = k[x, y]/(y) \cong k[x]$$

$$k[V(J)] = k[x,y]/(y^2).$$

Die Restklasse von y definert auf V(J) eine Funktion, die zwar in allen Punkten gleich Null ist, die aber selbst als von Null verschieden anzusehen ist. Erst deren Quadrat ist Null. Geometrisch kann man das interpretieren als die Aussage, daß durch die Gleichung

$$y = 0$$

die x-Achse definiert ist und durch die Gleichung

$$y^2 = 0$$

die doppelt zu zählende x-Achse.

(iv) Die Zusammensetzung einer regulären Funktione mit einer regulären Abbildung ist eine reguläre Funktion. Insbesondere definiert jede reguläre Abbildung affiner Varietäten

$$f: V \longrightarrow V'$$

einen k-Algebra-Homomorphismus

$$f^*: k[V'] \longrightarrow k[V],\ \alpha = \alpha \circ f,$$

die <u>Verpflanzungsabbildung</u> entlang f.

(v) Die Zuordnung

$$(\text{affine k-Varietäten}) \longrightarrow \text{k-Alg}, V = k[V],\ f = f^*,$$

ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der affinen Varietäten über k in de Kategorie der (nicht notwendig endlich-dimensionalen) k-Algebren. Insbesondere gilt

$$(f \circ f')^* = f'^* \circ f' \text{ und } Id^* = Id.$$

(vi) Dieser Funktor ist sogar eine Äquivalenz von Kategorien. Insbesonder kommt (bis auf Isomorphie) jeder k-Algebra-Homomorphismus von einer regulären Abbildung von Varietäten. Außerdem gilt (für affine Varietäten)

$$f \text{ Isomorphismus} \Leftrightarrow f^* \text{ Isomorphismus}$$

$$V \cong V' \Leftrightarrow k[V] \cong k[V'].$$

(vii) <u>Beispiel</u>. Seien

$$Z := V(y^2 - x) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^2_k =: Y$$

die natürliche Einbettung der (auf der Seiten liegenden) Parabel Z in die affine Ebene Y und

$$Y := \mathbb{A}^2_k \xrightarrow{p} \mathbb{A}^1_k =: X, (x, y) = x,$$

die Projektion der affinen Ebene auf die x-Achse X. Die affinen Koordinatenringe der beteiligten Varietäten haben dann die Gestalt

$$\begin{aligned} k[Z] &= k[x,y]/(y^2 - x), \\ k[Y] &= k[x,y], \\ k[X] &= k[x]. \end{aligned}$$

Die zur natürlichen Einbettung $i{:}Z \longrightarrow Y$ gehörige Verpflanzungsabbildung ist gerade die natürliche Abbildung

$$i^*: k[Y] = k[x,y] \longrightarrow k[x,y]/(y^2 - x) = k[Z],$$

die jedem Polynom p(x,y) auf der affinen Ebene die Einschränkung auf die Parabel Z zuordnet. Die zur Projektion $p: Y \longrightarrow X$ gehörige Verpflanzungsabbildung ist gerade die natürliche Einbettung

$$p^*: k[X] = k[x] \longrightarrow k[x, y] = k[Y],$$

die jedes Polynom f(x) auf der affinen Geraden auf sich selbst abbildet, wobei das Bild von f(x) als Polynom in zwei Unbestimmten aufgefaßt wird. Für die Zusammensetzung

$$\varphi{:}Z \xrightarrow{p\circ i} X, (x, y) = x,$$

erhalten wir als Verpflanzungsabbildung den Homomorphismus

$$\varphi^* = (p\circ i)^*{:}k[x] \longrightarrow k[x, y]/(y^2 - x), f(x) = f(x) \bmod (y^2 - x).$$

Sei jetzt $c \in k$. Wir fassen c als Punkt der x-Achse X auf. Das Ideal der regulären Funktionen $I(\{c\}) \subseteq k[x]$, die in c gleich Null sind, ist gerade

$$I = I(\{c\}) = (x - c)$$

besteht also aus den Vielfachen von x - c,

$$V := V(I) = \{c\}.$$

Ein Punkt $(x, y) \in Z$ liegt genau dann im vollständigen Urbild von c,

$$(x, y) \in \varphi^{-1}(c),$$

wenn gilt

$$\varphi(x,y) = x = c \Leftrightarrow x \text{ ist Nullstelle von } \alpha(x) = x - c$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x, y) \text{ ist Nullstelle von } \alpha$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \text{ ist Nullstelle von } \alpha\circ\varphi = \varphi^*(\alpha).$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in V(\varphi^*(I))) = V(I\bullet k[Z]).$$

Mit anderen Worten, es gilt[80]

$$V(\varphi^{-1}(V(I))) = V(\varphi^*(I))) = V(I\bullet k[Z]).$$

Wir können also $I\bullet k[Z]$ als das Ideal des vollständigen Urbilds von $V(I) = \{c\}$ auffassen und

$$k[Z]/I\bullet k[Z]$$

als Koordinatenring des vollständigen Urbilds. Berechnen wir diesen Koordinatenring. Es gilt

$$\begin{aligned} k[Z]/I\bullet k[Z] &= (k[x, y]/(y^2-x))/(x - c)\bullet(k[x, y]/(y^2-x)) \\ &= (k[x, y]/(y^2-x)) / ((x - c, y^2- x)/(y^2-x)) \\ &= k[x, y]/(x - c, y^2- x) \\ &= k[x, y]/(x - c, y^2- c) \\ &= (k[x, y]/(x-c)) / ((x - c, y^2- c)/(x-c)) \\ &= k[y]/(y^2-c) \end{aligned}$$

Ist $c \neq 0$ und $\sqrt{c} \in k$, so gilt $y^2 - c = (y - \sqrt{c})(y + \sqrt{c})$ und nach dem Chinesischen Restesatz ist

$$k[Z]/I\bullet k[Z] = k[y]//(y - \sqrt{c}) \times k[y]/(y + \sqrt{c}) = k \times k.$$

Das entspricht der Tatsache, daß wir auf einer 2-punktigen Menge die Werte einer Funktion beliebig vorgeben können: die regulären Funktionen auf der Menge

$$\{(c, \sqrt{c}), (c, - \sqrt{c})\}$$

bilden einen zwei-dimensionalen Vektorraum.

Im Fall $c = 0$ erhalten wir

(1) $$k[Z]/I\bullet k[Z] = k[y]/(y^2).$$

Dies ist ebenfalls ein 2-dimensionaler Vektorraum. Dies reflektiert die Tatsache, daß man das vollständige Urbild

$$\{(0, 0)\}$$

---

[80] Dieselbe Argumentation zeigt, dies gilt nicht nur für Varietäten, die aus einzelnen Punkten bestehen, sondern für beliebige Teilvarietäten. Und dies gilt für beliebige regulären Abbildungen affiner Varietäten.

von 0 doppelt zählen sollte. Will man solche infinitesimalen Betrachtungen ignorieren, so muß man das Ideal (y^2) auf der rechten Seite von (1) durch dessen Radikal ersetzen (d.h. zur zugehörigen reduzierten Varietät übergehen):

$$(k[Z]/I\bullet k[Z])_{red} = k[y]/\sqrt{(y^2)} = k[y] = k.$$

(vii) Die Übertragung der obigen Aussagen auf den Fall projektiver Varietäten stößt auf ein Hindernis: jede auf einer projektiven Varietät (überall) definierte reguläre Funktion ist konstant:

$$\mathcal{O}_V(V) = k \text{ für projektive Varietäten } V \text{ über } k = \bar{k}.$$

(man vergleiche mit dem Satz von Liouville: jede auf der Riemannschen Zahlenkugel holomorphe Funktion ist konstant). Um trotzdem etwas Ähnliches zu erhalten, sind wir gezwungen eine allgemeinere Art von Funktionen und Abbildungen zu betrachten: die rationalen Funktionen und Abbildungen.

(viii) Punkte und maximale Ideale.Für jeden geometrischen Punkt $p \in V = V(I)$ einer affinen Varietät hat man die Auswertungsabbildung

$$\bar{k}[x_1,...,x_n] \longrightarrow \bar{k},\ f = f(p).$$

Wegen $p \in V$ liegt das Ideal I von V im Kern dieser Abbildung. Wir erhalten so einen surjektiven k-Algebra-Homormorphismus

$$\varphi_p: \bar{k}[V] = \bar{k}[x_1,...,x_n]/I \longrightarrow \bar{k},$$

also einen Isomorphismus

$$\bar{k}[V]/\mathrm{Ker}(\varphi_p) \cong \bar{k}.$$

Insbesondere ist $\mathrm{Ker}(\varphi_p)$ ein maximales Ideal und

$$V \longrightarrow \mathrm{Specm}(\bar{k}[V]),\ p = \mathrm{Ker}(\varphi_p)$$

eine Abbildung von der Menge der Punkte von V in die Menge der maximalen Ideale des Koordinatenrings. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist diese Abbildung eine bijektive Abbildung. Die Menge der geometrischen Punkte läßt sich also mit der Menge der maximalen Ideale des Koordinatenrings identifizieren. Läßt man für p Punkte aus einem beliebigen Erweiterungskörper zu, so ist

$$\mathrm{Ker}(\varphi_p)$$

im allgemeinen nur ein Primideal von $\bar{k}[V]$ (wobei $\bar{k}$-konjugierte Punkte dasselbe Primideal liefern).

(ix) Beispiel:

$$V = V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_k,\ k = \overline{k}.$$

Dann ist $(t^2,t^3) \in K := k(t)$, t eine Unbestimmte, ein K-rationaler Punkt von V. Es ist nicht schwer zu zeigen, der Kern der Auswertungsabbildung

$$k[x, y] \longrightarrow K,\ p(x,y) = p(t^2,t^3),$$

ist gerade das Ideal $I = (y^2 - x^3)$ von V, d.h. für $f \in k[x,y]$ gilt

$$f(t^2,t^3) = 0 \Leftrightarrow f \in (y^2 - x^3)\bullet k[x,y].$$

Der Kern von

$$\varphi_p: k[V] = k[x,y]/(y^2 - x^3) \longrightarrow K$$

ist deshalb das Nullideal des Koordinatenrings, also kein maximales Ideal. Ein Punkt p mit

$$f(p) = 0 \Leftrightarrow f \in I(V)$$

heißt allgemeiner Punkt der Varietät V.

Wenn wir oben anstelle der Unbestimmten t eine Unbestimmte s verwendet hätten, so hätten wir natürlich dasselbe Primideal des Koordinatenrings erhalten: entsprechend sind die Punkte (t^2,t^3) und (s^2,s^3) konjugiert: der k-Algebra-Isomorphismus rationaler Funktionenkörper

$$k(t) \longrightarrow k(s),\ r(t) = r(s),$$

überführt die Koordinaten von (t^2,t^3) in die von (s^2,s^3).

(x) Allgemein werden wir die Primideale des Koordinatenrings

$$k[V]$$

einer affinen Varietät als die Punkte von V im verallgemeinertem Sinne ansehen. Die maximalen Ideale werden wir auch als abgeschlossene Punkte bezeichnen[81]. Geht man zur algebraischen Abschließung über, so entspricht jeder solche Punkt einer endlichen Menge geometrischer Punkte, die über k konjugiert sind.

(xi) Unser nächstes Ziel ist die Einführung der Begriffe der rationalen Funktion und der rationalen Abbildung, die wir für die Betrachtung der projektiven Varietäten brauchen. Wir werden uns dabei auf den Fall irreduzibler Varietäten beschränken, und weisen hier vorbereitend auf einige Eigenschaften irreduzibler Varietäen hin.

[81] Es sind die Punkte p, für welche {p} abgeschlossen ist in der Zariski-Topologie.

(a) Der Durchschnitt von je zwei nicht-leeren offenen Teilmengen U', U" einer irreduziblen Varietät V ist nicht leer[82]:

$$U', U'' \text{ nicht-leer und offen} \Rightarrow U' \cap U'' \text{ nicht-leer und offen.}$$

(b) Sind $f': U' \longrightarrow k$ und $f'': U'' \longrightarrow k$ zwei reguläre Funktionen, die auf offenen nicht-leeren Teilmengen U', U" einer irreduziblen Varietät V definiert sind und auf einer offenen Teilmenge $W \subseteq U' \cap U''$ übereinstimmen, so sind stimmen sie überall dort überein, wo beide definiert sind:

$$f' = f'' \text{ auf } W \subseteq U' \cap U'', W \text{ offen} \Rightarrow f' = f'' \text{ auf } U' \cap U''.$$

(c) Für jede reguläre Funktione

$$f: U \longrightarrow k$$

auf einer offenen Teilmenge einer irreduziblen Varietät V gibt es eine reguläre Abildung

$$\varphi: D(\varphi) \longrightarrow k$$

mit

1. $U \subseteq D(\varphi)$ = offen in V und $\varphi|_U = f$.

2. Für jede reguläre Funktion $f': U' \longrightarrow k$, die auf einer offenen Menge mit f über einstimmt gilt $U' \subseteq D(\varphi)$ und $\varphi|_{U'} = f'$.

Die reguläre Funktion φ heißt <u>maximale Fortsetzung</u> von f und D(φ) heißt Definitionsbereich von f.

A0.1.4 Rationale Funktionen

Sei V eine reduzierte irreduzible (quasi-projektive) Varietät. Eine <u>rationale Funktion</u> auf V ist eine maximale Fortsetzung einer regulären Funktion auf V. Die Menge der rationalen Funktionen auf V wird mit

$$k(V)$$

bezeichnet.

Bemerkungen

(i) Seien $f': D(f') \longrightarrow k$ und $f'': D(f'') \longrightarrow K$ zwei rationale Funktionen auf V. Die Einschränkungen dieser Funktionen auf

$$D(f') \cap D(f'')$$

[82] Das ist eine unmittelbar Konsequenz der Definition der Irreduzibilität: wäre $U' \cap U'' = \emptyset$, so wäre

$$V = (V-U') \cup (V-U'')$$

Vereinigugng echter abgeschlossener Teilmengen, also nicht irreduzibel.

sind dann Elemente des Rings $\mathcal{O}_V(D(f')\cap D(f''))$ und können somit addiert und multipliziert werden. Die maximalen Fortsetzungen der Summe bzw. des Produkts werden mit

$$f' + f'' \text{ bzw. } f'\bullet f''$$

bezeichnet und heißen <u>Summe</u> bzw. <u>Produkt</u> der rationalen Funktionen f' und f". Die rationale Funktionen auf V bilden mit den so definierten Operationen eine (nicht notwendig endlich-dimensionale) k-Algebra, deren Multiplikation kommutativ ist.

(ii) Sei $f: D(f) \longrightarrow k$ eine rationale Funktion auf V, welche nicht identisch Null ist. Dann ist

$$U = \{ x \in D(f) \mid f(x) \neq 0 \}$$

eine nicht-leere offene Teilmenge von V und die Einschränkung von f auf diese Menge ist eine Einheit von

$$\mathcal{O}_V(U).$$

Die maximale Fortsetzung des Inversen dieser Einheit wird mit f^{-1} bezeichnet und heißt Inverses von f. Es gilt

$$f\bullet f^{-1} = f^{-1}\bullet f = 1,$$

d.h. k(V) ist ein Körper. Er heißt rationaler Funktionen-Körper von V.

(iii) Sein $U \subseteq V$ eine nicht-leere offene Teilmenge der reduzierten und irreduziblen Varietät, so definiert die Einschränkung auf U einen k-Algebra-Homomorphismus

$$k(V) \longrightarrow k(U),\ \varphi = \varphi|_{D(\varphi)\cap U}.$$

Nach 1.4.3 (xi)(b) ist dieser injektiv und nach 1.4.3(xi)(c) surjektiv, insgesamt also ein k-Algebra-Isomorphismus

$$k(V) \cong k(U).$$

Die Umkehrabbildung ist gerade der Übergang zur maximalen Fortsetzung.

(iv) Ist V = V(I) eine affine Varietät, welche durch ein Primideal I definiert wird, so ist

$$k(V) = Q(k[V])$$

gerade der Quotientenkörper des Koordinatenrings von V.

(v) <u>Beispiel</u>. Der rationale Funktionenkörper des Einheitskreises

$$V: X^2 + Y^2 = 1$$

über dem Körper k der Charakteristik $\neq 2$ ist

$$k(V) = Q(k[x, y]/(x^2+y^2-1)) = k(x)[y]/(x^2+y^2-1) = k(x)(\sqrt{1 - x^2}),$$

d.h. die quadratische Erweiterung des rationalen Funktionenkörpers k(x) mit dem Minimalpolynom

$$T^2 + x^2 - 1.$$

Man beachte, dieses Polynom ist irreduzibel über k(x) (nach dem Eisenstein-Kriterium angewandt auf den ZPE-Ring k[x] und einen der Primfaktoren x -1 und x + 1 des Absolutglieds x^2-1).

(vi) Die rationalen Funktionen sind das Analogon zu den meromorphen Funktionen der komplexen Funktionen-Theorie: sie sind nicht überall definiert und bilden einen Körper.

(vii) Seien U, U' zwei quasi-projektive Varietäten mit U irreduzibel, $W_1, W_2 \subseteq U$ zwei nicht-leere offene Teilmengen und

$$f_1: W_1 \longrightarrow U' \text{ und } f_2: W_2 \longrightarrow U'$$

zwei reguläre Abbildungen, die auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge des Durchschnitts $W_1 \cap W_2$ übereinstimmen. Dann gilt

$$f_1 = f_2 \text{ auf } W_1 \cap W_2.$$

(viii) Seien U, U' zwei quasi-projektive Varietäten mit U reduziert und irreduzibel, $W \subseteq U$ eine nicht-leere offene Teilmenge und

$$f: W \longrightarrow U'$$

eine reguläre Abbildung. Dann gibt es eine offene Teilmenge $D(\varphi) \subseteq U$ und eine reguläre Abbildung

$$\varphi: D(\varphi) \longrightarrow U'$$

mit folgenden Eigenschaften.

1. $W \subseteq D(\varphi)$ und $\varphi|_W = f$.

2. Für jede nicht-leere offene Teilmenge $\tilde{W} \subseteq U$ und jede reguläre Funktion

$$\tilde{f}: \tilde{W} \longrightarrow U',$$

die auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge mit f übereinstimmt, gilt

$$\tilde{W} \subseteq D(\varphi) \text{ und } \varphi|_{\tilde{W}} = \tilde{f}.$$

Diese Abbildung φ ist eindeutig durch f festgelegt und heißt <u>maximale Fortsetzung</u> der regulären Abildung f.

(ix) Eine reguläre Abbildung

$$f: U \longrightarrow U'$$

heißt <u>dominant</u>, wenn ihr Bild f(U) dicht liegt in U'. Man beachte, jede reguläre Abbildung $f: U \longrightarrow U'$ wird dominant, wenn man U' durch die Abbschließung des Bildes von f ersetzt.

A0.1.5 Rationale Abbildungen

Seien U, U' reduzierte und irreduzible quasi-projektive Varietäten. Eine <u>rationale Abbildung</u>

$$U \dashrightarrow U'$$

ist definiert als maximale Fortsetzung einer regulären Abbildung

$$W \longrightarrow U'$$

mit einer nicht-leeren offenen Teilmenge $W \subseteq U$. Seien rationale Abildungen

(1) $$U \dashrightarrow U' \dashrightarrow U''$$

gegeben und

$$f: D(f) \longrightarrow U' \text{ und } f': D(f') \longrightarrow U''$$

die zugehörigen maximalen Fortsetzungen. Falls f dominant ist, so ist

$$\mathrm{Im}(f) \cap D(f')$$

nicht leer, also $f^{-1}(D(f'))$ eine nicht-leere offene Teilmenge von U, auf welcher die Zusammensetzung

$$f' \circ f: f^{-1}(D(f')) \longrightarrow D(f') \longrightarrow U''$$

definiert und regulär ist. Die maximale Fortsezung dieser regulären Abbildung ist eine rationale Abbildung

$$U \dashrightarrow U'',$$

welche Zusammensetzung der beiden rationalen Abbildungen (1) heißt und ebenfalls mit $f'\circ f$ bezeichnet wird. Eine rationale Abbildung

$$f\colon U \dashrightarrow U',$$

für welche es eine rationale Abbildung

$$g\colon U' \dashrightarrow U,$$

gibt mit $f\circ g = \mathrm{Id}$ und $g\circ f = \mathrm{Id}$, heißt birational oder auch birationaler Isomorphismus. Existiert eine solche Abbildung, so heißen U und U' birational isomorph oder auch birational äquivalent.

Bemerkungen

(i) Die Zusammensetzung einer rationalen Funktion mit einer dominanten rationalen Abbildung

$$f\colon U \dashrightarrow U',$$

ist eine rationale Funktion. Die dominante rationale Abbildung definiert also eine Abbildung

$$f^*\colon k(U') \longrightarrow k(U),\ \alpha = \alpha\circ f,$$

welche Verpflanzungsabbildung heißt. Es handelt sich dabei um einen k-Algebra-Homomorphismus (welcher automatisch injektiv ist, weil die beteiligten k-Algebren Körper sind).

(ii) Die Verpflanzung definiert einen kontravarianten Funktor

$$\left(\begin{array}{c}\text{reduzierte und irreduzible}\\ \text{Varieäten über k und}\\ \text{dominante rationale Abbildungen}\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{endlich erzugte}\\ \text{Körpererweiterungen von k}\end{array}\right)$$

$$V = k(V),\ f = f^*.$$

(iii) Der Funktor von (ii) ist sogar eine Äquivalenz von Kategorien. Insbesondere sind zwei Varietäten genau dann birational äquivalent über k, wenn ihre rationalen Funktionenkörper isomorph sind über k.

(iv) Beispiel.

Sei $X = V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_k$ die semikubische Parabel. Die Abbildung

$$k[x, y] \longrightarrow k[t,],\ p(x, y) = p(t^2, t^3),$$

hat den Kern[83] $(y^2 - x^3)$ und das Bild $k[t^2,t^3]$, induziert also einen Isomorphismus

$$k[X] = k[x, y]/(y^2 - x^3) \longrightarrow k[t^2,t^3].$$

Durch Übergang zu den Quotientenkörpern erhalten wir einen Isomorphismus

$$k(X) \xrightarrow{\cong} Q(k[t^2,t^3]) = k(t) = k(\mathbb{A}^1_k).$$

Auf Grund der Aussage von (ii) ist die semikubische Parabel zur affinen Geraden birational äquivalent. Konstruieren wir einen birationalen Isomorphismus. Die Abbildung

$$f\colon\mathbb{A}^1_k \longrightarrow X,\ t = (t^2, t^3),$$

[83] Weil (t^2, t^3) ein allgemeiner Punkt von X ist.

ist wohldefiniert, und es ist leicht zu sehen, daß sie surjektiv ist. Wir können die Abbildung also als dominante rationale Abbildung ansehen. Es reicht zu zeigen, sie ist invers zur rationalen Abbildung

$$g: X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k, (x, y) = \frac{y}{x}.$$

Es gilt

$$g(f(t)) = g(t^2, t^3) = \frac{t^3}{t^2} = t$$

und

$$f(g(x, y)) = f(\frac{y}{x}) = (\frac{y^2}{x^2}, \frac{y^3}{x^3}) = (\frac{x^3}{x^2}, \frac{y^3}{y^2}) = (x, y).$$

Das vorletzte Gleichheitszeichen besteht, weil auf X die Relation $y^2 = x^3$ besteht. Wir haben gezeigt, f und g sind zueinander inverse birationale Isomorphismen.

(v) Die semikubische Parabel ist zur affinen Geraden nicht isomorph. Sie ist es nicht einmal über dem algebraischen Abschluß $\overline{k}$ Zum Beweis nehmen wir an $k = \overline{k}$ und betrachten das maximale Ideal von

$$k[X] = k[x, y]/(y^2 - x^3),$$

welches zum Ursprung (0,0) gehört, d.h. das Ideal

$$m = (x, y)/ y^2 - x^3).$$

Für dieses Ideal gilt

$$m/m^2 \quad = ((x, y)/ y^2 - x^3)) / ((x^2,xy, y^2)/ y^2 - x^3))$$
$$= (x, y)/(x^2,xy, y^2)$$
$$\cong^{84} k\bullet x + k\bullet y$$

als k-Vektorraum. Es reicht zu zeigen, für jedes maximale Ideal $n \subseteq k[\mathbb{A}^1_k] = k[x]$ ist

$$n/n^2$$

ein eindimensionaler k-Vektorraum. Denn dann können die Ringe k[X] und $k[\mathbb{A}^1_k]$ nicht isomorph sein. Die maximalen Ideale von

$$k[\mathbb{A}^1_k] = k[x]$$

---

[84] Man betrachte (x, y) als Menge der Polynome, deren Taylor-Entwicklung im Grad 1 beginnt und (x^2, xy, y^2) als Menge der Polynome, deren Taylor-Entwicklung im Grad 2 beginnt. Der Faktor läßt sich also als Menge der linearen Bestandteile aller Taylor-Entwicklungen im Punkt (0,0) aller Funktionen auf der Kurve ansehen.

entsprechen gerade den Punkten der affinen Geraden, d.h. den Elementen $c \in k$.

Da alle Punkte der affinen Geraden gleichberechtigt sind, können wir annehmen n gehört zu c = 0. Dann ist aber

$$n = (x),$$

also

$$n/n^2 = (x)/(x^2) \cong k\bullet x$$

also k-Vektorraum. Der Vektorraum ist 1-dimensional.

(vi) Geometrische Grund dafür, daß die semikubische Parabel nicht isomorph ist zur affinen Geraden besteht darin, daß erstere im Punkt (0, 0) eine Singularität besitzt, während letztere in allen Punkten nicht-singulär ist.

(vii) Zwei reduzierte irreduzible quasiprojektive Varietäten sind genau dann birational äquivalent, wenn sie isomoprhe nicht-leere offene Teilmengen enthalten.

(viii) Ein allgemeiner Satz der algebraischen Geometrie besagt, birational äquivalente Kurven, die nicht-singulär sind, sind isomorph. Dies ist gerade das Analogon der Aussage der komplexen Funktionentheorie, daß die Singularitäten beschränkter meromorphe Funktionen hebbare Lücken sind.

(ix) Der <u>Zariski-Tangentialraum</u>

$$T_p(V)$$

an eine Varietät V in enem abgeschlossenen Punkt $p \in V$ ist gegeben durch die Linearisierungen der Gleichungen von V in einer affinen Umgebung von p.

<u>Beispiel</u> 1. Der Tangentialraum der Parabel

$$V(f) \subseteq \mathbb{A}^2_k, \; f = y - x^2,$$

im Punkt p = (0,0) ist gerade

$$V(F) \subseteq \mathbb{A}^2_k \text{ mit } F = \frac{1}{2}\frac{\partial f(p)}{\partial x}x + \frac{1}{2}\bullet\frac{\partial f(p)}{\partial y}y = y.$$

<u>Beispiel</u> 2. Den Tangentialraum des Einheitskreises

$$V(f) \subseteq \mathbb{P}^2_k, \; f = X^2 + Y^2 - Z^2$$

im Punkt p = [1,0,1] erhält man, in dem man eine affine Umgebung von p fixiert, sagen wir

$$p \in U_2 := \{[x, y, z] \mid z \neq 0\} = \{[x, y, 1]\}$$

den Teil von V(f) betrachtet, der in $U_2 = \mathbb{A}^2_k$ liegtj:

$$X := V(f) \cap U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2_k \mid f(x,y,1) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2_k \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

und den Tangentialraum der affinen Varietät

$$X = V(g) \subseteq \mathbb{A}^2_k \text{ , } g = x^2 + y^2 - 1$$

im p entsprechenden Punkt

$$q := (1,0)$$

bestimmt:

$$F = \frac{\mp\partial g(q)}{\partial x}(x - 1) + \frac{\partial g(q)}{\partial y} y = x - 1.$$

Die Konkrete Beschreibung des Tangentialraums hängt hier von der Wahl der affinen Umgebung von p ab.

Beispiel 3. Der Tangentialraum der Kurve

$$V(f) \subseteq \mathbb{A}^2_k \text{ , } f = x^2 + x^3 - y^2,$$

im Punkt p = (0,0) fällt mit der gesamten affinen Ebene zusammen. Der Grund dafür ist die Tatsache, daß V(f) in einer Umgebung von p in erster Näherung wie zwei sich schneidende Geraden aussieht:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$$

und sich insbesondere im Punkt p mit sich selbst schneidet. Man nennt solche Punkte singuläre Punkte der Varietät.

(x) Eine invariante Beschreibenung des Tangentialraums kann man wie folgt geben. Genauer werden wir dessen Dual beschreiben. Seien V eine quasi-projektive Varietät und $p \in V$ ein Punkt. Weiter sei

$$\mathcal{O}_{V,p}$$

die Mengen aller regulären Funktionen, die auf einer offenen Umgebung $p \in V$ definiert sind. Zwei solche Funktionen wollen wir dabei als gleich ansehen, wenn sie auf einer offenen Umgebung von p (die im Durchschnttt der beiden Definitionsbereiche liegt) übereinstimmen. Wie betrachten also anstelle von einzelnen Funktionen ganze Äquivalenzklassen von Funktionen, welche wir Keime regulärer Funktionen im Punkt p nennen wollen. Solche Keime lassen sich addieren und multiplizieren, indem man die zugehörigen Funktionen addiert bzw. multipliziert. Mit anderen Worten,

$$\mathcal{O}_{V,p}$$

ist ein Ring und heißt lokaler Ring von V im Punkt p. Ist U eine offene Umgebung von p und

$$f: U \longrightarrow k$$

eine reguläre Funktion mit $f(p) \neq 0$. Dann ist auch 1/f in einer Umgebung regulär. Der Keim von f in p ist deshalb eine Einheit im lokalen Ring. Umgekehrt bilden die Keime regulärer Funktionen, die in p Null sind, ein Ideal

$$m = m_{V,p} \subseteq \mathcal{O}_{V,p}.$$

Da jedes Element, das nicht in m liegt, eine Eiheit ist, ist m ein maximales Ideal. Es ist sogar das einzige maximale Ideal des Rings $\mathcal{O}_{V,p}$. Kommutative Ringe mit genau einem maximalen Ideal heißt lokale Ringe. Man kann zeigen, der k-Vektorraum

$$m/m^2$$

läßt sich mit dem Dual des Tangentialraums an V im Punkt p identifizieren[85],

$$T_p V = \mathrm{Hom}_k(m/m^2 , k).$$

(xi) Eine quasi-projektive Varietät V heißt nicht-singulär oder auch glatt im Punkt $p \in V$, denn der Tangentialraum von V im Punkt p dieselbe Dimension besitzt wie V selbst. Ist V reduziert und irreduzibel, so bedeutet dies gerade

$$\dim_k T_p(V) = \mathrm{tr.\ deg.}_k\ k(V).$$

Im allgemeinen Fall definiert man die Dimension

$$\dim_p V$$

von V im Punkt p als Maximum der Dimension aller Komponenten von V, die den Punkt p enthalten (wobei man die Komponenten als reduzierte Teilvarietäten auffaßt). Die Varietät heißt nicht-singulär oder glatt schlechthin, wenn sie nicht-singulär in jedem Punkt ist. Nicht singuläre Varietäten sind automatisch reduziert.

A0.1.6 Divisoren auf Kurven

Sei X eine glatte Kurve, d.h. eine glatte quasi-projektive Varietät der Dimension 1. Wir bezeichnen mit

$$X^0$$

die Menge der abgeschlossenen Punkte von X. Die Gruppe der Divisoren von X wird mit

$$\mathrm{Div}(X)$$

bezeichnet und ist definiert als die von X^0 erzeugte freie abelsche Gruppe. Ein Divisor von X ist also eine formale endliche Linearkombination

---

[85] Die Elemente von m repräsentieren reguläre Funktionen, deren Taylor-Entwicklung im Punkt p im Grad 1 oder später anfängt, die von m^2 solche, bei denen die Taylor-Entwicklung im Grad 2 oder später beginnt. Der Faktorraum m/m^2 beschreibt also gerade die Linearisierungen im Punkt p der regulären Funktione auf V. Diese Linearisierungen sind in natürlicher Weise nicht auf V sondern auf dem Tangentialraum definiert.

$$D = n_1 \cdot p_1 + \ldots + n_r \cdot p_r$$

von abgeschlossnen Punkten $p_i \in X$ mit ganzzahligen Koeffizienten $n_i \in \mathbb{Z}$. Der Divisor heißt <u>effektiv</u>,

$$D = 0,$$

wenn alle Koeffizienten $n_i = 0$ sind. Kommt nur ein einziger von Null versschiedener Koeffizient n_i vor und ist dieser gleich 1, so heißt D auch <u>Primdivisor</u> von X.

Das wichtigste Beispiel für einen Divisor ist der <u>Divisor zu einer rationalen Funktion</u>

$$f: X \dashrightarrow k$$

(von der wir annehmen sie ist $\neq 0$). Er ist definiert als

$$\mathrm{div}(f) := \sum_{p \in X^0} \mathrm{ord}_p(f) \cdot p$$

Dabei bezeichne $\mathrm{ord}_p(f)$ die <u>Nullstellen-Polstellen-Ordung</u> oder auch einfach <u>Ordnung</u> der Funktion f im Punkt p. Für jeden Divisor D auf einer glatten irreduziblen Kurve X bezeichne

$$L(D) := \{f \in k(X)^* \mid \mathrm{div}(f) + D = 0\} \cup \{0\}$$

den Vektorraum der rationalen Funktionen, deren Polstellenordnungen durch D beschränkt sind.

Bemerkungen

(i) Ist f eine in p reguläre Funktion, deren Taylor-Entwicklung im Grad m beginnt, so gilt

$$\mathrm{ord}_p(f) = m.$$

Etwas formaler kann man das mit Hilfe des maximalen Ideals $m = m_{V,p}$ des lokalen Rings im Punkt p ausdrücken:

$$\mathrm{ord}_p(f) = \sup \{ r \in \mathbb{Z} \mid r = 0 \text{ und } f \in m^r\} \text{ falls f regulär ist in p.}$$

(ii) Falls f in p nicht regulär ist, so ist es 1/f und es gilt

$$\mathrm{ord}_p(f) = - \mathrm{ord}_p(1/f)$$

(iii) <u>Beispiel</u>. Fassen wir die reguläre Funktion

$$\mathbb{A}^1_k \longrightarrow k,\ x \mapsto x - c,$$

mit $c \in k$ als rationale Funktion

$$f:\mathbb{P}^1_k \longrightarrow k$$

auf der projektiven Geraden auf, in dem wir

(1) $$\mathbb{A}^1_k = U_1 \subseteq \mathbb{P}^1_k,\ x = [x, 1]$$

mit der Teilmenge U_1 identifizieren. In allen Punkten außer eventuel in

$$c = [c, 1]$$

und in

$$\_ = [1, 0]$$

ist die Ordnung von f gleich Null, d.h. es ist

$$\mathrm{div}(f) = \alpha\bullet c + \beta\bullet\_.$$

Die Taylor-Entwicklung von f im Punkt c beginnt mit dem Linearglied. Etwas formaler, f liegt f im Ideal (x-c) des Punktes c, aber nicht in dessen Quadrat. Also gilt

$$\alpha = \mathrm{ord}_c(f) = 1.$$

Zur Bestimmung der Ordnung von f im Punkt _ verwenden wir eine affine Umgebung dieses Punktes, sagen wir

$$\mathbb{A}^1_k = U_0 \subseteq \mathbb{P}^1_k,\ y = [1, y]$$

Der Punkt _ entspricht dabei gerade dem Ursprung der affinen Geraden. Die Umkehrung der Einbettung (1) ist durch

$$[x, y] = \frac{x}{y}$$

gegeben. Die Einschränkung Funktion f auf $\mathbb{A}^1_k = U_0$ hat also die Gestalt

$$g:\mathbb{A}^1_k = U_0 \subseteq \mathbb{P}^1_k \supseteq U_1 = \mathbb{A}^1_k \longrightarrow k,$$

$$y \quad = \quad [1, y] \quad = \frac{1}{y} = \frac{1}{y} - c = \frac{1-cy}{y}$$

Dies ist eine rationale Funktion, deren Inverses regulär ist von der Ordnung 1 im Punkt 0,

$$(1/g)(y) = \frac{y}{1-cy} = y + cy^2 + c^2y^3 + \ldots$$

Es folgt

$$\mathrm{ord}_{\_}(f) = \mathrm{ord}_0(g) = -\ \mathrm{ord}_0(1/g) = -1.$$

Damit erhalten wir

div(f) = c - _.

Der Divisor einer Differentialform mit rationalen Koeffizienten auf einer glatten Kurve heißt <u>kanonischer Divisor</u> der Kurve.

(iv) In analoger Weise kann man auch den Divisor einer Differentialform definieren. Zum Beispiel hat die Differentialform

$$dx \text{ auf } \mathbb{A}^1_k = U_1$$

auf $\mathbb{A}^1_k = U_0$ die Gestalt

$$d\frac{1}{y} = -\frac{1}{y2}\,dy.$$

Entsprechend hat man

div(dx) = -2•_.

(v) Seien $p(x) = x(x-1)(x-\lambda) \in k[x]$ ein Polynom dritten Grades ohne mehrfache Nullstellen und

$$X = V(y^2 - p(x)) \subseteq \mathbb{A}^2_k = U_2 \subseteq \mathbb{P}^2_k\ (x,y) = [x, y, 1]$$

die zugehörige Kurve dritten Grades. Ihre projektive Abschließung hat die Gestalt

$$\overline{X} = V(Y^2Z - Z^3p(\frac{X}{Z})) = V(Y^2Z - X(X-Z)(X-\lambda Z)) \subseteq \mathbb{P}^2_k$$

Diese Kurve hat auf der Ferngeraden Z = 0 genau einen Punkt

_ := [0,1,0],

d.h. es ist

$\overline{X}$ = X ∪ {_}.

Ein affine Umgebung des Punktes _ ist

$$\mathbb{A}^2_k = U_1 \subseteq \mathbb{P}^2_k\ (x,z) = [x, 1, z].$$

Der Übergang zwischen den affinen Koordinaten von U_1 und U_2 ist gegeben durch

$$U_1 \longrightarrow U_2,\ (x, z) = [x, 1, z] = (\frac{x}{z}, \frac{1}{z}).$$

Betrachten wir auf X Differentialform

$$\omega := \frac{1}{2}\bullet\frac{dx}{y} = \frac{dy}{p'(x)}$$

Man beachte, auf X gilt $y^2 = p(x)$, also $2ydy = p'(x)dx$. Diese Differentialform hat auf X weder Nullstellen noch Pole: aus $y = 0 = p'(x)$ folgt $p(x) = p'(x) = 0$, was nicht möglich ist, weil p keine mehrfachen Nullstellen haben soll. Der Divisor von ω hat also auf $\overline{X}$ die Gestalt

$$\mathrm{div}(\omega) = \alpha \cdot \_.$$

Zur Bestimmung der Ordnung in _ betrachten wir die Gestalt der Differentialform in den affinen Koordinaten von U_1:

$$\omega = \frac{1}{2} d(\frac{x}{z})/\frac{1}{z} \quad = \frac{1}{p'(x/z)} \; d\frac{1}{z}$$

Wegen

$$d(\frac{x}{z}) = \frac{1}{z} dx + x \cdot d\frac{1}{z} = \frac{z \cdot dx - xdz}{z^2}$$

erhalten wir

$$\omega = \frac{z \cdot dx - xdz}{z} = - \frac{dz}{z^2 p'(x/z)}$$

Diese Differentialform hat keine Nullstelle in U_1 (auf Grund des Ausdrucks rechts). Ist (x, z) ein Pol, so muß gelten

(2) $$z = 0.$$

Die Kurve hat in U_1 die Gleichung

$$0 = z - x(x-z)(x-\lambda z),$$

d.h. es muß gelten

$$x = 0 \text{ oder } x = z = 0 \text{ oder } x = -\lambda z = 0.$$

Der einzige in Frage kommende Pol von ω ist also der Punkt (x,z) = (0,0). Nun hat $\frac{1}{z}$ in (0,0) eine einfache Polstelle. Der Nenner $z \cdot dx - x \cdot dz$ hat aber in (0,0) eine Nullstelle. Also kann ω in (0,0) keinen Pol haben. Es folgt,

div(ω) ist der Nulldivisor

(d.h. das neutrale Elment von Div($\overline{X}$)).

(iv) <u>Definition von Divisoren auf projektiven Varietäten durch homogene Polynome</u>.

Wir beschränken uns hier auf das sehr spezielle Beispiel der projektiven Geraden.

$$\mathbb{P}^1_k$$

im Fall $k = \overline{k}$ algebraisch abgeschlossen. Sei

$$F(X,Y) \in k[X,Y], \deg F = m,$$

ein homoges Polynom des Grades m. Wir schreiben F in der Gestalt

$$F(X;Y) = Y^s \bullet G(X,Y) \text{ mit } G(X,Y) \in k[X,Y], \deg G = m - s,$$

mit einem homogenen Polynom

$$G(X;Y) = a_{m-s}X^{m-s} + a_{m-s-1}X^{m-s-1}Y + a_{m-s-2}X^{m-s-2}Y^2 + ... + a_0Y^{m-s},$$

welches nicht durch Y teilbar ist. Das nicht notwendig homogene Polynom

$$G(X, 1) = a_{m-s}X^{m-s} + a_{m-s-1}X^{m-s-1} + a_{m-s-2}X^{m-s-2} + ... + a_0$$

in einer Unbestimmten X zerfällt über $k = \overline{k}$ in Linearfaktoren,

$$G(X, 1) = (X - \alpha_1)^{n_1}(X - \alpha_2)^{n_2}...(X - \alpha_r)^{n_r}.$$

Damit ist aber

$$G(X, Y) = Y^{m-s}\bullet G(\frac{X}{Y}, 1) = (X - \alpha_1 Y)^{n_1}(X - \alpha_2 Y)^{n_2}...(X - \alpha_r Y)^{n_r}.$$

Ein Polynom F des Grades m hat somit die Gestalt

$$F(X; Y) = Y^s\bullet(X - \alpha_1 Y)^{n_1}(X - \alpha_2 Y)^{n_2}...(X - \alpha_r Y)^{n_r} \text{ mit } s + \sum_{i=1}^{r} n_i = m.$$

Obwohl F keine auf $\mathbb{P}^1_k$ definierte Funktion ist, kann man trotzdem davon sprechen, daß F in α_i eine Nullstelle der Ordnung n_i besitzt und iim Fernpunkt eine Nullstelle der Ordnung s.[86] Mit anderen Worten, man kann F den Divisor

(3) $$\operatorname{div}(F) = \sum_{i=1}^{r} n_i\bullet\alpha_i + s\bullet\_.$$

---

[86] Man kann F als eine rationale Funktion auf $\mathbb{P}^1_k$ interpretieren mit Werten in einem Vektorraumbündel. <u>Alternative</u>: da Y in den endlichen Punkten der projektiven Geraden weder Nullstellen noch Pole besitzt, sollte in jedem endlichen Punkt α gelten

$$\operatorname{ord}_\alpha(F) = \operatorname{ord}_\alpha(F/Y^m) = \operatorname{ord}_\alpha((X - \alpha_1 Y)^{n_1}(X - \alpha_2 Y)^{n_2}...(X - \alpha_r Y)^{n_r}).$$

Rechst steht aber die Ordnung einer rationalen Funktion, die in den Punkten $\alpha_1,...,\alpha_r$ Nullstellen der Ordnungen $n_1,...,n_r$ und in allen übrigen endlichen Punkten weder Nullstellen noch Pole besitzt. Anaolg erhalten wir für den Fernpunkt

$$\operatorname{ord}_\_(F) = \operatorname{ord}_\_(F/X^m) = \operatorname{ord}_\_(\frac{Y^s}{X^s}\bullet(1 - \alpha_1\frac{X}{Y})^{n_1}(1 - \alpha_2\frac{X}{Y})^{n_2}...(1 - \alpha_r\frac{X}{Y})^{n_r}))$$

$$= \operatorname{ord}_\_(z^s\bullet(1 - \alpha_1 z)^{n_1}(1 - \alpha_2 z)^{n_2}...(1 - \alpha_r z)^{n_r})$$

Dabei bezeichnet $z = \frac{X}{Y}$ eine affine Koordinate in einer offenen Umgebung von _, welche in _ gleich Null ist. Die Ordnung von F in _ sollte also gleich s sein.

Jede rationale Funktion f auf der projektiven Geraden hat auf der affinen Geraden U_1 die Gestalt

$$f = \frac{p}{q}$$

mit Polynomen p und q. In projektiven Koordinaten erhalten wir

$$f = \frac{p(X/Y)}{q(X/Y)} = \frac{Y^m p(X/Y)}{Y^m q(X/Y)} \text{ mit } m = \max(\deg p, \deg q).$$

Wir sehen, f läßt sich als Quotient von homogenen Polynomen gleichen Grades schreiben. Aus Formel (3) ergibt sich damit, die Nullstellengesamtordnung von f ist gleich der Polstellengesamtordnung von f.

(v) Sei X eine glatte projektive Kurve über $k = \bar{k}$. Dann ist für jede rationale Funktion f auf X die Summe der Polstellenordnungen gleich der Summe der Nullstellenordungen, d.h. mit

$$\operatorname{div}(f) = \sum_i n_i p_i \text{ gilt } \sum_i n_i = 0.$$

Das kann man im Prinzip mit denselben Methoden beweisen, wie wir dies in (v) für die projektive Gerade getan haben. Unser Ziel ist es, eine Verallgemeinerung dieser Aussage für den Fall zu finden, daß k nicht notwendig algebraisch abgeschlossen ist. Dazu betrachten wir für jeden abgeschlossenen Punkt

$$p \in X^0$$

die Menge der geometrischen Punkte

$$X(\bar{k}),$$

die zu diesem Punkt gehören. Ist U eine affine Umgebung von p,

$$p \in U \subseteq X,$$

so entspricht p einem maximalen Idea

$$m \subseteq k[U]$$

des Koordinatenrings von U. Die Nullstellenmenge

$$\{ x \in U(\bar{k}) \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } f \in m\}$$

ist dann endlich. Wir setzen

$$\deg p = \# \{ x \in U(\bar{k}) \mid f(m) = 0 \text{ für jedes } f \in m\}.$$

(vi) <u>Beispiel</u>. Sei

$$X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} = U_0 \cup U_1$$

die projektive Gerade über den rationalen Zahlen. Ein endlicher abgeschlossener Punkt von X ist nach Definition gerade ein maximales Ideal

$$m \subseteq \mathbb{Q}[x].$$

Der Polynomring in einer Unbestimmten ist ein Hauptidealring, d.h. m hat den Gestalt

$$m = p(x)\cdot\mathbb{Q}[x] \text{ mit } p \in \mathbb{Q}[x] \text{ irreduzibel.}$$

Der Grad von m ist damit gerade die Menge der Nullstellen von p im affinen Raum über der algebraischen Abschließung von k,

$$\begin{aligned} \deg m &= \#\{\, x \in \mathbb{A}^1_k(\bar{k}) \mid p(x) = 0\} \\ &= \#\{x \in \bar{k} \mid p(x) = 0\} \\ &= \deg p \\ &= [k[x]/(p) : k] \\ &= [\mathcal{O}_{X,m}/m_{X,m} : k] \\ &= [k(m):k] \end{aligned}$$

(Man beachte, als irreduzíbles Polynom über $\mathbb{Q}$ hat p keine mehrfachen Nullstellen).

(vii) Allgemein kann man für jeden abgeschlossenen Punkt $p \in X^0$ einer glatten über k definierten Kurve zeigen, der Grad von p ist gerade der Grad des Restklassenkörpers von p über dem Grundkörper k,

$$\deg p = [k(p): k].$$

(viii) Ist

$$D = \sum_i n_i p_i$$

der Divisor einer rationalen Funktion

$$D = \mathrm{div}(f)$$

auf einer glatten irreduziblen projektiven Kurve X, so kann man jeden der Punkte p_i mit der Summe der zugehörigen geometrischen Punkte von X identifizieren. Deren Anzahl ist deg p_i. Die obige Aussage über die Nullstellen-Polstellen-Gesamtordnung einer rationalen Funktion übersetzt sich dann in die Aussage,

$$\sum_i n_i\cdot\deg(p_i) = 0.$$

(ix) Die obigen Betrachtungen gestatten es uns, einige der Räume L(D) zu berechnen.

Es gilt für glatte projektive Kurven (im Fall $k = \bar{k}$)

L(Nulldivisosor) $=$[87] k.

L(-D) $=$[88] 0 für $D \neq 0$ effektiv.

dim L(D) $< \infty$ für D beliebig.

Schließlich gilt

L(D) $= 0$ für $d := \deg D < 0$,

denn es gibt keinen effektiven Divisor des Grades $d < 0$, insbesondere keinen der Gestalt

$$D + \deg(f).$$

A0.1.7 Der Grad eines Divisors, eine exakte Sequenz

Seien X eine glatte irreduzible Kurve über k und

$$D = \sum_i n_i p_i$$

ein Divisor auf X. Dann heißt

$$\deg(D) := \sum_i n_i \deg(p_i)$$

Grad des Divisors D. Ein Divisor der Gestalt

$$\mathrm{div}(f)$$

mit einer rationalen Funktion f auf X heißt Hauptdivisor oder auch prinzipaler Divisor. Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe der Divisoren-Gruppe, welche mit

$$P(X) \subseteq \mathrm{Div}(X)$$

bezeichnet wird. Die Faktorgruppe

$$\mathrm{Pic}(X) := \mathrm{Div}(X)/P(X)$$

heißt Divisorklassengruppe von X oder auch Picard-Gruppe von X.

Bemerkungen

(i) Nach Konstruktion besteht eine exakte Sequenz abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow P(X) \longrightarrow \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0.$$

(ii) Die Grad-Abbildung ist ein Homomorphismus addiver abelscher Gruppen

$$\deg: \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

(iii) Nach dem Satz über die Nullstellengesamtordung einer rationalen Funktion gilt

$$P(X) \subseteq \mathrm{Ker}(\deg) \text{ falls X eine glatte projektive Kurve ist.}$$

---

[87] Eine Funktion aus diesem Raum kann in keinem Punkt einen Pol haben, ist also auf der ganzen Kurve regulär, also nach dem Satz von Liouville konstant.

[88] Eine Funktion aus diesem Raum kann keinen Pol haben, ist also eine Konstante. Sie muß aber außerdem mindestens eine Nullstelle besitzen. Also kommt nur die Konstante 0 in Frage.

Insbesondere induziert der Grad einen Homomorphismus auf der Picard-Gruppe einer glatten projektiven Kurve, der ebenfalls mit

$$\deg: \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

bezeichnet wird.

(iv) Der Übergang zum Nullstellen-Polstellen-Divisor definiert einen Homomrophismus

$$k(X)^* \longrightarrow \mathrm{Div}(X),\ f = \mathrm{div}(f),$$

von der multiplikativen Gruppe des rationalen Funktionenkörpers von X in die Gruppe der Divisoren, wobei das Bild gerade die Untergruppe der Hauptdivisoren ist,

$$\deg(k(X)^*) = P(X).$$

Eine rationale Funktion f liegt genau dann ist Kern dieser Abbildung, wenn sie in jedem abgeschlossenen Punkt $p \in X^0$ regulär ist und in keinem solchen Punkt eine Nullstelle besitzt. Dann hat sie aber auch in keinem Punkt von $X(\bar{k})$ eine Nullstelle, d.h. f ist eine Konstante, $f \in \bar{k}$. Für glatte irreduzible projektive Kurven gilt also

$$\mathrm{Ker}(\deg) = k(X)^* \cap \bar{k},$$

d.h.

$$P(X) \cong k(X)^*/\, k(X)^* \cap \bar{k}.$$

Die exakte Sequenz von (i) bekommt damit die Gestalt

$$0 \longrightarrow k(X)^*/k'^* \longrightarrow \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0$$

mit der endlichen algebraischen Erweiterung

$$k' := k(X) \cap \bar{k}$$

von k.

(v) <u>Der Spezialfall</u> $X = \mathbb{P}^1_k$. Im Fall der projektiven Geraden gilt

$$k' = k(X) \cap \bar{k}$$

und der Grad-Homomorphismus

$$\deg: \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ist ein Isomorphismus. Die exakte Sequenz von (i) bekommt damit die Gestalt

$$0 \longrightarrow k(X)^*/k^* \longrightarrow \mathrm{Div}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Beweis von k' = k. Sei

$$U := \mathbb{A}^1_k$$

eine affine offene Teilmenge von $X = \mathbb{P}^1_k$. Dann gilt

$k[U] = k[x]$ (Polynomring in einer Unbestimmten x).
$k(X) = k(U) = k(x)$.

Trivialerweise ist

$$k(X) \cap \bar{k} \supseteq k.$$

Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Sei $f(x) \in k(X) \cap \bar{k}$. Dann gilt

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ mit Polynomen } p, q \in k[x].$$

O.B.d. A seien p und q teilerfremd. Wegen $f \in \bar{k}$ ist f algebraisch über k, d.h. es besteht eine Relation der Gestalt

$$f^m + c_1 f^{m-1} + c_2 f^{m-2} + ... + c_m = 0 \qquad \text{mit } c_1,...,c_m \in k.$$

Multiplikation mit q^m liefert

$$p^m + c_1 p^{m-1} q2 + c_2 p^{m-2} q^2 + ... + c_m g^m = 0$$

Auf der linken Seite sind alle Summanden mit eventueller Ausnahme des ersten durch q teilbar. Also ist es auch der erste:

$$q \mid p^m.$$

Weil p und q teilerfremd sein sollen, ist dies nur möglich, wenn q ein konstantes Polynom ist, $q \in k$. Wir erhalten

$$f \in k[x] \cap \bar{k}\ .$$

Wegen $f \in \bar{k}$ ist f ein Polynom vom Grad 0, d.h.

$$f(x) = f(0) \in k.$$

Beweis der Isomorphie von deg: $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$. Es reicht zu zeigen,

$$\deg: \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ist surjektiv mit dem Kern

$$\mathrm{Ker}(\deg) = P(X).$$

<u>Beweis der Surjektivität</u>. Wir wählen ein Element $c \in k$. Dann ist das von x-c erzeugte Ideal

$$m := (x - c) \subseteq k[x]$$

ein maximales Ideal des Polynomrings. Die Nullstellenmenge von m über der algebraischen Abschließung $\bar{k}$ besteht nur aus dem Punkt $c \in k = \mathbb{A}^1_k$, d.h. der Grad des Primdivisors m ist

$$\deg(m) = 1.$$

Es folgt

$$1 \in \mathrm{Im}(\deg) \subseteq \mathbb{Z}.$$

Da 1 die additive Gruppe $\mathbb{Z}$ erzeugt, folgt

$$\mathrm{Im}(\deg) = \mathbb{Z},$$

d.h. deg: $\mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist surjektiv.

<u>Berechnung des Kerns von</u> deg: $\mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$. Wie wir bereits wissen gilt

$$P(X) \subseteq \mathrm{Ker}(\deg).$$

Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Sei

(1) $$D = n_1 x_1 + ... + n_r x_r + n\bullet\_ \in \mathrm{Ker}(\deg).$$

Dabei sollen $x_1,...,x_r$ Punkte auf dem endlichen Teil der projektiven Geraden bezeichnen und _ sei der Fernpunkt. Mit anderen Worten, x_i ist ein maximales Ideal des Koordintenrings $k[\mathbb{A}^1_k] = k[x]$, d.h.

$$x_i = (p_i) \subseteq k[x]$$

mit einem irreduziblen Polynom $p_i \in k[x]$. Wir setzen

$$f := p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r} \in k(x)$$

und betrachten f als rationale Funktion auf der projektiven Geraden:

$$f\colon \mathbb{P}^1_k \dashrightarrow k.$$

Bestimmen wir den Divisor div(f). Dazu bemerken wir zunächst, das irreduzible Polynom p_i liegt in genau einem maximalen Ideal von k[x], nämlich in x_i (welches von p_i erzeugt wird), - und es liegt nicht im Qudrat dieses maximalen Ideals. Deshalb gilt

$$\mathrm{ord}_x(p_i) = \begin{cases} 1 \text{ für } x = x_i \\ 0 \text{ für } x \in \mathbb{A}^1_k - \{x_i\} \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(f) &= \sum_{x\in X} \mathrm{ord}_x(f) \\ &= \sum_{x\in X} \mathrm{ord}_x(p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r}) \\ &= \sum_{x\in X} \sum_{i=1}^{r} n_i\cdot\mathrm{ord}_x(p_i) \\ &= \sum_{i=1}^{r} n_i\cdot\mathrm{ord}_{x_i}(p_i) + \tilde{n}\cdot\_ \end{aligned}$$

mit einer nicht-negativen ganzen Zahl $\tilde{n}$, d.h.

(2) $$\mathrm{div}(f) = n_1\cdot x_1+\ldots+n_r\cdot x_r + \tilde{n}\cdot\_$$

Es reicht zu zeigen,

$$n = \tilde{n},$$

denn dann ist

$$D = \mathrm{div}(f) \in P(X).$$

Wegen (1) und (2) ist aber

$$0 = \deg(D) = \sum_{i=1}^{r} n_i\cdot\deg(x_i) + n\cdot\deg(\_)$$

und

$$0 = \deg(\mathrm{div}(f)) = \sum_{i=1}^{r} n_i \bullet \deg(x_i) + \tilde{n} \bullet \deg(\_).$$

Wir gehen zur Differenz über und erhalten

$$0 = (n - \tilde{n}) \bullet \_,$$

d.h. $n = \tilde{n}$.

A0.1.8 Der Satz von Riemann-Roch, Geschlecht einer Kurve

Seien X eine glatte und irreduzible projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$, D ein Divisor und K ein kanonischer Divisor. Dann gibt es eine nicht-negative ganze Zahl

$$g = g(X)$$

mit

$$\ell(D) - \ell(K-D) = \deg D + 1 - g.$$

Dabei bezeichne $\ell(D) = \dim L(D)$ die Dimension des k-Vektorraums L(D). Die ganze Zahl g heißt <u>Geschlecht</u> der Kurve X.[89]

Bemerkungen

(i) Im Fall D = 0 gilt $\ell(D) = 1$, also

$$\ell(K) = g.$$

Das Geschlecht ist also gerade die Dimension des Vektorraums

$$L(K) = \{f \in k(X) \mid K + \mathrm{div}(f) = 0\}.$$

(ii) Im Fall D = K gilt $\ell(K-D) = 1$, also

$$g - 1 = \ell(K) - 1 = \deg(K) + 1 - g,$$

d.h.

$$\deg(K) = 2g - 2.$$

Der Grad der kanonischen Divisoren ist also 2g - 2.

(iii) Im Fall $X = \mathbb{P}^1_k$ kennen wir einen kanonischen Divisor:,

$$K = \mathrm{div}(dx) = -2\bullet\_,$$

Da $\_ = [1,0]$ ein k-rationaler Punkt ist, gilt $\deg \_ = 1$, d.h.

$$\deg K = -2.$$

Das Geschlecht der projektiven Geraden ist somit

$$g(\mathbb{P}^1_k) = 0.$$

---

[89] Einen Beweis findet man am Anfang des vierten Kapitels im Buch von Hartshorne. Für einen elementaren Beweis, der auf A. Weil zurückgeht, siehe Van der Waerden: Algebra, Teil II.

Dieses Ergebnis paßt gut zu unserer Vorstellung vom Geschlecht einer Riemannschen Fläche, als der Anzahl der “Henkel”, mit denen eine Kugeloberfläche versehen wurde: $\mathbb{P}^1_k$ ist im Fall $k = \mathbb{C}$ gerade die Riemannsche Zahlenkugel.

(iv) Wir kennen einen kanonischen Divisor in einer weiteren Situation, nämlich im Fall der projektiven Abschließung der affinen Kurve

$$X = V(y^2 - p(x) \subseteq \mathbb{A}^1_k \text{, } p(x) = x\,(x-1)(x-\lambda),\ k = \bar{k}\text{, char}(k) \neq 2$$

Nach 1.4.6 Bemerkung (v) ist

$$K := \operatorname{div}(\frac{1}{2} \bullet \frac{dx}{y}) = 0$$

der Nulldivisor, d.h. das Geschlecht der Kurve X ist

$$g(X) = 1.$$

Insbesondere ist diese Kurve nicht isomorph zur projektiven Geraden (und damit auch nicht projektiv äquivalent zu letzterer).

(v) Betrachten wir umgekehrt eine glatte und irreduzible projektive Kurve

$$X \subseteq \mathbb{P}^N_k,\ k = \bar{k},\ \text{char}(k) \neq 2,$$

vom Geschlecht 1,

$$g(X) = 1.$$

Der Satz von Riemann-Roch bekommt dann die Gestalt

$$\ell(D) - \ell(K\text{-}D) = \deg(D).$$

Sei p geometrischer Punkt von X. Wir wollen hier einige der Räume

$$L(n\bullet p) \text{ mit } n = 1,2,3,...$$

berechnen.

Wegen $k = \bar{k}$ gilt deg p = 1, also

$$\deg K - p = -1$$

also

$$L(K - p) = 0,$$

also

$$\ell(p) = \deg(p) = 1.$$

Der Raum L(p) der Funktionen, die in p höchstens einen Pol besitzen und sonst regulär sind, ist somit 1-dimensional. Wegen $k \subseteq L(p)$ folgt

$$L(p) = k.$$

Insbesondere gibt es auf X keine Funktion, die in einen Punkt einen einfachen Pol besitzt und sonst regulär ist.

Diese Argumentation mit $n\bullet p$ anstelle von p liefert

$$\ell(n\bullet p) = \deg(n\bullet p) = n \text{ für } n = 1,2,3,...$$

Insbesondere ist

$$L(2\bullet p)$$

zweidimensional, sagen wir

$$L(2\bullet p) = k\bullet 1 + k\bullet x.$$

Dabei ist x eine Funktion, die in p einen doppelten Pol besitzt und in allen anderen Punkten regulär ist. Weil $L(3\bullet p)$ dreidimensional ist, gilt

$$L(3\bullet p) = k\bullet 1 + k\bullet x + k\bullet y$$

mit einer Funktion y, die in p einen dreifachen Pol besitzt und in allen anderen Punkten regulär ist. Betrachten wir jetzt $L(6\bullet p)$. Es gilt

$$1, x,, x^2, x^3, y, y^2, xy \in L(6\bullet p).$$

Weil der Vektorraum 6-dimensional ist, besteht eine lineare Abhängigkeit zwischen diesen Vektoren,

(1) $$e\bullet y^2 + f\bullet y + + g\bullet xy = d\bullet x^3 + a\bullet x^2 + b\bullet x + c$$

Die Koeffizienten vor x^3 und y^2 können nicht beide Null sein, denn die Funktionen

$$1, x, y, x^2, xy$$

haben in p einen Pol der Ordnung 0, 2, 3 bzw. 5, können also nicht linear abhängig sein. Auf einer Seite von (1) steht also eine Funktion mit einem Pol der Ordnung 6, also muß auch auf der anderen Seite eine solche Funktion stehen, d.h. die Koeffizienten von y^2 und x^3 sind beide von Null verschieden. Indem wir x und y mit geeigneten Elementen von k multiplizieren, errreichen wir $e = d = 1$, d.h. wir können annehmen, (1) hat die Gestalt

$$y^2 + f\bullet y + + g\bullet xy = x^3 + a\bullet x^2 + b\bullet x + c$$

Durch quadratische Ergängung erreichen wir sogar die Gestalt

(2) $$y^2 = x^3 + a\bullet x^2 + b\bullet x + c = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

Wir haben damit eine rationale Abbildung

$$X \longrightarrow V(y^2 - x^3 + a\bullet x^2 + b\bullet x + c) \subseteq \mathbb{A}^2_k, q = (x(q), y(q)),$$

gewonnen. Durch eine etwas genauere Betrachtung der Divisoren der Gestalt

$$6\bullet p + \operatorname{div}(f) \text{ mit } f \in L(6\bullet p),$$

die wir hier nicht ausführen werden[90], sieht man, daß diese Abbildung sogar ein Isomorphismus ist. Wir erhalten so, daß jede Kurve vom Geschlecht 1 eine ebene Kurve mit einer Gleichung der Gestalt (2) ist. Weil die Kurve glatt ist, sind die Nullstellen der rechten Seite paarweise verschieden. Durch eine lineare Transformation der x-Achse erreichen wir $\alpha = 0$ und $\beta = 1$. Die Gleichung der Kurve bekommt damit die Gestalt

(3) $$y^2 = x(x - 1)(x - \lambda).$$

Insbesondere liegen alle Kurven vom Geschlecht 1 in einer durch $\lambda\in k$ parametrisierten Familie.

(vi) Wir kehren jetzt zu unserem ursprünglichen Thema zurück, nämlich zur Betrachtung der Quaternionen-Algebra

$$(a, b)_k$$

und der zugehöringen ebenen Kurve[91]

$$C = C(a,b) = V(ax^2 - by^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_k .$$

Der Kegelschnitt C hat den rationalen Funktionenkörper

$$k(C) = Q(k[x, y]/(ax^2 - by^2 - 1).$$

Wir wollen uns hier davon überzeugen, daß die Quationen-Algebra

$$(a, b)_k \otimes_k k(C)$$

stets zerfällt. Das ist, wie wir wissen, äquivalent zu der Aussage, daß der Kegelschnitt C einen k(C)-rationalen Punkt besitzt. Das wiederum ergibt sich aus der folgenden Aussage.

(vii) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n_k$ einer affine reduzierte und irreduzible Varietät. Dann besitzt V einen Punkt mit Koordinten in k(V).

Beweis. Nach Voraussetzung ist V von der Gestalt

$$V = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n_k$$

mit einem Primideal $I \subseteq k[x_1,...,x_n]$. Es gilt

$$k(V) = Q(k[x_1,...,x_n]/I).$$

Bezeichne

[90] Man braucht ein allgemeines Kriterium dafür, daß die Funktionen aus L(D) Isomorphismen definieren, siehe Hartshorne.

[91] Unsere Bezeichnungsweise ist hier etwas ungenau: C ist eignetlich definiert als die projektive Abschließung von $V(ax^2 - by^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_k$.

$$\begin{array}{cccc} t_i \in & k[V] & \subseteq & k(V) \\ & || & & || \\ & k[x_1,...,x_n]/I & \subseteq & Q(k[x,...x_n]/I) \end{array}$$

die Restklasse der Unbestimmen x_i im Faktorring $k[x_1,...,x_n]/I$, d.h. das Bild von x_i bei der natürlichen Abbildung

$$\rho: k[x_1,...,x_n] \longrightarrow k[x_1,...,x_n]/I\ ,\ f = f + I.$$

Es reicht zu zeigen,

$$p = (t_1,...,t_n)$$

ist ein Punkt von V. Für $f \in k[x_1,...,x_n]$ gilt

$$\begin{aligned} f(t_1,...,t_n) = 0 \quad & \Leftrightarrow f(\rho(x_1),...,\rho(x_n)) = 0 \\ & \Leftrightarrow \rho(f(x_1,...,x_n)) = 0 \\ & \Leftrightarrow f \in \mathrm{Ker}(\rho) \\ & \Leftrightarrow f \in I. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $p = (t_1,...,t_n)$ ein Punkt von $V = V(I)$. Wir haben sogar mehr gezeigt: p ist ein allgemeiner Punkt von V.

QED.

(viii) Aus dem Beweis von (vii) ergibt sich, jede affine, reduzierte und irreduzible Varietät besitzt einen allgemeinen Punkt. Umgekehrt ist leicht zu sehen, eine affine Varietät mit einem allgemeinen Punkt muß reduziert und irreduzibel sein. Man kann den Begriff des allgemeinen Punktes so verallgemeinern, daß er für beliebige quasi-projektive Varietäten definiert ist (und eine solche Varietät genau dann einen allgemeinen Punkt besitzt, wenn sie irreduzibel ist).

A0.2 Schemata

A0.2.1 Garben

Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit direkten Produkten. Wir werden im folgenden annehmen, die Objekte von $\mathcal{C}$ sind Menge (mit irgendeiner Zusatzstruktur).[92]

---

[92] Der Begriff der Garbe läßt sich in einem sehr allgemeinen Kontext definieren (und ist auch dort von Nutzen). Wir werden uns hier im wesentlichen auf die Fälle beschränken, daß $\mathcal{C}$ die Kategorie Ens der Mengen, die Kategorie Ab der abelschen Gruppen oder die Kategorie der kommutativen Ringe mit 1 sind, auch wenn die Formulierungen manchmal einen allgemeineren Kontext suggerieren mögen.

Eine <u>Prägarbe</u> von X mit Werten in $\mathcal{C}$ ist ein kontravarianter Funktor

$$P: X \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Dabei identifizieren wir X mit der Kategorie, deren Objekte die offenen Mengen von X sind und deren Morphismen die Einbettungen der offenen Mengen von X sind, d.h.

$$\mathrm{Hom}_X(U,V)$$

mit offenen Mengen U, V von X besteht aus genau einem Element, falls U eine Teilmenge von V ist, und ist andernfalls leer. Die Morphismen-Komposition ist die Zusammensetzung von Einbettungen offener Mengen.

Für jede offene Menge $U \subseteq X$ heißen die Elemente von

$$\Gamma(U, P) := P(U)$$

auch <u>Schnitte</u> von P über U.

Der zu je zwei offenen Mengen U, V von X mit $U \subseteq V$ gehörige Morphismus von $\mathcal{C}$ wird mit

$$\rho_U^V: P(V) \longrightarrow P(U),\ s \mapsto s|_V\ ,$$

bezeichnet und heißt <u>Restriktion</u>. Eine Garbe auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ ist eine Prägarbe

$$F: X \longrightarrow \mathcal{C}$$

mit der Eigenschaft, daß für jede offene Menge U von X und jede offene Überdeckung

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i$$

von U die Sequenz

$$F(U) \xrightarrow{u} \prod_{i\in I} F(U_i) \overset{u'}{\underset{u''}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j)$$

exakt ist, d.h. u ist der Differenzkern von u' und u'':

$$u'\circ u = u''\circ u$$

und u ist universell bezüglich dieser Eigenschaft. Dabei seien u, u', u'' die folgenden Morphismen von $\mathcal{C}$.

$$u: F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i),\ s \mapsto (s|_{U_i})_{i\in I}$$

Allgemeinere Situationen würden einen sehr viel größeren Aufwand erfordern, siehe die folgenden Monographien

Gotement, R: Topologie algébrique et théorie de faisceaux, Hermann, Paris 1958

A. Grothendieck: Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J. 9 (1957), 119-221. (eine klassische Einführung in die homologische Algebra, die Garben-Theorie und die Theorie der abgeleiteten Funktoren, klassisch in dem Sinne, daß noch keine abgeleiteten Kategorien auf treten).

Verdier, J.-L.: Categories derivées, etat 0, in SGA 4 1/2, Lecture Notes in Math. 569 (1977), 262-311

Milne, J.S: Étale cohomology, Princeton University Press, 1980

Johnstone: Topos theory, Academic Press, New York 1977.

$$u': \prod_{i\in I} F(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j),\ (s_i)_{i\in I} \mapsto (s_i|_{U_i\cap U_j})_{i,j\in I}$$

$$u': \prod_{i\in I} F(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j),\ (s_i)_{i\in I} \mapsto (s_j|_{U_i\cap U_j})_{i,j\in I}$$

Mit anderen Worten, es sind die folgenden beiden Bedingungen erfüllt.

(a) Für je zwei Schnitt $s',s'' \in F(U)$ mit $s'|_{U_i} = s''|_{U_i}$ für jedes i gilt $s' = s''$.

(b) Für jede Familie $(s_i)_{i\in I}$ von Schnitten $s_i\in F(U_i)$ mit $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ für beliebige $i,j\in I$ gibt es einen Schnitt $s\in F(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für jedes $i\in I$.

Ein Morphismus von Prägarbe bzw. Garben ist eine natürliche Transformation der Funktoren. Die Kategorie der Garben des topologischen Raums X mit Werten in der Kategorie $\mathcal{O}$ wird mit

$$Sh_X(\mathcal{C})$$

bezeichnet.

A0.2.2 Beispiele

(i) Garben von stetigen Funktionen

Seien X und Y topologische Räume und $U \subseteq X$ eine offene Menge. Wir setzen

$$C_X^Y(U) := \text{Menge der stetige Abbildungen } U \longrightarrow Y$$

Dann ist auf diese Weise eine Garbe von Mengen,

$$C_X^Y: X \longrightarrow Ens$$

definiert (deren Restriktionen die gewöhnlichen Einschränkungen von Abbildungen sind). Sie heißt Garbe der stetigen Funktion auf X mit Werten in Y.

(ii) Garbe der stetigen Schnitte

Für jede stetige Abbildung $f: Y \longrightarrow X$ topologischer Räume ist durch

$$\Gamma_f(U) := \{s: U \longrightarrow Y \mid s \text{ stetig}, f\circ s = Id_U\}$$

eine Garbe von Mengen,

$$\Gamma_f: X \longrightarrow Ens,$$

definiert (deren Restriktionen die gewöhnlichen Einschränkungen von Abbildungen sind). Sie heißt Garbe der stetigen Schnitte von f. Sie ist eine Teilgarbe von C_X^Y, d.h. ein Teilobjekt in der Kategorie der Garben $X \longrightarrow Ens$.

(iii) Garben differenzierbarer bzw. analytischer Funktionen

Sei X eine r-fach stetig differenzierbar Mannigfaltigkeit, z.B. $X = \mathbb{R}^n$. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ setzen wir

$$C^r(U) := \{s:U \longrightarrow \mathbb{R} \mid s \text{ ist r-mal stetig differenzierbar}\}.$$

Dann ist auf diese Weise eine Teilgarbe

$$C^r: X \longrightarrow \mathbb{R}\text{-Algebren}$$

von $C_X^{\mathbb{R}}$ definiert, die <u>Garbe der r-mal stetig differenzierbaren Funktionen</u> auf X. Im Fall $r = \infty$ heißt diese Garbe auch <u>Garbe der glatten Funktionen</u> auf X. Analog definiert man die Garbe

$$C^{\omega}: X \longrightarrow \mathbb{R}\text{-Algebren},$$

der <u>analytischen Funktionen</u>, d.h. der lokal in jedem Punkt in eine konvergente Potenzreihe entwickelbaren Funktionen.

(iv) Garben von holomorphen Funktionen

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, zum Beispiel $X = \mathbb{C}^n$. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ setzen wir

$$\mathcal{O}(U) := \{s:U \longrightarrow \mathbb{C} \mid s \text{ ist holomorph}\}.$$

Dann ist auf diese Weise eine Teilgarbe

$$\mathcal{O}: X \longrightarrow \mathbb{C}\text{-Algebren}$$

von $C_X^{\mathbb{C}}$ definiert, die <u>Garbe der holomorphen Funktionen</u> auf X, d.h. der lokal in jedem Punkt in eine komplexe Potenzreihe entwickelbaren Funktionen.

(v) Die Strukturgarbe eines Spektrums

Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und

$$\text{Spec } R := \{p \subseteq R \mid p \text{ ist Primideal von } R\}$$

die Menge der Primideale von R. Zu jedem Element $r \in R$ gehört eine Abbildung

$$r: \text{Spec } R \longrightarrow \vee_{p \in \text{Spec } R}\, Q(R/p)$$

mit $r(p) := r + p \in R/p \subseteq Q(R/p)$.[93] Für jede Teilmenge

$$M \subseteq R$$

bezeichne

$$V(M) := \{p \in \text{Spec } R \mid r(p) = 0 \text{ für jedes } r \in M\}$$

die durch M definierte <u>affine Varietät</u>, d.h. die Menge der gemeinsamen Nullstellen der "Funktionen" aus M. Es gilt stets

$$V(M) = V(MR),$$

d.h. M und das von M erzeugte Ideal von R definieren dieselbe Varietät. Weiter gilt

1. $V(\{1\}) = \emptyset$.
2. $V(\{0\}) = \text{Spec } R$.

---

[93] Ist $R = \mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ ein Polynomring über den komplexen Zahlen und p das maximale Ideal zum Punkt $c := (c_1,...,c_n) \in \mathbb{C}^n$

$$p = (x_1 - c_1, ..., x_n - c_n),$$

So gilt

$$\begin{aligned} r(p) &= r(x_1,...,x_n) + p \\ &= r(c_1,...,c_n) + p \qquad \text{(wegen } x_i \equiv c_i \text{ mod } p) \\ &= \text{Bild von } r(c_1,...,c_n) \text{ bei der natürlichen Einbettung } \mathbb{C} \longrightarrow R/p \subseteq Q(R/p) \end{aligned}$$

d.h. r(p) läßt sich mit dem Wert des Polynoms im Punkt c identifizieren.

3. $V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$ für Ideale I_1, I_2 von R.

4. $V(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I} V(I_\alpha)$ für Ideale I_α von R.

5. $V(I) = V(J) \Leftrightarrow \sqrt{I} = \sqrt{J}$ für Ideale I, J von R.

Insbesondere bilden die Mengen der Gestalt V(M) die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, der Zariski-Topolgie von Spec R. Die Mengen der Gestalt

$$D(f) := \{p\in \text{Spec } R \mid f(p) \neq 0\} , f \in R,$$

bilden eine Topologie-Basis für die Zariski-Topologie von Spec R. Spec R ist quasi-kompakt in der Zariski-Topologie. Für jede offene Menge $U \subseteq$ Spec R setzen wir

$$F(U) := \prod_{p\in U} R_p$$

Auf diese Weise ist eine Garbe

$$F: \text{Spec } R \longrightarrow (\text{kommutative Ringe mit } 1)$$

mit Werten in der Kategorie der kommutativen Ringe mit 1 definiert. Unser Ziel ist es eine Teilgarbe dieser Garbe zu definieren, welche Garbe der regulären Funktionen auf Spec R heißt.

Seien $U \subseteq$ Spec R eine offene Menge und $r,s\in R$ zwei Elemente, wobei s in U keine Nullstelle hat, d.h. s liegt in keinem Primideal $p \in$ Dann ist $\frac{r}{s}$ für jedes $p\in U$ ein wohldefiniertes Element von R_p und die Famile dieser Quotienten in den R_p definiert einen Schnitt der Garbe F über U, welche wir mit

(1) $$\frac{r}{s} \in F(U)$$

bezeichnen. Man stelle sich $\frac{r}{s}$ als Keim (oder Potenzreihe)der Funktion

$$U \longrightarrow \vee_{p\in U} Q(R/p),\ x \mapsto \frac{r(x)}{s(x)},$$

vor.

Sei jetzt $U \subseteq$ Spec R eine offene Menge. Ein reguläre Funktion φ auf U ist definiert als ein Schnitt

$$\varphi\in F(U)$$

welcher lokal von der Gestalt (1) ist, d.h. für jeden Punkt $p\in U$ soll es eine offene Menge U' geben und Elemente $r,s \in R$ mit

$$p \in U' \subseteq U, \text{ s hat keine Nullstelle auf U' und } \varphi|_{U'} = \frac{r}{s} \text{ in } F(U').$$

Für jede offene Teilmenge $U \subseteq$ Spec(R) bezeichne

$$\mathcal{O}(U) := \text{Menge der regulären Funktionen auf } U.$$

Auf diese Weise ist eine Teilgarbe

$$\mathcal{O}: \text{Spec } R \longrightarrow (\text{kommutative Ringe mit } 1),$$

der obigen Garbe F definiert. Sie heißt Garbe der regulären Funktionen auf Spec R oder auch Strukturgarbe von Spec R. Ihre globalen Schnitte sind gerade

$$\Gamma(\text{Spec } R, \mathcal{O}) = R$$

die Elemente des Rings R, d.h. R wird auf diese Weise gerade zum Ring der regulären Funktionen auf Spec R. Allgemeiner gilt

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}) = R_f := \{\frac{r}{f^n} \mid r\in R, n\in\mathbb{N}\}.$$

Der Halm der Strukturgarbe im Punkt p∈Spec R ist gerade

$$\mathcal{O}_{\text{Spec R, p}} = R_p = \{\frac{r}{s} \mid r\in R, s\in R\text{-}p\}$$

die Lokalisierung von R im Primideal p.

(vi) Direkte Summen

Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit direken Summen, und

$$F_i: X \longrightarrow \mathcal{C}, i\in I,$$

eine Familie von Garben. Dann ist durch

$$U \mapsto \oplus_{i\in I} F_i(U)$$

eine Garbe auf X definiert, welche <u>direkte Summe</u> der F_i heißt und mit

$$\oplus_{i\in I} F_i$$

bezeichnet wird. Diese Garbe besitzt die Universalitätseigenschaft einer direkten Summe in der Kategorie $Sh_X(\mathcal{C})$.

(vii) Kerne

Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{O}$ eine Kategorie mit Kernen und

$$f:F \longrightarrow G$$

ein Morphismus von Garben auf X mit Werten in $\mathcal{O}$. Dann ist durch

$$U \mapsto \text{Ker}(F(U) \longrightarrow G(U))$$

eine Garbe auf X mit Werten in $\mathcal{O}$ definiert, welche Kern von f heißt und mit

$$\text{Ker}(f)$$

bezeichnet wird. Sie besitzt die Universalitätseigenschaft eines Kens in der Kategorie

$$Sh_X(\mathcal{O})$$

der Garben auf X mit Werten in $\mathcal{O}$.

(viii) Kokerne

Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{O}$ eine Kategorie mit Kokernen und

$$f:F \longrightarrow G$$

ein Morphismus von Prägarben auf X mit Werten in $\mathcal{O}$. Dann ist durch

$$U \mapsto \text{Koker}(F(U) \longrightarrow G(U))$$

eine Prägarbe auf X mit Werten in $\mathcal{O}$ definiert, welche Kokern von f heißt und mit

$$\text{Koker}(f)$$

bezeichnet wird. Sie besitzt die Universalitätseigenschaft eines Kens in der Kategorie

$$\text{Hom}(X,^{op} \mathcal{O})$$

der Prägarben auf X mit Werten in $\mathcal{O}$. Diese Prägarbe ist im allgemeinen keine Garbe, auch nicht, wenn man annimmt, daß F und G Garben sind.

<u>Beispiel</u>.

$X := \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ die punktierte komplexe Ebene

$\mathcal{C}$:= Ab die Kategorie der abelschen Gruppen.

$F = G := \mathcal{O}_X$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf X

$$f: F \longrightarrow G, s(z) \mapsto s(z^2).$$

Für jeden Punkt $z \in X$ gibt es eine offene Umgebung, auf welcher die holomorphe Funktion $z \mapsto z^2$ umkehrbar ist (weil 0 nicht in X liegt - nach dem Satz über impizite Funktionen). Sei

$$X := \bigcup_{i\in I} U_i$$

eine Überdeckung von X durch solche offene Umgebungen. Dann ist

$$f(U_i): F(U_i) \longrightarrow G(U_i)$$

für jedes i surjektiv. Insbesondere liegt die identische Abbildung $U_i \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z$, im Bild, d.h. die Abbildung repräsentiert das Nullelement in Koker $f(U_i)$. Betrachten wir den durch die identische Abbildung $X \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z$, repräsentierten globalen Scbnitt

$$s \in \mathrm{Koker}(f)(X).$$

Nach Konstruktion gilt $s|_{U_i} = 0$ für jedes $i \in I$. Wäre Koker(f) eine Garbe, so müßte s der Nullschnitt sein (wegen $s|_{U_i} = 0|_{U_i}$ für jedes i), d.h. die identische Abbildung würde im Bild von

$$f(X): F(X) \longrightarrow F(X),\ z \mapsto z^2,$$

d.h. es gäbe eine global definiert Wurzel-Funktion auf der punktierten komplexen Ebenen (und damit auf ganz $\mathbb{C}$.

<u>Bemerkung</u>.

Die Kategorie der Garben besitzt trotzdem Kokerne (falls $\mathcal{C}$ direkte Limites besitzt): sie sind nur verschieden von den Kokernen in der Kategorie der Prägarben. Wir werden später ihre Konstruktion beschreiben.

(ix) Gaben von Moduln

Seien X ein topologischer Raum und $R \in Sh_X$ eine Garbe von kommutativen Ringen mit 1. Ein R-<u>Modul</u> ist eine Garbe $M \in Sh_X(Ab)$ von abelschen Gruppen zusammen mit Garben-Morphismen[94]

$$R\times M \longrightarrow M,\ (r,m) \mapsto r\bullet m,$$

mit $1\bullet m = m$ und $r'\bullet(r''\bullet m) = (r'\bullet r'')\bullet m$ für Schnitte r',r'' von R und Scbnitte m von M über derselben offenen Menge von X.

Jede direkte Summe von Exemplaren von R hat in natürlicher Weise die Struktur eines R-Moduls. Ein R-Modul M heißt <u>frei</u>, wenn er zu einer solchen direkten Summe

---

[94] in der Kategorie $Sh_X(Ens)$, d.h. für jede offene Menge $U \subseteq X$ hat man Abbildungen

$$R(U)\times M(U) \longrightarrow M(U),\ (r,m) \mapsto r\bullet m,$$

die mit den Restriktionen der Garben R und M verträglich sind, d.h. für je zwei offene Mengen U, V von X mit $V \subseteq U$ ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} R(U)\times M(U) & \longrightarrow & M(U) \\ \rho^U_V\times\rho^U_V \downarrow & & \downarrow \rho^U_V \\ R(V)\times M(V) & \longrightarrow & M(V) \end{array}$$

isomorph ist. Ein R-Modul M heißt lokal frei, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ gilt mit der Eigenschaft, daß der Modul[95]

$$M|_U$$

über der Garbe von Ringen $R|_U$ auf dem topologischen Raum U frei ist,

$$M|_U \cong \text{direkte Summe von Exemplaren von } R|_U.$$

Die Anzahl der direkten Summanden heißt dabei Rang des Moduls. Dieser ist lokal konstant.

(x) Freie und lokal freie Garben

Sei X eine offene Menge im $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Garbe der glatten Funktionen mit Werten im $\mathbb{R}^m$ isomorph zu $(C^\infty)^m$, also ein freier C^∞-Modul.

Analog konstruiert man freie Moduln über den analytischen Funktionen, den stetigen Funktionen oder den r-fach stetig differenzierbaren Funktionen.

Sei $\pi: V \longrightarrow X$ ein (stetiges, r-fach differenzierbares, glattes, analytisches, holomorphes) Vektorraumbündel und

$$F$$

die Garbe der (stetigen, r-fach differenzierbaren, glatten, analytischen, holomorphen Schnitte) von π, d.h. der entsprechenden Abbildungen s. $U \longrightarrow V$ mit $\pi \circ s = Id_U$ für offene Mengen U von X. Da man Schnitte mit Funktionen multiplizieren kann, ist F eine Modul-Garbe (über C_X, C^r_X , C^∞_X, C^ω_X). Da Vektorraumbündel lokal von der Gestalt

$$V' \times U \longrightarrow U, (v', u) \mapsto u,$$

sind[96], ist die Garbe F sogar eine lokal freie Modul-Garbe. Der Rang dieser Garbe ist konstant und gleich dem Rang dim V' des Vektorraumbündels.

Umgekehrt kann man für jeden lokal freien R-Modul M (mit $R = C_X$, C^r_X , C^∞_X oder C^ω_X) des Ranges r auf dem topologischen Raum X eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Isomorphismen

$$\varphi_i: M|_{U_i} \xrightarrow{\cong} (R|_{U_i})^r$$

finden. Auf diese Weise wird $M|_{U_i}$ isomorph zur Garbe der Schnitte des trivialen Bündels

(2) $$K^r \times U_i \longrightarrow U_i, (v', u) \mapsto u,$$

---

[95] Jede offene Teilmenge U von X definiert eineTeilkategorie der Kategorie X. Aud diese Teilkategorie kann man den Funktor M einschränken und erhält auf diese Weise wieder eine Garbe.

[96] d.h. für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ derart, daß man die Einschränkung

$$\pi|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$$

identifizieren kann mit der Projektion $V' \times U \longrightarrow U, (v', u) \mapsto u$, wobei V' einen Vektorraum bezheichnet.

Dabei bezeichne K den Grundkörper $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Für je zwei Indizes i, j$\in$ I sind die Isomorphismen

$$R|_{U_i\cap U_j})^r \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} M|_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{\varphi_j} R|_{U_i\cap U_j})^r$$

durch umkehrbare Matrizen von Funktionen

(3) $$g_{ij}: U_i\cap U_j \longrightarrow GL(r, K)$$

gegeben. Diese gestatten es, die trivialen Bündel (2) zu den Indizes i,j über $U_i\cap U_j$ zu identifizieren:

$$K^r\times U_i\cap U_j \xrightarrow{\cong} K^r\times U_i\cap U_j\ ,\ (v', u) \mapsto (g_{ij}(u)v', u),$$

und so zu einem Vektorraumbündel zusammenzukleben, daß die zugehörigen Garbe der Schnitte isomorph wird zu M.
Isomorphieklassen von Vektorraumbündeln und Isomorphieklassen lokal freiner Garben mit konstantem Rang werden auf diese Weise zu ein und demselben Objekt. Die obigen Funktionen g_{ij} , die wir zum Verkleben der trivialen Bündel zu einem auf ganz definierten Vektorraumbündel verwendet haben, heißen <u>Übergangsfunktionen</u> des Bündels (bzw. der lokal freien Garbe).

Eine Familie von Funktionen (3) zu einer Überdeckung X = $\bigcup_{i\in I}$ ist genau dann eine Familie von Übergangsfunktionen, wenn gilt

$$g_{\ell i}\circ g_{j\ell}\circ g_{ij} = \text{Id auf } U_i\cap U_j\cap U_\ell \text{ für beliebige i, j. } \ell \in I.$$

(xi) Moduln über Ringen und Garben von Ringen
Die Konstruktion der Strukturgarbe

$$\mathcal{O}_X$$

auf dem Spektrum

$$X := \text{Spec } R$$

eines kommutativen Rings mit 1 läßt sich auf dem Fall eines R-Moduls M verallgemeinern und führt zu einem $\mathcal{O}_X$-Modul

$$\widetilde{M}$$

auf dem Spektrum X von R. Wie im Fall M = R betrachtet man zunächst die Garbe

(3) $$U \mapsto \prod_{p\in U} M_p\ ,\ M_p := M\otimes_R R_p = \{\frac{m}{r} \mid m\in M,\ r\in R\text{-}p\}$$

auf X. Man beachte, M_p ist ein R_p-Modul. Durch oordinatenweise Multiplikation bekommt die Garbe (3) die Struktur eines Moduls über der Garbe

(4) $$U \mapsto \prod_{p\in U} R_p\ .$$

Die gesuchte Garbe $\widetilde{M}$ wird definiert als Teilgarbe von (3). Für jedes m$\in$M und jedes r$\in$R hat man einen Schnitt

$$(\frac{m}{r})_{p\in D(r)}$$

der Garbe(3) über der offenen Menge

$$D(r) := \{p\in X \mid r(p) \neq 0\},$$

Die Schnitte der Garbe $\widetilde{M}$ sind dann definiert als diejenigen Scbnitte der Garbe (3), welche lokal von dieser Gestalt sind:

$$\widetilde{M}(U) := \{ s=(s_p)_{p\in U} \mid s \text{ ist lokal von der Gestalt } \frac{m}{s} \text{ mit } m\in M \text{ und } s\in R\}$$

Genauer: für jedes $p\in U$ gibt es Elemente $m\in M$ und $s\in R\text{-}p$ derart, daß für jedes $p'\in D(s) \cap U$ gilt $s_p = \frac{m}{s}$ in M_p. Auf diese Weise ist eine Teilgarbe von abelschen Gruppen der Modul-Garbe (3) definiert. Auf Grund der Definition der Schnitte von $\widetilde{R}$ überführt die Multiplikation mit Schnitten von $\widetilde{R}$ die Scbnitte von $\widetilde{M}$ in Scbnitte von $\widetilde{M}$, d.h. $\widetilde{M}$ ist eine Modulgarbe über $\widetilde{R} = \mathcal{O}_X$.

<u>Eigenschaften</u>

- Nach Konstruktion gilt für jede offene Menge $U \subseteq \operatorname{Spec} R$,

  $$\widetilde{M}(U) = M\otimes_R\widetilde{R}(U).$$[97]

  Insbesondere ist für jede offene Hauptmenge $D(f) \subseteq \operatorname{Spec} R$, $f\in R$,

  $$\widetilde{M}(D(f)) = M\otimes_R\widetilde{R}(D(f)) = M\otimes_R R_f = M_f \,.$$

- Ist M ein freier R-Modul so ist $\widetilde{M}$ frei über $\widetilde{R}$.

- Man kann zeigen, ein endlich erzeugter R-Modul M über einem noetherschen Ring R definiert genau dann einen lokal freien $\widetilde{R}$-Modul $\widetilde{M}$, wenn M projektiv ist ist, d.h. die Vektorraumbündel auf Spec R entsprechen gerade den endlich erzeugten projektiven R-Moduln.[98]

(xii) Kohärene Garben

Der Kategorie der Vektorraumbündel über einem gegebenen topologischen Raum (bzw. der der lokal freien Garben) fehlt eine schöne Eigenschaft: sie besitzt weder Kerne noch Kokerne: eine Bündelabbildung

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

des Vektorraumbündels π mit Werten im Vektorraumbündel π' ist gegeben durch eine Familie linearer Abbildungen

$$f_x: \pi^{-1}(x) \longrightarrow \pi'^{-1}(x),\ x \in X,$$

und der Rang der Abbildungen dieser Familie muß nicht lokal konstant sein, d.h. weder die Familie der Kerne noch die Familie der Kokerne braucht bilden im allgemeinen ein Vektorraumbündel. Viele Konstruktionen, die aus gewissen Vektorraumbündeln neue Vektorraumbündel bauen, verlassen deshalb vorübergenden die Kategorie der Vektorraumbündel.

---

[97] Man zeige, die linke Seite besitzt die Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts rechts.

[98] wenn man zuläßt,daß der Rang eines Vektorraumbündels auf den verchiedenen Zusammenhangskomponenten von Spec R unterschiedliche Werte annehmen kann.

Es besteht deshalb der Bedarf nach einer Kategorie, die die Vektorraumbündel enthält, bei der Übergang zu Kernen oder Kokernen aber nicht aus der Kategorie hinausführt. Eine solche Kategorie ist die der kohärenten Garben.[99]

Seien X ein topologischer Raum und R eine Garbe von kommutativen Ringen mit 1. Ein quasi-kohärenter R-Modul ist ein R-Modul M mit der Eigenschaft, daß es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x gibt mit der Eigenschaft, daß M auf U Kokern eines Homomorphismus von freien R-Moduln ist,

(5) $$M|_U := \mathrm{Koker}(\, R^{(I)} \longrightarrow R^{(J)}).$$

Ein R-Modul M heißt vom endlichen Typ, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x, eine natürlihe Zahl r und einen surjektive Morphismus

$$(R|_U)^r \longrightarrow M|_U$$

gibt. Ein R-Modul M heißt kohärent, wenn gilt:

1. M ist endlichen Typs.
2. Jeder R-Modul-Homomorphismus der Gestalt $(R|_U)^r \longrightarrow M|_U$ hat einen Kern endlichen Typs.

Bemerkungen

1. Für jeden Ring R und jeden R-Modul M ist $\widetilde{M}$ ein quasi-kohärenter $\widetilde{R}$-Modul, und jeder quasi-kohärente $\widetilde{R}$-Modul ist von dieser Gestalt.
2. Für jeden noetherschen Ring R und jeden endlich erzeugten R-Modul M ist $\widetilde{M}$ ein kohärenter $\widetilde{R}$-Modul, und jeder kohärente $\widetilde{R}$-Modul ist von dieser Gestalt.
3. Die kohärenten $\widetilde{R}$-Moduln auf Spec R sind im Fall R noethersch gerade diejenigen, welche der Bedinung (5) genügen mit I und J endlich.
4. (die Aussage von A0.5.4(v) ist fehlplaziert). Für jedes affine Schema X = Spec A ist der globale Schnitt-Funktor

   $$(\text{quasi-kohärente } \mathcal{O}_X\text{-Moduln}) \longrightarrow \text{A-Mod},\ F \mapsto \Gamma(X, F),$$

   eine Äquivalenz von Kategorien mit dem quasi-inversen Funktor

   $$M \mapsto \widetilde{M}\,.$$

   Insbesondere ist der Funktor exakt und völlig treu. Ist das Schema X noethersch, so ist auch durch

   $$(\text{kohärente } \mathcal{O}_X\text{-Moduln}) \longrightarrow (\text{endlich erzeugte A-Moduln}),\ F \mapsto \Gamma(X, F),$$

   eine Äquivalenz von Kategorien definiert (mit demselben quasi-inversen Funktor wie oben).(Hartshorne Corollary II.5.5 und Proposition II.5.2).

- (die Aussagbe von A0.5.2 ist fehlplaziert). Jeder Kern, Kokern und jedes Bild eines Morphismus von quasi-kohärenten Garben ist quasi-kohärent. Ist das zugrundeliegende Schema noethersch, so gilt die analoge Aussage auch für kohärente Moduln. (Hartshorne, Prop. II.5.7).
- (die Aussagbe von A0.5.2 ist fehlplaziert). Seien X ein Schema und

---

[99] vgl.
Gunning & Rossi: Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1965
oder
Grauert, Remmert: Coherent analytic sheaves, Springer Berlin 1984.

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Wenn zwei der drei Moduln der Sequenz quasi-kohärent sind, so ist es auch der dritte. Ist das Schema X noethersch, so gilt die analoge Aussage auch für kohärente Moduln. (Hartshorne, Prop. II.5.7)

A0.2.3 Keime, Halme und andere Konstruktionen

(i) Keime.

Seien $P: X \longrightarrow \mathcal{C}$ eine Prägarbe, $x \in P$ ein Punkt und $s' \in P(U')$, $s'' \in P(U'')$ zwei Schnitte über zwei offenen Mengen U', U'', die den Punkt x enthalten. Man sagt in dieser Situation, s' und s'' definieren denselben Keim in x, wenn es eine offene Menge V gibt mit

$$x \in V \subseteq U' \cap U'' \text{ und } s'|_V = s''|_V .$$

Auf diese Weise ist eine Äquivalenzrelation definiert. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen <u>Keime</u> von P im Punkt x. Den Keim in x, welcher durch denn Schnitt $s \in P(U)$ repräsentiert wird, werden wir mit

$$s|_x$$

bezeichnen.
<u>Beispiel</u>: ist s eine holomorphe Funktion und x ein Punkt des Definitionsbereichs von s, so kann man $s|_x$ mit der Potenzreihenentwicklung von s im Punkt x identifizieren. Der Begriff des Keims axiomatisiert den Begriff der Potenzreihe.

(ii) Halme.

Seien $P: X \longrightarrow \mathcal{C}$ eine Prägarbe mit Werten in einer Kategorie $\mathcal{C}$, welche direkte Limiten besitzt. Für jeden Punkt $x \in X$ heißt dann

$$P_x := \varinjlim_{x \in U \text{ offen in } X} P(U)$$

<u>Halm</u> der Prägarbe P im Punkt x. Als Menge ist P_x gerade die Menge der Keime im Punkt x der Schnitte von P. Nach Konstruktion ist P_x ein Objekt der Kategorie $\mathcal{C}$, d.h. die Menge der Keime hat dieselbe Struktur wie die Werte P(U) der Prägarbe.
Für jeden Punkt $x \in X$ ist durch die Zuordnung

$$\mathrm{Hom}(X^{op}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C},\ P \mapsto P_x ,$$

ein Funktor definiert. Die Halm-Konstruktion besitzt die folgenden Eigenschaften.

1. Eine Garbe $F: X^{op} \longrightarrow Ab$ von abelschen Gruppen ist genau dann trivial,
$$F(U) = 0 \text{ für jede offene Mengen U von X,}$$
wenn alle ihre Halme trivial sind,
$$F_x = 0 \text{ für jedes } x \in X.$$

2. Ein Morphismus f: F $\longrightarrow$ on Garben abelscher Gruppen ist genau dann epimorph[100],
$$\mathrm{Im}(f) = G,$$
wenn die induzierten Abbildungen auf den Halmen surjektiv sind,
$$f_x: F_x \longrightarrow G_x \text{ surjektiv für jedes } x \in X.$$
3. Ein Morphismus f: F $\longrightarrow$ on Garben abelscher Gruppen ist genau dann monomorph[101],
$$\mathrm{Ker}(f) = 0,$$
wenn die induzierten Abbildungen auf den Halmen injektiv sind,
$$f_x: F_x \longrightarrow G_x \text{ injektiv für jedes } x \in X.$$
4. Allgemeiner, eine Sequenz von Garben abelscher Gruppen ist genau dann exakt, wenn für jeden Punkt $x \in X$ die induzierten Sequenz auf den Halmen exakt ist.

(iii) Der Etal-Raum einer (Prä-) Garbe., die assoziierte Garbe zu einer Prägarbe.

Seien $P: X \longrightarrow \mathcal{C}$ eine Prägarbe mit Werten in einer Kategorie $\mathcal{C}$, welche direkte Limiten besitzt. Als Menge ist der Etal-Raum E(P) der Prägarbe P definiert als disjunkte Vereinigung
$$E(P) := \vee_{x \in X} P_x$$
aller Halme von P. Als <u>natürliche Projektion des Etalraums</u> bezeichnen wir die Abbildung
$$\pi: E(P) \longrightarrow X \text{ mit } \pi(P_x) = \{x\}.$$
Jeder Schnitt $s \in P(U)$ der Prägarbe P über einer offenen Menge U definiert eine Abbildung

(1) $$\tilde{s}: U \longrightarrow E(P),\ x \mapsto s|_x ,$$

welche jedem Punkt $x \in U$ in den Keim des Schnittes s im Punkt x abbildet. Nach Konstruktion gilt

(2) $$\pi \circ \tilde{s} = \mathrm{Id}_U \text{ für jedes } s \in P(U).$$

Wir versehen die Menge E(P) mit der stärksten Topologie, bei welcher alle Abbildungen der Gestalt (1) (für alle offenen $U \subseteq X$ und alle $s \in P(U)$) stetig sind. Eine Teilmenge $V \subseteq E(P)$ ist genau dann offen, wenn

---

[100] Ein Morphismus $f: A \longrightarrow B$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Epimorphismus, wenn für je zwei Morphismen $g',g'': B \longrightarrow C$ mit $g' \circ f = g'' \circ f$ gilt $g' = g''$. Morphismen, die als Abbildungen von Mengen surjektiv sind, sind Epimorphismen. In Ens, Ab und der Kategorie der Mengen gilt auch die Umkehrung. Die natürliche Einbettung
$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$$
der rationalen in die reellen Zahlen ist ein Epimorphismus in der Kategorie der topologischen Räume (weil $\mathbb{Q}$ dicht liegt in $\mathbb{R}$) und ist offensichtlich nicht surjektiv.

[101] Ein Morphismus $f: B \longrightarrow C$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Monomorphismus, wenn für je zwei Morphismen $g',g'': A \longrightarrow B$ mit $f \circ g' = f \circ g''$ gilt $g' = g''$. Morphismen, die als Abbildungen von Mengen injektiv sind, sind Monomorphismen. In Ens, Ab und der Kategorie der Mengen gilt auch die Umkehrung.

$$\tilde{s}^{-1}(V) \text{ offen in } X$$

ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ und jedes $s \in P(U)$. Die Menge $E(P)$ wird auf diese Weise zu einem topologischen Raum. Wir erhalten die folgenden Eigenschaften.

1. Die natürliche Projektion des Etal-Raums
$$\pi\colon E(P) \longrightarrow X \text{ mit } \pi(P_x) = \{x\}$$
ist stetig.[102]
2. Die Abbildungen der Gestalt
$$\tilde{s}: U \longrightarrow E(P),\ s \mapsto s|_x\ ,$$
mit $U \subseteq X$ offen und $s \in P(U)$ sind offen, d.h. überführen offene Mengen von U in offene Mengen von E(P).[103] Insbesondere ist $\tilde{s}(U)$ eine offene Teilmenge von E(P) und
$$\tilde{s}: U \longrightarrow \tilde{s}(U)$$
ein Homöomorphismus.
3. Die natürliche Projektion $\pi\colon E(P) \longrightarrow X$ ist ein lokaler Homöomorphismus.[104]
4. Eine Abbildung
$$f\colon U \longrightarrow E(P) \text{ mit } U \subseteq X \text{ offen}$$

---

[102] Für offene $U, U' \subseteq X$ und jedes $s \in P(U')$ ist nämlich
$$\tilde{s}^{-1}\pi^{-1}(U) = (\pi\circ\tilde{s})^{-1}(U) = Id_{U'}^{-1}(U) = U \cap U'$$
eine offene Teilmenge von X.

[103] Für $U', U'' \subseteq X$ offen und $s'' \in P(U'')$ haben wir zu zeigen,
$$\tilde{s}''^{-1}(\tilde{s}(U')) \text{ ist offen } X.$$
Sei $x \in \tilde{s}''^{-1}(\tilde{s}(U'))$. Dann gilt $\tilde{s}''(x) \in \tilde{s}(U')$, d.h. es gibt ein $x' \in U'$ mit $\tilde{s}''(x) = \tilde{s}(x')$, Wir wenden π auf die letzte Identität an und erhalten $x = x'$. Damit gilt
$$s''|_x = s|_x \text{ , und } x = x' \in U'.$$
Insbesondere gibt es eine offene Umgebung W von x mit
$$x \in W \subseteq U' \text{ und } s''|_W = s|_W.$$
Für $w \in W$ gilt $s''|_w = s|_w$, also $\tilde{s}''(w) = \tilde{s}(w)$, also $w \in \tilde{s}''^{-1}(\tilde{s}(w)) \in \tilde{s}''^{-1}(\tilde{s}(U'))$. Es folgt
$$W \subseteq \tilde{s}''^{-1}(\tilde{s}(U')).$$

[104] Jeder Punkt $e \in E(P)$ hat die Gestalt $e = s|_x$ mit $x = \pi(e)$ und $s \in P(U)$, $U \subseteq X$ offen. Dann ist
$$\tilde{s}: U \longrightarrow \tilde{s}(U) \text{ ein Homöomorphismus}$$
mit
$$\tilde{s}(U) \subseteq E(P) \text{ offen, } e = s|_x = \tilde{s}(x) \in \tilde{s}(U).$$
Weil $\tilde{s}$ ein Schnitt von π ist, gilt
$$Id_U = \pi\circ\tilde{s} = \pi|_{\tilde{s}(U)}\circ\tilde{s}.$$
Insbesondere ist $\pi|_{\tilde{s}(U)} = \tilde{s}^{-1}$ ein Homöomorphismus.

ist genau dann ein stetiger Schnitt von π, wenn sie lokal von der Gestalt $\tilde{s}$ ist, d.h. wenn es für jeden Punkt $x\in U$ eine offene Menge U' gibt und ein $s\in P(U')$ mit

$$x \in U' \subseteq U \text{ und } f|_{U'} = \tilde{s}|_{U'}.$$[105]

Die Garbe der Schnitte der natürlichen Projektion $\pi: E(P) \longrightarrow X$ wird mit

$$\tilde{P} := \Gamma_\pi : X^{op} \longrightarrow \text{Ens}$$

bezeichnet und heißt die zur Prägarbe assoziierte Garbe. Man kann zeigen, ist $\mathcal{C}$ die Kategorie der abelschen Gruppen, der Gruppen, der kommutativen Ringe mit 1, der Moduln über einem Ring, ... , so ist dies sogar eine Garbe mit Werten in $\mathcal{C}$,

$$\tilde{P} := \Gamma_\pi : X^{op} \longrightarrow \mathcal{C},$$

und für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist durch

$$P(U) \longrightarrow \tilde{P}(U),\ s \mapsto \tilde{s},$$

nicht nur eine Abbildung sondern sogar ein Morphismus in $\mathcal{C}$ definiert. Diese Morphismen sind mit den Restriktionen verträglich, d.h. sie definieren einen Prägarben-Morphismus[106]

$$P \longrightarrow \tilde{P}.$$

Dieser Prägarben-Morphismus ist durch die folgende Universalitätseigenschaft charakterisiert.

Jeder Prägarben-Morphismus $f: P \longrightarrow F$ mit Werten in einer Garbe F

---

[105] Die Bedingung ist offensichtlich hinreichend (da die $\tilde{s}$ stetige Schnitte von π sind). Seien umgekehrt $f: U \longrightarrow E(P)$ ein stetiger Schnitt von π und $x\in U$ ein Punkt. Dann gilt

$$f(x) \in E(P) \text{ und } \pi(f(x)) = x,$$

d.h. es gibt eine offenen Menge $U' \subseteq X$ und ein $s\in P(U')$ mit $f(x) = s|_x$. O.B.d.A. sei

$$x \in U' \subseteq U.$$

Wegen

$$e := f(x) = s|_x = \tilde{s}(x)$$

und weil f stetig ist, gibt es eine offene Menge W mit

$$x \in W \subseteq U',\ f(W) \subseteq \tilde{s}(U').$$

Wegen

$$\pi|_{\tilde{s}(U')} \circ f|_W = (\pi\circ f)|_W = Id_W$$

und weil $\pi|_{\tilde{s}(U')}$ ein Homöomorphismus mit der Umkehrung $\tilde{s}$ ist, folgt

$$f|_W = (\pi|_{\tilde{s}(U')})^{-1}|_W = \tilde{s}|_W = (s|_W)^{\sim}.$$

Man beachte, s und $s|_W$ haben dieselbe Einschränkung auf W, liefern auf W also dieselben Keime.

Wir haben gezeigt, f ist in der Umgebung W von x von der Gestalt $(s|_W)^{\sim}$.

[106] d.h. eine natürliche Transformation von kontravarianten Funktoren.

(*) faktorisiert sich auf genau eine Weise über $P \longrightarrow \widetilde{P}$, d.h. es gibt genau einen Garben-Morphismus $\widetilde{f}: \widetilde{P} \longrightarrow F$ dessen Zusammensetzung mit dem natürlichen Morphismus $P \longrightarrow \widetilde{P}$ gleich f ist.

Jeder Schnitt der Garbe $\widetilde{P}$ ist lokal von der Gestalt $\widetilde{s}$, d.h. er kommt lokal von einem Schnitt der Prägarbe P. Das bedeutet, der natürliche Morphismus $P \longrightarrow \widetilde{P}$ induziert Isomorphismen auf allen Halmen,

$$P_x \xrightarrow{\cong} \widetilde{P}_x \text{ für jedes } x\in X$$

Insbesondere ist

$$P \longrightarrow \widetilde{P} \text{ Isomorphismus, falls P eine Garbe ist.}$$

Die Universalitätseigenschaft (*) der assoziierten Garbe besagt, die Zusammensetzung mit dem natürlichen Prägarben-Morphismus $P \longrightarrow \widetilde{P}$ definiert einen funktoriellen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\text{Prägarben } X^{op}\longrightarrow\mathcal{C}}(P, \iota F) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\text{Garben } X^{op}\longrightarrow\mathcal{C}}(\widetilde{P}, F)$$

für jede Garbe $F: X^{op}\longrightarrow\mathcal{C}$. Dabei bezeichne

$$\iota: (\text{Garben } X^{op}\longrightarrow\mathcal{C}) \longrightarrow (\text{Prägarben } X^{op}\longrightarrow\mathcal{C}),\ F \mapsto F,$$

die natürliche Einbettung der Garben-Kategorie in die Prägarben-Kategorie. Mit anderen Worten, der Übergang zur assoziierten Garbe definiert gerade den zu ι linksadjungierten Funktor

$$\widetilde{\ }: (\text{Prägarben } X^{op}\longrightarrow\mathcal{C}) \longrightarrow (\text{Garben } X^{op}\longrightarrow\mathcal{C}).$$

(iv) Kokerne und andere Garben-Operationen.

Seien X ein topologischer Raum und $f: F \longrightarrow G$ ein Morphismus von abelschen Garben[107] auf X. Dann wird die assoziierte Garbe zur Prägarbe

$$C: U \mapsto \mathrm{Koker}(F(U) \longrightarrow G(U))$$

mit

$$\mathrm{Koker}(f)$$

bezeichnet und heißt Kokern von f (in der Garben-Kategorie). Diese Garbe hat die Universalitäteigenschaft eines Kokerns in der Kategorie der abelschen Garben auf X.[108]

---

[107] d.h. von Garben mit Werten in Ab.

[108] Nach Konstruktion ist die Komposition von f mit dem natürlichen Prägarben-Morphismus $G \longrightarrow C$,

$$F \xrightarrow{f} G \longrightarrow C,$$

identisch Null. Durch Zusammensetzung des letzteren mit dem natürlichen Prägarben-Morphismus $C \longrightarrow \widetilde{C}$ erhält man einen Garben-Morphismus

$$G \longrightarrow \widetilde{C},$$

dessen Zusammensetzung mit f identisch Null ist.

Seien R eine Garbe von kommutativen Ringen mit 1 auf X und M, N zwei R-Moduln. Dann wird die assoziierte Garbe zur Prägarbe

$$U \mapsto M(U)\otimes_{R(U)}N(U)$$

mit

$$M\otimes_R N$$

bezeichnet und heißt Tensorprodukt von M und N über R. Diese Garbe hat die Universalitätseigenschaft eines Tensorprodukts in der Kategorie R-Mod der R-Moduln auf X. d.h. man hat einen R-bilinearen[109] Garben-Morphismus

(3) $$M\times N \longrightarrow M\otimes_R N,$$

und jeder R-bilinearen Garben-Morphismus $M\times N \longrightarrow F$ faktorisiert sich eindeutig über (3) mit einem eindeutig bestimmten R-Modul-Morphismus $M\otimes_R N \longrightarrow F$.

(iv) Direkte Bilder.

Seien f: X $\longrightarrow$ Y eine stetige Abbildung und F eine Garbe auf X. Dann ist durch

$$V \mapsto F(f^{-1}(V)),$$

eine Garbe auf X definiert, welche direktes Bild von F entlang f heißt und mit

$$f_*F$$

bezeichnet wird.

Sei jetzt $G \xrightarrow{g} H$ ein Garben-Morphismus, dessen Zusammensetzung mit f identisch Null ist. Wir betrachten f und g als Prägarben-Morphismen. Wegen $g\circ f = 0$ faktorisiert sich g über den Prägarben-Kokern C, d.h. man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g} & H \\ & \searrow & \uparrow \\ & & C \end{array}.$$

Der rechte vertikale Morphismus hat Werte in einer Garbe, faktorisiert sich also über $\tilde{C}$, d.h. man hat ein kommutatives Diagramm

(+) $$\begin{array}{cccc} G & \xrightarrow{g} & H & \\ & \searrow & \uparrow & \nwarrow \\ & & C & \longrightarrow \tilde{C} \end{array}$$

Mit anderen Worten, g faktorisiert sich über $\tilde{C}$ = Koker(f).

Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Faktorisierung, eindeutig bestimmt ist: weil die Zusammensetzung mit f identisch Null ist, faktorisiert sich $G \longrightarrow \tilde{C}$ über den Prägarben-Kokern, d.h. man erhält ein kommutatives Diagramm von Prägarben der Gestalt (+). Dabei ist der Morphismus nach rechts unten der Prägarben-Kokern, d.h. der vertikale Morphismus ist durch f festgelegt. Der Morphismus nach links oben ist festgelegt auf Grund der Universalitätseigenschaft der assoziierten Prägarbe.

[109] d.h. über jeder offenen Menge U ist dies eine bilineare Abbildung, genauer

$$M(U) \times N(U) \longrightarrow (M\otimes_R N)(U)$$

ist R(U)-bilinear für jedes U.

Bemerkungen

1. Der Übergang zum direkten Bild definiert einen kovarianten Funktor
$$f_*: Sh_X(\mathcal{C}) \longrightarrow Sh_Y(\mathcal{C}).$$

2. Für je zwei stetige Abbildungen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ gilt
$$(g\circ f)_* = g_*\circ f_* .$$

(v) Inverse Bilder

Seien f: $X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung und F eine Garbe auf Y. Wir identifizieren F mit der Garbe der Schnitte ihres Etal-Raums,
$$\pi: E(F) \longrightarrow Y$$
und betrachten das kommutative Diagramm
$$\begin{array}{ccc} X\times_Y E(F) & \xrightarrow{pr_2} & E(F) \\ pr_1\downarrow & & \downarrow\pi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$
Dabei sei
$$X\times_Y E(F) := \{(x,e) \in X\times E(F) \mid f(x) = \pi(e)\}$$
das Faserprodukt von X und E(F) über Y (mit der Unterraum-Topologie, die der Topolgie des Produkt $X\times E(F)$ kommt. Weiter bezeichne pr_i die Projektion auf den i-ten Faktor,
$$pr_1: X\times E(F) \longrightarrow X,\ (x,e) \mapsto x,$$
$$pr_2: X\times E(F) \longrightarrow E(F),\ (x,e) \mapsto e,$$
Die Garbe der Schnitte der stetigen Abbildung pr_2 wird dann mit
$$f^{-1}F$$
bezeichnet[110] und heißt inverses Bild von F entlang f.

Bemerkungen

1. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ gilt
$$\Gamma(U, f^{-1}F) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V} F(V).$$
Dabei wird der direkte Limes über das projektive System der offenen Mengen V von Y erstreckt die die Menge f(U) enthalten.[111]

---

[110] Die ebenfalls gebräuchliche Bezeichnung f*F reservieren wir uns für eine andere Art von inversem Bild.

[111] Jeder stetige Schnitt s: $V \longrightarrow E(P)$ von π über der offenen Menge V mit $\pi(U) \subseteq V$ definiert eine stetige Abbildung $f^*(s): U \longrightarrow X\times E(P),\ u \mapsto (u, s(f(u)))$, deren Bild sogar im Faserprodukt $X\times_Y E(P)$ liegt und welche offensichtlich ein Schnitt von pr_1 ist. Wir erhalten so einen Morphismus
$$F(V) \longrightarrow (f^{-1}F)(U),\ s \mapsto f^*(s).$$

2. Der Übergang zum inversen Bild definiert einen kontravarianten Funktor

$$f^{-1}: Sh_Y(\mathcal{C}) \longrightarrow Sh_X(\mathcal{C}).$$

3. Für je zwei stetige Abbildungen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ gilt

$$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1} .$$

4. Seien $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $F\in Sh_X(\mathcal{C})$, $G\in Sh_Y(\mathcal{C})$ Garben auf X bzw. Y. Dann gibt es einen natürlichen Morphismus von Bifunktoren[112] (mit Werten ist Ens)

$$Hom_{Sh_Y(\mathcal{C})}(G, f_*F) \longrightarrow Hom_{Sh_X(\mathcal{C})}(f^{-1}G, F).$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß dies sogar ein funktorieller Morphismus ist. Mit anderen Wort, das inverse Bild von Garben ist gerade der linksadjungierte Funktor zum direkten Bild.

A0.2.4 Geometrische Räume und Schemata

Ein geometrischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von lokalen Ringen, d.h. $\mathcal{O}_X$ ist eine Garbe von kommutativen Ringen mit 1, deren Halme lokale Ringe sind, d.h. Ringe mit genau einem maximalen Ideal. Die Garbe $\mathcal{O}_X$ heißt dann Strukturgarbe des geometrischen Raums, der Raum X heißt der dem geometrichen Raum zugrundeliegende topologische Raum.

Wir werden oft X anstelle von $(X, \mathcal{O}_X)$ schreiben und von X als von dem geometrischen Raum sprechen.

Ein Morphismus geometrischer Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein Paar

---

Zwei Schnitte $s'\in F(V')$, $s''\in F(V'')$ (mit $F(U) \subseteq V'\cap V''$) liefern genau dann dasselbe Bild in $(f^{-1}F)(U)$, wenn es eine offenen Menge V gilt mit $F(U) \subseteq V \subseteq V'\cap V''$ mit $s'|_V = s''|_V$.

Außerdem ist es nicht schwer, zu zeigen, daß jeder Schnitt von $(f^{-1}F)(U)$ die Gestalt $f^*(s)$ mit geeignet gewählten V und $s\in F(V)$ hat. Mit anderen Worten, $(f^{-1}F)(U)$ ist der direkte Limes der F(V).

[112] Jeder Garben-Morphismus $\alpha: G \longrightarrow f_*F$ besteht aus einer Familie von Morphismen aus $\mathcal{C}$,

$$G(V) \longrightarrow F(f^{-1}(V)),$$

wobei V die offenen Mengen von Y durchläuft. Durch Zusammensetzen mit Restriktionen $F(f^{-1}(V)) \longrightarrow F(U)$ erhalten wir Morphismen

$$G(V) \longrightarrow F(U)$$

für je zwei offene Mengen $V \subseteq Y$, $U \subseteq X$ mit $f(U) \subseteq V$. Wir halten U fest und gehen zum direkten Limes bezüglich der V über und erhalten Morphismen

$(f^{-1}G)(U) \longrightarrow F(U)$

für jede offene Menge $U \subseteq X$. Diese Morphismen setzen sich zusammen zu einem Garben-Morphismus $f^{-1}G \longrightarrow F$.

bestehend aus einer stetigen Abbildung $(f, f^{\#})$

$$f: X \longrightarrow Y$$

und einem Morphismus von Garben

$$f^{\#}: \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$$

von lokalen Ringen, d.h. für jede offene Menge $V \subseteq Y$ hat man einen Homomorphismus[113]

$$\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)),\ \alpha \mapsto f^{\#}(\alpha),$$

von kommutativen Ringen mit 1, für je zwei offene Mengen V', V'' mit $V'' \subseteq V'$ hat man ein kommutatives Diagramm von Homomorphismen von Ringen mit 1,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(V') & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V')) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_Y(V'') & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V'')) \end{array},$$

wobei die vertikalen Morphismen die Restriktionen der beteiligten Garben seien, und für jeden Punkt $x \in Y$ mit dem Bild $y := f(x)$ ist der induzierte Ring-Homomorphimus[114]

$$f|_x : \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x},\ \alpha \mapsto f^{\#}(\alpha)$$

ein Homomorphismus von lokalen Ringen, d.h. ein solcher, der das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{Y,y}$ ins maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ abbildet.[115]

---

[113] Man stellt sich $f^{\#}(\alpha)$ als Verpflanzung $f^{\#}(\alpha) = \alpha \circ f$ der "Abbildung" $\alpha: V \longrightarrow$???, entlang f vor.

[114] Seien $V \subseteq Y$ eine offene Menge mit $y \in V$ und $U \subseteq X$ eine offene Menge mit $x \in U$ und $f(U) \subseteq V$. Dann hat man einen Homomorphismus von Ringen mit 1,

$$\mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow{f^{\#}} \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U),$$

wobei die zweite Abbildung gerade die Garben-Restriktion von $\mathcal{O}_X$ ist. Wir gehen zum direkten Limes bezüglich der offenen Mengen U über und erhalten einen Homomorphismus

$$\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

für jede offene Menge Menge V, die den Punkt y enthält. Die Universalitäteigenschaft des direkten Limes liefert einen Homorphismus

$$f_x\ \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}.$$

Wird der Keim $\tilde{s} \in \mathcal{O}_{Y,y}$ durch den Schnitt $s \in \mathcal{O}_Y(V)$ repräsentiert,

$$\tilde{s} = s|_y ,$$

so ist $f_x(\tilde{s}) = f^{\#}(s)|_x$ gerade der Keim des Bildes $f^{\#}(s)$ von s bei $f^{\#}$, d.h. man kann sich

$$f^{\#}(s|_y) = f^{\#}(s)|_x$$

als den Keim in x Verfplanzung von s entlang f vorstellen.

Wir werden oft von

$$f: X \longrightarrow Y$$

als von einem Morphismus geometrischer Räume sprechen (wenn klar ist, welches der entsprechende Garben-Morphismus $f^{\#}$ sein soll).

Die geometrischen Räume bilden zusammen mit den eben beschriebenen Morphismen (und der in offensichtlicher Weise definierten Komposition) eine Kategorie, welche auch geometrische Kategorie heißt.

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geometrischer Raum und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge von X. Dann ist

$$(U, \mathcal{O}_X|_U)$$

ein geometrischer Raum. Ein Raum dieser Gestalt heißt auch offener Unterraum des geometrischen Raums $(X, \mathcal{O}_X)$.

Jeder offene Unterraum $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ definiert einen Morphismus geometrischer Räume

$$(i, i^{\#}):(U, \mathcal{O}_X|_U) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X),$$

dessen stetige Abbildung die natürliche Einbettung

$$i: U \longrightarrow X, u \mapsto u,$$

ist und dessen Garben-Morphismus

$$i^{\#}: \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*(\mathcal{O}_X|_U)$$

durch die Restriktionen

$$\mathcal{O}_X(U') \longrightarrow i_*(\mathcal{O}_X|_U)(U') = \mathcal{O}_X(U \cap U')$$

der Garbe $\mathcal{O}_X$ (für jede offene Teilmenge $U' \subseteq X$) gegeben ist. Dieser Morphismus heißt natürliche Einbettung des Unterraums $(U, \mathcal{O}_X|_U)$.

Eine offene Einbettung ist ein Morphismus geometrischer Räume

$$(Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X),$$

der einen Isomorphismus von $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit einem offenen Unterraum von $(X, \mathcal{O}_X)$ induziert, d.h. ein Morphismus der durch Komposition

$$(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{f} (U, \mathcal{O}_X|_U) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X),$$

eines Isomorphismus f mit einer natürlichen Einbettung entsteht.

Ein Morphismus geometrischer Räume

$$(i, i^{\#}):(Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

heißt abgeschlossene Einbettung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

---

[115] Das einzige maximale Ideal $m_{X,x}$ von $\mathcal{O}_{X,x}$ kann man sich vorstellen als die Keim derjenigen Schnitte von $\mathcal{O}_X$, die im Punkt x eine Nullstelle besitzen. Verpflanzt man einen solchen Schnitt entlang der Abbildung f, so erhält man einen Scbnitt, der in y = f(x) eine Nullstelle besitzt. Formal beschreibt die Forderung der Lokalität der Homomorphismen f_x die Weise, wie der Garben-Morphismus $f^{\#}$ mit der stetigen Abbildung f zusammenhängt.

1. $i: Y \longrightarrow X$ ist ein Homöomorphismus von Y mit einem abgeschlossenen Unterraum von X.
2. Der induzierte Homomorphismus $f_y: \mathcal{O}_{X,f(y)} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ ist surjektiv für jeden Punkt $y \in Y$.[116]

Ist Y ein abgeschlossener Unterraum von X und i die natürliche Einbettung, so sagt man, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $(X, \mathcal{O}_X)$. Dabei werden zwei abgeschlossene Unterräume

$$i:(Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

und

$$i':(Y', \mathcal{O}_{Y'}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

als gleich angesehen, wenn es einen Isomorphismus

$$f: (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (Y', \mathcal{O}_{Y'})$$

gibt mit $i' \circ f = i$.[117]

A0.2.5 Beispiele

(i) Topologische Mannigfaltigkeiten

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\mathcal{O}_U$ die Garbe der stetigen Funktionen auf U. Dann ist

(1) $$(U, \mathcal{O}_U)$$

ein geometrischer Raum. Ein geometrischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist genau dann eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, wenn er lokal isomorph ist zu einen geometrischen Raum der Gestalt (1) und wenn X ein Hausdorff-Raum ist.

(ii) Differenzierbare, glatte und analytischen Mannigfaltigkeiten

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\mathcal{O}_U$ die Garbe der r-mal stetig differenzierbaren (bzw. der glatten $r = \infty$, bzw. der analytischen $r = \omega$) Funktionen auf U. Dann ist

(2) $$(U, \mathcal{O}_U)$$

---

[116] Diese Definition orientiert sich an den Eigenschaften von analytischen Funktionen und ist deshalb nicht für alle Arten von geometrischen Räumen von Interesse: ist X eine analytische Mannigfaltigkeit, $Y \subseteq X$ eine analytische Teilmannigfaltigkeit, $y \in Y$ ein Punkr,

$$y \in Y \subseteq X$$

und $f: Y \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die sich in einer Umgebung von y in einer Potenzreihe entwickeln läßt. Dann konvergiert diese Potenzreich sogar auf einer offenen Menge von X, die den Punkt y enthält. MIt anderen Worten, die Einschränkung analytischer Funktionenkeime definiert eine Surjektion

$$\mathcal{O}_{X,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}.$$

wenn wir Garben von analytischen Funktionen betrachten. Für Garben von stetigen Funktionen ist die obige Definiton weniger geeignet.

[117] Für die Abbildungen der zugrundeliegenden topologischen Räume ist diese Bedingung immer erfüllt. Für die entsprechenden Garben-Morphismen ist dies eine echte Forderung:

Spec $\mathbb{Z}/(p)$ und Spec $\mathbb{Z}/(p^2)$ sind verschiedene einpunktige abgeschlossene Unterräume des einpunktigen Raums Spec $\mathbb{Z}/(p^3)$.

ein geometrischer Raum.
Ein geometrischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist genau dann eine C^r-Mannigfaltigkeit (bzw. glatte, bzw. analytische Mannigfaltigkeit), wenn er lokal isomorph ist zu einen geometrischen Raum der Gestalt (2) und wenn X ein Hausdorff-Raum ist.

(iii) Komplexe Mannigfaltigkeiten

Seien $U \subseteq \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge und $\mathcal{O}_U$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf U. Dann ist

(3) $$(U, \mathcal{O}_U)$$

ein geometrischer Raum. Ein geometrischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist genau dann eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, wenn er lokal isomorph ist zu einen geometrischen Raum der Gestalt (3) und wenn X ein Hausdorff-Raum ist.

(iv) Affine Schemata

Seien R ein kommutativer Ring mit 1,

$$U := \text{Spec } R$$

dessen Spektrum (versehen mit der Zariski-Topologie) und $\mathcal{O}_U$ die (Struktur-) Garbe der regulären Funktionen auf U. Dann ist

(4) $$(U, \mathcal{O}_U)$$

ein geometrischer Raum. Ein geometrischer Raum, der zu einem Raum dieser Gestalt isomorph ist, heißt affines Schema. Sei

$$\varphi: R \longrightarrow R'$$

ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1. Dann ist die Abildung

$$^a\varphi: \text{Spec } R' \longrightarrow \text{Spec } R,\ p' \mapsto \varphi^{-1}(p'),$$

stetig in der Zariski-Topologie, denn für jedes $f \in R$ ist das Urbild

$$(^a\varphi)^{-1}(D(f)) =^{118} D(\varphi(f))$$

der offenen Hauptmenge D(f) eine offene Hauptmenge. Für jedes Primideal $p' \in \text{Spec } R'$ induziert φ einen lokalen Homomorphismujs

$$\varphi_{p'}: R_{^a\varphi(p')} = R_{\varphi^{-1}(p')} \longrightarrow R'_{p'},\ \frac{r}{s} \mapsto \frac{\varphi(r)}{\varphi(s)},$$

Entsprechend hat man für jedes Primideal $p \in \text{Spec } R$ einen Homomorphismus

$$R_p \longrightarrow \prod_{p' \in {}^a\varphi^{-1}(p)} R'_{p'},\ r \mapsto (\varphi_{p'}(r))_{p'}$$

und damit einen Ring-Homomorphismus

$$\prod_{p \in U} R_p \longrightarrow \prod_{p' \in {}^a\varphi^{-1}(U)} R'_{p'}$$

für jede offene Menge $U \subseteq \text{Spec } R$. Dieser induziert auf den Teilringen einen Ring-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{\text{Spec } R}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } R'}((^a\varphi)^{-1}(U)).$$

Diese Homomorphismen setzen sich zu einem Morphismus

---

[118] $p \in D(\varphi(f)) \Leftrightarrow \varphi(f) \notin p \Leftrightarrow f \notin \varphi^{-1}(p) = \varphi^*(p) \Leftrightarrow \varphi^*(p) \in D(f) \Leftrightarrow p \in (\varphi^*)^{-1}(D(f))$.

$$\mathcal{O}_{\text{Spec } R} \longrightarrow {}^a\varphi_* \mathcal{O}_{\text{Spec } R'}$$

von Garben lokaler Ringe zusammen. Der Homomorphismus φ definiert auf diese Weise einen Morphismus

$${}^a\varphi\text{:}(\text{Spec } R,, \mathcal{O}_{\text{Spec } R'}) \longrightarrow (\text{Spec } R, \mathcal{O}_{\text{Spec } R})$$

von affinen Schemata. Wir erhalten auf diese Weise einen Funktor

(1) (kommutative Ringe mit 1) $\longrightarrow$ (affine Schemata), R $\mapsto$ Spec R.

Ist umgekehrt

$$f\text{:}(\text{Spec } R,, \mathcal{O}_{\text{Spec } R'}) \longrightarrow (\text{Spec } R, \mathcal{O}_{\text{Spec } R})$$

ein Morphismus von affinen Schemata, so erhält man aus dem Garben-Morphismus

$$f^{\#}\text{: } \mathcal{O}_{\text{Spec } R} \longrightarrow f_* \mathcal{O}_{\text{Spec } R'}$$

durch Übergang zu den globalen Schnitten einen Homomorphismus

$$R = \mathcal{O}_{\text{Spec } R}(\text{Spec } R) \longrightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } R'}(\text{Spec } R') = R'$$

Der zugehörige Morphismus affiner Schemata ist bis auf Isomorphie gerade der Ausgangmorphismus. Genauer, der globale Schnitt-Funktor

(2) (affine Schemata) $\longrightarrow$ (kommutative Ringe mit 1), $(X, \mathcal{O}_X) \mapsto \mathcal{O}_X(X)$,

ist <u>quasi-invers</u> zum Funktor (1), d.h. es gibt natürliche (funktorielle) Isomorphismen der beiden Zusammensetzungen von (1) und (2) mit den identischen Funktoren der beiden beteiligten Kategorien. Ein Funktor, welcher einen quasi-inversen Funktor besitzt, heißt <u>Äquivalenz von Kategorien</u>.

<u>Beispiele</u>

- Für jeden kommutativen Ring R mit 1 und jedes Ideal $I \subseteq R$ definiert der natürliche Homomorphismus auf den Faktorring

  $$R \longrightarrow R/I$$

  eine abgeschlossene Einbettung

  $$\text{Spec } R/I \longrightarrow \text{Spec } R$$

  der zugehörigen affinen Schemata.
- Für jedes Element $f \in R$ definiert der natürliche Homomorphismus in den Quotientenring,

  $$R \longrightarrow R_f$$

  eine offene Einbettung

  $$\text{Spec } R_f \longrightarrow \text{Spec } R,$$

  welche das affine Schema Spec R_f mit dem offenen Teilschema

  $$D(f) = \{x \in \text{Spec } R \mid f(x) \neq 0\}$$

  identifiziert.
- Für jeden Homomorphismus $\varphi\text{: } R \longrightarrow R'$ von kommutativen Ringen mit 1 und jedes Ideal $I \subseteq R$ definiert die abgeschlossene Einbettung

  $$\text{Spec } R'/IR' \longrightarrow \text{Spec } R'$$

  ein Teilschema, dessen Punkte gerade die Punkte des vollständigen Urbilds des Teilschemas

  $$\text{Spec } R/I \longrightarrow \text{Spec } R$$

  beim Morphismus ${}^a\varphi\text{: Spec } R' \longrightarrow \text{Spec } R$ sind. Wir schreiben im folgenden

$$\mathrm{Spec}\ R'/IR' = {}^a\varphi^{-1}(\mathrm{Spec}\ R/I)$$

und nennen dieses Schema das (schematheoretische) vollständige Urbild des Schemas Spec R/I beim Morphismus ${}^a\varphi$.

- Für je zwei Homomorphismen

$$\varphi': R' \longrightarrow R \text{ und } \varphi'': R'' \longrightarrow R$$

von kommutativen Ringen mit 1 ist

$$Z := \mathrm{Spec}\ R'\otimes_R R''$$

ein affines Schema, welches sich in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p'} & X' \\ {\scriptstyle p''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}^a\varphi'} \\ X'' & \xrightarrow{{}^a\varphi''} & X \end{array}$$

mit X' = Spec R',, X'' = Spec R'' und X = Spec R einfügen läßt. Dabei sind die Morphismen p' und p'' induziert durch die natürlichen Homomorphismen

$$R' \longrightarrow R'\otimes_R R'',\ r \mapsto r\otimes 1, \text{ und } R'' \longrightarrow R'\otimes_R R'',\ r \mapsto 1\otimes r.$$

Die Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts übersetzt sich dabei gerade in die des Faserprodukts, d.h. für jedes kommutative Diagramm affiner Schemata

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{q'} & X' \\ {\scriptstyle q''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}^a\varphi'} \\ X'' & \xrightarrow{{}^a\varphi''} & X \end{array}$$

gibt es genau einen Morphismus $f: Z' \longrightarrow Z$ mit $p'\circ f = q'$ und $p''\circ f = q''$. Wir schreiben

$$Z = X'\times_X X''$$

für das <u>Faserprodukt</u> der affinen Schemata X' und X'' über X. Das Faserprodukt über Spec $\mathbb{Z}$ ist gerade das <u>direkte Produkt</u> und wird mit

$$X'\times X'' = X'\times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}} X''$$

bezeichnet.

- Für je zwei kommutative Ringe R' und R'' mit 1 läßt sich das Spektrum des direkten Produkts[119]

$$\mathrm{Spec}\ R'\times R'' = \mathrm{Spec}\ R' \vee \mathrm{Spec}\ R''$$

identifizieren mit der disjunkten Vereinigung der geometrischen Räume Spec R' und Spec R''. Die natürlichen Projektionen

$$R'\times R'' \longrightarrow R' \text{ und } R'\times R'' \longrightarrow R''$$

induzieren gerade die beiden natürlichen Einbettungen

$$\mathrm{Spec}\ R' \hookrightarrow \mathrm{Spec}\ R'\times R'' \text{ und } \mathrm{Spec}\ R'' \hookrightarrow \mathrm{Spec}\ R'\times R''.$$

(v) Schemata

Ein geometrischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist heißt algebraisches <u>Schema</u>, wenn er lokal isomorph ist zu einen geometrischen Raum der Gestalt (4).

Das Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt zusammenhängend, wenn X <u>zusammenhängend</u> ist. Es heißt <u>irreduzibel</u>, wenn X irreduzibel ist[120]. Das Schema heißt <u>reduziert</u>, wenn der Ring

[119] Die Multiplikation von R'×R'' ist koordinatenweise definiert.

$$\mathcal{O}_X(U)$$

für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ frei ist von nilpotenten Elementen. Das ist äquivalent zur Bedingung, daß die lokalen Ringe

$$\mathcal{O}_{X,x}$$

des Schemas für jeden Punkt $x \in X$ frei sind von nilpotenten Elementen. Das Schema heißt integer, wenn der Ring

$$\mathcal{O}_X(U)$$

für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ nullteilerfrei ist.

Bemerkungen

1. Ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} R$ ist genau dann irreduzibel, wenn das Nilradikal

$$\operatorname{nil} R = \sqrt{0} = \{x \in R \mid x^n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

von R ein Primideal ist.

2. Ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} R$ ist genau dann reduziert, wenn das Nilradikal trivial ist,

$$\operatorname{nil} R = 0.$$

3. Ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} R$ ist genau dann integer, wenn R ein Integritätsbereich ist.
4. Ein Schema ist genau dann integer, wenn es reduziert und irreduzibel ist.

(vi) Noethersche Schemata

Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt lokal noethersch, wenn es eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i$$

durch affine offene Teilschemata $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ gibt, die zu noetherschen Ringen R_i gehören. Das Schema heißt noethersch, wenn es lokal noethersch und quasi-kompakt. Das ist äquivalent zu der Bedingung, daß es eine endliche offene Überdeckung

$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

durch affine Schemata $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ zu noetherschen Ringen R_i gibt.

Bemerkungen

1. Für jedes noethersche Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ ist der zugrundeliegende topologische Raum X noethersch.[121] Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch.
2. Ein Schema ist genau dann lokal noethersch, wenn für jedes affine offene Teilschema $U = \operatorname{Spec} R$ der Ring R noethersch ist. Insbesondere ist ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} R$ genau dann noethersch, wenn der Ring R noethersch ist.

(vii) Morphismen endlichen Typs und endliche Morphismen

Ein Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ von Schemata heißt Morphismus lokal endlichen Typs, wenn es eine offene Überdeckung

$$Y = \bigcup_{j\in J} V_j$$

---

[120] d.h. X läßt sich nicht als Vereinigung von zwei abgeschlossenen echten Unterräumen von X schreiben.
[121] d.h. X genügt der absteigenden Kettenbedingung.

durch affine Schemata $V_j = \mathrm{Spec}\, B_j$ derart gibt, daß für jedes $j\in J$ das vollständige Urbild eine offene Überdeckung

$$f^{-1}(V_j) = \bigcup_{i\in J_j} U_{ij}$$

durch affine Schemata

$$U_{ij} = \mathrm{Spec}\, A_{ij}$$

gibt, wobei jedes der A_{ij} eine über B_j endlich erzeugte Algebra ist. Der Morphismus heißt Morphismus endlichen Typs, wenn man für jedes j die Menge J_j außerdem noch endlich wählen kann.

Ein Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ heißt endlich, wenn es eine offene Überdeckung

$$Y = \bigcup_{j\in J} V_j$$

durch affine Schemata $V_j = \mathrm{Spec}\, B_j$ derart gibt, daß für jedes $j\in J$ das vollständige Urbild

$$f^{-1}(V_j) = \mathrm{Spec}\, A_j$$

affin ist, wobei die B_j-Algebra A_j als Modul über B_j endlich erzeugt ist.

Bemerkung

Jeder der obigen Begriffe ist dadurch definiert, daß es eine Überdeckung von Y durch affine offene Teilmengen mit gewissen Eigenschaften gibt. Tatsächlich hat dies zur Folge, daß jede affine offene Teilmenge von Y diese Eigenschaft hat.

(viii) Quasi-projektive Varietäten und Schemata

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine affine Varietät über k ist nach Definition (vgl. A0.1.1) die Nullstellenmenge

$$V(M) = \{ \alpha \in k^n \mid f(\alpha) = 0 \text{ für jedes } f\in M\}$$

einer Menge $M \subseteq k[x_1,...,x_n]$ von Polynomen mit Koeffizienten aus k. Die affinene Varietäten sind mit einer Topologie versehen, der Zariski-Topologie, deren abgeschlossene Teilmengen gerade die affinen Teilvarietäten sind. Für jede offene Teilmenge

$$U \subseteq V := V(M)$$

ist der Begriff der regulären Funktion

$$U \longrightarrow k$$

definiert. Das ist eine Funktion, welche lokal von der Gestalt $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ ist mit Polynomen $u, v \in k[x_1,...,x_n]$. Die regulären Funktionen auf U bilden eine kommutativen Ring mit 1,

$$\mathcal{O}_V(U),$$

und durch

$$U \mapsto \mathcal{O}_V(U)$$

ist eine Garbe von lokalen Ringen auf V definiert, die Strukturgarbe. Das Paar

$$(V, \mathcal{O}_V)$$

ist ein geometrischer Raum, welcher affine Varietät über k heißt.

Eine projektive Varietät ist nach Definition (vgl. A0.1.1) die Nullstellenmenge[122]

$$V(M) = \{[\alpha]\in\mathbb{P}^n_k \mid f(\alpha) = 0 \text{ für jedes } f\in M\}$$

einer Menge $M\subseteq k[x_0,...,x_n]$ von homogenen Polynomen. Die projektiven Varietäten sind mit einer Topologie versehen, der Zariski-Topologie, deren abgeschlossene Teilmengen gerade die projektiven Teilvarietäten sind.

Der projektive Raum ist Vereinigung

$$\mathbb{P}^n_k = U_0\cup...\cup U_n$$

von offenen Teilmengen $U_i := \{[x_0,...,x_n] \mid x_i \neq 0\}$, die sich mit dem affinen Raum identifizieren lassen,

$$k^n \xrightarrow{\cong} U_i,\ (x_1,...,x_n) \mapsto [x_1,...,x_{i-1},1, x_i, ...x_n]$$

Für jede projektive Varietät $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$ sind die Durchschnitte $V\cap U_i$ affine Varietäten, d.h. jede projektive Varietät besitzt eine offene Überdeckung durch affine Varietäten. Es gibt auf V genau eine Garbe $\mathcal{O}_V$ von lokalen Ringen mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung

$$\mathcal{O}_V \mid V\cap U_i$$

für jedes i gerade die Garbe der regulären Funktionen auf $V\cap U_i$ ist, d.h.

$$(V, \mathcal{O}_V)$$

ist ein geometrischer Raum, welcher projektives Varietät über k heißt. Eine <u>quasi-projektive Varietät</u> ist definiert (vgl. A0.1.2) als offener Unterraum einer projektiven Varietät. Insbesondere sind affine Varietäten quasi-projektiv. Die quasi-projektiven Varietäten über k bilden eine Kategorie

$$\mathrm{Var}(k)$$

die wir abkürzenden als Kategorie der Varietäten bezeichnen wollen (und deren Objekte als <u>Varietäten</u>). Bezeichne

$$\mathrm{Sch}(k)$$

die Kategorie der k-Schemata. Die Objekte dieser Kategorie sind die Schemata X, welche mit einem Morphismus

$$X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$$

versehen sind (und welcher Struktur-Morphismus heißt). Die Morphismen sind gerade die kommutativen Diagramme der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & X' \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}(k) & \end{tikzcd},$$

wobei die nach unten gerichteten Pfeile die Struktur-Morphismen seien. Mit anderen Worten, ein k-Schema ist ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ dessen Struktur-Garbe $\mathcal{O}_X$ eine Garbe

---

[122] $[\alpha] = [\alpha_0,...,\alpha_n] := k\bullet(\alpha_0,...,\alpha_n) \neq 0$ bezeichne den Punkt im projektiven Raum mit den projektiven Koordinaten $\alpha_i\in k$.

von k-Algebren ist.[123] Ein Morphismus $f:(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ von k-Schemata ist ein Schema-Morphismus mit der Eigenschaft, daß der Garben-Morphismus

$$f^{\#}: \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$$

ein Morphismus von Garben mit Werten in der Kategorie der k-Algebren ist.[124] Zu jeder quasi-projektiven Varietät X über k gehört in natürlicher Weise ein k-Schema t(X) derart, daß

$$t: Var(k) \longrightarrow Sch(k),\ X \longrightarrow t(X),$$

ein <u>völlig treuer Funktor</u>[125] ist. Der dem Schema t(X) zugrundeliegende topologische Raum besteht gerade aus den irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X,

$$t(X) := \{Z \subseteq X \mid Z \text{ irreduzibel und abgeschlossen in } X\}$$

Er wird mit der Topologie versehen, dessen abgeschlossenen Mengen die Mengen der Gestalt

$$t(Y) \text{ mit } Y \subseteq X \text{ abgeschlossen}$$

sind. Jede stetige Abbildung $f: X \longrightarrow X'$ definiert eine stetige Abbildung

$$t(f):: t(X) \longrightarrow t(X'),\ Y \mapsto \overline{f(Y)},$$

die jede abgeschlossen Teilmenge von X in die Abschließung von deren Bild überführt. Diese Abbildung ist stetig, d.h. t definiert einen Funktor mit Werten in der Kategorie der topologischen Räume. Weiter ist durch

$$\alpha:X \longrightarrow t(X),\ p \mapsto \overline{\{p\}},$$

eine Abbildung definiert, die eine Bijektion zwischen der Menge der offenen Teilmengen von X und der Menge der offenen Teilmengen von t(X) induziert. Man kann zeigen,

$$(t(X), \alpha_*\mathcal{O}_X)$$

ist für jede quasi-projektive Varietät X über k ein k-Schema. Wir verwenden für dieses Schema dieselbe Bezeichnung t(X) wie für den zugrundeliegenden topologischen Raum. Das Schema t(X) ist integer, noethersch und vom endlichen Type über Spec(k).[126]

(ix) Lokale Schemata

Sei

$$(R\ m)$$

ein lokaler Ring mit dem einzigen maximalen Ideal m. Ein affines Schema der Gestalt

$$\operatorname{Spec} R$$

heißt lokales Schema. Es besizt genau einen abgeschlossenen Punkt (nämlich m).

Für jedes Schema $(X. \mathcal{O}_X)$ und jeden Punkt $x \in X$ ist Spec $\mathcal{O}_{X,x}$ ein lokales Schema. Es heißt <u>lokales Schema</u> von X im Punkt x. Ist

$$U = \operatorname{Spec} R$$

eine affine offene Umgebung von x,

$$x \in U,$$

so ist

---

[123] Insbesondere sind die Restriktionen $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$, $V \subseteq U$, Homomorphismen von k-Algebren.

[124] d.h. für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ ist $\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ ein Homomorphismus von k-Algebren.

[125] d.h. die Abbildung $Hom(X, X') \longrightarrow Hom(t(X), t(X')),\ \alpha \mapsto t(\alpha)$, ist bijektiv für beliebige Varietäten X, X' über k.

[126] d.h. der topologische Raum t(X) ist Vereinigung von endlich vielen offenen affinen Teilschemata, die Spektren von endlich erzeugten k-Algebren sind.

$$\mathcal{O}_{X,x} = R_x = \{r/s \mid r\in R, s\in R-x\}$$

gerade die Lokalisierung im Primideal x von R. Die natürliche Abbildung

$$R \longrightarrow R_x$$

induziert einen Schema-Morphismus

$$\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} = \text{Spec } R_x \longrightarrow \text{Spec } R = U \subseteq X$$

Dieser ist unabhängig von der speziellen Wahl der offenen Umgebung U von x und heißt natürliche Einbettung des lokalen Schemas von X im Punkt x.

(x) Lokal abgeschlossene Teilschemata

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $I \subseteq \mathcal{O}_X$ eine Ideal-Garbe von $\mathcal{O}_X$, d.h. ein Teilgarbe mit der Eigenschaft, daß für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$

$$I(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U)$$

ein Ideal ist. Ist U insbesondere affin, sagen wir

$$U = \text{Spec } R,$$

so ist die Einschränkung der Idealgarbe I auf U von der Gestalt

$$I|_U = \widetilde{J} \text{ mit einem Ideal } J \subseteq R.$$

Für je zwei affine offene Mengen U stimmen die Teilschemata

$$\text{Spec } R/I \hookrightarrow \text{Spec } R = U$$

auf dem Durchschnitt der beiden Mengen U überein und verheften sich zu einem Teilschema

$$Y := \text{Spec } \mathcal{O}_X/I$$

von X. Für jede afffine offene Teilmenge U ist der Durchschnitt dieses Schemas mit U gerade das affine Schema Spec $\mathcal{O}_X(U)/I(U)$. Nach Konstruktion ist dieses Schema lokal abgeschlossen, d.h. für jeden Punkt $x\in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x derart, daß $Y\cap U$ ein abgeschlossenes Teilschema von U ist.

Umgekehrt ist jedes lokal abgeschlossene Teilschema $i:(Y, \mathcal{O}_Y) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ von X von der beschriebenen Gestalt - mit einer eindeutig bestimmten Idealgarbe I, nämlich

$$I = \text{Ker } (\mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y).$$

(xi) Projektive Schemata

Seien S ein Schema. Ein S-Schema ist ein Schema X zusammen mit einem Morphismus

$$\pi: X \longrightarrow S,$$

welcher Struktur-Morphismus heißt. Ein S-Morphismus ist ein Morphismus

$$f. X \longrightarrow X'$$

eines S-Schemas $\pi: X \longrightarrow X$ mit Werten im S-Schema $\pi': X' \longrightarrow S$ mit $\pi'\circ f = \pi$. Mit diesen Morphismen bilden die S-Schemata eine Kategorie, die mit

$$Sch(S)$$

bezeichnet wird und Kategorie der S-Schemata heißt.
Sei jetzt

$$R = \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$$

ein graduierter Ring.[127] Das Ideal

$$R_+ := \oplus_{n=1}^{\infty} R_n$$

heißt irrelevantes Ideal von R. Wir bezeichnen mit

$$\text{Proj } R$$

die Menge aller homogenen[128] Primideale Ideal $I \subseteq R$, die das irrelevante Ideal nicht enthalten. Für jede Teilmenge $M \subseteq R$ von homogenen Elementen von R schreiben wir

$$V(M) := \{p \in \text{Proj } S \mid M \subseteq p\}.$$

V(M) ändert sich nicht, wenn man M durch das von M erzeugte Ideal ersetzt. Wir können deshalb stets annehmen, M ist ein homogenes Ideal von R. Es gilt dann

1. $V(I \bullet J) = V(I) \bullet V(J)$ für je zwei homogene Ideale I, J von R.
2. $V(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} V(I_\alpha)$ für jede Familie homogener Ideale I_α von R.

Insbesondere besitzt die Menge Proj R eine Topologie, deren abgeschlossenen Mengen gerade die Mengen der Gestalt V(M) sind.
Als nächstes wollen wir eine Garbe $\mathcal{O}_{\text{Proj } R}$ Ringen auf Proj S konstruieren. Für jedes Primideal

$$p \subseteq \text{Proj } R$$

bezeichne S_p die Menge der homogenen Elemente von R - p. Diese Menge ist multiplikativ abgeschlossen. Weiter sei

$$R_{(p)} \subseteq S_p^{-1}R$$

die Menge der homogenen Elemente des Grades 0 von $S_p^{-1}R$.

$$R_{(p)} = \{\frac{r}{s} \mid r\in R,\ s \in R\text{-}p,\ r,s \text{ homogen, } \deg r = \deg s\}.$$

Dies ist ein kommutativer Ring mit 1. Wir betrachten die folgende Garbe auf Proj R.

$$(1) \qquad U \mapsto \prod_{p\in U} R_{(p)}$$

Je zwei homogene Elemente r, s $\in R_+$ desselben positiven Grades definieren einen Schnitt dieser Garbe, nämlich

$$(2) \qquad (\frac{r}{s})_{p\in D_+(s)} ,$$

über der offenen Menge

$$D_+(s) := \{p\in\text{Proj } R \mid s \notin p\}.$$

welche auch offene Hauptmenge heißt. Es ist nicht schwer, zu zeigen, die offenen Hauptmengen bilden eine Topologie-Basis von Proj R.

Wir definieren die Strukturgarbe

---

[127] d.h. die additive Gruppe von R zerfällt in eine direkte Summe von Untergruppe R_n mit $R_{n'} \bullet R_{n''} \subseteq R_{n'+n''}$. Die Untergruppe R_n heißt Komponente der homogenen Elemente des Grades n von R oder einfach n-te Komponente.

[128] d.h. $I = \oplus_{n=0}^{\infty} I_n$ mit $I_n \subseteq R_n$.

$$\mathcal{O}_{\text{Proj } R}$$

des <u>projektiven Spektrums</u> Proj R von R als die Teilgarbe der Garbe (1) deren Schnitte lokal von der Gestalt (2) sind. Auf diese Weise ist ein geometrischer Raum

$$(\text{Proj } R, \mathcal{O}_{\text{Proj } R}).$$

Für jedes homogene Element $f \in R_+$ positiven Grades bezeichne

$$R_{(f)} := \{\frac{r}{s} \in R_f \mid \deg r = \deg s\}$$

den Teilring der Elemente 0-ten Grades des Quotientenrings $R_{(f)}$. Dann ist der offene Unterraum von Proj R zur offenen Menge $D_+(s)$ als geometrisdher Raum isomorph zum affine Spektrum

$$(D_+(r), \mathcal{O}_{\text{Proj } R}|_{D_+(s)}) \cong \text{Spec } R_{(f)}.$$

Mit anderen Worten, Proj R ist ein Schema. Es ist sogar ein Schema überr Spec R_0.

<u>Beispiel 1</u>

Ist $R = k[X_0, \dots, X_n]$ ein Polynomring über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und

$$R_n$$

der k-Vektorraum der homogenen Polynome des Grades n[129], so ist R ein graduierter Ring und

$$\text{Proj } R$$

ist gerade das projektive Schema $t(\mathbb{P}^n_k)$ zum n-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}^n_k$ über k. Es wird ebenfalls mit

$$\mathbb{P}^n_k := \text{Proj } k[X_0, \dots, X_n]$$

bezeichnet.

Für jedes <u>homogene Ideal</u>[130] $I \subseteq R$ ist

$$\text{Proj } R/I$$

gerade ein abgeschlossenes Teilschema von $\mathbb{P}^n_k$. Es ist gerade das Schema zur projektiven Varietät V(I) und wird ebenfalls mit

$$V(I) := \text{Proj } k[X_0, \dots, X_n]/I$$

bezeichnet.

<u>Beispiel 2</u>

Ist $R = R_0[X_0, \dots, X_n]$ ein Polynomring über dem kommutativen Ring R_0 mit 1, so ist

$$\text{Proj } R$$

ein Schema über Spec R_0.[131] Bezeichne

$$\varphi: \text{Proj } R \longrightarrow \text{Spec } R_0$$

den Strukturmorphismus. Für abgeschlossenen Punkt $m \in \text{Spec } R_0$ ist das abgeschlossene Teilschema

[129] d.h. der k-Vektorraum, der von den Potenzprodukten des Grades n erzeugt wird.

[130] d.h. $I = \oplus_{n=0}^{\infty} I_n$ mit $I_n = I \cap R_n$. Das ist äquivalent zu der Bedingung, daß I von homogenen Polynomen erzeugt wird.

[131] d.h. die Strukturgarbe des Schemas ist eine Garbe von R_0-Algebren.

$$\mathrm{Proj}\ R/mR \hookrightarrow \mathrm{Proj}\ R$$

gerade die Faser $\varphi^{-1}(m)$ des Strukturmorphismus über dem Punkt m. Die Fasern des Strukturmorphismus sind also projektive Räume. Wir können φ als Familie von projektiven Räumen auffassen.[132]

(xii) Projektive Morphismen

Die obige Konstruktion läßt sich auf den Fall von Garbe verallgemeinern. Seien S ein Schema und R eine Garbe von graduierten $\mathcal{O}_S$-Algebren. Für jedes affine offene Teilmenge $U \subseteq S$ hat man dann eine graduierte $\mathcal{O}_S(U)$-Algebra R(U) und damit ein Schema

(3) $$\mathrm{Proj}\ R(U)$$

über Spec $\mathcal{O}_S(U)$, d.h. man hat Morphismen

$$\varphi_U: \mathrm{Proj}\ R(U) \longrightarrow \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_S(U) = U.$$

Für je drei affine offene Teilmengen U', U" und U von S mit

$$U \subseteq U' \cap U''$$

sind die Schemata

$$\varphi_{U'}^{-1}(U) \text{ und } \varphi_{U''}^{-1}(U)$$

in natürlicher Weise isomorph, so daß sich die Schemata (3) verheften zu einem S-Schema, welches mit Proj R bezeichnet wird,

$$\mathrm{Proj}\ R \longrightarrow S.$$

Ein <u>projektiver Morphismus</u> ist ein Morphismus dieser Gestalt.

(xiii) Faserprodukte von Schemata

Seien $f: X \longrightarrow S$ und $g: Y \longrightarrow S$ zwei Morphismen von Schemata. Deren Faserprodukt wird mit

$$X \times_S Y$$

bezeichnet und ist definierrt als das Schema, welches mit zwei Morphismen

$$p_1: X \times_S Y \longrightarrow X \text{ und } p_2: X \times_S Y \longrightarrow Y$$

versehen ist, für welche das Diagramm

---

[132] Genauer: das projektive Schema zum graduierten Ring $R/mR = R \otimes_{R_0} R_0/m$ ist gerade das Faserprodukt der beiden Morphismen

$$\mathrm{Proj}\ R \longrightarrow \mathrm{Spec}\ R_0 \text{ und } \mathrm{Spec}\ R_0/m \longrightarrow \mathrm{Spec}\ R_0.$$

Eine analoge Aussage gilt auch für die nicht notwendig abgeschlossenen Punkte $p \in \mathrm{Spec}\ R_0$: man muß nur den Ring $k(m) = R_0/m$ durch $k(p) = Q(R/p)$ ersetzen. Ist R_0 ein Integritätsbereich, so heißt die Faser über dem allgemeinen Punkt $\xi := (0)$, d.h. das Schema

$$\mathrm{Proj}\ R \otimes_{R_0} Q(R_0) = \mathrm{Proj}\ Q(R_0)[x_0, \dots, x_n]$$

auch allgemeine Faser von φ.

$$\begin{array}{ccc} X\times_S Y & \xrightarrow{p_1} & X \\ p_2\downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

kommutativ ist, und welches universell ist bezüglich dieser Eigenschaft. Das bedeutet„ für jedes kommutative Diagramm von Schemata

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{q_1} & X \\ q_2\downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

gibt es genau einen Morphismus h: $Z \longrightarrow X\times_S Y$ mit $p_1\circ h = q_1$ und $p_2\circ h = q_2$.

Zur Existenz der Faserprodukte.
Für jedes affien offene Teilschema

$$W = \operatorname{Spec} R \subseteq S$$

sind $f^{-1}(W)$ und $g^{-1}(W)$ offene Teilschemata von X bzw. Y, die durch offene affine Teilschemata

$$U = \operatorname{Spec} A \subseteq X \text{ bzw. } V = \operatorname{Spec} B \subseteq Y$$

überdeckt werden. Deren Faserprodukte

$$U\times_W V = \operatorname{Spec} A\otimes_R B$$

existieren. Ersetzt man U, V und W durch offene Teilschemata U', V' und W'[133], so erhält man aus der Universaltätseigenschaft des Faserprodukts einen Morphismus

$$U'\times_{W'}V' \longrightarrow U\times_W V$$

von dem man zeigen kann, daß es sich um eine offene Einbettung handelt. Für je zwei Tripel (U, V, W) wie oben kann man deshalb die zugehörigen Faserprodukte $U\times_W V$ entlang gewisser offener Teilschemata identifizieren. Durch Verheften der Faserprodukte $U\times_W V$ entlang dieser offenen Teilschemata, wobei (U, V, W) alle Tripel mit $f(U) \subseteq W$ und $g(V) \subseteq W$ durchläuft, erhält man ein Schema $X\times_S Y$, welches die Universalitätseigenschaft eines Faserproduktes besitzt.

A0.3 Separierte Morphismen

A0.3.0 Vorbemerkung

In den Definitionen für die verschiedenen Arten von Mannigfaltigkeiten wird stets die Forderung gestellt, daß es sich um Hausdorff-Räume handeln soll. So entsteht zum Beispiel keine Mannigfaltigkeit, wenn man einander entsprechende Punkte zweier Examplare der reellen Ebene identifiziert, davon aber den Ursprung ausnimmt: eine Ebene mit zwei Urprüngen

$$H := \mathbb{R}^2 \bigcup \{0'\}$$

ist kein Hausdorff-Raum: jede Umgebung des einen Ursprungs hat Punkte gemeinsamen mit jeder Umgebung des anderen.

Im Kontext der algebraischen Schemata kann man die Hausdorff-Raum-Bedingung nicht stellen: algebraischen Schemata sind so gut wie nie Hausdorffsch. Die Ebene mit

---

[133] mit $f(U') \subseteq W'$ und $g(V') \subseteq W'$

zwei Ursprüngen sollte aber trotzdem ausgeschlossen werden. Man kann das mit Hilfe der Diagonaleinbettung tun. Bei der gewöhnlichen Ebene ist dies die Abbildung

$$\Delta: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,\ x \mapsto (x,x).$$

Das Bild dieser Abbildung ist offensichtlich abgeschlossen in $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ im Gegensatz zur Situation der Ebene H mit verdoppelten Ursprung:

$$\Delta: H \mapsto H \times H,\ x \mapsto (x, x).$$

Die Menge rechts besitzt vier Urprünge:

$$(0,0), (0', 0'), (0, 0'), (0', 0).$$

Nur die ersten beiden liegen im Bild der Diagonaleinbettung. Jede Umgebung von jedem dieser vier Punkte hat aber Punkte gemeinsam mit dem Bild von Δ. Insbesondere ist dieses Bild nicht abgeschlossen.

A0.3.1 Definition der separierten Morphismen

Sei f: $X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata. Der Diagonal-Morphismus ist definiert als der eindeutig bestimmte Morphismus

$$\Delta: X \longrightarrow X\times_Y X$$

dessen Zusammensetzung mit den beiden Projektionen $X\times_Y X \longrightarrow X$ gleich dem identischen Morphismus $X \longrightarrow X$ ist. Der Morphismus f heißt separiert, wenn der Diagonal-Morphismus eine abgeschlossene Einbettung ist. Wir sagen in dieser Situation auch, X ist separiert über Y. Ein Schema X heißt separiert, wenn es separiert ist über Spec $\mathbb{Z}$.

A0.3.2 Morphismen affiner Schemata

Sei f: $X \longrightarrow Y$ ein Morphismus affiner Schemata. Dann ist f separiert.

Beweis. Seien

$$X = \operatorname{Spec} A \text{ und } Y = \operatorname{Spec} B$$

und komme f vom Ring-Homomorphismus

$$h: B \longrightarrow A.$$

Der zugehörige Diagonal-Morphismus

$$\operatorname{Spec} A \longrightarrow \operatorname{Spec} A\otimes_B A$$

kommt dann von der Abbildung

(1) $$A\otimes_B A \longrightarrow A,\ a\otimes a' \mapsto aa',$$

denn dies ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1, dessen Zusammensetzung mit den beiden natürlichen Homomorphismen

$$A \longrightarrow A\otimes_B A,\ a \mapsto a\otimes 1, \text{ und } A \longrightarrow A\otimes_B A,\ a \mapsto 1\otimes a,$$

die identische Abbildung ist. Weil (1) surjektiv ist, ist die Diagonaleinbettung eine abgeschlossene Einbettung.
QED.

A0.3.3 Ein Kriterium für Separiertheit

Ein Morphismus f. $X \longrightarrow Y$ ist genau dann separiert, wenn das Bild

$$\Delta(X) \subseteq X\times_Y X$$

der Diagonalabbildung eine abgeschlossene Teilmenge von $X\times_Y X$ ist.

Beweis. Die Bedingung ist offensichtlich notwendig. Sei jetzt $\Delta(X)$ abgeschlossen in $X\times_Y X$. Es reicht zu zeigen, die Abbildung

$$\Delta: X \longrightarrow \Delta(X)$$

ist ein Homöomorphismus und der Garben-Morphismus

$$\mathcal{O}_{X\times_Y X} \longrightarrow \Delta_*\mathcal{O}_X$$

ist surjektiv. Bezeichne $p_1: X\times_Y X \longrightarrow X$ die natürliche Projektion. Dann gilt

$$p_1\circ\Delta = \mathrm{Id}.$$

Insbesondere ist Δ als Abbildung injektiv und als Abbildung

$$\Delta: X \longrightarrow \Delta(X)$$

bijektiv. Als Morphismus ist Δ stetig. Das Inverse von Δ ist gerade die Einschränkung des Morphismus p_1 auf $\Delta(X)$, also ebenfalls stetig. Als ist Δ ein Homöomorphismujs.

Wir haben noch die Surjektivität des Garben-Morphismus zu zeigen. Dies ist eine Frage lokaler Natur.

Für jeden Punkt von $X\times_Y X$, der nicht im Bild von Δ liegt, ist der Halm von $\Delta_*\mathcal{O}_X$ in diesem Punkt Null, d.h. die zugehörige Abbildung der Halme ist surjektiv. Sei jetzt ein Punkt im Bild von Δ gegeben, sagen wir

$$\Delta(p) \text{ mit } p \in X.$$

Wir wählen eine offene affine Umgebung V von f(p),

$$f(p) \in V = \mathrm{Spec}\, B \subseteq Y$$

und eine offene affine Umgebung U von p mit $f(U) \subseteq V$,

$$p \in U = \mathrm{Spec}\, A \subseteq f^{-1}(V).$$

Dann ist

$$U\times_V U = \mathrm{Spec}\, A\otimes_B A \subseteq X\times_Y X$$

eine offene Umgebung von $\Delta(p)$, und es reicht zu zeigen,

$$\mathcal{O}_{U\times_V U} \longrightarrow \Delta_*\mathcal{O}_U$$

ist surjektiv. Das ist aber der Fall, weil der Diagonal-Morphismus $U \longrightarrow U\times_V U$ im affinen Fall eine abgeschlossene Einbettung ist.

QED.

A0.3.4 Das Bewertungskriterium der Separiertheit

Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata mit X noethersch. Dann sind die beiden folgenden Bedingungen äquivalent.

(i) f ist separiert.

(ii) Für jeden diskreten Bewertungsring R mit dem Quotientenkörper K und jedes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\, K & \longrightarrow & X \\ i\downarrow & & \downarrow f \\ \mathrm{Spec}\, R & \longrightarrow & X \end{array},$$

in welchem der Morphismus i von der natürlichen Einbettung $R \longrightarrow K$ kommt, gibt es höchstens einen Morphimus

$$\mathrm{Spec}\, R \longrightarrow X,$$

der sich kommutativ in dieses Diagramm einbetten läßt.[134]
Beweis: siehe Hartshorne, Theorem II.4.3.
QED.

A0.3.5 Eigénschaften separierter Morphismen

In den nachfolgenden Aussagen seien alle Schemata noethersch.
(i) Offene und abgeschlossene Einbettungen sind separiert.
(ii) Die Komposition separierter Morphismen ist separiert.
(iii) Die Separiertheit eines Morphismus bleibt bei Basis-Wechsel erhalten, d.h. für jedes kartesische kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X\times_S Y & \xrightarrow{p_1} & X \\ p_2\downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

folgt aus der Separiertheit von f die von p_2 (und aus der Separiertheit von g die von p_1).

(iv) Faserprodukte separierter Morphismen sind separiert.

(v) Sind $f: X \longrightarrow Y$ und $g: Y \longrightarrow Z$ Morphismen mit $g\circ f$ separiert, so ist auch f separiert.

(vi) Ein Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ ist genau dann separiert, wenn Y so durch offene Teilmengen V_i überdeckt werden kann, daß die Einschränkungen $f^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i$ separiert sind.
Beweis. siehe Hartshorne Folgerung II.4.6.
QED.

A0.4 Eigentliche Morphismen

A0.4.1 Definition

Ein Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ von Schemata heißt <u>eigentlich</u>, wenn er separiert, von endlichen Typ und universell abgeschlossen ist.

Dabei heiße ein Morphismus f <u>abgeschlossen</u>, wenn er abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen abbildet, und <u>universell abgeschlossen</u>, wenn alle Morphismen, die aus f durch Basis-Wechsel entstehen, abgeschlossen sind.

Beispiel

Seien k ein Körper und X = Spec k[x] die affine Gerade über k. Dann ist X separiert[135] und endlichen Typs[136] über k, jedoch nicht eigentlich. Um letzteres einzusehen, betrachten wir den Morphismus

(1) $$X\times_{\mathrm{Spec}\, k} X \longrightarrow X$$

der durch Basis-Wechsel des Struktur-Morphismus $X \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k$ mit sich selbst entsteht. Dieser wird induziert durch die natürliche Abbildung

---

[134] d.h. der auf der punktierten Kurve Spec K definierte Morphismus Spec K $\longrightarrow$ X läßt sich auf höchstens eine Weise auf die gesamte Kurve Spec R fortsetzen (genau den Kurven-Keim): es gibt höchsten einen Punkt von X, der als Bildpunkt des abgeschlossenen Punktes von Spec R in Frage kommt.

[135] da affin

[136] weil k[x] als k-Algebra endlich erzeugt ist.

$$k\otimes_k k[x] \longrightarrow k[x]\otimes_k k[x]$$

die durch Tensorieren der natürlichen Einbettung $k \longrightarrow k[x]$ mit $k[x]$ entsteht, d.h. die die natürliche Einbettung

$$k[x] \longrightarrow k[x,y].$$

Mit anderen Worten, (1) ist bis auf Isomorphie gerade die Projektion

$$p:\mathbb{A}^2_k \longrightarrow \mathbb{A}^1_k,\ (x, y) \mapsto x,$$

auf die erste Koordinate. Es reicht zu zeigen, diese Abbildung ist nicht abgeschlossen. Sei H die Hyperbel

$$H = V(xy - 1) = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2_k : xy = 1\}.$$

Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^2_k$. Das Bild p(H) enthält alle Punkte von $\mathbb{A}^1_k$ mit Ausnahme des Ursprungs, ist also nicht abgeschlossen.

A0.4.2 Bewertungskriterium der Eigentlichkeit

Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus endlichen Typs mit X noethersch. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent.

(i) f ist eigentlich.

(ii) Für jeden Bewertungsring R mit dem Quotientenkörper K und jedes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} K & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \operatorname{Spec} R & \longrightarrow & X \end{array},$$

in welchem der Morphismus i von der natürlichen Einbettung $R \longrightarrow K$ kommt, gibt es genau einen Morphimus

$$\operatorname{Spec} R \longrightarrow X,$$

der sich kommutativ in dieses Diagramm einbetten läßt.[137]

Beweis. siehe Hartshorne, Theorem II.4.7.
QED.

A0.5 Modul-Garben

A0.5.1 Umkehrbare Garben

Sei X ein Schema. Ein lokal endlich erzeugter[138] $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{L}$ heißt umkehrbar, wenn es einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{L}'$ gibt mit

---

[137] d.h. der auf der punktierten Kurve Spec K definierte Morphismus $\operatorname{Spec} K \longrightarrow X$ läßt sich auf höchstens eine Weise auf die gesamte Kurve Spec R fortsetzen (genau den Kurven-Keim): es gibt höchsten einen Punkt von X, der als Bildpunkt des abgeschlossenen Punktes von Spec R in Frage kommt.

[138] d.h. für jeden Punkt $x\in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x und endlich viele Schnitte $\ell_1,\dots,\ell_r \in\mathcal{L}(U)$ mit $\mathcal{L}(U') = \ell_1|_{U'}\mathcal{O}_X(U') +\dots+ \ell_r|_{U'}\mathcal{O}_X(U')$ für jede offene Menge $U' \subseteq U$. Man sagt in dieser Situation, die Schnitte $\ell_1,\dots,\ell_r$ erzeugen in den Punkten von U den $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{L}$ und schreibt

$$\mathcal{L}|_U = \ell_1\mathcal{O}_U +\dots+ \ell_r\mathcal{O}_U .$$

$$\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}' \cong \mathcal{O}_X.$$

Dies ist äquivalent zu der Aussage, daß $\mathcal{L}$ lokal frei vom Rang 1 ist.
Beweis. Sei $\mathcal{L}$ lokal frei vom Rang 1. Dann gibt es eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i$$

und Isomorphismen

$$\varphi_i\colon \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_i},$$

d.h. L entsteht aus den Garben $\mathcal{O}_{U_i}$ durch Verheften mit Hilfe der Isomorphismen

$$\mathcal{O}_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} \mathcal{L}|_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{\varphi_j} \mathcal{O}_{U_i\cap U_j},\ s \mapsto g_{ij}\cdot s.$$

Dabei ist das Bild g_{ij} des Schnittes 1, ein Schnitt

$$g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_i\cap U_j)$$

der Garbe $\mathcal{O}_X^*$ der Einheiten von $\mathcal{O}_X$, d.h. es gilt auch

$$g_{ij}^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i\cap U_j).$$

Bezeichne

$$\mathcal{L}^{-1}$$

den $\mathcal{O}_X$-Modul, welcher durch Verheften der Garben $\mathcal{O}_{U_i\cap U_j}$ entlang der Isomorphismen

$$\mathcal{O}_{U_i\cap U_j} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_i\cap U_j},\ s \mapsto g_{ij}^{-1}\cdot s.$$

Wir betrachten auf U_i den Isomorphismus

$$\psi_i\colon \mathcal{L}|_{U_i}\otimes_{\mathcal{O}_{U_i}}\mathcal{O}_{U_i} \xrightarrow{\varphi_i\otimes 1} \mathcal{O}_{U_i}\otimes_{\mathcal{O}_{U_i}}\mathcal{O}_{U_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_i},\ s\otimes s' \mapsto \varphi_i(s)\cdot s'.$$

Auf U_j hat der analoge Isomorphismus die Gestalt

$$\psi_j\colon \mathcal{L}|_{U_j}\otimes_{\mathcal{O}_{U_j}}\mathcal{O}_{U_j} \xrightarrow{\varphi_j\otimes 1} \mathcal{O}_{U_j}\otimes_{\mathcal{O}_{U_j}}\mathcal{O}_{U_j} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_j},\ s\otimes s' \mapsto \varphi_j(s)\cdot s',$$

d.h. die beiden Isomorphismen unterscheiden sich auf $U_i\cap U_j$ um den Faktor

$$\varphi_j(s)/\varphi_i(s) = \varphi_j(\varphi_i^{-1}\varphi_i(s))/\varphi_i(s) = g_{ij}\varphi_i(s)/\varphi_i(s) = g_{ij},$$

d.h. wir haben über $U_i\cap U_j$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_X & \xrightarrow{\psi_i} & \mathcal{O}_X \\
\mathrm{id}\downarrow & & \downarrow g_{ij} \\
\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_X & \xrightarrow{\psi_j} & \mathcal{O}_X
\end{array}$$

bzw., da die beteiligten Morphismen $\mathcal{O}_X$-Modul-Homomorphismen sind,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_X & \xrightarrow{\psi_i} & \mathcal{O}_X \\ g_{ij}^{-1}\downarrow & & \downarrow id \\ \mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_X & \xrightarrow{\psi_j} & \mathcal{O}_X \end{array}$$

Wenn wir den zweiten Tensorfaktor $\mathcal{O}_X$ auf U_i mit der Garbe $\mathcal{L}^{-1}$ identifizieren, so wird der linke vertikale Morphismus zum identischen Morphismus, und wir erhalten über dem Durchschnitt $U_i \cap U_j$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^{-1} & \xrightarrow{\psi_i} & \mathcal{O}_X \\ \| & & \downarrow id \\ \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^{-1} & \xrightarrow{\psi_j} & \mathcal{O}_X \end{array}$$

Mit anderen Worten, die Isomorphismen ψ_i und ψ_j stimmen auf $U_i \cap U_j$ überein. Die Isomorphismen ψ_i verheften sich damit zu einem Isomorphismus

$$\psi\colon \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

auf ganz X, d.h. $\mathcal{L}$ ist eine umkehrbare Garbe.
Sei umgekehrt ein Isomorphismus von Modul-Garben

$$\psi\colon \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

gegeben. Für jeden Punkt $x \in X$ erhält man durch Übergang zu den Halmen einen Isomorphismus[139]

$$\psi_x\colon \mathcal{L}_x\otimes\mathcal{L}'_x \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

Wir wählen Elemente $s_1,\dots,s_n \in \mathcal{L}_x$ und $s'_1,\dots,s'_n \in \mathcal{L}'_x$ mit

$$\psi_x\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\otimes s'_i\right) = 1.$$

Die Elemente $\psi_x(s_i\otimes s'_i)$ können dann nicht sämtlich im maximalen Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ liegen. Es gibt also Elemente $s \in \mathcal{L}_x$ und $s' \in \mathcal{L}'_x$ mit $\psi_x(s\otimes s')$ Einheit in $\mathcal{O}_{X,x}$. Indem wir zum Beispiel s mit einer Einheit von $\mathcal{O}_{X,x}$ multiplizieren, erreichen wir

(1) $$\psi_x(s\otimes s') = 1.$$

Insbesondere ist die Einschränkung der $\mathcal{O}_{X,x}$-linearen Abbildung

(2) $$\mathcal{L}_x \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}\,,\ u \mapsto \psi_x(u\otimes s'),$$

auf den Teilmodul $\mathcal{O}_{X,x}\cdot s$ surjektiv:

(3) $$\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{L}_x \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x},\ \ell \mapsto \ell s \mapsto \psi_x(\ell s\otimes s') = \ell\cdot\psi_x(s\otimes s') = \ell.$$

Die Abbildung (2) selbst ist also auch surjektiv.

[139] Das Tensorprodukt links ist über $\mathcal{O}_{X,x}$ zu bilden.

Beweisen wir die Injektivität von (2). Durch Tensorieren des Isomorphismus ψ_x mit $k(x) =$[140] $\mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x}$ über $\mathcal{O}_{X,x}$ erhalten wir einen Isomorphismus von k(x)-Vektorräumen

$$\mathcal{L}_x/m_{X,x}\mathcal{L}_x \otimes \mathcal{L}'_x/m_{X,x}\mathcal{L}'_x \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x}\,.$$

Der Vektorraum rechts ist 1-dimensional. Deshalb müssen auch die beiden Tensorfaktoren links 1-dimensionale k(x)-Vektorräume sein. Wegen (1) liegt s nicht in $m_{X,x}\mathcal{L}_x$. Die Restklasse von s in

$$\mathcal{L}_x/m_{X,x}\mathcal{L}_x$$

ist deshalb ungleich Null und erzeugt diese Vektorräume. Weil $\mathcal{L}_x$ endlich erzeugter $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul ist, folgt nach dem Lemma von Nakayama

$$\mathcal{L}_x = s\mathcal{O}_{X,x}.$$

Auf den Teilmodul $s\mathcal{O}_{X,x}$ ist die Abbildung (2) aber injektiv (vgl. die Rechnung (3)). Also ist (2) insgesamt bijektiv. Zusammen erhalten wir

$$\mathcal{L}_x = s\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{X,x}.$$

Weil $\mathcal{L}$ lokal endlich erzeugt ist, bedeutet dies, es gibt eine Umgebung U von x und einen Schnitt $s \in \mathcal{L}(U)$ mit

$$\mathcal{L}|_U = s\bullet\mathcal{O}_U \cong \mathcal{O}_U.$$

Da x beliebig gewählt wurde, ist damit $\mathcal{L}$ lokal frei vom Rang 1.[141]
QED.

A0.5.2 Direkte und inverse Bilder von Modul-Garben

Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata. Dann ist $f_*\mathcal{O}_X$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra. Für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul F ist deshalb das direkte Bild f_*F ein $\mathcal{O}_Y$-Modul.

Sei jetzt G ein $\mathcal{O}_Y$-Modul. Dann ist für jede offene Menge $U \subseteq X$

$$(f^{-1}G)(U) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V} G(U)$$

ein Modul über

$$(f^{-1}\mathcal{O}_Y)(U) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V} \mathcal{O}_Y(U).$$

Die Garbe $f^{-1}G$ bekommt dadurch die Struktur eines $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Moduls. Nun besitzt $\mathcal{O}_X$ die Struktur einer $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Algebra.[142] Das Tensorprodukt

---

[140] $m_{X,x}$ bezeichne das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$.

[141] Genauer: wegen $s\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{X,x}$ hat der Kern des Morphismus $\mathcal{O}_U \longrightarrow s\mathcal{O}_U$, $f \mapsto fs$, einen trivialen Halm in x. Dieser Kern ist aber endlich erzeugt (weil X noethersch ist). In einer Umgebung von x gibt es somit ein endliches Erzeugendensystem, welches in einer eventual davon verschiedenen Umgebung von x identisch Null ist. Der Kern ist somit in einer Umgebung von x identisch Null. Durch Verkleinern von U erhalten wir einen Isomorphismus.

$$f^*G := f^{-1}G \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

ist somit ein wohldefinierter $\mathcal{O}_X$-Modul. Er heißt <u>inverses Bild</u> des $\mathcal{O}_Y$-Moduls G (in der Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln).

Beispiel

$$f^*(\mathcal{O}_Y) = f^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X .$$

Bemerkungen

(i) Die obige Konstruktion funktioniert auch, wenn f lediglich ein Morphismus von geometrischen Räumen ist.

(ii) Für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul F und jeden $\mathcal{O}_Y$-Modul G bestehen natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-Mod}}(f^*G, F) \cong \mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathcal{O}_Y\text{-Mod}}(f^{-1}G, F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y\text{-Mod}}(G, f_*F).$$

Mit anderen Worten, der Funktotr

$$f^*: \mathcal{O}_Y\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod}, G \mapsto f^*G,$$

ist linksadjungiert zum Funktor

$$f_*: \mathcal{O}_X\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{O}_Y\text{-Mod}, F \mapsto f_*F.$$

(iii) Sei f: X $\longrightarrow$ Y Morphismus der affinen Schemata X = Spec A, Y = Spec B zum Ring-Homomorphismus

$$h: B \longrightarrow A,$$

und sei F der $\mathcal{O}_X$-Modul

---

[142] Der Morphjsmus $f^\#: \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ definiert, weil der Funktor f^{-1} linksadjungiert ist zum Funktor f_* ,

$$\mathrm{Hom}_{Sh_Y}(\mathcal{O}_Y, f_*\mathcal{O}_X) \cong \mathrm{Hom}_{Sh_X}(f^{-1}\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X),$$

einen Morphismus $f^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$. Dieser ist ein Morphismus von Garben von Ringen mit 1, weil $f^\#$ ein solcher ist. Genauer, der Morphismus von Ring-Garben $f^\#$ definiert für je zwei offenen Mengen U$\subseteq$X und V$\subseteq$Y mit f(U) $\subseteq$ V einen Homomorphismus von Ringen mit 1,

$$\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U),$$

wobei der Homomorphismus rechts eine Restritionsabbildung der Garbe $\mathcal{O}_X$ ist. Durch Übergang zum direkten Limes erhalten wir für jede offene Menge U $\subseteq$ X einen Homomorphismus von Ringen mit 1,

$$f^{-1}\mathcal{O}_Y(U) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V} \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U).$$

Diese setzen sich zusammen zu einem Morphismus von Ring-Garben $f^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ durch welchem $\mathcal{O}_X$ zu einer $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Algebra wird.

$$F = \widetilde{M}$$

zum A-Modul M. Durch h besitzt M auch die Struktur eines B-Moduls. Bezeichne M' die Menge M mit dieser B-Modul-Struktur. Dann ist

$$f_*F = \widetilde{M}'$$

Genauer, für jede offene Menge $V \subseteq Y$ hat man eine Restriktionsabbildung

$$M = F(X) \longrightarrow F(f^{-1}(V)) = (f_*F)(V).$$

Weil $f_*F(V)$ ein Modul über $\mathcal{O}_Y(V) = \widetilde{B}(V)$ ist, induziert diese eine Abbildung

$$\widetilde{M}'(V) = M\otimes_B\widetilde{B}(V) \longrightarrow (f_*F)(V),$$

d.h. man hat zumindest einen Morphismus

$$\widetilde{M}' \longrightarrow f_*F$$

von Modul-Garben über $\mathcal{O}_Y$. Es reicht zu zeigen, dies ist ein Isomorphismus.

Für jede offene Hauptmenge $U = D(f) \subseteq X = \operatorname{Spec} A$, $f\in A$, gilt

$$F(U) = M\otimes_A\mathcal{O}_X(D(f)) = M\otimes_A A_f = M_f$$

und für jede offene Hauptmenge $V = D(g) \subseteq Y = \operatorname{Spec} B$, $g \in B$, gilt

$$f_*F(V) = F(f^{-1}D(g)) = F(D(h(g))) = M_{h(g)}$$

Mit anderen Worten auf den offenen Hauptmengen $V = D(g)$ erhalten wir Isomorphismen

$$\widetilde{M}'(V) \longrightarrow f_*F(V).$$

Da die offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis von $Y = \operatorname{Spec} B$ bilden, können wir zum direkten Limes über alle offenen Hauptmengen V übergehen, die einen vorgegebenen Punkt $y\in Y$ enthalten und erhalten so gerade die Abbildung auf den Halmen in y. Für jedes y erhalten wir einen Isomorphismus

$$\widetilde{M}'_y \longrightarrow f_*F_y\ ,$$

d.h. $\widetilde{M}' \longrightarrow f_*F$ ist ein Isomorphismus.

(iv) Sei $f: X \longrightarrow Y$ Morphismus der affinen Schemata $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$ zum Ring-Homomorphismus

$$h: B \longrightarrow A,$$

und sei G der $\mathcal{O}_X$-Modul

$$G = \widetilde{N}$$

zum B-Modul N. Dann ist

$$f^*G = (N\otimes_B A)^\sim$$

die Modul-Garbe zum A-Modul $N\otimes_B A$. Zum Beweis reicht es zu zeigen,

(1) $$\operatorname{Hom}((N\otimes_B A)^\sim, F) \cong \operatorname{Hom}(\widetilde{N}, f_*F)$$

für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul F.

Wir beginnen mit einer allgemeinen Bemerkung. Für jeden $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{M}$ und jeden Modul-Homomorphismus

$$\widetilde{N} \longrightarrow \mathcal{M}$$

erhält man durch Übergang zu den globalen Schnitten einen B-Modul-Homomorphismus

$$N \longrightarrow \mathcal{M}(Y).$$

Umgekehrt definiert jeder solche B-Modul-Homomorphismus (wie wir oben gesehen haben)[143] einen Morphismus von Modul-Garben

$$\widetilde{N} = N\otimes\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{M}.$$

Man erhält so zueinander inverse Bijektionen, d.h. es besteht eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y\text{-Mod}}(\widetilde{N}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{B\text{-Mod}}(N, \mathcal{M}(Y)).$$

Die Menge auf der rechten Seite von (1) kann man also identifizieren mit

(2) $$\mathrm{Hom}_{B\text{-Mod}}(N, F(X)).$$

Analog läßt die Menge auf der linken Seite von (1) mit

(3) $$\mathrm{Hom}_A(N\otimes_B A, F(X)).$$

identifizieren. Nun besitzt F(X) die Struktur eines Moduls über $\mathcal{O}_X(X) = A$, d.h. die beiden Mengen (2) und (3) lassen sich in natürlicher Weise identifizieren (auf Grund der Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts).

- (Nachtrag, gehört zu Beispiel A0.2.1 (xi)). Für jedes affine Schema X = Spec A ist der globale Schnitt-Funktor

$$(\text{quasi-kohärente } \mathcal{O}_X\text{-Moduln}) \longrightarrow A\text{-Mod},\ F \mapsto \Gamma(X, F),$$

eine Äquivalenz von Kategorien mit dem quasi-inversen Funktor

$$M \mapsto \widetilde{M}\ .$$

Insbesondere ist der Funktor exakt und völlig treu. Ist das Schema X noethersch, so ist auch durch

$$(\text{kohärente } \mathcal{O}_X\text{-Moduln}) \longrightarrow (\text{endlich erzeugte } A\text{-Moduln}),\ F \mapsto \Gamma(X, F),$$

eine Äquivalenz von Kategorien definiert (mit demselben quasi-inversen Funktor wie oben). (Hartshorne Corollary II.5.5 und Proposition II.5.2).

- (Nachtrag). Jeder Kern, Kokern und jedes Bild eines Morphismus von quasi-kohärenten Garben ist quasi-kohärent. Ist das zugrundeliegende Schema noethersch, so gilt die analoge Aussage auch für kohärente Moduln. (Hartshorne, Prop. II.5.7).
- (Nachtrag). Seien X ein Schema und

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

---

[143] Für jede offene Menge $V \subseteq Y$ hat man eine Abbildung

$$N \longrightarrow \mathcal{M}(Y) \longrightarrow \mathcal{M}(V),$$

und da recht ein $\mathcal{O}_Y(V)$-Modul steht, eine Abbildung

$$\widetilde{N}(V) = N\otimes_B\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{M}(V).$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Wenn zwei der drei Moduln der Sequenz quasi-kohärent sind, so ist es auch der dritte. Ist das Schema X noethersch, so gilt die analoge Aussage auch für kohärente Moduln. (Hartshorne, Prop. II.5.7)

(v) Inverse Bilder und Kohärenz. Für jeden Morphismus von Schemata $f: X \longrightarrow Y$ ist das inverse Bild eines quasi-kohärenten $\mathcal{O}_Y$-Moduls entlang f ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.
Sind die Schemata X und Y noethersch, so ist das inverse Bild eines kohärenten $\mathcal{O}_Y$-Moduls entlang f ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. (Hartshorne, Prop. II.5.8).

(vi) Direkte Bilder und Kohärenz. Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein quasi-kompakter[144] separierter Morphismus von Schemata mit X noethersch. Dann ist das direkte Bild eines quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduls ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul. (Hartshorne, Prop. II.5.8).
Ein Morphismus noetherscher Schemata muß kohärente Garben nicht unbedingt in kohärente Garben überführen: man nehme ein affines Schema positier Dimension und bilde dieses durch eine konstante Abbildung in sich ab. Das direkte Bild der Strukturgarbe ist dann nicht mehr kohärent.

(vii) Proper mapping theorem. Allgemeiner gilt für jeden eigentlichen Morphismus $f: X \longrightarrow Y$, daß die direkten Bilder entlang f von kohärenten Garben kohärent sind (Grothendieck & Dieudonné: EGA III, 3.2.1).

A0.5.3 Modulgarben auf projektiven Spektren

Seien

$$R = \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$$

ein graduierter Ring und

$$M = \oplus_{n=k}^{\infty} M_n\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

ein graduierter R-Modul.[145] Wir definieren die zu M gehörige Garbe

$$\widetilde{M}$$

auf

$$X := \operatorname{Proj} R$$

wie folgt. Für jeden Punkt $p \in X$ bezeichne T_p wie bisher die multiplikative Menge der homogenen Elemente von R-p und

$$M_{(p)} = \{\frac{m}{s} \in T_p^{-1}M \mid m \in M, s \in T_p\ , \text{ m und s homogen vom selben Grad}\}$$

den Modul der homogenen Quotienten des Grades 0 von $T_p^{-1}M$. Wir betrachten die Garbe

---

[144] Für jede quasi-kompakte offene Teilmenge $V \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V)$ quasi-kompakt. Es reicht diese Bedingung für die Mengen V einer affinen offenen Überdeckung von Y zu stellen, vgl. Hartshorne, Ex. II.3.2.

[145] d.h. die additive Gruppe von M zerfällt in einer direkte Summe von Untergruppen M_n mit

$$R_n \cdot M_{n'} \subseteq M_{n+n'}\ .$$

(1) $$U \mapsto \prod_{p\in U} M_{(p)}$$

auf X. Je zwei homogene Elemente $m\in M$ und $s\in R$ desselben Grades definieren einen Schnitt

(2) $$(\frac{m}{s})_{p\in D_+(s)}$$

dieser Garbe über der offenen Mengen $D_+(s) \subseteq$ Proj R. Die Garbe $\widetilde{M}$ ist definiert als die Teilgarbe von (1) der Schnitte, welche lokal von der Gestalt (2) sind.

Bemerkungen

(i) Für jeden Punkt $p \in X$ ist der Halm der Garbe $\widetilde{M}$ im Punkt p gerade

$$(\widetilde{M})_p = M_{(p)}.$$

(ii) Für jedes homogene Element $f\in R_+$ ist die Einschränkung der Garbe $\widetilde{M}$ auf die offene Hauptmenge

$$D_+(f) = \text{Spec } R_{(f)}$$

gerade die Garbe

$$\widetilde{M}\,|_{D_+(f)} = (M_{(f)})^{\sim}$$

zum $R_{(f)}$-Modul $M_{(f)}$ auf dem affinen Spektrum Spec $R_{(f)}$.

(iii) $\widetilde{M}$ ist ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Ist der R-Modul M endlich erzeugt, so ist $\widetilde{M}$ sogar kohärent über $\mathcal{O}_X$.

(iv) Für je zwei graduierte R-Moduln M und N gilt[146]

---

[146] Die bilineare Abbildung

$$M\times N \longrightarrow M\otimes N,\ (m,n) \mapsto m\otimes n$$

induziert einen bilinearen Garben-Morphismus

$$\widetilde{M}\times\widetilde{N} \longrightarrow (M\otimes N)^{\sim},\ ((\frac{m_p}{s_p})_p, (\frac{n_p}{t_p})_p) \mapsto (\frac{m_p\otimes n_p}{s_p t_p})_p$$

und damit einen Garben-Morphisums

$$\widetilde{M}\otimes\widetilde{N} \longrightarrow (M\otimes N)^{\sim}$$

Es reicht zu zeigen, dies ist ein Isomorphismus. Letzteres ist eine lokale Frage. Es reicht zu zeigen, dies ist ein Isomorphismus über jeder offenen Hauptmenge

$$D_+(f) \text{ mit } f\in R_+ \text{ homogen.}$$

Nun ist $(M\otimes N)^{\sim}|_{D_+(f)}$ die Garbe auf dem affinen Schema Spec $R_{(f)}$ zum $R_{(f)}$-Modul

$$(M\otimes_R N)_{(f)} = M_{(f)}\otimes_{R_{(f)}} N_{(f)}$$

Die Universaltiätseigenschaft des Tensorprodukts rechts übersetzt sich gerade in die Aussage, daß die Garbe

$$(M\otimes_R N)^\sim = \widetilde{M}\otimes_{\widetilde{R}}\widetilde{N}$$

A0.5.4 Die Twist-Garbe eines projektiven Spektrums

Seien R ein graduierter Ring und M ein graduierter R-Modul. Für jede ganze Zahl $n\in\mathbb{Z}$ bezeichne[147]

$$M[n]$$

den graduierten R-Modul dessen homogene Elemente des Grades k gerade die Elemente von

$$M[n]_k = M_{n+k}$$

seien.
Sei jetzt X das projektive Spektrum von R,

$$X := \mathrm{Proj}\ R.$$

Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{O}_X(n) := (R[n])^\sim$$

den $\mathcal{O}_X$-Modul zum graduierten R-Modul M[n]. Die Garbe $\mathcal{O}_X(1)$ heißt <u>Twist-Garbe</u> des projektiven Spektrums X = Proj R. Für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul F heißt

$$F(n) := F\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X(n)$$

die n-fach getwistete Garbe.
Bemerkungen
Seien R ein graduierter Ring und X = Proj R. Wir nehmen an, R wird als R_0-Algebra im Grad 1 erzeugt,[148]

$$R = R_0[R_1].$$

Dann gilt:
(i) $\mathcal{O}_X(n)$ ist für jedes n ein umkehrbarer $\mathcal{O}_X$-Modul.
(ii) Für jeden graduierten R-Modul M gilt $\widetilde{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X(n) \cong (M[n])^\sim$. Insbesondere ist

$$\mathcal{O}_X(n)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X(m) \cong \mathcal{O}_X(n+m).$$

(iii) Seien S ein zweiter graduierter Ring mit $S = S_0[S_1]$ und sei

---

$$(M\otimes N)^\sim|_{D_+(f)} = M^\sim_{(f)}\otimes_{R^\sim_{(f)}} N^\sim_{(f)}$$

die Universalitätseigenschaft des Garben-Tensorprodukts rechts besitzt, d.h. des Tensorprodukts

$$\widetilde{M}|_{D_+(f)} \otimes \widetilde{N}|_{D_+(f)} = (\widetilde{M}\otimes\widetilde{N})|_{D_+(f)}.$$

[147] Denkt man sich die direkten Summanden M_n von M von links nach rechts nach steigenden n angeordnet, so entsteht M[n] aus M durch Verschieben der direkten Summanden nach links um n Stellen.
[148] d.h. R ist ein Faktorring eines Polynomrings über R_0 in Unbestimmten des Grades 1 nach einem homogenen Ideal.

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

ein Homomorphismus von Ringen mit 1, der die Grade erhält, $\varphi(R_n) \subseteq S_n$ für jedes n. Wir setzen

$$X := \text{Proj } R$$
$$Y := \text{Proj } S$$

und betrachten die offene Teilmenge

$$U := \{p\in\text{Proj } S \mid \varphi(R_+) \not\subseteq p\}$$

von Y. Durch den Homomorphismus φ ist ein Morphismus von Schemata

$$f: U \longrightarrow X,\ p \mapsto \varphi^{-1}(p),$$

definiert.[149] Es gilt

$$f^*(\mathcal{O}_X(n)) \cong \mathcal{O}_Y(n)|_U$$

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Es reicht zu zeigen, $\mathcal{O}_X(n)$ ist lokal frei vom Rang 1. Wegen

$$R = R_0[R_1]$$

überdecken die offenen Mengen der Gestalt

$$D_+(f) \text{ mit } f\in R_1$$

das Schema X = Proj R.[150] Es reicht also zu zeigen, die Garbe

$$\mathcal{O}_X(n)|_{D_+(f)} = ((R[n])_{(f)})^{\sim} \text{ auf } D_+(f) = \text{Spec } R_{(f)}$$

---

[149] Ist U = Proj S - $V(\varphi(R_1))$ nicht leer und liegt dicht in Proj S, so kann man f als rationale Abbildung Proj S $\longrightarrow$ Proj R auffassen. Die Menge U ist genau dann leer, wenn $\varphi(R_+) = 0$ gilt. Ist U nicht leer und Proj S irreduzibeol, so liegt U dicht in Proj S.
Sei jetzt Proj S reduzibel und sei V(I) eine irreduzible (nicht eingebettete) Komponente von Proj S. Wir wählen homogene Elemente

$$f_1,\ldots,f_n\in I$$

des Grades 1 und betrachten den Homomorphismus von S_0-Algebren

$$R := S_0[X_1,\ldots,X_n] \longrightarrow S,\ X_i \longrightarrow f_i,$$

Dann gilt $\varphi(R_+) = (f_1,\ldots,f_n) \subseteq I$, also
$V(I) \subseteq V(\varphi(R_1))$ = Proj S - U. Mit anderen Worten, U liegt nicht dicht in Proj S.
Die obige Situation liegt vor zum Beispiel im Fall

$$S = k[X_1,\ldots,X_m]/(X_1,\ldots,X_n)\cap(X_{n+1},\ldots,X_m) \text{ und } I = (X_1,\ldots,X_n)S,$$

d.h. Proj S ist die Vereinigung von zwei komplementären linearen Unterräumen des $\mathbb{P}^{m-1}$,

$$V := V(X_1,\ldots,X_n),\ V' := V(X_{n+1},\ldots,X_m).$$

Der Homomorphismus φ ist dann die Zusammensetzung der natürlichen Homomorphismen

$$k[X_1,\ldots,X_n] \longrightarrow k[X_1,\ldots,X_m] \longrightarrow k[X_1,\ldots,X_m]/(X_1,\ldots,X_n)\cap(X_{n+1},\ldots,X_m)$$

und f ist die natürliche Einbettung des einen Unterraums:

$$V' - V \longrightarrow V',\ p \mapsto [X_1(p), \ldots, X_n(p)].$$

Man beachte $X_1,\ldots,X_n$ sind identisch 0 auf V.

[150] Für jedes p∈Proj R gilt $R_+ \not\subseteq p$, also $R_1 \not\subseteq p$, also $f\notin p$ für ein $f\in R_1$, also $p\in D_+(f)$.

ist ein freier $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, R_{(f)}}$-Modul vom Rang 1, d.h. es reicht zu zeigen, $(R[n])_{(f)}$ ist ein freier $R_{(f)}$-Modul vom Rang 1. Es gilt

$$\begin{aligned}(R[n])_{(f)} &= \{\frac{m}{f^k} \mid m\in R[n]\ , s\in R, \text{m und } f^k \text{ homogen vom selben Grad}\}\\ &= \{\frac{m}{f^k} \mid m\ , s\in R, \text{m homogen mit deg m - n = deg } f^k\}\\ &= \{\frac{m}{f^k} \mid m\ , s\in R, \text{m homogen mit deg m } =n + k\}\\ &= \{\frac{m}{f^{n+k}}\bullet f^n \mid m\ , s\in R, \text{m homogen mit deg m } =n + k\}\\ &= R_{(f)}\bullet f^n\end{aligned}$$

Die Multiplikation mit f^n ist somit ein Isomorphismus

$$R_{(f)} \longrightarrow (R[n])_{(f)}$$

(dessen Umkehrung gerade die Multiplikation mit f^{-n} ist).
Zu (ii). Es gilt

$$\widetilde{M}\otimes\mathcal{O}_X(n) = \widetilde{M}\otimes R[1]^{\sim} = (M\otimes_R R[1])^{\sim} = (M[1])^{\sim},$$

d.h. es gilt der erste Teil der Behauptung. Der Isomorphismus in der Mitte ist dabei ein Spezielfall des allgemeineren Isomorphismus[151]

$$M[a]\otimes_R N[b] = (M\otimes_R N)[a+b]$$

Den zweiten Teil der Behauptung erhält man, indem man für M den R-Modul R[m] verwendet.
Zu (iii). Die Menge

$$U := \{p\in\mathrm{Proj}\ S \mid \varphi(R_+) \not\subseteq p\} = \bigcup_{r\in R} D_+(\varphi(r))$$

ist offensichtlich offen. Es ist gerade die Menge, der Punkte von Y = Proj S, für welche die Abbildung f definiert ist.

1. Schritt. Die Abbildung $f: U \longrightarrow X, p \mapsto \varphi^{-1}(p)$, ist stetig.

Seien $D_+(r) \subseteq X = \mathrm{Proj}\ R$ eine offene Hauptmenge und $p \in U$ ein Punkt. Dann gilt

$$p \in f^{-1}(D_+(r)) \Leftrightarrow f(p) \in D_+(r) \Leftrightarrow r \notin f(p) \Leftrightarrow r \notin \varphi^{-1}(p) \Leftrightarrow \varphi(r) \notin p$$
$$\Leftrightarrow p \in D_+(\varphi(r)).$$

Wir haben gezeigt,

$$f^{-1}(D_+(r)) = D_+(\varphi(r)).$$

Da die offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis von X bilden, ist jedes Urbild einer offenen Menge offen, d.h. f ist stetig.

2. Schritt. f ist die stetige Abbildung zu einem Morphismus geometrischer Räume.
Wir müssen einem Morphismus

---

[151] $M\otimes_R N$ ist ein graduierter R-Modul, dessen R_0-Teilmodul der homogenen Elemente des Grades n erzeugt wird von den Elementen der Gestalt

$$m\otimes n$$

mit m und n homogen und deg m + deg n = n. Eine Gradverschiebung im ersten Tensorfaktor um den Wert a und im zweiten Tensorfaktor um den Wert b bewirkt deshalt eine Gesamtgradverschiebung um den Wert a+b.

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_U$$

von Garben kommutativer Ring mit 1 konstruieren U(der lokale Homomorphismen auf den Halmen induziert). Dazu reicht es, für jede offene Menge $U' \subseteq X$ einen Homorphismus

(1) $$\prod_{p'\in U'} R_{(p')} \longrightarrow \prod_{p\in f^{-1}(U')} S_{(p)}$$

zu konstruieren, welcher die Schnitte von $\mathcal{O}_X$ in Schnitte von $f_*\mathcal{O}_U$.

Für jedes $p\in \text{Proj } S$ mit $p' := \varphi^{-1}(p) \in \text{Proj } R$ induziert $\varphi: R \longrightarrow S$ einen Homomorphismus

$$T_{p'}^{-1}R \longrightarrow T_{p'}^{-1}S, \frac{r}{s} \mapsto \frac{\varphi(r)}{\varphi(s)}.$$

Durch Einschränken auf die homogenen Elemente des Grades Null erhält man einen Ring-Homomorphismus

$$R_{(p')} \longrightarrow S_{(p)}, \frac{r}{s} \mapsto \frac{\varphi(r)}{\varphi(s)}.$$

Diese Ring-Homomorphismen setzen sich zu einer Abbildung (1) zusammen: Das Bild der Familie

(2) $$\left(\frac{r_{p'}}{s_{p'}}\right)_{p'\in U'}$$

bei der Abbildung (1) ist dabei die Familie, deren Glied mit dem Index $p\in f^{-1}(U')$ gerade der Quotient

(3) $$\frac{\varphi(r_{p'})}{\varphi(s_{p'})} \text{ mit } p' = f(p) = \varphi^{-1}(p)$$

ist. Sind dabei die Zähler und Nenner der Familie (2) lokal unabhängig von p', so gilt dasselbe für die Quotienten der Familie (3) (weil f stetig ist). Mit anderen Worten Abbildungen (1) überführen die Schnitte von $\mathcal{O}_X$ in Schnitte von $f_*\mathcal{O}_U$ und definieren so den gesuchten Garben-Morphismus.
Wir haben noch zu zeigen,

$$f^*(\mathcal{O}_X(n)) \cong \mathcal{O}_Y(n)|_U,$$

d.h.

$$f^*(R[n]^\sim) \cong (S[n])^\sim|_U.$$

Nun gilt

$$S[n] \cong R[n]\otimes_R S$$

Es reicht also, die allgemeinere Aussage

$$f^*(\tilde{M}) \cong (M\otimes_R S)^\sim|_U$$

zu beweisen. Dies ist Gegenstand der nachfolgenden Aussage.
QED.

A0.5.5 Direkte und inverse Bilder von Modulgarben auf projektiven Spektren

(i) Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus geometrischer Räume. Dann ist der Übergang zum inversen Bild,

$$f^*: \mathcal{O}_Y\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod}, F \mapsto f^*F,$$

ein rechtsexakter Funktor, der mit mit direkten Limites und Tensorprodukten kommutiert.:

• Für jede kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}_Y$-Moduln[152]

$$(0 \longrightarrow)\ F' \xrightarrow{\alpha} F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

ist

$$f^*F' \longrightarrow f^*F \longrightarrow f^*F'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln.

• Für jedes direkte System $(F_j)_{j\in J}$ von $\mathcal{O}_Y$-Moduln gilt

$$f^*(\varinjlim_{j\in J} F_j) = \varinjlim_{j\in J} f^*(F_j)$$

• Für je zwei $\mathcal{O}_Y$-Moduln F und G gilt

$$f^*(F\otimes_{\mathcal{O}_Y} G) = f^*F\otimes_{\mathcal{O}_X} f^*G.$$

(ii) Seien $f: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus geometrischer Räume,

$$E$$

ein lokal freier $\mathcal{O}_Y$-Modul vom Rang r, $Y = \bigcup_{j\in J} V_j$ eine offene Überdeckung von Y mit der Eigenschaft, daß $E|_{V_j}$ frei ist für jedes $j\in J$, und

$$\{g_{ij}\}_{i,j\in J}$$

die zugehörige Familie von Übergangsfunktionen.[153] Dann ist

$$f^*E$$

der lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modul mit den Übergangsfunktionen

$$\{f^\#(g_{ij})\}_{i,j\in J}$$

zur Überdeckung $X = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_j)$.

(iii) Sei $f: U \longrightarrow X$ der Schema-Morphismus zum Homomorphismus $\varphi: R \longrightarrow S$ graduierter Ringe wie in A0.5.5 (iii). Dann gilt für jeden graduierten R-Modul M,

---

[152] Die 0 ganz links kann man weglassen. Ist α kein Monomorphismus, so hat man exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\beta) \longrightarrow F' \xrightarrow{\beta} \mathrm{Im}(\alpha) \longrightarrow 0$$

und das Anwenden von f* liefert exakte Sequenzen

$$f^*(\mathrm{Im}(\alpha)) \longrightarrow f^*(F) \longrightarrow f^*(F'') \longrightarrow 0$$

$$f^*(\mathrm{Ker}(\beta)) \longrightarrow f^*(F') \longrightarrow f^*(\mathrm{Im}(\alpha)) \longrightarrow 0,$$

die sich zusammensetzen zu einer exakten Sequenz

$$f^*F' \longrightarrow f^*F \longrightarrow f^*F'' \longrightarrow 0$$

[153] g_{ij} ist eine $r\times r$-Matrix von Schnitten von $\mathcal{O}_Y$ über $U_i \cap U_j$ deren Determinante $\det(g_{ij})$ ein Schnitt von $\mathcal{O}_Y^*$ ist.

$$f^*(\widetilde{M}) \cong (M\otimes_R S)^{\sim}|_U$$

(iv) Sei f: U $\longrightarrow$ X der Schema-Morphismus zum Homomorphismus φ: R $\longrightarrow$ S graduierter Ringe wie in A0.5.4 (iii). Dann gilt für jeden graduierten S-Modul N,

$$f_*(\widetilde{N}|_U) \cong (N')^{\sim}$$

Dabei sei N' die Menge N mit der durch φ definierte R-Modul-Struktur von N.

Beweis. Zu (i). Nach Definition gilt

$$f^*F = f^{-1}F\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_X$$

Da das Tensorprodukt rechtsexakt ist und mit direkten Limites kommutiert, reicht es zum Beweis der ersten beiden Aussagen zu zeigen, das topologische inverse Bild

$$(f^{-1}F)(U) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V} F(V)$$

besitzt ebenfalls diese Eigenschaften. Letzteres ist der Fall, weil direkte Limites mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen exakt sind[154] und (in jeder Kategorie) mit direkten Limites kommutieren.
Schließlich gilt

$$f^*(F\otimes_{\mathcal{O}_Y} G) = f^{-1}(F\otimes_{\mathcal{O}_Y} G)\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_X$$

und da das Tensorprodukt mit direkten Limites kommutiert[155],

$$\begin{aligned} f^*(F\otimes_{\mathcal{O}_Y} G) &= f^{-1}(F)\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}(G)\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_X \\ &= f^{-1}(F)\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^*(G) \\ &= f^{-1}(F)\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(G) \qquad (f^*(G) \text{ ist ein } \mathcal{O}_X\text{-Modul}) \\ &= f^*(F)\otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(G) \end{aligned}$$

---

[154] Sei

$$0 \longrightarrow M'_\alpha \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow M''_\alpha \longrightarrow 0$$

ein direktes System von abelschen Gruppen mit dem direkten Limes

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Dann hat man für jedes α ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_\alpha & \xrightarrow{q_\alpha} & M_\alpha & \xrightarrow{p_\alpha} & M''_\alpha & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle f_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle f_\alpha} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{q} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Zum Beweis der Surjektivität von p beachte man, jedes $m''\in M''$ läßt sich für ein geeignetes α durch ein Element von M''_α repräsentieren. Dieses hat ein Urbild in M_α. Das Bild des letzteren in M ist das gesuchte Urbild von m''. Die Exaktheit an den anderen Stellen wird in ähnlicher Weise gezeigt.

[155] Man führe alle Rechnungen in der Prägarben-Kategorie durch und gehe dann zu den assoziierten Garben über.

<u>Zu (ii)</u>. Wir wählen Isomorphismen

$$\varphi_i: E|_{V_i} \longrightarrow \mathcal{O}^r_{V_i}$$

derart, daß die zugehörigen Isomorphismen

(1) $$\mathcal{O}^r_{V_i \cap V_j} \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} E|_{V_i \cap V_j} \xrightarrow{\varphi_j} \mathcal{O}^r_{V_i \cap V_j},\ v \mapsto g_{ij} \cdot v,$$

durch die Übergangsfunktionen g_{ij} gegeben sind. Diese Isomorphismen induzieren Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} f^*(\varphi_i): f^*(E|_{V_i}) & \longrightarrow & f^*(\mathcal{O}^r_{V_i}) \\ \| & & \|^{156} \\ f^*E\,|_{f^{-1}(V_i)} & & (f^{-1}(\mathcal{O}_{V_i})\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{V_i}} \mathcal{O}_{f^{-1}(V_i)})^r = \mathcal{O}^r_{f^{-1}(V_i)} \end{array}$$

Die Zusammensetzungen

(2) $$\mathcal{O}^r_{f^{-1}(V_i)\cap f^{-1}(V_j)} \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} E|_{f^{-1}(V_i\cap V_j)} \xrightarrow{\varphi_j} \mathcal{O}^r_{f^{-1}(V_i)\cap f^{-1}(V_j)},\ v \mapsto f^\#(g_{ij}) \cdot v,$$

sind gegeben durch die Matrizen $f^\#(g_{ij})$, die man aus den Matrizen g_{ij} erhält, indem man den Ring-Homomorphismus $f^\#: \mathcal{O}_Y(V_i \cap V_j) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V_i \cap V_j))$ auf deren Einträge anwendet.[157] Mit anderen Worten, die $f^\#(g_{ij})$ sind gerade die Übergangsfunktionen der lokal freien Garbe f*E bezüglich der Überdeckung von X durch die $f^{-1}(V_i)$.

<u>Zu (iii)</u>. Im Fall M = R ist

$$\widetilde{R} = \mathcal{O}_X$$

$$f^*\widetilde{R} = f^*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_U = \mathcal{O}_Y|_U = \widetilde{S}|_U = (R\otimes_R S)^{\sim}|_U$$

In diesem Fall ist die Behauptung also richtig.

Im Fall M = R[1] ist für jedes $f \in R_1$ die Multiplikation mit f ein Isomorphismus

$$R_{(f)} \longrightarrow (R[n])_{(f)}$$

(vgl. den Beweis von Bemerkung A0.5.5 (i)). Die Übergangsfunktionen von $\mathcal{O}_X(1)$ bezüglich der Überdeckung durch die offenen Hauptmengen

$$U_f := D_+(f) \text{ mit } f \in R_1$$

sind also durch die Multiplikationen

---

156 Direkte Summen sind direkte Limites, kommutieren also nach (i) mit f*.

157 Die Beschreibung der Zusammensetzung (1) durcb die g_{ij} bedeutet, daß ein gewisses Dreieck kommutativ ist. Durch Anwenden des Funktors f* auf dieses Dreieck erhalten wir ein kommutatives Dreieck, aus dem sich die Beschreibung der Zusammensetzung (2) durch die $f^*(g_{ij})$ ergibt.

$$\mathcal{O}_{U_f}|_{U_f\cap U_g} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_g}|_{U_f\cap U_g}\ , s \mapsto (f/g)\bullet s\ ,$$

gegeben. Die der Garbe $f^*(R[1]^\sim)$ also durch die Übergangsfunktionen $\varphi(f)/\varphi(g)$. Das sind aber Übergangsfunktionen von $\mathcal{O}_Y(1)\,|_U$, d.h. es ist

$$f^*(R[1]^\sim) = \mathcal{O}_Y(1)\,|_U = (S[1])^\sim|_U = (R[1]\otimes_R S)^\sim|_U$$

Damit ist die Behauptung in den Fällen M = R und M = R[1] bewiesen. Weil das inverse Bild mit Tensorprodukten kommutiert, gilt die Behauptung auch für M = R[n].[158]

Weil das inverse Bild mit direkten Summen kommutiert, gilt die Behauptung auch für den Fall, daß M eine direkte Summe von Moduln der Gestalt R[n] ist. Sei jetzt M ein beliebiger R-Modul. Wir fixieren ein Erzeugendensystem von M aus homogenen Elementen (endlichen Grades) und finden so einen R-Modul F, der eine direkte Summe von Moduln der Gestalt R[n] ist, und eine Surjektion

$$F \twoheadrightarrow M,$$

von graduierten R-Moduln (welche den Grad homogener Elemente erhält). Der Kern dieser Surjektion ist ein graduierter R-Modul. Zu diesem finden wir in analoger Weise einen R-Modul F' der direkte Summe von Moduln der Gestalt R[n] ist und ebenfalls eine Surjektion wie oben. Insgesamt finden wir eine exakte Sequenz

$$F' \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

von graduierten R-Moduln und Modul-Homomorphismen, die die Grade homogener Elemente erhalten. Die zugehörige Garben-Sequenz

$$\widetilde{F}' \longrightarrow \widetilde{F} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow 0$$

ist ebenfalls exakt. Weil f* rechtsexakt ist, erhalten wir eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_U$-Moduln

$$f^*\widetilde{F}' \longrightarrow f^*\widetilde{F} \longrightarrow f^*\widetilde{M} \longrightarrow 0$$

Nach Konstruktion gilt

$$f^*\widetilde{F}' = (F'\otimes_R S)^\sim|_U$$

und

$$f^*\widetilde{F}' = (F'\otimes_R S)^\sim|_U$$

d.h. wir erhalten eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_U$-Moduln

$$(F'\otimes_R S)^\sim|_U \longrightarrow (F'\otimes_R S)^\sim|_U \longrightarrow f^*\widetilde{M} \longrightarrow 0 \qquad (4)$$

Weiter erhalten wir aus (3) eine exakte Sequenz von S-Moduln

$$F'\otimes_R S \longrightarrow F\otimes_R S \longrightarrow M\otimes_R S \longrightarrow 0$$

also exakte Sequenzen

$$(F'\otimes_R S)^\sim \longrightarrow (F\otimes_R S)^\sim \longrightarrow (M\otimes_R S)^\sim \longrightarrow 0$$

und

$$(F'\otimes_R S)^\sim|_U \longrightarrow (F\otimes_R S)^\sim|_U \longrightarrow (M\otimes_R S)^\sim|_U \longrightarrow 0$$

---

[158] Zunächst nur für $n \ge 0$. Weil durch Anwenden von f* auf einen Isomorphismus $L\otimes L' \cong \mathcal{O}_X$ ein Isomorphismus $f^*L\otimes f^*L' \cong \mathcal{O}_U$ damit auch für negative n.

Vergleich der letzten exakten Sequenz mit (4) liefert

$$f^*\widetilde{M} = (M\otimes_R S)^{\sim}|_U$$

d.h. die Behauptung gilt für beliebige graduierte R-Moduln M.
Zu (iv). Wie im affinen Fall (vgl. Bemerkung A0.5.2 (iii)) konstruiert man für jede offene Hauptmenge $D_+(f)$ von X = Proj R einen Isomorphismus

$$\widetilde{N}'|_{D_+(f)} \longrightarrow f_*(\widetilde{N}|_U)|_{D_+(f)}$$

und anschließend zeigt man, diese Isomorphismus verheften sich zu einem global definierten Isomorphismus.
QED.

A0.5.6 Der graduierte Modul zu einer Modulgarbe

Seien R ein graduierter Ring,

$$X := \operatorname{Proj} R$$

und

$$F \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}$$

ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Der zu F gehörige graduierte R-Modul ist definiert als die direkte Summe

$$\Gamma_*(F) := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, F(n)).$$

Die graduierte R-Modul-Struktur von $\Gamma_*(F)$ ist wie folgt definiert.

Jedes $s\in R_d$ definiert einen Schnitt

$$s = (\tfrac{s}{1})_{p\in D_+(1)} \in \Gamma(D_+(1), R[d]^{\sim}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$$

über der offenen Menge $D_+(1)$ = X. Für jedes $t\in\Gamma(X, F(n))$ definieren wir das Produkt

$$s\bullet t \in \Gamma(X, F(d+n))$$

als das Bild des Tensorprodukts[159]

$$s\otimes t \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)\otimes F(n))$$

beim Isomorphismus $\mathcal{O}_X(d)\otimes F(n) \cong F(d+n)$.

Bemerkungen

(i) Seien A ein kommutativer Ring mit 1, R := $A[X_0,...,X_n]$, $n \ge 1$, und

$$X := \operatorname{Proj} S.$$

Mit anderen Worten, X ist gerade der n-dimensionale projektive Raum über A. Dann ist die natürliche Abbildung

---

[159] Genauer: sei

$$\mathcal{O}_X(d)\otimes' F(n) \longrightarrow \mathcal{O}_X(d)\otimes F(n)$$

die natürliche Abbildung des Tensorprodukts $\mathcal{O}_X(d)\otimes' F(n)$ von $\mathcal{O}_X(d)$ und F(n) in der Prägarben-Kategorie in die assoziierte Garbe. Durch Übergang zu den globalen Schnitten erhält man eine Abbildung

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))\otimes\Gamma(X, {}'F(n)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)\otimes F(n)).$$

Das Bild von $s\otimes t$ bei dieser Abbildung wird ebenfalls mit $s\otimes t$ bezeichnet.

$$R \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X),\ r \longrightarrow (\frac{r}{1})_{p\in X} \text{ (r homogen),}$$

ein Isomorphismus. Insbesondere läßt sich jedes homogene Polynom m-ten Grades über A in den Unbestimmten $X_0,\dots,X_n$ mit einem globalen Schnitt des Vektorraumbündels $\mathcal{O}_X(n)$ identifizieren.[160]

(ii) Seien R ein graduierter Ring, der endlich erzeugt ist im Grade 1, d.h.

$$R = R_0[R_1]\ ,\ R_1 \text{ endlich erzeugter } R_0\text{-Modul.}$$

Weiter sei

$$X := \mathrm{Proj}\ S.$$

Dann besteht für jede quas-kohärente Garbe F auf X ein natürlicher Isomorphismus[161]

$$F \xrightarrow{\cong} \Gamma_*(F)^{\sim}.$$

(iii) Die Abbildung von (i) ist für beliebige graduierte Ring R im allgemeinen kein Isomorphismus. Noch weniger gilt dies für die allgemeinere natürliche Abbildung

$$M \longrightarrow \Gamma_*(\widetilde{M})$$

zu einem graduierten R-Modul M. Unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen kann man jedoch zeigen, daß es eine natürliche Zahl d_0 gibt mit der Eigeschaft, daß die Abbildung in jedem Grad $d \ge d_0$ einen Isomorphismus

$$M_d \longrightarrow \Gamma_*(\widetilde{M})_d$$

induziert. Die zusätzlichen Voraussetzungen sind die folgenden.[162]

1. $R = R_0[R_1]$.
2. R_1 ist ein endlich erzeugter R_0-Modul.
3. $R_0 = k[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ ist eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper.
4. M ist als R-Modul endlich erzeugt.

(iv) Seien R ein graduierter Ring, M ein graduierter R-Modul und d eine natürliche Zahl. Wir setzen

$$R^{(d)} := \oplus_{n=0}^{\infty} R_{dn}$$

und

---

[160] vgl. Hartshorne Proposition II.5.13.

[161] Genauer, ist $F = \widetilde{M}$, so hat man eine natürliche Abbildung

$$M_0 \longrightarrow \Gamma(X, \widetilde{M}) = \Gamma(X, F),\ m \mapsto (\frac{m}{1})_{p\in X}.$$

Indem man M durch M[n] ersetzt erhält man analog für jedes n eine Abbildung

$$M_n \longrightarrow \Gamma(X, F(n)).$$

Wir gehen zur direkten Summe über und erhalten einen Homomorphismus von R-Moduln

$$M \longrightarrow \Gamma_*(F)$$

und damit einen Garben-Morphismus. Dieser ist ein Isomorphismus. Zur Konstruktion der Umkehrabbildung, siehe Hartshorne, Prop. II.5.1.5.

$$\widetilde{M} \longrightarrow \Gamma_*(F)^{\sim}.$$

[162] vgl. Hartshorne Ex. II.5.9.

$$M^{(d)} := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_{dn}.$$

Dann hat $R^{(d)}$ in natürlicher Weise sie Struktur eines graduierten Rings mit

$$R^{(d)}_n = R_{dn}$$

und $M^{(d)}$ die eines graduierten $R^{(d)}$-Moduls mit

$$M^{(d)}_n = M_{dn}.$$

Auf Grund der Definition des projektiven Spektrums gilt[163]

$$\mathrm{Proj}\ R^{(d)} = \mathrm{Proj}\ R$$

und auf Grund der Definition des Moduls M gilt

$$(M^{(d)})^{\sim} = \widetilde{M}.$$

Die Aussage von (iii) impliziert, unter den zusätzlichen Bedingungen[164] 2-4 gibt es eine natürlichen Zahl d derart, daß die natürliche Abbildung

$$M^{(d)} \longrightarrow \Gamma_*((M^{(d)})^{\sim})$$

ein Isomorphismus ist.

(v) <u>Die Veronese-Abbildung</u>. Seien k ein Körper und

$$\mu_0,\dots,\mu_N\ ,\ N = \binom{d+n}{n} - 1,$$

die Potenzprodukte des Grades d in den Unbestimmten $X_0,\dots,X_n$ (in lexikographischer Reihenfolge). Dann ist

$$\mathbb{P}^n_k \longrightarrow \mathbb{P}^N_k\ ,\ p \mapsto [\mu_0(p),\dots,\mu_N(p)],$$

eine reguläre Abbildung. Es ist sogar eine abgeschlossene Einbettung, d.h. sie identifiziert den $\mathbb{P}^n_k$ mit einer abgeschlossenen Teilvarietät des $\mathbb{P}^N_k$, der <u>Veronese-Varietät</u>, und heißt m-<u>Veronese-Einbettung</u>. Der zugehörige Morphismus von Schemata ist gerade der Morphismus zum Homomorphismus graduierter k-Algebren

$$k[Y_0,\dots,Y_N] \longrightarrow k[X_0,\dots,X_n]^{(d)}\ ,\ Y_i \mapsto \mu_i(X).$$

Man beachte, letzterer ist surjektiv, und definiert deshalb eine abgeschlossene Einbettung.

Analog hat man für jeden kommutativen Ring R_0 1 einen (surjektiven) Homomorphismus graduierter Ringe

(1) $$R_0[Y_0,\dots,Y_N] \xrightarrow{v} R_0[X_0,\dots,X_n]^{(d)}\ ,\ Y_i \mapsto \mu_i(X).$$

Der zugehörige Morphismus der projektiven Spektren

$$\mathbb{P}^n_{R_0} \longrightarrow \mathbb{P}^N_{R_0}$$

heißt ebenfalls m-Veronese-Einbettung (über R_0). Es ist gerade das Faser-Produkt der Veronese-Einbettung über $\mathbb{Z}$ mit dem identischen Morphismus von Spec R_0.

---

[163] Das Schema Proj R wird von den offenen Hauptmengen $D_+(f)$ mit deg f = d-Vielfaches überdeckt und der Ringe $R_{(f)}$ ändert sich nicht, wenn man R durch $R^{(d)}$ ersetzt: der Grad von Zähler und Nenner wird durch dieselbe Zahl d geteilt.

[164] Wegen Bedingung 2 ist R eine endlich erzeugte R_0-Algebra, d.h. $R^{(d)}$ wird für d groß genug im Grade 1 erzeugt. Bedingung 1 läßt also durch eine geeignete Wahl von d stets erfüllen

(vi) Ist X = Proj R ein projektives Spektrum zu einem graduierten Ring R, der im Grad 1 endlich erzeugt wird,

$$R = R_0[R_1]\ ,\ R_1 \text{ endlich erzeugter } R_0\text{-Modul.}$$

So kann man R als Faktorring eines Polynom-Rings schreiben,

$$R = R_0[X_0,...,X_n]/J$$

nach einem homogenen Ideal J. Die zugehörige Surjektion

(2) $$R_0[X_0,...,X_n] \twoheadrightarrow R$$

definiert eine abgeschlossene Einbettung

$$X = \operatorname{Proj} R \hookrightarrow \operatorname{Proj} R_0[X_0,...,X_n] = \mathbb{P}^n_{R_0}\ ,$$

identifiziert also X mit einem abgeschlossenen Teilschema des projektiven Raums (über R_0).

Schränken wir jetzt die Surjektion (2) auf die Teilalgebra ein, die durch die Potenzprodukte des Grades d erzeugt wird und setzen diese zusammen mit der Surjektion (1). Der zugehörige Schema-Morphismus

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Proj} R^{(d)} & \hookrightarrow & \operatorname{Proj} R_0[X_0,...,X_n]^{(d)} & \xrightarrow{v} & \operatorname{Proj} R_0[Y_0,...,Y_N] \\ \| & & \| & & \| \\ \operatorname{Proj} R & & \mathbb{P}^n_{R_0} & & \mathbb{P}^N_{R_0} \end{array}$$

beschreibt gerade das gegebene Schema als Teilschema von $\mathbb{P}^N_{R_0}$, genauer, dessen Bild bei der Veronese-Einbettung. Der Ring $R^{(d)}$ wird auf diese Weise zum projektiven Koordinaten-Ring des Schemas X bezüglich der neuen Einbettung.

Die Aussage von (iii) bedeutet also, unter den dort erwähnten Zusatzbedingungen ist die natürliche Abbildung

$$R \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$$

ein Isomorphismus, wenn man die Einbettung des Schemas X in den projektiven Raum mit Hilfe der Veronese-Abbildung geeignet abändert.

A0.5.7 Die Twist-Garbe eines projektiven Morphismus

Seien S ein Schema, R eine Garbe von graduierten $\mathcal{O}_S$-Algebren und

$$\varphi : \operatorname{Proj} R \longrightarrow S$$

der zugehörige projektive Morphismus (Beispiel A0.2.5 (vii)). Für jede affine offene Menge

$$V = \operatorname{Spec} B \subseteq S$$

ist dann die Einschränkung

$$\varphi^{-1}(V) \longrightarrow V$$

von φ auf das vollständige Urbild von V gerade der Struktur-Morphismus

$$\operatorname{Proj} R(V) \longrightarrow \operatorname{Spec} B$$

des projektiven Spektrums der graduierten B-Algebra R(V). Für je zwei affine offene Teilmengen

$$V', V'' \subseteq S$$

stimmen die Twistgarben

$$\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(V')}(1) \text{ und } \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(V'')}(1)$$

Auf dem Durchschnitt $\varphi^{-1}(V') \cap \varphi^{-1}(V'')$ überein. Durchläuft V die affinen offenen Teilmengen von S, so verheften sich die zugehörigen Twistgarben $\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(V)}(1)$ zu einer Modul-Garbe

(1) $$\mathcal{O}_{\text{Proj } R}(1)$$

auf Proj R, welche <u>Twistgarbe</u> des projektiven Morphismus φ heißt oder auch <u>Twistgarbe</u> von Proj R (über S).

Bemerkungen

(i) Die Twistgarbe von Proj R ist dadurch definiert, daß ihre Einschränkungen auf die projektiven Spektren von R(V) für jede affine offene Teilmenge V gerade die Twistgarbe von Proj R(V) ist.

(ii) Ist R eine Garbe von graduierten $\mathcal{O}_S$-Algebren, die lokal im Grad 1 erzeugt wird, so ist die zugehörige Twist-Garbe von Proj R eine umkehrbare Garbe.

(iii) Ist

$$f: R \longrightarrow R'$$

ein Homomorphismus von graduierten $\mathcal{O}_S$-Algebren, die lokal im Grad 1 erzeugt werden, und erhält dieser Homomorphismus die Grade, so verheften sich die Schema-Morphismen zu den Homomorphismen graduierter Ringe (vgl. A0.5.4(iii))

$$R(V) \longrightarrow R'(V),\ V = \text{Spec } B,$$

zu einem Schema-Morphismus

$$g: U \longrightarrow \text{Proj } R$$

mit einer offenen Mengen $U \subseteq$ Proj R. Für die Twist-Garben dieser Schematat gilt

$$g^*(\mathcal{O}_{\text{Proj } R}(1)) = \mathcal{O}_{\text{Proj } R'}(1)|_U$$

(iv) Sei

$$R =^{165} \mathcal{O}_S[X_0,\dots,X_n]$$

die Polynom-Algebra über der Strukturgarbe des Schemas S. Dann gilt für jede affine offene Teilmenge V = Spec B von S,

$$\text{Proj } R(V) = \text{Proj } B[X_0,\dots,X_n] = \mathbb{P}^n_B \cong \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \text{Spec } B = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} V.$$

Durchläuft V die affinen offenen Teilmengen von S, so verheften sich diese Isomorphismen zu einem natürlichen Isomorphismus

$$\text{Proj } R \cong \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} S =: \mathbb{P}^n_S$$

Die Aussage von (iii) bedeutet in dieser Situation, daß die Twistgarbe von $\mathbb{P}^n_S$ gerade das inverse Bild der Twistgarbe von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ bei der Projektion

$$\mathbb{P}^n_S = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} S \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$$

auf den ersten Faktor ist.

- Seien S ein Schema und E eine lokal freie Garbe des Rangs r auf S. Bezeichne

$$T(E) := \mathcal{O}_S \otimes E \otimes E^{\otimes 2} \otimes \dots = \oplus_{n=1}^{\infty} E^{\otimes n}$$

---

[165] R ist eine direkte Summe von Exemplaren der Struikturgarbe $\mathcal{O}_S$ mit einem Multiplikationsgesetz, daß durch die Multiplikation der entsprechenden Polynome gegeben ist.

die Tensor-Algebra über $\mathcal{O}_S$ und

$$S(E) := T(E)/(x \otimes x \text{ , } x \text{ homogen})$$

die symmetrische Algebra. Dann ist S(E) eine Garbe von graduierten (kommutativen) Ringen, welche im Grad 1 erzeugt wird und

$$\mathbb{P}(E) := \mathrm{Proj}\ S(E)$$

ein wohldefiniertes S-Schema. Für jede affine offene Menge V = Spec B von S, über welcher der $\mathcal{O}_S$-Modul E frei ist,

$$E|_V \cong \mathcal{O}_V^r$$

gilt

$$S(E)|_V = S(E|_V) = S(\mathcal{O}_V^r) \cong \mathcal{O}_V[X_0,...,X_{r-1}]$$

also

$$\mathrm{Proj}\ S(E)|_V \cong \mathbb{P}_V^r$$

Das projektive Spektrum Proj S(E) entsteht somit durch Verheften der projektiven Räume $\mathbb{P}_V^r$ mit Hilfe der Übergangsfunktionen[166] des des Vektorraumbündels E. Die Fasern des Struktur-Morphismus

$$\mathbb{P}(E) = \mathrm{Proj}\ S(E) \longrightarrow S$$

sind (r-1)-dimensionale projektive Räume, die man aus den Fasern des Vektorraumbündels E durch Übergang zum zugehörigen projektiven Raum erhält. Das S-Schema Proj S(E) heißt Projektivierung von E.

A0.5.8 Sehr ample Garben

Sei f: X $\longrightarrow$ S ein S-Schema. Eine umkehrbare Garbe $\mathcal{L}$ au X heißt sehr ample über S, wenn es eine Immersion

$$i: X \longrightarrow \mathbb{P}_S^r$$

gibt mit $i^*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{L}$. Unter einer Immersion verstehen wir dabei einen Morphismus, der einen Isomorphismus von X mit einem lokal abgeschlossenen Teilschema induziert, d.h. mit einem offenen Teilschema eines abgeschlossenen Teilschemas von $\mathbb{P}_Y^r$. Diese Definition des Begriffs der amplen Garbe weicht ein wenig ab von der durch Grothendieck gegebenen Definition (vgl. EGA II, 4.4.2).[167]

Bemerkungen

(i) Die Einbettung i läßt sich (bis auf Isomorphie) aus den Schnitten der Garbe $\mathcal{L}$ rekonstruieren. Um das einzusehen, beschränken wir uns auf den Fall, daß

$$S = \mathrm{Spec}\ A$$

ein affines Schema ist.[168] Seien

---

[166] Genauer, die Übergangsfunktionen von Proj S(E) erhält man, indem die Übergangsfunktionen von E, welche Schnitte der Garbe GL(r, $\mathcal{O}_S$) sind, durch die entsprechenden Schnitte der projektiven Gruppe PGL(r, $\mathcal{O}_S$) ersetzt. Erstere stehen für Isomorphismen der Fasern von E, letztere für Isomorphismen der zugehörigen projektiven Räume (von deren Projektivierungen).

[167] Genauer: anstelle der Einbettung in ein Schema der Gestalt $\mathbb{P}_S^r$ verwendet Grothendieck ein Schema der Gestalt $\mathbb{P}(E)$ mit einer lokal freien Garbe E auf S.

[168] Im allgemeinen Fall kann man S durch affine offene Schemata V = Spec A $\subseteq$ S überdecken und die Einschränkungen $f^{-1}(V) \longrightarrow \mathbb{P}_A^r$ von i zu Morphismen über diesen affinen Schemata zu einem auf ganz X definierten Morphismus verheften

$$j{:}Y := \mathrm{Proj}\, A[X_0,...,X_r]/J \hookrightarrow \mathrm{Proj}\, A[Y_0,...,Y_r] = \mathbb{P}^r_S = \mathbb{P}$$

ein abgeschlossenes Teilschema,

$$W \hookrightarrow Y$$

eine offene Teilmenge und

$$i{:}\ X \xrightarrow{\cong} W$$

ein Isomorphismus. Die Unbestimmten Y_i betrachten wir als globale Schnitte der Twist-Garbe,

$$Y_i \in \Gamma(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)),$$

Die Multiplikation mit diesen Schnitten definiert Garben-Morphismen

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{Y_i} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$$

und damit Garben-Morphismen

$$\mathcal{O}_Y = j^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{j^*(Y_i)} j^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) = \mathcal{O}_Y(1)$$

und damit globale Schnitte des Geraden-Bündels

$$y_i = j^*(Y_i) \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(1)).$$

Es sind gerade die Einschränkungen der Schnitte Y_i auf Y. Weil $\mathcal{O}_Y(1)$ lokal isomorph ist zur Strukturgarbe, können wir diese Schnitte lokal als reguläre Funktionen auf Y betrachten, die nur bis auf einen von Null verschieden Faktor bestimmt sind. Die Verhältnisse zwischen den y_i sind aber eindeutig bestimmt, d.h. die y_i definieren einen Morphismus[169]

(1) $$y{:}\ Y \longrightarrow \mathbb{P}^r_S\ ,\ p \mapsto [y_0(p), ... , y_r(p)].$$

Als Einschränkungen der Schnitte Y_i auf das Teilschema Y,

$$y_i = Y_i\,|_Y$$

kommen die Schnitte y_i von Elementen des Koordinatenrings von Y: es sind gerade die Restklassen der Y_i in diesem Koordinatenring,

$$y_i = Y_i \bmod J$$

oder genauer, die Bilder dieser Restklassen bei der natürlichen Abbildung

$$A[Y_0,...,Y_r]/J \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_Y).$$

Die Abbildung (1) ist gerade die natürliche Einbettung des Teilschemas Y in den projektiven Raum $\mathbb{P}^r_S$. Wir schränken jetzt die Abbildung (1) auf das offene Teilschema W ein und setzen die Einschränkung mit dem Isomorphismus i zusammen.
Seien entsprechend

$$w_i := y_i|_W \in \Gamma(W, \mathcal{O}_Y(1))$$

die Einschränkungen der (projektiven) Koordinaten-Funktionen auf W und

$$x_i := i^*(w_i|_W) \in \Gamma(X, \mathcal{L})$$

---

[169] Dies ist eine fasertreue Abbbildung von S-Schemata. Als Abbildung zwischen den Fasern über einem Punkt s∈S ist sie durch die angegebene Abbildungsvorschrift definiert.

die Verpflänzungen entlang des Isomorphimus i. Die Zusammensetzung von (1) mit dem Isomorphismus i, d.h. die gegebene Immersion i hat dann die x_i als Koordinatenfunktionen,

$$i: X \hookrightarrow \mathbb{P}^r_S,\ p \mapsto [x_1(p), \dots , x_r(p)]$$

Sei

$$V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$$

der von den x_i erzeugte $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Wählt man ein anderes Erzeugenden-System von V, so unterscheidet die zugehörige Abbildung von i nur durch eine projektive Transformation des $\mathbb{P}^r_S$. Wählt man ein System von Schnitten, das ein Erzeugendensystem von V enthält, so erhält man einen Morphismus

(2) $$X \longrightarrow \mathbb{P}^s_S \text{ mit } s \ge r$$

und mit der Eigenschaft, daß die Zusammensetzung mit einer Projektion auf den $\mathbb{P}^r_S$ gerade die Immersion i ist. Dann ist aber auch (2) ein Immersion und die Einschränkung der Projektion auf das Bild von (2) ein Isomorphismus. Mit anderen Worten, (2) ist bis aiuf Isomorphie gerade die Immersion i. Wir bekommen also stets die Immersion i, wenn der von den Schnitten erzeugte Unterraum von $\Gamma(X, \mathcal{L})$ groß genug ist.

Dasselbe Argument zeigt, daß jedes System von Schnitten, welches eine Immersion definiert, bis auf Isomorphie die Immersion i liefert.

(ii) Sei S ein noethersches Schema. Ein S-Schema X ist genau dann projektiv (im engeren Sinne) über S, d.h. ein abgeschlossenes Teilschema

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}^s_S,$$

wenn S eigentlich ist über S und wenn es eine sehr ample Garbe auf X über S gibt.

A0.5.9 Durch globale Schnitt erzeugte Garben

Seien X ein Schema und F eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Man sagt, F wird <u>von globalen Schnitten erzeugt</u>, wenn es eine Familie

$$(s_i)_{i\in I}$$

von globalen Schnitten

$$s_i \in \Gamma(X, F)$$

gibt mit der Eigenschaft, daß für jeden Punkt $x\in X$ der Halm F_x von den Keimen der s_i erzeugt wird,

$$F_x = \sum_{i\in I} \mathcal{O}_{X,x}\cdot(s_i|_x).$$

Beispiel

Jede quasi-kohärente Garbe $F = \widetilde{M}$ auf einem affinen Schema X = Spec A wird von globalen Schnitten erzeugt: als Familie von globalen Schnitten wähle man ein Erzeugendensystem des A-Moduls M.

Beispiel

Seien X = Proj R mit einem graduierten Ring R, welcher als R_0-Algebra im Grad 1 erzeugt wird. Dann wird die Twist-Garbe $\mathcal{O}_{\text{Proj } R}(1)$ von globalen Schnitten erzeugt: als

Familie von globalen Schnitten verwende man ein beliebiges Erzeugendensystem des R_0 -Moduls R_1.

A0.5.10 Der Satz von Serre

Seien X ein projektives Schema über einem noetherschen Ring A,

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}^r_A \text{ (abgeschlossene Einbettung).}$$

Für jeden kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul F gibt es dann eine ganze Zahl n_0 mit der Eigenschaft, daß

$$F(n) = F\otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$$

von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt wird für jedes $n \ge n_0$.

Beweis. siehe Hartshorne Theorem II.5.16.2.
QED.

A0.5.11 Direkte Bilder von kohärenten Garben (Spezialfall des Proper-Mapping-Theorems)

Sei f: $X \longrightarrow Y$ ein projektiver Morphismus von Schemata endlichen Typs über einem Körper k und F eine kohärente Garbe auf X. Dann ist f_*F eine kohärente Garbe auf Y.

Beweis. Hartshorne, Corollary II.5.20.
QED.

A0.6 Weil-Divisoren

A0.6.1 Die Dimension eines Schemas

Sei X ein Schema. Ein Primzyklus von X ist eine abgeschlossenes integrales Teilschema

$$Y \hookrightarrow X.$$

(d.h. die Abschließung eines Punktes von X). Man sagt, X hat im Punkt $x\in X$ die (lokale) Dimension n und schreibt

$$\dim_x X = n,$$

wenn es eine echt aufsteigende Kette von Primzyklen

$$Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_n$$

von X der Länge n gibt, welche mit $Y_0 = \overline{\{x\}}$ beginnt, und keine längere. Falls es beliebig lange solche Ketten gilt, so sagt man X hat in x unendliche Dimension und schreibt

$$\dim_x X = \infty.$$

Die Dimension von X ist definiert als das Supremun über alle diese lokalen Dimensionen,

$$\dim X := \sup \{\dim_x X \mid x\in X\}.$$

Seien X ein Schema und $Y \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Teilschema. Dann heißt die Differenz

$$\operatorname{codim}_X Y = \dim X - \dim Y$$

Kodimension von Y in X.
Die Dimension eines kommutativen Rings R mit 1 ist definiert als die Dimension von Spec R,

$$\dim R := \dim \operatorname{Spec} R.$$

Satz von der Dimension der Faser

Sei f: $X \longrightarrow Y$ ein dominanter Morphismus integraler Schemata endlichen Typs über einem Körper. Dann gelten die folgende Aussagen.

(i) Für jeden Punkt $y\in f(X)$ hat jede irreduzible Komponente von $X_y := f^{-1}(y)$ eine Dimension $\ge \dim X - \dim Y$.

(ii) Es gibt eine dichte offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit der Eigenschaft, daß für jeden Punkt $y\in f(U)$

$$\dim X_y = \dim X - \dim Y$$

gilt.

(iii) Sei $n\in\mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Dann ist die Menge E_n aller Punkte $x \in X$ mit

$$\dim_x f^{-1}(f(x)) \ge n$$

abgeschlossen in X.

Beweis. Hartshorne, Ex. II.3.22
QED.

A0.6.2 Definition

Ein Schema X heißt <u>regulär in der Kodimension 1</u> oder auch <u>nicht-singulär in der Kodimension 1</u>, wenn jeder lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ der Dimension 1 von X ein regulärer lokaler Ring ist.[170]

Beispiel
Die Vereinigung zweier Ebenen, die sich entlang einer Geraden schneiden, ist nicht regulär in der Kodimension 1: der lokale Ring zur Schnittgeraden ist von der Dimension 1, aber nicht regulär. Betrachten wir zum Beispiel die Vereinigung von yz- und xz-Ebene im Raum,

$$X := \operatorname{Spec} A,\ A := k[x,y,z]/(x\bullet y)$$

Die Schnittgerade der beiden Ebenen ist durch das Ideal

$$p := (x, y)A$$

gegeben. Der lokale Ring im Punkt $p\in X$ ist

$$\mathcal{O}_{X,p} := k[x,y,z]_{(x,y)}(x\bullet y) \cong k(z)[x,y]_{(x,y)}/(x\bullet y).$$

Einziges maximalen Ideal ist $(x,y)\mathcal{O}_{X,p}$. Für jedes Primideal P von $\mathcal{O}_{X,p}$ gilt

$$x\bullet y \in P \text{ also } x\in P \text{ oder } y\in P.$$

Damit sind

$$x\mathcal{O}_{X,p},\ y\mathcal{O}_{X,p},\ (x,y)\mathcal{O}_{X,p}$$

die einzigen Primideale, d.h. der Ring $\mathcal{O}_{X,p}$ ist 1-dimensional. Sein maximale Ideal ist kein Hauptideal, d.h. der Ring ist nicht regulär:

$$(x,y)\mathcal{O}_{X,p}/(x,y)^2\mathcal{O}_{X,p} \cong (x,y)/(x^2, x\bullet y, y^2 \text{ ist ein 2-dimensionaler k-Vektorraum.}$$

Beispiel
Eine Kurve ist genau dann regulär in der Kodimension 1, wenn sie regulär ist, was genau dann der Fall ist wenn sie normal ist, d.h. wenn ihre lokalen Ringe nullteilerfrei sind und ganz abgeschlossen in ihrem Quotientenkörper.

Beispiel
Normale Schemata sind regulär in der Kodimension 1.

---

[170] d.h. er ist nullteilerfrei und das maximale Ideal wird von einem einzigen Element erzeugt.

A0.6.3 Vereinbarung

Alle in diesem Abschnitt betrachteten Schemata seien noethersch, integral, separiert und regulär in der Kodimension 1.

A0.6.4 Weil-Divisioren

Sei X ein Schema (wie in A0.6.3). Ein Primdivisor von X ist ein Primzyklus

$$Y \hookrightarrow X$$

der Kodimension 1 von X. Ein Weil-Divisor von X ist ein Element der von den Primdivisoren von X erzeugten freien abelschen Gruppe

$$\mathrm{Div}(X).$$

Wir schreiben Weil-Divisoren in der Gestalt

$$D = \sum_i n_i Y_i$$

mit ganzen Zahlen n_i und Prim-Divisoren Y_i. Sind alle $n_i \ge 0$, so heißt der Divisor D effektiv.

Bemerkungen

(i) Seien X ein Schema (wie in A0.6.3) und Y ein Prim-Divisoer. Bezeichne $\eta \in Y$ den allgemeinen Punkt[171] von Y,

$$\overline{\{\eta\}} = Y.$$

Der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,\eta}$ ist dann (weil Y von der Kodimension 1 in X ist) ein eindimensionaler lokaler Ring. Weil X regulär ist in der Dimension , ist $\mathcal{O}_{X,\eta}$ ein regulärer Ring der Dimension 1, also ein diskreter Bewertungsring, dessen Quotientenkörper

$$K := Q(\mathcal{O}_{X,\eta})$$

gerade der rationale Funktionenkörper[172] von X ist. Wir bezeichnen mit

$$v_Y: K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$

die zugehörige diskrete Bewertung.

---

[171] η liegt in jeder nicht-leeren offenen Teilmenge von $U \subseteq Y$. Andernfalls läge η nämlich in der abgeschlossenen Teilmenge Y - U, d.h. die Abschließung

$$\overline{\{\eta\}} \subseteq Y - U$$

ist von Y verschieden. Ist U = Spec A, so ist A nullteilerfrei (weil das Schema Y integer sein soll) und η entspricht gerade dem Null-Ideal von A. Insbesondere ist die Abschließung von $\{\eta\}$ in U gleich U.

[172] K ist der gemeinsame Quotienten-Körper aller lokalen Ringe von X und aller $\mathcal{O}_X(U)$ für alle nicht-leeren offenen Teilmengen U von X. Ist nämlich $U' = \mathrm{Spec}\, A' \subseteq U$ eine nicht-leere affine offene Teilmenge und ξ der allgemeine Punkt von X, so induziert die natürlichen Abbildung

$$A' = \mathcal{O}_X(U') \longrightarrow \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{X,\xi} = Q(A')$$

einen Isomorphismus auf den Quotienten-Körpern. Man beachte, α ist injektiv: ein Schnitt s über U, der im allgemeinen Punkt von X Null ist, ist auf einer ganzen Umgebung von η Null, d.h. auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge von X. Weil X irreduzibel ist, liegen aber alle nicht-leeren offenen Teilmengen von X dicht in X.

(ii) Für $f \in K^*$ heißt $v_Y(f)$ die Nullstellen-Polstellen-Ordnung der Funktion f entlang der Teilvarietät Y oder auch einfach Ordnung. Zum Beispiel bedeutet

$$v_Y(f) = 0,$$

daß f in mindestens einem Punkt von Y regulär und ungleich Null ist. Ist $v_Y(f) = n$ positive, so sagt man, f hat entlang Y eine Nullstelle der Ordnung n. Ist $v_Y(f) = -n$ negativ, so sagt man f hat entlang Y eine Polstelle der Ordnung n.

(iii) Weil X separiert ist, ist Y durch die Bewertung eindeutig festgelegt. Zum Beweis beachten wir zunächst, daß durch v_Y der lokale Ring

$$\mathcal{O}_{X,\eta} = R := \{f \in K \mid v_Y(f) \geq 0\}$$

festgelegt ist. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ hat man einen natürlichen Homomorphismuis von Ringen mit 1,

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\xi} \longrightarrow Q(\mathcal{O}_{X,\xi}) = K$$

(wenn ξ den allgemeinen Punkt von X bezeichnet) also einen Morphismus von Schemata

$$\mathrm{Spec}\, K \longrightarrow X,$$

der den einzigen Punkt von Spec K in den generischen Punkt ξ von X abbildet. Dieser fügt sich in ein kommutatives Diagramm ein,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\, K & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\, R & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z} \end{array}$$

(weil jeder kommutative Ring auf genau eine Weise die Struktur einer $\mathbb{Z}$-Algebra hat). Auf Grund des Bewertungskriteriums der Separiertheit läßt sich in dieses Diagramm auf höchstenst eine Weise durch einen Morphismus

(1) $$\mathrm{Spec}\, R \longrightarrow X$$

kommutativ ergänzen, also auf genau eine Weise, den der natürliche Morphismus des loaklen Schemas von X im Punkt η mit Werten in X ergänzt dieses Diagramm. Wir haben damit zur Bewertung v_Y einen eindeutig bestimmten Morphismus (1) konstruiert. Die abgeschlossene Teilmenge Y von X ist gerade die Abschließung des Bildes des maximalen Ideals von R bei der Abbildung (1).[173]

(iv) Seien X ein Schema (wie in A0.6.3) mit dem rationalen Funktionenkörper K und sei $f \in K^*$ ein von Null verschiedenes Element von K. Dann gilt

$$v_Y(f) = 0$$

für fast alle Prim-Divisoren von X, d.h. für alle mit eventueller Ausnahme von endlich vielen.

---

[173] Ist X die afffine Ebene und Y die y-Achse, so entspricht das linke obere Dreieck des ergänzten Diagramms gerade dem folgenden Dreieck in der Kategorie der kommutativen Ringe mit 1.

$$\begin{array}{ccc} k(x,y) & \supseteq & k[x,y] \\ \uparrow & \swarrow & \\ k[x,y]_{(x)} & & \end{array}$$

A0.6.5 Der Nullstellen-Polstellen-Divisor einer rationalen Funktion

Seien X ein Schema (wie in A0.6.3) mit dem rationalen Funktionenkörper K und sei $f \in K^*$ ein von Null verschiedenes Element von K. Dann heißt

$$\mathrm{div}(f) := \sum_Y v_Y(f) \cdot Y \in \mathrm{Div}(X)$$

Nullstellen-Polstellen-Divisor von f oder auch einfach nur Divisor von f. Die Summe wird dabei über alle Prim-Divisoren Y von X erstreckt. Die Anzahl der von Null verschiedenen Summanden ist nach Bemerkung A0.6.4(iv) endlich, die Summe beschreibt also eine wohldefiniertes Element der Gruppe der Weil-Divisoren. Ein Weil-Divisor der Gestalt div(f) heißt auch Hauptdivisor oder prinzipaler Divisor.

Bemerkungen

(i) Nach Konstruktion gilt für je zwei rationale Funktionen $f,g \in K^*$

$$\mathrm{div}(f/g) = \mathrm{div}(f) - \mathrm{div}(g),$$

d.h die Abbildung

$$\mathrm{div}: K^* \longrightarrow \mathrm{Div}(X),\ f \mapsto \mathrm{div}(f),$$

ist ein Homomorphismus der multiplikativen Gruppe des rationalen Funktionenkörpers K von X mit Werten in der additiven Gruppe der Weil-Divisoren.

(ii) Das Bild des Homomorphismus von (i) wird mit

$$P(X) := \mathrm{Im}(\mathrm{div})$$

bezeichnet. Es ist die Untergruppe der Hauptdivisoren. Die zugehörige Faktorgruppe wird mit

$$\mathrm{Cl}(X) := \mathrm{Div}(X)/P(X)$$

bezeichnet und heißt Divisorklassen-Gruppe. Zwei Weil-Divisoren

$$D', D'' \in \mathrm{Div}\,(X)$$

heißen linear äquivalent und man schreibt

$$D' \sim D'',$$

wenn sie dasselbe Bild beim natürlichen Homomorphismus

$$\mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Cl}(X)$$

besitzen.

(iii) Die Divisorklassen-Gruppe ist eine interessante Invariante des Schemas. Sie ist nicht leicht zu berechnen.

A0.6.6 Beispiele

1. Affine Schemata

Seien R eine Dedekind-Ring, d.h. ein noetherscher ganz abgeschlossener Integritätsbereich der Dimension 1. Dann ist die Divisorklassen-Gruppe

$$\mathrm{Cl}(X) \cong \{\text{gebrochenene Ideale von } R\}/\{\text{gebrochenen Hauptideale}\}$$

in natürlicher Weise isomorph zur Idealklassen-Gruppe.

Ein gebrochenes Hauptideal von R ist dabei ein R-Modul der Gestalt $f \cdot R$ mit einem Element $f \in Q(R) - \{0\}$ des Quotienten-Körpers von Q(R) von R. Ein gebrochenes Ideal ist ein nicht-trivialer Teilmodul eines gebrochenen Hauptideals. Die gebrochenen Ideale von R bilden mit der gewöhnlichen Multiplikation von Idealen eine Gruppe.

Allgemeiner kann man für jeden kommutativen Ring R mit 1, die Gruppe

$$\mathrm{Div}(R) = \mathrm{Div}(\mathrm{Spec}\ R)$$

identifizieren mit der der freien abelschen Gruppe, die von den Primidealen p mit

$$\dim R/p = 1$$

erzeugt wird, und die Untergruppe der Hauptdivisoren

$$P(R) = P(\mathrm{Spec}\ R)$$

mit der Gruppe der gebrochenen Hauptideale von R, d.h. der nicht-trivialen R-Teilmoduln des vollen Quotientenrings Q(R), die von nur einem Element erzeugt werden. Auch in dieser Situation kann man also die Divisorklassen-Gruppe

$$\mathrm{Cl}(X)$$

als Gruppe von Idealklassen auffassen.

Satz

Seien R ein noetherscher Integritätsbereich und

$$X = \mathrm{Spec}\, R.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) X ist normal und $\mathrm{Cl}(X) = 0$.

(ii) R ist ein ZPE-Ring.

Beweis. Hartshorne, Proposition II.6.2.

QED.

Insbesondere ist die Divisorklassen-Gruppe des affinen Raums $\mathbb{A}^n_k$ über einem Körper trivial,

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{A}^n_k) = 0.$$

2. Der projektive Raum

Sei

$$X := \mathrm{Proj}\, \mathbb{P}^n_k = \mathrm{Proj}\, k[X_0 , \dots , X_n]$$

der projektive Raum über einem Körper k. Für jeden Primdivisor

$$Y \subseteq \mathbb{P}^n_k$$

mit dem allgemeinen Punkt $\xi \subseteq k[X_0 , \dots , X_n]$,

$$Y = \overline{\{\xi\}}$$

ist das zugehörige homogene Primideal

$$\xi \subseteq k[X_0 , \dots , X_n]$$

ein Hauptideal,[174]

$$\xi = F\bullet k[X_0 , \dots , X_n].$$

Das homogene Polynom F ist bis auf einen von Null verschiedenen Faktor aus k eindeutig bestimmt und heißt <u>homogene Gleichung</u> von Y. Es gilt

---

[174] Bezeichne F ein homogenes von Null verschiedenes Polynom minimalen Grades in ξ,

$$F \in \xi.$$

Weil ξ ein Primideal ist, ist dann F irreduzibel, und weil der Polynomring eine ZPE-Ring ist, ist

$$\xi' := F\bullet k[X_0 , \dots , X_n]$$

ein homogenes Primideal mit

(1) $$\xi' \subseteq \xi.$$

Sei

$$Y' := \overline{\{\xi'\}}.$$

Dann gilt

$$Y \subseteq Y' \subset \mathbb{P}^n_k.$$

Die rechte Inklusion ist echt, weil ξ' verschieden ist vom Null-Ideal. weil Y ein Primdiviser also von der Kodimension 1 im projektiven Raum ist, kann die recht Inklusion nicht echt sein, d.h. es gilt $\xi' = \xi$, d.h. ξ ist ein Hauptideal.

$$Y = V(F) = \mathrm{Proj}\, k[X_0, \dots, X_n]/(F).$$

Der Grad der homogenen Gleichung wird mit

$$\deg Y := \deg F$$

bezeichnet und heißt Grad des Primdivisors Y. Allgemeiner definieren wir den Grad eines beliebigen Divisors

$$D = \sum_i n_i Y_i$$

als

$$\deg D := \sum_i n_i \deg(Y_i).$$

Bezeichnet F_i eine homogene Gleichung des Primdivisors Y_i, so läßt sich das Produkt

$$\prod_i F_i^{n_i} = \frac{R}{S}$$

als Quotient von teilerfremden homogenen Polynomen aus $k[X_0, \dots, X_n]$ schreiben, wobei die Zähler und Nenner eindeutig bestimmt sind bis auf einen von Null verschiedenen Faktor aus k. Die irreduziblen Faktoren des Zählers entsprechen gerade den Summanden in der Summe D, die mit positiven Koeffizienten auftreten, die des Nenners den Summanden mit negativen Koeffizienten. Der Quotient R/S heißt auch <u>homogene Gleichung</u> des Divisors D.
Mit Hilfe der Faktorzerlegung von Zähler und Nenner kann man die obige Darstellung von D als Linearkombination von Primdivisoren wiedergewinnen. Wir schreiben deshalb auch

$$D = \mathrm{div}\,(R/S) = \mathrm{div}(R) - \mathrm{div}(S).$$

Die Divisoren des projektiven Raumes kann also mit den Quotienten R/S der homogenen Polynome von $k[X_0, \dots, X_n]$ identifizieren, wobei Quotienten, die durch Multiplikation mit Elementen aus k* ineinander übergehen, für denselben Divisor stehen,

$$\mathrm{Div}\, \mathbb{P}_k^n = \{R/S \mid R, S \in k[X_0, \dots, X_n] - \{0\}, R, S \text{ homogen}\}/k^*.$$

Es gilt

$$\deg \mathrm{div}(R/S) = \deg R - \deg S.$$

Die Grad-Abbildung definiert einen Gruppen-Homomorphismus

$$\deg\colon \mathrm{Div}(\mathbb{P}_k^n) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

dessen Kern aus den Divisoren der Gestalt

$$\mathrm{div}(R/S) \text{ mit } \deg R = \deg S$$

besteht. Die Quotienten der homogenen Polynome gleichen Grades sind aber gerade die rationalen Funktionen. Die zugehörigen Divisoren, die Hauptdivisoren,

$$\mathrm{Ker}(\deg\colon \mathrm{Div}(\mathbb{P}_k^n) \longrightarrow \mathbb{Z}) = P(\mathbb{P}_k^n).$$

Insbesondere ist

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{P}_k^n) = \mathrm{Div}(\mathbb{P}_k^n)/P(\mathbb{P}_k^n) \cong \mathbb{Z}.$$

Zwei Divisoren des projektiven Raums sind genau dann linear äquivalent, wenn sie denselben Grad haben.
Ist insbesonder D ein Divisor des Grades d und H eine Hyperebene im projektiven Raum, so gilt

$$D \sim d \bullet H.$$

3. Eine exakte Sequenz

Seien X ein Schema (wie in A0.6.3) und $Z \subseteq X$ eine echte abgeschlossene Teilmenge und
$U := X - Z$.

(i) Es gibt einen surjektiven Gruppen-Homomorphismus

$$Cl(X) \xrightarrow{\alpha} Cl(U)$$

mit

$$\alpha([Y]) = \begin{cases} [Y \cap U] & \text{falls } Y \cap U \neq \emptyset \\ 0 & \text{falls } Y \cap U = \emptyset \end{cases}$$

für jeden Primdivisor Y von X. Dabei bezeichne [Y] die Divisorklasse von Y.

(ii) Der Homomorphismus von (i) ist ein Isomorphimus, falls

$$\operatorname{codim}_X(Z) \geq 2$$

ist.

(iii) Ist Z irreduzibel von der Kodimension 1, so besteht eine exakte Sequenz

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} Cl(X) \xrightarrow{\alpha} Cl(U) \longrightarrow 0,$$

von Homorphismen abelscher Gruppen mit α wie in (i) und

$$\beta(1) = [Z] \text{ (die Divisorklasse von Z)}$$

Beweis. Zu (i). Zunächst hat man einen Gruppen-Homomorphismus

$$\tilde{\alpha}: Div(X) \longrightarrow Div(U), \sum_i n_i Y_i \mapsto \sum_i n_i Y_i \cap U,$$

wobei die Summe rechts nur über Summanden mit $Y_i \cap U \neq \emptyset$ zu erstrecken ist. Sind die Divisoren

$$D' := \sum_i n'_i Y_i \text{ und } D'' = \sum_i n''_i Y_i$$

linear äquivalent, sagen wir

$$D' - D'' = div(f)$$

mit einer auf X rationalen Funktion, so erhält man durch Einschränken auf U,

$$\tilde{\alpha}(D') - \tilde{\alpha}(D'') = div(f|_U),$$

d.h. $\tilde{\alpha}(D')$ und $\tilde{\alpha}(D'')$ sind ebenfalls linear äquivalent. Die oben beschriebene Abbildung ist somit wohldefiniert. Zum Beweis der Surjektivität reicht es zu zeigen, jeder Primdivisor

$$Y' \subseteq U$$

liegt im Bild von $\tilde{\alpha}$. Das ist aber der Fall, denn die Abschließung von Y' in X ist ein Primdivisor von X, dessen Durchschnitt mit U gerade Y' ist.

Zu (ii). Sei $D \in Div(X)$ ein Divisor mit $\alpha([D]) = 0$, d.h. mit

$$\tilde{\alpha}(D) = div(f)$$

mit einer rationalen Funktion f auf U. Wir fassen f als rationale Funktion auf X auf und betrachten den zugehörigen Divisor div(f) auf X. Die Differenz

$$D - div(f) = \sum_i n_i Y_i$$

ist dann ein Divisor, dessen Primdivisoren Y_i nur dann mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten n_i auftreten, wenn gilt

$$\varnothing = Y_i \cap U = Y_i - Z.$$

Nun hat Y_i wegen $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$ eine größere Dimension als Z, d.h. die Differenz rechts kann niemals leer sein. Es folgt

$$D - \mathrm{div}(f) = 0,$$

d.h. D ist linear äquivalent zu 0, d.h. [D] = 0.

Zu (iii). Dieselbe Argumentation wie eben liefert

$$D - \mathrm{div}(f) = \ell\bullet Z$$

mit $\ell\in\mathbb{Z}$. Deshalb wird der Kern von α von den Vielfachen der Divisorklasse von Z erzeugt.

QED.

4. Das Komplement einer irreduziblen ebenen projektiven Kurve

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^2_k$ eine irreduzible Kurve des Grades d in der projektiven Ebene (über dem Körper k). Das Bild des Homomorphismus β in der exakten Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^2_k) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^2_k - X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| \,\deg & & & & \\ & & \mathbb{Z} & & & & \end{array}$$

von Beispiel A0.6.6 - 3 wird dann von der Divisorklasse der Kurve X erzeugt. Weil die Kurve den Grad d besitzt ist die Divisorklasse gleich dem d-fachen einer (jeden) Geraden der projektiven Ebene. Die Sequenz bekommt damit die Gestalt

$$0 \longrightarrow d\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^2_k - X) \longrightarrow 0,$$

d.h es ist

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^2_k - X) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

5. Der quadratische Raumkegel

Seien k ein Körper,

$$A := k[x,y,z]/(xy - z^2)$$

und

$$X = V(xy - z^2) = \mathrm{Spec}\, A$$

der quadratische Kegel im affinen Raum über k. Dann gilt

$$\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Beweis. Das Polynom $xy - z^2 \in k[x, y, z]$ ist irreduzibel[175], erzeugt also ein Primideal im ZPE-Ring k[x, y, z], d.h.

$$X = \mathrm{Spec}\, k[x, y, z]/(xy - z^2)$$

ist irreduzibel und reduziert. Es ist nicht schwer zu sehen, daß X singularitätenfrei ist, also erst recht regulär in der Kodimension 1. Bezeichne

$$Y = V(y, z) \subseteq X$$

die Mantel-Linie des Kegels X mit den Gleichungen y = z = 0. Dies ist ein Primdivisor von X. Wir betrachten die zugehörige exakte Sequenz von Beispiel A0.6.6 - 3,

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Cl}(X - Y) \longrightarrow 0.$$

---

[175] Als Polynom in z allein über k(x,y) ist dies ein Eisensteim-Polynom bezüglich des Primelements x von k[x, y].

(mit $\beta(1) = [Y]$). Als Menge ist Y der Durchschnitt des Kegels X mit der Hyperebene y = 0,

$$
\begin{aligned}
X \cap V(y) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{A}^3_k \mid xy - z^2 = 0, y = 0\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{A}^3_k \mid y = 0, z^2 = 0\}\\
&= Y \text{ (als Menge).}
\end{aligned}
$$

Deshalb ist

$$
\begin{aligned}
X - Y &= D(y) \qquad \text{(offene Hauptmenge in X)}\\
&= \operatorname{Spec} A_y\\
&= \operatorname{Spec} k[x,y,z]_y/(xy - z^2)\\
&= \operatorname{Spec} k[x,y,z]_y/(x - y^{-1}z^2)\\
&= \operatorname{Spec} k[y,z]_y.
\end{aligned}
$$

Nun ist $k[y,z]_y$ als Quotientenring des ZPE-Rings k[y,z] ein ZPE-Ring, d.h. es ist

$$Cl(X - Y) = 0.$$

Insbesondere ist

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} Cl(X),\ 1 \mapsto [Y],$$

surjektiv. Zum Beweis der Behauptung haben wir zu zeigen,

$$\operatorname{Ker}(\beta) = 2\mathbb{Z}.$$

Mit anderen Worten, wir haben zu zeigen,

1. $2\bullet Y$ ist ein Hauptdivisor.
2. $Cl(X) \neq 0$.

Zu 2. Es reicht zu zeigen, der Divisor zur rationalen Funktion $y|_X$ auf X ist

$$\operatorname{div}(y|_X) = 2\bullet Y.$$

Wir haben oben gesehen

$$V(y) \cap X = Y,$$

d.h. Y ist der einzige Primdivisor, entlang welchem die Funktion $y|_X$ Null ist. Da die Funktion auf X überall regulär ist (d.h. es treten keine Pole auf), gilt

$$\operatorname{div}(y|_X) = d\bullet Y$$

mit einer natürlichen Zahl d. Wir haben zu zeigen,

$$d = 2.$$

Mit anderen Worten wir haben zu zeigen, die Funktion $y|_X$ ist bis auf eine Einheit das Quadrat des Erzeugers des maximalen Ideals $m_{X,Y}$ des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,Y}$ von X im (nicht abgeschlossenen) Punkt Y. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_{X,Y} &= (k[x,y,z]/(xy - z^2))_Y\\
&=^{176} k[x,y, z]_{(y,z)}/(xy - z^2).
\end{aligned}
$$

Das maximale $m_{X,Y}$ Ideal dieses Rings wird von den Restklassen von y und z erzeugt. Als k-Vektorraum ist

$$m_{X,Y}/m^2_{X,Y} \cong (y,z)k[x,y, z]_{(y,z)}/(y^2,yz, z^2,xy-z^2)$$

[176] Das zu Y = V(y,z) gehörige Primideal von $k[x,y, z]/(xy - z^2)$ ist gerade das von y und z erzeugte Ideal. Man beachte im Polynomring erzeugen y und z ein Primideal, welches $xy - z^2$ enthält.

$$= (y,z)k[x,y,z]_{(y,z)}/(y^2,yz,z^2,y-x^{-1}z^2)$$
$$= zk[x,z]_{(z)}/(z^2)$$

1-dimensional und wird von der Restklasse von z erzeugt. Deshalb ist die Restklasse von z in $\mathcal{O}_{X,Y}$ ein Erzeuger des maximalen Ideals

$$m_{X,Y} = z\mathcal{O}_{X,Y}.$$

Die Restklasse von y ist bis auf eine Einheit gleich dem Quadrat von z. Deshalb gilt

$$v_Y(y|_X) = 2,$$

d.h. die Funktion $y|_X$ auf X hat entlang Y eine Nullstelle der Ordnung

$$d = 2.$$

Zu 2. Wir haben zu zeigen, $Cl(X) \neq 0$.
Wegen des Satzes von A0.6.6 - 1 ist dies äquivalent zu den beiden folgenden Aussagen.

3. $A := k[x,y,z]/(xy - z^2)$ ist kein ZPE-Ring.
4. $X = \operatorname{Spec} k[x,y,z]/(xy - z^2)$ ist normal.

Zu 3. Nach
Matsumura, Commutative ring theory, Theorem 20.1, oder
Bourbaki, Algebre commutative, Ch. 7, §3

ist ein noetherscher Integritätsbereich A genau dann ein ZPE-Ring, wenn jedes Primideal P mit

$$\dim A_P = 1$$

ein Hauptideal ist. Es reicht deshalb zu zeigen, das Ideal

$$(y, z)A$$

ist kein Hauptideal. Sei

$$m := (x,y,z)A = (x, y, z)k[x, y, z]/(xy - z^2)$$

Es gilt

$$m/m^2 = (x, y, z)k[x, y, z]/(x^2,y^2,z^2,xy, xz, yz),$$

d.h. m/m^2 ist ein 3-dimensionaler k-Vektorraum, der von den Restklassen der Unbestimmten x, y, z erzeugt wird. Das Bild von

$$(y,z)A \subseteq m$$

bei der natürlichen Abbildung $m \longrightarrow m/m^2$ enthält die Restklassen der Unbestimmten y und z, ist also 2-dimensional als k-Vektorraum. Wäre (y, z)A ein Hauptideal, so müßte dieser Vektorraum 1-dimensional sein.
Zu 4. siehe Hartshorne, Ex. II.6.4.
QED.

A07 Cartier-Divisoren

A0.8 Projektive Morphismen

Divisoren, Aufblasungen.
Garben-Kohomologie

A1 Halbeinfache Ringe und Moduln

frei nach

G. Scheja und U. Storch: Lehrbuch der Algebra, Teubner-Verlag Stuttgart 1994.

Vereinbarung

Alle Ringe sollen eine Einselement besitzen. Alle Homomorphismen von Ringen sollen das Einselement ins Einselement abbilden.

A1.1 Definition

Ein Ring A heißt halbeinfach, wenn jeder A-Modul projektiv[177] ist. Ein A-Modul M heißt halbeinfach, wenn alle Teilmoduln von M direkte Summanden von M sind.

A1.2 Charakterisierung der halbeinfachen Ringe

Sei A ein Ring. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) A ist halbeinfach.
(ii) Jeder A-Modul ist halbeinfach.
(iii) Jede kurze exakte Sequenz von A-Moduln zerfällt.
(iv) Jeder A-Modul ist injektiv.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $N \subseteq M$ ein Teilmodul des A-Modul M. Wir haben zu zeigen, N ist direkter Summand von M. Dazu reicht es zu zeigen, die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M/N \longrightarrow 0$$

zerfällt. Nach Voraussetzung ist der A-Modul M/N projektiv, d.h. die identische Abbildung Id: $M/N \longrightarrow M/N$ läßt sich entlang β anheben. Mit anderen Worten, β besitzt einen Schnitt, d.h.die Sequenz zerfällt.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sei

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Wir haben zu zeigen, daß sie zerfällt. Wir können M' vermittels mit einem Teilmodul von M identifizieren und α mit der natürlichen Einbettung

$$\alpha: M' \longrightarrow M, m \mapsto m.$$

Nach Voraussetzung ist M halbeinfach, also M' ein direkter Summand von M, sagen wir

$$M = M' \oplus N.$$

Dann ist die Projektion $M \longrightarrow M'$ rechtsinves zu α, d.h. die Sequenz zerfällt.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Seien

$$f: N \longrightarrow M$$

eine A-lineare Abbildung und $N \subseteq N'$ eine Inklusion von A-Moduln. Wir haben zu zeigen, f läßt sich auf N' fortsetzen. Nach Vorausetzung zerfällt die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} N' \xrightarrow{\beta} N'/N \longrightarrow 0.$$

Insbesondere gibt es eine zu α linksinverse A-lineare Abbildung

$$g: N' \longrightarrow N,$$

---

[177] Ein A-Modul M heißt projektiv, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}_A(M, ?)$ exakte Sequnzen von A-Moduln in exakte Sequenzen überführt. Insbesondere ist dann M ein direkter Summand von jedem Modul, in welchem M als Teilmodul enthalten ist.

d.h. $g\circ\alpha = \mathrm{Id}$. Dann ist aber

$$f\circ g\circ\alpha = f,$$

d.h. $f\circ g$ ist eine Fortsetzung von f auf N'.

(iv) ⇒ (i). Seien

$$f: M \longrightarrow N$$

eine A-lineaer Abbildung und β: N' $\longrightarrow$ N eine A-lineare Surjektion. Wir haben zu zeigen, f läßt sich entlang β anheben. Wir betrachten die exakte Sequenz von A-linearen Abbildungen

$$0 \longrightarrow N'' \xrightarrow{\alpha} N' \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0 \text{ mit } N'' = \mathrm{Ker}(\beta).$$

Weil N'' nach Voraussetzung injektiv ist, besitzt die identische Abbildung Id: N''$\longrightarrow$N'' eine A-lineare Fortzung auf N'. Mit anderen Worten, die exakte Sequenz zerfällt. Dann besitzt aber β einen Schnitt, sagen wir

$$g: N \longrightarrow N'$$

(mit $\beta\circ g = \mathrm{Id}$). Dann gilt aber

$$\beta\circ g\circ f = f,$$

d.h. $g\circ f$ ist die gesuchte Anhebung von f entlang β.

QED.

A1.3 Teil- und Faktormoduln von halbeinfachen Moduln

Jeder Teilmodul und jeder Faktormodul eines halbeinfachen Moduls ist halbeinfach.

Beweis. Seien M ein halbeinfacher A-Modul und

$$N \subseteq M$$
$$N' \subseteq N$$

Teilmoduln. Weil M halbeinfach ist, besitzt die Inklusion

$$N' \hookrightarrow M$$

ein Linksinverses r: M $\longrightarrow$ N'. Die Einschränkung von r auf N ist linksinvers zur Inklusion

$$N' \hookrightarrow N.$$

Also ist N' direkter Summand von N. Da dies für jedes N' $\subseteq$ N gilt, ist N halbeinfach.

Sei $\overline{M}$ ein Faktormodul von M und $\overline{N} \subseteq \overline{M}$ ein Teilmodul. Der Kern K der natürlichen Surjektion

$$s: M \xrightarrow{\alpha} \overline{M} \xrightarrow{\beta} \overline{M}/\overline{N}$$

ist ein direkter Summand von M (weil M halbeinfach ist), d.h. die Sequenz

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{s} \overline{M}/\overline{N} \longrightarrow 0$$

zerfällt. Die Surjektion s besitzt als einen Schnitt t: $\overline{M}/\overline{N} \longrightarrow M$,

$$\mathrm{Id} = s\circ t = \beta\circ(\alpha\circ t).$$

Insbesondere besitzt die natürliche Surjektion β einen Schnitt $\alpha\circ t$, d.h. die Sequenz

$$0 \longrightarrow \overline{N} \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow \overline{M}/\overline{N} \longrightarrow 0$$

zerfällt. Insbesondere ist $\overline{N}$ direkter Summand von $\overline{M}$. Da dies für jedes $\overline{N}\subseteq\overline{M}$ gilt, ist $\overline{M}$ halbeinfach.

QED.

A1.4 Einfache und halbeinfache Moduln

Seien A ein Ring und M ein A-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) M ist halbeinfach.

(ii) M ist direkte Summe von einfachen Moduln.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii).

1.Schritt. Ist $M \neq 0$, so besitzt M einen einfachen Teilmodul.
Nach dem Zornschen Lemma besitzt M einen Teilmodul

$$U \subseteq M,$$

der maximal in der Menge der echten Teilmoduln N von M ist. Weil M halbeinfach ist, ist N direkter Summand von M, sagen wir

$$M = N \oplus N'.$$

Angenommen N' wäre nicht einfach. Dann gibt es einen echten von Null verschiedenen Teilmodul

$$N'' \subseteq N'.$$

Als Teilmodul von M ist N' halbeinfach, also N" direkter Summand von N', sagen wir

$$N' = N''\oplus U.$$

Dann ist aber

$$N\oplus N''$$

ein echter Teilmodul von M, der echt größer ist als N. Das steht im Widerspruch zur Wahl von N. Also ist N' einfach.

2. Schritt. Existenz einer Zerlegung von M in eine direkte Summe einfacher Teilmoduln.
Nach dem Zornschen Lemma gibt es eine maximale Menge $\{U_i\}_i$ einfacher Teilmoduln von M, deren Summe direkt ist,

$$\sum_{i\in I} U_i = \oplus_{i\in I} U_i$$

Falls

$$\oplus U_i \subseteq M$$

ein echter Teilmodul ist, so gilt, weil M halbeinfach ist,

$$M = U\oplus(\oplus U_i)$$

mit einem nicht-trivialen Teilmoldul $U \subseteq M$. Nach dem ersten Schritt enthält U einen einfachen Teilmodul $V \subseteq M$, den man zur Familie $\{U_i\}$ hinzufügen kann. Das widerspricht jedoch der Maximalität der Familie. Also gilt

$$M = \oplus U_i .$$

(ii) $\Rightarrow$ (i).

Wir nehmen an, V ist direkte Summe von einfachen Teilmoduln U_i , $i \in I$,

$$M = \oplus_{i\in I} U_i$$

und betrachten einen Teilmodul

$$N \subseteq M.$$

Wir haben zu zeigen, N ist ein direkter Summand von M. Nach dem Zornschen Lemma gibt es eine maximale Teilmenge $J \subseteq I$ mit

(1) $$N \cap \oplus_{i\in J} U_i = 0.$$

Für jedes $j\in I - J$ gilt dann

$$U_j \cap (N + \oplus_{i\in J} U_i) \neq 0,$$

denn andernfalls wäre $N \cap (U_j + \oplus_{i\in J} U_i) = 0$ und man könnte j zur Menge J hinzufügen, was der Maximalität von J widerspräche. Weil U_j einfach ist, folgt

$$U_j \subseteq N + \oplus_{i\in J} U_i \text{ für jedes } j \in I - J.$$

Da diese Inklusion trivialerweise auch für $j \in J$ besteht, gilt

$$M = N + \oplus_{i\in J} U_i.$$

Wegen (1) ist diese Summe direkt, d.h. N ist direkter Summand.
QED.

Aus dem Beweis der Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) ergeben sich weiter die folgenden Aussagen.

Bemerkungen

(i) Ist der A-Modul M direkte Summe der einfachen Teilmoduln U_i mit $i\in I$, so gibt es zu jedem Teilmodul $N \subseteq M$ eine Teilmenge $J \subseteq I$ derart, daß

$$\oplus_{j\in J} U_j$$

komplementär zu N ist. Der Teilmodul N selbst ist dann isomorph zu

$$N \cong \oplus_{i\in I-J} U_i .$$

(ii) Ist der A-Modul M (nicht notwendig direkte) Summe der einfachen Teilmoduln U_i mit $i\in I$, so gibt es eine Teilmenge $J \subseteq I$ derart, daß

$$M = \oplus_{i\in J} U_i$$

gilt. Insbesondere ist M dann einfach. (Zum Beweis betrachte man die natürliche Surjektion $\oplus_{i\in I} U_i \longrightarrow M$ und wende (i) für den Fall an, daß N der Kern der Projektion ist).

A1.5 Endlich erzeugte halbeinfache Moduln

Sei M ein halbeinfacher Modul über dem Ring A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) M ist als A-Modul endlich erzeugt.
(ii) M ist direkte Summe von endlich vielen einfachen A-Moduln.
(iii) M ist artinsch, d.h. jede absteigende Kette von Teilmoduln ist stationär.
(iv) M ist noethersch, jede aufsteigende Kette von Teilmoduln ist stationär.
(v) M besitzt endliche Länge ℓ, d.h. jede Kompositionsreihe[178] von M, besteht aus ℓ+1 Moduln.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (v). Nach dem Satz von Jordan-Hölder haben je zwei Kompositionsreihen von M dieselbe Länge. Es reicht also, eine Kompositionsreihe endlicher Länge anzugeben. Wir schreiben M als direkte Summe von endlich vielen einfachen Teilmoduln, sagen wir

$$M = U_1 \oplus ... \oplus U_r$$

und setzen

---

[178] d.h. jede Kette von Teilmoduln von M, die mit 0 beginnt und mit M endet und sich nicht verfeinern läßt.

$$M_n := U_1 \oplus ... \oplus U_n.$$

Dann ist

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset .... \subset M_r = M$$

eine Kompositionsreihe der gesuchten Art.

<u>(v) ⇒ (ii)</u>. Sei

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset .... \subseteq M_r = M$$

eine Kompositionsreihe von M. Mit M sind auch alle M_i halbeinfach (nach A1.3), d.h. man hat direkte Summenzerlegungen

$$M_i = M_{i-1} \oplus M'_{i-1}$$

(nach Bemerkung A1.4(i)). Insbesondere gilt

$$M = M'_r \oplus M'_{r-1} \oplus ... \oplus M'_2 \oplus M'_1$$

Weil sich die Kompositionsreihe nicht verfeinern läßt sind die M'_n einfache Moduln.

<u>(i) ⇒ (ii)</u>. Wir fixieren ein endliches Erzeugendensystem des Moduls M, sagen wir

$$M = Am_1 + Am_2 + ... + Am_r$$

Nach A1.4 ist M direkte Summe einer Familie $\{U_i\}_{i\in I}$ von einfachen Moduln U_i,

$$M = \oplus_{i\in I} U_i.$$

Es reicht zu zeigen, die Indexmenge I ist endlich. Jeder der Erzeuger läßt sich als Summe

$$m_j = \sum_{i\in I} m_{ji} \text{ mit } m_{ji} \in U_i$$

scheiben, wo bei für jedes j jeweils nur endlich viele m_{ji} von Null verschieden sind. Da die Zahl der m_j endlich ist, ist die Zahl der von Null verschiedenen m_{ji} endlich. Seien

(1) $$U_{i_1}, ..., U_{i_s}$$

diejenigen U_i, für welche es ein von Null verschiedenes $m_{ji} \in U_i$ gibt. Für jede Linearkombination

$$\sum_{j=1}^{r} a_j m_j \, , \, a_j \in A,$$

der Erzeuger m_j sind dann die zu den direkten Summanden (1) gehörigen Komponenten die einzigen von Null verschiedenen Komponenten, d.h.

$$\sum_{j=1}^{r} a_j m_j \in U_{i_1} \oplus ... \oplus U_{i_r} \subseteq M$$

Da die m_j ein Erzeugendensystem bilden, gilt dies aber für jedes Element von M, d.h.

$$M \subseteq U_{i_1} \oplus ... \oplus U_{i_r} \subseteq M.$$

Wir haben gezeigt:

(*) In jeder direkten Summenzerlegung eines endlich erzeugten Moduls M (in nicht notwendig einfache direkte Summanden) ist die Anzahl der direkten Summanden endlich und, falls M halbeinfach ist, durch die Anzahl der direkten Summanden in einer Zerlegung in einfache Teilmoduln beschränkt[179].

(ii) $\Rightarrow$ (i). Jeder einfache A-Modul wird von nur einem Element erzeugt. Eine endliche direkte Summe einfacher Moduln also von endlich vielen Elementen.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Angenommen es gibt eine unendlich absteigende Kette

(1) $$M = M_0 \supset M_1 \supset .... \supset M_n \supset M_{n+1} \supset ...$$

von Teilmoduln. Nach A1.3 sind alle diese Moduln halbeinfach, d.h. man kann jedes M_n in der Gestalt

$$M_n = M_{n+1} \oplus M'_{n+1}$$

schreiben mit einem von 0 verschiedenen Teilmodul M'_{n+1}. Dann gilt aber

$$M = M'_0 \oplus M'_1 \oplus M'_2 \oplus ...$$

im Widerspruch zu (*).

(ii) $\Rightarrow$ (iv). Dieselbe Argumentation wie eben mit einer unendlich aufsteigenden Kette führt zum selben Widerspruch, wobei wir diesmal die Existenz einer oberen Schranke für die Anzahl der nicht-trivialen direkten Summanden benutzen.

(iii) $\Rightarrow$ (ii).

Angenommen, eine Zerlegung

$$M = \oplus_{i\in I} U_i$$

von M in einfache direkte Summanden ist unendlich. Dann gibt es in I eine unendliche Folge

$$i_1, i_2, ... \in I$$

von paarweise verschiedenen Elementen und die Folge der Teilmoduln

$$M_n = \oplus_{i\in I-\{i_1,...,i_n\}} U_i$$

ist echt absteigend und unendlich.

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Eine analoge Argumentation wie eben liefert eine echt aufsteigende unendliche Kette von Teilmoduln.

QED.

A1.6 Charakterisierung der halbeinfachen Ringe

Sei A ein Ring. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) A ist halbeinfach.
(ii) A ist linksartinsch[180], und das Jacobson-Radikal[181] ist 0.
(iii) A ist als Modul über sich selbst halbeinfach.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ Weil A halbeinfach ist, ist jeder A-Modul halbeinfach (nach A1.2(ii)). Insbesondere ist A als Modul über sich selbst halbeinfach. Nun ist A als Modul über sich selbst endlich erzeugt (vom Einselement), also linksartinsch (nach A1.5(iii)).

Wir haben noch zu zeigen, das Jacobson-Radikal m $\subseteq$ A ist Null. Als Linksideal von A ist m zumindest ein direkter Summand des A-Moduls A. Sei

---

[179] nach dem Satz von Jordan-Hölder, vgl. den Beweis der Implikationen (ii) $\Leftrightarrow$ (v).

[180] d.h. jede absteigenden Kette von Linksidealen in A ist stationär.

[181] d.h. der Durchschnitt aller maximalen Linksideale. Dieser Durchschnitt stimmt mit dem Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale überein.

$$p: A \longrightarrow m$$

eine zugehörige Projektion. Mit

$$e = p(1)$$

gilt dann

$$m = p(A) = p(A\cdot 1) = A\cdot p(1) = A\cdot e$$

und

$$p(e) = p(e\cdot 1) = e\cdot p(1) = e^2.$$

Nun ist die Einschränkung von p auf m die identische Abbildung, d.h. es ist

$$e^2 = p(e) = e,$$

d.h. e ist idempotent.

Jedes Element $x \in m$ liegt in jedem maximalen Linksideal. Deshalb kann $1 - x$ in keinem maximalen Linksideal liegen, besitzt also ein Linksinverses, sagen wir

$$r\cdot(1-x) = 1.$$

Für dieses Linksinverse Element r gilt $r = 1 + rx \in 1 + m$. Wir haben gezeigt, jedes Element von

$$1 + m$$

besitzt ein Linksinverses in $1 + m$. Deshalb ist $1 + m$ bezüglich der Multiplikation von A eine Gruppe, und jedes Element von $1 + m$ besitzt ein zweiseitiges Rechtsinverses. Dies gilt insbesondere auch für $1 - e$, d.h. $1 - e$ ist eine Einheit von A. Wegen

$$e(1-e) = e - e^2 = e - e = 0,$$

gilt deshalb auch $e = 0$, d.h. $m = Ae = 0$.

<u>(ii) ⇒ (iii)</u>. Bezeichne $\{m_i\}_{i\in I}$ die Familie der Linksideale von A. Wir betrachten die Menge aller endlichen Durchschnitte der m_i. Weil A linksartinsch ist, gibt es in der Menge dieser Durchschnitte ein minimales Element, sagen wir

$$m_{i_1} \cap \ldots \cap m_{i_r}.$$

Wenn wir diesen Durchschnitt mit weiteren Elementen aus der Familie $\{m_i\}_{i\in I}$ schneiden, bleibt dieser also unverändert, d.h. es gilt

$$m_{i_1} \cap \ldots \cap m_{i_r} \subseteq m_i \text{ für jedes } i \in I.$$

Damit ist aber

$$m_{i_1} \cap \ldots \cap m_{i_r} \subseteq \bigcap_{i\in I} m_i = m = 0.$$

d.h.

$$m_{i_1} \cap \ldots \cap m_{i_r} = 0.$$

Die A-lineare Abbildung

$$A \longrightarrow M := A/m_{i_1} \oplus \ldots \oplus A/m_{i_r}, \; a \mapsto (a \bmod m_{i_1}, \ldots, a \bmod m_{i_r}),$$

ist somit injektiv. Da die m_{i_ν} linksmaximal sind, sind die Moduln A/m_{i_ν} einfach, d.h. M ist ein halbeinfacher A-Modul. Als Teilmodul von M ist damit auch A als Modul über sich selbst halbeinfach.

<u>(iii) ⇒ (i)</u>. Es reicht zu zeigen, jeder A-Modul M ist halbeinfach (nach A1.2(ii)). Sei

$$\{m_i\}_{i\in I}$$

ein Erzeugendensystem von M. Dann ist die A-lineare Abbildung

$$A^{(I)} \longrightarrow M, (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i m_i ,$$

surjektiv, und es reicht zu zeigen, $A^{(I)}$ ist halbeinfach (nach A1.3). Nun ist aber A als Modul über sich selbst nach Voraussetzung halbeinfach, also direkte Summe einfacher A-Moduln (nach A1.4). Also ist auch $A^{(I)}$ direkte Summe einfacher A-Modulen, also halbeinfach (nach A1.4).
QED.

A1.7 Beispiel: die Matrizenringe

Sei $A = M_n(D)$ der Ring der $n\times n$-Matrizen mit Einträgen im Schiefkörer D. Dann ist A ein halbeinfacher Ring.

Bezeichne nämlich

$$I_r \subseteq M_n(D)$$

die Menge der Matrizen, deren einzige von Null verschiedenen Einträge sich in der r-ten Spalte befinden. Dann ist I_r ein minimales Linksideal von $M_n(D)$, welches als $M_n(D)$ -Modul isomorph ist zu

$$D^n$$

(nach 2.1.4). Insbesondere sind die I_r einfache $M_n(D)$-Moduln. Offensichtlich zerfällt $M_n(D)$ als Modul in eiue direkte Summe

$$M_n(D) = I_1\oplus...\oplus I_r ,$$

ist also halbeinfach.

A1.8 Direkte Produkte von halbeinfachen Ringen

Sind $A_1,...,A_r$ halbeinfache Ringe, so ist auch deren direktes Produkt

$$A := A_1\times...\times A_r$$

ein halbeinfacher Ring.
Beweis. Jedes A_i ist direkte Summe von einfachen A_i-Moduln (nach A1.6(iii) und A1.4). Jeder einfache A_i-Modul ist aber auch einfacher A-Modul. Also ist auch A direkte Summe von einfachen A-Moduln, also als Modul über sich selbst halbeinfach (nach A1.4). Nach A1.6(iii) ist A dann aber auch ein halbeinfacher Ring.
QED.

A1.9 Das Lemma von Schur

Seien A ein Ring und M, N einfache A-Moduln. Dann gilt:

(i) Jede von 0 verschiedene A-lineare Abbildung $M \longrightarrow N$ ist ein Isomorphismus.
(ii) Der Endomorphismenring $End_A(M)$ ist ein Schiefkörper.

Beweis. siehe 2.1.7
QED.
Bemerkungen
(i) Sind M und N nicht-isomorphe einfache A-Moduln, so ist nach dem Lemma von Schur

$$Hom_A(M, N) = 0.$$

Allgemeiner gilt sogar für beliebige Index-Mengen I, J.

$$\mathrm{Hom}_A(M^{(I)}, N^{(J)}) = 0.$$

(ii) Für beliebige einfache A-Moduln M und Index-Mengen I gilt

$$\mathrm{Hom}_A(M, M^{(I)}) \cong^{182} \mathrm{Hom}_A(M,M)^{(I)} = D^{(I)} \text{ über } A,$$

wobei $D := \mathrm{Hom}_A(M, M) = \mathrm{End}_A(M)$ ein Schiefkörper ist.

(iii) Wir wollen jetzt den eben konstruierten A-Modul-Isomorphismus zu einem Isomorphismus von D-Vektorräumen fortsetzen. Die Multiplikation von D ist die Komposition von Abbildungen

$$f: M \longrightarrow M.$$

Die D-Modulstruktur von $D^{(I)}$ kommmt von dieser Multiplikation, d.h.

$$d\bullet(d_i)_{i\in I} = (dd_i)_{i\in I}.$$

Die D-Modulstruktur der Hom-Menge

$$\mathrm{Hom}_A(M, M^{(I)})$$

dagegen kommt von der D-Modulstruktur des Moduls M, d.h. für $f:M \longrightarrow M^{(I)}$ aus dieser Hom-Menge und $d\in D = \mathrm{End}_A(M)$ ist $d\bullet f$ die Abbildung

$$m \mapsto f(d(m)).$$

Für d', d'' $\in$ D erhalten wir

$$((d'd'')f)(m) = f(d'd''m) = (d'f)(d''m) = (d''(d'f))(m),$$

d.h. es ist

$$(d'd'')f = d''(d'f).$$

Die Hom-Menge hat also die Struktur eines rechten D-Moduls. Damit sie die Struktur eines linken Moduls bekommt, müssen wir D durch die entgegengesezte Algebra D^{op} ersetzen. Damit der Isomorphismus von (ii) ein Isomorphismus von Moduln über dem Endomophismenring wird, müssen wir also genauer schreiben

(iv) $$\mathrm{Hom}_A(M, M^{(I)}) \cong (D^{op})^{(I)} \text{ über } D^{op}.$$

A1.10 Klassifikation der halbeinfachen Moduln

Seien A ein Ring und

$$\{M_i\}_{i\in I}$$

ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen der einfachen A-Moduln. Dann hat jeder halbeinfache A-Modul M die Gestalt

$$M \cong \oplus_{i\in I} (M_i)^{(I_i)},$$

wobei die Kardinalzahlen der Mengen I_i eindeutig bestimmt sind. Genauer, es gilt

$$\# I_i = \dim_{D_i^{op}} \mathrm{Hom}_A(M_i , M)$$

mit $D_i = \mathrm{End}_A(M_i)$.

---

[182] Wir verwenden die Tatsache, daß M als einfacher A-Modul von einem Element erzeugt wird, sagen wir

$$M = Am.$$

Ein Element f aus der linken Hom-Menge ist deshalb durch das Element $f(m) \in M^{(I)}$ vollständig festgelegt (und letzteres kann beliebig sein).

Beweis. Als halbeinfacher A-Modul ist M isomorph zu einer direkten Summe von einfachen Moduln (nach A1.4). Also hat M die angegebene Gestalt. Zum Beweis der Eindeutigkeitsaussage haben wir noch die Formel für $\#I_i$ zu beweisen. Es gilt

$$\dim_{D_i^{op}} \mathrm{Hom}_A(M_i , M) = \dim_{D_i^{op}} \mathrm{Hom}_A(M_i , \oplus_{j\in I} (M_j)^{(I_j)})$$

$$=^{183} \dim_{D_i^{op}} \oplus_{j\in I} \mathrm{Hom}_A(M_i , (M_j)^{(I_j)})$$

$$= \dim_{D_i^{op}} \mathrm{Hom}_A(M_i , (M_i)^{(I_i)}) \qquad \text{(Bemerkung A1.9(i))}$$

$$= \dim_{D_i^{op}} (D^{op})^{(I_i)} \qquad \text{(Bemerkung A1.9(iv))}$$

$$= \# I_i$$

QED.

A1.11 Klassifikation der halbeinfachen Ringe

Sei A ein halbeinfacher Ring. Dann gibt es nur endlich viele Isomorphie-Klassen einfacher A-Moduln. Seien

$$M_1,...,M_r$$

Repräsentanten dieser Isomorphieklassen. Dann gilt:

(i) A hat als Modul über sich selbst die Gestalt

$$A \cong (M_1)^{n_1}\oplus...\oplus(M_r)^{n_r}$$

mit eindeutig betimmen natürlichen Zahlen n_i. Insbesondere kommt jeder der Moduln M_i auf der rechten Seite wirklich vor.

(ii) Als Ring hat A die Gestalt

$$A \cong M_{n_1}(D_1^{op}) \times ... \times M_{n_r}(D_r^{op})$$

mit $D_i := \mathrm{End}_A(M_i)$, d.h. A ist direktes Produkt einfacher Ringe[184].

(iii) Ist A eine Algebra über einem kommutativen Ring (sodaß auch die Schiefkörper D_i solche Algebren sind), so kann der Isomorphismus von (ii) auch als Algebra-Isomorphismus über diesem Ring gewält werden.

(iv) Sind umgekehrt $D_1,...,D_r$ Schiefkörper und $n_1,...,n_r$ natürliche Zahlen, so ist der Ring

$$A := M_{n_1}(D_1^{op}) \times ... \times M_{n_r}(D_r^{op})$$

ein halbeinfacher Ring mit genau r verschiedenen Isomorphie-Klassen einfacher A-Moduln. Ist $M_1, ... , M_r$ ein Repräsentantensystem dieser Isomorphie-Klassen, so gilt bei geeigneter Wahl der Indizes

$$D_i \cong \mathrm{End}_A(M_i).$$

Beweis. Zu (i). Als halbeinfacher Ring ist A ein halbeinfacher Modul über sich selbst (nach A1.6), also direkte Summe von einfachen Moduln (nach A1.4). Die Anzahl der direkten Summanden ist endlich, weil A über sich selbst von einem Element (dem

183 weil M_i als einfacher Modul von einem Element erzeugt wird.

184 vgl. mit dem Satz von Wedderburn 2.1.5.

Einselement) erzeugt wird (nach A1.5). Damit hat A die angegebene Gestalt, zumindest mit nicht-negativen ganzen Zahlen n_i. Wir haben noch zu zeigen, daß jeder Modul M_i in der Zerlegeung von (i) wirklich vorkommt. Nun wird M_i als einfacher A-Modul von einem Element erzeugt, sagen wir

$$M_i = Am_i .$$

Es gibt also eine surjektive A-lineaere Abbildung

$$A \twoheadrightarrow M_i , a \mapsto am_i .$$

Bei dieser Sujektion wird jeder nicht zu M_i isomorphe direkte Summand in die 0 abgebildet (nach dem Lemma von Schur A1.9). Also muß in der Zerlegung von A ein zu M_i isomorpher direkter Summand wirklich vorkommen, d.h. M_i kommt mit einem Exponenten > 0 vor.

Zu (ii). Betrachten wir die Abbildung

(1) $$\varphi: A \longrightarrow \mathrm{End}_A(A), a \mapsto (x \mapsto xa),$$

welche jedem Element von A die Multiplikation mit a von rechts zuordnet. Diese Abbildung ist injektiv: für jedes $a \in A$ gilt

$$\varphi(a)(1) = a.$$

Zeigen wir, φ ist auch surjektiv. Für jede A-Lineare Abbildung

$$f: A \longrightarrow A$$

und jedes $a \in A$ gilt

$$f(a) = f(a\bullet 1) = a\bullet f(1),$$

d.h. f ist gerade die Multiplikation von rechts mit $f(1) \in A$ und liegt damit im Bild von (1).

Weiter gilt für $a,b \in A$

$$\varphi(ab)(x) = xab = \varphi(b)(ax) = \varphi(b)(\varphi(a)(x),$$

d.h.

$$\varphi(ab) = \varphi(b)\circ\varphi(a).$$

Damit ist φ ein Anti-Isomorphismus , d.h. es gilt

$$A^{op} = \mathrm{End}_A(A).$$

Mit (i) erhalten wir nun

$$A^{op} \cong \mathrm{End}_A((M_1)^{n_1}\oplus...\oplus(M_r)^{n_r}).$$

Jede Abbildung f aus der Menge rechts definiert eine Matrix

$$X(f) := (p_j\circ f\circ q_i)_{i,j=1,...,r}$$

Dabei bezeichne p_j die natürliche Projektion auf den j-ten direkten Summanden und q_i die natürliche Einbettung des i-ten direkten Summanden. Der Eintrag in der Position (i,j) ist also eine A-lineare Abbildung

$$(M_i)^{n_i} \longrightarrow (M_j)^{n_j}$$

Nach dem Lemma von Schur ist die Matrix X(f) eine Diagonalmatrix. Wir erhalten

$$\begin{aligned} A^{op} &\cong \mathrm{End}_A((M_1)^{n_1})\times...\times\mathrm{End}_A((M_r)^{n_r}) \\ &\cong M_{n_1}(\mathrm{End}_A(M_1))\times...\times M_{n_r}(\mathrm{End}_A(M_r)) \end{aligned}$$

$$\cong M_{n_1}(D_1)\times\ldots\times M_{n_r}(D_r),$$

also

$$A = (A^{op})^{op} \cong M_{n_1}(D_1^{op})\times\ldots\times M_{n_r}(D_r^{op}).$$

Zu (iii). Ergibt sich aus den Rechnungen von (ii).
Zu (iv). Die Halbeinfachheit von A ergibt sich aus der Halbeinfachheit der direkten Produkte halbeinfacher Ringe (A1.8) und der Halbeinfachheit der Matrizenalgebren (A1.7).

Wir haben noch die Anzahl der Isomorphie-Klassen einfacher A-Moduln zu bestimmen und die Isomorphien

$$D_i \cong End_A(M_i).$$

zu beweisen.
Wir setzen

$$M_i := (D_i^{op})^{n_i}$$

und denken uns M_i versehen mit der natürlichen Operation des Matrizenrings

$$A_i := M_{n_i}(D_i^{op})$$

(vgl. Beispiel A1.7). Nach (i) und Beispiel A1.7 ist M_i bis auf Isomorphie der einzige einfache A_i-Modul. Je zwei der Moduln M_i sind nicht isomorph. Ist

$$\varphi: M_i \longrightarrow M_j$$

ein A-linearer Isomorphismus und e_i das Einselement von A_i, so gilt $e_i\bullet M_j = 0$ (nach Definition der A-Multiplikation auf M_j). Für jedes $m\in M_i$ ist deshalb

$$\varphi(m) = \varphi(e_i m) = e_i\bullet\varphi(m) = 0,$$

im Widerspruch zur Bijektivität von φ.

Nun ist A_i direkte Summe von n_i Linksidealen, und diese sind als Moduln isomorph zu M_i (vgl. A1.7), d.h. A_i hat als Modul über sich selbst die Gestalt

$$A_i \cong (M_i)^{n_i}$$

(nach (i)). Die Modulstruktur von M_i über A_i definiert eine Modulstruktur von M_i über A, und A hat als Modul über sich selbst die Gestalt

$$A = A_1\oplus\ldots\oplus A_r = (M_1)^{n_1}\oplus\ldots\oplus(M_r)^{n_r}.$$

Nach (i) sind damit die Moduln $M_1,\ldots,M_r$ die bis auf Isomorphie einzigen einfachen A-Moduln. Schließlich ist

$$D_i^{op} \longrightarrow End_{A_i}((D_i^{op})^{n_i}) = End_{A_i}(M_i),\ d \mapsto (x \mapsto xd),$$

ein Anti-Isomorphismus (siehe die Bemerkung zum Beweis 2.1.9 des Satzes von Wedderburn). Also gilt

$$D_i \cong End_{A_i}(M_i) = End_A(M_i).$$

QED.

A1.12 Das Lemma von Speiser

Seien K/k eine endliche Galois-Erweiterung mit der Gruppe G = Gal(K/k) und V ein K-Vektorraum mit einer semi-linearen Operation

$$G \times V \longrightarrow V, (\sigma, v) \mapsto \sigma v,$$

d.h.

$$\sigma(cv) = \sigma(c)\sigma(v) \text{ für } \sigma \in G, v \in V, c \in K.$$

Dann ist die natürliche Abbildung

$$\lambda: K\otimes_k V^G \longrightarrow V, c\otimes v \mapsto cv,$$

ein Isomorphismus. Dabei bezeichne

$$V^G := \{v\in V \mid \sigma v = v \text{ für } \sigma\in G\}$$

den Raum der G-invarianten Vektoren von V.

Beweis. Bezeichne

$$K[G] := \oplus_{\sigma\in G} K\bullet\sigma$$

den getwisteten Gruppenring von G über K, d.h. die Multiplikation

$$K[G]\times K[G] \longrightarrow K[G]$$

sei biadditive mit

$$(c\bullet\sigma)(c'\bullet\sigma') = c\bullet\sigma(c')\bullet\sigma\bullet\sigma'.$$

Die so definierte Multiplikation ist assoziativ wegen

$$\begin{aligned}((c\bullet\sigma)(c'\bullet\sigma'))(c''\sigma'') &= (c\bullet\sigma(c')\bullet\sigma\bullet\sigma')(c''\sigma'')\\ &= c\bullet\sigma(c')\bullet\sigma(\sigma'(c''))\bullet\sigma\bullet\sigma'\bullet\sigma''\\ &= c\bullet\sigma(c'\bullet\sigma'(c''))\bullet\sigma\bullet\sigma'\bullet\sigma''\\ &= (c\bullet\sigma)(c'\bullet\sigma'(c'')\bullet\sigma'\bullet\sigma'')\\ &= (c\bullet\sigma)((c'\bullet\sigma')(c''\sigma''))\end{aligned}$$

<u>1. Schritt</u>: die K-lineare Abbildung

$$\varphi:K[G] \longrightarrow \mathrm{End}_k K, \quad \sum_{\sigma\in G} c_\sigma\bullet\sigma \mapsto (c \mapsto \sum_{\sigma\in G} c_\sigma\bullet\sigma(c)),$$

ist ein Isomorphismus von k-Algebren.

Die Abbildung ist ein Ring-Homomorphismus: für je zwei Elemente

$$u := \sum_{\sigma\in G} c_\sigma\bullet\sigma \text{ und } v := \sum_{\tau\in G} d_\tau\bullet\tau$$

und jedes c∈K gilt nämlich

$$\begin{aligned}\varphi(u\bullet v)(c) &= \varphi(\sum_{\sigma\in G}\sum_{\tau\in G} c_\sigma\bullet\sigma(d_\tau)\bullet\sigma\bullet\tau)(c)\\ &= \sum_{\sigma\in G}\sum_{\tau\in G} c_\sigma\bullet\sigma(d_\tau)\bullet\sigma(\tau(c))\\ &= \sum_{\sigma\in G}\sum_{\tau\in G} c_\sigma\bullet\sigma(d_\tau\tau(c))\\ &= (\sum_{\sigma\in G} c_\sigma\bullet\sigma)(\sum_{\tau\in G} d_\tau\tau(c))\end{aligned}$$

$$= \varphi(u)(\varphi(v)(c))$$
$$= (\varphi(u)\circ\varphi(v))(c),$$

d.h. es ist

$$\varphi(u\bullet v) = \varphi(u)\circ\varphi(v).$$

Berechnen wir den Kern von φ. Sei $u = \sum_{\sigma\in G} c_\sigma\bullet\sigma$ ein Element aus dem Kern, d.h.

$$\varphi(u)(c) = c \text{ für jedes } c \in K,$$

d.h.

$$\sum_{\sigma\in G} c_\sigma\bullet\sigma(c) = c \text{ für jedes } c \in K$$

Nach dem Satz (von Artin)[185] von der linearen Unabhängigkeit der Elemente von G über K folgt

$$c_\sigma = 0 \text{ für } \sigma \neq e \text{ (neutrales Element von G)}$$
$$c_e = 1,$$

d.h. es ist u = 1•e = Einselement von K[G]. Der Kern von φ ist somit trivial und die Abbildung ist injektiv. Zum Beweis der Surjektivität reicht es zu zeigen, die k-Vektorraum-Dimensionen von Definitionsbereich und Bild sind gleich. Sei n := [K:k]. Dann gilt

$$\dim_k K[G] = \dim_k K\bullet \#G = [K:k] \bullet \# G = n^2$$

und

$$\dim_k \mathrm{End}_k(K) = (\dim_k K)^2 = n^2.$$

2. Schritt. Der Ring K[G] ist halbeinfach und K ist bis Isomorphie der einzige einfache K[G]-Modul.

Zunächst beachten wir, auf Grund des ersten Schrittes[186] ist durch

$$K[G] \times K \longrightarrow K, \left(\sum_{\sigma\in G} c_\sigma\bullet\sigma, c\right) \mapsto \sum_{\sigma\in G} c_\sigma\bullet\sigma(c),$$

eine Operation von K[G] auf K definiert. Diese ist biadditiv und definiert so auf K eine K[G]-Modulstruktur. Da jeder K[G]-Modul insbesondere ein K-Vektorraum ist und K als K-Vektorraum die Dimension 1 besitzt, ist

K einfacher K[G]-Modul.

Nach dem ersten Schritt ist K[G] isomorph zu einer Matrizen-Algebra und ist damit halbeinfach (nach A1.7). Außerdem gibt es bis auf Isomorphie nur einen einfachen K[G]-Modul (nach A1.11), denn jede Matrizen-Algebra ist direkte Summe von Linksidealen, die als Moduln alle zueinander isomorph sind (nach A1.7).

3. Schritt. Beweis der Behauptung.

Die Semilinearität der Operation von G auf dem K-Vektorraum V bedeutet, V hat die Struktur eines K[G]-Moduls. Weil K[G] halbeinfach ist, ist V als K[G]-Modul direkte Summe einfacher Moduln, d.h.

$$V = K^{(I)}$$

mit einer Index-Menge I. Damit gilt

---

[185] Wir fassen die Elemente von G als Gruppenhomomorphismen

$$K^* \longrightarrow K^*$$

auf, d.h. als Charaktere der multiplikativen Gruppe von K mit Werten in K.

[186] genauer auf Grund des dort bewiesenen Assoziativgesetzes.

$$V^G = (K^{(I)})^G = (K^G)^{(I)} = k^{(I)}$$

also

$$K\otimes_k V^G = K\otimes_k k^{(I)} = K^{(I)} = V.$$

QED.

A2 Limites

A2.1 Definition

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein (filtriertes) <u>direkes System</u> oder auch <u>induktives System</u> in $\mathcal{C}$ besteht aus

1. einer gerichteten halbgeordneten Menge $(\Lambda, \le)$,
2. einem Objekt B_α von $\mathcal{C}$ für jedes $\alpha \in L$,
3. einem Morphismus $\psi_{\alpha\beta}: B_\alpha \longrightarrow B_\beta$ für je zwei Elemente $\alpha,\beta\in\Lambda$ mit $\alpha \le \beta$.

Dabei wird gefordert, daß für je drei $\alpha,\beta,\gamma\in\Lambda$ mit $\alpha\le\beta\le\gamma$ gilt

$$\psi_{\alpha\gamma} = \psi_{\beta\gamma}\circ\psi_{\alpha\beta}.$$

Ein direkter oder induktiver Limes eines solchen System ist ein Objekt

$$B = \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$$

zusammen mit einer Familie von Morphismen

$$\{\psi_\alpha: B_\alpha \longrightarrow B\}_{\alpha\in\Lambda},$$

wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für je zwei Indizes $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $\alpha\le\beta$ ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{tikzcd} B_\alpha \arrow[rr, "\psi_{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "\psi_\alpha"'] & & B_\beta \arrow[dl, "\psi_\beta"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

(ii) Für jedes Objekt B' und jede Familie von Morphismen $\{\psi'_\alpha: B_\alpha \longrightarrow B'\}_{\alpha\in\Lambda}$ mit der Eigenschaft, daß für je zwei Indizes $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $\alpha\le\beta$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B_\alpha \arrow[rr, "\psi_{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "\psi'_\alpha"'] & & B_\beta \arrow[dl, "\psi'_\beta"] \\ & B' & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, gibt es genau einen Morphismus $\psi: B \longrightarrow B'$, sodaß die folgenden Diagramm kommutativ sind.

$$\begin{tikzcd} & B_\alpha \arrow[dl, "\psi_\alpha"'] \arrow[dr, "\psi'_\alpha"] & \\ B \arrow[rr, "\psi"] & & B' \end{tikzcd}$$

Bemerkungen

(i) Der direkte Limes eines direkten Systems ist, falls er exisitiert, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.[187]

(ii) Der in 4.2.3 definierte direkte Limes von abelschen Gruppen stimmt mit dem hier definierten im Fall $\mathcal{C}$ = Ab übereine (bis auf Isomorphie).[188]

(iii) Die direkten Systeme von $\mathcal{C}$ über einer festen (gerichteten) Index-Menge Λ bilden eine Kategorie. Falls der direkte Limes für jedes solche direkte System existiert, so wird der direkte Limes zum Funktor

$$\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} : (\text{direkte Systeme von } \mathcal{C} \text{ über } \Lambda) \longrightarrow \mathcal{C}.$$

(iv) Die gerichtete Menge Λ kann man als Kategorie ansehen, deren Objekte die Elemente von Λ sind und deren Hom-Mengen

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\alpha, \beta)$$

aus genau einem Element bestehen falls $\alpha\le\beta$ gilt und die leer sind im entgegengesetzten Fall. Ein direktes System über Λ in der Kategorie $\mathcal{C}$ ist dann gerade ein Funktor

---

[187] Liefern auch die in (ii) gegebenen Daten einen direkten Limes, so existiert auch ein Morphismus $\psi':B'\longrightarrow B$, der die analogen Diagramme kommutativ macht. Die Eindeutigkeitsbedingung in der Definition des direkten Limes hat dann aber zur Folge, daß $\psi\circ\psi'$ und $\psi'\circ\psi$ identische Morphismen sein müssen. Insbesondere sind B und B' isomorph (wobei der Isomorphismus durch die Kommutativität der zweiten Dreiecke von (ii) eindeutig festgelegt ist.

[188] Es reicht zu zeigen, der in 4.2.3 definierte direkte Limes hat die Universalitätseigenschaft des hier definieren direkten Limes. Seien also ein Objekt B' und die zugehörigen Morphismen wie in (ii) gegeben. Die Morphismen ψ'_α definieren dann einem Gruppen-Homomorphismus

$$\oplus_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \longrightarrow B', (b_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \mapsto \sum_{\alpha\in\Lambda} \psi'_\alpha(b_\alpha).$$

Die Kommutativität der oberen Dreiecke von (ii) hat zur Folge, daß sich dieser Homomorphismus über den direkten Limes im Sinne von 4.2.3 faktorisiert und so einen Gruppen-Homomorphismus

$$\psi: \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \longrightarrow B'$$

Nach Konstruktion ist die Verpflanzung von ψ entlang der natürlichen Einbettung

$$B_\alpha \longrightarrow \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \tag{1}$$

gerade der Morphismus ψ'_α. Mit anderen Worten, die zweiten Diagramme von (ii) sind kommutativ. Wir haben damit die Existenz des in der Definiton A2.1 erwähnten Morphismus ψ bewiesen.

Seien Eindeutigkeit ergibt sich aus der Kommutativität der zweiten Dreiecke von (ii): diese fordert, daß die Verpflanzung von ψ entlang der natürlichen Einbettung (1) gerade ψ'_α ist. Der Homomorphismus ψ ist dadurch auf dem Bild von (1) festgelegt. Da die Bilder der Homomorphismen (1) aber die Gruppe $\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$ erzeugen, ist ψ auf diese Weise vollständig festgelegt.

$$F:\Lambda \longrightarrow \mathcal{C}\,,\ \alpha \mapsto B_\alpha\,,\ \alpha \le \beta \mapsto B_\alpha \xrightarrow{\psi_{\alpha\beta}} B_\beta,$$

(v) Verwenden wir die in (iv) eingeführte Sprache, so kann man den direkten Limes des Funktors F identifizieren mit einem Paar

$$(\mathrm{const}_B, \xi)$$

bestehend aus einem <u>konstanten Funktor</u>

$$\mathrm{const}_B: \Lambda \longrightarrow \mathcal{C}, \quad \alpha \mapsto B, \alpha \le \beta \mapsto B \xrightarrow{id} B,$$

der jedem Objekt des Definitionsbereichs dasselbe Objekt B zuordnet und jedem Morphismus den identischen Morphismus von B. Die zweite Koordinate des Paars ist eine natürlichen Transformation

$$\begin{array}{ll} \xi:F\longrightarrow \mathrm{const}_B,\ \alpha\mapsto & F(\alpha) \longrightarrow \mathrm{const}_B(\alpha) \\ & \quad || \qquad\qquad\quad || \\ & \quad B_\alpha \xrightarrow{\psi_\alpha} \quad B \end{array}$$

Man beachte, die kommutativen Vierecke, die zu dieser natürlichen Transformation gehören, sind gerade die Dreiecke von Bedingung (i) der Definiton.

(vi) Die Universaltätseigenschaft der Definition bedeutet gerade, daß es für jede natürliche Transformation

$$\xi': F \longrightarrow \mathrm{const}_{B'}$$

mit Werten in einem konstanten Funktor $\mathrm{const}_{B'}$ genau eine natürliche Transformation[189]

$$\eta:\mathrm{const}_B \longrightarrow \mathrm{const}_{B'}$$

gibt mit $\xi' = \eta\circ\xi$.

(vii) Die obige Formulierung gestattet eine Verallgemeinerung des Begriffs des direkten Limes auf den Fall beliebiger Funktoren

$$F: \Lambda \longrightarrow \mathcal{C}$$

(d.h. lassen zu, daß Λ eine beliebige Kategorie ist). Ein <u>direkter Limes</u> von F ist ein Paar

$$(\mathrm{const}_B, \xi)$$

bestehend aus einem konstanten Funktor

$$\mathrm{const}_B: \Lambda \longrightarrow \mathcal{C}$$

und einer natürlichen Transformation $\xi:F \longrightarrow \mathrm{const}_B$ mit der Eigenschaft, daß es für jede natürliche Transformation ξ': F $\longrightarrow$ $\mathrm{const}_{B'}$ eine natürliche Transformation

$$\eta:\mathrm{const}_B \longrightarrow \mathrm{const}_{B'}$$

gibt mit $\xi' = \eta\circ\xi$.

(viii) Ein <u>inverses</u> oder auch <u>projektives System</u> in $\mathcal{C}$ ist definiert als direktes System in der dualen Kategorie $\mathcal{C}^{op}$. Ein <u>inverser</u> oder auch <u>projektiver Limes</u> ist definiert als direkter Limes in der dualen Kategorie.

A2.2 Iterierte direkte Limiten

Sei

---

[189] d.h. einen Morphismus B' $\longrightarrow$ B.

$$F\colon \mathcal{C}\times\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ein Funktor. Es gelte:

(i) Für jeden Funktor $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$, existiert der direkte Limes.

(ii) Für jeden Funktor $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ existiert der direkte Limes.

Dann existiert $\underrightarrow{\lim}$ F und ist gleich

$$\underset{(c,d)\in\mathcal{C}\times\mathcal{D}}{\underrightarrow{\lim}} F(c,d) = \underset{d\in\mathcal{D}}{\underrightarrow{\lim}} \left(\underset{c\in\mathcal{C}}{\underrightarrow{\lim}} F(c,d) \right).$$

Bemerkungen

(i) Aus der Universalitätseigenschaft des direkten Limes ergibt sich, daß die folgenden Zuordnung einen Funktor definiert.

(1) $$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E},\ c \mapsto \underrightarrow{\lim}\, F_c\,.$$

wenn F_c den Funktor $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$, $d \mapsto F(c,d)$ bezeichnet.

Ist nämlich $f\colon c \longrightarrow c'$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$, so erhält man für jedes $d\in\mathcal{D}$ einen Morphismus

$$F(c,d) \longrightarrow F(c',d)$$

und für jeden Morphismus $g\colon d\longrightarrow d'$ in $\mathcal{D}$ ein kommutatives Diagramm[190]

$$\begin{array}{ccc} F(c,d) & \xrightarrow{F(f,id_d)} & F(c',d) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(c,d') & \xrightarrow{F(f,id_{d'})} & F(c',d') \end{array}$$

Mit anderen Worten, man erhält eine natürliche Transformation $F_c \xrightarrow{f_*} F_{c'}$ und damit eine natürliche Transformation

(2) $$F_c \xrightarrow{f_*} F_{c'} \longrightarrow \mathrm{const}_{L(c')}$$

wenn $L(c')$ den direkten Limes von $F_{c'}$ bezeichnet. Auf Grund der Universalitätseigenschaft des direkten Limes faktorisiert sich die natürliche Transformation (2) auf genau eine Weise über den direkten Limes $L(c)$ von F_c, d.h. man erhält ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_c & \xrightarrow{f_*} & F_{c'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L(c) & \xrightarrow{L(f)} & L(c') \end{array}$$

Dabei haben wir das Objekt $L(c)$ bzw. $L(c')$ mit dem zugehörigen konstanten Funktor identifiziert. Die vertikalen Morphismen sind die natürlichen Morphismen in den direkten Limes und der untere horizontale Morphismus ist durch die Kommutativität dieses Diagramms eindeutig festgelegt. Auf diese Weise ist der gesuchte Funktor (1) definiert:

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E},\ c \mapsto L(c),\ f \mapsto L(f).$$

(ii) Als direkte Konsequenz des obigen Satzes ergibt sich, daß je zwei direkte Limiten miteinander kommutieren:

---

[190] Weil in $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ gilt $(f,id)\circ(id,g) = (f,g) = (id,g)\circ(f,id)$.

$$\varinjlim_{d\in\mathcal{D}} \left(\varinjlim_{c\in\mathcal{C}} F(c,d) \right) \cong \varinjlim_{c\in\mathcal{C}} \left(\varinjlim_{d\in\mathcal{D}} F(c,d) \right)$$

Beweis. Wir setzen wie bisher

$$L(c) := \varinjlim_{d\in\mathcal{D}} F(c,d).$$

Für jedes Paar von Objekten $(c,d) \in \mathcal{C}\times\mathcal{D}$ hat man einen natürlichen Morphismus

$$F(c,d) \longrightarrow L(c)$$

und für jeden Morphismus $(c \xrightarrow{f} c', d \xrightarrow{d} d')$ in $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} F(c,d) & \xrightarrow{F(f,id)} & F(c',d) & \xrightarrow{F(id,g)} & F(c',d') \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ L(c) & \xrightarrow{L(f)} & L(c') & & \end{array}$$

Das rechte Dreieck ist dabei kommutativ, da die natürlichen Abbildung in den direkten Limes von der natürlichen Abbildung in den zugehörigen konstanten Funktor kommt.

Bezeichne LL den direkten Limes des Funktors $c \mapsto L(c)$. Dann liefert das obige Diagramm zusammen mit der natürlichen Transformation $L \longrightarrow const_{LL}$ kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(c,d) & \xrightarrow{F(f,g)} & F(c',d') \\ \downarrow & & \downarrow \\ LL & = & LL \end{array}$$

d.h. wir erhalten eine natürliche Transformation (von Bifunktoren)

$$\xi{:}F \longrightarrow const_{LL}.$$

Wir haben zu zeigen, diese ist universell in Bezug auf natürliche Transformation von F mit Werten in einem konstanten Funktor. Sei also

$$\xi'{:}\ F \longrightarrow const_M$$

eine weitere natürliche Transformation mit Werten in einem konstanten Funktor, d.h. die Diagramme

(3)
$$\begin{array}{ccc} F(c,d) & \xrightarrow{F(f,g)} & F(c',d') \\ \xi'_{c,d}\downarrow & & \downarrow\xi_{c',d'} \\ M & = & M \end{array}$$

seien kommutativ. Speziell für c' = d und f = id erhält man eine natürliche Transformation

$$F_c \longrightarrow const_M$$

von Funktoren $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$. Diese faktoriesiert sich

$$F_c \longrightarrow const_{L(c)} \longrightarrow const_M$$

auf Grund der Universalitätseigenschaft des direkten Limes von F_c. Aus (3) erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(c,d) & \xrightarrow{F(f,g)} & F(c',d') \\ \downarrow & & \downarrow \\ L(c) & \longrightarrow & L(c') \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & = & M \end{array}$$

dessen mittlerer horizontaler Morphismus sich aus der Universalitäteigenschaft des direkten Limes L(c) ergibt (und die Zuordnung $c \longrightarrow L(c)$ wie oben beschrieben zum Funktor macht). Wir erhalten so eine natürliche Transformation

$$L \longrightarrow \mathrm{const}_M$$

Diese Faktorisiert sich über den konstanten Funktor zum direkten Limes von L, d.h. wir erhalten eine natürliche Transformation

(4) $$\mathrm{const}_{LL} \longrightarrow \mathrm{const}_M.$$

Wir haben gezeigt, die natürliche Transformation ξ': $F \longrightarrow \mathrm{const}_M$ faktorisiert sich über const_{LL}. Die Eindeutigkeit der natürlichen Transformation (4) zeigt man so ähnlich.
QED.

A2.3 (Filtrierte) direkte Limites in Ens

Seien Λ eine gerichtete Menge und $(X_\alpha, \psi_{\alpha\beta}: X_\alpha \longrightarrow X_\beta)$ ein direktes System von Mengen mit der Index-Menge Λ. Dann gilt

$$\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \cong (\bigcup X_\alpha)/\sim.$$

Dabei bezeichne "$\bigcup$" die disjunkte Vereinigung und $\sim$ die Äquivalenz-Relation, bei welcher zwei Elemente $x_\alpha \in X_\alpha$ und $x_\beta \in X_\beta$ genau dann äquivalent sind, wenn es ein $\gamma\in\Lambda$ gibt mit $\psi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = \psi_{\alpha\gamma}(x_\beta)$.
Beweis: siehe Bemerkung A2.1 (ii) und den zugehörigen Beweis.
QED.

A2.3 Der Hom-Funktor bei direkten Limites

Seien Λ eine gerichtete Menge,

$$F: \Lambda \longrightarrow \mathcal{D}, \alpha \mapsto d_\alpha$$

ein direktes System, welches in $\mathcal{D}$ einen direkten Limes besitzt, und $d \in \mathcal{D}$. Dann gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(d, \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} d_\alpha) \cong \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(d, d_\alpha).$$

Beweis. Für jedes $d\in\mathcal{D}$ bezeichne

$$h_d: \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Ens},\ x \mapsto h_d(x) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d,x)$$

den kovarianten Hom-Funktor. Wir haben zu zeigen,

(1) $$\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} (h_d(d_\alpha)) = h_d(\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} d_\alpha)$$

(und insbesondere, daß die linke Seite existiert). Die natürlichen Morphismen in den direkten Limes

$$d_\alpha \longrightarrow \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} d_\alpha,\ \alpha\in\Lambda,$$

definieren Abbildungen

$$h_d(d_\alpha) \longrightarrow h_d(\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} d_\alpha) \text{ für jedes } \alpha\in\Lambda,$$

(genauer: eine natürliche Transformation mit Werten im konstanten Funktor). Es reicht zu zeigen, daß diese Abbildungen die Universalitätseigenschaft der linken Seite von (1) haben. Sei eine weitere Familie von Abbildungen

(2) $$h_d(d_\alpha) \longrightarrow M,\ \alpha\in\Lambda,$$

mit Werten in einer Menge M gegeben, die eine natürliche Transformation

$$\xi' : h_d \circ F \longrightarrow const_M$$

definieren. Die Familie (2) läßt sich trivialerweise auf die disjunkte Vereinigung der Mengen $h_d(d_\alpha)$ fortsetzen,

(3) $$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} h_d(d_\alpha) \longrightarrow M$$

Die Aussage, daß diese Abbildungen eine natürliche Transformation definieren, bedeutet gerade, daß zwei Elemente aus diesen Hom-Mengen, die bei irgendwelchen der Abbildungen $h_d(d_\alpha) \longrightarrow h_d(d_\beta)$ mit $\alpha \le \beta$ dasselbe Bild haben, auch in M dasselbe Bild haben müssen. Mit anderen Worten, die Abbildung (3) faktorisiert sich über die Äquivalenzklassen bezüglich der din A2.2 beschriebenen Äquivalenz-Relation und liefert eine Abbildung

$$\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} h_d(d_\alpha) \longrightarrow M.$$

Diese ist bereits eindeutig festgelegt, wenn man ihre Werte auf den Bildern der natürlichen Abbildungen

$$h_d(d_\alpha) \longrightarrow \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} h_d(d_\alpha)$$

(da diese den direkten Limes überdecken), d.h. sie ist durch die Abbildungen (2) eindeutig festgelegt.
QED.

A2.4 Der Hom-Funktor bei inversen Limites

Seien Λ eine gerichtete Menge,

$$F: \Lambda \longrightarrow \mathcal{D},\ \alpha \mapsto d_\alpha$$

ein inverses System, welches in $\mathcal{D}$ einen inversen Limes besitzt, und $d \in \mathcal{D}$. Dann gilt

$$Hom_{\mathcal{D}}(\varprojlim_{\alpha\in\Lambda} d_\alpha, d) \cong \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} Hom_{\mathcal{D}}(d_\alpha, d).$$

Beweis. Ein inverses System in $\mathcal{D}$ ist ein direktes System in der dualen Kategorie $\mathcal{D}^{op}$. Die Behauptung folgt damit aus A2.3.
QED.

A3 Maximale Teilkörper von Divisionsalgebren

frei nach
I.N. Herstein, Noncommutative rings, John Wiley and sons, 1968

Aussagen dieses Abschnitts werden im Beweis 4.5.6 von Aussage 4.5.3 benötigt.

A3.1 Zentralisatoren

Seien A ein Ring und $S \subseteq A$ eine Teilmenge von A. Dann heißt die Menge

$$C_A(S) := \{x \in A : xs = sx \text{ für jedes } s \in S\}$$

Zentralisator von S in A.

Bemerkung

Für jeden Schiefkörper D ist $C_D(S)$ ist ein Teilschiefkörper von D.

Beispiel

Sei A eine k-Algebra und

$$E := \mathrm{End}_k(A)$$

die Algebra der k-linearen Abbildungen $A \longrightarrow A$.

Wir betrachten die Abbildungen

$R: A \longrightarrow E,\ a \mapsto (x \mapsto xa),$

$L: A \longrightarrow E,\ a \mapsto (x \mapsto ax),$

und setzen

$A_r := R(A),$

$A_\ell := L(A).$

Dann gilt

$$C_E(A_r) = A_\ell \text{ und } C_E(A_\ell) = A_r.$$

Beweis. Da jede Multiplikation von links mit jeder Multiplikation von rechts kommutiert, gilt

$$A_\ell \subseteq C_E(A_r) \text{ und } A_r \subseteq C_E(A_\ell).$$

Beweisen wir die umgekehrten Inklusionen. Für $f \in C_E(A_r)$ gilt

$$f \circ \rho_a = \rho_a \circ f \text{ für jedes } a \in A,$$

also

$$f(xa) = f(x)a \text{ für beliebige } a,x \in A.$$

Insbesondere ist $f(a) = f(1)a$ für jedes $a \in A$, d.h. f ist gerade die Multiplikation von links mit a, $f \in A_\ell$.

Die verbleibende Imklusion wird analog bewiesen.

QED.

A3.2 Dichte Operation eines Ringes auf einem Modul

Seien R ein Ring und M ein einfacher R-Modul. Dann ist der Ring der R-linearen Endomorphismen

$$\Delta := \mathrm{End}_R(M)$$

von M nach dem Lemma von Schur ein Schiefkörper, und M läßt sich als Vektorraum über Δ auffassen bezüglich der Multiplikation

$$\Delta \times M \longrightarrow M,\ (\delta, m) \mapsto \delta(m).$$

Dann sagt man, operiert R dicht auf M oder auch R ist dicht auf M, wenn es für beliebig vorgegebene Δ-linear unabhängige Elemente

$$m_1,\ldots,m_n \in M$$

und beliebig vorgegebene Elemente

$$m'_1,...,m'_n \in M$$

ein Element $r \in R$ gibt mit

$$r \cdot m_i = m'_i \text{ für } i = 1,...,n.$$

Bemerkungen

(i) Ist M als Δ-Vektorraum endlich-dimensional und als R-Modul exakt, so ist R als Ring isomorph zum Ring der Δ-linearen Endomorphismen von M,[191]

$$R \cong \mathrm{End}_\Delta(M),\ r \mapsto (m \mapsto r \cdot m).$$

(ii) Den Ring $\mathrm{End}_\Delta(M)$ kann man dann mit dem Matrizen-Ring $M_n(\Delta^{op})$ über dem zu Δ entgegengesetzten Ring identifizieren (mit $n = \dim_\Delta M$).[192]

(iii) Versieht man M mit der diskreten Topologie und $\mathrm{End}_\Delta(M)$ mit der kompakt-offenen Topologie, so operiert R genau dann dicht auf M, wenn das Bild von R bei der Abbildung

$$R \longrightarrow \mathrm{End}_\Delta(M),\ r \mapsto (m \mapsto r \cdot m),$$

eine dichte Teilmenge ist.

A3.3 Der Dichte-Satz

Seien R ein Ring[193], M ein einfacher exakter R-Modul. Dann ist R dicht auf M.

Beweis. Sei $\Delta = \mathrm{End}_R(M)$. Dann ist Δ ein Schiefkörper (weil M einfach ist über R).

1. Schritt. Reduktion auf die folgende Aussage.

(1) Für jeden endlich-dimensionalen linearen Unterraum $V \subseteq M$ über Δ und jedes Element $m \in M - V$ gibt es ein $r \in R$ mit $rV = 0$ und $rm \neq 0$.

Nehmen wir an, ein solches Element r existiert stets. Dann gilt $Rrm \neq 0$, also

$$Rrm = M$$

(weil M einfach ist). Insbesondere gibt es damit ein $s \in R$ derart, daß srm gleich einem beliebig vorgegebenen Element von M ist während außerdem noch $srV = 0$ gilt.

Seien jetzt

$$m_1, \ldots, m_n \in M$$

---

191 Weil M ein exakter Modul ist, ist der angegebene Ring-Homomorphismus injektiv. Zum Beweis der Surjektivität fixieren wir eine Δ-Vektorraum-Basis $m_1,...,m_n \in M$. Sei

$$f\colon M \longrightarrow M$$

ein Δ-linearer Endomorphismus. Weil R dicht sein soll auf M, gibt es ein $r \in R$ mit

$$f(m_i) = r \cdot m_i.$$

Dann ist r ein Urbild von f in R.

192 Wir müssen Δ durch den zugehörigen entgegengesetzten Ring Δ^{op} ersetzen auf Grund der Art, wie wir die Multiplikation auf dem Endomorphismen-Ring definiert haben: für $f \in \mathrm{End}_\Delta(M)$ und $\delta \in \Delta$ ist $\delta \cdot f$ der Endomorphismus

$$M \longrightarrow M,\ m \mapsto f(\delta(m)).$$

193 Wir nehmen hier an, alle Ring besitzen ein Einselement. Der Satz gilt jedoch in allgemeinerem Kontext (für primitive Ringe).

Elemente, welche linear unabhängig über Δ sind, und

$$m'_1,\ldots,m'_n \in M$$

beliebig vorgegebene Elemente. Sei

$$V_i = \Delta m_1+\ldots+\widehat{\Delta m_i}+\ldots+\Delta m_n$$

der von allen m_j mit Ausnahme des i-ten erzeugte lineare Unterraum von M. Weil die m_j linear unabhängig sind, gilt

$$m_i \notin V_i \text{ für jedes } i\,.$$

Also gibt es ein $t_i \in R$ mit

$$t_i m_i = m'_i \text{ und } t_i V_i = 0 \text{ für jedes } i.$$

Mit $t = t_1+\ldots+t_n$ gilt dann

$$t\bullet m_i =^{194} m'_i \text{ für } i = 1, \ldots ,n.$$

2. Schritt. Beweis der Aussage (1) des ersten Schrittes.
Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Dimension des linearen Unterraums $V \subseteq M$ über Δ.
Ist $\dim_\Delta V = 0$, so ist $V = 0$ und die Behauptung ist trivial. Sei jetzt $\dim_\Delta V > 0$ und

(1) $$V = V'+\Delta v_0 \text{ und } v_0 \notin V'.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für jedes $m\in M-V'$ ein $r\in R$ mit

$$rV' = 0 \text{ und } r\bullet m \neq 0.$$

Wir setzen

(2) $$A(V') := \{x\in R : xV' = 0\}.$$

Dann gibt es für jedes $m\in M-V'$ ein $r\in A(V')$ mit $r\bullet m \neq 0$. Anders ausgedrückt, es gilt

(3) $$m\in M,\ A(V')m = 0 \Rightarrow m\in V'.$$

Nach Definition (2) ist die Menge A(V') ein Linksideal von R. Wegen $v_0 \notin V'$ gilt

$$A(V')v_0 \neq 0.$$

Da $A(V')v_0$ ein Teilmodul des einfachen Moduls M ist, folgt

(4) $$A(V')v_0 = M.$$

Nehmen wir jetzt an, die zu beweisende Aussage ist falsch, d.h. es gibt ein

(*) $$m\in M - V$$

derart, daß die folgende Implikation besteht.

(5) $$r \in R,\ rV = 0 \Rightarrow rm = 0.$$

Wir haben zu zeigen, dies ist unmöglich. Zum Beweis betrachten wir die folgende Abbildung

(6) $$\tau: M \longrightarrow M,\ av_0 \mapsto am \text{ für } a\in A(V').$$

Zeigen wir zunächst, dies ist eine auf ganz M korrekt definierte Abbildung. Zunächst läßt sich jedes Element von M in der Gestalt av_0 schreiben mit $a\in A(V')$ (wegen (4)).

Seien jetzt $a,a'\in A(V')$ zwei Elemente mit

---

194 m_i wird von allen Summanden von t annulliert, außer von t_i.

$$av_0 = a'v_0.$$

Wir haben zu zeigen, am = a'm. Es gilt $(a-a')v_0 = 0$. Wegen $a-a'\in A(V')$ gilt außerdem

$$(a-a')V' = 0$$

(nach Definition (2)), also

$$(a-a')V = 0$$

(weil V von V' und v_0 erzeugt wird, (1)). Nach (5) ist dann aber $(a-a')m = 0$, also am=a'm. Wir haben gezeigt, die Abbildung (6) ist korrekt definiert. Aus der Definition (6) von τ liest man ab, daß τ ein Homomorphismus der additiven Gruppe von M ist und R-Vielfache in R-Vielfache abbildet (weil A(V') ein linkes Ideal von R ist). Mit anderen Worten, τ ist R-linear,

(7) $$\tau \in \mathrm{End}_R(M).$$

Für $a\in A(V')$ gilt damit

$$\begin{aligned} am &= \tau(av_0) && \text{nach Definition von } \tau \text{ (vgl. (6))} \\ &= a\bullet\tau(v_0) && \text{weil } \tau \text{ linear ist über R (vgl. (7))} \end{aligned}$$

also

$$a(m-\tau(v_0)) = 0.$$

Wir haben gezeigt,

$$A(V')\bullet(m-\tau(v_0)) = 0.$$

Nach (3) gilt damit

$$m- \tau(v_0) \in V',$$

also

$$m \in V' + \tau(v_0) \subseteq V' + \Delta\bullet v_0 = V.$$

Das Gleichheitszeichen rechts gilt nach Definition von V (vgl. (1)). Die Inklusion in der Mitte besteht wegen $\tau\in\Delta$.

QED.

A3.4 Maximale Teilkörper

Ein maximaler Teilkörper einer Divisionsalgebra D ist ein Teilkörper $K \subseteq D$, welcher in keinem Teilkörper von D echt enthalten ist.

Bemerkungen

(i) Jeder maximale Teilkörper K von D enthält automatisch das Zentrum von D,

$$C(D) \subseteq K,$$

denn andernfalls erhielte man durch Adjunktion von Zentrumselementen einen echt größeren Teilkörper von D.

(ii) Ist D eine Divisionsalgebra über dem Körper k, so gilt insbesondere

$$k \subseteq K \subseteq D.$$

A3.5 Kriterium für Maximalität

Seien D ein Schiefkörper und $K \subseteq D$ ein Teilkörper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) K ist maximaler Teilkörper von D.

(ii) $C_D(K) = K$.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i). Ist L ein Teilkörper von D mit $K \subseteq L \subseteq D$, so gilt

$$L \subseteq C_D(K) = K,$$

d.h. L = K.

<u>(i) ⇒ (ii)</u>. Trivialerweise gilt

$$K \subseteq C_D(K).$$

Sei umgekehrt $a \in C_D(K)$. Dann ist K(a) ein Teilkörper von D mit

$$K \subseteq K(a).$$

Weil K maximal ist, gilt das Gleichheitszeichen, d.h. $a \in K$. Damit gilt auch

$$C_D(K) \subseteq K.$$

QED.

A3.6 Das Zerfallen über den maximalen Teilkörpern

Seien D eine zentrale Divisionsalgebra über dem Körper k und K ein maximaler Teilkörper von D,

$$k \subseteq K \subseteq D.$$

Dann gilt

$$D \otimes_k K \cong \mathrm{End}_K(D).$$

Insbesondere zerfällt D über K.

Beweis (vgl. 4.5.2). Bezeichne D^{op} die zu D entgegengesetzte k-Algebra. Dann besteht eine Isomorphie

(1) $$D \otimes_k D^{op} \cong \mathrm{End}_k(D),\ a \otimes b \mapsto \rho_a \circ \lambda_b : x \mapsto bxa,$$

(vgl. den Beweis von 2.4.10)[195]. Auf Grund der Kommutativität von K besteht auch eine Inklusion[196]

$$K \subseteq D^{op},$$

und wir erhalten eine Injektion

(2) $$\iota : D \otimes_k K \longrightarrow \mathrm{End}_k(D).$$

Die Abbildungsvorschrift von (1) zeigt, das Bild von ι liegt sogar in $\mathrm{End}_K(D)$,

$$\mathrm{Im}(\iota) \subseteq \mathrm{End}_K(D)$$

(auf Grund der Kommutativität von K). Wir betrachten jetzt $D \otimes_k K$ als Teilmenge von $\mathrm{End}_K(D)$. Auf diese Weise wird D zum Modul über dem Ring $D \otimes_k K$. Für jedes von Null verschiedene Element $d \in D$ gilt,

$$d \otimes 1 \bullet D = \lambda_d(D) = d \bullet D = D$$

(weil D eine Divisionsalgebra ist). Insbesondere ist D ein einfacher Modul über $D \otimes 1 \subseteq D \otimes_k K$ und damit erst recht ein einfacher Modul über $D \otimes_k K$. Wegen der Injektivität von (2) ist der $D \otimes_k K$-Modul außerdem treu. Nach dem Dichte-Satz ist $D \otimes_k K$ dicht auf D.

Wir setzen

---

195 Dabei bezeichne R_a die Multiplikation mit a von rechts und L_b die mit b von links.

196 d.h. K ist ein Teilkörper von D^{op}.

$$\Delta = \mathrm{End}_{D\otimes_k K}(D).$$

Dies ist ein Schiefkörper (nach dem Lemma von Schur). Weil Δ insbesondere die Multiplikationen mit den Elementen aus k enthält, ist D als Δ-Modul endlich-dimensional. Die Dichte der Operation bedeuted deshalb,

$$D\otimes_k K \cong \mathrm{End}_\Delta(D).$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, $\Delta = K$.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta &= \{\varphi\in\mathrm{End}_k(D) : \alpha\varphi = \varphi\alpha \text{ für jedes } \alpha\in D\otimes_k K\}\\
&= \{\varphi\in\mathrm{End}_k(D) : \rho_a\varphi = \varphi\rho_a \text{ und } \lambda_b\varphi = \varphi\lambda_b \text{ für } a\in D \text{ und } b\in K\}\\
&= \{\varphi\in\mathrm{End}_k(D) : \varphi(x)\bullet a = \varphi(xa),\ b\bullet\varphi(x) = \varphi(bx) \text{ für } a, x \in D, b\in K\}\\
&= \{\varphi\in\mathrm{End}_K(D) : \varphi(1)\bullet a = \varphi(a) \text{ für } a \in D\}\\
&\subseteq^{197} D\otimes 1.
\end{aligned}$$

Die Linksmultiplikationen λ_b mit Elementen $b\in K$ liegen offenbar in Δ[198]:

$$1\otimes K \subseteq \Delta \subseteq D\otimes 1.$$

Schreiben wir abkürzend

$$K \subseteq \Delta \subseteq D.$$

Die Elemente von Δ kommutieren bei den so gewählten Einbettungen mit denen von K (wegen $\lambda_b\varphi = \varphi\lambda_b$ für $\varphi\in\Delta$ und $b\in K$),

$$K\subseteq\Delta\subseteq C_D(K).$$

Weil K ein maximaler Teilkörper von D ist, muß nach A3.6 überall das Gleichheitszeichen bestehen,

$$K = \Delta.$$

QED.

A3.7 Der Grad eines maximalen Teilkörpers

Seien D eine zentrale Divisionsalgebra über dem Körper k und K ein maximaler Teilkörper von D,

$$k \subseteq K \subseteq D.$$

Dann gilt

$$\dim_k K = \dim_K D = \deg_k D.$$

Beweis. Nach A3.7 gilt

$$D\otimes_k K \cong \mathrm{End}_K(D),$$

also

(1) $\dim_k D = \dim_K D\otimes_k K = (\dim_K D)^2.$

Außerdem ist

$$\dim_k D = \dim_K D\bullet\dim_k K.$$

---

[197] Die Abbildung φ ist gerade die Multiplikation von links mit $\varphi(1)$.

[198] Diese sind k-linear und kommutieren mit den Rechtsmultiplikationen R_a, $a\in D$, und den Linksmultiplikationen L_b, $b\in K$ (letzteres weil K kommutativ ist).

Durch Kürzen von $\dim_K D$ erhalten wir

$$\dim_k K = \dim_K D.$$

Nach Definition des Grades einer einfachen zentralen k-Algebra ist

$$\dim_k D = (\deg_k D)^2.$$

Vergleich mit (1) liefert

$$\dim_K D = \deg_k D.$$

QED.

Bemerkung

Unser nächstes Ziel ist es, zu zeigen, daß man den maximalen Teilkörper K separabel über k wählen kann. Dazu benötigen wir den Satz von Noether-Jacobson.

A3.8 Satz von Noether-Jacobson

Sei D eine zentrale Divisionsalgebra über dem Körper k mit $D \neq k$. Dann gibt es ein über k separables Element in D-k.

Beweis. Im Fall der Charakteristik Null ist jedes Element von D - k separabel über k. Wir können also o.B.d.A. annehmen, die Charakteristik von k ist

$$\mathrm{char}(k) = p > 0.$$

Angenommen die Behauptung ist falsch für D. Dann ist jedes Element von D rein inseparabel über k, d.h. für jedes $x \in D$ gibt es eine natürliche Zahl $n(x) \in \mathbb{N}$ mit

$$x^{p^{n(x)}} \in k.$$

Insbesondere existiert ein Element mit

$$a \in D - k,\ a^p \in k.$$

Wir betrachten die k-lineare Abbildung

$$\delta: D \longrightarrow D,\ x \mapsto xa - ax.$$

Wegen $a \notin k$ ist δ nicht identisch Null. Es gilt jedoch $\delta^p(x) =$[199] $xa^p - a^p x = 0$, d.h.

(1) $$\delta \neq 0,\ \delta^p = 0.$$

Sei $y \in D$ ein Element mit

---

[199] Für jede natürliche Zahl n gilt

$$\delta^n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a^i x a^{n-i}.$$

Für n = 1 ist das gerade die Definition. Leiten wir aus dieser Formel die analoge Formel für n+1 ab. Es gilt

$$\delta^n(x)a = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a^i x a^{n+1-i}.$$

$$-a\delta^n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} a^{i+1} x a^{n-i} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \binom{n}{i-1} a^i x a^{n+1-i}$$

also

$$\delta^{n+1}(x) = xa^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}\right) a^i x a^{n+1-i} + (-1)^{n+1} a^{n+1} x$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} a^i x a^{n+1-i}.$$

$$\delta(y) \neq 0.$$

Wegen (1) gibt es eine natürliche Zahl mit $1 < k \le p$ mit

$$\delta^{k-1}(y) \neq 0, \delta^k(y) = 0.$$

Wir setzen $x = \delta^{k-1}(y)$. Wegen k>1 kann man x in der Gestalt

$$x = \delta(w) = wa - aw \text{ mit } w \in D$$

schreiben. Nach Wahl von k ist $\delta(x) = 0$, d.h.

$$xa = ax.$$

Weil D ein Schiefkörper ist, kann man x in der folgenden Gestalt schreiben.

$$x = au \text{ mit } u \in D.$$

Weil x und a kommutieren, so kommutieren auch u und a.[200] Es folgt

$$au = x = wa - aw,$$

also

$$a = (wa-aw)u^{-1} = (wu^{-1})a - a(wu^{-1}) = ca - ac \text{ mit } c = wu^{-1}$$

also

$$c = (a+ac)a^{-1} = 1 + aca^{-1}$$

Weil nach Annahme die Elemente von D rein inseparabel über k sind, gilt

$$c^{p^t} \in k \text{ für ein } t \ge 0.$$

Nun ist

$$c^{p^t} = (1+aca^{-1})^{p^t} = 1 + (aca^{-1})^{p^t} = 1 + ac^{p^t}a^{-1} = 1 + c^{p^t}.$$

Wir ziehen auf beiden Seiten c^{p^t} ab und erhalten den Widerspruch 0 = 1.
QED.

A3.9 Tensorprodukte von einfachen Algebren

Seien A eine zentrale einfache k-Algebra und B eine einfache k-Algebra. Dann ist auch

$$A \otimes_k B$$

eine einfache k-Algebra.

Beweis. Sei I ein nicht-triviales Ideal in diesem Tensorprodukt,

$$0 \neq I \subseteq A \otimes_k B.$$

Sei u ein von Null verschiedenes Element dieses Ideals,

$$0 \neq u \in I.$$

Wir schreiben u in der Gestalt

(1) $$u = \sum_i a_i \otimes b_i \text{ mit } a_i \in A \text{ und } b_i \in B.$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, die Elemente

$$u_i \text{ sind linear unabhängig über k.}$$

Die Anzahl der von Null verschiedenen Koeffizienten a_i auf der rechten Seite von (1) wollen wir Länge von u nennen. Wir können annehmen, u ist ein Element minimaler Länge, diese Länge ist gleich m und die Zahl der Summanden rechts ist m:

$$u = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i \, , \, a_i \in A - \{0\}.$$

Für $r,s \in A$ gilt

[200] Es gilt xa = ax, also aua = aau. Durch Multiplikation von links mit a^{-1} erhält man ua = au.

$$(r\otimes 1)u(s\otimes 1) = ra_i s\otimes b_i \in I.$$

Weil A einfach ist, gilt $Aa_1A = A$, d.h. wir können u durch ein Element gleicher Länge mit $a_1 = 1$ ersetzen, d.h. wir können annehmen

$$a_1 = 1.$$

Für jedes Element $a\in A$ gilt

$$(a\otimes 1)u - u(a\otimes 1) \in U,$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^{m} (aa_i - a_i a)\otimes b_i \in U.$$

Der ersten Summand unter dem Summenzeichen ist jedoch 0 (da $a_1=1$ ist). Wegen der Minimalität der Länge von u, muß die Summe also gleich Null sein. Da die b_i linear unabhängig über k sind, folgt

$$aa_i - a_i a = 0 \text{ für } i = 1, ... , m \text{ und } a\in A.$$

Die Elemente a_i liegen somit im Zentrum von A, also in k,

$$a_i \in k \text{ für alle } a,$$

d.h.

$$u = 1\otimes \sum_{i=1}^{m} a_i b_i = 1\otimes b \text{ mit } b\in B.$$

Wegen $u \neq 0$ folgt $b \neq 0$. Wir erhalten

$$I \supseteq (1\otimes B)u(1\otimes B) = 1\otimes BuB = 1\otimes B.$$

Das Gleichheitszeichen rechts gilt, weil B einfach und $u \neq 0$ ist. Mit $I \supseteq 1\otimes B$ gilt aber

$$I \supseteq (A\otimes 1)(1\otimes B) = A\otimes_k B.$$

Das Ideal I gleich der gesamten Algebra. Wir haben gezeigt, die Algebra ist einfach.
QED.

A3.10 Satz von Noether-Skolem

Seien R eine zentrale einfache Algebra über dem Körper k und

$$A, B \subseteq R$$

zwei einfache k-Teilalgebren. Es gebe einen k-Algebra-Isomorphismus

$$F: A \longrightarrow B.$$

Dann hat F die Gestalt

$$F(a) = x^{-1}ax$$

mit einer Einheit $x \in R$.

Beweis. Wir betrachten den Matrizen-Ring über k,

$$E(R) := End_k(R)$$

und die Einbettungen

$\lambda: R \longrightarrow E(R), r \mapsto \lambda_r$, mit $\lambda_r(x) := rx$

$\rho: R \longrightarrow E(R), r \mapsto \rho_r$, mit $\rho_r(x) := xr$.

Wir bezeichnen die Bilder von R, A und B bei λ mit R_ℓ, A_ℓ und B_ℓ und diejenigen bei ρ mit R_r, A_r und B_r. Diese Bilder sind isomorph bzw. anti-isomorph zu R, A bzw. B, und wir werden diese bei Bedarf mit R, A, B bzw. R^{op}, A^{op}, B^{op} identifizieren.

Das Tensorprodukt $R_\ell \otimes_k A_r$ ist dann nach A3.9 eine einfache k-Algebra, deren natürliches Bild in E(R),

$$R_\ell \otimes_k A_r \longrightarrow E(R),\ \lambda_r \otimes \rho_a \mapsto (x \mapsto rxa),$$

wir mit $R_\ell A_r$. Die Tensoralgebra ist isomorph zu diesem Bild.[201] Analog ist $R_\ell \otimes_k B_r$ einfach und isomorph zu seinem natürlichen Bild $R_\ell B_r$ in E(R),

$$R_\ell \otimes_k B_r \longrightarrow E(R),\ \lambda_r \otimes \rho_b \mapsto (x \mapsto rxb).$$

Die gegebene Abbildung F induziert einen Isomorphismus

$$R_\ell \otimes_k A_r \longrightarrow R_\ell \otimes_k B_r,\ \lambda_r \otimes \rho_a \mapsto \lambda_r \otimes \rho_{F(a)}\ .$$

Wir betrachten jetzt R als Modul über dem Tensorprodukt $R_\ell \otimes_k A_r$ bezüglich der Operation

$$R_\ell \otimes_k A_r \times R \longrightarrow R,\ (\lambda_r \otimes \rho_a, x) \mapsto rxa.$$

und als Modul über $R_\ell \otimes_k B_r$ bezüglich der analogen Operation

$$R_\ell \otimes_k B_r \times R \longrightarrow R,\ (\lambda_r \otimes \rho_b, x) \mapsto rxb.$$

Beide Tensorprodukte sind als einfache k-Algebren Matrizen-Ringe über einer Divisions-Algebra (nach dem Satz von Wedderburn, 2.1.5). Als solche sind es aber halbeinfache Ringe (nach A1.11) mit nur einem einfachen Modul (bis auf Isomorphie, nach A1.11(i)[202] und 2.1.4[203]),

$R = U^m$ mit einem einfacher Modul U über $R_\ell \otimes_k A_r$

$R = V^n$ mit einem einfacher Modul V über $R_\ell \otimes_k B_r$

Weil die beiden Ringe isomorph sind, sind es auch die zugehörigen einfachen Moduln, d.h. es gibt eine k-lineare Bijektion

$$\sigma: U \longrightarrow V$$

mit

(1) $$\sigma(\lambda_r \rho_a u) = \lambda_r \rho_{F(a)} \sigma(u) \text{ für } r \in R,\ a \in A,\ u \in U.$$

Durch Vergleich der k-Vektorraum-Dimensionen sehen wir, es gilt

$$m = n.$$

Wir bezeichnen die durch σ induzierte Abbildung auf den n-fachen direkten Summen ebenfalls mit σ und erhalten so eine k-lineare Bijektion

$$\sigma: R \longrightarrow R$$

für welche ebenfalls (1) gilt (mit R anstelle von U).
Aus (1) erhalten wir speziell für u = 1, a = 1 die Relation

$$\sigma(r) = r \cdot \sigma(1) \text{ für jedes } r \in R.$$

---

[201] Die Abbildung ist ein von Null verschiedener k-Algebra-Homomorphismus. Der Kern ist somit ein Ideal, welches vom gesamten Ring verschieden ist. Wegen der Einfachheit muß dieser Kern trivial sein.
[202] Jeder einfache Modul tritt als direkter Summand des Rings auf.
[203] Matrizen-Ringe zerfallen in direkte Summen von minimalen Linksidealen, wobei diese Linksideale als Moduln zueinander isomorph sind.

mit $x := \sigma(1) \in R$ also

$$\sigma(r) = r\bullet x \text{ für jedes } r \in R.$$

Ebenfalls aus (1) erhalten wir für $r = u = 1$:

$$\sigma(a) = \sigma(1)F(a) = xF(a) \text{ für jedes } a \in A.$$

Zusammen ergibt sich

$$xF(a) = ax \text{ für jedes } a \in A.$$

Damit ist der Beweis der Behauptung auf die Aussage reduziert, daß

$$x = \sigma(1)$$

eine Einheit von R ist. Da σ bijektiv ist, gibt es ein $r \in R$ mit $\sigma(r) = 1$. Wegen (1) gilt

$$1 = \sigma(r) = \sigma(\lambda_r \rho_1 1) = \lambda_r \rho_{F(1)} \sigma(1) = r\bullet x$$

d.h. x besitzt ein Linksinverses. Weiter ist nach (1) auch

$$1 = \sigma(r) = \sigma(\lambda_1 \rho_r 1) = \lambda_1 \rho_{F(r)} \sigma(1) = x\bullet F(r),$$

d.h. x besitzt auch ein Rechtsinverses, ist somit eine Einheit.
QED.

A3.11 Satz vom doppelten Zentralisator

Seien A eine zentrale einfache Algebra über dem Körper k und

$$B \subseteq A$$

eine einfache Teilalgebra (über k). Dann gilt

(i) $C_A(B) = \{a \in A : ab = ba \text{ für } b \in B\}$ ist einfach.

(ii) $C_A(C_A(B)) = B$.

Beweis. <u>1. Schritt</u>: der Fall $A = E := \mathrm{End}_k(B) = M_n(k)$ ($n := \dim_k B$)

Wir betten B mit Hilfe der Multiplikation in die Matrizen-Algebra über k ein,

$$B \longrightarrow E := \mathrm{End}_k(B),\ b \mapsto \lambda_b,\ \lambda_b(x) = bx,$$

d.h. wir identifizieren B mit B_ℓ. Auf Grund es Beispiels von A3.1 gilt

$$C_E(B_\ell) = B_r$$

und

$$C_E C_E(B_\ell) = C_E(B_r) = B_\ell$$

Die Algebra B_r ist anti-isomorph zu B, also ebenfalls einfach.

Wir sehen so, die Behauptung ist richtig, sobald man die k-Algebra A durch die Matrizen-Algebra

$$E = \mathrm{End}_k(B)$$

ersetzt.

<u>2. Schritt</u>. Beweis von (ii).

Die k-Algebra

$$A \otimes_k E \text{ ist}$$

als Tensor-Produkt zentraler einfacher k-Algebren zentral und einfach.Wegen

$$B \cong B_\ell \subseteq E \text{ und } B \subseteq A$$

lassen sich $B \otimes 1$ und $1 \otimes B$ als k-Teilalgebren von $A \otimes_k E$ auffassen. Nach Voraussetzung sind diese einfach, und sie sind offensichtlich isomorph (zu B). Nach dem Satz von Noether-Skolem A3.10 sind sie in $A \otimes_k E$ konjugiert (bzgl. einer Einheit dieser k-Algebra). Dann sind aber auch die Zentralisatoren dieser Teilalgebren konjugiert (bzgl. derselben Einheit). Diese Zentralisatoren lassen sich wie folgt schreiben.

(1) $$C_{A\otimes_k E}(B\otimes 1) =^{204} C_A(B)\otimes_k E$$

(2) $$C_{A\otimes_k E}(1\otimes B) =^{205} A\otimes_k C_E(B)$$

Weil die Ringe rechts konjugiert sind in $A\otimes_k E$ (bzgl. einer Einheit), so sind es auch deren Zentralisatoren (bzgl. derselben Einheit). Letztere lassen sich in der folgenden Gestalt schreiben.

$$C_{A\otimes_k E}(C_A(B)\otimes_k E) =^{206} C_A(C_A(B))\otimes_k k \cong C_A(C_A(B))$$

$$C_{A\otimes_k E}(A\otimes_k C_E(B)) =^{207} k\otimes_k C_E(C_E(B)) \cong C_E(C_E(B))$$

---

[204] Für jedes $x\in C_A(B)$ und jedes $e\in E$ kommutiert $x\otimes e$ mit jedem Element von $B\otimes 1$. Deshalb gilt "$\supseteq$". Zum Beweis der umgekehrten Inklusion fixieren wir eine k-Vektorraum-Basis von E, sagen wir

$$E = k\bullet\omega_1+...+k\bullet\omega_{n^2}.$$

Jedes Element aus dem Zentralisator auf der linken Seiten läßt sich dann in der Gestalt

$$x = \sum_i a_i\otimes\omega_i$$

schreiben mit eindeutig bestimmen $a_i\in A$. Nach Wähl von x gilt für jedes $b\in B$:

$$0 = (b\otimes 1)x - x(b\otimes 1) = \sum_i (ba_i-a_ib)\otimes\omega_i$$

also $ba_i-a_ib = 0$. Somit liegen die a_i im Zentralisator $C_A(B)$, d.h. x liegt im Zentralisator auf der rechten Seite.

[205] Für jedes $x\in C_E(B)$ und jedes $a\in A$ kommutiert $a\otimes x$ mit jedem Element von $1\otimes B$. Deshalb gilt "$\supseteq$". Zum Beweis der umgekehrten Inklusion fixieren wir eine k-Vektorraum-Basis von A, sagen wir

$$A = k\bullet\omega_1+...+k\bullet\omega_m.$$

Jedes Element aus dem Zentralisator auf der linken Seiten läßt sich dann in der Gestalt

$$x = \sum_i \omega_i\otimes e_i$$

schreiben mit eindeutig bestimmen $e_i\in E$. Nach Wähl von x gilt für jedes $b\in B$:

$$0 = (1\otimes b)x - x(1\otimes b) = \sum_i \omega_i\otimes(be_i-e_ib)$$

also $be_i-e_ib = 0$. Somit liegen die e_i im Zentralisator $C_E(B)$, d.h. x liegt im Zentralisator auf der rechten Seite

[206] Wie oben folgt wieder "$\supseteq$". Jedes Element des Zentralisators der linken Seite kommutiert insbesondere mit jedem Element von $1\otimes E$. Letztere Menge enthält insbesondere alle Elementarmatrizen. Die einzigen mit diesen Matrizen kommutierenden Matrizen sind jedoch die Skalar-Matrizen, d.h. die linke Seite besteht auis lauter Skalar-Matrizen, d.h. aus Elementen von $A\otimes_k k \cong A$, welche mit den Elementen von $C_A(B)\otimes 1 \cong C_A(B)$ kommutieren.

Der Ring rechts in der zweiten Zeile ist nach dem ersten Schritt isomorph zu B, d.h. der in der ersten Zeile rechts ist konjugiert zu B,

$$C_A(C_A(B)) \cong B.$$

Insbesondere haben beide Teilringe von A dieselbe Dimension über k. Da der Ring rechts ganz im doppelten Zentralisator links enthalten ist, folgt

$$C_A(C_A(B)) = B.$$

Damit ist (ii) bewiesen.
<u>3. Schritt</u>: Beweis von (i).
Wie wir gerade bewiesen haben, sind die k-Teilalgebren (1) und (2) konjugiert zueinander, also insbesondere isomorph.

$$C_A(B)\otimes_k E \cong A\otimes_k C_E(B) \cong A\otimes_k C_E(B_\ell) \cong^{208} A\otimes_k B_r$$

Nun ist B_r bis auf Isomorphie gerade die zu B entgegengesetzte k-Algebra, also einfach. Also ist

$$C_A(B)\otimes_k E$$

eine einfache k-Algebra. Dann muß aber auch $C_A(B)$ einfach sein.[209]

QED.

A3.12 Existenz separabler maximaler Teilkörper

Sei D eine Divisionsalgebra über dem Körper k. Dann gibt es einen maximalen Teilkörper K von D,

$$k \subseteq K \subseteq D,$$

welcher separabel über k ist.

Beweis. Im Fall D = k ist nichts zu beweisen. Sei also $D \neq k$. Nach dem Satz von Noether-Jacobson gibt es ein über k separables Element

$$a \in D - k.$$

Deshalb gibt es eine separable Körpererweiterung von k in D, welche k echt enthält. Also gibt es einen Körper K mit

$$k \subseteq K \subseteq D \text{ und } k \neq K,$$

welcher separabel über k und maximal unter allen Körpern mit diesen Eigenschaften ist. Es reicht zu zeigen, K ist ein maximaler Teilkörper von D.
Dazu reicht es zu zeigen,

$$C_D(K) = K$$

(nach A3.5). Weil K kommutativ ist, gilt

$$K \subseteq C_D(K).$$

Außerdem ist K eine einfache Teilalgebra von D. Nach A3.11 ist deshalb

$$C_D(C_D(K)) = K,$$

d.h. K ist das Zentrum des Schiefkörpers[210] $C_D(K)$. Wäre

$$C_D(K) \neq K,$$

so gäbe es nach dem Satz von Noether-Skolom ein über K separables Element

---

[207] Wie oben folgt wieder "$\supseteq$". Jedes Element des Zentralisators der linken Seite kommutiert insbesondere mit jedem Element von $A\otimes 1$. Weil A nach Voraussetzung zentral ist, besteht die linke Seite somit aus Elementen von $k\otimes E \cong E$, welche mit $1\otimes C_E(B) \cong C_E(B)$ kommutieren.

[208] nach dem ersten Schritt bzw. nach dem Beispiel von A3.1.

[209] Für jedes Ideal $I \subseteq C_A(B)$ ist $I\otimes_k E$ ein Ideal von $C_A(B)\otimes_k E$.

[210] Nach der Bemerkung von A3.1 ist jeder Zentralisator in einem Schiefkörper ein Teilschiefkörper.

$$u \in C_D(K) - K.$$

Dann wäre aber K(u) eine separable Körpererweiterung von k mit

$$k \subseteq K(u) \subseteq D,$$

welche echt größer ist als K. Dies widerspricht jedoch der Wahl von K (der Maximalitätseigenschaft). Also gilt

$$C_D(K) = K.$$

QED.

Literatur

Amitsur, Shimshon, A.

[1] Generic splitting fields of central simple algebras, Ann. of Math. (2) 62 (1955), 8-43

[2] On central division algebras, Israel J. Math. 12 (1972), 408-420.

Artin, Michael

[1] Brauer-Severi varieties, in Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Wilrijk 1981), Lecture Notes in Math. 917, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982, 194-210.

Brauer, Richard

[1] Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen I, Math. Zeit. 28 (1928), 677 - 696, II 31 (1930), 733-747.

[2] Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern, J. reine angew. Math. 166 (1932), 241-252.

Cartan, Henri, und Eilenberg, Samuel

[1] Homological algebra, Princeton University Press, Princeton 1956.

Cartier, Pierre

[1] Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique, Bull. Soc. Math. France 86 (1958), 177-251.

Châtelet, François

[1] Variations sur un thème de H. Poincaré, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. III. Sér. 61 (1944), 249-300

Colliot-Thélène, Jean-Louis, Ojanguren, Manuel, Parimala, Raman

[1] Quadratic forms over fraction fields of two-dimensional Henselian rings and Brauer groups of related schemes, in Algebra, arithmetic and geometry, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math, vol 16, Bombay 2002, 185-217.

Grothendieck, Alexander

[1] Techniques de descente et théorems d'existence en geometrie algebrique I: Généralités. Descent par morphismes fidélement plats, Sém. Bourbaki, exp. 190 (1960); reprinted by Société Mathématique de France, Paris 1995.

[2] Revétements étales et groupe fondamental (SGA 1), Lecture Notes in Mathematics 224, Springer-Verlag Berlin 1971; reprinted as vol. 3 of Documents Mathématicques, Société Mathématique de France, Paris 2003.

[3] Le groupe de Brauer I, II, III, in Dix Exposés sur la Cohomologie de Schémas, North-Holland, Amsterdam/Masson, Paris 1968, 46-188.

Gruenberg, Karl, W.

[1] Profinite groups, in Algebraic Number Theory (J.W.S. Cassels and A.Fröhlich, eds), Academic Press, London 1967, 116-127.

Herstein, I.N.

[1] Noncommutative rings, John Wiley and Sons, 1968

Jahnel, Jörg

[1] The Brauer-Severi variety associated with a central simple algebra: a survey, preprint available from the author's homepage.

de Jong, Aise Johan

[1] The period-index problem for the Brauer group of an algebraic surface, Duke Math. J. 123 (2004), 71-94

Knus, Max-Albert

[1] Sur la forme d' Albert et le produit tensoriel de deux algèbres de quaternions, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B 45 (1993), 333-337.

Lam, Tsit-Yuen

[1] Introduction to quadratic forms over fields, Graduate Studies in Mathematics 67, American Mathematical Society, Providence 2005.

Lang, Serge

[1] On quasi-algebraic closure, Ann. of Math. (2) 55 (1952), 373-390.
[2] Algebraic groups over fininite fields, Amer. J. Math. 78 (1956), 555-563.
[3] Algebra, 3. Auflage, Addison-Wesley 1993.

Pierce, Richard

[1] Associative algebras, Springer-Verlag, New-York, Berlin 1982

Saltman, David, J.

[4] Division algebras over p-adic curves, J. Ramanujan Math. Soc. 12 (1997), 25-47; correction, ibid 13 (1998), 125-129.

Segre, Benjamino

[1] Questions arithmétiques sur les variétés algébriques, Colloques Internat. Centre Nat. Rech. Sci., vol 24 (1950), 83-91.

Serre, Jean-Pierre

[1] Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p, in Symposium international de topologia algebraica, Mexico City, 1958, 24-53.
[2] Corps Locaux, Hermann, Paris 1962, [English translation: Local Fields, Springer-Verlag, 1979]
[3] Lectures on the Mordell-Weil Theorem, Vieweg, Braunschweig, 1989.
[4] Cohomologie Galoisienne, 5e éd. , révisée et complétée, Lecture Notes in Mathematics 5, Springer-Verlag, Berlin 1994. [English translation: Galois Cohomology, Springer-Verlag, Berlin 2002]

Severi, Francesco

[1] Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica, Mam. Accad. Ital., Mat. 3 (1932), 1-52.

Shatz, Stephen S.

[1] Profinite groups, arithmetic, and geometry, Annals of Mathematics Studies 67, Princeton University Press 1972.

Voevodsky, Vladimir

[1] Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$-coefficients, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci 98 (2003), 59-104.

Weibel, Charles

[1] An introduction to homological algebra, Cambrigde Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambrigde University Press 1994

[2] Introduction to algebraic K-theory, book in preparation, parts available in the authors homepage.

Weil, André

[1] The field of definition of a variety, Amer. J. Math. 78 (1956), 509-524

[2] Basic Number Theory, 3rd edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 144, Springer-Verlag, New York, Berlin 1974.

Index

—E—

—F—

—G—

—H—

—I—

Inhalt