Funktionentheorie II

frei nach

Riemannsche Flächen
Otto Forster

Bezeichnungen

$cl(u)$	Homotopie-Klasse der Kurve u, vgl. 1.3.10.
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen, komplexe Ebene
$c_i = (-1)^{-1} s_i$	i-te elementarsymmetrische Funktion einer meromorphen Funktion
	Deck(Y/X) Gruppe der Decktransformationen des topologischen Raums Y über X, vgl 1.5.4.
$Deck(Y \xrightarrow{p} X)$	Gruppe der Decktransformationen der Überlagerung p,, vgl. 1.5.4.
Δ^*	punktierte Einheitskreisscheibe, vgl. 1.5. 10.
E^*	punktierte Einheitskreisscheibe, vgl. 1.5. 10.
$e_a(f)$	Verzweigungsindex der holomorphen Abbildung f im Punkt a, vgl. 1.2.1
$\mathcal{E}_X$	Garbe der glatten Funktionen auf der Riemannschen Fläche X, vgl. 1.9.1.
$\mathbb{H}$	obere Halbebene, vgl. 1.3.14 (a).
$\mathcal{M}(Y)$	Menge der meromorphen Funktionen auf der offenen Teilmenge Y einer Riemannschen Fläche, vgl. 1.1.11.
$\mathcal{M}_X$	Garbe der meromorphen Funktionen auf der Riemannschen Fläche X, vgl. 1.6.4(b).
$\mathcal{M}_X^*$	Garbe der Einheitengruppen von $\mathcal{M}_X$, vgl. 1.6.4(c).
$\mathcal{O}(Y)$	Menge der holomorphen Funktionen auf der offenen Teilmenge Y einer Riemannschen Fläche, vgl. 1.1.6.
$\mathcal{O}_X$	Garbe der holomorphen Funktionen auf der Riemannschen Fläche X, vgl. 1.6.4(b).
$\mathcal{O}_X^*$	Garbe der Einheitengruppen von $\mathcal{O}_X$, vgl. 1.6.4 (c).
$\mathbb{P}^1$	die Riemannsche Zahlenkugel, vgl. 1.1.5 (c).
$\pi_1(X, a)$	fundamentale Gruppe des topologischen Raums X im Punkt a, vgl. 1.3.10.
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	positive Halbgerade, vgl. 1.3.14 (a).
$\mathbb{R}_-$	negative Halbgerade, vgl. 1.3.14 (a).
$\rho_p(s)$	Keim des Schnitts s im Punkt p, vgl. 1.6.6
ρ_U^V	Restriktion einer Prägarbe auf den Schnitten über der offenen Menge V mit Werten in der offenen Teilmenge $U \subseteq V$, vgl. 1.6.1.
$s_i = (-1)^{-1} c_i$	i-te elementarsymmetrische Funktion einer meromorphen Funktion bezüglich einer n-blättrigen unverzweigten Überlagerung, vgl. 1.81.
$f^*(\varphi)$	Verpflanzung der Funktion φ entlang der Abbildung f, vgl. 1.1.9.

f_w	der zur Kurve w gehörige Isomorphismus der fundamentalen Gruppen, deren Basispunkte gerade die Endpunkte der Kurve sind, vgl. 1.3.11.
F_p	Halm der Prägarbe F im Punkt p, vgl. 1.6.5.
p_*	die Umkehrung der Abbildung p^*, die die lokal biholomorphe Abbildung p auf den Halmen der Strukturgarbe induziert, vgl. 1.7.4.
$s\|_p$	Keim des Schnitts s im Punkt p, vgl. 1.6.6
∞	Fernpunkt der Riemannschen Zahlenkugel, vgl. 1.1.5 (c).
$u \bullet v$	Komposition der Kurven u und v, vgl. 1.3.6.
u^{-1}	die zur Kurve u inverse Kurve, vgl. 1.3.6.
$u \simeq v$	Homotopie der Kurven u und v, vgl. 1.3.3
[u]	Homotopie-Klasse der Kurve u, vgl. 1.3.10.
[a, x]	die Verbindungsstrecke der Punkte a und x im euklidischen Raum, vgl. 1.3.14 (a).
$\frac{\partial}{\partial z}$	holomorphe Ableitung, vgl. 1.9.1
$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$	anti-holomorphe Ableitung, vgl. 1.9.1.

Vorbemerkung
In der Vorlesung Funktionentheorie I haben sie sich im wesentlichen mit der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ und deren offenen Teilmengen beschäftigt. Der Gegenstand dieser Vorlegung sind topologische Räume, die lokal so aussehen wie die komplexe Ebene (also zum Beispiel die Riemannsche Zahlenkugel). Solche Räume heißen Riemannsche Flächen.

Literatur
O. Forster: Riemannsche Flächen, Springer, Berlin 1977
Warner: Introduction to differentiable Manifolds and Lie groups
Griffiths, Harris: Principles of algebraic geometry

1. Überlagerungen

Die Theorie der Riemannschen Flächen verdankt ihre Entstehung der einfachen Tatsache, daß bei der analytischen Fortsetzung holomorpher Funktionen entlang unterschiedlicher Wege Funktionen mit unterschiedlichen Werten auftreten können. Man erhält also, wenn man die Keime holomorpher Funktionen uneingeschränkt fortsetzt im allgemeinen Funktionen mit mehr als einem Wert an den verschiedenen Stellen. Um erneut eindeutige Funktionen zu erhalten, ersetzt man den Definitionsbereich durch eine über der komplexen Ebene liegende mehrblättrige Fläche, welche über jedem Punkt der komplexen Ebene soviele Punkte besitzt, wie es durch Fortsetzung entstehende Funktionen-Keime gibt. Dadurch wird die auf dieser Überlagerungsfläche definierte analytische Funktion eindeutig. Indem man von der Tatsache abstrahiert, daß diese Fläche über der komplexen Ebene (oder der Riemannschen Zahlenkugel liegt, erhält man den allgemeinen Begriff der Riemannschen Fläche als Definitionsbereich der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen.

In diesem Abschnitt untersuchen wir vor allem den allgemeinen Begriff der Riemannschen Fläche und den der Überlagerung aus topologischer und analytischer Sicht. Die Theorie der Überlagerungen wird dann auf die Probleme der analytischen Fortsetzung, der Konstruktion der Riemannschen Fläche einer algebraischen Funktion, der Integration von Differentialformen und die Lösung linearer Differentialgleichungen angewandt.

1.1 Definition der Riemannschen Flächen

In diesem Abschnitt definieren wir den Begriff der Riemannschen Fläche, die Begriffe der holomorphen und meromorphen Funktionen auf diesen Flächen und den Begriff der holomorphen Abbildung von Riemannschen Flächen.

1.1.1 Mannigfaltigkeiten und Atlanten

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum X, der dem Hausdorff-Axiom genügt und lokal isomorph ist zu offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$, d.h. für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x, und einen Homöomorphismus

$$\varphi: U \longrightarrow V \ (\subseteq \mathbb{R}^n)$$

mit einer offenen Menge V des $\mathbb{R}^n$. Die Homöomorphismen φ heißen auch Karten von X und deren Definitionsbereiche U Koordinaten-Umgebungen. Ein Atlas von X ist eine Familie von Karten, deren Koordinaten-Umgebungen den Raum X überdecken.

1.1.2 Holomorph verträgliche Karten und komplexe Atlanten

Sei X eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Wir identifizieren den $\mathbb{R}^2$ mit den komplexen Zahlen

$$\mathbb{R}^2 = e_1\mathbb{R} + e_2\mathbb{R} = 1\bullet\mathbb{R} + i\bullet\mathbb{R} \ , \ 1 := e_1 \ , \ i = e_2 \ .$$

Zwei Karten von X,

$$\varphi: U \longrightarrow V \ (\subseteq\mathbb{C}) \text{ und } \varphi': U' \longrightarrow V' \ (\subseteq\mathbb{C})$$

heißen holomorph verträglich, wenn die Zusammensetzung

$$\varphi'\circ\varphi^{-1}: \varphi(U'\bigcap U'') \longrightarrow \varphi'(U'\bigcap U'')$$

eine biholomorphe Abbildung ist. Ein komplexer Atlas von X ist ein Atlas mit der Eigenschaft,, daß je zwei Karten holomorph verträglich sind. Zwei komplexe Atlanten von X heißen holomorph verträglich, wenn jede Karte des einen holomoprh verträglich ist mit jeder Karte des anderen.

Bemerkungen

(i) Ist $\varphi: U \longrightarrow V$ ein Karte von X und $U_1 \subseteq U$ eine offene Teilmenge von U, so ist auch

$$\varphi_1 = \varphi|_{U_1} : U_1 \longrightarrow V_1$$

mit $V_1 := \varphi(U_1)$ eine Karte von X, und diese ist holomorph verträglich mit φ.

(ii) Die holomorphe Verträglichkeit von komplexen Atlanten ist eine Äquivalenz-Relation. Das folgt im wesentlichen aus der Tatsache, daß die Zusammensetung biholomorpher Abbildungen biholomorph ist.

1.1.3 Komplexe Strukturen

Sei X eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Eine komplexe Struktur auf X ist eine Äquivalenzklasse von holomorph verträglichen komplexen Atlanten von X.

Bemerkungen

(i) Eine komplexe Struktur auf X kann man dadurch definieren, daß man einen komplexen Atlas $\mathbb{A}$ von X angibt.

(ii) Zu jeder komplexen Struktur von X gehört ein eindeutig bestimmter maximaler Atlas $\mathbb{A}^*$ von X. Ist die komplexe Struktur von X durch $\mathbb{A}$ gegeben, so besteht $\mathbb{A}^*$ aus allen Karten von X, die mit den Karten von $\mathbb{A}$ holomorph verträglich sind.

(iii) Ein Atlas der komplexen Struktur ist dann gerade ein Atlas von X, welcher als Menge in $\mathbb{A}^*$ enthalten ist.

1.1.4 Riemannsche Flächen

Eine Riemannsche Fläche ist ein Paar (X, Σ) bestehend aus einer zweidimensionalen zusammenhängenden[1] Mannigfaltigkeit und einer komplexen Struktur Σ von X.

Bemerkungen

(i) Oft werden wir anstelle von (X, Σ) einfach nur X schreiben, wenn klar ist, welches die komplexe Struktur sein soll.

(ii) Manchmal schreiben wir auch $(X, \mathbb{A})$ anstelle von (X, Σ) mit einem Atlas $\mathbb{A}$ von Σ.

(iii) **Vereinbarung:** Unter einer Karte einer Riemannschen Fläche X wollen wir im folgenden eine Karte von X verstehen, die Element des maximalen Atlas ist.

(iv) Lokal ist eine Riemannsche Fläche nichts anderes als eine offene Teilmenge der Komplexen Ebene: eine Karten $\varphi: U \longrightarrow V$ von X identifiziert die Punkte von U gerade mit den Punkten der offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{C}$. Alledings liegt ein Punkt von X in vielen Koordinaten-Umgebungen von X und keine der zugehörigen Karten hat irgendeinen Vorrang vor der anderen. Deshalb kann man aus der Funktionentheorie der komplexen Ebene nur diejenigen Begriffe in die Theorie der Riemannschen Flächen übernehmen, die nicht von der speziellen Wahl einer Karte abhängen.

1.1.5 Beispiele für Riemannsche Flächen

(a) Die komplexe Ebene $\mathbb{C}$

Die komplexe Struktur von $\mathbb{C}$ wird durch den Atlas definiert, dessen einzige Karte die identische Abbildung $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist.

(b) Gebiete in Riemannschen Flächen

Seien X eine Riemannsche Fläche und $Y \subseteq X$ ein Gebiet von X (d.h. eine offene zusammenhängende Teilmenge von X). Dann ist Y in natürlicher Weise eine Riemannsche Fläche: die komplexe Struktur von Y kann man durch den Atlas definieren, der aus allen Karten $\varphi: U \longrightarrow V$ von X besteht mit $U \subseteq Y$.

Insbesondere wird so jedes Gebiet von $\mathbb{C}$ zu einer Riemannschen Fläche.

(c) Die Riemannsche Zahlenkugel

Wir setzen

$$\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

wobei ∞ einen Punkt bezeichnen soll, die nicht in $\mathbb{C}$ liegt. Wir führen in $\mathbb{P}^1$ wie folgt eine Topologie ein. Die offenen Mengen von $\mathbb{P}^1$ sollen die offenen Mengen von $\mathbb{C}$ sein zusammen mit den Mengen der Gestalt

$$V \cup \{\infty\},$$

wobei $V \subseteq \mathbb{C}$ das Komplement einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ sein soll. Auf diese Weise wird $\mathbb{P}^1$ zu einem kompakten Hausdorff-Raum. Wir setzen

$$U_1 := \mathbb{P}^1 - \{\infty\} = \mathbb{C}$$

$$U_2 := \mathbb{P}^1 - \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$$

und betrachten die folgenden Abbildungen.

---

[1] Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn er sich nicht zerlegen läßt in zwei nicht-leere disjunkte offene Teilmengen.

$\varphi_1: U_1 \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z,$

$\varphi_2: U_2 \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$ und $\infty \mapsto 0.$

Bei beiden handelt es sich um Homöomorphismen. Wegen

$\mathbb{P}^1 = U_1 \cup U_2$

wird $\mathbb{P}_1$ auf diese Weise zu einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit mit dem Atlas $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Außerdem ist

$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto 1/z$

biholomorph (und zu sich selbst invers), d.h. $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ist ein komplexer Atlas von $\mathbb{P}^1$.

Mit der durch diesen Atlas definierten komplexen Struktur heißt $\mathbb{P}^1$ Riemannsche Zahlenkugel. Der Punkt ∞ heißt auch Fernpunkt von $\mathbb{P}^1$. Die beiden obigen Karten φ_i von $\mathbb{P}^1$ wollen wir auch Standard-Karten des $\mathbb{P}^1$ nennen.

Bemerkung

Die Bezeichnung $\mathbb{P}^1$ kommt von der Tatsache, daß man $\mathbb{P}^1$ mit der projektiven Geraden über den komplexen Zahlen identifizieren kann.

(d) Komplexe Tori

Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen, die linear unabhängig über den reellen Zahlen sind und sei

$$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Menge Γ heißt das von ω_1 und ω_2 erzeugte Gitter. Zwei komplexe Zahlen heißen äquivalent modulo Γ, wenn ihre Differenz in Γ liegt. Die Menge aller Äquivalenzklassen wird mit

$$\mathbb{C}/\Gamma$$

bezeichnet. Sei

$$\pi: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}, z \mapsto z+\Gamma,$$

die natürliche Abbildung, welche jede komplexe Zahl in ihre Äquivalenzklasse abbildet. Wir führen in der Menge $\mathbb{C}/\Gamma$ wie folgt eine Topologie ein. Eine Teilmenge

$$U \subseteq \mathbb{C}/\Gamma$$

soll genau dann offen sein, wenn ihr vollständiges Urbild $\pi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{C}$ bei der natürlichen Abbildung offen ist. Auf diese Weise wird $\mathbb{C}/\Gamma$ zum topologischen Raum, und die natürliche Abbildung π zu einer stetigen Abbildung.

Bemerkungen

(i) Weil $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist, ist auch $\mathbb{C}/\Gamma$ zusammenhängend.

(ii) Als stetiges Bild der kompakten Menge

$$P := \{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \mid \lambda, \mu \in [0,1]\}$$

ist $\mathbb{C}/\Gamma$ kompakt.

(iii) Nach Definition der Topologie von $\mathbb{C}/\Gamma$ ist die natürliche Abbildung offen, d.h. das Bild offener Teilmengen ist offen: für $V \subseteq \mathbb{C}$ offen ist auch

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} V + \gamma$$

eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Also ist $\pi(V)$ offen in $\mathbb{C}/\Gamma$.

(iv) Wir führen jetzt wie folgt auf $\mathbb{C}/\Gamma$ eine komplexe Struktur ein. Sei

$$V \subseteq \mathbb{C}$$

eine offene Teilmenge mit der Eigenschaft, daß keine zwei Punkte von $\mathbb{C}$ äquivalent modulo Γ sind (jede Teilmenge mit hinreichend kleinem Durchmesser hat diese Eigenschaft). Wir setzen $U := \pi(V)$. Dann ist die Einschränkung

$$\pi' := \pi|_V : V \longrightarrow U$$

bijektiv, offen und stetig, also ein Homöomorphismus. Betrachten wir die Umkehrungen

$$\varphi := (\pi')^{-1} : U \longrightarrow V$$

aller Abbildungen dieser Gestalt. Dies sind offensichtlich Karten der Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}/\Gamma$, die einen Atlas von $\mathbb{C}/\Gamma$ bilden. Es reicht zu zeigen, je zwei Karten dieses Atlas sind holomorph verträglich, dann dann definiert diese Atlas eine komplexe Struktur auf $\mathbb{C}/\Gamma$. Seien

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i$$

zwei Karten aus dem beschriebenen Atlas und betrachten wir die Abbildung

$$\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Für jedes $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ gilt $\pi(\psi(z)) = (\pi \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z)$, also

$$\psi(z) - z \in \Gamma,$$

d.h. $\psi' = \psi - \mathrm{Id}$ ist eine stetige Funktion $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \Gamma$ mit Werten in der diskreten Menge Γ, also als solche konstant auf jeder Zusammenhangskomponente ihres Definitonsbereichs. Insbesondere ist ψ' holomorph. Dann ist aber auch

$$\psi = \psi' + \mathrm{Id}$$

eine holomorphe Funktion. Indem man in der obigen Betrachtung die Rollen von φ_1 und φ_2 vertauscht, sieht man, daß auch ψ^{-1} holomorph ist. Mit anderen Worten ψ ist biholomorph und die beiden Karten sind holomorph verträglich.

(v) Die Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}/\Gamma$ mit der eben beschriebenen komplexen Struktur heißt komplexer Torus (der komplexen Dimension 1).

(iv) Sei

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

der Einheitskreis. Dann sind die Faser der Abbildung

(1) $$\mathbb{C} \longrightarrow S^1 \times S^1,\ \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \mapsto (e^{2\pi i\lambda}, e^{2\pi i\mu}),$$

gerade die Äquivalenzklassen modulo Γ, d.h. diese Abbildung induziert eine Bijektion

$$\mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow S^1 \times S^1.$$

Diese Abbildung ist stetig (weil (1) stetig ist), also ein Homöomorphismus.

1.1.6 Definition: Holomorphe Funktionen

Seien X eine Riemannsche Fläche, $Y \subseteq X$ eine offene Teilmengen und

$$f : Y \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine Funktion. Diese Funktion heißt holomorph, wenn für jede Karte $\varphi: U \longrightarrow V$ von X die Funktion

$$f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \bigcap Y) \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorph ist im gewöhnlichem Sinne (d.h. als Funktion zwischen Teilmengen der komplexen Ebene). Die Menge aller auf Y holomorphen Funktionen wird mit

$$\mathcal{O}(Y)$$

bezeichnet.

1.1.7 Bemerkungen zum Begriff der holomorphen Funktion

(i) Summe und Produkt holomorpher Funktionen sind holomorph. Die konstante Funktion ist holomorph. Mit anderen Worten $\mathcal{O}(Y)$ ist eine $\mathbb{C}$-Algebra.

(ii) Die Bedingung der Holomorphie muß man nicht für sämtliche Karten des maximalen Atlas überprüfen. Es reicht, dies für eine Familie von Karten zu tun, deren Koordinatenumgebungen die Menge Y überdecken. Für alle anderen Karten ist dann die Bedingung automatisch erfüllt.

(iii) Sei $\varphi: U \longrightarrow V$ eine Karte der Riemannschen Fläche X. Dann ist φ holomorph (weil $\varphi \circ \varphi^{-1}$ die identische Abbildung ist). Wir werden Karten im folgenden oft mit dem Buchstaben $z: U \longrightarrow V$ bezeichnen.

1.1.8 Satz von Riemann über die hebbaren Lücken

Seien $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche X, und

$$f \in \mathcal{O}(U - \{a\})$$

eine beschränkte Funktion, die holomorph ist auf einer punktierten Umgebung des Punktes $a \in U$. Dann gibt es genau eine Fortsetzung von f zu einer holomorphen Funktion

$$\widetilde{f} \in \mathcal{O}(U).$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus dem Satz von Riemann über die hebbaren Lücken holomorpher Funktionen der komplexen Ebene.
QED.

1.1.9 Holomorphe Abbildungen

Sei $f: X \longrightarrow X'$ eine stetige Abbildung von Riemannschen Flächen X und X'. Diese Abbildung heißt holomorph, wenn für je zwei Karten

$$\varphi: U \longrightarrow V \text{ und } \varphi': U' \longrightarrow V'$$

von X bzw. X' mit $f(U) \subseteq U'$ die Zusammensetzung

$$\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}: V \longrightarrow V' \subseteq \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion auf der offenen Teilmenge V der komplexen Ebene im ursprünglichem Sinne ist.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f|U} & U' \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\varphi' \\ V & \xrightarrow{\widetilde{f}} & V' \end{array}$$

Die Abbildung f heißt biholomorph, wenn sie außerdem bijektiv und die Umkehrung von f ebenfalls holomorph ist. Zwei Riemannsche Flächen X und X' heißen isomorph, wenn es eine biholomorphe Abbildung $X \longrightarrow X'$ gibt.

Bemerkungen

(i) Im Spezialfall $X' = \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Abbildung dasselbe wie eine holomorphe Funktion.

(ii) Für je zwei holomorphe Abbildungen $f: X \longrightarrow X'$ und $f': X' \longrightarrow X''$ ist die Zusammensetzung $f''\circ f: X \longrightarrow X''$ ebenfalls eine holomorphe Abbildung.

(iii) Eine stetige Abbildung $f: X \longrightarrow X'$ von Riemannschen Flächen ist genau dann holomorph, wenn für jede offene Menge $U' \subseteq X'$ und jede holomorphe Funktion $\varphi': U' \longrightarrow \mathbb{C}$ die Verpflanzung entlang f

$$f^*(\varphi') := \varphi'\circ f: f^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion ist, d.h. wenn

$$f^*(\mathcal{O}(U')) \subseteq \mathcal{O}(f^{-1}(U'))$$

gilt für jede offene Teilmenge $U' \subseteq X'$ (wegen 1.1.7(iii) und (ii)).

(iv) Eine holomorphe Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ induziert also eine Abbildung

$$f^*: \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(f^{-1}(V)), \varphi \mapsto \varphi\circ f,$$

für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$. Dies ist offensichtlich ein Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren. Ist $g: Y \longrightarrow Z$ eine zweite holomorphe Abbildung, so gilt

$$(g\circ f)^*(\varphi) = \varphi\circ g\circ f = f^*(\varphi\circ g) = f^*(g^*(\varphi)),$$

d.h. es gilt

$$(g\circ f)^* = f^*\circ g^*.$$

1.1.10 Eindeutigkeitssatz

Seien $f, g: X \longrightarrow X'$ zwei holomorphe Abbildungen Riemannscher Flächen X, X' und

$$A \subseteq X$$

eine Menge von Punkten, auf welcher f und g übereinstimmen,

$$f|A = g|A.$$

Falls A einen Häufungspunkt besitzt, sind f und g gleich auf X.

Beweis. O.B.d.A sei A die Menge aller Punkte, in denen f und g übereinstimmen. Wir setzen

$$G := \{x\in X \mid \text{es gibt eine offene Umgebung W von x mit } f|_W = g|_W\}.$$

Es reicht zu zeigen, G = X. Nach Definiton ist G offen. Zeigen wir, G ist auch abgeschlossen. Sei

$$b \in \partial G$$

ein Randpunkt von G. Es reicht zu zeigen, b liegt in der Menge G. Angenommen, b liegt nicht in G. Aus der Stetigkeit von f und g folgt,

$$f(b) = g(b).$$

Wir wählen eine Koordinaten-Umgebung $U' \subseteq X'$ von f(b) = g(b) und eine Koordinaten-Umgebung $U \subseteq X$ von b mit $f(U) \subseteq U'$ und $g(U) \subseteq U'$. Das ist möglich, weil f und g stetig sind. Wir identifizieren U und U' mit Hilfe geeigneter Karten mit offenen Mengen der komplexen Ebene

$$U \subseteq \mathbb{C} \text{ und } U' \subseteq \mathbb{C}$$

und betrachten die holomorphen Funktionen

$$f|_U: U \longrightarrow U' \text{ und } g|_U: U \longrightarrow U'.$$

Diese stimmen auf der Menge $A \cap U$ überein. Der Punkt b ist ein Punkt dieser Menge, und sogar ein Häufungspunkt (wegen $b \notin G$ und $b \in \partial G$ gibt es eine Folge in $G \subseteq A$, die gegen b geht). Betrachten wir die Potenzreihen-Entwicklung der Differenz

$$f|_U - g|_U$$

in Punkt b. O.B.d.A. sei b = 0. Dann hat die Potenzreihe die Gestalt

(2) $$z^n(a_n + a_{n+1}z + a_{n+2}z^2 + \dots) \text{ mit } a_n \neq 0,$$

es sei denn die Differenz ist identisch Null in einer ganzen Umgebung von 0. Eine Funktion der Gestalt (2) hat aber in einer ganzen punktierten Umgebung von 0 keine weiteren Nullstellen. Das steht im Widerspruch, zur Häufungspunkt-Eigenschaft von b. Damit ist gezeigt, die beiden Funktionen sind in einer ganzen Umgebung von b gleich. Dann gilt aber $b \in G$.

Wir haben gezeigt, G ist gleichzeitig eine offene und abgeschlossene Teilmenge von X. Wei X zusammenhängend ist, folgt

$$G = \emptyset \text{ oder } G = X.$$

Der erste Fall tritt, wie wir gerade gesehen haben, nicht ein.[2] Also gilt G = X, d.h. f und g sind auf ganz X gleich.
QED.

1.1.11 Definition: Meromorphe Funktionen

Seien X eine Riemannsche Fläche und $Y \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Eine meromorphe Funktion auf Y ist eine holomorphe Funktion

$$f: .Y' \longrightarrow \mathbb{C}$$

auf einer offenen Teilmenge Y' von Y, wobei folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Y - Y' besteht aus lauter isolierten Punkten von Y.

(ii) Für jeden Punkt $p \in Y - Y'$ gilt

$$\lim_{x \longrightarrow p} |f(x)| = \infty.$$

Die Punkte von Y - Y' heißen dann Pole von f. Die Menge der meromorphen Funktionen auf Y wird mit

$$\mathcal{M}(Y)$$

bezeichnet.

Bemerkungen

(i) Seien p ein Pol von f und $z: U \longrightarrow V$ eine Karte von X mit $p \in U$ und z(p) = 0. Dann kann man f in einer Umgebung von p in eine Laurent-Reihe

$$f = \sum_{\nu=-k}^{\infty} c_\nu z^\nu$$

entwickeln[3].

(ii) Die Menge $\mathcal{M}(Y)$ besitzt in natürlicher Weise die Struktur einer $\mathbb{C}$-Algebra. Summe und Produkt meromorpher Funktionen $f,g \in \mathcal{M}(Y)$ werden wie für holomorphe Funktionen definiert, zumindest in den Punkten, in denen beide Funktionen holomorph sind. Danach setzt man die entstehende Funktion fort auf alle hebbaren Lücken. Das Ergebnis wird mit f + g bzw. f•g bezeichnet.

---

[2] die Häufungspunkt von A liegen in G.

[3] Die zweite Bedingung in der Definition der meromorphen Funktionen schließt den Fall einer wesentlichen Singularität aus.

1.1.12 Beispiel

Seien n eine natürliche Zahl und

$$F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + ... + c_n \,,\; c_i \in \mathbb{C},$$

ein Polynom. Dann definiert F eine holomorphe Funktion

$$F: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Fassen wir $\mathbb{C}$ als offene Teilmenge der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$ auf, so erhalten wir

$$\lim_{z \longrightarrow \infty} |F(z)| = \infty .$$

Insbesondere ist $F \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$.

1.1.13 Meromorphe Funktionen als holomorphe Abbildungen mit Werten in $\mathbb{P}^1$

Seien X eine Riemannsche Fläche und $f \in \mathcal{M}(X)$. Für jeden Pol p von f setzen wir

$$f(p) := \infty \in \mathbb{P}^1.$$

Dann wird f zu einer holomorphen Abbildung

$$f: X \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

Ist umgekehrt $f: X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ eine holomorphe Abbildung, dann ist f entweder konstant gleich ∞ oder die Menge $f^{-1}(\infty)$ besteht nur aus isolierten Punkten und die Einschränkung von f auf das Komplement dieser Menge ist eine meromorphe Funktion

$$X - f^{-1}(\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$

von X.

Bemerkung

Im folgenden werden wir zwischen meromorphen Funktionen auf X und holomorphen Abbildungen $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ keinen Unterschied machen.

Beweis. Sei

$$f: X \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

die oben beschriebene Fortsetzung einer meromorphen Funktion von X, und sei $p \in X$ ein Pol dieser meromorphen Funktion. Wir haben zu zeigen, f ist holomorph in einer Umgebung von p. Wir wählen eine Karte $z: U \longrightarrow V$ von X mit $p \in U$ und $z(p) = 0$. Nach Bemerkung (i) von 1.1.11 hat dann f in einer Umgebung von p die Gestalt

$$f = \frac{1}{z^k}(c_{-k} + c_{-k+1} z + c_{-k+2} z^2 + ...) = \frac{g(z)}{z^k}$$

Wir können annehmen, $c_{-k} \neq 0$, d.h. $g(z) = c_{-k} + c_{-k+1} z + c_{-k+2} z^2 + ...$ ist eine in einer Umgebung von p homorphe Funktion, die in p keine Nullstelle hat. Dann ist aber auch das Inverse

$$h(z) := 1/g(z)$$

holomorph in einer Umgebung von p. Indem wir U bei Bedarf verkleinern, können wir annehmen,

$$h \text{ ist holomorph auf } U.$$

Sei jetzt

$$\varphi: U_2 \longrightarrow \mathbb{C},\; z \mapsto 1/z \text{ und } \infty \mapsto 0$$

die Karte der Riemannschen Zahlenkugel von 1.1.5 (c), welche den Fernpunkt enthält. Dann gilt

$$(\varphi \circ f)(z) = \frac{z^k}{g(z)} = z^k \bullet h(z),$$

d.h. $\varphi \circ f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion. Dann ist aber f in einer Umgebung von p eine holomorphe Abbildung.
Wir haben gezeigt, jede meromorphe Funktion auf X läßt sich zu einer holomorphen Abbildung mit Werten in der Riemannschen Zahlenkugel fortsetzen.
Sei jetzt umgekehrt

$$f: X \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

eine holomorphe Abbildung. Falls die Menge

$$f^{-1}(\infty)$$

einen Häufungspunkt enthält, so stimmt f nach dem Eindeutigkeitssatz 1.1.10 mit der konstanten Funktion

$$f: X \longrightarrow \mathbb{P}^1, x \mapsto \infty,$$

überein. Andernfalls besteht $f^{-1}(\infty)$ also aus lauter isolierten Punkten (ist also eine abgeschlossene Menge). Trivialerweise ist die Einschränkung

$$X - f^{-1}(\infty) \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

der holomorphen Abbildung f eine holomorphe Abbildung, deren Werte von ∞ verschieden sind, also in $\mathbb{C}$ liegen. Mit anderen Worten, dies ist eine meromorphe Funktion mit der Polmenge $f^{-1}(\infty)$.
QED.

1.1.14 Folgerung

Aus 1.1.13 folgt, daß der Eindeutigkeitssatz 1.1.10 auch für meromorphe Funktionen gilt. Ein von Null verschiedenes Element

$$f \in \mathcal{M}(X) - \{0\}$$

besitzt damit nur isolierte Nullstellen, d.h. 1/f definiert eine meromorphe Funktion auf X. Mit anderen Worten,

$$\mathcal{M}(X) \text{ ist ein Körper}$$

für jede Riemannsche Fläche X.

1.2 Elementare Eigenschaften holomorpher Abbildungen

In diesem Abschnitt weisen wir einige elementare topologische Eigenschaften holomorpher Abbildungen von Riemannschen Flächen nach. Und wir zeigen, wie man aus ihnen bekannte Sätze der Funktionen-Theorie der komplexen Ebene ableitet, wie zum Beispiel den Satz von Liouville und den Fundamentalsatz der Algebra.

1.2.1 Die lokale Gestalt der holomorphen Abbildungen

Seien $f: X \longrightarrow X'$ eine nicht-konstante Abbildung Riemannscher Flächen und

$$a \in X, a' := f(a) \in X'$$

ein Punkt und dessen Bildpunkt. Dann gibt es Karten

$$\varphi: U \longrightarrow V \text{ und } \varphi': U' \longrightarrow V'$$

und eine natürlichen Zahl k mit folgenden Eigenschaften.

(i) $a \in U, \varphi(a) = 0, a' \in U', \varphi'(a') = 0.$

(ii) $f(U) \subseteq U'$

(iii) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f|U} & U' \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\varphi' \\ V & \xrightarrow{\tilde{f}} & V' \end{array}$$

ist kommuativ, wobei $\tilde{f}$ die Abbildung mit $\tilde{f}(z) = z^k$.
Mit anderen Worten, jede Abbildung Riemannscher Flächen hat lokal die Gestalt $z \mapsto z^k$.
Beweis. Offensichtlich kann man stets Karten finden, für welche die erste Bedingung erfüllt ist. Dann kann man U durch die offene Umgebung $U \cap f^{-1}(U')$ ersetzen und erhält so zwei Karten, für welche (i) und (ii) gilt. Wir setzen

$$\tilde{f} := \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$$

und erhalten ein kommutatives Viereck wie in (iii). Wir müssen noch zeigen, man kann die Karten so abändern, daß $\tilde{f}$ die angegebene Gestalt bekommt. Wegen (i) gilt

$$\tilde{f}(0) = \varphi'(f(a)) = \varphi'(a') = 0,$$

d.h. $\tilde{f}$ hat die Gestalt

$$\tilde{f}(z) = z^k g(z)$$

mit einer holomorphen Funktion g mit $g(0) \neq 0$. Nach dem holomorphen Satz über implizite Funktionen besitzt die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^k,$$

in der Umgebung jedes vom Ursprung verschiedenen Punktes lokal eine Umkehrung $\sqrt[k]{}$. Es gibt deshalb in einer Umgebung des Ursprungs eine holomorphe Funktion h mit

$$h^k = g.$$[4]

Indem wir U und V passend verkleinern, erreichen wir, daß h auf ganz V definiert ist und auf ganz U die angegebene Identität gilt. Wir erhalten

$$\tilde{f}(z) = (zh(z))^k \text{ für jedes } z \in V$$

mit einer holomorphen Funktion h auf V, die im Ursprung ungleich Null ist.
Die Abbildung

$$V \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto zh(z),$$

hat dann im Ursprung eine von Null verschiedene Ableitung. In einer Umgebung des Ursprungs ist die Abbildung somit biholomorph (nach dem Satz über implizite Funktionen). Indem wir V geeignet verkleinern erhalten wir eine biholomorphe Abbildung

$$\psi: V \longrightarrow \tilde{V}$$

(von offenen Mengen der komplexen Ebene). Nach Konstruktion gilt

$$\tilde{f}(z) = \psi(z)^k \text{ für } z \in V,$$

also $(\tilde{f} \circ \psi^{-1})(z) = z^k$. Wir ersetzen die Karte φ durch die Karte $\psi \circ \varphi$. Die Abbildung $\tilde{f}$ wird dabei durch die Abbildung $\tilde{f} \circ \psi^{-1}$ ersetzt, bekommt also die Gestalt

$$\tilde{f}(z) = z^k.$$

---

[4] $h(z) = \sqrt[k]{g}$ wobie $\sqrt[k]{}$ holomorphe Funktion in einer Umgebung von $g(0) \in \mathbb{C}-\{0\}$ ist.

QED.

Bemerkung

Die in der obigen Aussage auftretende Zahl k kann man wie folgt charakterisieren. Für jede Umgebung U_0 von a gibt es eine Umgebung $U \subseteq U_0$ von a und eine Umgebung W von a' = f(a) derart, daß

$$f^{-1}(x') \bigcap U$$

für jedes $x' \in W - \{a'\}$ aus genau k Punkten besteht. Die Zahl k heißt auch Vielfachheit, mit welcher f in a den Wert a' annimmt oder auch Verzweigungsindex von f im Punkt a und wird mit

$$e_a(f)$$

bezeichnet.

1.2.2 Beispiel

Sei

$$f(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + \ldots + c_k$$

ein Polynom des Grades k mit komplexen Koeffizienten. Dann kann man f als holomorphe Abbbildung

$$f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

ansehen mit $f(\infty) = \infty$. Durch Verwendung der Standard-Karte von $\mathbb{P}^1$ im Fernpunkt sieht man, daß f in ∞ den Verzweigungsindex k besitzt:

$$\frac{1}{f(1/z)} = \frac{z^k}{z^k f(1/z)} = \frac{z^k}{1 + c_1 z + \ldots + c_k z^k} = z^k h(z)$$

mit einer holomorphen Funktion h mit $h(0) \neq 0$.

1.2.3 Folgerung

Jede nicht-konstante holomorphe Abbildung $f: X \longrightarrow X'$ ist offen, d.h. sie überführt offene Mengen in offene Mengen.

Beweis. Nach 1.2.1 ist für jede Umgebung U eines Punktes $a \in X$ die Menge f(U) eine Umgebung des Punktes a' = f(a) von X'. Damit ist f aber eine offene Abbildung.
QED.

1.2.4 Folgerung

Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine injektive holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen. Dann ist f eine biholomorphe Abbildung

$$f: X \longrightarrow f(X).$$

Beweis. Da die Abbildung f injektiv ist, ist ihr Verzweigungsindex in jedem Punkt von X gleich 1, d.h. f hat lokal die Gestalt $z \mapsto z$. Dann ist aber die Umkehrung

$$f^{-1}: f(X) \longrightarrow X$$

ebenfalls holomorph.
QED.

1.2.5 Maximum-Prinzip

Sei $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion auf der Riemannschen Fläche X. Dann nimmt die Funktion |f| in keinem Punkt von X ihr Maximum an.

Beweis. Angenommen, es gibt einen Punkt $a \in X$ mit

$$R := |f(a)| = \sup \{|f(x)| : x \in X\}.$$

Dann gilt

$$f(X) \subseteq K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}.$$

Nach 1.2.3 ist f(X) eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, liegt also ganz im Innern von K. Das widerspricht aber der Tatsache, daß f(a) nach Wahl von K auf dem Rand der Kreisscheibe K liegt.
QED.

1.2.6 Holomorphe Abbildungen auf kompakten Riemannschen Flächen

Sei $f: X \longrightarrow X'$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen mit X kompakt. Dann ist X' ebenfalls kompakt und f ist surjektiv.
Beweis. Nach 1.2.3 ist f(X) offen. Als stetiges Bild einer kompakten Menge ist f(X) aber auch kompakt, also abgeschlossen. Weil X' nach Definition des Begriffs der Riemannschen Fläche zusammenhängend ist, folgt

$$f(X) = X'.$$

Insbesondere ist f surjektiv und X' ist kompakt.
QED.

1.2.7 Holomorphe Funktionen auf kompakten Riemannschen Flächen

Jede holomorphe Funktion $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche ist konstant, d.h. es gilt

$$\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}.$$

Beweis. Das folgt aus der vorhergehende Aussage, denn $\mathbb{C}$ ist nicht kompakt.
QED.

1.2.8 Meromorphe Funktionen der Zahlenkugel

Jede nicht-konstante meromorphe Funktion $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ ist rational, d.h. Quotient von zwei Polynomen:

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(z).$$

Beweis. Die Funktion f besitzt nur endlich viele Pole, denn andernfalls hätte die Menge der Pole von f einen Häufungspunkt, d.h. nach dem Eindeutigkeitssatz wäre f konstant gleich ∞. Wir können o. B. d. A. annehmen, daß ∞ kein Pol von f ist: im entgegengesetzten Fall können wir für unsere Betrachtungen f durch 1/f ersetzen. Seien

$$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

die Pole von f und sei

$$h_\nu(z) = \sum_{j=k_\nu}^{-1} c_{\nu j}(z-a_\nu)^j$$

für $\nu = 1, \ldots, n$ der Hauptteil von f im Punkt a_ν. Dann ist

$$f - h_1 - \ldots - h_n$$

eine auf der gesamten Zahlenkugel holomorphe Funktion, also nach 1.2.7 konstant. Dann ist f selbst aber eine rationale Funktion.
QED.

1.2.9 Satz von Liouville

Jede beschränkte holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist konstant.
Beweis. Nach dem Satz 1.1.8 über hebbare Singularitäten läßt sich f fortsetzen zu einer holomorphen Funktion

$$f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

auf der Zahlenkugel. Nach 1.2.7 ist dann aber f konstant.
QED.

1.210 Fundamentalsatz der Algebra

Sei

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n \in \mathbb{C}[z]$$

ein Polynom positiven Grades n mit komplexen Koeffizienten. Dann gibt es mindestens einen Punkt $a \in \mathbb{C}$ mit $f(a) = 0$.

Beweis. Das Polynom definiert eine nicht-konstante holomorphe Abbildung

$$f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

mit $f(\infty) = \infty$. Nach 1.2.6 ist diese Abbildung surjektiv, d.h. es gilt $0 \in f(\mathbb{C})$.
QED.

1.2.11 Doppelt periodische Funktionen

Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängige komplexe Zahlen und

$$\Gamma : \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$$

das von diesen erzeugte Gitter. Eine meromorphe Funktion $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ heißt doppeltperiodisch bezüglich Γ, wenn gilt

$$f(z) = f(z+\gamma) \text{ für jedes } z \in \mathbb{C} \text{ und jedes } \gamma \in \Gamma.$$

Bemerkungen

(i) Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn gilt

$$f(z + \omega_1) = f(z) = f(z + \omega_2) \text{ für jedes } z \in \mathbb{C}.$$

(ii) Sei $\pi: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma =: T$ die natürliche Abbildung. Eine doppeltperiodische Funktion f induziert dann eine Abbildung

$$\tilde{f}: T \longrightarrow \mathbb{P}^1 \text{ mit } f = \tilde{f} \circ \pi.$$

Aus der Definition der komplexen Struktur von T folgt unmittelbar, daß $\tilde{f}$ eine holomorphe Abbildung ist.

(iii) Umgekehrt ist für jede holomorphe Abbildung $\tilde{f}: T \longrightarrow \mathbb{P}^1$ die zusammensetzung mit der natürlichen Abbildung π eine doppeltperiodischen meromorphe Funktion. Doppeltperiode Funktionen auf $\mathbb{C}$ sind somit dasselbe wie holomorphe Abbildungen auf dem Torus mit Werten in der Zahlenkugel.

1.2.12 Die Werte der doppeltperiodischen Funktionen

(i) Jede doppeltperiodische holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist konstant.

(ii) Jede nicht-konstante doppeltperiodische meromorphe Funktion $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ nimmt jeden Wert $c \in \mathbb{P}^1$ tatsächlich an.

Beweis. Dies folgt aus der Beschreibung der doppeltperiodischen Funktionen in den Bemerkungen von 1.2.11 und aus den Sätzen 1.2.7 und 1.2.6.
QED.

1.3 Homotopie von Kurven, fundamentale Gruppe

In diesem Abschnitt stellen wir einige topologische Hilfmittel aus der Homotopie-Theorie der Kurven zur Verfügung.

1.3.1 Kurven

Unter einer Kurve eines topologischen Raumes X versteht man eine stetige Abbildung

$$u: I \longrightarrow X$$

des reellen Einheitsintervalls I := [0,1] mit Werten in X. Der Punkt

$$a := u(0)$$

heißt dann Anfangspunkt der Kurve u und der Punkt

$$b := u(1)$$

heißt Endpunkt von u. Wir werden in diesem Kontext u auch Kurve von a nach b nennen, oder auch Kurve, welche a und b verbindet.

1.3.2 Zusammenhang

Ein topologischer Raum X heißt wegeweise zusammenhängend oder auch linear zusammenhängend, wenn es für je zwei Punkte von X eine Kurve von X gibt, die diese Punkte verbindet. Der Raum X heißt lokal linear zusammenhängend, wenn jeder Punkt von X eine Umgebungsbasis[5] besitzt, die aus linear zusammenhängenden Mengen besteht.

Bemerkungen

(i) Linear zusammenhängende Räume X sind zusammenhängend.[6]
(ii) Mannigfaltigkeiten sind lokal linear zusammenhängend.
(iii) Jeder zusammenhängende und lokal linear zusammenhängende Raum ist linear zusammenhängend.[7]

1.3.3 Homotope Kurven

Seien X ein topologischer Raum, a,b∈X zwei Punkte und

$$u, v: I \longrightarrow X$$

zwei Kurven von a nach b. Diese Kurven heißen homotop, wenn es eine stetige Abbildung

$$A: I \times I \longrightarrow X$$

gibt mit folgenden Eigenschaften.

(i) $A|_{I \times \{0\}} = u$.
(ii) $A|_{I \times \{1\}} = v$.
(iii) $A|_{\{0\} \times I}$ ist konstant mit dem Wert a.
(iv) $A|_{\{1\} \times I}$ ist konstant mit dem Wert b.

---

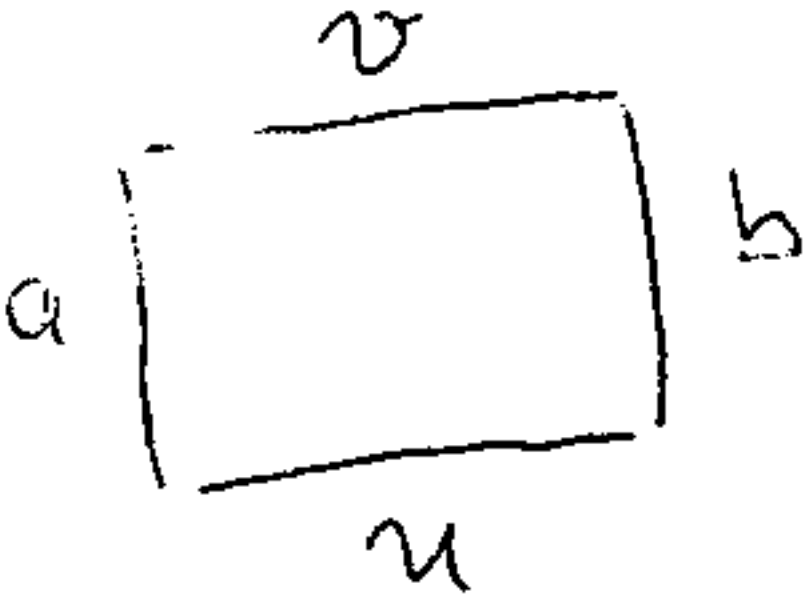
[5] Eine Umgebungsbasis eines Punktes x ist eine Familie von offenen Umgebungen von x mit der Eigenschaft, daß jede Umgebung von x eine Menge der Familie vollständig enthält.

[6] Ist $X = U \bigcup V$ eine Zerlegung in nicht-leere disjunkte offene Teilmengen, so kann man eine Kurve $u: I \longrightarrow X$ wählen, die einen Punkt von U mit einem Punkt von V verbindet. Diese liefert eine Zerlegung $I = u^{-1}(U) \bigcup u^{-1}(V)$ des Einheitsintervalls I in nicht-leere disjunkte offene Teilmengen (was nicht möglich ist).

[7] Das folgt aus der Tatsache, daß die Menge der Punkte, die man mit einem vorgegebenen Punkt $a \in X$ durch eine Kurve verbinden kann, sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Ersteres folgt aus dem lokal linearen Zusammenhang von X. Zum Beweis des zweiten reicht es zu zeigen, daß das Komplement dieser Menge ebenfalls offen ist. Ein Punkt a des Komplements besitzt aber nach Voraussetzung eine ganze Umgebung von Punkten, die sich mit a verbinden lassen. Dann muß aber die ganze Umgebung auch im Komplement liegen.

Sind u und v homotope Kurven, so schreibt man auch

$$u \simeq v.$$



Bemerkung

Für jedes $s \in I$ erhalten wir in der gegebenen Situation eine Kurve

$$u_s : I \longrightarrow X, t \mapsto A(t,s),$$

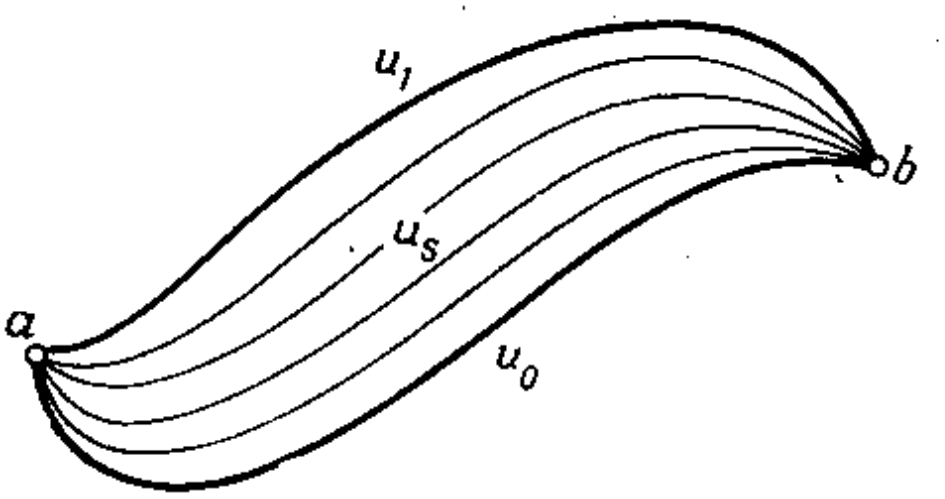
von a nach b. Man stellt sich diese Kurve als in stetiger Weise von s abhängig vor. Durchläuft s das Intervall I, so geht u_s beginnend mit u in die Kurve v über. Die Familie

$$\{u_s\}_{s \in I}$$

heißt auch Deformation oder Homotopie der Kurve u in die Kurve v. Die Angabe dieser Familie ist äquivalent zur Angabe der stetigen Abbildung

$$A: I \times I \longrightarrow X.$$

Deshalb sprechen wir gelegentlich auch von A als von der Homotopie von u nach v.



1.3.4 Homotopie als Äquivalenz-Relation

Seien X ein topologischer Raum und a,b∈X zwei Punkte. Dann ist die Homotopie eine Äquivalenz-Relation auf der Menge der Kurven $I \longrightarrow X$ von a nach b.

Beweis. Reflexivität. Für jede Kurve $u: I \longrightarrow X$ von a nach b ist

$$A: I\times I \longrightarrow X, (t,s) \mapsto u(t),$$

eine Homotopie von u nach u.

Symmetrie. Seien $u, v: I \longrightarrow X$ zwei Kurven von a nach b und

$$\{u_s: I \longrightarrow X\}_{s\in I}$$

eine Homotopie von u nach v. Dann ist

$$\{u_{1-s}: I \longrightarrow X\}_{s\in I}$$

eine Homotopie von v nach u.

Transitivität. Seien $u,v,w: I \longrightarrow X$ drei Kurven von a nach b,

$$\{u_s: I \longrightarrow X\}_{s\in I}$$

eine Homotopie von u nach v und

$$\{v_s: I \longrightarrow X\}_{s\in I}$$

eine Homotopie von v nach w. Dann ist

$$\{w_s: I \longrightarrow X\}_{s\in I}$$

mit

$$w_s := \begin{cases} u_{2s} & \text{für } 0\leq s \leq \frac{1}{2} \\ v_{2s-1} & \text{für } \frac{1}{2}\leq s \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von u nach w. Man beachte, wege $u_1 = v = v_0$ ist die zugehörige Abbildung $I\times I \longrightarrow X$ stetig.

QED.

1.3.5 Beispiel

Seien $u: I \longrightarrow X$ eine Kurve von a nach b und $\varphi: I \longrightarrow I$ eine stetige Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Dann sind die Kurven u und $u\circ\varphi$ homotop.

Beweis. Sei A die Abbildung

$$A. I\times I \longrightarrow X, (t,s) \mapsto u((1-s)t + s\varphi(t)).$$

Diese ist als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig. Außderdem gilt

$A(t,0) = u(t)$,
$A(t,1) = u(\varphi(t))$,
$A(0,s) = u(s\varphi(0)) = u(0) = a$
$A(1,s) = u((1-s)+s\varphi(1)) = u(1) = b$

Mit anderen Worten, A ist eine Homotopie von u nach $u\circ\varphi$.

QED.

1.3.6 Komposition von Kurven

Seien X ein topologischer Raum, a, b, c ∈ X drei Punkte von X und

$u: I \longrightarrow X$ eine Kurve von a nach b

$v: I \longrightarrow X$ eine Kurve von b nach c.

Dann heißt die Kurve

$$u \bullet v: I \longrightarrow X$$

mit

$$u \bullet v(t) := \begin{cases} u(2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ v(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

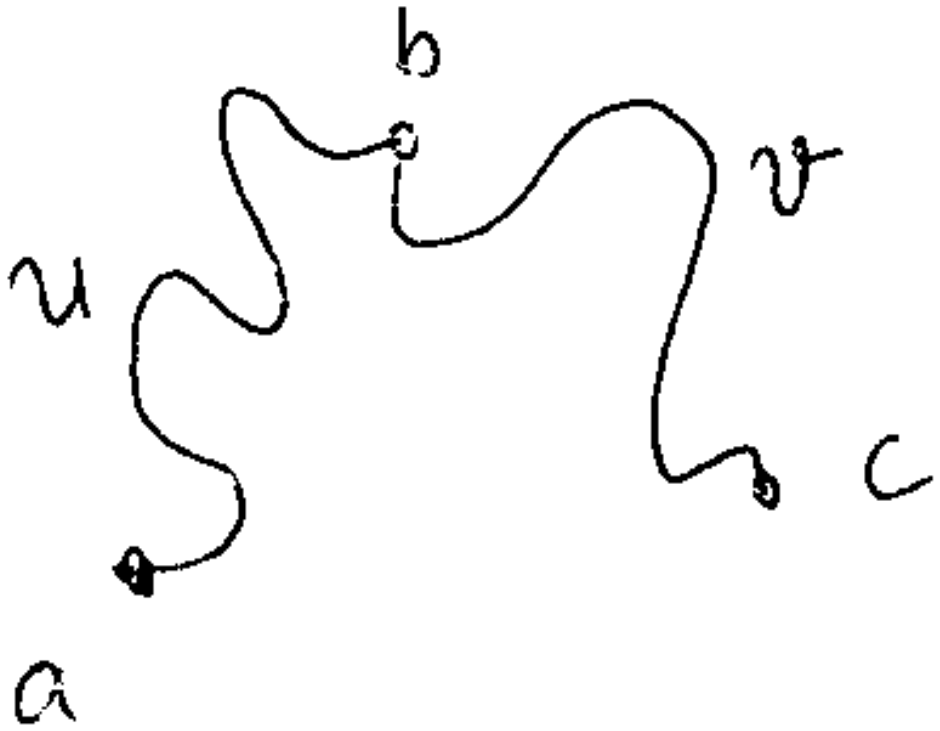
Komposition von u und v. Die Kurve von b nach a

$$u^{-1}: I \longrightarrow X$$

mit

$$u^{-1}(t) := u(1-t) \text{ für } t \in I$$

heißt die zu u inverse Kurve.



Bemerkungen

(i) u•v ist eine Kurve, die zunächst die Punkte von u und anschließend die von v durchläuft.

(ii) u^{-1} durchläuft die Punkte von u in umgekehrter Reihenfolge.

(iii) Sind $u, u': I \longrightarrow X$ homotope Kurven von a nach b und $v,v': I \longrightarrow X$ homotope Kurven von b nach c, so sind u•v und u'•v' homotope Kurven vonb a nach c.[8]

(iv) Sind $u, u': I \longrightarrow X$ homotope Kurven von a nach b, so sind $u^{-1}, u'^{-1}: I \longrightarrow X$ homotope Kurven von b nach a.[9]

---

[8] Ist $\{u_s : I \longrightarrow X\}_{s \in I}$ eine Deformation von u nach u' und $\{v_s : I \longrightarrow X\}_{s \in I}$ eine von v nach v', so ist $\{u_s \bullet v_s : I \longrightarrow X\}_{s \in I}$ eine Deformatiom von u•v nach u'•v'.

1.3.7 Die triviale Kurve in einem Punkt

Seien X ein topologischer Raum und a∈X ein Punkt. Dann heißt die Abbildung

$$I \longrightarrow X, t \mapsto a,$$

triviale Kurve im Punkt a oder auch konstante Kurve im Punkt a.

1.3.8 Die Gruppen-Eigenschaften bis auf Homotopie

Seien X ein topologischer Raum und

$$u, v, w: I \longrightarrow X$$

drei Kurven mit der Eigenschaft, daß die Kompositionen u•v und v•w definiert sind, d.h. der Endpunkt von u sei gleich dem Anfangspunkt von v und der Endpunkt von v sei gleich dem Anfangspunkt von w.
Weiter seien

$$u_0: I \longrightarrow X$$

die konstante Kurve im Punkt a = u(0) und

$$v_0: I \longrightarrow X$$

die konstante Kurve im Punkt b = v(0).
Dann gilt:

(i) $u_0 \bullet u \simeq u \simeq u \bullet v_0$.

(ii) $u \bullet u^{-1} \simeq u_0$

(iii) $(u \bullet v) \bullet w \simeq u \bullet (v \bullet w)$.

Beweis. Zu (i). Wir betrachten die Abbildung $\varphi: I \longrightarrow I$ mit

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 2t\text{-}1 & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig und es gilt $u_0 \bullet u = u \circ \varphi$. Nach 1.3.5 sind deshalb $u_0 \bullet u$ und u homotop. Analog zeigt man $u \simeq u \bullet v_0$.
Zu (ii). Wir betrachten die Abbildung

$$A: I \times I \longrightarrow X$$

mit

$$A(t,s) := \begin{cases} u(2t(1\text{-}s)) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ u(2(1\text{-}t)(1\text{-}s)) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig, denn die beiden Definitonen von A für $t = \frac{1}{2}$ stimmen überein. Weiter gilt

$$A(t,0) = (u \bullet u^{-1})(t)$$
$$A(t,1) = u(0) = u_0(t)$$
$$A(0,s) = u(0) = a$$
$$A(1,s) = u(0) = a,$$

d.h. A ist eine Homotopie von $u \bullet u^{-1}$ nach u_0.

---

[9] Ist $\{u_s : I \longrightarrow X\}_{s \in I}$ eine Deformation von u nach u' so ist $\{u_s^{-1}: I \longrightarrow X\}_{s \in I}$ eine von u^{-1} nach u'^{-1}

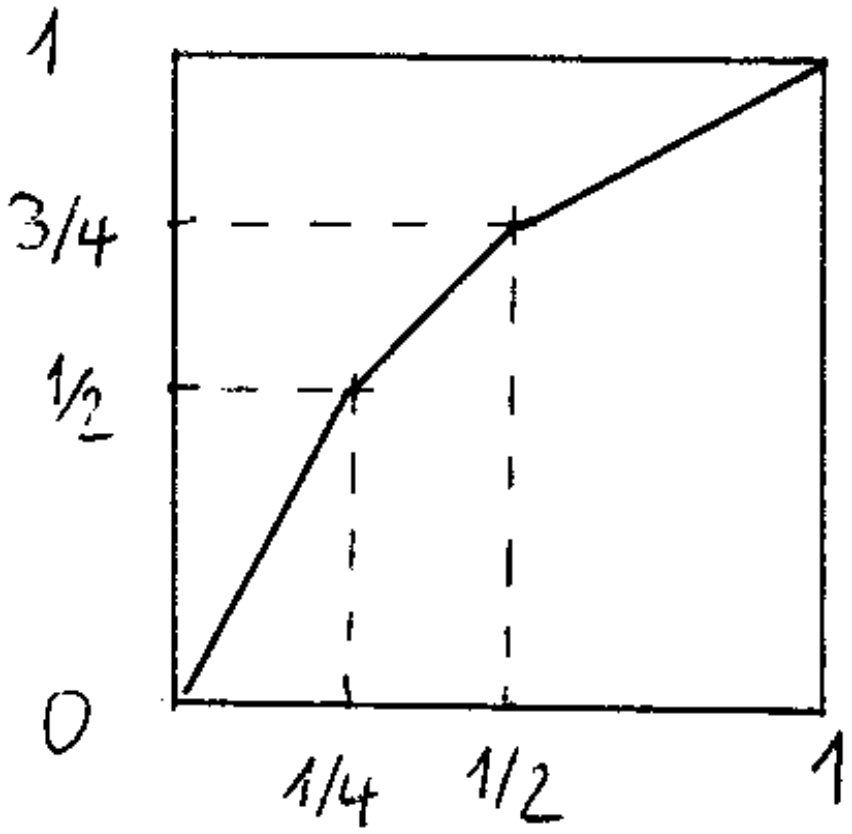
Zu (iii). Sei ψ: I $\longrightarrow$ I die Abbildung mit

$$\psi(0) = 0, \psi(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}, \psi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}, \psi(1) = 1,$$

welche auf den Intervallen

$$[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]$$

linear ist.



Diese Abbildung ist stetig. Man rechnet leicht nach, daß auf jedem der drei angebenen Intervalle die Abbildungen

$$(u \bullet v) \bullet w \text{ und } (u \bullet (v \bullet w)) \circ \psi$$

übereinstimmen. Für t aus dem ersten Intervall gilt zum Beispiel

$$(u \bullet (v \bullet w)) \circ \psi(t) = u \bullet (v \bullet w)(2t) = u(4t)$$

und

$$(u \bullet v) \bullet w(t) = u \bullet v(2t) = u(4t).$$

Es gilt also

$$(u \bullet v) \bullet w = (u \bullet (v \bullet w)) \circ \psi.$$

Die Behauptung folgt deshalb aus 1.3.5.
QED.

Bemerkung

Seien $u_1,...,u_n$: I $\longrightarrow$ X Kurven mit der Eigenschaft, daß der Anfangspunkt von u_i gleich dem Endpunkt von u_{i+1} ist. Dann gehen die Kompositionen

$$u_1 \bullet u_2 \bullet ... \bullet u_n,$$

die man für die verschiedenen möglichen Klammersetzungen erhält, ineinander über indem man sie mit einer geeigneten stückweise linearen Abbildung $I \longrightarrow I$ zusammensetzt. Sie sind also alle zueinander homotop.

1.3.9 Geschlossene Kurven

Eine Kurve $u: I \longrightarrow X$ im topologischen Raum X heißt geschlossen, wenn ihr Anfangspunkt gleich ihrem Endpunkt ist,

$$u(0) = u(1).$$

Sie heißt null-homotop, wenn sie außerdem homotop ist zur konstanten Kurve.

1.3.10 Konstruktion

Sei X ein topologischer Raum mit dem Punkt $a \in X$. Bezeichne

$$\pi_1(X , a)$$

die Menge aller Homotopie-Klassen geschlossener Kurven mit dem Anfangspunkt a.

Dann induziert die Komposition von Kurven auf dieser Menge die Struktur einer Gruppe. Versehen mit dieser Gruppenstruktur heißt diese Menge fundamentale Gruppe des Raumes X im Punkt a oder auch erste Homotopie-Gruppe von X im Punkt a.

Bezeichnung

Für jede geschlossene Kurve $u: I \longrightarrow X$ des topologischen Raumes X bezeichnen wir mit[10]

$$[u]$$

die Homotopie-Klasse von u.

Beweis. Die Komposition von Kurven induziert eine solche auf den Homotopie-Klassen auf Grund der Bemerkungen von 1.3.6. Die auf den Homotopie-Klassen definierte Komposition definiert eine Gruppen-Struktur nach 1.3.8. Die Klasse der konstanten Kurve spielt dabei die Rolle des neutralen Elements. Die Klasse der Kurve u^{-1} die des zu [u] inversen Elements.

QED.

1.3.11 Die Abhängigkeit vom Basispunkt

Seien X ein topologischer Raum und

$$a, b \in X$$

zwei Punkte, die durch eine Kurve

$$w: I \longrightarrow X$$

(von a nach b) verbunden sind. Dann kann man eine Abbildung

$$f = f_w: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X,b), [u] \mapsto [w^{-1} \bullet u \bullet w],$$

definieren.[11] Diese Abbildung ist ein Isomorphismus.[12]

Bemerkungen

---

[10] Im Original wird die Bezeichnung cl(u) verwendet.

[11] Weil die Komposition homotoper Kurven homotope Kurven liefert (Bemerkung 1.3.6(iii)).

[12] Zunächst ist f ein Gruppen-Homomorphismus:

$$\begin{aligned} f([u][u']) = f[u \bullet u']) &= [w^{-1} \bullet u \bullet u' \bullet w] = [w^{-1} \bullet u] \bullet [u' \bullet w] \\ &= [w^{-1} \bullet u] \bullet [w \bullet w^{-1}][\bullet u' \bullet w] \qquad \text{(vgl. 1.3.8(ii) und 1.3.3)} \\ &= [w^{-1} \bullet u \bullet w] \bullet [w^{-1} \bullet u' \bullet w] \\ &= f([u]) \bullet f([u']). \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung zeigt, die Abbildung $f_{w^{-1}}: \pi_1(X, b) \longrightarrow \pi_1(X,a)$ ist zu f_w invers.

(i) Für linear zusammenhängende Räume ist die fundamentale Gruppe also im wesentlichen unabhängig vom Basispunkt. Wir werden deshalb oft für solche Räume

$$\pi_1(X)$$

anstelle von $\pi_1(X, a)$ schreiben.

(ii) Es ist jedoch zu beachten, der oben konstruierte Isomorphismus hängt von der Wahl der Kurve w ab. Ist

$$w': I \longrightarrow X$$

eine weitere Kurve von a nach b und

$$f' := f_{w'}: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X,b), [u] \mapsto [w'^{-1} \bullet u \bullet w'],$$

der zugehörige Isomorphismus, so ist

$$F := f'^{-1} \circ f: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X,a)$$

die Abbildung

$$F = f_{w'^{-1}} \circ f_w: \quad [u] \mapsto [w' \bullet w^{-1} \bullet u \bullet w \bullet w'^{-1}] = \gamma^{-1} \bullet [u] \bullet \gamma$$

mit $\gamma = [w \bullet w'^{-1}]$, d.h. F ist gerade die Konjugation mit der Homotopie-Klasse der geschlossenen Kurve $w \bullet w'^{-1}$.

(iii) Ist $\pi_1(X, a)$ eine abelsche Gruppe, so sind $\pi_1(X, a)$ und $\pi_1(X, b)$ kanonisch isomorph, d.h. der Isomorphismus hängt nicht von der Kurve ab, welche a mit b verbindet.

1.3.12 Einfacher Zusammenhang

Ein linear zusammenhängender topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend, wenn $\pi_1(X) = 0$ gilt.

Bemerkung

Obwohl $\pi_1(X)$ als multiplikative Gruppe konstruiert wurde, schreiben wir $\pi_1(X) = 0$, wenn diese Gruppe nur aus dem neutralen Element besteht.

1.3.13 Homotopie von Kurven in einfach zusammenhängenden Räumen

Seien X ein einfach zusammenhängender (also auch linear zusammenhängender) topologischer Raum und $a, b \in X$ zwei Punkte. Dann sind je zwei Kurven von a nach b homotop.

Beweis. Seien

$$w, w': I \longrightarrow X$$

zwei Kurven von a nach b. Dann ist $w'^{-1} \bullet w: I \longrightarrow X$ eine geschlossene Kurve im Punkt a und die Homotopie-Klasse

$$[w'^{-1} \bullet w] \in \pi_1(X, a) = 0$$

ist die der konstanten Kurve

$$u_0: I \longrightarrow X$$

im Punkt a, d.h.

$$w'^{-1} \bullet w \simeq u_0.$$

Es folgt

$w' \bullet w'^{-1} \bullet w \simeq w' \bullet u_0$ (Multiplikation von links mit w', Bem. 1.3.6(iii)).

$u_0 \bullet w \simeq w' \bullet u_0$ ($w' \bullet w'^{-1}$ ist homotop zur konstanten Kurve)

$w \cong w'$ (nach 1.3.8(i))

QED.

1.3.14 Beispiele

(a) Stern-Mengen

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Stern-Menge bezüglich des Punktes $a \in X$, wenn für jeden Punkt $x \in X$ die gesamte Verbindungsstrecke mit a,

$$[a, x] := \{\lambda a + (1-\lambda)x \mid 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

vollständig in X liegt.
Zeigen wir, jede Stern-Menge ist einfach zusammenhängend.

Dazu betrachten wir eine beliebige geschlossene Kurve

$$u: I \longrightarrow X$$

mit dem Anfangspunkt in a. Die Abbildung

$$A: I \times I \longrightarrow X, (t,s) \mapsto sa + (1-s)u(t),$$

ist dann stetig (und nimmt Werte in X an). Weiter gilt

$A(t,0) = u(t)$, $A(t,1) = a$, $A(0,s) = sa + (1-s)u(0) = a$, $A(1,s) = sa + (1-s)u(1) = a$.

d.h. A ist eine Deformation der Kurve u in die konstante Kurve. Wir haben gezeigt,

$$\pi_1(X,a) = 0.$$

Bemerkungen

(i) Insbesondere sind die komplexe Ebene $\mathbb{C}$, jede Kreisscheibe in der Ebene, die obere Halbebene

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

einfach zusammenhängend.

(ii) Bezeichne

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

die positive bzw. negative Halbgerade. Dann sind auch die Mengen

$$\mathbb{C} - \mathbb{R}_+ \text{ und } \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$$

einfach zusammenhängend.

(b) Die Riemannsche Zahlenkugel

Die Riemannsche Zahlen-Kugel $\mathbb{P}^1$ ist einfach zusammenhängend.
Um das einzusehen, setzen wir

$$U_1 := \mathbb{P}^1 - \{\infty\}, U_2 := \mathbb{P}^1 - \{0\}.$$

Weil die U_i beide homöomorph zur komplexen Ebene $\mathbb{C}$ sind, sind sie einfach zusammenhängend.
Sei jetzt

$$u: I \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

eine beliebige geschlossene Kurve mit dem Anfangspunkt in 0. Weil I kompakt ist und u eine stetige Abbildung, gibt es eine endliche Anzahl nicht notwendig geschlossener Kurven

$$u_1,\ldots,u_{2n+1}: I \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

mit folgenden Eigenschaften.[13]

(i) Die Komposition

$$v := u_1 \bullet \ldots \bullet u_{2n+1}$$

stimmt bis auf eine Transformation des Parameters mit u überein, ist also homotop zu u.

(ii) Die Kurven u_i mit ungeradem Index i sind Kurven von U_1, die Kurven mit geraden Index sind Kurven von U_2.

(iii) Die Anfangs- und Endpunkte aller Kurven u_i sind vom Fernpunkt ∞ verschieden.

Jede der Kurven u_{2i} von U_2 kann man durch die Verbindungsstrecke[14] u'_{2i} ihrer Endpunkte ersetzen. Weil U_2 einfach zusammenhängend ist, sind u_{2i} und u'_{2i} homotop (nach 1.3.13). Also ist auch

$$v' = u_1 \bullet u'_2 \bullet \ldots \bullet u'_{2n} \bullet u_{2n+1}$$

homotop zu u. Da alle Endpunkte im Endlichen liegen, ist dies eine Kurve in U_1. Als solch ist sie 0-homotop. Also ist auch u eine 0-homotope Kurve.

1.3.15 Freie Homotopie

Seien X ein topologischer Raum und

$$u, v: I \longrightarrow X$$

zwei geschlossene Kurven, deren Anfangspunkte nicht unbedingt übereinstimmen müssen. Diese Kurven heißen <u>frei homotop</u>, wenn es eine stetige Abbildung

$$A: I \times I \longrightarrow X$$

gibt mit den folgenden Eigenschaften.

(i) $A(t,0) = u(t)$ für jedes $t \in I$.

(ii) $A(t,1) = v(t)$ für jedes $t \in I$.

(iii) $A(0,s) = A(1,s)$ für jedes $s \in I$.

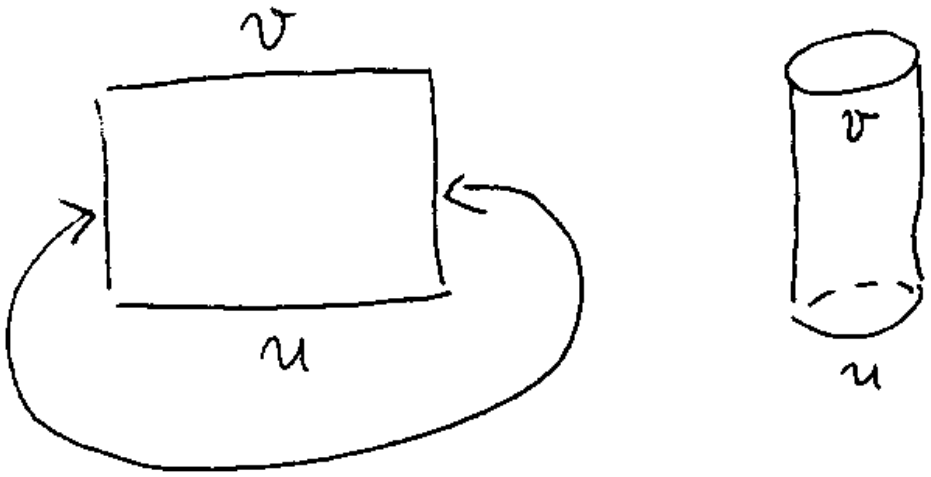
---

[13] Sei F_ε die Abschließung der ε-Umgebung U_ε des Ursprungs (bezüglich der Standard-Karte der Zahlenkugel im Ursprung). Dann sind

$$u^{-1}(F_\varepsilon) \text{ und } u^{-1}(\mathbb{P}^1 - U_\varepsilon)$$

abgeschlossen in I, also kompakt, also Vereinigungen von endlich vielen abgeschlossenen Intervallen. Die Gesamtheit der Randpunkte aller dieser Intervalle definiert eine Zerlegung von I in abgeschlossene Intervalle. Jedes dieser Intervalle definiert eine Kurve deren Endpunkte im Endlichen liegen (und den Abstand ε vom Ursprung haben bzgl. der Standard-Karte) und die entweder ganz in $u^{-1}(F_\varepsilon) \subseteq U_1$ oder ganz in $\overline{u^{-1}(\mathbb{P}^1 - U_\varepsilon)} = \mathbb{P}^1 - u^{-1}(U_\varepsilon) \subseteq U_2$ liegt.

[14] Bezüglich der Standard-Karte der Zahlenkugel im Fernpunkt.



Bemerkungen

(i) Für jedes $s \in I$ ist

$$u_s : I \longrightarrow X, t \mapsto A(t,s),$$

auf Grund der dritten Bedingung eine geschlossene Kurve. Außerdem gilt

$$u_0 = u \text{ und } u_1 = v.$$

Wir erhalten eine Familie $\{u_s\}_{s \in I}$ von geschlossenen Kurven, die die Kurve u in die Kurve v überführt.

(ii) Die Kurve

$$w: I \longrightarrow X, t \mapsto A(0,t),$$

verbindet den Anfangspunkt

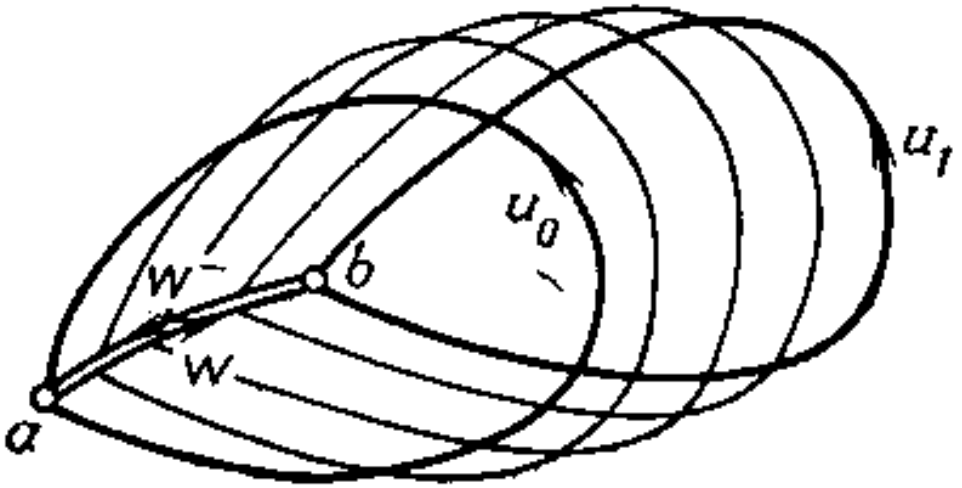
$$a = u(0)$$

von u mit dem Anfangspunkt

$$b = v(0)$$

von v und besteht aus den Anfangspunkten der geschlossenen Kurven u_s. Freie Homotopie bedeutet dann gerade, die Kurve u ist homotop zur Kurve $w \bullet v \bullet w^{-1}$ im gewöhbnlichem Sinne,

$$u \simeq w \bullet v \bullet w^{-1}.$$



(iii) Homotope Wege sind insbesondere frei homotop.
(iv) Freie Homotopie ist eine Äquivalenz-Relation.
(v) Die Komposition frei homotoper Wege liefert frei homotope Wege.
(vi) Die Inversen frei homotoper Wege sind frei homotop.

1.3.16 Einfacher Zusammenhang und freie Homotopie

Sei X ein linear zusammenhängender Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) X ist einfach zusammenhängend.
(ii) Je zwei geschlossene Kurven von X sind frei homotop.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Seien u, v: I $\longrightarrow$ X zwei geschlossene Kurven. Wir setzen

$$a := u(0) \text{ und } b := v(0)$$

und wählen eine Kurve

$$w: I \longrightarrow X \text{ von a nach b.}$$

Dann ist $w \bullet v \bullet w^{-1}$ eine geschlossene Kurve mit dem Anfangspunkt a. Weil X einfach zusammenhängend ist, ist diese homotop zu u,

$$u \simeq w \bullet v \bullet w^{-1}.$$

Sei

$$\{u_s : I \longrightarrow X\}_{s \in I}$$

eine zugehörige Homotopie, d.h.

$$u_0 = u,\ u_1 = w \bullet v \bullet w^{-1} \text{ und } u_s(0) = u_s(1) = a \text{ für alle } s \in I$$

Wir setzen

$$w_s(t) := w(st)$$

d.h. w_s: I $\longrightarrow$ X ist ein Weg von w(0) = a nach w(s). Weiter sei

$$v_s := w_s^{-1} \bullet u_s \bullet w_s$$

d.h. v_s: I $\longrightarrow$ X ist ein Weg von w(s) nach w(s), d.h. ein geschlossener Weg. Weiter ist

$$v_0 = w_0^{-1} \bullet u_0 \bullet w_0 = w_0^{-1} \bullet u \bullet w_0$$

$$v_1 = w_1^{-1} \bullet u_1 \bullet w_1 = w^{-1} \bullet w \bullet v \bullet w^{-1} \bullet w$$

d.h. durch $\{v_s\}_{s\in I}$ ist eine freie Homotopie von $w_0^{-1}\bullet u\bullet w_0$ nach $w^{-1}\bullet w\bullet v\bullet w^{-1}\bullet w$. Nun ist aber w_0 der konstante Weg, d.h.

$$u \simeq w_0^{-1}\bullet u\bullet w_0 .$$

Es reicht also zu zeigen, der Weg $w^{-1}\bullet w\bullet v\bullet w^{-1}\bullet w : I \longrightarrow X$ von b nach b ist homotop zu v. Dazu wiederum reicht es zu zeigen, $w^{-1}\bullet w$ ist homotop zum konstanten Weg in b.
Zum Beweis betrachten wir den Weg

$$w' := w^{-1}: I \longrightarrow X \text{ von b nach a}$$

und für jedes $s\in I$ den Weg

$$w'_s: I \longrightarrow X, t \mapsto w'(st),$$

von $w'(0) = b$ nach $w'(s)$. Die Familie

$$\{w'_s w'^{-1}_s: I \longrightarrow X\}_{s\in I}$$

besteht dann aus geschlossenen Wegen mit den Anfangspunkt b. Sie deformiert den konstantenWeg

$$w'_0 w'^{-1}_0: I \longrightarrow X$$

im Punkt b in den Weg

$$w'_1 w'^{-1}_1 = w'\bullet w'^{-1} = w^{-1}\bullet w.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $u: I \longrightarrow X$ ein geschlossener Weg im Punkt $a \in X$. Nach Voraussetzung ist dann u frei homotop zum konstanten Weg $u_0: U \longrightarrow X$ im Punkt a.
Nach Bemerkung 1.3.15 (ii) gibt es einen Weg w von a nach a mit

$$u \simeq w\bullet u_0\bullet w^{-1}.$$

Weil u_0 der konstante Weg ist, gilt sogar (vgl. 1.3.8)

$$u \simeq w\bullet w^{-1} \simeq u_0,$$

d.h. u ist 0-homotop.
QED.

1.3.17 Funktorielle Eigenschaften

Sei $f: X \longrightarrow X'$ eine stetige Abbildung von topologischen Räumen. Dann gilt:

(i) Für jede Kurve $u: I \longrightarrow X$ in X von a nach b, ist

$$f\circ u: I \longrightarrow X'$$

eine Kurve in X' von f(a) nach f(b).

(ii) Sind $u, v: I \longrightarrow X$ homotope Kurven, so sind auch die Kurven

$$f\circ u, f\circ v: I \longrightarrow X'$$

homotop.

(iii) Die Abbildung f induziert eine Abbildung

$$f_*: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X', f(a)), [u] \mapsto [f\circ u].$$

Diese Abbildung ist ein Homomorphismus, denn für Kurven u, v in X, deren Komposition definiert ist, gilt

$$f\circ(u\bullet v) = (f\circ u)\bullet(f\bullet v).$$

(iv) Ist g: X' $\longrightarrow$ X" eine weitere stetige Abbildung von topologischen Räumen, so gilt

$$(g\circ f)_* = g_*\circ f_*.$$

1.4 Verzweigte und unverzweigte Überlagerungen

Nicht-konstante holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen kann man als (möglicherweise verzweigte) Überlagerungsabbildungen ansehen. Deshalb geben wir hier die wichtigsten Begriffe und Fakten aus der Theorie der Überlagerungen an.

1.4.1 Diskrete Teilmengen und Abbildungen

Eine Teilmenge A eines topologischen Raums heißt diskret, wenn es für jeden Punkt $a\in A$ eine Umgebung V dieses Punktes gibt mit $V\bigcap A = \{a\}$.
Eine Abbildung

$$p: Y \longrightarrow X$$

von topologischen Räumen Y, X heißt diskret, wenn die Fasern

$$p^{-1}(x) := \{ y\in Y \mid f(x) = x \}$$

dieser Abbildung für jeden Punkt $x\in X$ diskrete Teilmengen von Y sind.

1.4.2 Begriff der Überlagerung

Eine Abbildung p: Y $\longrightarrow$ X von topologischen Räumen X , Y heißt Überlagerung oder auch Überlagerungsabbildung, wenn sie stetig, offen und diskret ist. In dieser Situation sagt man im Fall

$$x = p(y),$$

der Punkt y liegt über x bzw. x ist die Projektion von y bezüglich p. Ist

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ & f\searrow \quad \swarrow f' & \\ & Y & \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit Überlagerungen f und f', so heißt die Abbildung g auch fasertreu. Das bedeutet, für jedes $y \in Y$, daß die Faser $p^{-1}(y)$ über y in die Faser $p'^{-1}(y)$ über y abgebildet wird,

$$g(p^{-1}(y)) \subseteq p'^{-1}(y).$$

1.4.3 Beipiel: holomorphe Abbildungen

Sei f: Y $\longrightarrow$ X eine nicht-konstante holomorphe Abbildung. Dann ist f eine Überlagerung.

Beweis. Nach Definition ist f stetig und nach 1.2.3 offen. Wäre für einen Punkt $x\in X$ die Faser $f^{-1}(x)$ nicht diskret, so wäre nach dem Eindeutigkeitssatz 1.1.10 die Abbildung f konstant.
QED.

1.4.4 Bezeichnungen

Sei X eine Riemannsche Fläche. Ist f: Y $\longrightarrow$ X eine holomorphe Überlagerung, so sagen wir auch, Y bzw. f ist ein über X liegendes Gebiet.[15] Unter einer mehrdeutigen holomorphen Funktion auf X verstehen wir eine holomorphe Funktion, die auf einem Gebiet über X definiert ist. Analog wird der Begriff der mehrdeutigen meromorphen Funktion definiert.
Ist g eine mehrdeutige holomorphe oder meromorphe Funktion aus X und ist

$$f: Y \longrightarrow X$$

das zugehörige Gebiet über X, so heißen die Werte, die g auf der Faser

$$f^{-1}(x),\ x \in X,$$

auch Werte von g in x. Wir lassen dabei den Fall zu, daß die Faser einpunktig oder leer ist.

Beispiel

Seien Y = $\mathbb{C}$, X = $\mathbb{C}^*$ und p = exp: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Dann entspricht die identische Abbildung

$$id: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

gerade der mehrdeutigen Logarithmus-Funktion auf $\mathbb{C}^*$, denn für a$\in\mathbb{C}^*$ besteht

$$\exp^{-1}(a)$$

gerade aus den möglichen Werten der Logarithmus-Funktion.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \overset{id}{\longrightarrow} & \mathbb{C} \\ \exp\downarrow & \overset{?}{\nearrow}\log & \\ \mathbb{C}^* & & \end{array}$$

1.4.5 Verzweigung

Sei p: Y $\longrightarrow$ X eine Überlagerung topologischer Räume X, Y. Ein Punkt y$\in$Y heißt Verzweigungspunkt von p, wenn er keine Umgebung V besitzt,

$$y \in V \subseteq Y,$$

für welche die Einschränkung $p|_V$ injektiv ist. Die Überlagerung heißt unverzweigt, wenn sie keine Verzweigungspunkte besitzt, andern falls heißt sie verzweigt.

1.4.6 Kriterium für unverzweigte Überlagerungen

Sei p: Y $\longrightarrow$ X eine Abbildung topologischer Räume X, Y. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) p ist eine unverzweigte Überlagerung.

(ii) p ist ein lokaler Homöomoprhismus, d.h. zu jedem Punkt y$\in$Y gibt es eine Umgebung, welche durch p homöomorph auf eine offene Teilmenge von X abgebildet wird.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei y $\in$ Y vorgegeben. Nach Voraussetzung ist y kein Verzweigungspunkt von p, d.h. es gibt eine offene Umgebung V von y in Y,

$$y \in V \subseteq Y,$$

mit der Eigenschaft, daß

---

[15] Wir verbinden diesen Begriff mit der Vorstellung, daß die holomorphe Abbildung Y $\longrightarrow$ X dabei feststeht. Dasselbe Y mit einer anderen Abbildung Y $\longrightarrow$ X wird als ein anderes Gebiet angesehen.

$$p|_V: V \longrightarrow X$$

injektiv ist. Weil p eine Überlagerung ist, hat die Abbildung

$$p|_V: V \longrightarrow p(V),$$

als Bild eine offene Teilmenge von X. Außerdem ist sie bijektiv, stetig und offen, d.h. ein Homöomorphismus.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Als lokaler Homöomorphismus ist p stetig und offen. Für jeden Punkt $x \in X$ und jedes $y \in p^{-1}(x)$ gibt es außerdem eine ganze Umgebung $V \subseteq Y$ von y, auf welcher p injektiv ist. Insbesondere ist y der einzige Punkt von $p^{-1}(x)$, welcher in V liegt,

$$V \bigcap p^{-1}(x) = \{x\}.$$

Mit anderen Worten, die Fasern von p sind diskrete Mengen, d.h. p ist eine Überlagerung. Da p auf V injektiv ist, ist y auch kein Verzweigungspunkt, d.h. p ist eine unverzweigte Überlagerung.
QED.

1.4.7 Beispiele

(a) Die Potenzabbildung

Sei $k \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann ist die Abbildung

$$p_k: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^k,$$

eine verzweigte Überlagerung mit dem einzigen Verzweigungspunkt 0. Die Einschränkung

$$p_k: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^k,$$

ist unverzweigt.

(b) Verzweigung und Verzweigungsindex

Sei $p: Y \longrightarrow X$ eine holomorphe Überlagerung, $y \in Y$ ein Punkt und $x := p(y)$ dessen Bild. Dann sind äquivalent:

1. y ist eine Verzweigungspunkt von p.
2. p hat in y einen Verzweigungsindex $k := e_y(p) > 1$.[16]

In dieser Situation verhält sich p in einer Umgebung von y wie die Potenzfunktion von Beispiel (a).

(c) Die Exponentialfunktion

Die Abbildung $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine unverzweigte Überlagerung: jede Teilmenge von $\mathbb{C}$ die keine Punkte besitzt, die sich um ein ganz-zahliges Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden, wird injektiv abgebildet. Zum Beispiel ist exp auf jedem der zur reellen Achse parallelen Streifen

$$\{x+iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in (y_0 - \tfrac{1}{4}, y_0 + \tfrac{1}{4}) \subseteq \mathbb{R}\}$$

injektiv.

(d) Die natürliche Abbildung auf den Torus

Seien $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und

$$p: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma$$

[16] siehe die Bemerkung von 1.2.1.

die natürliche Abbildung auf den zugehörigen komplexen Torus. Wir wir wissen ist p ein lokaler Homöomorphismus, also eine unverzweigte Überlagerung.

1.4.8 Übertragung der komplexen Struktur mit Hilfe von Überlagerungen

Seien $p: Y \longrightarrow X$ eine unverzweigte Überlagerung topologischer Räume. Der Raum X besitze die Struktur einer Riemannschen Fläche. Dann kann man Y auf genau eine Weise mit der Struktur einer Riemannschen Fläche so versehen, daß p eine holomorphe Abbildung wird.

Bemerkung

Nach 1.2.4 ist dann p sogar lokal biholomorph.

Beweis. Nach Voraussetzung ist p ein lokaler Homöomorphismus. Für jeden Punkt $y \in Y$ gibt es eine offene Umgebung V,

$$y \in V \subseteq Y,$$

mit folgenden Eigenschaften

(i) $p|_V: V \longrightarrow p(V)$ ist ein Homöomorphismus.

(ii) p(V) ist eine Koordinaten-Umgebung.

Für jede (holomorphe) Karte $\varphi: p(V) \longrightarrow W$ von X ist die Zusammensetzung

$$\psi = \varphi \circ p|_V$$

eine Karte von Y, und je zwei Karten von Y dieser Gestalt sind holomorph verträglich.[17] Sie bilden also einen komplexen Atlas $\mathbb{A}$ von Y und definierten so eine komplexe Struktur auf Y.

Nach Konstruktion ist p bezüglich dieser komplexen Struktur lokal biholomorph.[18]

Sei jetzt $\mathbb{A}'$ eine weitere komplexe Struktur auf Y, für welche p eine holomorphe Abbildung wird. Weil p als lokaler Homöomorphismus lokal injektiv ist, ist dann p lokal unverzweigt, also ebenfalls ein lokaler Homöomorphismus. Wir erhalten so zwei lokale Homöomorphismen

$$p: (Y, \mathbb{A}) \longrightarrow X \text{ und } p: (Y, \mathbb{A}') \longrightarrow X.$$

Das bedeutet aber, die identische Abbildung

$$id: (Y, \mathbb{A}) \longrightarrow (Y, \mathbb{A}')$$

ist lokal biholomorph, also biholomorph. Mit anderen Worten, die durch $\mathbb{A}$ und $\mathbb{A}'$ definierten komplexen Strukturen stimmen überein.

QED.

1.4.9 Anhebungen (Lifts) von Abbildungen

Seien $p: Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung topologischer Räume und $f: Z \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Eine Anhebung von f entlang p oder auch ein Lift von f entlang p ist eine stetige Abbildung

$$\tilde{f}: Z \longrightarrow Y,$$

welche das Diagramm

---

[17] Ist $\psi': V' \xrightarrow{p|_{V'}} p(V') \xrightarrow{\varphi'} W'$ eine zweite Karte dieser Gestalt, so ist

$$\psi' \circ \psi^{-1} = (\varphi \circ p|_V) \circ (\varphi' \circ p|_{V'})^{-1} = \varphi \circ (\varphi')^{-1}: \varphi'(p(V')) \longrightarrow \varphi(p(V))$$

biholomorph.

[18] Lokal wird p bezüglich solcher Karten durch identische Abbildungen beschrieben.

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \tilde{f} \nearrow & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

kommutativ ist, d.h. mit $f = p \circ \tilde{f}$.

1.4.10 Eindeutigkeit der Anhebung

Seien $p: Y \longrightarrow X$ eine unverzweigte Überlagerung und

$$f: Z \longrightarrow X$$

eine stetige Abbildung. Wir nehmen außerdem an:
1. X und Y sind Hausdorff-Räume.
2. Z ist zusammenhängend.

Dann stimmen je zwei Anhebungen von f entlang p, die in einem Punkt übereinstimmen, in allen Punkten überein.

Beweis. Seien zwei Anhebungen gegeben, sagen wir

$$g', g'': Z \longrightarrow Y$$

und ein Punkt $z_0 \in Z$ mit $g'(z_0) = g''(z_0)$.

Wir haben zu zeigen, $g' = g''$. Wir setzen

$$T := \{z \in Z \mid g'(z) = g''(z)\}.$$

Es reicht zu zeigen, $T = Z$. Zunächst ist T abgeschlossen, als vollständiges Urbild der abgeschlossenen Menge[19]

$$\Delta = \{(y,y) \mid y \in Y\}$$

bei der stetigen Abbildung

$$Z \longrightarrow Y \times Y,\ z \mapsto (g'(z), g''(z)).$$

Es reicht zu zeigen, T ist nicht-leer und offen (denn dann muß $T = Z$ gelten, well Z nach Voraussetzung zusammenhängend ist).

Die Menge T ist nicht leer, denn es gilt $z_0 \in T$. Zeigen wir sie ist offen. Sei

$z \in T$

ein vorgegebener Punkt. Dann gilt

$$g'(z) = g''(z) =: y.$$

Weil p als unverzweigte Überlagerung ein lokaler Homöomorphismus ist, gibt es eine offene Umgebung V von y und eine offene Umgebung U von $p(y) = f(z)$,

$$y \in V \subseteq Y,\ f(z) \in U \subseteq X$$

derart, daß

$$p|_V: V \longrightarrow p(V) = U$$

ein Homöomorphismus ist. Nach Voraussetzung gilt

$$p \circ g' = f = p \circ g''. \tag{1}$$

Weil g' und g'' stetig sind und in z denselben Wert y annehmen, gibt es eine offene Umgebung W von z

$$z \in W \subseteq Z$$

mit

$$g'(W) \subseteq V \text{ und } g''(W) \subseteq V\ (\ni y).$$

---

[19] Die Menge ist abgeschlossen, weil ihr Komplement auf Grund der Hausdorff-Eigenschaft von Y offen ist.

Aus (1) erhalten wir durch Einschränkenauf W,

$$p|_V \circ g'|_W = p|_V \circ g''|_W.$$

Weil aber $p|_V$ ein Homöomorphismus ist, also umkehrbar, ist damit

$$g'|_W = g''|_W.,$$

d.h. es gilt

$$z \in W \subseteq T.$$

Wir haben gezeigt, T ist offen.
QED.

1.4.11 Holomorphie von Anhebungen

Seien

$$p: Y \longrightarrow X$$

eine holomorphe unverzweigte Überlagerung und

$$f: Z \longrightarrow X$$

eine holomorphe Abbildung.[20] Dann ist jede Anhebung von f entlang p holomorph.

Beweis. Seien $g: Z \longrightarrow Y$ eine Anhebung von f entlang p, $c \in Z$ und

$b := g(c)$
$a := p(b) = f(c)$.

$$\begin{array}{ccc} & & Y \ni b \\ & g \nearrow & \downarrow p \\ c \in Z & \xrightarrow{f} & X \ni c \end{array}$$

Da p ein lokaler Homöomorphismus ist, können wir offene Umgebungen U und V vonb bzw. c wählen,

$$b \in V \subseteq Y, c \in U \subseteq X$$

mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung

$$p|_V: V \xrightarrow{\cong} U$$

ein Homöomorphismus und damit biholomorph ist. Weil g stetig ist, können wir eine offene Umgebung W von c finden

$$c \in W \subseteq Z$$

mit

$$g(W) \subseteq V.$$

Aus $f = p \circ g$ erhalten wir durch Einschränken auf W,

$$f|_W = p|_V \circ g|_W ,$$

also, da die Einschränkung von p biholomorph ist,

$$g|_W = (p|_V)^{-1} \circ f|_W$$

Insbesondere ist g auf W als Zusammensetzung holomorpher Abbildungen holomorph.
QED.

1.4.12 Folgerung: Holomorphie fasertreuer Abbildungen

Seien $p: Y \longrightarrow X$ und $p': Y' \longrightarrow X$ zwei unverzweigte Überlagerungen. Dann ist jede fasertreu stetige Abbildung $f: Y \longrightarrow Y'$ sogar holomorph.[21]

---

[20] Insbesondere seien X, Y und Z Riemannsche Flächen.

1.4.13 Anhebung von Kurven

Sei $p: Y \longrightarrow X$ eine unverzweigte Überlagerung von Hausdorff-Räumen X und Y. Uns interessiert besonders die Anhebung von Kurven

$$u: I \longrightarrow X$$

entlang p. Nach 1.4.10 ist eine Anhebung

$$\tilde{u}: I \longrightarrow Y,$$

falls sie existiert, durch ihren Anfangspunkt bereits eindeutig festgelegt.

1.4.14 Homotopie der Anhebungen homotoper Kurven

Seien

$$p: Y \longrightarrow X$$

eine unverzweigte Überlagerung von Hausdorff-Räumen X und Y,

$$a, b \in X$$

zwei Punkte,

$$\hat{a} \in p^{-1}(a)$$

ein Punkt aus der Faser über a und

$$\{u_s: I \longrightarrow X\}_{s \in I}$$

eine stetige Familie[22] von Kurven in X von a nach b mit der Eigenschaft, daß sich jede der Kurven $u_s: I \longrightarrow X$ anheben läßt zu einer Kurve

$$\hat{u}_s: I \longrightarrow Y$$

mit dem Anfangspunkt $\hat{a}$,

$$\hat{u}_s(0) = \hat{a}.$$

Dann haben die Kurven $\hat{u}_0$ und $\hat{u}_1$ denselben Endpunkt und sind homotop.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$\hat{A}: I \times I \longrightarrow Y, (t,s) \mapsto \hat{u}_s(t).$$

1. Schritt. Es gibt ein $\varepsilon>0$ derart, daß die Einschränkung von $\hat{A}$ auf $[0, \varepsilon) \times I$ stetig ist. Wir wählen offene Mengen U und V mit

$$a \in U \subseteq X, \hat{a} \in V \subseteq Y,$$

für welche die Einschränkung von p auf U einen Homöomorphismus

$$p|_V : V \longrightarrow U$$

induziert. Weil die Abbildung

$$A: I \times I \longrightarrow X, (t,s) \mapsto u_s(t),$$

stetig ist und $A(\{0\} \times I) = \{u_s(0)\} = \{a\}$ gilt, gibt es ein $\varepsilon>0$ mit

---

[21] Denn f ist eine Anhebung von p entlang p'.

[22] d.h. die Abbildung $I \times I \longrightarrow X, (t,s) \mapsto u_s(t)$, ist stetig unf für jedes $s \in I$ ist $u_s: I \longrightarrow X$ eine Kurve in X von a nach b.

(1) $$A([0, \varepsilon)\times I) \subseteq U.$$[23]

Wegen $p(\hat{u}_s(t)) = u_s(t)$ für alle $s, t\in I$ ist

$$p(\hat{A}(t,s)) = p(\hat{u}_s(t)) = u_s(t) = A(t,s) \text{ für alle } s,t\in I,$$

also

(2) $$p\circ\hat{A} = A.$$

Wir schränken auf $[0, \varepsilon)$ ein und erhalten wegen (1)

$$p|_U \circ \hat{A}|_{[0,\varepsilon)\times I} = A_{[0,\varepsilon)\times I}.$$

Weil $p|_U$ ein Homöomorphismus ist, folgt

$$\hat{A}|_{[0,\varepsilon)\times I} = (p|_U)^{-1}\bullet A_{[0,\varepsilon)\times I}.$$

Insbesondere ist die Abbildung links als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig.

2. Schritt. $\hat{A}$ ist stetig auf ganz $I\times I$.

Angenommen, es gibt einen Punkt $(t_0, \sigma) \in I\times I$, in welchem $\hat{A}$ nicht stetig ist. Sei

$$\tau\in I$$

die untere Grenze über alle $t\in I$, für welche $\hat{A}$ in (t, σ) nicht stetig ist. Nach dem ersten Schritt gilt dann

$$\tau \geq \varepsilon.$$

Wir setzen

$$x := A(\tau,\sigma)\in X \text{ und } y := \hat{A}(\tau, \sigma)\in Y$$

und wählen offene Mengen U und V mit

$$x \in U \subseteq X, y \in V \subseteq Y$$

und mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung von p auf U einen Homöomorphismus

$$p|_V: V \longrightarrow U$$

induziert. Man beachte, wegen (2) gilt $p(y) = x$.
Weil A stetig ist, gibt es ein $\varepsilon>0$ mit

(3) $$A(I_\varepsilon(\tau)\times I_\varepsilon(\sigma)) \subseteq U,$$

wobei

$$I_\varepsilon(\xi) := \{t\in I \mid |t-\xi| < \varepsilon\}$$

die ε-Umgebung von ξ auf dem Einheitsintervall I bezeichne. Insbesondere ist

$$p(\hat{u}_\sigma(\tau)) = u_\sigma(I_\varepsilon(\tau)) \subseteq U$$

also wegen der Eindeutigkeit der Anhebung einer Kurve, die in

$$u_\sigma(\tau) = A(\tau,\sigma) = x$$

---

[23] Für jedes $s\in I$ gibt es eine ε-Umgebung von $(0,s)$, die von A ganz in U abgebildet wird. Endlich viele solche ε-Umgebungen überdecken $\{0\}\times I$. Das Komplement der Vereinigung dieser endlich vielen ε-Umgebungen ist abgeschlossen und disjunkt zu $\{0\}\times I$, hat also einen positiven Abstand d von $\{0\}\times I$. Wir können $\varepsilon = d/2$ setzen.

beginnt zu einer Kurve, die in $\hat{u}_\sigma(\tau) = \hat{A}(\tau, \sigma) = y$ beginnt:

$$\hat{u}_\sigma|_{I_\varepsilon(\tau)} = (p|_U)^{-1} \circ u_\sigma|_{I_\varepsilon(\tau)}$$

Für jedes $t' \in I_\varepsilon(\tau)$ mit $t' < \tau$ gilt insbesondere

$$\hat{A}(t', \sigma) = \hat{u}_\sigma(t') \in \text{Vertevorrat von } (p|_U)^{-1} = V.$$

Weil $\hat{A}$ stetig ist in (t', σ) (nach Wahl von t'), gibt es ein $\delta = \delta(t') > 0$ mit $\delta \leq \varepsilon$ und

$$\hat{u}_s(t) = \hat{A}(t', s) \in V \text{ für alle } s \in I_\delta(\sigma),\ \delta = \delta(t').$$

Damit ist

$$\hat{u}_s|_{I_\varepsilon(\tau)} = (p|_V)^{-1} \bullet u_s|_{I_\varepsilon(\tau)} \text{ für jedes } s \in I_\delta(\sigma) \tag{4}$$

denn andernfalls würden die beiden Seiten der Identität zwei verschiedene Anhebungen einer Kurve liefern, die beide in $\hat{u}_s(t')$ beginnen. Damit ist aber

$$\hat{A}|_{I_\varepsilon(\tau) \times I_\varepsilon(\sigma)} = (p|_V)^{-1} \circ A|_{I_\varepsilon(\tau) \times I_\varepsilon(\sigma)}.$$

Insbesondere ist $\hat{A}$ in einer Umgebung von (τ, σ) im Widerspruch zur Wahl von τ.
3. Schritt: Beweis der Behauptung.

Für jedes $s \in I$ gilt

$$p \circ \hat{A}(1,s) = A(1,s) = u_s(1) = b,$$

Also

$$\hat{A}(\{1\} \times I) \subseteq p^{-1}(b).$$

Weil $\hat{A}$ stetig und $\{1\} \times I$ zusammenhängend ist, muß auch das Bild von $\{1\} \times I$ bei $\hat{A}$ zusammenhängend sein. Nun ist aber $p^{-1}(b)$ diskret. Deshalb besteht $\hat{A}(\{1\} \times I)$ aus nur einem Punkt,

$$\hat{u}_s(1) = \hat{A}(1,s) = \hat{b} \text{ ist unabhängig von } s.$$

Deshalb definiert $\hat{A}$ eine Deformation der Kurve $\hat{u}_0$ in die Kurve $\hat{u}_1$.

QED.

Bemerkung

Um die Existenz von Anhebungen sicherzustellen, müssen wir noch eine weitere Bedingung an unsere Überlagerungen stellen.

1.4.15 Unbeschränkt unverzweigte Überlagerungen

Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung

$$p: Y \longrightarrow X$$

heißt unbeschränkt unverzweigte Überlagerung, wenn es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U gibt,

$$x \in U \subseteq X,$$

mit der Eigenschaft, daß man deren vollständiges Urbild in der Gestalt

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$$

schreiben kann, wobei die Mengen

$$V_j, j \in J,$$

paarweise disjunkte offene Teilmengen von Y sind und die Einschränkungen

$$p|_{V_j} : V_j \longrightarrow U$$

Homöomorphismen.

Bemerkungen

(i) Nach Definition ist p ein lokaler Homöomorphismus also unverzweigte Überlagerung im Sinne von 1.4.5.

(ii) In den Lehrbüchern der Topologie versteht man unter einer Überlagerung meistens das, was wir hier unbeschränkt unverzweigte Überlagerung nennen. Für die Funktionentheorie ist jedoch die Betrachtung verzweigter Überlagerungen ebenfalls wichtig.

1.4.16 Beispiele

(a) Einbettung des Einheitskreises

Seien

$$E := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

der Einheitskreis in der komplexen Ebene und

$$p: E \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z,$$

die natürliche Einbettung. So ist p zwar unverzweigt (da injektiv) aber keine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung: für keinen Punkt $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ gibt es eine Umgebung U mit den geforderten Eigenschaften.[24]

(b) Die Potenzabbildung

Seien $k \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann ist die Potenzabbildung

$$p_k: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto z^k,$$

eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung. Um das einzusehen, betrachten wir einen beliebigen Punkt

$$a \in \mathbb{C}^*.$$

Es gibt ein $b \in \mathbb{C}^*$ mit $p_k(b) = a$. Da p_k unverzweigt ist, gibt es offene Mengen U und V,

$$a \in U \subseteq \mathbb{C}, b \in V \subseteq \mathbb{C},$$

mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung

$$p_k|_V: V \longrightarrow U$$

ein Homöomorphismujs ist. Sei

$$\zeta \in \mathbb{C}^*$$

---

[24] Für kein offene Umgebung U von a ist die Abbildungen $p^{-1}(U) \longrightarrow U$ surjektiv, denn a selbst liegt nicht im Bild.

eine primitive k-te Einheitswurzel, zum Beispiel $\zeta = e^{2\pi i/k}$. Dann unterscheiden sich je zwei komplexe Zahlen mit derselben k-ten Potenz um eine Potenz von ζ, d.h.

$$p_k^{-1}(U) = V \cup \zeta V \cup \zeta^2 V \cup ... \cup \zeta^{k-1} V.$$

Indem man V geeignet verkleinert (und entsprechend auch U), erreicht man, daß die mengen

$$V_i := \zeta^i V, i = 0, ... , k-1,$$

paarweise disjunkt sind. Nach Konstruktion sind ist die Einschränkung

$$p_k|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$$

für jedes i ein Homöomorphismus.

(c) Die Exponentialabbildung

Die Abbildung

$$\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

ist eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{C}^*$ vorgegeben und sei $b \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit

$$\exp(b) = a.$$

Da die Exponentialfunktion unverzweigt ist, gibt es offene Mengen U und V,

$$a \in U \subseteq \mathbb{C}^* \text{ und } b \in V \subseteq \mathbb{C},$$

derart, daß die Einschränkung

$$\exp|_V : V \longrightarrow U$$

ein Homöomorphismus ist. Zwei komplexe Zahlen haben genau dann dasselbe Bild bei exp, wenn ihre Differenz ein Vielfaches von $2\pi i$ ist, d.h.

$$\exp(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n \text{ mit } V_n := 2\pi i n + V.$$

Wenn wir V hinreichend klein wählen (zum Beispiel mit einem Durchmesser $< 2\pi$), so sind die V_n paarweise disjunkt. Jede der Einschränkungen

$$\exp|_n : V_n \longrightarrow U$$

ist nach Konstruktion ein Homöomorphismus.[25]
QED.

1.4.17 Die Liftungseigenschaft für Kurven

Wir sagen, die Überlagerung

$$p: Y \longrightarrow X$$

besitzt die Liftungseigenschaft für Kurven, wenn es für jede Kurve

$$u: I \longrightarrow X$$

und jeden Punkt $b \in Y$ mit

$$p(b) = u(0)$$

eine Anhebung $\hat{u}$ von u entlang p gibt mit

$$\hat{u}(0) = b.$$

---

[25] Jede dieser Abbildung entsteht aus $\exp|_V : V \longrightarrow U$ durch Zusammensetzung mit einer Verschiebung um $2\pi i n$.

1.4.18 Die Existenz von Anhebungen

Jede unbeschränkt unverzweigte Überlagerung $p: Y \longrightarrow X$ besitzt die Liftungseigenschaft für Kurven.

Beweis. Seien

$$u: I \longrightarrow X$$

eine Kurve und $b \in Y$ ein Punkt mit

$$p(b) = u(0).$$

Weil I kompakt ist, gibt es eine endliche Zerlegung des Einheitsintervalls

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$$

und offene Mengen $U_1, ..., U_n$ in X mit folgenden Eigenschaften.

1. $u([t_{k-1}, t_k]) \subseteq U_k$.

2. $p^{-1}(U_k) = \bigcup_{j \in J_k} V_{kj}$ mit offenen Mengen V_{kj}, die sich bei p homöomorph auf U_k abbilden.

Wir zeigen durch Induktion nach k, daß es eine Anhebung

$$\hat{u}: [0, t_k] \longrightarrow Y$$

von $u|_{[0,t_k]}$ gibt mit $\hat{u}(0) = b$.

Induktionsanfang k = 0. Wegen $u(0) \in U_1$ liegt der Punkt b in $p^{-1}(u(0))$, also in einer der Mengen U_{1j}. Wegen 2 läßt sich $u|_{[0, t_1]}$ anheben.

Induktionsschritt. Sei

(1) $$\hat{u}: [0, t_{k-1}] \longrightarrow Y$$

bereits konstruiert. Wegen

$$u(t_{k-1}) \in U_k$$

gilt $\hat{u}(t_{t_{k-1}}) \in p^{-1}(U_k)$, d.h. es gibt ein $j \in J_k$ mit

$$\hat{u}(t_{t_{k-1}}) \in V_{kj}$$

Wir setzen die Einschränkung $u|_{[t_{k-1}, t_k]} : [t_{k-1}, t_k] \longrightarrow U_k$ mit der Umkehrung des Homöomorphismus

$$p|_{V_{kj}} : V_{kj} \longrightarrow U_k$$

zusammen und erhalten eine Kurve $[t_{k-1}, t_k] \longrightarrow V_{kj}$, die zusammen mit (1) die gesuchte Fortsetzung

$$\hat{u}: [0, t_k] \longrightarrow Y$$

liefert.

QED.

1.4.19 Die Anhebung 0-homotoper Kurven

Sei $p: Y \longrightarrow X$ eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung von Hausdorff-Räumen und $a \in X$, $b \in Y$ Punkte mit

$$p(b) = a.$$

Nach 1.4.18 und 1.4.10 besitzt dann jede Kurve

$$u: I \longrightarrow X$$

mit dem Anfangspunkt a genau eine Anhebung entlang p mit dem Anfangspunkt b.

Ist die Kurve u geschlossen, so muß die Anhebung nicht unbedingt geschlossen sein (s.u.). Ist die Kurve u jedoch geschlossen und 0-homotop, so muß dasselbe auch für die Anhebung gelten[26].

Beispiel.
Seien

$$p = p_2: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto z^2,$$

die Potenzabbildung und

$$a = b = 1.$$

Die Kurve

$$u: I \longrightarrow \mathbb{C}^*, t \mapsto e^{2\pi i t},$$

ist eine geschlossen Kurve mit dem Anfangspunkt 1 und besitzt die Anhebung

$$\hat{u}: I \longrightarrow \mathbb{C}^*, t \mapsto e^{\pi i t},$$

deren Anfangspunkt gleich 1 und deren Endpunkt gleicb -1 ist.

1.4.20 Die Fasern von unbeschränkt unverzweigten Überlagerungen

Seien $p. Y \longrightarrow X$ eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung von Hausdorff-Räumen und $x', x'' \in X$ zwei Punkte. Ist X linear zusammenhängend, so gibt es eine Bijektion

$$\varphi: p^{-1}(x') \longrightarrow p^{-1}(x''),$$

d.h. die beiden Fasern bestehen aus gleichvielen Punkten (sind gleichmächtig).
Beweis. Wir wählen eine Kurve

$$u: I \longrightarrow X \text{ von } x' \text{ nach } x''$$

und für jeden Punkt $y \in p^{-1}(x')$ eine Anhebung

---

[26] Nach 1.4.14, denn die konstante Kurve läßt sich stets zu einer konstanten Kurve anheben.

$$\hat{u}_y : I \longrightarrow Y$$

vom u mit

$$\hat{u}_y(0) = y.$$

Ein solche existiert nach 1.4.18 und ist eindeutig bestimmt nach 1.4.10. Wir setzen

$$\varphi(y) := \hat{u}_y(1).$$

Auf diese Weise ist eine Abbildung $\varphi: p^{-1}(x') \longrightarrow p^{-1}(x'')$ definiert. Ersetzt man in dieser Konstruktion u durch u^{-1}, so erhält man gerade die zu φ inverse Abbildung.
QED.
,
Die eben konstruierte Abbildung hängt wesentlich von der Wahl der Kurve u ab. Es gibt deshalb keine natürliche Methode, die Punkte einer Faser durchzunummerieren.

1.4.21 Existenz und Eindeutigkeit von Anhebungen stetiger Abbildungen

Seien $p. Y \longrightarrow X$ eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung von Hausdorff-Räumen und $a \in X$, $b \in Y$ zwei Punkte mit

$$p(b) = a.$$

Weiter sei

$$Z$$

ein einfach zusammenhängender[27] und lokal linear zusammenhängender Raum,

$$c \in Z$$

ein Punkt und

$$f. Z \longrightarrow X$$

eine stetige Abbildung mit f(c) = a. Dann gibt es genau eine Anhebung

$$\tilde{f} : Z \longrightarrow Y$$

von f entlang p mit $\tilde{f}(c) = b$.
Bemerkung
Im nachfolgenden Beweis wird von der Überlagerung p nur gefordert, daß sie die Anhebungseigenschaft für Kurven besitzt.
Beweis. Wir definieren die Abbildung

$$\tilde{f} : Z \longrightarrow Y$$

wie folgt. Für vorgegebens $z \in Z$ wählen wir eine Kurve

$$u: I \longrightarrow Z \text{ von c nach z}$$

(eine solche existiert, da Z einfach zusammenhängend, also insbesondere linear zusammenhängend ist). Die Komposition

$$v := f \circ u: I \longrightarrow Y$$

ist dann eine Kurve von f(c) = a nach f(z). Sei

$$\hat{v}: I \longrightarrow X$$

die eindeutig bestimmte Anhebung von v entlang p mit dem Anfangspunkt

$$\hat{v}(0) = b.$$

Wir setzen

---

[27] also insbesondere linear zusammenhängender

$$\tilde{f}(z) := \hat{v}(1).$$

Die Definition von $\tilde{f}$ hängt nicht von der Wahl der Kurve u in Z von c nach z ab. Ist nämlich

$$u': I \longrightarrow Z$$

eine zweite solche Kurve von c nach z, so ist diese homotop zu u (weil Z einfach zusammenhängend ist, vgl. 1.3.13). Dann sind aber auch $f \circ u$ und $f \circ u$ homotop. Nach 1.4.14 sind dann aber auch die Anhebungen dieser Kurven entlang p (mit dem Anfangspunkt b) homotop und haben insbesondere denselben Endpunkt $\tilde{f}(z)$. Der Wert $\tilde{f}(z)$ hängt also tatsächlich nicht von der Wahl der Kurve u ab, d.h. $\tilde{f}$ ist korrekt definiert. Nach Konstruktion gilt

$$p \circ \tilde{f} = f \text{ und } \tilde{f}(c) = b.$$

Wir haben noch zu zeigen, $\tilde{f}$ ist stetig.

Sei $z \in Z$ ein vorgegebener Punkt,

$$y = \tilde{f}(z)$$

dessen Bild und V eine offene Umgebung von y,

$$y \in V \subseteq Y.$$

Wir müssen eine offene Umgebung W von z finden,

$$z \in W \subseteq Z \text{ mit } \tilde{f}(W) \subseteq V.$$

Weil p unverzweigte Überlagerung, also ein lokaler Homöomorphismus, ist, können wir annehmen, die Einschränkung von p auf V ist ein Homöomorphismus

$$(1) \qquad p|_V : V \xrightarrow{\cong} U$$

mit einer offenen Umgebung U von $x := p(y) = f(z)$,

$$x = p(y) = f(z) \in U \subseteq X.$$

Weil f stetig und Z ein lokal linear zusammenhängender Raum ist, so existiert eine linear zusammenhängende offene Umgebung W von z,

$$z \in W \in Z, W \text{ linear zusammenhängend,}$$

mit

$$f(W) \subseteq U.$$

Es reicht zu zeigen,

$$\tilde{f}(W) \subseteq V.$$

Wie oben wählen wir eine Kurve $u: I \longrightarrow Z$ von c nach z, bezeichnen mit $v := f \circ u$ deren Bild in X (von a nach f(z)) und mit $\hat{v}: I \longrightarrow Y$ eine Anhebung von v mit dem Anfangspunkt $b \in Y$ und dem Endpunkt $\tilde{f}(z)$.[28]

Sei $z' \in W$ ein vorgegebener Punkt. Wir wählen eine Kurve

$$u': I \longrightarrow W \text{ von z nach z'.}$$

---

[28] nach Definition von $\tilde{f}$.

Eine solche existiert, weil W linear zusammenhängend ist. Die Kurve

$$v' := f \circ u' : I \longrightarrow U$$

liegt dann ganz in U und verbindet die Punkte f(z) = x und x' := f(z'). Wir wenden die Umkehrung von (1) an und erhalten eine Anhebung

$$\hat{v}' := (p|_V)^{-1} : I \longrightarrow V$$

von v' mit dem Anfangspunkt y und dem Endpunkt

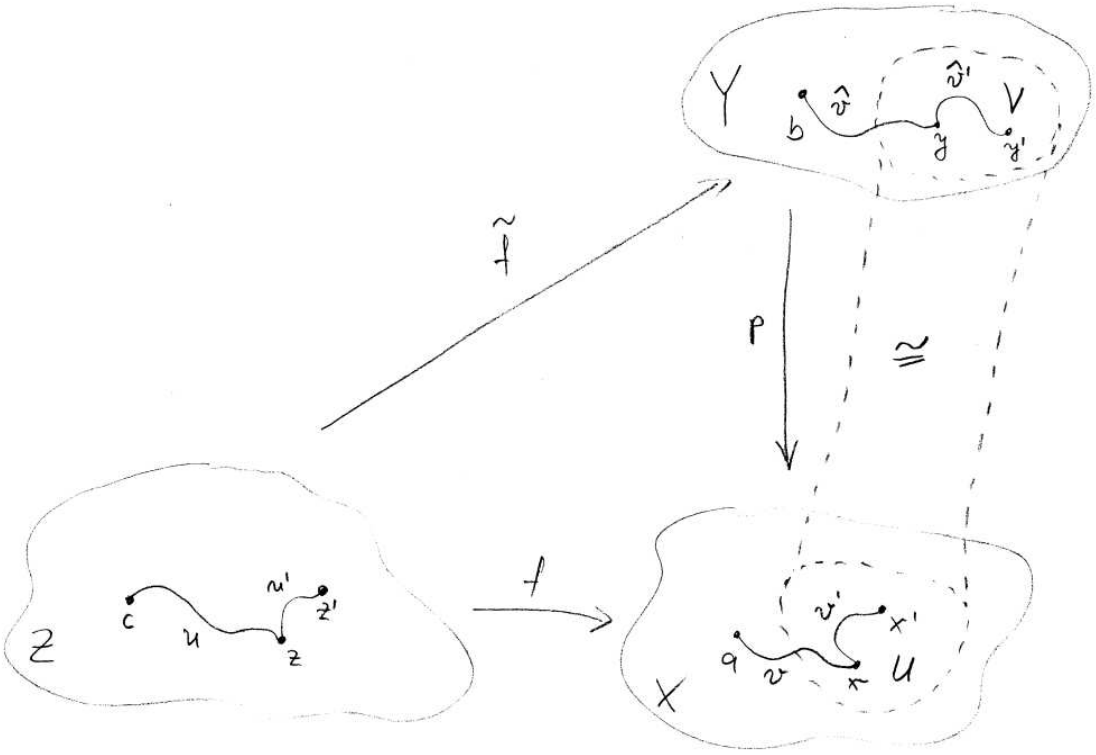
$$y' := \hat{v}'(1) \in V.$$

Die Komposition

$$\hat{v}' \bullet \hat{v} : I \longrightarrow Y$$

ist dann eine Anhebung von $v' \bullet v = f \circ (u' \bullet u)$ mit dem Anfangspunkt b. Deshalb gilt

$$\tilde{f}(z') = (\hat{v}' \bullet \hat{v})(1) = \hat{v}'(1) = y' \in V.$$



QED.

1.4.22 Beispiel (die Logarithmus-Funktion)

Seien X eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche und

$$f : X \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

eine holomorphe Funktion ohne Nullstelle. Wir wollen den Logarithmus von dieser Funktion konstruieren, d.h. wir suchen eine holomorphe Funktion

$$F : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \exp \circ F = f.$$

Die Bedingung bedeutet gerade, F ist eine Anhebung von f entlang der unbeschränkt unverzweigten Überlagerung $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$.

Ist $x_0 \in X$ ein Punkt und $c \in \mathbb{C}$ ein Lösung der Gleichung

$$e^c = f(x_0),$$

so existiert nach 1.4.21 genau eine holomorphe Anhebung

$$F: X \longrightarrow \mathbb{C}$$

von f entlang exp mit $F(x_0) = c$, und nach 1.4.11 ist diese holomorph. Jede andere Lösung dieser Aufgabe unterscheidet sich von dieser um eine additive Konstante der Gestalt

$$2\pi i n \text{ mit } n \in \mathbb{Z}.$$

Ein wichtiger Spezialfall ist der eines einfach zusammenhängenden Gebiets X in der komplexen Ebene und der natürlichen Einbettung

$$f = i: X \hookrightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto z.$$

Jede Anhebung von i entlang exp liefert dann einen Zweig der Logarithmenfunktion auf X.
In analoger Weise konstruiert man die Wurzeln aus einer Funktion

$$f: X \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

ohne Nullstelle auf einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche, indem man anstelle der Exponentialfunktion die Überlagerung

$$p_k: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

betrachtet.

1.4.23 Unbeschränktheit von Überlagerungen und Liftungseigenschaft

Sei $p: Y \longrightarrow X$ eine unverzweigte Überlagerung. Wir nehmen an,

1. X ist eine Mannigfaltigkeit.
2. Y ist eine Hausdorff-Raum.
3. p besitzt die Liftungseigenschaft für Kurven.

Dann ist p unbeschränkt unverzweigt.
Beweis. Seien

$$x_0 \in X$$

ein beliebiger Punkt und

$$p^{-1}(x_0) = \{y_j\}_{j \in J}.$$

Weiter seien U eine offfene Menge,

$$x_0 \in U \subseteq X,$$

die homöomorph ist zur Vollkugel und

$$f: U \hookrightarrow X$$

deren natürliche Einbettung. Für jedes $j \in J$ gibt es dann (nach der Bemerkung von 1.4.21) genau eine Anhebung

$$\tilde{f}_j: U \longrightarrow Y \text{ mit } \tilde{f}_j(x_0) = y_j.$$

Wir setzen

$$V_j := \tilde{f}_j(U).$$

Dann ist

$$p|_{V_j}: V_j \longrightarrow U$$

für jedes j ein Homöomorphismus (mit der Umkehrung $\tilde{f}_j$) und

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j\in J} V_j \,.^{29}$$

Wegen der Eindeutigkeit[30] der Anhebungen $\tilde{f}_j$ sind die V_j paarweise disjunkt.

QED.

1.4.24 Eigentliche Abbildungen

Ein topologischer Raum heißt lokal kompakt, wenn X ein Hausdorff-Raum ist und jeder Punkt von X eine offene Umgebung besitzt, deren Abschließung kompakt ist. Eine stetige Abbildung

$$p: X \longrightarrow Y$$

zwischen zwei lokal kompakten Räumen heißt eigentlich, wenn das Urbild jeder kompakten Teilmenge von Y bei p kompakt ist.

Bemerkungen

(i) Ist X kompakt (und Y lokal kompakt), so ist jede stetige Abbildung $p: X \longrightarrow Y$ eigentlich.

(ii) Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ eines lokal kompakten Raums X ist genau dann abgescnhlossen, wenn ihr Durchschnitt mit jeder kompakten Teilmenge von X kompakt ist.

(iii) Eigentliche Abbildung sind abgeschlossen, d.h. sie überführen abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen.

Beweis. Zu (i). trivial.

Zu (ii). Ist Z abgeschlossen, so ist trivialerweise jeder Durchschnitt von F mit einer kompakten Menge kompakt. Sei umgekehrt der Durchschnitt von F mit jeder kompakten Teilmenge von X kompakt und

$$\{z_n\}_{n=1,2,..}$$

eine Folge von Punkten aus Z, die gegen einen Punkt von X konvergiert, sagen wir

$$z_n \longrightarrow x.$$

Wir haben zu zeigen, $x \in Z$.

Dazu fixieren wir eine offene Umgebung von x mit kompakter Abschließung,

$$x \in U \subseteq X, \bar{U} \text{ kompakt.}$$

Weil U offen ist, können wir annehmen,

---

[29] Wegen $p(\tilde{f}_j(U)) = f(U) = U$ gilt $V_j = \tilde{f}_j(U) \subseteq p^{-1}(U)$ für jedes j, d.h. die rechte Seite ist in der linken enthalten. Sei umgekehrt y ein Punkt der linken Seite. Dann liegt $x = p(y)$ in U, läßt sich also mit x_0 durch eine Kurve $u: I \longrightarrow U$ verbinden. Sei $\tilde{u}: I \longrightarrow Y$ eine Anhebung entlang p von u mit dem Anfangspunkt x. Der Endpunkt von $\tilde{u}$ liegt dann $p^{-1}(x_0)$, d.h. es gibt ein $j\in J$ mit $\tilde{u}(1) = y_j$ und $\tilde{u}^{-1}: I \longrightarrow Y$ ist eine Kurve von y_j nach y, welche die Kurve $u^{-1}: I \longrightarrow U$ anhebt. Die Kurve $\tilde{u}^{-1}$ hat also denselben Anfangspunkt wie die Anhebung

$$\tilde{f}_j \circ u^{-1}: I \longrightarrow V_j,$$

stimmt also mit dieser überein. Also ist $\tilde{u}^{-1}$ eine Kurve von V_j, und insbesondere gilt $y\in V_j$.

[30] Zwei $\tilde{f}_j$, die an einer Stelle denselben Wert haben, müssen übereinstimmen.

$$z_n \in U \text{ für jedes } n.$$

Dann bilden die z_n eine Folge in der kompakten Menge $X \bigcap \overline{U}$, d.h. es gibt einen Häufungspunkt der z_n in $X \bigcap \overline{U}$. Da x der einzige Häufungspunkt der z_n ist, folgt $x \in X \bigcap \overline{U}$.

Zu (iii). Sei $p: X \longrightarrow Y$ eigentlich und $Z \subseteq Y$ abgeschlosssen. Nach (ii) reicht es zu zeigen,

$$p(Z) \bigcap K = p(Z \bigcap p^{-1}(K))$$

ist kompakt für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq Y$. Dazu reicht es zu zeigen, die Menge

$$Z \bigcap p^{-1}(K)$$

ist kompakt. Das ist aber der Fall (nach (ii)), weil $p^{-1}(K)$ kompakt ist.
QED.

1.4.25 Eigenschaften eigentlicher Überlagerungen

Sei $p: Y \longrightarrow X$ eine eigentliche Überlagerung. Dann gilt:

(i) Für jeden Punkt $x \in X$ ist $p^{-1}(x)$ endlich.

(ii) Für jeden Punkt $x \in X$ und jede offene Umgebung V von $p^{-1}(x)$ gibt es eine offene Umgebung U von x mit $p^{-1}(U) \subseteq V$.

(iii) Ist X zusammenhängend und Y nicht leer, so ist p surjektiv.

Beweis. Zu (i). $p^{-1}(x)$ ist eine kompakte diskrete Teilmenge von Y, also endlich.
Zu(ii). Das Komplement
$A := Y - V$
ist eine abgeschlossene Menge von Y, die disjunkt ist zur Faser $p^{-1}(x)$. Deshalb ist
p(A)
eine abgeschlossene Menge von X, die den Punkt x nicht enthält. Also ist
$U := X - p(A) = X - p(Y-V)$
eine offene Umgebung von x mit

$$p^{-1}(U) = Y - p^{-1}p(Y-V) \subseteq Y - (Y-V) = V.$$

QED.

1.4.26 Kriterium für unbeschränkt unverzweigte Überlagerungen

Sei $p: Y \longrightarrow X$ eine eigentliche unverzweigte Überlagerung. Dann ist p unbeschränkt unverzweigt.

Beweis. Sei $x \in X$ ein beliebig vorgegebener Punkt. Die Faser über x besteht dann aus endlich vielen Punkten (nach 1.4.25(i)). Sagen wir, ihre Anzahl ist n,

$$p^{-1}(x) = \{y_1,...,y_n\}, \#p^{-1}(x) = n.$$

Weil p unverzweigte Überlagerung ist, gibt es für jedes j offene Mengen U_j, V_j mit

$$x \in U_j \subseteq X, \quad y_j \in V_j \subseteq Y, \quad p|_{V_j} : V_j \longrightarrow U_j \text{ homöomorph.}$$

Wir können dabei annehmen, die W_j sind paarweise disjunkt. Die Mengen

$$W_1 \bigcup ... \bigcup W_n$$

ist eine offene Umgebung der Faser $p^{-1}(x)$. Nadh 1.4.25 (iii) gibt es eine offene Umgebung U von x,

$$x \in U \subseteq X$$

mit

$$p^{-1}(U) \subseteq W_1 \cup ... \cup W_n .$$

Wir setzen

$$V_j := p^{-1}(U) \cap W_j.$$

Dann gilt

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^{n} V_j .$$

Die V_j sind paarweise disjunkt, und die Einschränkung von p auf V_j ist ein Homöomorphismus $V_j \longrightarrow U$.

QED.

1.4.27 Der Fall eigentlicher holomorpher Abbildungen

Sei

$$f: X \longrightarrow Y$$

eine eigentliche nicht-konstante holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen. Bezeichne

$$A \subseteq X$$

die Menge der Verzweigungspunkte von f. Diese Menge ist abgeschlossen und diskret.[31] Weil f eigentlich ist, ist auch die Menge

$$B := f(A)$$

abgeschlossen und diskret.[32] Die Punkt der Menge B heißen kritische Werte der Abbildung f. Seien

$$Y' := Y - B \text{ und } X' := X - f^{-1}(B).$$

Dann ist

$$f' := f|_{X'} : X' \longrightarrow Y'$$

eine eigentliche unverzweigte holomorphe Überlagerung, also unbeschränkt unverzweigt (nach 1.4.26). Die Fasern dieser Abbildung sind endlich (nach 1.4.25(i)) und bestehen überall aus der gleichen Anzahl n von Punkten (nach 1.4.20). Diese Anzahl n heißt auch Anzahl der Blätter von f. Mit anderen Worten, jeder Wert der Abbildung f, ausgenommen die kritischen Werte, wird genau n mal angenommen.
Um diese Aussage auf die kritischen Werte auszudehnen, werden wir davon sprechen, daß die Abbildung f im Punkt $x \in X$ den Wert f(x) mit der Vielfachheit

$$e_x(f)$$

annimmt, wobei $e_x(f)$ den Verzweigungsindex von 1.2.1 bezeichnet. Analog sprechen wir davon, daß die Abbildung f den Wert $y \in Y$ mit der Vielfachheit

$$m := \sum_{x \in p^{-1}(y)} e_x(f)$$

annimmt.

---

[31] auf Grund der lokalen Beschreibung holomorpher Abbildungen in 1.2.1

[32] diskret wegen der lokalen Beschreibung der holomorphen Abbildungen in 1.2.1.

1.4.28 Vielfachheit der Wertannahme eigentlicher holomorpher Abbildungen

Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine eigentliche nicht-konstante holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen. Dann gibt es eine natürliche Zahl n derart, daß f jeden Wert $y \in Y$ mit derselben Vielfachheit n annimmt.

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen von 1.4.27. Wie dort bezeichne n die Anzahl der Blätter der eigentlichen unverzweigten Überlagerung $f': X' \longrightarrow Y'$,

$$n = \# f'^{-1}(y) \text{ für jedes } y \in Y'.$$

Sei

$$b \in B$$

ein kritischer Wert von f und die Faser

$$f^{-1}(b) = \{a_1, \ldots, a_r\}$$

bestehe aus r Punkten. Nach 1.2.1 gibt es dann paarweise disjunkte offene Mengen U_j, V_j mit

$$a_j \in U_j \subseteq X, b \in V_j \subseteq Y$$

mit der Eigenschaft, daß für jedes $y \in V_j - \{b\}$ die Menge $p^{-1}(y) \bigcap U_j$ aus genau $k_j = e_{a_j}(f)$ Punkten besteht,

$$\# p^{-1}(y) \bigcap U_j = e_{a_j}(f) =: k_j \text{ für jedes } y \in V_j - \{b\}.$$

Wir wählen eine offene Umgebung V von b,

$$b \in V \subseteq V_1 \bigcap \ldots \bigcap V_r$$

mit

$$f^{-1}(V) \subseteq U_1 \bigcup \ldots \bigcup U_r$$

(welche nach 1.4.25 (ii) existiert). Für jedes $y \in V - \{b\}$ besteht die Menge $p^{-1}(y)$ aus

$$\# f^{-1}(y) = k_1 + \ldots + k_r .$$

Die Vielfachheit der Wertannahme in den Punkten von $p^{-1}(V)$ ist also gleich dieser Zahl. Andererseits ist diese Zahl aber gleich der Anzahl n der Blätter von f,

$$n = k_1 + \ldots + k_r = e_{a_1}(f) + \ldots + e_{a_r}(f).$$

QED.

1.4.29 Vergleich von Polstellen- und Nullstellen-Gesamtordnung

Sei $f: X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung auf der kompakten Riemannschen Fläche X. Dann ist die Anzahl der Polstellen von f gleich der Anzahl der Nullstellen von f, wenn man diese mit ihren Vielfachheiten zählt.

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von 1.4.28.

QED.

1.4.30 Nullstellenzahl von Polynomen

Jedes Polynom

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{C}[z]$$

n-ten Grades mit komplexen Koeffizienten hat genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ (wenn man die Nullstellen mit ihren Vielfachheiten zählt).

Beweis. Die durch f definierte holomorphe Abbildung

$$f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

nimmt den Wert ∞ mit der Vielfachheit n an (nach Beispiel 1.2.2).
QED.

1.5 Universelle Überlagerungen, Decktransformationen

Unter allen unbeschränkt unverzweigten Überlagerungen einer Mannigfaltigkeit X gibt es eine "größte", die sogenannte universelle Überlagerung. Aus ihr kann man alle anderen unbeschränkt unverzweigten Überlagerungen gewinnen. Die Struktur der universllen Überlagerung steht über die Gruppe der Decktransformationen mit der fundamentalen Gruppe von X in Zusammenhang. Mit diesem Themenkreis werden wir uns jetzt beschäftigen.

1.5.1 Definition

Sei $p: Y \longrightarrow X$ eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung von zusammenhängenden topologischen Räumen. Diese heißt universelle Überlagerung, wenn sie die folgende Universalitätseigenschaft besitzt.

> Für jede unbeschränkt unverzweigte Überlagerung $p': Y' \longrightarrow X$ von zusammenhängenden topologischen Räumen, jeden Punkt $y' \in Y'$ und jeden Punkt
>
> $$y \in p^{-1}(p'(y'))$$
>
> gibt es genau eine Anhebung
>
> $$\tilde{p}': Y' \longrightarrow Y$$
>
> von p' entlang p mit $\tilde{p}'(y') = y$.

Bemerkung
Ein zusammenhängender topologischer Raum X besitzt bis auf Isomorphie höchstens eine universelle Überlagerung. Ist nämlich

$$p': Y' \longrightarrow X$$

eine zweite universelle Überlagerung von X (und sind y und y' Punkte wie oben), so gibt es neben der oben beschriebenen Abbildung $\tilde{p}'$ außerdem genau eine Anhebung

$$\tilde{p}: Y \longrightarrow Y'$$

von p entlang p' mit $\tilde{p}(y) = y'$. Die Zusammensetzungen

$$\tilde{p} \circ \tilde{p}': Y' \longrightarrow Y' \text{ und } \tilde{p}' \circ \tilde{p}: Y \longrightarrow Y$$

sind Anhebungen von p bzw. p' die den Punkt y' (bzw. den Punkt y) in sich abbilden. Die identische Abbildung $Y' \longrightarrow Y'$ bzw. $Y \longrightarrow Y$ hat aber ebenfalls diese Eigenschaft. Wegen der Eindeutigkeit der Anhebungen ist dann aber

$$\tilde{p} \circ \tilde{p}' = Id_{Y'} \text{ und } \tilde{p}' \circ \tilde{p} = Id_{Y},$$

d.h. $\tilde{p}$ und $\tilde{p}'$ sind zueinander inverse Isomorphismen (in der Kategorie der topologischen Räume).

1.5.2 Kriterium für die Universalität einer Überlagerung

Sei $p: Y \longrightarrow X$ eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung von zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten. Weiter sei Y einfach zusammenhängend.

Dann ist p eine universelle Überlagerung.
Beweis. Das folgt aus 1.4.21 (weil Mannigfaltigkeiten lokal linear zusammenbängend sind).
QED.

1.5.3 Existenz Universeller Überlagerungen

Sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine und einfach zusammenhängende[33] Mannigfaltigkeit $\widetilde{X}$ und eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung

$$\pi: \widetilde{X} \longrightarrow X.$$

Bemerkung
Nach 1.5.2 ist dies eine universelle Überlagerung von X.
Beweis. Wir fixieren einen Punkt

$$x_0 \in X.$$

Für jeden Punkt $x \in X$ bezeichne

$$\pi(x_0, x)$$

die Menge der Homotopie-Klassen der Kurven in X von x_0 nach x. Wir setzen

$$\widetilde{X} := \{(x, \alpha) \mid x \in X \,,\, \alpha \in \pi(x_0, x)\}.$$

Weiter sei p die Abbildung

$$p: \widetilde{X} \longrightarrow X, (x, \alpha) \mapsto x.$$

Unser Ziel ist es auf der Menge $\widetilde{X}$ eine Topologie einzuführen, für welche $\widetilde{X}$ ein einfach zusammenhängender Hausdorff-Raum und p eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung wird.

Die Topologie von $\widetilde{X}$ definieren wir, indem wir eine Topologie-Basis angeben. Beginnen wir mit der Beschreibung der Mengen der Topologie-Basis. Für jeden Punkt

$$(x, \alpha) \in \widetilde{X}$$

und jede offene, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Umgebung U von x,

$$x \in U \subseteq X$$

definieren wir wie folgt eine Teilmenge

$$[U, \alpha] \subseteq \widetilde{X}.$$

Die Elemente dieser Menge seien die Paare

$$(y, \beta) \text{ mit } y \in U \text{ und } \beta = \alpha \bullet [v].$$

Dabei sei v eine Kurve

$$v: I \longrightarrow U \text{ von x nach y.}$$

Bemerkung: da U einfach zusammenhängend ist, hängt [v] nicht von der speziellen Wahl der Kurve v sondern nur von deren Endpunkt y ab. Insbesondere ist die Einschränkung von p auf $[U, \alpha]$ bijektiv,

(1) $$p|_{[U, \alpha]}: [U, \alpha] \longrightarrow U, (y, \beta) \mapsto y \text{ bijektiv.}$$

[33] und damit auch zusammenbängende

Bezeichne $\mathcal{B}$ die Menge aller Mengen der Gestalt $[U, \alpha]$.

1. Schritt. $\mathcal{B}$ ist die Basis einer Topolgie von $\widetilde{X}$.[34]

Jeder Punkt $(x, \alpha) \in \widetilde{X}$ liegt in einer Menge der Gestalt $[U, \alpha]$.[35] Seien jetzt $[U, \alpha]$ und $[V, \beta]$ zwei der Mengen der beschriebenen Gestalt und

$$(z, \gamma) \in [U, \alpha] \bigcap [V, \beta].$$

Dann gilt $z \in U \bigcap V$. Weil X eine Mannigfaltigkeit ist, gibt es eine zusammenhängende und einfach zusammenhängende offene Menge W von X mit

$$z \in W \subseteq U \bigcap V.$$

Dann gilt aber[36]

$$(z, \gamma) \in [W, \gamma] \subseteq [U, \alpha] \bigcap [V, \beta].$$

2. Schritt. Die Abbildung $p: \widetilde{X} \longrightarrow X$ ist ein lokaler Homöomorphismus (und damit insbesondere stetig).

Nach Konstruktion sind die Abbildungen der Gestalt (1) bijektiv. Die offenen einfach zusammenhängenden Teilmengen[37] $U' \subseteq U$ entsprechen gerade den offenen Mengen der Gestalt $[U', \alpha \bullet [v]]$ links mit einer Kurve $v: I \longrightarrow U'$, die den Endpunkt von α mit einem Punkt von U' verbindet.[38] Mit anderen Worten, die Abbildungen der Gestalt (1) sind Homöomorphismen.

3. Schritt. $\widetilde{X}$ ist ein Hausdorff-Raum.

Seien (x, α) und (y, β) zwei verschiedene Punkte von $\widetilde{X}$. Wir haben zu zeigen, diese besitzen disjunkte offene Umgebungen. Im Fall $x \neq y$ ist das trivialerweise der Fall: es reicht disjunkte offene (und einfach zusammenhängende) Umgebungen von x und y in X zu wählen. Wir können also annehmen,

$$x = y, \alpha \neq \beta.$$

Wir wählen eine offene einfach zusammenhängende Umgebung von x,

$$x \in U \subseteq X, U \text{ offen und einfach zusammenhängend.}$$

Es reicht zu zeigen,

$$[U, \alpha] \bigcap [U, \beta] = \varnothing.$$

Angenommen, in diesem Durchschnitt gibt es ein Element

---

[34] d.h. die offenen Mengen dieser Topologie sind gerade die Vereinigungen der Mengen der Gestalt $[U, \alpha]$

[35] Man wähle für U irgendeine einfach zusammenhängende offene Umgebung von x und für v den konstanten Weg in x.

[36] Wegen $(z, \gamma) \in [U, \alpha] \bigcap [V, \beta]$ ist γ das Produkt aus α und der Klasse eines Weges in U und auch das Produkt aus β und der Klasse eines Weges in V. Es reicht also zu zeigen, jeder Weg in W ist auch einer in U und V. Das ist aber trivialerweise der Fall, wegen $W \subseteq U \bigcap V$.

[37] diese bilden eine Topologie-Basis von U.

[38] Dabei hängt $[U', \alpha \bullet [v]]$ nicht von der speziellen Wahl von v ab (weil U einfach zusammenhängend ist).

$$(y, \gamma) \in [U, \alpha] \bigcap [U, \beta].$$

Wir wählen eine Kurve

$$w: I \longrightarrow U \text{ von } x \text{ nach } y$$

und Repräsentanten

$$u: I \longrightarrow U \text{ und } v: I \longrightarrow U$$

für α bzw. β,

$$\alpha = [u], \beta = [v].$$

Diese Repräsentanten sind Kurven von x_0 nach x. Dann gilt

$$\gamma = \alpha \bullet [w] = \beta \bullet [w],$$

also $\alpha = \beta$, im Widerspruch zu der Annahme, daß (x, α) und (x, β) verschieden sein sollen.

4. Schritt. Konstruktion einer Anhebung.

Seien $u: I \longrightarrow X$ eine Kurve mit dem Anfangspunkt x_0. Für jedes $s \in I$ bezeichne u_s die Kurve

$$u_s: I \longrightarrow X, t \mapsto u(st).$$

Weiter sei

$$v: I \longrightarrow X$$

eine geschlossene Kurve mit den Anfangspunkt x_0. Wir wollen zeigen, die Abbildung

$$\hat{u}: I \longrightarrow \tilde{X}, t \mapsto (u(t), [v \bullet u_t]),$$

ist stetig und ist eine Anhebung der Kurve u mit dem Anfangspunkt

$$\hat{u}(0) = (x_0, [v]).$$

Trivialerweise gilt $p \circ \hat{u} = u$ und $\hat{u}(0) = (u(0), [v]) = (x_0, [v])$, d.h. noch die Stetigkeit der Abbildung $\hat{u}$ zu beweisen. Seien $t_1 \in I$,

$$\hat{x}_1 = \hat{u}(t_1) = (u(t_1), [v \bullet u_{t_1}])$$

und $\hat{U}_1$ eine offene Umgebung von $\hat{x}_1$. Wir müssen eine Umgebung von $t_1 \in I$ finden, die durch $\hat{u}$ ganz in $\hat{U}_1$ abgebildet wird. Wir können annehmen, $\hat{U}_1$ hat die Gestalt

$$\hat{U}_1 = [W, \alpha_1] \text{ mit } W \text{ einfach zusammenhängend in } X.$$

Die gesuchte Umgebung existiert, weil u stetig ist.[39]

Bemerkung

Auf Grund der Aussage des 4. Schrittes läßt sich jeder Punkt $(x_0, [v])$ von $p^{-1}(x_0)$ mit jedem Punkt der Gestalt $(u(1), [v \bullet u])$ verbinden, d.h. mit jedem Punkt der Gestalt[40]

---

[39] Für t nahe bei t_1 liegt u(t) nahe bei $u(t_1)$, d.h. u(t) und alle Punkte von u_t liegen für t nahe bei t_1 in W.

$$(u(1), [u]).$$

Nun ist aber jeder Punkt von $\widetilde{X}$ von dieser Gestalt, d.h. $\widetilde{X}$ ist zusammenhängend. Weiter besitzt $p: \widetilde{X} \longrightarrow X$ nach dem 4. Schritt die Liftungseigenschaft für Kurven. Insbesondere ist p eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung.

5. Schritt. $\widetilde{X}$ ist einfach zusammenhängend.
Seien ε die Homotopie-Klasse der konstanten Kurve im Punkt $x_0 \in X$ und

$$w: I \longrightarrow \widetilde{X}$$

eine geschlossene Kurve von $\widetilde{X}$ mit dem Anfangspunkt (x_0, ε). Dann ist

$$u := p \circ w: I \longrightarrow X$$

eine geschlossene Kurve in X mit dem Anfangspunkt x_0.

Sei $\hat{u}: I \longrightarrow \widetilde{X}$ eine Anhebung von u entlang p. Eine solche existiert nach dem 4. Schritt.

Verwenden wir im 4. Schritt als Kurve v die konstante Kurve in x_0, so bekommt $\hat{u}$ den Anfangspunkt (x_0, ε).

Auf Grund der Eindeutigkeit der Anhebung gilt

$$\hat{u} = w.$$

Es folgt mit den Bezeichnungen des 4. Schritts:

$(x_0, [u]) = (u(1), [u_1])$ (u ist geschlossene Kurve in x_0)

$= \hat{u}(1)$ (nach Definition von $\hat{u}$ im 4. Schritt)

$= w(1)$ (wegen $\hat{u} = w$)

$= (x_0, \varepsilon)$ (w ist geschlossen Kurve in (x_0, ε)).

Insbesondere ist $[u] = \varepsilon$, d.h. u ist 0-homotop. Die Anhebung w von u ist dann aber auch 0-homotop.

Wir haben gezeigt, jede geschlossene Kurve w von $\widetilde{X}$ ist 0-homotop. Dann ist aber $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend.
QED.

Bemerkung
Wir haben damit insbesondere für jede Riemannsche Fläche die universelle Überlagerung konstruiert. Nach 1.4.8 besitzt diese universelle Überlagerung in natürlicher Weise die Struktur einer Riemannschen Fläche.

1.5.4 Begriff der Decktransformation

Seien X und Y zusammenhängende Hausdorff-Räume und

$$p: Y \longrightarrow X$$

eine Überlagerung. Eine Decktransformation dieser dieser Überlagerung ist ein fasertreuer Homöomorphismus $Y \longrightarrow Y$. Die Menge aller Decktransformationen von p ist eine Gruppe bezüglich der Zusammensetzung von Abbildungen. Diese wird mit

$$\mathrm{Deck}(Y/X)$$

---

[40] Man ersetze u durch $v^{-1} \bullet u$.

bezeichnet. In Situationen, in denen diese Bezeichnungsweise zu ungenau ist, verwenden wir auch die folgende:

$$\mathrm{Deck}(Y/X) = \mathrm{Deck}(Y \xrightarrow{p} X).$$

1.5.5 Galois-Überlagerungen

Seien X und Y zusammenhängende Hausdorff-Räume und

$$p: Y \longrightarrow X$$

eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung. Dann heißt p Galois-Überlagerung oder auch normale Überlagerung, wenn es für je zwei Punkt y', y" aus derselben Faser von p,

$$p(y') = p(y")$$

eine Decktransformation $f: Y \longrightarrow Y$ gibt mit $f(y') = f(y")$.

Bemerkung

Nach 1.4.10 ist die Decktransformation f, falls sie exitiert, eindeutig bestimmt, denn f ist eine Anhebung von p entlang p.

Beispiel

Die Abbildung

$$p: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto z^k$$

ist eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung. Es ist sogar eine Galois-Überlagerung, denn für je zwei Komplexe Zahlen $z', z" \in \mathbb{C}^*$ mit $p(z') = p(z")$ gilt

$$z" = \varepsilon \bullet z'$$

mit einer komplexen Einheitswurzen $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$. Dann ist aber die Multiplikation mit ε,

$$\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto \varepsilon z,$$

die gesuchte Decktransformation.

Wir werden später sehen, daß es einen Zusammenhang zwischen den Galois-Überlagerungen und den Galois-Erweiterungen der Körpertheorie gibt.

1.5.6 Die universelle Überlagerung und Galois-Überlagerungen

Seien X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und

$$p: Y \longrightarrow X$$

deren universelle Überlagerung. Dann ist p eine Galois-Überlagerung, und die Gruppe der Deck-Transformationen,

$$\mathrm{Deck}(Y/X) \cong \pi_1(X),$$

ist isomorph zur fundamentalen Gruppe von X.

Beweis. 1. Schritt: p ist eine Galois-Überlagerung.

Seien y', y"$\in$ Punkte derselben Faser von p,

$$p(y') = p"(y).$$

Da p die universelle Überlagerung von X ist, gibt (genau) eine fasertreue Abbildung

$$f: Y \longrightarrow Y \text{ mit } f(y') = y".$$

Wir haben zu zeigen, f ist ein Homöomorphismus.

Zum Beweis beachten wir, daß es natürlich auch genau eine fasertreue Abbildung

$$g: Y \longrightarrow Y \text{ mit } g(y") = y'$$

gibt. Die beiden Zusammensetzungen

$$f \circ g \text{ und } g \circ f$$

sind dann ebenfalls fasertreue Abbildungen, welche y" bzw. y' in sich abbilden. Diese Eigenschaft hat aber auch die identische Abbildung. Auf Grund der Eindeutigkeitsbedingung in der Definiton des Begriffs der universellen Überlagerung muß deshalb gelten

$$f \circ g = \mathrm{Id}_Y \text{ und } g \circ f = \mathrm{Id}_Y ,$$

d.h. f und g sind zueinander inverse Homöomorphismen.

2. Schritt. Konstruktion einer Abbildiung Φ:Deck(Y/X) $\longrightarrow \pi_1(X)$.

Seien $x_0 \in X$ ein Punkt und $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ ein Punkt aus der Faser über x_0. Für jede Decktransformation

$$\sigma \in \mathrm{Deck}(Y/X)$$

wählen wir eine Kurve

$$v: I \longrightarrow Y \text{ von } y_0 \text{ nach } \sigma(y_0).$$

Weil Y nach Konstruktion der universellen Überlagerung einfach zusammenhängend ist, ist die Homotopie-Klasse der Kurve v durch deren Endpunkt eindeutig festgelegt. Die Bildkurve

$$p \circ v: I \longrightarrow X$$

ist eine geschlossene[41] Kurve mit dem Anfangspunkt x_0. Wir definieren das Bild von σ bei Φ als die Homotopie-Klasse

$$\Phi(\sigma) := [p \circ v] \in \pi_1(X, x_0) =: \pi_1(X).$$

3. Schritt. Die Abbildung Φ ist ein Gruppen-Homomorphismus
Seien

$$\sigma, \tau \in \mathrm{Deck}(Y/X)$$

zwei Decktransformationen und

$$v: I \longrightarrow Y \text{ und } w: I \longrightarrow Y$$

Kurven von y_0 nach $\sigma(y_0)$ bzw. von y_0 nach $\tau(y_0)$. Die Kurve

$$\sigma \circ w: I \longrightarrow Y$$

ist dann eine Kurve von $\sigma(y_0)$ nach $\sigma\tau(y_0)$. Die Komposition von v mit $\sigma \circ w$ ist eine wohldefinierte Kurve

$$v \bullet \sigma w: I \longrightarrow Y \text{ von } y_0 \text{ nach } \sigma\tau(y_0).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma\tau) &= [p \circ (v \bullet \sigma w)] \\ &= [p \circ v] \bullet [p \circ \sigma \circ w] \\ &= [p \circ v] \bullet [p \circ w] \qquad \text{(weil } \sigma \text{ eine Decktransformation ist)} \\ &= \Phi(\sigma) \bullet \Phi(w). \end{aligned}$$

4. Schritt. Φ ist injektiv.

Seien $\sigma \in$ Deck(Y/X) eine Decktransformation und

$$v: I \longrightarrow Y \text{ eine Kurve von } y_0 \text{ nach } \sigma(y_0).$$

Wir nehmen an, σ liegt im Kern von Φ, d.h. $[p \circ v]$ ist trivial, d.h. die Kurve $p \circ v$ ist 0-homotop. Dann ist aber v als Anhebung von $p \circ v$ ebenfalls 0-homotop. Insbesondere ist v ein geschlossen Kurve, d.h. es gilt

$$\sigma(y_0) = y_0.$$

Eine Decktransformation, die einen Punkt von Y in sich abbildet muß aber die identische Abbildung sein (wegen der Eindeutigkeitsbedingung in der Definition der universellen Überlagerung). Es gilt also

$$\sigma = \mathrm{Id}.$$

Wir haben gezeigt, der Kern des Homomorphismus Φ ist trivial.

---

[41] weil Decktransformationen fasertreu sind.

5. Schritt. Φ ist surjektiv.

Sei $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ vorgegeben. Wir wählen eine geschlossene Kurve

$$u: I \longrightarrow X \text{ von } x_0 \text{ nach } x_0 ,$$

welche die Homotopie-Klasse α repräsentiert,

$$\alpha = [u].$$

Weil p eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung ist, gibt es eine Anhebung

$$v: I \longrightarrow X$$

von u mit den Anfangspunkt y_0. Sei y_1 der Endpunkt dieser Kurve. Wie wir im ersten Schritt gezeigt haben, gibt es eine Decktransformation

$$\sigma \in \mathrm{Deck}(Y/X) \text{ mit } \sigma(y_0) = y_1.$$

Nach Konstruktion gilt

$$\Phi(\sigma) = [p \circ v] = [u] = \alpha.$$

QED.

1.5.7 Beispiele

(i) Die fundamentale Gruppe von $\mathbb{C}^*$

Die Abbildung

$$\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

ist gerade die unverselle Überlagerung von $\mathbb{C}^*$, denn exp ist unbeschränkt unverzweigt und $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend. Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Verschiebung

$$\tau_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + 2\pi i n,$$

um den Wert $2\pi i n$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(\tau_n(z)) = \exp(z+2\pi i n) = \exp(z),$$

d.h. τ_n ist eine Decktransformation. Sei umgekehrt

$$\sigma: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine Decktransformation von exp. Dann gilt

$$\exp(\sigma(0)) = \exp(0) = 1,$$

d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$\sigma(0) = 2\pi i n.$$

Mit anderen Worten, σ und τ_n haben denselben Wert an der Stelle 0. Dann muß aber (wegen der Eindeutigkeit von Anhebungen) sogar

$$\sigma = \tau_n$$

gelten. Wir haben gezeigt,

$$\mathrm{Deck}(\mathbb{C} \overset{\exp}{\longrightarrow} \mathbb{C}^*) = \{\tau_n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Gruppe rechts ist aber isomorph zu $\mathbb{Z}$. Insbesondere ist

$$\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}.$$

(ii) Die fundamentale Gruppe eines komplexen Torus

Seien $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2 \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und

$$p: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma = T$$

die zugehörige Projektion auf den Torus. Diese ist die unverselle Überlagerung des Torus T , denn p ist unbeschränkt unverzweigt und $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.
Für jedes $\gamma\in\Gamma$ bezeichne

$$\tau_\gamma: \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}, z \mapsto z+\gamma,$$

die Verschiebung um den Wert γ. Dann ist τ_γ eine Decktransformation von p und wie im vorangehenden Beispiel sieht man

$$\mathrm{Deck}(\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma) = \{\tau_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}.$$

Insbesondere ist

$$\pi_1(\mathbb{C}/\Gamma) \cong \Gamma \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

1.5.8 Folgerung

Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine meromorphe Funktion, welche bezüglich des Gitters $\Gamma\subseteq\mathbb{C}$ doppeltperiodisch ist und nur einen Pol der Ordnung 1 besitzt (und keine weitere Pole).
Beweis. Eine solche Funktion würde eine holomorphe Abbildung

$$f: \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

definieren, die den Wert ∞ mit der Vielfachheit 1 annimmt. Nach 1.4.28 nimmt dann f aber jeden Wert mit der Vielfachheit 1 an, d.h. f ist bijektiv und unverzweigt, also biholomorph. Insbesondere ist f ein Homöomorphismus, d.h.

$$\pi_1(\mathbb{C}/\Gamma) \cong \pi_1(\mathbb{P}^1) = 0$$

im Widerspruch zum Beispiel 1.5.7 (ii).
QED.
Bemerkung
Später werden wir notwendige und hinreichende Bedingungen untersuchen für die Existenz von doppelt periodischen Funktionen mit gegebenen Hauptteilen. Die obige Aussage schließt die Existenz gewisser solcher Funktionen aus topologischen Gründen aus.

1.5.9 Äquivalente Punkte bezüglich einer Untergruppe

Seien $p: Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung topologischer Räume und

$$G \subseteq \mathrm{Deck}(Y/X)$$

eine Untergruppe. Zwei Punkte y', y" ∈ Y heißen dann G-äquivalent oder auch äquivalent modulo G, wenn es ein $\sigma\in G$ gibt mit $\sigma(y') = y"$.
Bemerkung
Die G-Äquivalenz von Punkten von Y ist eine Äquivalenz-Relation.

1.5.10 Unbeschränkt unverzweigten Überlagerungen und Gruppen von Decktransformationen

Seien

$$q: Y \longrightarrow X$$

eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung von zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten und

$$p: \widetilde{X} \longrightarrow X$$

die universelle Überlagerung. Weiter sei

$$f: \widetilde{X} \longrightarrow Y$$

eine fasertreue Abbildiung (welche existiert nach Definiton der universellen Überlagerung).
Dann ist f eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung, und es existiert eine Untergruppe

$$G \subseteq \mathrm{Deck}(\widetilde{X}/X)$$

mit der Eigenschaft, daß für je zwei Punkte $x', x'' \in \widetilde{X}$ die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind.
(i) $f(x') = f(x'')$.
(ii) x' und x'' sind G-äquivalent.
Es gilt

$$G \cong \pi_1(Y).$$

Beweis. Situation:

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & f\nearrow & \downarrow q \\ \widetilde{X} & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

1. Schritt: f ist ein lokaler Homöomorphismus.

Seien $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ ein vorgegebener Punkt und

$$x := p(\widetilde{x}) \,,\; y := f(\widetilde{x})$$

dessen Bilder in X bzw. Y. Weil p ein lokaler Homöomorphismus ist, gibt es offene Umgebungen $\widetilde{U}'$ und U' von y und x,

$$\widetilde{x} \in \widetilde{U}' \subseteq \widetilde{X}, x \in U' \subseteq X,$$

mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung

$$p|_{V'}: \widetilde{U}' \xrightarrow{\cong} U'$$

ein Homöomorphismus ist. Weil q unbeschränkt unverzweigt ist, gibt es eine offene Umgebung U von x,

$$x \in U \subseteq U'$$

und paarweise disjunkte offene Teilmengen $V_j \subseteq Y$, $j \in J$, mit

$$q^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j \,,$$

sodaß die Einschränkung

$$q|_{V_j}: V_j \longrightarrow U$$

für jedes $j \in J$ ein Homöomorphismus ist. Wir können dabei annehmen,

U ist zusammenhängend.

Sei V diejenige der Mengen V_j, die den Punkt y enthält,

$$y \in V = V_j \text{ für ein } j \in J.$$

Wir setzen

$$\widetilde{U} := p^{-1}(U) \cap \widetilde{U}'.$$

Es gilt

$$y \in f(\widetilde{U}) \subseteq q^{-1}(U).$$

Weil die Menge $f(\widetilde{U})$ zusammenhängend ist, liegt sie ganz in der Zusammenhangskompoente von $q^{-1}(U)$, die den Punkt y enthält, d.h.[42]

$$f(\widetilde{U}) \subseteq V.$$

Weil nach Konstruktion die Abbildungen $p: \widetilde{U} \longrightarrow U$ und $q: V \longrightarrow U$ bijektiv sind[43], gilt sogar das Gleichheitszeichen,

$$f(\widetilde{U}) = V.$$

Weil $p: \widetilde{U} \longrightarrow U$ und $q: V \longrightarrow U$ Homöomorphismen sind, ist auch f auf $\widetilde{U}$ ein Homöomorphismus.

2. Schritt: f ist unbeschränkt unverzweigt.

Seien $y_0 \in Y$ ein Punkt und

$$v: I \longrightarrow Y \text{ ein Kurve mit dem Anfang } y_0.$$

Weiter sei

$$\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$$

ein Punkt über y_0, d.h. $f(\widetilde{x}_0) = y_0$. Es reicht zu zeigen, v besitzt eine Anhebung entlang f mit dem Anfangspunkt $\widetilde{x}_0$.

Weil $p: \widetilde{X} \longrightarrow X$ unbeschränkt unverzweigt ist, besitzt die Kurve $q \circ v$ eine Anhebung

$$\widetilde{u}: I \longrightarrow \widetilde{X} \text{ mit dem Anfangspunkt } \widetilde{x}_0.$$

Die beiden Kurven $f \circ \widetilde{u}$ und v von Y sind Anhebungen der Kurve $q \circ v$ und besitzen denselben Anfangspunkt y_0. Es sind deshalb dieselben Kurven,

$$f \circ \widetilde{u} = v.$$

d.h. $\widetilde{u}$ ist die gesuchte Anhebung von v.

3. Schritt: Existenz der angegebenen Untergruppe G von $Deck(\widetilde{X}/X)$.
Wir setzen

$$G := Deck(\widetilde{X}/Y) \subseteq Deck(\widetilde{X}/X).$$

Dies ist offensichtlich eine Untergruppe von $Deck(\widetilde{X}/X)$. Weil $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, ist

$$f. \widetilde{X} \longrightarrow Y$$

eine universelle Überlagerung, d.h. es ist

$$G \cong \pi_1(Y),$$

---

[42] Alle anderen V_j sind disjunkt zur Zusammenhangskomponente von y.

[43] d.h. f ist auf $\widetilde{U}$ gleicgh $q^{-1} \circ p$.

und f ist eine Galois-Überlagerung (nach 1.5.6), d.h. für je zwei Punkte x', x" $\in \widetilde{X}$ mit f(x') = f(x") gibt es ein $\sigma \in G$ mit $\sigma(x') = \sigma(x")$, d.h. die Punkte sind G-äquivalent. Umgekehrt liegen G-äquivalente Punkte in derselben Faser bei f.[44] Damit ist die Äquivalenz der Bedingungen (i) und (ii) gezeigt.
QED.
Bemerkung
Wir verwenden jetzt die gerade bewiesene Aussage zur Beschreibung der unbeschränkt unverzweigten Überlagerungen der punktierten Einheitskreisscheibe[45]

$$\Delta^* := \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1 \}.$$

1.5.11 Die unverzweigten Überlagerungen der punktierten Einheitskreisscheibe

Sei

$$f: X \longrightarrow \Delta^*$$

eine holomorphe unbeschränkt unverzweigete Überlagerung. Dann gilt:

(i) Ist die Zahl der Blätter von f unendlich, so existiert eine biholomorphe Abbildung

$$\varphi: X \longrightarrow H$$

auf die linke Halbebene, für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & H \\ & {\scriptstyle f}\searrow\swarrow{\scriptstyle p_k} & \\ & \Delta^* & \end{array}$$

kommutativ ist.

(ii) Ist de Zahl der Blätter von f gleich $k < \infty$, so existiert eine biholomorphe Abbildung

$$\varphi: X \longrightarrow \Delta^*,$$

für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & \Delta^* \\ & {\scriptstyle f}\searrow\swarrow{\scriptstyle \exp} & \\ & \Delta^* & \end{array}$$

Dabei bezeichne p_k die Abbildung $\Delta^* \longrightarrow \Delta^*, z \mapsto z^k$.

Beweis. Die Abbildung

$$\exp: H \longrightarrow \Delta^*$$

ist gerade die universelle Überlagerung der punktierten Einheitskreisscheibe. Deshalb gibt es eine holomorphe Abbildung

$$\psi: H \longrightarrow X \text{ mit } \exp = f \circ \psi.$$

Sei

$$G := \mathrm{Deck}(H/Y) \subseteq \mathrm{Deck}(H/\Delta^*)$$

die nach 1.5.10 zu ψ gehörige Untergruppe von Decktransformationen.

Besteht G nur aus der identischen Transformation, so ist ψ biholomorph, d.h.es liegt der erste der beiden oben beschriebenen Fälle vor. Die gesuchte Abbildung φ ist gerade die zu ψ inverse Abbildung.

---

[44] Da die Decktransformationen aus G = Deck($\widetilde{X}$/Y) die Fasern von f in sich abbilden.
[45] Im Original wird die Bezeichnung E* verwendet.

Nehmen wir jetzt an, G ist nicht-trivial. Es gilt

$$\mathrm{Deck}(H/\Delta^*) = \{\tau_n \mid n\in\mathbb{Z}\},$$

wenn

$$\tau_n : H \longrightarrow H,\ z \mapsto z + 2\pi i,$$

die Verschiebung um $2\pi i$ bezeichnet.[46] Dies ist ein zu $\mathbb{Z}$ isomorphe Gruppe. Die Untergruppe G hat also die Gestalt

$$G = \{\tau_{kn} \mid n\in\mathbb{Z}\}$$

mit einer natürlichen Zahl k.

Wir betrachten die unbeschränkt unverzweigte Überlagerung

$$g: H \longrightarrow \Delta^*,\ z \mapsto \exp(z/k).$$

Für zwei komplexe Zahlen $z,z' \in H$ gilt dann

$$g(z) = g(z') \Leftrightarrow z \text{ und } z' \text{ sind G-äquivalent} \Leftrightarrow \psi(z) = \psi(z').$$

Es gibt deshalb eine (wohldefinierte) bijektive Abbildung

$$\varphi: X \longrightarrow \Delta^*,\ \psi(z) \mapsto z \mapsto g(z),$$

für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ & \psi\swarrow\ \ \searrow g & \\ X & \xrightarrow{\varphi} & \Delta^* \end{array}$$

kommutativ wird.Da ψ und g lokal biholomorph sind, gilt dasselbe für φ, d.h. φ ist biholomorph. Durch direktes Nachrechnen sieht man jetzt, das Diagramm von (ii) ist ebenfalls kommutativ.
QED.

1.5.12 Die nur im Ursprung verzweigten Überlagerungen der Einheitskreisscheibe

Sei

$$f: X \longrightarrow \Delta := \{ z\in\mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

eine nicht-konstante eigentliche holomorphe Abbildung mit Werten in der Einheitskreisscheibe, welche über $\Delta^* = \{ z\in\mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ unverzweigt ist. Dann gibt es eine natürliche Zahl k und eine biholomorphe Abbildung

$$\varphi: X \longrightarrow \Delta$$

derart, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & \Delta \\ & f\searrow\ \ \swarrow p_k & \\ & \Delta & \end{array} \qquad (1)$$

Dabei bezeichne p_k wie bisher die Abbildung $z \mapsto z^k$.

Beweis. Sei $X^* := f^{-1}(\Delta^*)$ und

---

[46] Jedes der τ_n ist eine Decktransformation, und jede Decktransformation hat an einer (jeder) Stelle denselben Wert wie eines der τ_n.

$$f^*: X^* \longrightarrow \Delta^*$$

die Einschränkung von f. Dann ist f* eine eigentliche unverzweigte Überlagerung, also unbeschränkt unverzweigt. Nach 1.5.11 gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{\varphi^*} & \Delta^* \\ & f\searrow \quad \swarrow p_k & \\ & \Delta^* & \end{array} \tag{2}$$

mit einer biholomorphen Abbildung φ*. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

$$f^{-1}(0)$$

besteht aus nur einem Punkt b∈X, denn dann kann man φ* stetig zu einer bijektiven Abbildung φ:X $\longrightarrow \Delta$ (mit φ(b) = 0) fortsetzen, d.h. φ* hat in b eine hebbare Lücke, φ ist holomorph und bijektiv, also biholomorph.

Zeigen wir also, $f^{-1}(0)$ besteht aus nur einem Punkt. Angenommen, die Faser über 0 enthielte mehr als einen Punkt,

$$f^{-1}(0) = \{b_1,...,b_n\} \text{ mit } n \geq 2.$$

Dann gibt es paarweise disjunkte offene Umgebungen V_i,

$$b_i \in V_i \subseteq X$$

und eine Kreisscheibe $\Delta(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ mit

$$f^{-1}(\Delta(r)) = V_1 \cup ... \cup V_n, \; n \geq 2. \tag{3}$$

Sei $\Delta(r)^* := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r\}$. Wegen des Diagramms (2) ist dann

$$f^{-1}(\Delta(r)^*)$$

homöomorph zu

$$p_k^{-1}(\Delta(r)^*) = \Delta(\sqrt[k]{r})$$

also zusammenhängend. Jeder der Punkt b_i ist ein Berührungspunkt von $f^{-1}(\Delta(r)^*)$. Also ist auch $f^{-1}(\Delta(r))$ zusammenhängend. Das steht aber im Widerspruch zu (3). Also kann $f^{-1}(0)$ aus nur einem Punkt bestehen.
QED.

1.6 Garben

1.6.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Wir betrachten im folgende X als eine Kategorie, deren Objekte die offenen Teilmengen von X sind und deren Morphismen die natürlichen Einbettungen dieser offenen Teilmengen.

Für je zwei offene Mengen U und V von X ist die Menge

$$\mathrm{Hom}(U, V)$$

der Morphismen von U nach V leer, falls U nicht in V enthalten ist und besteht andernfalls nur aus der natürlichen Einbettung

$$U \longrightarrow V, \; u \mapsto u.$$

Ein <u>Prägarbe</u> von abelschen Gruppe ist ein kontravarianter Funktor

$$F: X \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

auf der Kategorie mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen. Mit anderen Worten,, jeder offenen Menge U von X wird eine abelsche Gruppe

$$F(U)$$

zugeordnet und jeder natürlichen Einbettung $U \longrightarrow V$ von offenen Mengen von X ein Gruppen-Homorphismus

$$\rho_U^V: F(V) \longrightarrow F(U).$$

Dabei gelte für jede offene Menge U von X,

$$\rho_U^U = Id$$

und für je drei offene Mengen U, V, W von X mit $U \subseteq V \subseteq W$ sei

$$\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^U .$$

Die Elemente von F(U) heißen Schnitte der Prägarbe F über der offenen Menge U.
Die Abbildungen ρ_U^V heißen Restriktionen der Prägarbe F und man schreibt auch

$$\rho_U^V(s) = s|_U$$

für jedes Element $s \in F(V)$.

Bemerkungen

(i) In analoger Weise definiert man Prägarben von Vektorräumen, Ringen, Mengen, ...

(ii) Unter den Schnitten von F über U stellt man sich oft auf U definierte Funktionen vor (obwohl solche Schnitte nicht unbedingt Funktionen sein müssen).

1.6.2 Beispiel

Sei X ein topologischer Raum. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ bezeichne

$$C(U)$$

die Menge der stetigen Funktionen $U \longrightarrow \mathbb{C}$. Für je zwei offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ mit $U \subseteq V$ sei

$$\rho_U^V: C(V) \longrightarrow C(U), f \mapsto f|_U ,$$

die Abbildung, die jeder auf V definierten stetigen Funktion die Einschränkung auf U zuordnet. Auf diese Weise wird C eine Prägarbe von komplexen Vektorräumen auf X.

1.6.3 Definition

Eine Prägarbe F auf einem topologischen Raum X heißt Garbe, wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$ und jede offene Überdeckung

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

von U die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für je zwei Schnitte $s,s' \in F(U)$ mit $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$ für jedes $i \in I$ gilt $s = s'$.

(ii) Für jede Familie $\{s_i\}_{i \in I}$ von Schnitten $s_i \in F(U_i)$ mit

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$$

für beliebige $i,j \in I$ gibt es einen Schnitt $s \in F(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$.

Bemerkungen

(i) Das Element s, dessen Existenz durch Bedinung (ii) gefordert wird, ist auf Grund von Bedingung (i) eindeutig bestimmt.

(ii) Wendet man Bemerkung (i) auf den Fall $U = \varnothing$ und die Überdeckung

$$U = \bigcup_{i \in \varnothing} U_i$$

an, so sieht man, daß $F(\varnothing)$ aus genau einem Element besteht.

1.6.4 Beispiele

(a) Die Garbe der stetigen Funktionen

Für jeden topologischen Raum X ist die in 1.6.2 definierte Prägarbe eine Garbe.

(b) Die Garbe der holomorphen Funktionen

Sei X eine Riemannsche Fläche. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ bezeichne

$$\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}_X(U)$$

die Menge der holomorphen Funktionen $U \longrightarrow \mathbb{C}$. Für je zwei offene Teilmengen U, V $\subseteq X$ mit $U \subseteq V$ sei

$$\rho_U^V : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U),\ s \mapsto s|_U ,$$

die Abbildung, welche jeder holomorphen Funktion auf V die Einschränkung auf U zuordnet. Auf diese Weise ist eine Garbe von $\mathbb{C}$-Algebren definiert, welche auch Strukturgarbe der Riemannschen Fläche X heißt.
In analoger Weise definiert man die Garbe $\mathcal{M} = \mathcal{M}_X$ der meromorphen Funktion auf X.

(c) Die Einheitengruppen einer Garbe

Sei X ein Riemannsche Fläche. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ bezeichne

$$\mathcal{O}_X^*(U) = \mathcal{O}^*(U)$$

die multiplikative Gruppe der holomorphen Funktionen $U \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Mit den gewöhnlichen Einschränkungen von Abbildungen ist $\mathcal{O}_X^*$ eine Garbe von abelschen Gruppen. In analoger Weise definiert man die Garbe $\mathcal{M}_X^* = \mathcal{M}^*$. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ besteht

$$\mathcal{M}_X^*(U)$$

aus den meromorphen Funktionen $U \longrightarrow \mathbb{C}^*$, die auf keiner Zusammenhangskomponente von U identisch Null sind.

(d) Die konstante Prägarbe

Seien X ein topologischer Raum und G ein Gruppe. Für jede nicht-leere offene Menge $U \subseteq X$ sei

$$\mathcal{G}(U) = G$$

und für je zwei nicht-leere offene Teilmengen U, $V \subseteq X$ mit $U \subseteq V$ bezeichne

$$\rho_U^V : \mathcal{G}(V) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

die identische Abbildung. Auf diese Weise wird $\mathcal{G}$ zu einer Garbe von Gruppen auf X. Im allgemeinen ist dies jedoch keine Garbe.

Läßt sich nämlich eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ als Vereinigung von zwei nicht-leeren disjunkten offenen Teilmengen schreiben,

$$U = U' \bigcup U'',$$

so müßte es andernfalls zu je zwei verschiedenen Elementen

$$s' \in \mathcal{G}(U') = G \text{ und } s'' \in \mathcal{G}(U'') = G$$

nach dem zweiten Garben-Axiom ein Element $s \in \mathcal{G}(U)$ geben, welches gleichzeitig gleich s' und gleich s'' ist. Man kann jedoch die Definition dieser Prägarbe leicht abändert und sie auf diese Weise zu einer Garbe machen.

(e) Die konstante Garbe

Seien X ein topologischer Raum und G ein Gruppe. Für jede nicht-leere offene Menge $U \subseteq X$ sei

$$\widetilde{\mathcal{G}}(U)$$

die Gruppe der lokal konstanten Abbilduingen $U \longrightarrow G$, und für je zwei nicht-leere offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ mit $U \subseteq V$ bezeichne

$$\rho^{V}_{U}: \widetilde{\mathcal{G}}(V) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}(U)$$

die Abbildung, welche jeder auf V definierten Abbildung die Einschränkung auf U zuordnet. Auf diese Weise wird $\widetilde{\mathcal{G}}$ zu einer Garbe von Gruppen. Für jede zusammenhängende offene Teilmenge $U \subseteq X$ gilt

$$\widetilde{\mathcal{G}}(U) = G.$$

Oft werden wir für diese Garbe dieselbe Bezeichnung verwenden wie für die Gruppe selbst.

1.6.5 Der Halm einer Prägarbe in einem Punkt

Seien X ein topologischer Raum, P eine Prägarbe von Mengen auf X und

$$p \in X$$

ein Punkt. Auf der disjunkten Vereinigung

$$\bigvee_{p \in U} P(U)$$

über alle offenen Mengen $U \subseteq X$, die den Punkt p enthalten, betrachten wir die folgende Äquivalenz-Relation $\sim$. Zwei Schnitte

$$s' \in P(U') \text{ und } s'' \in P(U'')$$

sollen äquivalent sein,

$$s' \sim s'',$$

wenn es eine offene Menge $U \subseteq X$ gibt mit

$$p \in U \subseteq U' \bigcap U'' \text{ und } s'|_{U} = s''|_{U} .$$

Es ist nicht schwer, einzusehen, daß man auf diese Weise tatsächlich eine Äquivalenz-Relation erhält. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißt Keime der Schnitte von P. Die Menge aller dieser Keime wird mit

$$P_p$$

bezeichnet und heißt Halm der Prägarbe P im Punkt p.

Bemerkungen

(i) Die formale Konstruktion des Halms ist ein Beispiel für einen direkten Limes,

$$P_p = \varinjlim_{p\in U} P(U) = \vee_{p\in U} P(U) /\sim .$$

(ii) Ist P eine Prägarbe von Gruppen,, Ringen, Vektorräumen, so haben auch die Halme der Prägarbe diese Eigenschaft.

(iii) Für jeden Punkt $p\in X$ und jede offene Menge $U \subseteq X$, die den Punkt p enthbält bezeichne

$$\rho_p : P(U) \longrightarrow P_p \, , s \mapsto s|_p \, ,$$

die Abbildung, welche jeden Schnitt auf die Äquivalenzklassen abbildet, die diesen Schnitt enthält. Die Äquivalenzklassen $s|_p$ heißt dann auch Keim von s im Punkt p.

Beispiel: die Garbe der holomorphen Funktionen

Seien X eine Riemannsche Fläche, $p\in X$ ein Punkt und $\varphi\in\mathcal{O}_{X,p}$ ein holomorpher Keim im Punkt p. Dieser Keim wird repräsentiert durch eine holomorphe Funktion

$$f: U \longrightarrow \mathbb{C},$$

die in einer offenen Umgebung U des Punktes p definiert ist. Betrachten wir die Potenzreihen-Entwicklung dieser Funktion im Punkt p, sagen wir

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \bullet (z - p)^\nu .$$

Je zwei Repräsentanten des Keims φ stimmen in einer Umgebung des Punktes p überein, besitzen also diese Potenzreihen-Entwicklung im Punkt p. Es besteht deshalb eine Isomorphie

$$\mathcal{O}_{X,p} \stackrel{\cong}{\longrightarrow} \mathbb{C}\{z\text{-}p\}$$

des Halms von $\mathcal{O}_X$ im Punkt p mit dem Ring der konvergenten Potenzreihen in diesem Punkt.

In analoger Weise kann man den Halm $\mathcal{M}_{X,p}$ der Garbe der meromorphen Funktionen im Punkt p identifizieren mit dem Ring der Laurentreihen

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} c_\nu \bullet (z - p)^\nu .$$

mit endlichem Hauptteil identifizieren.

Bemerkung

Für jeden Keim φ im Punkt p ist der Wert $\varphi(p)$ an der Stelle p wohldefiniert: er hängt nicht von der speziellen Wahl des Repräsentanten ab.

1.6.6 Das Verschwinden von Schnitten und von Keimen

Seien F eine Garbe abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum X,

$U \subseteq X$

eine offene Teilmenge und $s\in F(U)$ ein Schnitt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $s = 0$.

(ii) $s|_x = 0$ für jeden Punkt $x \in U$.

Beweis. Dies ist eine direkte Folge der Garben-Axiome.
QED.

1.6.7 Der Etal-Raum einer Prägarbe

Seien X ein topologischer Raum und F eine Prägarbe auf X. Als Menge ist der Etal-Raum der Prägarbe F die disjunkte Vereinigung

$$|F| := \bigvee_{x\in X} F_x$$

der Halme. Die natürliche Projektion des Etal-Raums ist die Abbildung

$$p: |F| \longrightarrow X \text{ mit } p(F_x) = \{x\}$$

für jedes $x\in X$. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ und jeden Schnitt $s\in F(U)$ sei

$$[U, s] := \{ s|_x \mid x \in U\} \quad (\subseteq |F|)$$

die Menge der Keime des Schnittes s.

1.6.8 Die Topologie des Etal-Raums

Seien X ein topologischer Raum und F eine Prägarbe auf X. Dann bilden die Mengen der Gestalt

$$[U, s]$$

mit $U \subseteq X$ offen und $s\in F(U)$ die Basis einer Topologie von $|F|$. Bezüglich dieser Topologie ist die natürliche Projektion

$$p: |F| \longrightarrow X$$

ein lokaler Homöomorphismus, d.h. eine unverzweigte Überlagerung.
Beweis. 1. Schritt: die [U, s] bilden eine Topologie-Basis.
Wir haben die beiden folgenden Aussagen zu beweisen.

1. Jedes Element $\varphi\in|F|$ liegt in mindestens einer Menge der Gestalt [U,s].

2. Für jedes $\varphi\in[U',s']\bigcap[U'',s'']$ gibt es eine Menge der Gestalt [U, s] mit

$$\varphi\in[U, s] \subseteq [U', s']\bigcap[U'', s''].$$

Zu 1. Sei $s \in F(U)$ ein Repräsentant von φ. Dann gilt $\varphi\in[U, s]$

Zu 2. φ ist sowohl ein Keim von $s'\in F(U')$ als auch von $s''\in F(U'')$,

$$s'|_x = \varphi = s''|_x \text{ mit } x \in U'\bigcap U''.$$

Nach Definition des Keims gibt es eine Umgebung U von x mit

$$s := s'|_U = s''|_U \text{ (und } U \subseteq U'\bigcap U'').$$

Die Menge [U, s] enthält dann φ und liegt im Durchschnitt $[U', s']\bigcap[U'', s'']$.
2. Schritt. p ist ein lokaler Homöomorphismus.

Sei $\varphi\in|F|$ und $p(\varphi) = x$. Wir wählen einen Repräsentanten $s\in F(U)$ des Keims φ. Dann gilt

$$\varphi\in[U, s]$$

und die Einschränkung

$$p': [U, s] \longrightarrow U$$

von p auf die Menge [U, s] ist bijektiv (mit der Inversen $u \mapsto s|_u$). Die Mengen der Gestalt $[U', s|_{U'},]$ mit $U'\subseteq U$ offen bilden eine Topologie-Basis des Unterraums [U,s]. Sie werden bei p' in eine Topologie-Basis des Unterraums U abgebildet. Also ist p' eine stetige und offene Abbildung, also ein Homöomorphismus.
QED.

1.6.9 Definition

Eine Prägarbe F auf einem topologischen Raum genügt dem Eindeutigkeitssatz, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist.

Für jedes Gebiet $U \subseteq X$[47] und je zwei Schnitte s',s"∈F(U) mit $s'|_x = s"|_x$ für ein x∈U gilt s' = s".

1.6.10 Ein Kriterium für die Hausdorff-Eigenschaft des Etal-Raums

Seien X ein lokal zusammenhängender Hausdorff-Raum und F eine Prägarbe, die dem Eindeutigkeitssatz genügt. Dann ist der Etal-Raum |F| von F ein Hausdorff-Raum.

Beweis. Seien

$$\varphi', \varphi" \in |F|$$

zwei verschiedene Punkte,

$$\varphi' \neq \varphi".$$

Wir haben disjunkte offene Umgebungen dieser Punkte zu finden.

1. Fall. $p(\varphi') =: x' \neq x" = p(\varphi")$.

Weil X ein Hausdorff-Raum ist, gibt es disjunkte offene Umgebungen von x' und x".

$$x' \in U' , x" \in U", U' \bigcap U" = \varnothing.$$

Dann sind aber $p^{-1}(U')$ und $p^{-1}(U")$ disjunkte offene Umgebungen von φ' und φ".

2. Fall. $p(\varphi') = p(\varphi") =: x$.

Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x und Schnitte

$$s' \in F(U) \text{ und } s" \in F(U)$$

mit

$$s'|_x = \varphi' \text{ und } s"|_x = \varphi".$$

Weil X lokal zusammenhängend ist, können wir durch Verkleinern von U noch erreichen, daß

$$U \text{ zusammenhängend}$$

ist. Dann sind

(1) $$[U, s'] \text{ und } [U, s"]$$

offene Umgebungen von φ' bzw. φ". Es reicht zu zeigen, der Durchschnitt dieser beiden Umgebungen ist leer. Angenommen, es gibt ein

$$\psi \in [U, s'] \bigcap [U, s"].$$

Mit $y = p(\psi)$ gilt dann

$$s'|_y = \psi = s"|_y.$$

Weil F dem Eindeutigkeitssatz genügt, folgt s' = s", also φ' = φ", im Widerspruch zur Voraussetzung des zweiten Falls. Also ist der Durchschnitt der beiden Umgebungen (1) leer.

QED.

1.7 Analytische Fortsetzungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Konstruktion von Riemannschen Flächen für Funktionen, die man durch analytische Fortsetzung eine Funktionenkeims erhält.

1.7.1 Definition: analytische Fortsetzung

Seien X eine Riemannsche Fläche und

[47] d.h. jede zusammenhängende offene Teilmenge.

$$u: I \longrightarrow X$$

eine Kurve von

$$a := u(0) \text{ nach } b := u(1).$$

Man sagt, ein Keim

$$\psi \in \mathcal{O}_{X,b}$$

entsteht durch analytische Fortsetzung aus einem Keim

$$\varphi \in \mathcal{O}_{X,a}$$

wenn es eine Familie

$$\{\varphi_t\}_{t \in I}$$

von Keimen

$$\varphi_t \in \mathcal{O}_{X,u(t)}$$

gibt mit der Eigenschaft, daß es für jedes $\tau \in I$ eine Umgebung $T \subseteq I$ von τ, eine offene Menge

$$U \subseteq X \text{ mit } u(T) \subseteq U$$

und einen Schnitt $s \in \mathcal{O}_X(U)$ gibt mit

$$s|_{u(t)} = \varphi_t \text{ für jedes } t \in T.$$

Dabei bezeichnet $s|_{u(t)}$ den Keim der holomorphen Funktion s im Punkt u(t).

Bemerkungen

(i) Auf Grund der Kompaktheit des Einheitsintervalls I ist die Existenz der Familie der Keime φ_t äquivalent zur folgenden Bedingung.

Es gibt eine Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$$

des Einheitsintervalls I, offene Teilmengen

$$U_i \subseteq X \text{ mit } u([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i \text{ für } i = 1, ... , n$$

und holomorphe Funktionen

$$f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$$

mit folgenden Eigenschaften.

1. φ ist der Keim von f_1 im Punkt a.
2. ψ ist der Keim von f_n im Punkt b.
3. $f_i|_{V_i} = f_{i+1}|_{V_i}$ für $i = 1, ... , n-1$.

Dabei bezeichne V_i die Zusammenhangskomponente von $U_i \cap U_{i+1}$, welche den Punkt $u(t_i)$ enthält.

(ii) Die nachfolgende Aussage interpretiert den Begriff der analytischen Fortsetzung mit Hilfe des Etal-Raums zur Garbe der holomorpen Funktionen.

1.7.2 Analytische Fortsetzung und Etalraum

Seien X eine Riemannsche Fläche und

$$u: I \longrightarrow X$$

eine Kurve von

$$a := u(0) \text{ nach } b := u(1).$$

Weiter seien Keime

$$\varphi \in \mathcal{O}_{X,a} \text{ und } \psi \in \mathcal{O}_{X,b}$$

gegeben. Folgende Aussagen sind äquivalent.

(i) ψ entsteht aus φ durch analytische Fortsetzung entlang u.

(ii) Es gibt eine Anhebung

$$\hat{u}: I \longrightarrow |\mathcal{O}_X|$$

der Kurve u entlang der natürlichen Projektion

$$p: |\mathcal{O}_X| \longrightarrow X$$

des Etalraums von $\mathcal{O}_X$ mit

$$\hat{u}(0) = \varphi \text{ und } \hat{u}(1) = \psi.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Der Keim ψ entstehe aus φ durch analytische Fortsetzung entlang u. Sei

$$\{\varphi_t\}_{t \in I}$$

die zugehörige Familie von Keimen $\varphi_t \in \mathcal{O}_{X,u(t)}$. Wir verwenden die Bezeichnungen der Definition 1.7.1. Die Abbildung

$$\hat{u}: I \longrightarrow |\mathcal{O}_X|, t \mapsto \varphi_t , \tag{1}$$

ist dann lokal die Zusammensetzung der Abbildung u mit der Abbildung

$$U \longrightarrow |\mathcal{O}_X| , u \mapsto s|_u ,$$

die jedem Punkt u der in der Definition erwähnten offenen Menge U in den Keim des Schnittes s, der in der Definition erwähnt wird, im Punkt u zuordnet. Letztere Abbildung ist gerade die Umgekehung des Homöomorphismus

$$p|_{[U,s]}: [U,s] \longrightarrow U,$$

und als solche stetig. Also ist die Abbildung als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig. Wegen $\varphi_t \in \mathcal{O}_{X,u(t)}$ gilt

$$p(\varphi_t) = u(t) \text{ für jedes } t \in I,$$

d.h. $\hat{u}$ ist eine Anhebung von u entlang p.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei

$$\hat{u}: I \longrightarrow |\mathcal{O}_X|$$

eine Anhebung von u entlang p mit dem Anfangspunkt φ und dem Endpunkt ψ,

$$\hat{u}(0) = \varphi \text{ und } \hat{u}(1) = \psi.$$

Es reicht zu zeigen, die Familie der

$$\varphi_t := \hat{u}(t) \text{ mit } t \in I$$

hat die in der Definiton 1.7.1 geforderten Eigenschaften.

Weil $\hat{u}$ eine Anhebung von u entlang p ist, gilt

$$p(\varphi_t) = p(\hat{u}(t)) = u(t),$$

d.h. $\varphi_t \in \mathcal{O}_{X,u(t)}$. Nach Wahl von $\hat{u}$ ist $\varphi_0 = \hat{u}(0) = \varphi$ und $\varphi_1 = \hat{u}(1) = \psi$.
Sei jetzt

$$\tau \in I$$

vorgegeben. Wir wählen eine offene Umgebung

$$[U, s] \subseteq |\mathcal{O}_X|$$

von $\varphi_t = \hat{u}(t)$. Weil $\hat{u}$ stetig ist, gibt es eine offene Umgebung $T \subseteq I$ von τ mit

$$\hat{u}(T) \subseteq [U, s].$$

Dann ist aber

$$u(T) = p(\hat{u}(T)) \subseteq p([U,f]) = U$$

und für $t \in T$ gilt

$$\varphi_t = \hat{u}(t) \qquad \text{(nach Definition von } \varphi_t\text{)}$$

$$= s|_x \qquad \text{(weil } \hat{u}(t) \text{ in } [U,s] \text{ liegt)}$$

Dabei ist $x = p(\hat{u}(t)) = u(t)$, d.h.

$$\varphi_t = s|_{u(t)} .$$

Mit anderen Worten, ψ entsteht aus φ durch analytische Fortsetzung entlang u.
QED.

1.7.3 Monodromie-Satz

Seien X eine Riemannsche Fläche,

$$u_0, u_1 : I \longrightarrow X$$

zwei homotope Kurven von $a \in X$ nach $b \in X$ und

$$\{u_s : I \longrightarrow X\}_{s \in I}$$

eine Deformation der Kurve u_0 in die Kurve u_1.

Weiter sei $\varphi \in \mathcal{O}_{X,a}$ ein Keim, welche entlang jeder der Kurven

$$u_s : I \longrightarrow X$$

eine analytische Fortsetzung besitzt. Dann stimmen die beiden Keime von

$$\mathcal{O}_{X,b}$$

welche aus φ durch analytische Fortsetzung entlang u_0 und u_1 entstehen, überein.

Beweis. Wir verwenden die Charakterisierung 1.7.2 der analytischen Fortsetzung mit Hilfe des Etal-Raums. Die zu beweisende Aussage übersetzt sich dann gerade in die Aussage von 1.4.14 zur Homotopie der Anhebungen homotoper Kurven, angewandt auf die natürliche Projektion

$$p : |\mathcal{O}_X| \longrightarrow X$$

des Etalraums der Garbe der holomorphen Funktionen auf X.
QED.

1.7.4 Unbeschränkt fortsetzbare Keime

Seien X eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche,

$$a \in X \text{ und } \varphi \in \mathcal{O}_X.$$

Der Keim φ sei unbeschränkt fortsetzbar in X, d.h. für jede Kurve u von X, die im Punkt a beginnt existiere die analytische Fortsetzung von φ entlang u. Dann existiert eine auf ganz X holomorphe Funktione

$$f \in \mathcal{O}_X(X)$$

mit dem Keim $f|_a = \varphi$ im Punkt a.

Bemerkung

Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes ist f durch den Keim φ eindeutig festgelegt.

Beweis. Für jedes $x \in X$ bezeichne $\psi_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ einen Keim, der aus φ durch analytische Fortsetzung entlang einer Kurve u_x entsteht. Weil X einfach zusammenhängend ist, d.h. je zwei Kurven mit demselben Anfangs- und Endpunkten sind homotop, hängt ψ_x nicht von der Wahl der Kurve u_x ab. Wir setzen

$$f(x) := \psi_x(x) \text{ für jedes } x \in X.$$

Dann ist f eine auf X holomorphe Funktion mit $f|_a = \varphi$.

QED.

Bemerkung

Ist die analytische Fortsetzung entlang zweier Kurven mit denselben Anfangs- und Endpunkten möglich, so sind die aus einem Keim entstehenden neuen Keime im allgemeien verschieden. Durch Zusammensetzen Gesamtheit aller analytischen Fortsetzungen zu einer Funktion erhält man deshalb im allgemeinen mehrdeutige Funktionen. Der Begriff der mehrdeutigen Funktion erfordert jedoch eine Präzisierung.

Bezeichnung

Seien X und Y Riemannsche Flächen und

$$p: Y \longrightarrow X$$

eine holomorphe unverzweigte Überlagerung. Für jedes $y \in Y$ induziert dann p (als lokaler Homöomorphismus) einen Isomorphismus der Halme

$$p^*: \mathcal{O}_{X,p(y)} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}, \; s|_{p(y)} \mapsto (s \circ p)|_y .$$

Wir bezeichnen mit

$$p_*: \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p(y)}$$

die Umkehrung von p*.

1.7.5 Definition: analytische Fortsetzung

Seien X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$ ein Punkt und $\varphi \in \mathcal{O}_{X,a}$ ein Keim. Das Quadrupel

$$(Y, p, f, b)$$

heißt dann (globale) analytische Fortsetzung des Keims φ, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Y ist eine Riemannsche Fläche und $p: Y \longrightarrow X$ eine holomorphe unverzweigte Überlagerung.

(ii) $f: Y \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion.

(iii) $b \in Y$ ist ein Punkt über a, $p(b) = a$, und $p_*(f|_b) = \varphi$.

Eine analytische Fortsetzung (Y, p, f, b) des Keims φ heißt maximal, wenn sie die folgende Universalitätseigenschaft besitzt.

Für jede analytische Fortsetzung (Z, q, g, c) von φ gibt es eine fasertreue holomorphe Abbildung $F: Z \longrightarrow Y$ mit $F(c) = b$ und $F^*(f) = g$.

Bemerkung
Eine maximale analytische Fortsetzung des Keims φ ist, falls sie existiert, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Zum Beweis nehmen wir an, (Y, p, f, b) und (Z, q, g, c) sind zwei maximale analytische Fortsetzungen des holomorphen Keims φ. Dann gibt es auf Grund der Universalitätseigenschaft fasertreue holomorphe Abbildungen

$$F: Z \longrightarrow Y \text{ und } G: Y \longrightarrow Z \text{ mit } F(c) = b,\ G(b) = c,\ F^*(f) = g \text{ und } G^*(g) = f.$$

Insbesondere sind dann

$$F \circ G: Y \longrightarrow Y \text{ und } G \circ F: Z \longrightarrow Z$$

fasertreue holomorphe Abbildungen mit $G \circ F(c) = c$ und $F \circ G(b) = b$. Eine fasertrue Abbildung, die einen Punkt fest läßt ist aber gleich der identischen Abbildung (nach 1.4.10), d.h. F und G sind zueinander inverse biholomorphe Abbildungen.

1.7.6 Globale und lokale analytische Fortsetungen

Seien X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$, $\varphi \in \mathcal{O}_{X,a}$ ein Keim und

$$(Y, p, f, b)$$

eine analytische Fortsetzung von φ. Weiter seien

$$v: I \longrightarrow Y$$

eine Kurve von $v(0) = b$ nach $v(1) =: y$. Dann entsteht der Keim

$$\psi := p_*(\mathrm{fl}_y) \in \mathcal{O}_{X,p(y)}$$

durch analytische Fortsetzung von φ entlang der Kurve $u := p \circ v$.

Beweis. Für jedes $t \in I$ setzen wir

$$\varphi_t := p_*(\mathrm{fl}_{v(t)}) \in \mathcal{O}_{X,\,u(t)}.$$

Es gilt dann

$$\varphi_0 = p_*(\mathrm{fl}_{v(0)}) = p_*(\mathrm{fl}_b) = \varphi$$

und

$$\varphi_1 = p_*(\mathrm{fl}_{v(1)}) = p_*(\mathrm{fl}_y) = \psi.$$

Sei jetzt $t_0 \in I$ beliebig vorgegeben. Da $p: Y \longrightarrow X$ eine unverzweigte Überlagerung ist, gibt es offene Umgebungen $V \subseteq Y$ und $U \subseteq X$ der Punkte

$$v(t_0) \in V \text{ bzw. } p(v(t_0)) = u(t_0)$$

mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung von p auf V eine biholomorphe Abbildung

$$p' := p|_V: V \longrightarrow U$$

ist. Seien q' die Umkehrung von p' und

$$g := q'^*(f) \in \mathcal{O}_X(U)$$

die Verpflanzung von f entlang q'. Dann gilt

$$p_*(\mathrm{fl}_\eta) = g|_{p(\eta)} \text{ für jeden Punkt } \eta \in V.$$

Weil v eine stetige Abbildung ist, gibt es eine offene Umgebung $T \subseteq I$ von t_0 mit

$$v(T) \subseteq V \text{ also } u(T) \subseteq U.$$

Für jedes $t \in T$ gilt dann

$$\begin{aligned} g|_{u(t)} &= g|_{p(v(t))} && \text{(nach Definition von } u = p \circ v) \\ &= p_*(fl_{v(t)}) && \text{(wegen } v(t) \in v(T) \subseteq V) \\ &= \varphi_t && \text{(nach Definition von } \varphi_t). \end{aligned}$$

Damit ist ψ analytische Fortsetzung von φ entlang u.
QED.

1.7.7 Existenz maximaler analytischer Fortsetzungen

Seien X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$ ein Punkt und $\varphi \in \mathcal{O}_{X,a}$ ein Keim. Dann gibt es eine maximale analytisdhe Fortsetung (Y, p, f, b) von φ.
Beweis. Seien Y die Zusammenhangskomponente des Etal-Raums $|\mathcal{O}_X|$, welche den Punkt φ enthält,

$$b := \varphi \in Y,$$

und

$$p: Y \longrightarrow X$$

die Einschränkung der natürlichen Projektion $p': |\mathcal{O}_X| \longrightarrow X$ des Etalraums. Dann ist p eine unverzweigte Überlagerung. Wir versehen Y mit der eindeutig bestimmten komplexen Struktur, für welche p eine holomorphe Abbildung wird (vgl 1.4.8). Die holomorphe Funktion

$$f: Y \longrightarrow \mathbb{C}$$

definieren wir wie folgt. Jeder Punkt $\eta \in Y$ ist nach Definition ein holomorpher Keim im Punkt $p(\eta)$. Wir definieren

$$f(\eta) := \eta(p(\eta))$$

den Wert von f im Punkt η als den Wert dieses Keims im Punkt η.
1. Schritt. Die Funktion f ist holomorph.
Sei $\eta \in Y$ vorgegeben. Ist $s \in \mathcal{O}_X(U)$ ein Schnitt, der den Keim η repräsentiert, so gilt $f(\eta) = s(p(\eta))$, d.h. es ist

$$f(\eta) = s(p(\eta)) \text{ für jedes } \eta \in [U, s]$$

Bezeichnet $q': U \longrightarrow [U, s]$ die Umkehrung $x \mapsto s|_x$ der (biholomorphen) Einschränkung von p' auf [U,s], so erhalten wir damit

(1) $$f(q'(x)) = s(x) \text{ für jedes } x \in U.$$

Mit anderen Worten, die Verpflanzung von f entlang der biholomorphen Abbildung q' ist holomorph. Dann ist aber auch f (im vorgegebenen Punkt η) holomorph.
2. Schritt. (Y, p, f, b) ist eine analytische Fortsetzung von φ.
Wegen (1) ist $p_*(fl_\eta) = s|_{p(\eta)} = \eta$, d.h.

$$p_*(fl_\eta) = \eta \text{ für jedes } \eta \in Y.$$

Insbesondere ist

$$p_*(fl_b) = p_*(fl_\varphi) = \varphi,$$

d.h. das Tupel (Y, p, f, b) ist eine analytische Fortsetzung von φ.

3. Schritt: (Y, p, f, b) ist maximale analytische Fortsetzung von φ.
Sei

$$(Z, q, g, c)$$

irgendeine analytische Fortsetzung von φ. Wir definieren wie folgt die Abbildung

$$F: Z \longrightarrow Y$$

Sei

$$z \in Z$$

vorgegeben und sei

$$x := q(z) \in X.$$

Der holomorphe Keim

$$q_*(g|_z) \in \mathcal{O}_{X,x}$$

entsteht dann aus φ durch analytische Fortsetzung entlang einer Kurve von a nach x (vgl. 1.7.6). Nach 1.7.2 besteht Y gerade aus allen Funktionskeimen, die durch analytische Fortsetzung von φ entlang einer Kurve entstehen. Deshalb gibt es ein

$$\eta \in Y$$

mit $q_*(g|_z) = \eta$ (und nur ein solches η). Wir setzen

$$F(z) = \eta.$$

F ist holomorph in z: Weil q als unverzweige Überlagerung lokal biholomorph ist, gibt es eine holomorphe Funktion

$$s \in \mathcal{O}_X(U)$$

auf einer Umgebung U von x, deren Verpflanzung entlang q gerade die Einschränkung von g auf eine Umgebung $W \subseteq Z$ von $z \in Z$ ist,

(2) $$g|_W = q^*(s).$$

Für $w \in W$ gilt

$$F(w) = q_*(g|_w) = s|_{q(w)},$$

d.h. F ist in der Umgebung W die Zusammensetzung von q mit der lokalen Umkehrung

$$q': x' \mapsto s|_{x'}$$

von p'. Letztere ist holomorph, also ist F in einer Umgebung von z holomorph.

Speziell für z = c erhalten wir

$$F(c) = q_*(g|_c) = \varphi = b$$

Wie wir im ersten Schritt gesehen haben (vgl. (1)) ist

$$q'^*(f|_{[U,s]}) = s.$$

Zusammen mit (2) erhalten wir

$$g|_W = q^*(s) = q^*(q'^*(f|_{[U,s]})) = (q' \circ q)^*(f|_{[U,s]}) = (F|_W)^*(f|_{[U,s]}).$$

Wir lassen die Mengen W eine Überdeckung von Z durchlaufen. Die zugehörigen Mengen U durchlaufen dann eine Überdeckung von X und die Mengen [U,s] eine Überdeckung von Y. Es folgt

$$g = F^*(f).$$

Mit anderen Worten, F ist die Abbildung mit den geforderten Eigenschaften.
QED.

Bemerkungen

(i) In derselben Weise wie oben kann man anstelle der Keime holomorpher Funktionen auch Keime meromorpher Funktionen betrachten und deren analytische Fortsetzungen konstruieren. Man verwendet dabei die Überlagerung

$$|\mathcal{M}_X| \longrightarrow X.$$

(ii) Bisher haben wir verzweigte Überlagerungen aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen. Im nachfolgenden Abschnitt werden wir bei der Untersuchung des Spezialfalls der algebraischen Funktionen auch Verzweigungen untersuchen.

1.8 Algebraische Funktionen

Die einfachsten Beispiele für mehrdeutige analytische Funktionen sind die Wurzel-Funktionen. Diese sind Spezialfälle sogenannter algebraischer Funktionen, d.h. Funktionen

$$w = w(z),$$

die einer algebraischen Bedingung

$$w^n + a_1(z) \cdot w^{n-1} + ... + a_n(z) = 0$$

genügen, wobei die Koeffizienten a_i vorgegebene meromorphe Funktionen von z sind.

In diesem Abschnitt konstruieren wir Riemannsche Flächen algebraischer Funktionen. Es wird sich zeigen, daß es sich um eigentliche Überlagerungen handelt, deren Blätterzahl gleich dem Grad der algebraischen Gleichung ist (wenn diese irreduzibel ist).

1.8.1 Elementarsymmetrische Funktionen

Seien $\pi: Y \longrightarrow X$ eine eigentliche unverzweigte holomorphe Überlagerung mit n Blättern und

$$f: Y \dashrightarrow \mathbb{C}$$

eine meromorphe Funktion auf Y. Für jeden Punkt $x \in X$ gibt es dann eine offene Umgebung U,

$$x \in U \subseteq X,$$

für welche das vollständige Urbild

$$\pi^{-1}(U) = V_1 \cup ... \cup V_n$$

disjunkte Vereinigung offener Mengen $V_i \subseteq Y$ ist mit der Eigenschaft, daß die Einschränkungen

$$\pi|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$$

biholomorph sind. Bezeichne

$$\tau_i := (\pi|_{V_i})^{-1} : U \longrightarrow V_i$$

die Umkehrung von $\pi|_{V_i}$ und

$$f_i := \tau_i^* f : U \dashrightarrow \mathbb{C}$$

die Verpflänzung von f entlang τ_i .

Weiter schreiben wir für beliebige Unbestimmte $T, z_1, ... z_n$ das Produkt

$$(1) \qquad \prod_{i=1}^{n} (T - z_i) = T^n - s_1 T^{n-1} + s_2 T^{n-1} + .. + (-1)^n s_n$$

d.h. die s_i seien die elementarsymmetrischen Funktionen in $z_1, ... z_n$:

$$s_1(z_1, ... z_n) = z_1 + ... + z_n$$
$$s_2(z_1, ... z_n) = z_1 z_2 + ... + z_{n-1} z_n$$
$$s_n(z_1, ... z_n) = z_1 \cdot ... \cdot z_n$$

Wir setzen die Verpflanzungen $f_1,...f_n$ ein und erhalten

$$(2) \qquad \prod_{i=1}^{n} (T-f_i) = T^n + c_1 T^{n-1} + ... + c_n$$

mit einer auf U definierten meromorphen Funktion

$$c_\nu = (-1)^\nu s_\nu(f_1,...,f_n): U \dashrightarrow \mathbb{C}.$$

Wiederholen wir diese Konstruktion mit einer Umgebung U' eines anderen Punktes

$$x' \in X,$$

so erhalten wir in den Punkten von $U \cap U'$ dieselben meromorphen Funktionen c_ν, denn die beiden Produkte auf der linken Seite von (2) unterscheiden sich nur in der Reihenfolge der Faktoren. Mit anderen Worten, die lokal konstruierten meromorphen Funktionen c_ν verheften sich zu global definierteen meromorphen Funktionen

$$c_\nu: X \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Wir nennen sie auch <u>elementarsymmetrische Funktionen</u> von f bezüglich der Überlagerung $\pi: Y \longrightarrow X$.

1.8.2 Elementarsymmetrische Funktionen im verzweigten Fall

Seien

$$\pi: Y \longrightarrow X$$

eine eigentliche holomorphe Überlagerung Riemannscher Flächen mit n Blättern,

$$A \subseteq X$$

eine abgeschlossene diskrete Teilmenge, welche alle kritischen Punkte von π enthält und

$$B := \pi^{-1}(A).$$

Weiter seien

$$f: Y - B \dashrightarrow \mathbb{C}$$

eine holomorphe oder meromorphe Funktion und

$$c_1,...,c_n \in \mathcal{O}(X-A) \text{ bzw. } \in \mathcal{M}(X-A)$$

die elementarsymmetrischen Funktionen von f bzgl. π.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) f besitzt eine holomorphe (bzw. meromorphe) Fortsetzung auf Y.
(ii) $c_1,...,c_n$ besitzen holomorphe (bzw. meromorphe) Fortsetzungen auf X.

Bemerkung
Auf Grund dieser Aussage können wir im folgenden auch für verzweigte (eigentliche holomorphe) Überlagerungen elementarsymmetrische Funktion definieren.

Beweis. Seien

$$a \in A$$

und

$$b_1,...,b_m \in B$$

die Urbilder von a bei π. Wir fixieren eine Karte

$$z: U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{C}$$

von X, deren Koordinaten-Umgebung U relativ kompakt ist[48], den Punkt a enthält und bei welcher der Punkt a dem Ursprung in der komplexen Ebene entspricht,

$$z(a) = 0 \in \mathbb{C}.$$

[48] d.h. die Abschließung von U in X ist kompakt.

Dann ist

$$V := \pi^{-1}(U)$$

eine relativ kompakte Umgebung für jeden der Punkte b_i. Wir behandeln zunächst den Fall, daß f eine holomorphe Funktion ist.

1. Fall: $f \in \mathcal{O}(Y\text{-}B)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii).

Wenn sich f auf Y holomorph fortsetzen läßt, so ist f auf der Menge

$$V - \{b_1,...,b_m\}$$

betragsmäßig beschränkt. Dann sind aber auch die elementarsymmetrischen Funktionen c_ν (als Polynome in den lokalen Verpflanzungen von f) beschränkt auf A - {a}, d.h. sie lassen sich zu im Punkt a holomorphen Funktionen fortsetzen.

(ii) $\Rightarrow$ (i).

Wenn sich die elementarsymmetrischen Funktionen c_ν auf ganz X fortsetzen lassen, so sind sie auf U - {a} betragsmäßig beschränkt. Für jeden Punkt

$$y \in V - \{b_1,...,b_m\}$$

gilt mit $x := \pi(y)$ nach Definiton der elementarsymmetrischen Funktionen

$$f(y)^n + c_1(x)f(y)^{n-1} + ... + c_n(x) = 0.$$

Deshalb ist f auf der Menge $V - \{b_1,...,b_m\}$ beschränkt,[49] läßt sich also holomorph in die Punkte b_i fortsetzen.

2. Fall: $f \in \mathcal{M}(Y\text{-}B)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii).

Nehmen wir an, die Funktion f läßt sich meromorph auf ganz Y fortsetzen. Dann ist sie in jedem der endliche vielen Punkte b_i entweder holomorph oder hat dort einen Pol (endlicher Ordnung). Die Verpflanzung

$$\pi^*(z)$$

der Karte z hat in jedem b_i eine Nullstelle. Es gibt deshalb eine Potenz

$$f \cdot \pi^*(z)^k, \tag{1}$$

welche sich holomorph in alle diese Punkten b_i fortsetzen läßt. Die i-te elementarsymmetrische Funktionen von (i) ist gerade $c_i \cdot z^{k \cdot i}$. Letztere besitzt nach dem ersten Fall eine holomorphe Fortsetzung in den Punkt a. Also besitzt c_i eine meromorphe Fortsetzung in diesen Punkt.

(ii) $\Rightarrow$ (i).

Nehmen wir an, die c_ν besitzen meromorphe Fortsetzungen in den Punkt a. Dann kann man ein k wählen mit der Eigenschaft, daß

---

[49] Sind $f_1,...,f_n$ lokale Verflanzungen von f, so ist

$$|f|^n = |f_1| \cdot ... \cdot |f_n| = |s_n| = |c_n|,$$

d.h. $|f| = \sqrt[n]{|c_n|}$, d.h. mit c_n ist auch f beschränkt.

$$c_\nu \cdot z^{k \cdot \nu}$$

für jedes ν eine holomorphe Fortsetzung in den Punkt a besitzt. Dann läßt sich aber die Funktion (1) holomorph in jeden der Punkte b_i fortsetzen, d.h. die Funktion f selbst besitzt eine meromorphe Fortsetzung.
.**QED**.

1.8.3 Vergleich der meromorphen Funktionenkörper für eigentliche Überlagerungen

Seien $\pi: Y \longrightarrow X$ eine eigentliche holomorphe Überlagerung Riemannscher Flächen, welche n Blätter besitzt.

Weiter seien $f \in \mathcal{M}(Y)$ und $c_1,...,c_n \in \mathcal{M}(X)$ die zugehörigen elementarsymmetrischen Funktionen. Dann gilt

$$f^n + (\pi^* c_1) f^{n-1} + ... + \pi^* c_n = 0.$$

Insbesondere beschreibt der Monomorphismus

$$\pi^*: \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$$

eine algebraische Körpererweiterung. Diese hat einen Grad ≤ n.
Ergänzung.
Falls es ein $f \in \mathcal{M}(Y)$ gibt und einen Punkt $x \in X$ mit den Urbildern $y_1,...,y_n \in Y$ derart, daß die Werte $f(y_i)$ paarweise verschieden sind, so ist der Grad der Erweiterung sogar gleich n.
Bemerkung
Wir werden später sehen, daß die in der Ergänzung beschriebene Bedingung stets erfüllt.
Beweis. Nach Definition der elementarsymmetrischen Funktionen in 1.8.1 besteht die Identität

$$f^n + (\pi^* c_1) f^{n-1} + ... + \pi^* c_n = 0,$$

d.h. jedes Element

$$f \in L := \mathcal{M}(Y)$$

ist algebraisch über

$$K := \pi^* \mathcal{M}(X) \ (\subseteq L),$$

und das zugehörige Minimalpolynom besitzt einen Grad ≤ n. Sei jetzt

$$f_0 \in L$$

ein Element, dessen Minimalpolynom einen Grad

$$n_0$$

besitzt, der maximal ist unter allen Graden aller Minimalpolynome von Elementen von L (über K). Es reicht zu zeigen,

$$L = K(f_0).$$

Angenommen, $K(f_0)$ ist echt enthalten in L,

$$K(f_0) \subset L.$$

Dann gibt es ein $f \in L - K(f_0)$ und $K(f_0, f)$ ist echt größer als $K(f_0)$. Alle hier betrachteten Körper enthalten die komplexen Zahlen, sind also von der Charakteristik 0. Nach dem Satz vom primitiven Element gibt es ein g mit

$$K(g) = K(f_0,f) \subseteq L.$$

Weil K(g) echt größer ist als $K(f_0)$ gilt

$$\deg g = [K(g): K] > [K(f_0): K] = \deg f_0.$$

Das steht aber im Widerspruch zur Maximalität des Grades von f_0.

Zur Ergänzung.
Hat das Minimalpolynom von f einen Grad m < n, so kann f in jedem Punkt von X höchstens m Werte annehmen (da die Werte Nullstellen eines normierten Polynoms m-ten Grades sind).
QED.

1.8.4 Fortsetzung eigentlicher unverzweigter Überlagerungen

Seien X eine Riemannsche Fläche,

$$A \subseteq X$$

eine abgeschlossene diskrete Teilmenge,

$$X' := X - A$$

und

$$\pi': Y' \longrightarrow X'$$

eine eigentliche unverzweigte holomorphe Überlagerung. Dann läßt sich π zu einer eigentlichen holomorphen Überlageruing auf ganz X fortsetzen, d.h. es gibt eine eigentliche holomorphe Überlagerung

$$\pi: Y \longrightarrow X$$

von Riemannschen Flächen und eine biholomorphe Abbildung

$$\varphi: Y - \pi^{-1}(A) \longrightarrow Y'$$

mit $\pi \circ \varphi^{-1} = \pi'$.

Beweis. Für jedes a∈A wählen wir eine Karte

$$z_a: U_a \longrightarrow V_a \quad (\subseteq \mathbb{C})$$

von X mit folgenden Eigenschaften:

1. $z_a(a) = 0$.
2. $V_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} = \Delta$ ist die Einheitskreisscheibe.
3. $U_a \bigcap U_{a'} = \varnothing$ für $a \neq a'$.

Wir setzen

$$U_a^* := U_a - \{a\}.$$

Weil $\pi': Y' \longrightarrow X'$ nach Voraussetzung eigentlich ist, zerfällt das vollständige Urbild

$$\pi'^{-1}(U_a^*) = V_{a,1}^* \bigcup \ldots \bigcup V_{a,n(a)}^*$$

in eine endliche[50] disjunkte Vereinigung von offenen zusammenhängenden Teilmengen $V_{a,i}^* \subseteq Y'$. Für jedes i ist die Einschränkung

---

[50] Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{M}$$

aller offenen Teilmengen U⊆X' mit der Eigenschaft , daß die Zusammenhangskomponenten von

$$\pi'^{-1}(U)$$

offen sind und deren Anzahl höchstens n ist, wobei n die Anzahl der Blätter von π' sei. Diese Menge sei mit der Halbordung durch Inklusion versehen.

(1) $$V^{*}_{a,i} \longrightarrow U_a$$

von π' auf $V^{*}_{a,i}$ eine eigentliche unverzweigte Überlagerung. Die unverzweigten Überlagerungen der punktierten Einheitskreisscheibe Δ^* haben wir in 1.5 vollständig beschrieben. Bezeichne

$$k_{a,i}$$

die Anzahl derBlätter der Überlagerung (1). Nach 1.5.12 gibt es eine biholomorphe Abbildung

$$\zeta_{a,i}: V^{*}_{a,i} \longrightarrow \Delta^*$$

und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V^{*}_{a,i} & \xrightarrow{\zeta_{a,i}} & \Delta^* \\ \pi'\downarrow & & \downarrow\pi_{a,i} \\ U^{*}_{a} & \xrightarrow{z_a} & \Delta^* \end{array}$$

mit $\pi_{a,i}(\zeta) = \zeta^{k_{a,i}}$. Wir fügen jetzt zur Menge Y' für jedes $V^{*}_{a,i}$ einen "künstlichen" Punkt hinzu, d.h. wir setzen

$$Y := Y' \bigcup \bigcup_{a\in A}\{p_{a,1}, ..., p_{a,n(a)}\}$$

mit irgendwelchen Elementen $p_{a,i}$ (aus irgendeiner Menge), die paarweise verschieden sind und nicht schon in Y' liegen. Dann gibt es auf Y genau eine Topologie mit folgenden Eigenschaften[51].

Weil die Blätterzahl von $\pi':Y'\longrightarrow X'$ gleich n ist, gibt es für jeden Punkt $x\in X$ eine offene Umgebung U derart, daß $\pi'^{-1}(U)$ aus genau n Zusammenhangskomponenten besteht (die alle biholomorph sind zu U). Insbesondere ist die Menge $\mathcal{M}$ nicht leer,

$$\mathcal{M} \neq \varnothing.$$

Zeigen wir, jede Kette in $\mathcal{M}$ besittzt eine obere Schranke in $\mathcal{M}$. Sei also

$$\{U_i\}_{i\in I}$$

eine Kette in $\mathcal{M}$. Es reicht zu zeigen,

$$U := \bigcup_{i\in I} U_i$$

liegt auch in $\mathcal{M}$. (Die Offenheit der Zusammenhangskomponenten folgt aus der Offenheit dieser Komponenten für die $\pi'^{-1}(U_i)$). Angenommen, das ist nicht so. Dann besitzt $\pi'^{-1}(U)$ mehr als n Zusammenhangskomponenten, sagen wir

$$K_1,...,K_{n+1}, ...$$

Wir wählen n+1 Punkte $c_1\in K_1,...,c_{n+1}\in K_{n+1}$. Die endlichn vielen Punkte $\pi'(c_1),...,\pi'(c_{n+1})$ liegen sämtlich in U. Da die U_i eine Kette bilden, gibt es ein i mit

$$\pi'(c_1),...,\pi'(c_{n+1}) \in U_i.$$

Es folgt

$$c_1,...,c_{n+1} \in \pi'^{-1}(U_i).$$

Wegen $U_i\in\mathcal{M}$ besteht $\pi'^{-1}(U_i)$ aus höchstens n Zusammenhangskomponenten, und jede von ihnen ist offen. Also müssen zwei der n+1 Punkte c_i in derselben Zusammenhangskomponente liegen. Diese ist

a) Die auf Y' induzierte Unterraum-Topologie ist gerade die bereits auf Y' gegebene Topologie (die von der Struktur der Riemannschen Fläche Y' kommt).

b) Ist $\{W_j\}_{j\in J}$ eine Umgebungsbasis des Punktes $a\in U_a$, so bilden die Mengen

$$(\pi'^{-1}(W_j)\bigcap V^*_{a,i}) \bigcup \{p_{a,i}\} \text{ mit } j\in J$$

eine Umgebungsbasis des Punktes $p_{a,i}$ in Y.

Auf diese Weise wird Y zu einem Hausdorff-Raum. Wir setzen die Abbildung π' zu einer Abbildung

$$\pi: Y \longrightarrow X$$

---

zusammenhängend und (weil offen) auch lokal linear zusammenhängend, also linear zusammenhängend. Es gibt also einen Weg in $\pi'^{-1}(U_i)$, der diese beiden Punkte verbindet. Wegen $\pi'^{-1}(U_i) \subseteq \pi'^{-1}(U)$ ist dies auch ein Weg in $\pi'^{-1}(U)$. Das steht aber im Widerspruch dazu, daß jedes c_i in einer anderen Zusammenhangskomponente von $\pi'^{-1}(U)$ liegen soll. Wir haben gezeigt, jede Kette in $\mathcal{M}$ besitzt eine obere Schranke in $\mathcal{M}$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es in $\mathcal{M}$ ein maximales Element, saben wir

$$U_0 \in \mathcal{M}.$$

Es reicht zu zeigen, $U_0 = X$. Angenommen, das ist nicht der Fall. Dann gibt es einen Punkt

$$x \in X - U_0.$$

Weil X als Riemannsche Fläche linear zusammenhänged ist, kann man x durch einen Weg mit einem Punkt von U_0 verbinden. Auf diesen Weg gibt es einen Punkt der auf dem Rand von U_0 liegt. Wir können annehmen

$$x \in \partial U_0$$

(d.h. jede Umgebung von x hat Punkte mit U_0 und Punkte mit $X - U_0$ gemeinsam). Wir wählen eine offene zusammenhängende Umgebung U von x in X,

$$x \in U \subseteq X$$

mit der Eigenschaft, daß $\pi'^{-1}(U)$ in n paarweise disjunkte offene Mengen V_i zerfällt,

$$\pi'^{-1}(U) = V_1 \bigcup ... \bigcup V_n$$

von denen jede durch π' biholomorph auf U abgebildet wird. Insbesondere ist jede von ihnen zusammenhängend, und weil U nicht ganz in U_0 liegt, ist keine von ihnen ganz in der Menge $\pi'^{-1}(U_0)$ enthälten. Wir fügen jetzt nacheinander die V_i zu dieser Menge hinzu. Die Vereinigung einer zusammenhängenden Menge mit V_i, die mit V_i gemeinsame Punkte hat, ist zusammenhängend. Die Zusammenhangskomponenten von

$$\pi'^{-1}(U_0 \bigcup U)$$

entstehen also aus denen von $\pi'^{-1}(U_0)$, indem man alle Komponenten der alten Menge mit denjenigen V_i's vereinigt, mit denen sie Punkte gemeinsam haben (oder falls es keine solchen V_i's gibt, sie unverändert läßt). Die neuen Zusammenhangskomponenten sind wieder offen in Y, und ihre Anzahl ist höchstens kleiner. Mit anderen Wort, $U_0 \bigcup U$ ist ein Element von $\mathcal{M}$. Das steht aber im Widerspruch zur Maximalität von U_0.

[51] Diese Konstruktion verallgemeinert die Fortsetzung einer Topologie auf einen durch einen Punkt ergänzten Raum, wie wir sie von der Ein-Punkt-Kompaktifizierung eines topologischen Raums kennen..

fort mit $\pi(p_{a,i}) = a$. Man erhält auf diese Weise eine eigentliche Abildung[52]. Um Y zu einer Riemannschen Fläche zu machen, fügen wir zu den Karten der komplexen Struktur von Y' noch die folgenden Karten

$$\zeta_{a,i}: V_{a,i} := V^{*}_{a,i} \cup \{p_{a,i}\} \longrightarrow \Delta$$

hinzu. Dabei sei $\zeta_{a,i}$ die Fortsetzung der biholomorphen Abildung

$$\zeta_{a,i}: V^{*}_{a,i} \longrightarrow \Delta^{*} \tag{2}$$

mit $\zeta_{a,i}(p_{a,i}) = 0$. Weil die ursprünglichen Abbildungen (2) biholomorph bezüglich der komplexen Struktur von Y' sind, liefern deren Fortsetzungen Karten von Y, die biholomorph verträglich sind mit den Karten von Y' und definieren so eine komplexe Struktur auf Y.

Die Abbildung $\pi: Y \longrightarrow X$ wird auf diese Weise zu einer holomorphen Abildung. Nach Konstruktion ist

$$Y - \pi'^{-1}(A) = Y'.$$

Als Abbildung

$$\varphi: Y - \pi'^{-1}(A) \longrightarrow Y'$$

können wir deshalb die identische Abbildung nehmen. Damit ist die Existenz der Fortsetzung $\pi: Y \longrightarrow X$ von $\pi': Y' \longrightarrow X'$ bewiesen.

QED.

Bemerkung

Die nachfolgende Aussage zeigt, daß die Fortsetzung, deren Existenz wir gerade gezeigt haben, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

1.8.5 Eindeutigkeit der Fortsetzung

Seien

$$\pi: Y \longrightarrow X \text{ und } \tau: Z \longrightarrow X$$

eigentliche holomorphe Überlagerungen und $A \subseteq X$ eine abgeschlossene disjunkte Teilmenge. Wir setzen

$$X' := X - A,\ Y' := \pi'^{-1}(X'),\ Z' := \tau'^{-1}(X').$$

Dann läßt sich jede fasertreue biholomorphe Abbildung

$$\sigma': Y' \longrightarrow Z'$$

fortsetzen zu einer fasertreuen biholomorphen Abildung

$$\sigma: Y \longrightarrow Z.$$

Insbesondere besitzt jede Decktransformation[53] $\sigma' \in Deck(Y'/X')$ eine Fortsetzung zu einer Decktransformation $\sigma \in Deck(Y/X)$.

Beweis. Seien $a \in A$ und $z: U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ eine Karte mit $a \in U$ und $z(a) = 0$. Wir können annehmen, daß

$$V = \Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

---

[52] Da für jedes $a \in A$ die Anzabl der $V^{*}_{a,i}$ endlich ist, reicht es zu zeigen, jede der Einschränkungen

$$V_{a,i} := V^{*}_{a,i} \cup \{p_{a,i}\} \longrightarrow U_{a,i}$$

ist eigentlich.

[53] Zur Erinnerung, Decktransformationen sind fasertree Homöomorphismen. Im Fall von Überlagerungen Riemannscher Flächen sind diese automatisch biholomorphe Abbildungen.

die Einheitskreisscheibe ist. Wir setzen

$$U^* := U - \{a\}.$$

Wir könne weiterhin annehmen, U wurde so klein gewählt, daß π und τ über U^* unverzweigt sind.[54] Seien $V_1,...,V_n$ und $W_1, ... , W_m$ die Zusammenhangskomponenten von $\pi^{-1}(U)$ bzw. $\tau^{-1}(U)$,

$$\pi^{-1}(U) = V_1 \bigcup ... \bigcup V_n \text{ und } \tau^{-1}(U) = W_1 \bigcup ... \bigcup W_m .$$

Dann sind die

$$V_\nu^* := V_\nu - \pi^{-1}(a)$$

die Zusammenhangskomponenten von $\pi^{-1}(U^*)$ und die

$$W_\nu^* := W_\nu - \tau^{-1}(a)$$

die Zusammenhangskomponenten von $\tau^{-1}(U^*)$. Mit σ' ist auch die Einschränkung

$$\pi^{-1}(U^*) \longrightarrow \tau^{-1}(U^*)$$

biholomorph (erhält also die Anzahl der Zusammenhangskomponenten), d.h. es gilt

$$n = m$$

und bei geeigneter Wahl der Nummerierung induziert σ' biholomorphe Abbildungen

$$\sigma': V_\nu^* \overset{\cong}{\longrightarrow} W_\nu^* \tag{1}$$

für jedes ν. Nun ist

$$\pi: V_\nu^* \longrightarrow U^* \tag{2}$$

eine unverzweigte Überlagerung der punktierten Einheitskreisscheibe mit endlich vielen Blättern (und V^* zusammenhängend). Nach 1.5.12 können wir V_ν^* so mit der punktiertern Einheitskreisscheibe identifizieren, daß die Abbildung (2) zur Potenzabbildung $p_k(z) = z^k$ wird. Insbesondere besteht

$$V_\nu^* \bigcap \pi^{-1}(a)$$

aus genau einem Punkt, sagen wir b_ν. Analog besteht

$$W_\nu^* \bigcap \tau^{-1}(a)$$

aus genau einem Punkt, sagen wir c_ν. Deshalb kann man jede der Abbildungen (1) zu einer bijektiven Abbildung fortsetzen (welche b_ν in c_ν überführt). Diese Fortsetzung ist stetig: eine Folge in V_ν^*, die gegen b_ν geht, geht bei π in eine Folge über, die gegen a geht.[55] Jede Folge aus τ-Urbildern in W_ν^* geht dann aber gegen c_ν.[56] Nach dem Satz über hebbare Lücken ist die Fortsetzung sogar holomorph. Durch Anwenden des desselben Argument auf die Umkehrung von (1) sehen wir, daß die Fortsetzung von (1) eine biholomorphe Abbildung ist.

---

[54] d.h. a ist der einzige kritische Punkt von π und τ, der in U liegt. Wir verwenden die Tatsache, daß die Menge der kritischen Punkte eine diskrete Menge ist.

[55] Man identifiziere π mit der Potenzabbildung p_k.

[56] Man identifizieren τ mit der Potenzabbildung: für jede Nullfolge ist die zugehörige Folge von k-ten Wurzeln ebenfalls eine Nullfolge.

Indem wir die angegebene Konstruktion für jeden Punkt $a \in A$ anwenden, erhalten wir die gesuchte Fortsetzung.
QED.

1.8.6 Verzweigte Galois-Überlagerungen

Seien $\pi: Y \longrightarrow X$ eine eigentliche holomorphe Überlagerung von Riemannschen Flächen und $A \subseteq X$ die Menge der kritischen Punkte von π. Wir setzen

$$X' := X - A \text{ und } Y' := Y - \pi^{-1}(A).$$

Die Abbildung π heißt dann Galois-Überlagerung, wenn die induzierte Abhildung

$$Y' \longrightarrow X'$$

eine Galois-Überlagerung ist.

1.8.7 Auflösungssatz für algebraische Funktionen

Seien $R > 0$ eine reelle Zahl und

$$c_1,...,c_n: \Delta(R) \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorphe Funktionen auf der offenen Kreisscheibe

$$\Delta(R) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$$

vom Radius R. Weiter sei $w_0 \in \mathbb{C}$ eine einfache Nullstelle des Polynoms

$$T^n + c_1(0) \cdot T^{n-1} + ... + c_n(0) \in \mathbb{C}[T].$$

Dann gibt es eine reelle Zahl r, $0 < r \leq R$ und eine homolomorphe Funktion

$$\varphi: E(r) \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $\varphi(0) = w_0$ und

$$\varphi^n + c_1 \cdot \varphi^{n-1} + ... + c_n = 0$$

auf E(r).
Beweis. Wir setzen

$$F(z, w) := w^n + c_1(z) \cdot w^{n-1} + ... + c_n(z)$$

für $z \in \Delta(R)$ und $w \in \mathbb{C}$. Weil F als Funktion von w nicht konstant ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß die Abbildung

$$w \mapsto F(0,w)$$

auf der Kreisscheibe

$$\{w \in \mathbb{C} : |w-w_0| < 2\varepsilon\}$$

nur in $w = w_0$ eine Nullstelle hat.[57] Weil F stetig ist, gibt es ein r, $0 < r \leq R$, derart, daß die Funktion F auf der Menge

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < r, |w-w_0| = \varepsilon\}$$

keine Nullstelle besitzt.[58] Für jedes fest gewählte $z \in \Delta(r)$ ist durch

$$n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=\varepsilon} \frac{F_w(z,w)}{F(z,w)} dw$$

---

[57] Wegen der isolierten Wertannahme nich-konstanter holomorpher Funktionen.
[58] Wir verwenden die Kompaktheit der Kreislinie.

die Zahl der Nullstellen der Funktion $w \mapsto F(z,w)$ auf der Kreisscheibe vom Radius ε mit dem Mittelpunkt w_0 gegeben. Nun ist

$$n(0) = 1,$$

und die Funktion n(z) hängt in stetiger Weise von z ab für $z \in E(r)$. Deshalb gilt

$$n(z) = 1 \text{ für jedes } z \in E(r),$$

d.h. für jedes solche z hat F(z,w) nur eine einfache Nullstelle. Die Nullstelle selbst der Abbildung $w \mapsto F(z, w)$ berechnet sich nach dem Residuen-Satz zu[59]

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=\varepsilon} w \frac{F_w(z,w)}{F(z,w)} dw .$$

Der Ausdruck unter dem Integral hängt in holomorpher Weise von z ab. Deshalb ist die Abbildung

$$E(r) \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \varphi(z),$$

holomorph. Nach Konstruktion gilt $F(z, \varphi(z)) = 0$ für alle $z \in E(r)$.
QED.

1.8.8 Linearzerlegung von Polynomen mit holomorphen Koeffizienten

Seien X eine Riemannsche Fläche, $x \in X$ ein Punkt und

$$P(T) = T^n + c_1 T^n + ... + c_n \in \mathcal{O}_{X,x}[T]$$

ein normiertes Polynom mit Koeffizienten im Ring

$$\mathcal{O}_{X,x}$$

der Keime holomorpher Funktionen auf X im Punkt x. Das Polynom

$$p(T) = T^n + c_1(x)T^n + ... + c_n(x) \in \mathbb{C}[T]$$

---

[59] Für jedes feste z ist das Integral gleich der Summe der Residuen der Funktion

$$F(w) = F(z, w).$$

Sei w_1 für fest vorgegebenes z die einzige Nullstelle von F(w) in der betrachteten Kreisscheibe, d.h.

$$F(w) = a_1(w-w_1) + a_2(w-w_1)^2+...$$
$$F'(w) = a_1 + 2a_2(w-w_1) + ...$$
$$1/F(w) = \frac{1}{a_1(w-w_1)} + b_1 + b_2(w-w_1) + ...$$
$$\frac{F'(w)}{F(w)} = \frac{1}{w-w_1} + c_1 + c_2(w-w_1) + ...$$

Durch Multiplikation mit $w = w_1 + (w-w_1)$ erhalten wir

$$w \cdot \frac{F'(w)}{F(w)} = \frac{w_1}{w-w_1} + d_1 + d_2(w-w_1) + ...$$

Mit anderen Worten, das einzige Residuum von $w \cdot \frac{F'(w)}{F(w)}$ ist gleich der einzigen Nullstelle w_1 von F(w) auf der betrachteten Einheitskreisscheibe. Mit anderen Worten, es ist $\varphi(z) = w_1$ wie behauptet.

besitze die n paarweise verschiedenen Nullstellen

$$w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}.$$

Dann gibt es Keime $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ mit $\varphi_\nu(x) = w_\nu$ für $\nu = 1,\ldots,n$ und

$$P(T) = \prod_{\nu=1}^{n} (T - \varphi_n).$$

Beweis: ergibt sich aus 1.8.7 durch Übergang zu den Keimen.

QED.

1.8.9 Die Existenz der Riemannschen Fläche zu einer algebraischen Gleichung

Seien X eine Riemannsche Fläche und

$$P(T) = T^n + c_1 T^n + \ldots + c_n \in \mathcal{M}(X)[T]$$

ein normiertes irreduzibles Polynom mit meromorphen Koeffizienten. Dann gibt es eine eigentliche holomorphe Überlagerung

$$\pi: Y \longrightarrow X$$

mit n Blättern und eine meromorphe Funktion $F \in \mathcal{M}(Y)$ mit

$$(\pi^*P)(F) = 0.$$

Dabei ist das Tripel (Y, π, F) im folgenden Sinne eindeutig bestimmt.

Ist (Z, τ, G) ein weiteres Tripel wie angegeben, so gibt es genau eine fasertreue biholomorphe Abbildung $\sigma: Z \longrightarrow Y$ mit $G = \sigma^*F$.

Bemerkungen

(i) Im folgenden werden wir das Tripel (Y, π, F) auch die durch das Polynom definierte algebraische Funktion nennen.

(ii) Den klassischen Fall erhält man, wenn $X = \mathbb{P}^1$ die Riemannsche Zahlenkugel ist. Dann sind nach dem Satz von Liouville die Koeffizienten des Polynoms rationale Funktionen einer Variablen. Weil $\mathbb{P}^1$ kompakt ist und die Abbildung

$$\pi: Y \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

eigentlich, ist dann auch Y kompakt.

Beweis. Sei

$$D \in \mathcal{M}(X)$$

die Diskriminante des Polynoms P(T). Dies ist ein Polynom in den Koeffizienten von P. Die Diskriminante kann nicht identisch Null sein, weil sonst P reduzibel wäre.[60] Deshalb gibt es eine diskrete abgeschlossene Teilmenge

$$A \subseteq X$$

mit der Eigenschaft, daß für jeden Punkt

$$x \in X' := X - A$$

das Polynom

$$p_x(T) := T^n + c_1(x) \cdot T^{n-1} + \ldots + c_n(x) \in \mathbb{C}[T]$$

---

[60] P und die Ableitung P' hätten einen gemeinsamen Teiler positiven Grades, was wegen der Irreduzibilität von P (und weil die Charakteristik gleich 0 ist) nicht möglich ist.

n paarweise verschiedene Nullstellen besitzt. Wir verwenden jetzt die zur Garbe $\mathcal{O}_X$ gehörige Überlagerung

$$|\mathcal{O}_X| \longrightarrow X.$$

(vgl. 1.6.7). Bezeichne

$$Y' \subseteq |\mathcal{O}_X|$$

die Menge aller Keime φ holomorpher Funktionen auf X in den Punkten von X', für welche

$$P(\varphi) = 0$$

gilt. Nach 1.8.8 gibt es zu jedem Punkt $x \in X'$ eine offene Umgebung $U \subseteq X'$,

$$x \in U \subseteq X',$$

und holomorphe Funktionen $f_1,...,f_n \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$(1) \qquad P(T) = \prod_{\nu=1}^{n} (T - f_\nu)$$

auf U. Das bedeutet, es gilt[61]

$$\pi'^{-1}(U) = \bigcup_{\nu=1}^{n} [U, f_\nu].$$

Die Mengen $[U, f_\nu]$ sind paarweise disjunkt[62], und die Einschränkungen von π',

$$\pi': [U, f_\nu] \longrightarrow U$$

sind Homöomorphismen. O.B.d.A. können wir annehmen, daß

U zusammenhängend

ist. Die Einschränkung π': $Y' \longrightarrow X'$ ist somit eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung. Die Zusammenhangskomponenten von Y' sind Riemannsche Flächen, welche ebenfalls unbeschränkt unverzweigt sind über X'. Wir betrachten die Abbildung

$$f: Y' \longrightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto \varphi(\pi'(\varphi)).$$

Diese Abbildung ist holomorph.[63] Nach Konstruktion gilt außerdem[64]

$$f(y)^n + c_1(\pi'(y))\, f(y)^{n-1} + ... + c_n(\pi'(y)) = 0$$

---

[61] Zur Erinnerung, [U, f] ist die Menge aller Keime der Funktion f in den Punkten von U. Wegen (1) ist jeder Keim aus $\pi'^{-1}(U)$ ein Keim eines f_ν.

[62] da die Keime der f_ν paarweise verschieden sind, kann man U so klein wählen, daß es alle ihre Keime in den Punkten von U auch sind.

[63] Es reicht die Holomorphie der Einschränkung dieser Abbildung auf $[U, f_\nu]$ zu beweisen. Diese Einschränkung ist aber von der Gestalt

$$f_\nu|_u \longrightarrow f_\nu(u).$$

Identifiziert man $[U, f_\nu]$ vermittels π' mit U, so bekommt die Abbildung die Gestalt

$$u \mapsto f_\nu(u).$$

Dies ist eine holomorphe Funktion.

[64] Ist $y \in Y'$ ein Keim im Punkt $x \in X$, so ist $f(y) = y(x)$ und die Relation bekommt die Gestalt

$$y(x)^n + c_1(x)\, y(x)^{n-1} + ... + c_n(x) = 0.$$

Diese Relation besteht nach Definition von Y'.

für jedes $y \in Y'$. Nach 1.8.4 läßt sich die Überlagerung fortsetzen zu einer eigentlichen holomorphen Abbildung

$$\pi: Y \longrightarrow X.$$

Wir identifizieren hier Y' mit $\pi^{-1}(X')$. Nach 1.8.2[65] ist f fortsetbar zu einer meromorphen Funktion $F \in \mathcal{M}(Y)$ mit

$$(\pi^*P)(F) = F^n + (\pi^*c_1)\bullet F^{n-1} + \ldots \pi^*c_n = 0.$$

Zeigen wir jetzt, Y ist zusammenhängend, d.h. Y ist eine Riemannsche Fläche. Angenommen, das ist nicht der Fall. Dann zerfällt Y in endlich viele Zusammenhangskomponenten $Y_1,\ldots, Y_k$,und die Einschränkungen

$$\pi: Y_i \longrightarrow X$$

sind eigentliche holomorphe Überlagerungen mit endlicher Blätterzahl, sagen wir, n_i. Dabei ist

$$\sum_i n_i = n.$$

Unter Verwendung der elementarsymmetrischen Funktionen von $F|_{Y_i}$ gewinnen wir Polynome

$$P_i(T) \in \mathcal{M}(X)[T]$$

des Grades n_i mit[66]

$$P(T) = P_1(T)\bullet\ldots\bullet P_k(T).$$

Das widerspricht aber der Irreduzibilität von P.

Beweis der Eindeutigkeit.

Sei (Z, τ, G) eine weitere algebraische Funktion, welche durch das Polynom P definiert wird. Wir bezeichnen mit

$$B \subseteq Z$$

die Vereinigung der Polstellenmenge von G mit der Menge der Verzweigungspunkte von τ. Weiter seien

$$A' := \tau(B)$$

und

$$X'' := X' - A',\ Y'' := \pi^{-1}(X''),\ Z'' := \tau^{-1}(X'').$$

Wir definieren wie folgt eine fasertreue Abbildung

$$\sigma'': Z'' \longrightarrow Y''.$$

Sei $z \in Z''$ vorgegeben und $x := \tau(z)$. Weiter bezeichne

$$\varphi := \tau_* G|_z \in \mathcal{O}_{X,x}$$

das direkte Bild des Funktionenkeims von G im Punkt z. Nach Wahl von (Z,τ,G) ist G Nullstelle des Polynoms τ^*P, also φ Nullstelle von P,

$$P(\varphi) = 0.$$

Nach Definition von Y' ist damit φ ein Punkt von Y'. Wir setzen

$$\sigma''(z) = \varphi.$$

---

[65] Die Fortsetzbarkeit von f ist äquivalent zur Fortsetzbarkeit der elementarsymmetrischen Funktionen c_i.

[66] Die Faktoren $T- f_\nu$ der Linearzerlegung von P(T) verteilen sich auf die $P_i(T)$.

Nach Konstruktion gilt

$$\pi' \circ \sigma'' = \tau,$$

d.h. σ'' ist fasertreu. Weil π' lokal biholomorph ist, ist mit τ auch σ'' eine holomorphe Abbildung.[67] Auf Grund der Definition von σ'' und F (= f auf Y'') gilt

(1) $$G|_{Z''} = (\sigma''^*)(F|_{Y''}).$$[68]

Nach 1.8.5 läßt sich σ'' fortsetzen zu einer fasertreuen biholomorphen Abbildung

$$\sigma: Z \longrightarrow Y,$$

für welche wegen (1) gilt

$$G = \sigma^* F.$$

Wir haben noch zu zeigen, die Abbildung σ ist durch diese Bedingung eindeutig festgelegt. Andernfalls würde es eine von der identischen Abbildung verschiedene Überlagerung[69]

$$\alpha: Y \longrightarrow Y$$

geben mit $\alpha^* F = F$. Das ist aber unmöglich, denn F nimmt in den Punkten jeder Faser $\pi^{-1}(x)$, $x \in X'$, paarweise verschiedene Werte an.[70]
QED.

1.8.10 Beispiel

Sei

$$f(z) = (z - a_1) \bullet \ldots \bullet (z - a_n) \in \mathbb{C}[z]$$

ein Polynom mit paarweise verschiedenen Nullstellen

$$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Wir betrachten f als meromorphe Funktion auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$,

$$f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1).$$

Das Polynom

$$P(T) := T^2 - f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)[T]$$

ist irreduzibel[71] über $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ und definiert eine algebraische Funktion, die gewöhnlich mit

$$\sqrt{f(z)}$$

bezeichnet wird. Ihre Riemannsche Fläche

$$\pi: Y \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

kann man auf Grund der obigen Konstruktionen wie folgt beschreiben.[72] Sei[73]

---

[67] Genauer: durch lokales Verpflanzen von G erhält man eine holomorphe Funktion auf X, die einen holomorphen Schnitt von π definiert. Die Abbildung σ'' ist lokal gerade die Zusammensetzung von τ mit diesem holomorphe Schnitt, also holomorph.

[68] Auf der rechten Seite steht die Abbildung $F \circ \sigma''$: $z \mapsto \tau_* G|_z \mapsto (\tau_* G|_z)(\tau(z)) = G|_z(z) = G(z)$

[69] d.h. α permutiert die Fasern von π.

[70] Die Werte sind gerade die Nullstellen von P über dem Punkt x, und diese sind wegen $x \in X'$ paarweise verschieden.

[71] Nach 1.2.8 ist jede auf der Zahlenkugel meromorphe Funktion rational,

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(z).$$

Deshalb ist P ein Eisenstein-Polynom bezüglich der Primelemente $z - a_i$ des Polynom-Rings $\mathbb{C}[z]$.

[72] Nach 1.8.9 ist es eine 2-blättrige Überlagerung (weil das Polynom P den Grad 2 hat).

[73] Die Nullstellen von f sind die einzigen Punkte , außer eventuel ∞, in denen $T^2 - f(z)$ mehrfache Nullstellen haben kann: die Nullstellen von $T^2 - f(z)$ unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

$$A := \{a_1, \dots, a_n, \infty\} \ (\subseteq \mathbb{P}^1)$$

und

$$X' := \mathbb{P}^1 - A,\ Y' := \pi^{-1}(X').$$

Dann ist die Einschränkung

$$\pi' \colon Y' \longrightarrow X'$$

eine unbeschränkt unverzweigte Überlagerung. Deshalb kann man jeden Funktionenkeim

$$\varphi \in \mathcal{O}_{X',x} \text{ mit } x \in X' \text{ und } \varphi^2 = f$$

entlang jeder in X' liegenden Kurve analytisch fortsetzen. Betrachten wir jetzt die Überlagerung in den Punkten von A.

(a) Beschreibung von π über den endlichen Punkten von A.

Für $j = 1, \dots, n$ wählen wir reelle Zahlen $r_j > 0$, die so klein sind, daß in der Kreisscheibe

$$U_j := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_j| < r_j\}$$

außer a_j kein weiterer Punkt von A liegt. Die Funktion

$$g(z) := \prod_{k \neq j} (z - a_k)$$

besitzt in U_j keine Nullstelle. Weil U_j einfach zusammenhängend ist, gibt es eine holomorphe Funktion[74]

$$h \colon U_j \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $h^2 = g$. Auf U_j kann man deshalb schreiben

$$f(z) = (z - a_j) \cdot h(z)^2.$$

Für $0 < \rho < r_j$, $\theta \in \mathbb{R}$ und $\xi := a_j + \rho e^{i\theta}$ erhalten wir

$$f(\xi) = \rho e^{i\theta} \cdot h(\xi)^2 \neq 0,$$

d.h. $\sqrt{\rho} \cdot e^{i\theta\alpha/2} h(\xi)$ ist eine einfache Nullstelle des Polynoms $T^2 - f(\xi)$.Nach dem Auflösungssatz 1.8.7 gibt es einen Funktionenkeim $\varphi_\xi \in \mathcal{O}_{X',\xi}$ mit

$$\varphi_\xi^2 = f \text{ und } \varphi_\xi(\xi) = \sqrt{\rho} \cdot e^{i\theta/2} h(\xi).$$

Für nahe beieinander liegende ρ und θ lassen sich diese Keime durch Funktionen

(1) $$\sqrt{\rho} \cdot e^{i\theta/2} h(\xi)$$

in ρ und θ repräsentieren, die auf dem gemeinsamen Teil ihres Definitionsbereichs übereinstimmen. Diese Funktionen sind als Funktionen in $\xi := a_j + \rho e^{i\theta}$ holomorph (da ihre Quadrate es sind - die Abbildung $z \mapsto z^2$ ist außerhalb der Null lokal biholomorph). Durch Fortsetzen des Keims φ_ξ entlang der Kurve

$$\xi := a_j + \rho e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi,$$

[74] Die Fortsetzungen des obigen Keims φ hängen nur von den Endpunkten der Kurve und nicht von der speziellen Kurve ab, entlang der man fortsetzt.

erhält man wieder diesen Keim aber mit entgegengesetzen Vorzeichen: man erhöhe in (1) den Wert θ um 2π.

==========

Wegen

$$\pi_1(U_j) \cong \pi_1(\Delta^*) \cong \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}. \text{ (vgl. Beispiel (i) von 1.5.7)}$$

sind alle Kurven in U_j bis auf Homotopie ein ganzzahliges Vielfaches dieser einmaligen Umkreisung des Punktes a_j, d.h. φ_ξ und $-\varphi_\xi$ sind die einzigen Keim in ξ, die man durch analytische Fortsetzung aus φ_ξ erhalten kann. Da dies für alle j gilt, ist dies sogar für die Fortsetzung entlang beliebiger Kurven in X' richtig. Mit anderen Worten, die Faser von π' über den Punkten

$$\xi \in U_j$$

bestehen aus zwei Punkten.

==========

Die Einschränkung

$$\pi'^{-1}(U_j^*) \longrightarrow U_j^*$$

ist bis auf Biholomorphie eine zusammenhängende 2-blättrige Überlagerung der punktierten Einheitskreisscheibe wie in 1.5.11 (i) mit k = 2: würde diese Abbildung in zwei einblättrige Überlagerungen zerfallen, so würde man aus φ_ξ durch Fortsetzen entlang der obigen Kreislinie wieder φ_ξ (und nicht $-\varphi_\xi$) erhalten.[75] Insbesondere besteht

$$\pi^{-1}(a_j)$$

aus genau einem Punkt.

(b) Beschreibung von π über dem Fernpunkt ∞.

Wir wählen eine reelle Zahl r mit

$$r > \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$$

und setzen

$$U^* := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$$

$$U := U^* \cup \{\infty\}$$

$$V^* := \pi^{-1}(U^*)$$

$$V := \pi^{-1}(U).$$

Dann ist U eine holomorphe Koordinatenumgebung von $\infty \in \mathbb{P}^1$, welche biholomorph zu einer Kreisscheibe um den Ursprung ist. Bezüglich geeigneter Koordinaten bekommt f auf U die Gestalt

$$f(z) = 1 / (\frac{1}{z} - a_1) \bullet \ldots \bullet (\frac{1}{z} - a_n)$$

$$= z^n \bullet F(z),$$

Dabei ist

---

[75] Man beachte, das Fortsetzen entlang einer Kurve ist dasselbe wie das Anheben dieser Kurve entlang π (nach 1.7.2).

$$F(z) = (1-a_1 z)^{-1} \bullet ... \bullet (1-a_n z)^{-1}$$

eine auf U holomorphe Funktion ohne Nullstellen U(d.h. wie oben ist F Quadrat einer wohldefinierten holomorphen Funktion auf U). Wir unterscheiden zwei Fälle.
1. Fall: n ungerade.
Dann gibt es eine holomorphe Funktion h: $U \longrightarrow \mathbb{P}^1$ mit

$$f(z) = z \bullet h(z)^2.$$

Wie im Fall (a) zeigt man, daß die Einschränkung π: $V^* \longrightarrow U^*$ eine zusammenhängende 2-blättrige Überlagerung ist , und daß über $\infty \in U$ genau ein Punkt von V liegt.
2. Fall: n gerade.
Dann gibt es eine holomorphe Funktion h: $U \longrightarrow \mathbb{P}^1$ mit

$$f(z) = h(z)^2.$$

Anders als im Fall n gerade zerfällt die Einschränkung π: $V^* \longrightarrow U^*$ in zwei 1-blättrige Überlagerungen, d.h. über $\infty \in U$ liegen zwei Punkte von V.

1.8.11 Eine Darstellung der Gruppe der Decktransformationen in der Automorphismen-Gruppe des meromorphen Funktionen-Körpers

Sei π: $Y \longrightarrow X$ eine holomorphe Überlagerung Riemannscher Flächen. Dann besitzt die Gruppe

$$Deck(Y/X)$$

eine Darstellung in der Automorphismen-Gruppe der Körpers $\mathcal{M}(Y)$ der meromorphen Funktionen auf Y, d.h. es gibt einen Gruppen-Homomorphismus

$$Deck(Y/X) \longrightarrow Aut(\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X)), \sigma \mapsto (f \mapsto \sigma(f)),$$

welcher wie folgt definiert ist. Für

$$\sigma \in Deck(Y/X) \text{ und } f \in \mathcal{M}(Y)$$

sei

$$\sigma(f) := f \circ \sigma^{-1}: Y \xrightarrow{\sigma^{-1}} Y \text{ - - - -> } \mathbb{C}.$$

Die Abbildung $f \mapsto \sigma(f)$ ist offensichlich ein Automorphismus des meromorphen Funktionen-Körpers.[76] Außerdem ist dies tatsächlich ein Gruppen-Homomorphismus, denn das Produkt zweier Elemente σ, $\tau \in Deck(Y/X)$ wird gerade in die Zusammensetzunbg der Bilder abgebildet:

$$(\sigma\tau)(f) = f \circ (\sigma\tau)^{-1} = f \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} = \sigma(\tau(f)).$$

Schließlich werden die Elemente des Teilkörpers $\pi^*\mathcal{M}(Y)$ in sich abgebildet, weil nach Definiton die Elemente von Deck(Y/X) fasertrue Abbildungen sind.

1.8.12 Algebraische Funktionen und Körper-Erweiterungen

Seien X eine Riemannsche Fläche,

$$K = \mathcal{M}(X)$$

deren meromorpher Funktionen-Körper und

$$P(T) \in K[T]$$

ein irreduzibles Polynom des Grades n mit dem höchsten Koeffizienten 1. Sei weiter

$$(Y, \pi, F)$$

---

[76] d.h. Summen und Produkte von zwe meromorphen Funktionen werden in die Summe bzw. ins Produkt der Bilder überführt.

die durch P(T) definierte algebraische Funktion und

$$L := \mathcal{M}(Y).$$

Dann gilt:

(i) L/K ist eine Körpererweiterung des Grades n, und es gilt

$$L \cong K[T]/(P(T)).$$

(ii) Jede Decktransformation σ: Y $\longrightarrow$ Y von π induziert einen Automorphismus

$$L \longrightarrow L,\ f \mapsto \sigma(f) := f\circ\sigma^{-1},$$

welcher die Elemente des Körpers K invariant läßt.

(iii) Der so definierte Gruppen-Homomorphismus

$$Deck(Y/X) \longrightarrow Aut(L/K),\ \sigma \mapsto (f \mapsto \sigma(f)),$$

ist ein Isomorphismus.

(iv) Die Überlagerung π: Y $\longrightarrow$ X ist genau dann eine Galois-Überlagerung, wenn L/K eine Galois-Erweiterung ist.

Beweis. Zu (i): Nach 1.8.3 ist L/K eine Körpererweiterung eines Grade $\leq$ n. Nach Konstruktion nimmt das Polynom $\pi^*(P)$ in allen Fasern von π, die keine Verzweigungspunkte enthalten n paarweise verschiedene Werte an. Auf Grund der Ergänung von 1.8.3 ist der Grad der Körpererweiterung gleich n,

$$[L:K] = n.$$

Wegen P(F) = 0, faktorisiert sich die Abbildung

$$K[T] \longrightarrow L,\ p(T) \mapsto p(F),$$

über K[T]/(P), induziert also einen Homomorphismus von K-Algebren

$$K[T]/(P) \longrightarrow L. \tag{1}$$

Weil P irreduzibel ist über K vom Grad n, ist K[T]/(P) ein Körper des Grades n über K. Die Abbildung (1) ist somit ein Isomorphismus.

Zu (ii). Nach 1.8.11 ist die Abbildung

$$Deck(Y/X) \longrightarrow Aut(L/K),\ \sigma \mapsto (f \mapsto \sigma(f)),$$

ein Gruppen-Homomorphismus. Nach Definition von (Y, π, F) gilt

$$\sigma(F) \neq \sigma'(F) \text{ für } \sigma \neq \sigma'$$

(vgl. 1.8.9), d.h. die Abbildung ist injektiv. Beweisen wir die Surjektivität. Sei

$$\alpha \in Aut(L/K)$$

vorgegeben. Dann ist

$$(Y, \pi, \alpha(F))$$

ebenfalls eine algebraische Funktion, die durch das Polynom P definiert wird.[77] Auf Grund der Eindeutigkeitsaussage von 1.8.9 gibt es eine Decktransformation

$$\tau \in Deck(Y/X)$$

mit

$$\alpha(F) = \tau^*F.$$

Mit $\sigma := \tau^{-1}$ gilt dann

$$\sigma(F) = F\circ\sigma^{-1} = F\circ\tau = \tau^*F = \alpha(F).$$

Die K-Automorphismen σ und α von L/K haben also an der Stelle F denselben Wert. Wegen L = K[F] (siehe oben), müssen sie dann aber auf ganz L übereinstimmen. Mit anderen Worten, α hat die Gestalt $f \mapsto \sigma(f)$ mit $\sigma \in Deck(Y/X)$.

QED.

[77] Mit F ist auch $\alpha(F)$ Nullstelle von P.

1.9. Differentialformen

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Differentialform auf einer Riemannschen Fläche ein. Dabei betrachten wir nicht nur holomorphe und meromorphe Differentialformen, sondern auch solche die nur im reellen Sinne differenzierbar sind.

1.9.1 Die Cauchy-Riemann-Differentialoperatoren

Sei U eine offene Teilmenge der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, welche wir hier mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren werden. Seien

$$x, y: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

die üblichen Koordinaten-Funktionen des $\mathbb{R}^2$ und sei

$$z := x + iy: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{E}(U)$$

die $\mathbb{C}$-Algebra der Funktionen $U \longrightarrow \mathbb{C}$, welche unendlich oft stetig differenzierbar sind bezüglich der reellen Koordinaten x und y. Neben den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial}{\partial y}$$

betrachten wir noch die Cauchy-Riemann-Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\bullet\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ und } \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\bullet\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Wie wir wissen, besagen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gerade, daß der Vektorraum

$\mathcal{O}(U)$

der holomorphen Funktionen auf U gerade der Kern der Abbildung

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}: \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$$

ist.

1.9.2 Glatte Funktionen auf Riemannschen Flächen

Den Begriff der differenzierbaren Funktion kann man mit Hilfe der komplexen Karten wie folgt auf eine Riemannsche Fläche X übertragen. Für jede offen Teilmenge

$$Y \subseteq X$$

bestehe

$$\mathcal{E}(Y)$$

aus allen Funktionen

$$f: Y \longrightarrow \mathbb{C},$$

mit folgender Eigenschaft. Für jede Karte $z: U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ mit $U \subseteq Y$ gibt es eine Funktion $\widetilde{f} \in \mathcal{E}(V)$ mit $f|_U = \widetilde{f} \circ z$. (die Funktion $\widetilde{f}$ ist dabei eindeutig festgelegt, weil z als biholomorphe Abbildung umkehrbar ist). Die Elemente von $\mathcal{E}(Y)$ heißen (komplexwertige) glatte Funktionen auf Y.

Zusammen mit den gewöhnlichen Einschränkungsabbildungen bilden die $\mathcal{E}(Y)$ eine Garben

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_X$$

auf X, welche Garbe der glatten Funktionen auf X heißt.

1.9.3 Partielle Ableitungen auf einer Koordinaten-Umgebung

Sei $z = x + iy: U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ eine Karte. Dann kann man in natürlicher Weise Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}: \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$$

definieren.

1.9.4 Mehrfache Nullstellen von glatten Funktionen

Seien X eine Riemannsche Fläche und $a \in X$ ein Punkt. Der Halm

$$\mathcal{E}_a$$

von $\mathcal{E}$ besteht aus allen Keimen glatter Funktionen im Punkt a. Wir bezeichnen mit

$$m_{X,a} = m_a \subseteq \mathcal{E}_a$$

den Unterraum aller glatten Funktionenkeime, welche in a eine Nullstelle besitzen, und mit

$$m_{X,a}^2 = m_a^2 \subseteq \mathcal{E}_a$$

den Vektorraum aller Funktionenkeime, welche in a eine mehrfache Nullstelle besitzen. Dabei sagt man, ein Keim

$$\varphi \in m_a$$

besitzt eine mehrfache Nullstelle, wenn es einen Repräsentanten f von φ gibt mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0.$$

bezüglich einer komplexen Karte $z = x + iy: U \longrightarrow V$ von X mit $a \in U$. Diese Bedingung hängt nich von der speziellen Wahl der Karte ab.

1.9.5 Definition: Kotangentialraum

Seien X eine Riemannsche Fläche und $a \in X$ ein Punkt. Dann heißt

$$T_{X,a}^{(1)} = T_a^{(1)} := m_{X,a}/m_{X,a}^2$$

Kotangentialraum von X im Punkt a.

Seien $U \subseteq X$ eine offene Umgebung von $a \in X$ und $f \in \mathcal{E}(U)$ eine glatte Funktion auf U. Dann heißt das Element

$$d_a f := (f - f(a))|_a \bmod m_a^2 \in T_a^{(1)}$$

Differential von f im Punkt a. Man beachte, der Keim der Funktion f - f(a) im Punkt a hat in a eine Nullstelle, repräsentiert also ein Element

$$(f - f(a))|_a \in m_a .$$

1.9.6 Basen des Kotangentialraums

Seien X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$ ein Punkt und $z. U \longrightarrow V$ eine Karte von X mit $a \in U$. Wir betrachten die Zerlegung

$$z = x + iy$$

in Real- und Imaginärteil. Die Differentiale

$$d_a x \text{ und } d_a y$$

bzw.

$$d_a z \text{ und } d_a \overline{z}$$

bilden dann eine Basis des reellen Vektorraums $T^{(1)}_{X,a}$. Für jede in einer Umgebung von a definierte glatte Funktion f gilt

$$d_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \bullet d_a x + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \bullet d_a y = \frac{\partial f}{\partial z}(a) \bullet d_a z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) \bullet d_a \bar{z} .$$

Beweis.
QED.

1.10 Integrierbare Differentialformen

1.11 Lineare Differentialgleichungen

2. Kompakte Riemannsche Flächen

3. Nicht-kompakte Riemannsche Flächen

Anhang

A. Zerlegung der Eins

B. Topologische Vektorräume

Literatur

1. Funktionentheorie einer Variablen

1. Ahlfors, L.V.: Complex Analysis, McGraw-Hill, New York 1966
2. Behnke, H., Sommer, F.: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Springer, Berlin 1965.
3. Cartan, H.: Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexer Veränderlicher, Bibliographisches Institut, Mannheim 1966 [Übersetzung ins Russische: Картан, А.: Элементарная теория аналитическиш функ ij одного и несколхкиш комплексныш переменныш, ИЛ, Москва 1963]
4. Diedrich, K., Remmert, R.: Funktionentheorie I, Springer, Berlin 1972
5. Hurwitz, A., Courant, R.: Funktionentheorie. Mit einem Anhang von H. Röhrl, Springer, Berlin 1964 [Übersetzung ins Russische: Гурви , А., Курант, Р.: Теори Функ ij, Наука, Москва 1968]

2. Riemannsche Flächen

3 Funktionentheorie mehrerer Variablen

4. Topologie, differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Funktionalanalysis

5 Spezielle Themen

Index

—A—

Abbildung
  abgeschlossene, 46
  biholomorphe, 7
  diskrete, 29
  eigentliche, 46
  fasertreue, 29
  holomorphe, kritische Werte einer, 48

holomorphe, Vielfachheit der Wertannahme, 13
holomorphe, von Riemannschen Flächen, 7
offene, 13
abgeschlossene Abbildug, 46
algebraische Funktion, 77
algebraische Funktion, 88
analytische Fortsetzung, 70
analytische Fortsetzung eines holomorphen Keims, 73
Anfangspunkt einer Kurve, 16
Anhebung entlang einer Überlagerung, 32
Anzahl der Blätter einer eigentlichen holomorphen Überlagerung, 48
Aquivalent modulo einer Gruppe von Decktransformationen, 58

—Ä—

Äquivalenz modulo eines Gitters, 5

—A—

Atlas einer Mannigfaltigkeit, 3

—B—

biholomorphe Abbildung, 7
Blätter
Anzahl, einer eigentlichen holomorphen Überlagerung, 48

—D—

Decktransformation, 54
Deformation von Kurven, 17
Differential
einer glatten Funktion in einem Punkt, 97
diskrete Abbildung, 29
diskrete Teilmenge, 29
doppeltperiodische Funktion, 15

—E—

eigentliche Abbildung, 46
Eindeutigkeitssatz, 69
elementarsymmetrische Funktion
bezüglich einer Überlagerung, 78
Endpunkt einer Kurve, 16
erste Homotopie-Gruppe, 22
Etal-Raum einer Prägarbe, 68

—F—

Faser einer Abbildung, 29
fasertreue Abbildung, 29
Fläche
Riemannsche, 4
Fortsetung
maximale analytische, 74
Fortsetzung
analytische, 70
analytische, eines holomorphen Keims, 73
frei homotope Kurven, 25
fundamentale Gruppe, 22
Funktion
algebraische, 77; 88
doppeltperiodische, 15
glatte, auf einer Riemannschen Fläche, 96
glatte, Garbe der, 96
holomorphe, 7
meromorphe, 9

—G—

G-äquivalent, 58
Garbe
der glatten Funktionen, 96
Gebiet über einer Riemannschen Fläche, 30
geschlossene Kurve, 22
Gitter, 5
Äquivalenz modulo eines, 5
glatte Funktion
auf einer Riemannschen Fläche, 96
Garbe der, 96
Gruppe
erste Homotopie-Gruppe, 22
fundamentale, 22

—H—

Halm einer Prägarbe in einem Punkt, 66
holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen, 7
holomorphe Funktion, 7
holomorphe Verträglichkeit
von Atlanten, 3
von Karten, 3
Homöomoprhismus
lokaler, 30
homotop
frei homotope Kurven, 25
Homotopie von Kurven, 17
Homotopie-Gruppe
erste, 22

—I—

inverse Kurve, 19
Isomorphie von Riemannschen Flächen, 7

—K—

Karte, 3
Karte einer Riemannschen Fläche, 4
Keim
holomorpher, analytische Fortsetzung eines, 73
Keim eines Schnittes, 66
kompakt
lokal kompakter Raum, 46
komplexe Struktur auf einer Mannigfaltigkeit, 3
komplexer Atlas, 3
komplexer Torus, 6
Komposition von Kurven, 19
konstante Kurve, 20
Koordinaten-Umgebung, 3
Kotangentialraum

an eine Riemannsche Fläche in einem Punkt, 97
kritischer Wert einer holomorphen Abbildung, 48
Kurve
Anfangspunkt einer, 16
Deformation von Kurven, 17
eines topologischen Raums, 16
Endpunkt einer, 16
geschlossene, 22
Homotopie von Kurven, 17
inverse, 19
Komposition von Kurven, 19
konstante, 20
null-homotope, 22
triviale, 20
unbeschränkt fortsetzbare, 73
Kurven
frei homotope, 25

—L—

liegt über, 29
Lift, 32
Liftungseigenschaft für Kurven, 39
linear zusammenhängend, 16
lokal kompakter Raum, 46
lokal linear zusammenhängend, 16
lokaler Homöomoprhismus, 30

—M—

Mannigfaltigkeit, 3
maximale analytische Fortsetzung, 74
mehrdeutige holomorphe Funktion, 30
mehrfache Nullstelle
einer glatten Funktion, 97
Menge
diskrete, 29
Stern-, 24
meromorphe Funktion, 9

—N—

null-homotope Kurve, 22
Nullstelle
mehrfache, einer glatten Funktion, 97

—O—

offen, 5
offene Abbildung, 13

—P—

Pol
einer meromorphen Funktion, 9
Prägarbe
Etal-Raum einer, 68
Prägarbe, 63
Projektion, 29
Punkt
Verzweigungspunkt, 30

—R—

Raum
lokal kompakter, 46
Restriktion einer Prägarbe, 64
Riemannsche Fläche
Isomorphie von, 7
Karte einer, 4
Riemannsche Fläche, 4
Riemannsche Zahlenkugel, 5
Standard-Karte der, 5

—S—

Schnitt einer Prägarbe, 64
Standard-Karte der Zahlenkugel, 5
Stern-Menge, 24
Struktur
komplexe, einer Riemannschen Fläche, 3
Symmetrie, 18

—T—

Torus
komplexer, 6
triviale Kurve, 20

—Ü—

Überlagerung
unbeschränkt unverzweigte, 38
unverzweigt, 30
verzweigte, 30
Überlagerung, 29
Überlagerungsabbildung, 29

—U—

Umgebung
Koordinaten-, 3
Umgebungsbasis, 16
unbeschränkt fortsetzbare Kurve, 73
unbeschränkt unverzweigte Überlagerung, 38
unverzweigte Überlagerung, 30

—V—

Verbinden zweier Punkte durch eine Kurve, 16
Verbindungsstrecke, 24
Verpflanzung, 8
Verträglichkeit
holomorphe, von Atlanten, 3
holomorphe, von Karten, 3
verzweigte Überlagerung, 30
Verzweigungsindex
einer holomorphen Abbildung, 13
Verzweigungspunkt, 30
Vielfachheit
der Wertannahme, 48
der Wertannahme einer holomorphen Abbildung, 13
der Wertannahme in einem Punkt, 48

—W—

wegeweise zusammenhängend, 16
Wert
  kritischer, einer holomorphen Abbildung, 48
Wertannahme
  Vielfachheit in einem Punkt, 48
Werte einer mehrdeutigen Funktion in einem Punkt, 30

—Z—

Zahlenkugel
  Riemannsche, 5
  Riemannsche, Standard-Karte der, 5
zusammenhängend, 4
  linear, 16
  lokal linear, 16
  wegeweise, 16
zusammenhängender Topologischer Raum, 4

Inhalt

FUNKTIONENTHEORIE II 1

BEZEICHNUNGEN 1

1. ÜBERLAGERUNGEN 2

1.1 Definition der Riemannschen Flächen 3
1.1.1 Mannigfaltigkeiten und Atlanten 3
1.1.2 Holomorph verträgliche Karten und komplexe Atlanten 3
1.1.3 Komplexe Strukturen 3
1.1.4 Riemannsche Flächen 4
1.1.5 Beispiele für Riemannsche Flächen 4
1.1.6 Definition: Holomorphe Funktionen 6
1.1.7 Bemerkungen zum Begriff der holomorphen Funktion 7
1.1.8 Satz von Riemann über die hebbaren Lücken 7
1.1.9 Holomorphe Abbildungen 7
1.1.10 Eindeutigkeitssatz 8
1.1.11 Definition: Meromorphe Funktionen 9
1.1.12 Beispiel 10
1.1.13 Meromorphe Funktionen als holomorphe Abbildungen mit Werten in P^1 10
1.1.14 Folgerung 11

1.2 Elementare Eigenschaften holomorpher Abbildungen 11
1.2.1 Die lokale Gestalt der holomorphen Abbildungen 11
1.2.2 Beispiel 13
1.2.3 Folgerung 13
1.2.4 Folgerung 13
1.2.5 Maximum-Prinzip 13
1.2.6 Holomorphe Abbildungen auf kompakten Riemannschen Flächen 14
1.2.7 Holomorphe Funktionen auf kompakten Riemannschen Flächen 14
1.2.8 Meromorphe Funktionen der Zahlenkugel 14
1.2.9 Satz von Liouville 14
1.210 Fundamentalsatz der Algebra 15
1.2.11 Doppelt periodische Funktionen 15
1.2.12 Die Werte der doppeltperiodischen Funktionen 15

1.3 Homotopie von Kurven, fundamentale Gruppe 16
1.3.1 Kurven 16
1.3.2 Zusammenhang 16
1.3.3 Homotope Kurven 16
1.3.4 Homotopie als Äquivalenz-Relation 18
1.3.5 Beispiel 18

1.3.6 Komposition von Kurven 18
1.3.7 Die triviale Kurve in einem Punkt 20
1.3.8 Die Gruppen-Eigenschaften bis auf Homotopie 20
1.3.9 Geschlossene Kurven 22
1.3.10 Konstruktion 22
1.3.11 Die Abhängigkeit vom Basispunkt 22
1.3.12 Einfacher Zusammenhang 23
1.3.13 Homotopie von Kurven in einfach zusammenhängenden Räumen 23
1.3.14 Beispiele 24
1.3.15 Freie Homotopie 25
1.3.16 Einfacher Zusammenhang und freie Homotopie 27
1.3.17 Funktorielle Eigenschaften 28

1.4 Verzweigte und unverzweigte Überlagerungen 29
1.4.1 Diskrete Teilmengen und Abbildungen 29
1.4.2 Begriff der Überlagerung 29
1.4.3 Beipiel: holomorphe Abbildungen 29
1.4.4 Bezeichnungen 30
1.4.5 Verzweigung 30
1.4.6 Kriterium für unverzweigte Überlagerungen 30
1.4.7 Beispiele 31
1.4.8 Übertragung der komplexen Struktur mit Hilfe von Überlagerungen 32
1.4.9 Anhebungen (Lifts) von Abbildungen 32
1.4.10 Eindeutigkeit der Anhebung 33
1.4.11 Holomorphie von Anhebungen 34
1.4.12 Folgerung: Holomorphie fasertreuer Abbildungen 34
1.4.13 Anhebung von Kurven 35
1.4.14 Homotopie der Anhebungen homotoper Kurven 35
1.4.15 Unbeschränkt unverzweigte Überlagerungen 37
1.4.16 Beispiele 38
1.4.17 Die Liftungseigenschaft für Kurven 39
1.4.18 Die Existenz von Anhebungen 40
1.4.19 Die Anhebung 0-homotoper Kurven 41
1.4.20 Die Fasern von unbeschränkt unverzweigten Überlagerungen 41
1.4.21 Existenz und Eindeutigkeit von Anhebungen stetiger Abbildungen 42
1.4.22 Beispiel (die Logarithmus-Funktion) 44
1.4.23 Unbeschränktheit von Überlagerungen und Liftungseigenschaft 45
1.4.24 Eigentliche Abbildungen 46
1.4.25 Eigenschaften eigentlicher Überlagerungen 47
1.4.26 Kriterium für unbeschränkt unverzweigte Überlagerungen 47
1.4.27 Der Fall eigentlicher holomorpher Abbildungen 48
1.4.28 Vielfachheit der Wertannahme eigentlicher holomorpher Abbildungen 49
1.4.29 Vergleich von Polstellen- und Nullstellen-Gesamtordnung 49
1.4.30 Nullstellenzahl von Polynomen 49

1.5 Universelle Überlagerungen, Decktransformationen 50
1.5.1 Definition 50
1.5.2 Kriterium für die Universalität einer Überlagerung 50
1.5.3 Existenz Universeller Überlagerungen 51
1.5.4 Begriff der Decktransformation 54
1.5.5 Galois-Überlagerungen 55
1.5.6 Die universelle Überlagerung und Galois-Überlagerungen 55
1.5.7 Beispiele 57
1.5.8 Folgerung 58
1.5.9 Äquivalente Punkte bezüglich einer Untergruppe 58
1.5.10 Unbeschränkt unverzweigten Überlagerungen und Gruppen von Decktransformationen 58
1.5.11 Die unverzweigten Überlagerungen der punktierten Einheitskreisscheibe 61
1.5.12 Die nur im Ursprung verzweigten Überlagerungen der Einheitskreisscheibe 62

1.6 Garben **63**
1.6.1 Definition 63
1.6.2 Beispiel 64
1.6.3 Definition 64
1.6.4 Beispiele 65
1.6.5 Der Halm einer Prägarbe in einem Punkt 66
1.6.6 Das Verschwinden von Schnitten und von Keimen 67
1.6.7 Der Etal-Raum einer Prägarbe 68
1.6.8 Die Topologie des Etal-Raums 68
1.6.9 Definition 69
1.6.10 Ein Kriterium für die Hausdorff-Eigenschaft des Etal-Raums 69

1.7 Analytische Fortsetzungen **69**
1.7.1 Definition: analytische Fortsetzung 69
1.7.2 Analytische Fortsetzung und Etalraum 70
1.7.3 Monodromie-Satz 72
1.7.4 Unbeschränkt fortsetzbare Keime 73
1.7.5 Definition: analytische Fortsetzung 73
1.7.6 Globale und lokale analytische Fortsetungen 74
1.7.7 Existenz maximaler analytischer Fortsetzungen 75

1.8 Algebraische Funktionen **77**
1.8.1 Elementarsymmetrische Funktionen 77
1.8.2 Elementarsymmetrische Funktionen im verzweigten Fall 78
1.8.3 Vergleich der meromorphen Funktionenkörper für eigentliche Überlagerungen 80
1.8.4 Fortsetzung eigentlicher unverzweigter Überlagerungen 81
1.8.5 Eindeutigkeit der Fortsetzung 84
1.8.6 Verzweigte Galois-Überlagerungen 86
1.8.7 Auflösungssatz für algebraische Funktionen 86
1.8.8 Linearzerlegung von Polynomen mit holomorphen Koeffizienten 87
1.8.9 Die Existenz der Riemannschen Fläche zu einer algebraischen Gleichung 88
1.8.10 Beispiel 91
1.8.11 Eine Darstellung der Gruppe der Decktransformationen in der Automorphismen-Gruppe des meromorphen Funktionen-Körpers 94
1.8.12 Algebraische Funktionen und Körper-Erweiterungen 94

1.9. Differentialformen **96**
1.9.1 Die Cauchy-Riemann-Differentialoperatoren 96
1.9.2 Glatte Funktionen auf Riemannschen Flächen 96
1.9.3 Partielle Ableitungen auf einer Koordinaten-Umgebung 97
1.9.4 Mehrfache Nullstellen von glatten Funktionen 97
1.9.5 Definition: Kotangentialraum 97
1.9.6 Basen des Kotangentialraums 97

1.10 Integrierbare Differentialformen **98**

1.11 Lineare Differentialgleichungen **98**

2. KOMPAKTE RIEMANNSCHE FLÄCHEN **98**

3. NICHT-KOMPAKTE RIEMANNSCHE FLÄCHEN **98**

ANHANG **98**

A. Zerlegung der Eins **98**

B. Topologische Vektorräume **98**

LITERATUR **98**

1. Funktionentheorie einer Variablen **98**

2. Riemannsche Flächen **98**

3 Funktionentheorie mehrerer Variablen **98**

4. Topologie, differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Funktionalanalysis **98**

5 Spezielle Themen **98**

INDEX **98**

INHALT **101**