Introduction to Arakelov theory

1. A short historical introduction to intersection theory

Intersection theory is a very old mathematical discipline. The statement that a line intersects a conic in two points is a statement of intersection theory and goes back to the old Greeks. The following generalization was an essential step in the theory and is due to Newton(1643-1727) and Bezout (1739-1783).

Theorem of Bezout
Any two different irreducible algebraic curves in projective plane of degrees a and b, respectively, intersect in $a\cdot b$ points counted with multiplicities.

To be precise:
For any two different plane curves given by irrreducible polynomials

$$f(x, y) = 0$$

and

$$g(x, y) = 0$$

of degrees a and b the number of intersection points is $a\cdot b$ (counted with multiplicities and taking into account the points at infinity).

The considerations below are valid over an algebraically closed field

$$k = \bar{k}.$$

for example $k = \mathbb{C}$.

Proof. After a linear (projective) transformation we may assume that all points of intersection are in the finite part of the plane and the that the x-coordinates of the any two different intersection points are different. Therefore, to find these x-coordinates, we are reduced to find the values $x = c$ such that the system

$$f(c, y) = g(c, y) = 0$$

has a solution. For this purpose we need a criterion for two one-variable polynomials to have common zero.

<u>1. Step</u>. Two polynomials $f,g\in k[T]$ have a common zero, iff there are polynomial $s,t\in k[T]$ such that

$$s\cdot f + t\cdot g = 0, \deg s < \deg g \text{ and } \deg t < \deg f.$$

Trivially

$$(-g)\cdot f + f\cdot g = 0.$$

If f and g have a common zero, say $z\in k$, then $T-z$ is a common factor of f and g, and the above identity can be devided by $T-z$. We obtain

$$s\cdot f+t\cdot g = 0 \text{ with } s := (-g)/(T-z) \text{ and } t := f/(T-z)$$

as required. To prove the converse, consider the identity

$$s\cdot f = - t\cdot g$$

and decompose s, f, t, and g into products of linear polynomial. For degree reasons, the number of linear factors for g is less than those for s. The uniqueness of the decomposition implies that at least one factor occuring in the decomposition of g must occure in the decomposition of f. Hence f and g have a common zero.

Note that the identity $s\cdot f + t\cdot g = 0$ can be considered as a linear relation for the coefficients of s and t. This gives the assertion of the

<u>2. Step</u>. Two polynomials $f,g\in k[T]$ of degrees a and b, respectively, have a common zero, if

(*) $$x^{b-1}f,\ x^{b-2}f,\ \dots,\ xf,\ f,\ x^{a-1}g,\ x^{a-2}g,\ \dots,\ xg,\ g$$

are linearly independent over k.

This is just a translation of the assertion of step 1 (write s as a linear combination of x^{a-1}, x^{a-2} , ... , 1 and t as one of x^{b-1}, x^{b-2} , ... , 1).

Linear depencecy can be expressed in terms of determinants. This gives the assertion of the next step.

<u>3. Step</u>. Two polynomials $f,g\in k[T]$ of degrees a and b, respectively,

$$f(T) := f_0+f_1T+\dots+f_aT^a,\ f_a \neq 0,$$

$$g(T) := g_0+g_1T+\dots+g_bT^b,\ g_b \neq 0,$$

have a common zero, iff the determinant below, called resultant of f and g, is zero.

$$\mathrm{Res}(f,g) := \det\begin{pmatrix} f_a & f_{a-1} & \cdots & f_0 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & f_a & f_{a-1} & \cdots & f_0 & 0\ \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & \cdots & 0 & f_a & f_{a-1} & \cdots\ f_0 \\ g_b & g_{b-1} & \cdots & g_0 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & g_b & \cdots & & & \end{pmatrix}$$

Note that the coefficients of f fill the first b = deg g rows of the matrix and the the coefficients of g fill the last a = deg f rows, so that the matrix on the right is an $(a+b)\times(a+b)$ matrix.

The assertion follows from the previous step taking into account that the rows of the matrix are the coordinates of the vectors (*) with respect to the basis $x^{a+b-1}, x^{a+b-2}, \dots, 1$.

<u>4. Step</u>. Proof of Bezout's theorem.

Consider the given polynomials f(x,y) and g(x,y) as polynomials in the single variable y and form their resultant

$$r(x) := \mathrm{Res}_y(f,g).$$

Then, by the previous step, the curves

$$f = 0 \text{ and } g = 0$$

intersect in a point with x-coordinate c iff $r(c) = 0$. Thus the number of intersection points is equal to the number of zeros of r. The claim now follows from the fact that r is a polynomial of degree $a\cdot b$: using the above notation one has

$$\mathrm{Res}(f,g) = (f_a)^b\cdot(g_0)^a + \dots$$

Using projective coordinates, this is a homogeneous polynomial, with f_i being homogeneous of degree a-i and g_j being homogeneous of degree b - j.

QED.

Intersection multiplicities

The above proof gives a vague idea of which way one has to interprete the term "counted with multiplicities". In the special case of algebraic plane curves one would have to prove that the multiplicity of the root of $Res_y(f,g)$ associated with a given intersection point p of the curves is indepentend upon the choise of the coordinate system. Then one could define this multiplicity to be the <u>local intersection multiplicity</u> of the curve at the point p. More general there arises the problem to define the intersection multiplicity of two algebraic varieties

$$X, Y \subseteq Z := \mathcal{P}^n$$

in, say, projecitive n-space along a component of $X \cap Y$. This has turned out to be a rather difficult problem which was solved only the 20 th century, see [A. Weil, Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc., Colloquium Publ. 29, 1946]. Weil established a system of axioms, a reasonable multiplicity theory should satisfy and proved that there is a well-defined local intersection number satisfying these axioms.

In fact this can be done for Z an arbitrary none-singular proper scheme over a field.

In 1965 J.-P. Serre established an explicide formula for the local intersection number involving homological algebra: the intersection number of X and Y along the component C is equal to

$$i(X,Y,C) = \sum_{i=0}^{\dim Z} (-1)^i \operatorname{length}_{O_{Z,C}} \operatorname{Tor}_i^{O_{Z,C}}(O_{X,C}, O_{Y,C}),$$

provided the intersection is proper along C, i.e.

$$\operatorname{codim}_Z C = \operatorname{codim}_Z X + \operatorname{codim}_Z Y$$

(see [J.-P. Serre: Algèbre locale - multiplicités, Springer LN 11(1965)]).

The theory culminates in the definition of an associative symmetric bilinear form

$$CH^p(Z) \times CH^q(Z) \to CH^{p+q}(Z)$$

on the Chow ring of a proper none-singular variety Z, such that the theorem of Riemann-Roch hold to be true (see [Fulton: Intersection theory, Springer 1984]).

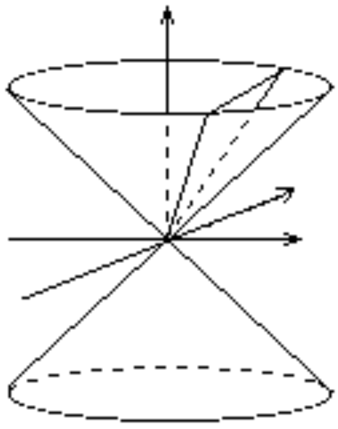
Remarks concerning the none-proper case.

(i) From the very beginning it is obvious that the embedding space Z must be compact if one wants to get a reasonable intersection theory (get some kind of Bezout's theorem). For none-proper space there are always lacks due to intersection points at infinity.

(ii) Formally everything can be done for none-proper varieties, but the resulting Chow groups degeneraty in the none-proper case (and may be even trivial).

Remarks concerning singular spaces.

Very simple examples show that the intersection numbers on singular spaces cannot be integral in general. For example, let Z be a cone.



Any straight line ℓ througt the vertex p intersects any conic on Z in a single point. In particular, the intersection number of ℓ with a pair a straight lines throught the vertex should be 1,

$$i(\ell, 2\ell; p) = 1.$$

By linearity,

$$i(\ell, \ell; p) = \frac{1}{2}.$$

In general, the intersection pairing for singular varieties cannot be defined on the integral Chow ring: the best we can get is one over the rational Chow ring,

$$CH^p(Z)_{\mathbb{Q}} \times CH^q(Z)_{\mathbb{Q}} \to CH^{p+q}(Z)_{\mathbb{Q}}$$

The Aim of these lectures

is to generalize intersection theory to schemes defined over $\mathbb{Z}$ in the easiest case, i.e. to proper smooth morphisms

$$\pi: X \to B := \text{Spec } \mathbb{Z}$$

of relative dimension 1.

In fact we will weaken our assumptions such that we cover a situation which occurs very often in number theory.

The situation

The base scheme B will be assumed to be of type

$$B = \text{Spec } \mathcal{O}$$

where $\mathcal{O}$ is the ring of integers of an algebraic number field. The smoothness assumption will be weakened to the assumption that

X is none-singular with geometrically irreducible none-singular generic fiber and has stable fibers,i.e., the only singularities of the fibers are ordinary double points.

Example

Given a none-singular curve geometrically irreducible X over an algebraic number field K with ring of integers $\mathcal{O}$, there is - in lucky cases - the socalled <u>semi-stable reduction</u>,

$$\pi: V \to B := \text{Spec } \mathcal{O},$$

of X/K obtained choosing equations of X with coefficients in $\mathcal{O}$. For the semi-simple reduction, these equations can be choosen in such a way that the conditions above are satisfied. For results on the existence of the semi-simple reduction see:

[Silverman, J.: The arithmetic of elliptic curves],

[Deligne, P., Mumford, D.: The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ. Math. IHES 36 (1969)75-110].

[Bosch, Little-Bomad, Reneaux: Neron-Models]

Subexample

Consider the plane algebraic curve

$$C: y^2 = x(x-3)(x-5).$$

The polynomial on the right has no multiple roots, hence the curve is none-singulur of genus 1. Modulo 2, 3 or 5 the situation is different: there occure roots of multiplicity 2 corresponding to ordinary douple points. In other words, if C is considered as scheme over $\mathbb{Z}$, the structural morphism

$$C \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$$

has singular fibers over the closed points (2), (3), (5)$\in$Spec $\mathbb{Z}$.

In general the best one can achieve is multiplicative redurction passing to a finite extension field of $\mathbb{Q}$ (in the case of elliptic curves), i.e. the fibers of the structural morphism have at most cusp singularities.

Our basic literature

Arakelov, S.: An intersection theory for divisors on an arithmetic surface, Izv. Akad. Nauk 38 (1974), 1179-1192

Faltings, G.: Calculus on arithmetic surfaces, Annals of Math. 119 (1984) 387-424

The lectures can be considered as a preparation for the study of the theory for arbitrary dimensions as in the book

[Soulé, C., Abramovich, D., Burnol, J.-F., K Lectures on Arakelov geometry]

2. Arakelov’s work on intersection theory

2.1 Definitionen

2.1.1 Die Situation

K algebraischer Zahlkörper

Λ Ringe der ganzen Zahlen von K

S := Spec Λ

X glatte vollständige geometrisch irreduzible Kurve über dem Körper K

∞ eine unendliche Primstelle von K, d.h. eine Einbettung K $\to$C von K in die komplexen Zahlen. Es gibt somit n := [K:Q] solche Primstellen. Manchmal bezeichnen wir mit $\sum_\infty$ die Summe über alle diese unendlichen Primstellen.

X_∞ := X$\otimes$C, wobei das Tensorprodukt bezüglich der gegebenen Einbettung ∞ genommen wird.

S_{fin} := S - {(0)} Menge der endlichen Primstellen von K

S_{inf} := Menge der unendlichen Primstellen von K (s.u.)

$f:V \to S$ glattes vollständiges Model von X über den ganzen Zahlen Λ.

Bemerkung

Der Begriff "Model" ist etwas vage, seine Verwendung in der Literatur nicht ganz einheitlich. Wir halten hier deshalb etwas detailierter fest, welches genau unsere Annahmen sein sollen.

$f:V \to S$ ist ein projectiver Morphismus regulärer K-Schemata und K ist algebraisch abgeschlossen in K(X).

(vgl. Chinburg, T.: An Introduction to Arakelov Intersection Theory, in Cornell, G., Silverman, J.: Arithmetic geometry, Springer 1986):

Voraussetzung: K ist algebraisch abgeschlossen in K(X).

Faltings setzt voraus, daß V eine halbstabile Kurve über S ist und daß die generische Faser glatt ist und geometrisch irreduzibel,

(vgl. auch das Theorem §4 bei Arakelov: $V \to S$ sollte ein stabiles Model einer Kurve über K sein, als Fasern treten nur Kurven mit einfachen Doppelpunkten auf):

Voraussetzung: V ist glatt, die allgemeine Faser von f ist vollständig, glatt und geometrisch irreduzibel. Als einzige Singularitäten der speziellen Fasern von f sind gewöhnliche Doppelpunkte erlaubt.

Die nachfolgenden Bemerkungen beschreiben, wie man diese Vorausetzungen, ausgehend von der Kurve X realisieren kann.

Bemerkungen

(i) Man wähle eine endliche affine offene Überdeckung von X mit der Eigenschaft,, daß die Gleichungen von X in jeder dieser Überdeckungen Koeffizienten aus K besitzen. Eine solche Überdeckung existiert, da X über K definiert sein soll.

(ii) Dann multipliziere man diese Gleichungen so mit von Null verschiedenen Elementen aus K, daß die Koeffizienten sogar in Λ liegen. Man kann zeigen, die so entstehenden affinen Schemata lassen sich so einrichten, daß man sie zu einen vollständigen Λ-Schema verheften kann.

(iii) Genauer: da X eine projektive Kurve ist (da eindimensional und vollständig), gibt es eine offene, affine, dicht liegende Teilmenge U von X mit der Eigenschaft, daß im Komplement von U keine ganze Komponente von X liegt.[1] Durch U (und deren Einbettung in einen projetiven Raum P^N_K) ist damit bereits die gesamte Kurve X festgelegt. Durch Übergang zu Gleichungen mit Koeffizienten in Λ und durch Abschließen im $\mathbb{P}^N_\Lambda = \mathbb{P}^N_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ erhalten wir ein projektives Λ-Schema

$$f:V \to S := \mathrm{Spec}\,\Lambda.$$

Die allgemeine Faser dieses Schemas über Λ ist nach Konstruktion gleich X und damit glatt und geometrisch irreduzibel.

[1] Die Konstruktion funktioniert an dieser Stelle ohne die Annahme, daß X (geometrisch) irreduzibel sein soll.

(iii) (a). Wir entfernen alle Komponenten, die die allgemeine Faser nicht schneiden und erreichen so, daß V irreduzibel wird. Es gilt ´dann

$$\dim V = \dim S + \dim X = 1 + 1 = 2.$$

Alle Fasern von f sind eindimensional,

$$\dim\ f^{-1}(p) = 1 \text{ für jedes } p \in \operatorname{Spec} \Lambda.$$

(iii) (b). Durch Auflösen der Singularitäten erreichen wir, daß V glatt ist. Da die allgemeine Faser bereits von Anfang an glatt war, ändert sie sich nicht beim Auflösungsprozess (der im Aufblasen von Kurven und Punkten besteht, die ganz im singulären Ort von V liegen).

(iii) (c). Da die allgemeine Faser von f glatt ist (und S = Spec Λ quasi-kompakt und eindimensional), gibt es nur endlich viele Fasern von f, welche Singularitäten besitzen. Jede dieser Fasern ist 1-dimensional, hat also nur endlich viele singuläre Punkte. Durch Aufblasen erreichen wir, daß diese Punkte höchstens gewöhnliche Doppelpunkte werden.

(iv) Nach Konstruktion ist die allgemeine Faser von f irreduzibel und glatt. Endlich viele Fasern können jedoch reduzibel sein.

2.1.2 Divisoren

Ein <u>endlicher Divisor</u> auf V ist ein Divisor im gewöhnlichen Sinne des Wortes:

$$D_{fin} = \sum_i k_i C_i$$

mit endlich vielen ganzen Zahlen $k_i \in Z$ und irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen $C_i \subseteq V$ der Kodimension 1.

Die Kurven X_∞ werden wir als Fasern des Morphismus $f\colon V \to S = \operatorname{Spec} \Lambda$ auffassen in den unendlich fernen Punkten $\infty \in S_{inf}$. Wir werden sie auch <u>unendlich ferne Komponenten</u> nennen. Nach Definition können diese Komponenten in einem <u>Divisor</u> mit reellen Koeffizienten auftreten:

$$D = \sum_i k_i C_i + \sum_\infty \lambda_\infty X_\infty = D_{fin} + D_{inf}$$

mit endlich vielen $k_i \in Z$ und reellen $\lambda_\infty \in R$. Man beachte, die Anzahl der unendlichen Primstellen ∞ ist endlich (= [K:ℚ]) Die Divisoren dieser Art bilden eine Gruppe, die wir mit

$$\operatorname{Div}^\wedge(V)$$

bezeichnen.

2.1.3 Divisoren auf dem Basis-Schema S = Spec (Λ)

Man kann außerdem noch die Gruppe

$$\operatorname{Div}^\wedge(K)$$

betrachten. Das ist die Gruppe der Divisoren der Gestalt

$$d = \sum_p m_p \cdot p + \sum_\infty \lambda_\infty \cdot \infty \quad ,$$

wobei p die endlichen Primstellen von K durchläuft, ∞ die unendlichen Primstellen, m_p ganz ist und λ_∞ reell, und die Anzahl der von Null verschiedenen Summanden endlich ist.

$p \in S_{fin}$, $\infty \in S_{inf}$, $m_p \in Z$, $\lambda_\infty \in R$, endlich viele Summanden.

Ein Hauptdivisor dieser Gruppe ist definiert als ein Divisor der Gestalt

$$\operatorname{div}^\wedge(\alpha) := \sum_p v_p(\alpha)\cdot p + \sum_\infty (-\log|\alpha|_\infty)\cdot\infty$$

mit $\alpha \in K$. Dabei bezeichne $v_p(\alpha)$ die Ordnung von α bezüglich des Primideals p,

$v_p(\alpha) := \sup \{ n \in N \cup \{0\} \mid \alpha \in p^n \}$ für $\alpha \in \Lambda$.

$v_p(\alpha) := v_p(u) - v_p(u)$ falls $\alpha = u/v$ mit $u, v \in \Lambda$.

Weiter schreiben wir

$$|\alpha|_\infty := |\infty(\alpha)|$$

für den Absolutbetrag des Bildes von α in C bei der Einbettung ∞. Man beachte, die endlichen Koeffizienten des Divisors lassen sich als negative Logarithmen des p-adischen (multiplikativen) Werts

$$|\alpha|_p = \#(\Lambda/p)^{-v_p(\alpha)}$$

(bezüglich der Basis $\#(\Lambda/p)$ auffassen):

$$v_p(\alpha) = -\log|\alpha|_p / \log\#(\Lambda/p).$$

Die Gruppe der Hauptdivisoren von K wird mit

$$P^\wedge(K)$$

bezeichnet. Die Divisorklassengruppe von K ist definiert als

$$Cl^\wedge(K) := Div^\wedge(K)/P^\wedge(K).$$

Der Grad des Divisors d ist definiert als die reelle Zahl

$$\deg(d) := \sum_p m_p\cdot N_p + \sum_\infty \lambda_\infty$$

Dabei bezeichne N_p den Logarithmus der Anzahl der Elemente des Restklassenkörpers von p im lokalen Ring von p,

$$N_p := \log \# O_{S,p}/p = \log \Lambda/p$$

Bemerkung

Der Grad eines Hauptdivisors $\operatorname{div}(\alpha)$ ist

$$\begin{aligned}\deg \operatorname{div}^\wedge(\alpha) &= \sum_p v_p(\alpha)\cdot N_p + \sum_\infty (-\log|\alpha|_\infty) \\ &= \sum_p \log(\# O_{S,p}/p)^{v_p(\alpha)} + \sum_\infty (-\log|\alpha|_\infty) \\ &= \sum_p (-\log|\alpha|_p) + \sum_\infty (-\log|\alpha|_\infty)\end{aligned}$$

$$= - \log \prod_{p \in S_{fin} \cup S_{inf}} |\alpha|_p$$

wobei das Produkt über die endlichen und unendlichen Primstellen von K zu erstrecken ist. Nach der Produktformel gilt damit

$$\deg \widehat{\mathrm{div}}\,(\alpha) = 0.$$

Der Grad eines Divisors faktorisiert sich deshalb über die Divisorklassengruppe, d.h. wir haben einen wohldefinierten Grad

$$\deg\colon \widehat{\mathrm{Cl}}(V) \to \mathbb{R}.$$

2.1.4 Die Hauptdivisoren auf V

Wir wollen jetzt den Begriff des Hauptdivisors einer Funktion $f \in K(X)$ des Funktionenkörpers von X definieren. Für jede unendliche Primstelle $\infty \in S_{inf}$ können wir f als meromorphe Funktion auf der Faser X_∞ auffassen. Den Wert

$$v_\infty(f)$$

wollen wir definieren als Mittelwert der Funktion $(- \log |f|)$ auf X_∞.[2] Dazu betrachten wir auf jeder Faser X_∞ eine fixierte hermitische Metrik

$$ds^2_\infty .$$

Die zugehörige Volumenform bezeichnen wir mit

$$d\mu_\infty .$$

Diese sei durch die Bedingung normiert, daß

(1) $$\int_{X_\infty} d\mu_\infty = 1.$$

gelten soll. In dieser Situation definieren wir den <u>Wert</u> von $f \in K(X)$ an der Stelle $\infty \in S_{inf}$ als

(2) $$v_\infty(f) := - \int_{X_\infty} \log |f|\, d\mu_\infty .$$

Der Hauptdivisor einer rationalen Funktion $f \in K(X)$ auf X ist nach Definiton gleich

$$\mathrm{div}\,(f) := \mathrm{div}\,(f)_{fin} + \mathrm{div}\,(f)_{inf}$$

mit

$$\mathrm{div}\,(f)_{inf} = \sum_{\infty \in S_{inf}} v_\infty(f) \cdot X_\infty .$$

Dabei sei

$$\mathrm{div}(f)_{fin} = \sum_C v_C(f) \cdot C$$

[2] Entlang der Faser über einem endlichen Punkt $p \in \mathrm{Spec}\,\Lambda$ ist der Wert $(- \log |f|_p$ kontant, also gleich seinem Mittelwert bezüglich jeden Maßes.

der gewöhnliche Polstellen-Nullstellen-Divisor der rationalen Funktion f auf der Fläche V, d.h. die Summe werde erstreckt über alle irreduziblen abgeschlossenen Teilschemata C der Kodimension 1 von V.
Mit

$$P^{\wedge}(X)$$

bezeichnen wir die Gruppe der Hauptdivisoren auf X und mit

$$Cl^{\wedge}(X) := Div^{\wedge}(X)/P^{\wedge}(X)$$

die <u>Divisorklassengruppe</u> von X.

Bemerkungen

(i) Es gibt Gruppenhomomorphismen

$$Div^{\wedge}(V) \to Div(V),\ D \mapsto D_{fin}\ ,$$

$$Div^{\wedge}(K) \to Div(K),\ D \mapsto D_{fin}\ ,$$

mit Werten in den gewöhnlichen Divisorgruppen, die jeden Divisor auf dessen endlichen Teil abbilden. Dabei gehen Hauptdivisoren in Hauptdivisoren über, d.h. diese Homomorphismen induzieren Homomorphismen der zugehörigen Divisorklassengruppen

$$Cl^{\wedge}(V) \to Cl(V)$$

$$Cl^{\wedge}(K) \to Cl(K)$$

mit Werten in den gewöhnlichen Divisorklassengruppen. Alle diese Homomorphismen sind surjektiv.

(ii) Der Kern der Abbildung

$$Cl^{\wedge}(V) \to Cl(V)$$

besteht gerade aus den ´Klassen der Divisoren, deren endlicher Teil linear äquivalent ist zu Null. Mit Hilfe einer rationalen Funktion können wir erreichen, daß diese Klassen repräsentiert werden durch Divisoren, deren endlicher Teil Null ist. Je zwei Repräsentaten einer solchen Klasse unterscheiden sich durch einen Hauptdivisor, dessen endlicher Teil gleich Null ist, d.h. durch einen Hauptdivisor einer Einheit. Mit anderen Worten,

$$G := Ker(Cl^{\wedge}(V) \to Cl(V)) \cong \sum_{\infty\in S_{inf}} \mathbb{R}\cdot X_{\infty} \Big/ \{ \sum_{\infty\in S_{inf}} v_{\infty}(f)\cdot X_{\infty} \mid f\in K[X]^* \overset{3}{=} \Lambda^* \}$$

d.h. der Kern ist der Faktor eines reellen Vektorraums der Dimension

$$n := [K:Q]$$

nach dem Bild der Einheitengruppe Λ^* von K bei der <u>logarthmischen Abbildung</u>

$$f \mapsto \sum_{\infty\in S_{inf}} v_{\infty}(f)\cdot X_{\infty}$$

Insbesondere sehen wir an dieser Beschreibung, daß die Abbildung

$$\sum_{\infty\in S_{inf}} \mathbb{R}\cdot \infty \to \sum_{\infty\in S_{inf}} \mathbb{R}\cdot X_{\infty}\ ,\ \infty \mapsto X_{\infty}\ ,$$

einen Isormorphismus

$$Ker(Cl^{\wedge}(K) \to Cl(K)) \to Ker(Cl^{\wedge}(V) \to Cl(V))$$

induziert. Wir bezeichnen deshalb beide Kerne mit G.

---

[3] Da die Elemente von k[X] weder Nullstellen noch Pole haben, sind sie global definierte reguläre Funktionen. Die Identität folgt deshalb aus dem "Proper-Mapping-Theorem".Wir brauchen an dieser Stelle, daß K algebraische abgeschlossen ist in K(X) (andernfalls müssen wir K durch die algebraische Abschließung von K in K(X) ersetzen).

(iii)? Es wäre naheliegend, komplex konjugierte Einbettungen des Körpers K zu identifizieren und stattdessen komplex konjugierte Metriken zu betrachten. Eine solche Betrachtungsweise ergibt sich aus tieferliegeden Untersuchungen, bisher zwingt uns jedoch nichts dazu. Die Gruppe G wird dadurch ein wenig größer als man vielleicht erwarten würde.

(iv) Wir weisen hier noch auf die Abbildung des inversen Bildes hin,

$$f^*: Cl^\wedge(K) \to Cl^\wedge(V).$$

Die Gruppe G geht dabei in sich über.

2.2 Der Scbnitt-Index

In diesem Abschnitt wollen wir den Schnitt-Index

$$(D_1 \cdot D_2)$$

zweier Arakelov-Divisoren definieren. Dieser soll dabei wie im klassischen Fall linear in seinen beiden Argumenten sein. Ebenfalls wie im klassischen Fall ist er gleich der Summe von lokalen Schnittzahlen (oder auch Schnitt-Multiplizitäten),

2.2.1 Der lokale Schnitt-Index in einem endlichen Punkt

Seien D_1 und D_2 zwei endliche Divisoren von V, f_1 und f_2 lokale Gleichungen von D_1 bzw. D_2 in der Umgebung eines abgeschlossenen Punktes $P \in V$. Dann ist der Schnittindex von D_1 und D_2 im Punkt P nach Definition gleich

$$(D_1 \cdot D_2)_P := l(O_{V,P}/(f_1,f_2)) \cdot \log\ N(P).$$

Dabei ist

$$N(P) := \#\ O_{V,P}/m_{V,P}$$

die Elementzahl des Restklassenkörpers des lokalen Rings von V in P und

$$l(M)$$

bezeichnet die Länge des $O_{V,P}$-Moduls M.

Bemerkungen

(i) Diese Definition weicht von der klassischen Definition der lokalen Schnitt-Vielfachheit lediglich um den Faktor log N(P) ab (der im klassischen Fall in allen Punkten gleich und deshalb überflüssig ist).

(ii) Die eben angegebene Formel für den lokalen Schnitt-Index im Punkt P werden wir praktisch nur einmal nämlich beim Beweis der nachfolgenden Behauptung benutzen. Danach werden wir die Berechnung stets auf den nachfolgend angegebenen Spezialfall reduzieren.

2.2.2 Der Fall daß einer der Divisoren horizontal ist

Ist einer der Divisoren, sagen wir D_2 irreduzibel und <u>horizontal</u> (d.h. $f(D_2) = S$), so kann man ihn in der Gestalt

$$D_2 = \varepsilon(\mathrm{Spec}\ \Gamma)$$

schreiben, wobei Γ der Ring der ganzen Zahlen einer endliche Körpererweiterung L von K ist und

$$\varepsilon: \mathrm{Spec}\ \Gamma \to V$$

ein Morphismus über Spec Λ. Sind $p_1, \ldots, p_k \in \mathrm{Spec}\ \Gamma$ die über $P \in V$ liegenden Primideale von Γ und ist f_1 eine lokale Gleichung von D_1 in P, so gilt

$$(D_1 \cdot D_2)_P = \sum_{i=1}^{k} - \log \|\varepsilon^*(f_1)\|_{p_i}$$

Beweis. Betrachten wir die Einschränkung

$$D_2 \subseteq V \xrightarrow{f} S := \mathrm{Spec}\,\Lambda$$

des Strukturmorphismus von V auf D_2.Dies ist ein eigentlicher Morphismus, dessen Fasern wegen dim D = dim Λ endlich sind, d.h. der Morphismus ist endlich (nach Zariskis Hauptsatz). Insbesondere ist der Funktionenkörper

$$L := K(D_2)$$

ein endlicher Erweiterungskörper von K,

$$[L : K] < \infty.$$

Sei

$$\Gamma := \text{ganze Abschließung von } \Lambda \text{ in } L.$$

Dann hat man ein kommutatives Diagramm von Einbettungen

$$\begin{array}{ccc} L & \supset & \Gamma \\ \Vert & & \cup \\ K(D_2) & \supset & \Lambda \end{array}$$

Da D_2 endlich ist über Λ, besitzt D_2 eine endliche Überdeckung

$$D_2 = \cup_{i\in I}\, U_i$$

durch affine offene Teilmengen mit $O(U_i)$ endlich als Λ-Modul (und ⊆ L) für jedes i. Insbesondere gilt

$$O(U_i) \subseteq \Gamma \text{ für jedes } i\in I.$$

Diese Einbettungen definieren einen endlichen Morphismus

$$(*) \qquad D_2 \xleftarrow{\varepsilon} \mathrm{Spec}\,\Gamma$$

für welchen das folgende Diagramm (endlicher Morphismen) kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Spec}\,\Gamma \\ & \varepsilon¿ & \downarrow \\ D_2 & \rightarrow & \mathrm{Spec}\,\Lambda \end{array}$$

Nun ist $\Gamma \subseteq$ ganz abgeschlossen und 1-dimensional. Deshalb ist der Morphismus ε von (*) gerade die Normalisierung D_2. Und es ist der in der Behauptung auftretende Morphismus.

Die zu beweisende Formel ist trivial, wenn P nicht auf D_2 liegt, denn dann sind beide Seiten der zu beweisenden Identität gleich Null. Sei also

$$P\in D_2.$$

Wir schreiben

$$A := O_{D_2,P}$$

und

$$A := \Gamma\otimes O_{D_2,P}$$

für die ganze Abschließung von A in L.[4] ist ein semilokaler Ring mit den zugehörigen lokalen Ringen Γ_{p_1} ,...., Γ_{p_k} . Als A-Modul ist $\bar{A}$ endlich erzeugt (weil A exzellent ist) und der volle Quotientenring ist derselbe wie der von A,

$$Q(\bar{A}) = \bar{A} \otimes Q(A) = Q(A).$$

Insbesondere gilt

$$\bar{A}/A \otimes_A Q(A) = 0,$$

d.h. jedes Element von $\bar{A}/A$ wird von einem Element von A - {0} annulliert. Weil $\bar{A}/A$ endlich erzeugter A-Modul ist, gibt es ein Element $g \in m(A) - \{0\}$ mit[5]

$$g \cdot \bar{A}/A = 0,$$

d.h. $\bar{A}/A$ ist ein A/gA-Modul und damit ein A-Modul endlicher Länge,

$$l_A(\bar{A}/A) < \infty.$$

Sei jetzt $f_1 \in A$ die Einschränkung einer lokalen Gleichung von D_1 auf D_2. Dann gilt

(1) $\quad (D_1 \cdot D_2)_P = l_A\,(A/(f_1)) \cdot \log N(P)$

und

$$\begin{aligned}
l_A(\bar{A}/f_1 A) &= l_A(\bar{A}/A) + l_A\,(A/f_1 A) && (< \infty)\\
l_A(\bar{A}/f_1 A) &= l_A(\bar{A}/f_1 \bar{A}) + l_A\,(f_1 \bar{A}/f_1 A)\\
&= l_A(\bar{A}/f_1 \bar{A}) + l_A\,(\bar{A}/A) && \text{(weil } \bar{A} \text{ nullteilerfrei ist)}
\end{aligned}$$

Vergleich der beiden Identitäten für $l_A(\bar{A}/f_1 A)$ liefert

$$\begin{aligned}
l_A\,(A/f_1 A) &= l_A(\bar{A}/f_1 \bar{A})\\
&= \sum_{i=1}^{k} l_A(\,\Gamma_{p_1}/(f_1))\\
&= \sum_{i=1}^{k} l_{\Gamma_{p_i}}(\,\Gamma_{p_i}/(f_1)) \cdot [k(p_i):k(P)]
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
(D_1 \cdot D_2)_P &= \sum_{i=1}^{k} l_{\Gamma_{p_i}}(\,\Gamma_{p_i}/(f_1)) \cdot [k(p_i):k(P)] \cdot \log \# k(P)\\
&= \sum_{i=1}^{k} l_{\Gamma_{p_i}}(\,\Gamma_{p_i}/(f_1)) \cdot \log \# k(P)^{[k(p_i):k(P)]}\\
&= \sum_{i=1}^{k} l_{\Gamma_{p_i}}(\,\Gamma_{p_i}/(f_1)) \cdot \log \# k(p_i)\\
&= \sum_{i=1}^{k} l_{\Gamma_{p_i}}(\,\Gamma_{p_i}/(f_1)) \cdot \log N(p_i)
\end{aligned}$$

---

[4] Wir benutzen hier die Tatsache, daß der Übergang zur ganzen Abschließung mit dem Übergang zu Quotientenringen kommutiert.

[5] m(A) bezeichne das maximale Ideal von A.

$$= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{ord}_{p_i}\ \varepsilon^*(f_1)\cdot \log N(p_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} - \log \|\varepsilon^*(f_1)\|_{p_i}$$

QED.

2.2.3 Der globale Schnitt-Index

Für $p \in S = \mathrm{Spec}\ \Lambda$ setzen wir

$$(D_1 \cdot D_2)_p := \sum_{f(P)=p} (D_1 \cdot D_2)_P\ .$$

Der globale Schnitt-Index ist dann nach Definition die Summe

$$(D_1 \cdot D_2) := \sum_{p \in S_{fin}} (D_1 \cdot D_2)_p + \sum_{\infty \in S_{inf}} (D_1 \cdot D_2)_\infty$$

wobei der lokale Schnitt-Index $(D_1 \cdot D_2)_\infty$ in einem unendlich fernen Punkt ∞ noch zu definieren ist. Wir können dabei voraussetzen, daß beide Divisorren D_1 und D_2 irreduzibel sind. Wir setzen

$$(D_1 \cdot D_2)_\infty = 0$$

falls einer von ihnen eine Komponente einer endlichen Faser ist. Ist einer der Divisoren eine unendliche Faser, so setzen wir

$(X_\infty \cdot D) = (X_\infty \cdot D)_\infty = 0$ falls D eine Komponente einer (endlichen oder unendlichen) Faser ist.

$(X_\infty \cdot X_{\infty'}) = 0$ (Spezialfall).

$(X_\infty \cdot D) = (X_\infty \cdot D)_\infty = m$ falls D ein horizontaler Divisor des Grades m in der allgemeinen Faser ist, d.h. $m = [K(D): K]$.[6]

Seien jetzt

D_1 und D_2 irreduzibel und horizontal.

Sie entsprechen dann zwei Punkten P_1 und P_2 der Kurve X mit den Restklassenkörpern

$$L_1 := K(P_1) \text{ und } L_2 := K(P_2).$$

Seien

$$\infty^1_\alpha : L_1 \to C\ ,\ \infty^1_\beta : L_2 \to C,\ \alpha=1,...,[\,L_1 : K],\ \beta=1,...,[\,L_2 : K]$$

die Einbettungen von L_1 und L_2 in C, welche die gegebene Einbettung $\infty: K \to C$ fortsetzen. Wir bezeichnen mit

$$\{P_{\infty^1_\alpha} \in X_{\infty^1_\alpha}\} \text{ und } \{P_{\infty^2_\beta} \in X_{\infty^2_\beta}\}$$

die Bilder von P_1 und P_2 bei den Einbettungen von K in C. Wir schreiben

---

[6] d.h. der Schnitt-Index ist gerade der Grad der Einschränkung von D auf X_∞.

$$(D_1 \cdot D_2)_\infty = \sum_{\alpha,\beta} (P_{\infty^1_\alpha} \cdot P_{\infty^2_\beta})$$

wobei die Ausdrücke unter dem Summenzeichen noch zu definieren sind. Dabei wird

$$(P_{\infty^1_\alpha} \cdot P_{\infty^2_\beta})$$

für beliebige zwei unterschiedliche Punkte auf einer Riemannschen Fläche definiert sein, die mit einer Hermitischen Metrik versehen ist.[7]

2.2.4 Der Schnitt-Index für Punkte einer Riemannschen Fläche

Seien

$$X$$

eine beliebige kompakte[8] Riemannsche Fläche und seien

$$P,Q \in X$$

zwei verschiede Punkte. Weiter sei eine Volumenform

$$d\mu$$

auf X fixiert. Wir definieren dann den Schnitt-Index

$$(P \cdot Q)_X \in R$$

in Analogie mit dem Schnitt-Index in der endlichen Situation. Letzteren erhält man zum Beispiel, indem man die lokalen Gleichungen des einen Punktes auf den anderen Punkt einschränkt und dann den Absolutbetrag der Einschränkung nimmt (genauer: deren Norm).

Wir konstruieren jetzt für jedem Punkt $P \in X$ eine glatte reellwertige Funktion

$$\varphi_P: X \to R,$$

welche wir als globale Gleichung des Punktes P verwenden werden. Den Schnitt-Index definieren wir dann als die Zahl

$$(P \cdot Q)_X := - \log \varphi_P(Q).$$

Von der Funktion φ_P fordern wir, daß sie nicht-negativ sein und die einzige Nullstelle P haben soll. Dabei soll P eine einfache Nullstelle sein, d.h. in einer Umgebung von P sei

$$\varphi_P(q) = |z_P(q)| \cdot u(q)$$

mit einem lokalen Parameter z_P im Punkt P und einer glatten Funktion u(q) mit $u(P) \neq 0$.

---

[7] Die gegebenen (nicht abgeschlossenen) Punkte P_j von V können wir als Morphismen

$$\mathrm{Spec}\, K(D_j) \to V$$

auffassen, d.h. als Elemente

$$P_j \in V(K(D_j)).$$

Die Fortsetzungen $\infty^j_\nu: K(D_j) \to C$ von ∞ definieren Morphismen

$$\mathrm{Spec}\, \mathbf{C} \to \mathrm{Spec}\, K(D_j) \to V,$$

also Punkte von $V(\mathbf{C})$. Die $P_{\infty^j_\nu}$ lassen sich also als Punkte von ein und derselben Riemannschen Fläche auffassen.

[8] Die Kompaktheitsforderung fehlt in der Arbeit. Sie ist aber nötig um sicherzustellen, daß jede globale harmonische Funktion auf X konstant ist (s.u.).

Wir benutzen dabei eine von Parchin vorgeschlagene Möglichkeit in der Menge dieser Funktionen eine einzige auszuzeichnen. Sie besteht darin, zu forden, daß diese Funktion der Poisson-Gleichung[9]

(*) $$\frac{1}{2\pi}\Delta \log \varphi_P \, dx\#dy = - d\mu$$

genügt. Je zwei Lösungen dieser Gleichung φ_P und φ'_P sind proportional, denn der Logarithmus ihres Quotienten ist eine überall glatte harmonische Funktion auf X, also konstant. Deshalb gibt es höchstens eine Lösung, die zusätzlich der Normalisierungsforderung

(**) $$\int_X \log \varphi_P \, d\mu = 0$$

genügt. Diese nehmen wir als <u>globale Gleichung des Punktes</u> $P \in X$ und bezeichnen sie mit φ_P. Ihre Existenz werden wir in Abschnitt 2.3 beweisen.

---

[9] In der angegebenen Schreibweise ist nicht klar, ob der Operator auf der linken Seite von (*) überhaupt invariant definiert ist. Zeigen wir, es handelt sich um den Laplace-Operator

$$L = d{*}d{*} + {*}d{*}d{*}$$

der Riemannschen Fläche. Dazu müssen wir uns zunächst überlegen, wie der Hodge-Operator in einer holomorphen Karte definiert ist.

Im Fall von Riemannschen Flächen hat der Hodge-Stern-Operator die folgende Gestalt. Ist $z = x + i\,y$ eine holomorphe Karte und $\omega = adx + bdy$ eine 1-Form, so gilt

$${*}\omega = -b\,dx + ady.$$

Für Funktionen α gilt

$${*}\alpha = \alpha dxdy \text{ und } {*}(\alpha dxdx) = \alpha.$$

Beweis. Diese Formeln sind nach Definition richtig in einem gegebenen Punkt p (OBdA $z(p) = 0$), wenn dx und dy ein orthonormiertes Koordinatensystem bilden. Beim Stauchen oder Strecken des Koordinatensystems mit einem konstanten Faktor $c \neq 0$ bleiben diese Formeln ebenfalls richtig (a und b werden beim Übergang zum neuen System mit 1/c multipliziert). Deshalb sind die Formeln auch für orthogonale (nicht notwendig normierte) Koordinaten richtig.
Da sie in der Komplexen Ebene richtig sind (orthonormierter Fall) und holomorphe Abbildungen winkeltrue ("konform") sind, folgt die Gültigkeit im Urspung jeder holomorphen Karte, also überall.

Wir betrachten hier Riemannsche Flächen X als 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten und benutzen die Tatsache, daß durch die Metrik auf X eine konforme Struktur definiert wird.
QED.
Folgerung: $\Delta = {*}d{*}d$:
Beweis.

$${*}d{*}d(\alpha) = ({*}d{*})(\frac{\partial\alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial\alpha}{\partial y}dy) = ({*}d)(-\frac{\partial\alpha}{\partial y}dx + \frac{\partial\alpha}{\partial x}dy) = {*}(-\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}dy\#dx + \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}dx\#dy)$$
$$= \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}$$

QED.
Bemerkungen

(i) Man beachte, der Ausdruck $(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2})dx\#dy$ ändert seine Gestalt nicht bei holomorphen Koordinatenwechsel (z.B bei Streckungen mit einem reellen Faktor).
(ii) Der Summand $d{*}d{*}$ des invarianten Laplace-Operators ist auf Riemannschen Flächen aus Dimensionsgründen gleich Null: ${*}\alpha$ ist eine 2-Form, d.h. $d{*}\alpha$ ist eine 3-Form, also gleich Null.

2.2.5 Proposition 1.1

Der Schnitt-Index $(P\cdot Q)_X$ ist symmetrisch.

Beweis. Seien U_P und U_Q kleine Kreisscheiben mit dem Zentrum in P bzw. Q. Nach (*) und (**) geht der folgende Ausdruck gegen Null, wenn die Radien der Kreisscheiben gegen Null gehen:

$$\int_{X-U_P-U_Q} (\log \varphi_P \, \Delta\log \varphi_Q - \log \varphi_Q \, \Delta\log \varphi_P)\, dxdy \, .$$

Nach der Greenschen Formel ist dieser Ausdruck aber gleich[10]

$$\int_{\partial U_P \cup \partial U_Q} (- \log \varphi_P \frac{\partial}{\partial n} \log \varphi_Q + \log \varphi_Q \frac{\partial}{\partial n} \log \varphi_P)\, ds.$$

Dabei bezeichne $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in Normalenrichtung[11] und s den natürlichen Parameter der beiden Kreislinien[12]. Nach dem Residuensatz (und der Tatsache daß harmonische Funktionen Realteile holomorpher sind) erhalten wir für den Limes[13]

---

[10] Mit $a := \log \varphi_P$ und $b := \log \varphi_Q$ ist die Differtialform unter dem nachfolgenden Integral gerade die Einschränkung von

$$-\,\omega := a \frac{\partial b}{\partial y} dx - a\frac{\partial b}{\partial x} dy - b \frac{\partial a}{\partial y} dx + b \frac{\partial a}{\partial x} dy$$

auf die Kreislinie (vgl. nächste Bemerkung). Wegen

$$\begin{aligned} d\omega = \;& (\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial y} + a \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}) dy\# dx - (\frac{\partial a \partial b}{\partial x \partial x} + a \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}) dx\# dy \\ & - (\frac{\partial b \partial a}{\partial y \partial y} + b\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}) dy\# dx + (\frac{\partial b \partial a}{\partial x \partial x} + b\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}) dx\# dy \\ = \;& (- a\, \Delta b + b\, \Delta a) dx\# dy \end{aligned}$$

folgt die Behauptung.

[11] d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial n}(p) = \langle \text{grad } f, n(p) \rangle = df\,(n(p))$$

wenn n(p) den Eineitvektor in Normalenrichtung im Punkt p bezeichnet.

[12] d.h. $\frac{dz(s)}{ds}$ ist der Einheitsvektor in mathematische positiver Richtung (in einer holomorphen Karte von X). Mit $dz = \frac{dz(s)}{ds} ds = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} ds$ ist das Differential von f in Tangentialrichtung damit gleich

$$\frac{\partial f}{\partial s} ds = \langle \text{grad } f, ds \rangle = \langle \text{grad } f, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \rangle \quad \text{(Projektion auf die Kurvenrichtung)}$$

und in Normalenrichtung gleich

$$\frac{\partial f}{\partial n} ds = \langle \text{grad } f, \begin{pmatrix} -dy \\ dx \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{(Projektion auf die Normalenrichtung)}$$

[13] Es reicht zu zeigen,

$$2\pi\,(\log \varphi_Q(P) - \log \varphi_P(Q))$$

d.h. es gilt die Behauptung.
QED.

2.2.6 Bemerkung: Greensche Formel

Dieselben Überlegungen wie im obigen Beweis liefern die Formel

$$\frac{1}{2\pi}\int_X (\log \varphi\, \Delta \log \psi - \log \psi\, \Delta \log \varphi)dxdy = \sum_{p\in X} v_p(\varphi)\cdot\log \psi(p) - v_p(\psi)\cdot\log \varphi(p)$$

für beliebige glatte Funktionen φ und ψ mit einer endlichen Anzahl von Nullstellen und Polen (endlicher Ordnung). Die Summe rechts wird über die Nullstellen und Pole von φ und ψ erstreckt. Diese Formel wollen wir Greensche Formel nennen.

2.2.7 Proposition 1.2

Der Schnitt-Index hängt nur von der linearen Äquivalenzklasse der Divisoren ab.
Beweis. Wir haben zu zeigen,

$$((s)\cdot D) = 0$$

für jeden irreduziblen Divisor D und jede rationale Funktion

$$s \in K(V),\ s\colon V \longrightarrow \operatorname{Spec} K,$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial U_P} (-\log \varphi_P \frac{\partial}{\partial n}\log \varphi_Q + \log \varphi_Q \frac{\partial}{\partial n}\log \varphi_P)\, ds = 2\pi\cdot \log \varphi_Q(P)$$

wenn U_p eine kleine Kreisscheibe vom Radius r um den Ursprung $p = 0\in\mathbb{C}$ ist. Der ersten Summand unter dem Integral geht gegen Null für $r \to 0$. Es reicht also zu zeigen,

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial U_P} \log \varphi_Q \frac{\partial}{\partial n}\log \varphi_P\, ds = 2\pi\cdot \log \varphi_Q(P).$$

Wir schreiben φ_P in der Gestalt $\varphi_P(q) = |z(q)|\cdot u(q)$ mit u regulär in q = 0 und $z(q) = r(q)\cdot e^{i\alpha}$. Dann ist

$$\log \varphi_P(q) = \log r(q) + \log u(q) \text{ und } \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

also

$$\frac{\partial}{\partial n}\log \varphi_P(q) = \frac{1}{r(q)} + \frac{\partial}{\partial n}\log u(q)$$

also

$$\log \varphi_Q \frac{\partial}{\partial n}\log \varphi_P(q) = \frac{1}{r(q)}\log \varphi_Q + \log \varphi_Q \frac{\partial}{\partial n}\log u(q)$$

Der zweite Summand ist reguläre in einer Umgebung von q = 0, das zugehörige Integral geht gegen Null. Es reicht also zu zeigen

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial U_P} \frac{1}{r(q)}\log \varphi_Q\, ds = 2\pi\cdot \log \varphi_Q(P).$$

Wegen $\int_{\partial U_P} \frac{1}{r(q)} ds = 2\pi$ ist das aber offensichtlich.

auf V. Ist D eine Komponente einer (endlichen oder unendlichen) Faser, so sind die unendlichen Summanden von $((s)\cdot D)$ Null und die Behauptung folgt aus der analogen Aussage der gewöhnlichen Schnitt-Theorie[14]. Deshalb können wir annehmen, D ist horizontal, d.h. von der Gestalt

$$D = \varepsilon(\mathrm{Spec}\ \Gamma)$$

wie in 1.2.

Hat der Divisor D den Grad m auf der allgemeinen Faser, so entspricht ihm ein Punkt

$$P \in X\ ,\ \overline{\{P\}} = D,$$

der Kurve X mit einem Restklassenköper

$$k(P) = O_{X,P}/m_{X,P} = L$$

des Grades

$$m = [L:K]$$

über K. Die Funktion $s \in K(X)$ definiert eine meromorphe Funktion

$$s^{\infty}: X_{\infty} \longrightarrow C$$

(die Einschränkung auf die geometrische Faser über $\infty \in S_{\mathrm{inf}}$). Wir schreiben

$$\mathrm{div}(s^{\infty}) = \sum_{Q \in X_{\infty}} v_Q(s^{\infty})\cdot Q$$

und zerlegen $|s^{\infty}|$ in ein Produkt bezüglich der Nullstellen und Pole auf X_{∞} ,

$$|s^{\infty}(z)| = \Big(\prod_{Q \in X_{\infty}} \varphi_Q(z)^{v_Q(s^{\infty})}\Big)\cdot u(z). \qquad (1)$$

Dabei ist u(z) eine glatte Funktion ohne Nullstellen und Pole auf X_{∞}. Aus den Eigenschaften der Funktionen φ_Q folgt, daß u der folgenden Gleichung genügt.

$$\Delta\log(u)dxdy = \Delta\log|s^{\infty}(z)|dxdy - \sum_{Q \in X_{\infty}} v_Q(s^{\infty})\Delta\log\varphi_Q(z)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\Delta\log|s^{\infty}(z)|^2 dxdy + 2\pi\Big(\sum_{Q \in X_{\infty}} v_Q(s^{\infty})\Big)d\mu \qquad \text{(vgl. (*) von 2.2.4)}$$

$$=^{15} \frac{1}{2}(\Delta\log s^{\infty} + \Delta\log \bar{s}^{\infty}) + 0$$

$$=^{16} 0,$$

d.h.

$$\Delta\log u = 0.$$

Die Funktion log u ist harmonisch, d.h. constant auf X_{∞} ,

$$\log u = c \in R$$

---

[14] Alle Betrachtungen finden dann über dem Restklassenkörper k(p) des Punktes $p \in \mathrm{Spec}\ \Lambda$ statt, in dessen Faser D liegt.

[15] Die Nullstellengesamtordnung von s^{∞} ist gleich der Polstellengesamtordnung.

[16] s^{∞} ist meromorph und $\Delta\ dx\#dy = 4\partial\bar\partial = -4\bar\partial\partial$.

Wir gehen in (1) zum Logarithmus über und bilden das Integral,

$$c = \int_{X_\infty} \log u(z) d\mu \qquad \text{(Formel (1) von 2.1.4)}$$

$$= \int_{X_\infty} \log |s^\infty|\, d\mu_\infty - \sum_{Q\in X_\infty} v_Q(s^\infty) \int_{X_\infty} \log \varphi_Q\, d\mu_\infty$$

$$= \int_{X_\infty} \log |s^\infty|\, d\mu_\infty \qquad \text{(Eigenschaft 2.2.4 (**) von } \varphi_Q\text{)}$$

$$= -v_\infty(s^\infty) \qquad \text{(Definition von } v_\infty \text{ in 2.1.4(2))}$$

d.h. in (1) gilt

(2) $\log u(z) = -v_\infty(s^\infty)$

unabhängig von z.

Damit gilt

$$(\mathrm{div}(s)\cdot D) = (\mathrm{div}(s)_{fin} \cdot D) + (\mathrm{div}(s)_{inf'} \cdot D)$$

$$= \sum_{p\in S_{fin}} (\mathrm{div}(s)_{fin} \cdot D)_p + \sum_{\infty\in S_\infty} (\mathrm{div}(s)_{fin} \cdot D)_\infty \quad \text{(1.Summand)}$$

$$+ \sum_{\infty\in S_\infty} v_\infty(s)\cdot(X_\infty \cdot D)$$

(2.Summand)

Dabei ist

$$\sum_{p\in S_{fin}} (\mathrm{div}(s)_{fin} \cdot D)_p = \sum_{q\in(\mathrm{Spec}\ \Gamma)_{fin}} -\log \|\varepsilon^*(s)\|_q \qquad \text{(nach 2.2.2)}$$

$$(\mathrm{div}(s)_{fin} \cdot D)_\infty = \Big(\sum_{Q\in X} v_Q(s)\cdot Q\ ,\ D\Big)_\infty$$

$$\overset{17}{=} -\sum_{Q\in X} \sum_{\infty'|\infty} v_Q(s)\cdot \log \varphi_Q(P_{\infty'}) \quad (\infty' := \text{Fortsetzung von } \infty \text{ auf } K(D))$$

---

[17] Nach Definition (vgl. 2.2.4) ist $(Q\cdot D)_\infty = -\sum_{\infty'|\infty} \log \varphi_Q(P_{\infty'})$ wobei die Summe über alle Fortsetzungen ∞' von ∞ erstreckt wird. Genaugenommen müßte rechts eine Doppelsumme stehen, welcher $Q_{\infty'}$ anstelle von Q vorkommt. Die Funktion φ_Q sei hier definiert als das Produkt über alle $\varphi_{Q_{\infty'}}$.

$$= - \sum_{\infty'|\infty} \log \prod_{Q\in X} \varphi_Q(P_{\infty'})^{v_Q(s)}$$

$$= - \sum_{\infty'|\infty} \log (s(P_{\infty'})/u(P_{\infty'})) \qquad \text{(nach (1))}$$

$$= - \sum_{\infty'|\infty} (\log (s(P_{\infty'}) + v_\infty(s)) \qquad \text{(nach (2))}$$

$$= - \sum_{\infty'|\infty} \log | s(P_{\infty'}) | - [K(D):K]\cdot v_\infty(s) \quad \text{(es gibt } [K(D):K]\cdot\text{Fortsetzungen)}$$

$$= - \sum_{\infty'|\infty} \log | \varepsilon^*(s) |_{\infty'} - v_\infty(s)\cdot(X_\infty\cdot D).$$

Einsetzen liefert

$$(\mathrm{div}(s), D) = \sum_{q\in(\mathrm{Spec}\ \Gamma)_{fin}} - \log \|\varepsilon^*(s)\|_q - \sum_{\infty\in S_\infty} \sum_{\infty'|\infty} \log | \varepsilon^*(s) |_{\infty'}.$$

Nach der Produktformel ist die rechte Seite gleich Null.
QED.
Bemerkung
Im nächsten Abschnitt beweisen wir unter anderem die Existenz der Funktionen φ_p (vgl. 2.3.11) und befreien die Definition den Schnitt-Index von der Bedingung, daß die Divisoren der beiden Argumente keinen gemeinsamen Komponenten haben dürfen (vgl. 2.3.9).

2.3 Umkehrbare hermitische Garben

2.3.1 Hermitische Vektorraumbündel

Wir wollen jetzt eine andere, für uns bequemere Definition einer Divisorklasse formulieren. Sei zunächst

$$X$$

eine kompakte[18] Riemannsche Fläche mit Volumenform

$$d\mu.$$

Und sei

$$L \to X$$

eine hermitisches Vektorraumbündel des Rangs 1 auf X. Die zur Metrik auf L gehörige Norm werde mit dem Symbol

$$\|\ \|$$

bezeichnet. Ist

$$s: X \longrightarrow L$$

ein rationaler Schnitt von L, so hängt die (1,1)-Form

$$- \partial\bar\partial \log \|s\|^2 =^{19} \sqrt{-1}\,\Delta \log \|s\|\, dx\#dy$$

[18] In der Arbeit wird die Kompaktheitsforderung nicht erwähnt, im folgenden aber benutzt (zum Beispiel in der Gestalt der Aussage, daß global auf X definierte harmonische Funktionen konstant sind. Siehe den Beweis der Bemerkung von 2.2).
[19] Wir verwenden hier die Bezeichnungen von Griffiths & Harris, Principles of algebraic geometry, p. 142. In der Arbeit steht die Formel

nicht von der Wahl von s ab. Sie heißt Krümmungsform des Zusammenhangs und hat die Eigenschaft, daß

$$\int_X -\frac{1}{2\pi}\Delta \log \|s\|\, dx\#dy = \frac{1}{2\pi i}\int_X \partial\bar\partial \log \|s\|^2 = \deg L.$$

gilt. Diese Formel kann man erhalten, indem man die Greensche Formel (2.2.6) auf die Funktionen $\|s\|$ und e auf X anwendet.[20]

2.3.2 Zulässige Metriken eines hermitischen Vektorraumbündels

Wir werden im folgenden nur solche Metriken auf L verwenden, welche der Bedingung

(*) $$-\frac{1}{2\pi}\Delta \log \|s\|\, dx\#dy = \frac{1}{2\pi i}\partial\bar\partial \log \|s\|^2 = (\deg L)\, d\mu$$

genügen. Dabei sie $d\mu$ die auf X gegebene Volumenform.

Bemerkung

Je zwei solche Metriken sind proportional, d.h. sie unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor.

Beweis. Sei $\|\ \|'$ eine zweite Metrik und $d\mu'$ die zugehörige Volumenform. Dann gilt

$$\|s\|' = t\cdot\|s\|$$

mit einer glatten positiven Funktion

$$t: X \to R^+.$$

Wir haben zu zeigen, t ist konstant.

Es gilt

$$\begin{aligned}(\deg L)\, d\mu &= -\frac{1}{2\pi}\Delta \log \|s\|'dx\#dy \qquad \text{(Zulässigkeit der Metrik)}\\ &= -\frac{1}{2\pi}\Delta \log \|s\|dx\#dy - \frac{1}{2\pi}\Delta \log t\, dx\#dy\\ &= (\deg L)d\mu - \frac{1}{2\pi}\Delta \log t\, dx\#dy\end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\Delta \log t\, dx\#dy \qquad =0.$$

Mit andere Worten log t ist eine globale harmonische Funktion auf X, also konstant.
QED.

2.3.3 Metrisierte Geradenbündel auf dem Modell V

Seien V wie in 2.1.1., d.h.

$$f:V \to S = \mathrm{Spec}\ \Lambda$$

ist ein Morphismus von Schemata mit

1. K ist eine endliche Erweiterung von Q und ist algebraisch abgeschlossen in K(X)

$$\frac{1}{\pi i}d'd'' \log \|s\| = -\frac{1}{2\pi}\Delta \log \|s\|\, dxdy$$

wobei nicht angegeben ist, wie d' und d" definiert sind. Auf Grund der Formel sollte $d'=\partial$ und $d''=\bar\partial$ sein. Man beachte, es gilt

$$\begin{aligned}\partial\bar\partial &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)(dx + \sqrt{-1}\, dy)\#\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)(dx - \sqrt{-1}\, dy)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(-2dx\#dy)\\ &= -\frac{i}{2}\Delta\, dx\#dy.\end{aligned}$$

[20] vgl. auch Griffiths & Harris: Principles of algebraic geometry, p. 144 (man verwendet beim Beweis die Poincaré-Dualität).

2. Λ ist der Ring der ganzen Zahlen von K.
3. V ist regulär, f ist projektiv.
4. Die allgemeine Faser von f ist 1-dimensional, glatt und geometrisch irreduzibel.
5. Die einzigen Singularitäten der speziellen Fasern von f sind gewöhnliche Doppelpunkte.

Weiter sei L eine umkehrbare Garbe auf V. Für jede unendlich ferne Faser

$$X_\infty , \infty \in S_{inf} ,$$

sei auf der Einschränkung

$$L_\infty := L|_{X_\infty} := L \otimes O_{X_\infty}$$

eine zulässige hermitische Metrik $\|\ \|_\infty$ gegeben, d.h. sie erfülle die Bedingung (*) von 2.3.2 mit $d\mu = d\mu_\infty$.

In dieser Situation wollen wir von L als von einem <u>metrisierten Geradenbündel</u> sprechen.

2.3.4 Die Divisorklasse eines metrisierten Geradenbündels

Seien V wie in 2.3.3 und $L \to V$ ein metrisiertes Geradenbündel auf V. Weiter sei

$$s: V \dashrightarrow L$$

ein rationaler Schnitt von L. Der Divisor dieses Schnitts ist nach Definition gleich

$$\mathrm{div}\,(s) = \mathrm{div}\,(s)_{fin} + \sum_{\infty \in S_{inf}} v_\infty(s)\cdot X_\infty$$

mit

$$v_\infty(s) := \int_{X_\infty} - \log \|s\|\, d\mu_\infty ,$$

wobei $\mathrm{div}\,(s)_{fin}$ der endliche Divisor des Schnittes s auf dem Schema V sei. Ist

$$s': V \dashrightarrow L$$

ein zweiter rationaler Schnitt von L, so gilt

$$s' = t\cdot s$$

mit einer rationalen Funktion

$$t \in K(V)$$

und offensichtlich ist

$$\mathrm{div}\,(s') = \mathrm{div}\,(s) + \mathrm{div}\,(t).$$

Auf diese Weise definiert ein metrisiertes Geradenbündel eine Divisorklasse auf V.

Zum Beweis der Umkehrung (d.h. jede Divisorklasse definiert ein metrisiertes Geradenbündel) benuzen wir das folgende Ergebnis.

2.3.5 Proposition 2.1 : Die Existenz zulässiger Metriken.

Seien X eine kompakte Riemannsche Fläche mit der Volumenform $d\mu$ und L ein Geradenbündel auf X. Dann gibt es eine zulässsige hermitische Metrik $\|\ \|$ auf L (d.h. ein hermitische Metrik die der Bedingung (*) von 2.3.2 genügt.

Bevor wir uns dem Beweis dieser Aussage zuwenden, zeigen wir zunächst wie man sie benutzen kann, um zu einer gegebenen Divisorklasse ein Geradenbündel zu konstruieren.

2.3.6 Das metrisierte Geradenbündel zu einer Divisorklasse

Sei $\alpha \in \hat{Cl}(V)$ eine vorgegebene Divisorklasse. Wir betrachten einen beliebigen Repräsentanten, sagen wir

$$D = D_{fin} + \sum_{\infty} v_{\infty}(D) \cdot X_{\infty} .$$

Sei L die umkehrbare Garbe

$$L = O_V(D_{fin}).$$

Nach 2.3.5 gibt es auf L eine zulässige Metrik. Wir fixieren eine solche und bezeichen mit

$$s \in L$$

den globalen rationalen Schnitt mit[21]

$$div(s)_{fin} = D_{fin} .$$

Wir können die Metriken auf den unendlichen Fasern von L mit positiven konstanten Faktoren multiplizieren, ohne daß die Metrik auf L aufhört zulässig zu sein. Wir können dadurch insbesondere erreichen daß für jedes $\infty \in S_{inf}$ die reelle Zahl

$$v_{\infty}(s) := - \int_{X_{\infty}} \log \|s\| \, d\mu_{\infty} .$$

(vgl. 2.4 und 0.3(2)) gleich der vorgegebenen Zahl $v_{\infty}(D)$ ist.[22] Dann ist aber D gerade der Divisor zum Schnitt s von L, d.h. α ist die Divisorklasse zu L.
Wir erhalten damit die folgende Aussage:

2.3.7 Proposition 2.2: Die Divisorklassengruppe als Gruppe von metrisierten Geradenbündeln

Die Gruppe $\hat{Cl}(V)$ läßt sich beschreiben als Gruppe der Isomorphieklassen der metrisierten Geradenbündel auf V mit dem Tensorprodukt als Gruppenoperation.

2.3.8 Die Situation im 1-dimensionalen Fall

Dieselbe Beschreibung ist auch für die Gruppe $\hat{Cl}(K)$ möglich. Ein <u>metrisiertes Geradenbündel</u> auf Spec Λ ist hier nach Defintion eine umkehrbare Garbe (d.h. ein projektiver Λ-Modul des Rangs 1) L auf Spec Λ, für welchen auf jedem der 1-dimensionalen Vektorräume

$$L \otimes_{\infty} C$$

---

[21] s existiert auf Grund der Sätze der klassischen algebraischen Geometrie. Ist $\{s_{\alpha} : U_{\alpha} \dashrightarrow \Lambda\}$ ein System von lokalen Gleichungen von D, so definieren die s_{α} den Schnitt s.

[22] Die Multiplikation der Metrik mit der positiven Konstanten c > 0 ändert diesen Ausdruck um den folgenden Summanden ab:

$$- \int_{X_{\infty}} \log c \, d\mu_{\infty} = - \log(c) \cdot \int_{X_{\infty}} d\mu_{\infty} = - \log(c).$$

eine hermitische Metrik gegeben ist. Wie oben gehört zu jedem metrisierten Geradenbündel L auf Spec Λ eine Divisorklasse[23]

$$[L] \in \hat{Cl}(K).$$

Insbesondere kann man für jedes metrisierte Geradenbündel dessen Grad definieren,

$$\deg L := \deg [L] := \text{Grad des zugehörigen Divisors.}$$

2.3.9 Proposition 2.3: Der Schnitt-Index als Grad eines metrisierten Geradenbündels

Seien L eine endliche Körpererweiterung von K,

$$\Gamma \subset L$$

der Ring der ganzen Zahlen von L,

$$\varepsilon\colon \mathrm{Spec}\,\Gamma \to V$$

ein Morphismus über Spec Λ ,

$$D := \varepsilon(\mathrm{Spec}\,\Gamma)$$

ein horizontaler Divisor auf V (vgl. 2.2.2) und D' irgendein (Arakelov-)Divisor von V. Wir schreiben für die zugehörige metrisierte umkehrbare Garbe

$$L' := O_V(D').$$

Dann gilt,

$$(D\cdot L) := (D\cdot D') = \deg \varepsilon^*(L).$$

Dabei werde das inverse Bild $\varepsilon^*(L)$ von L in der Kategorie der metrisierten Garben gebildet.

Beweis. Sei

$$D' = D'_{fin} + \sum_{\infty\in S_{inf}} v_\infty(D')\cdot X_\infty$$

ein Divisor mit $L = O_V(D')$ (in der Kategorie der metrisierten umkehrbaren Garben) und $s\in L$ ein rationaler Schnitt mit

$$\hat{div}(s) = D'.$$

Dieselbe Rechnung wie im Beweis von 2.2.7 liefert

$$(\hat{div}(s), D) = \sum_{q\in(\mathrm{Spec}\,\Gamma)_{fin}} -\log \|\varepsilon^*(s)\|_q - \sum_{\infty\in S_\infty} \sum_{\infty'|\infty} \log |\varepsilon^*(s)|_{\infty'},$$

$$= \sum_{q\in(\mathrm{Spec}\,\Gamma)_{fin}} - v_q(\varepsilon^*(s))\cdot\log \#(\Gamma/q) - \sum_{\infty\in S_\infty} \sum_{\infty'|\infty} \log |\varepsilon^*(s)|_{\infty'}, .$$

$$= \deg \hat{div}(\varepsilon^*(s)) \qquad \text{(nach 2.1.3)}$$

Nun ist $\varepsilon^*(s)$ ein rationaler Schnitt von ε^*L, d.h. der letzte Ausdruck ist gerade der Grad von ε^*L.

QED.

---

[23] Man wähle einen rationalen Schnitt s von L und den zugehörigen Divisor

$$\mathrm{div}(s) = \mathrm{div}(s)_{fin} + \sum_{\infty\in S_{inf}} v_\infty(s)\cdot\infty \text{ mit } v_\infty(s) := -\log |s|_\infty \text{ (vgl. 0.2)}$$

Die Klasse dieses Divisors hängt nicht von der speziellen Wahl des Schnitts s ab.

2.3.10 Die metrisierte Garbe eines endlichen Divisors und der zugehörige kanonische Schnitt

Sei D ein beliebiger endlicher Divisor auf V, d.h. für jedes $\infty \in S_{inf}$ sei der Koeffizient von X_∞ Null,

$$v_\infty(D) = 0.$$

Wir betrachten die umkehrbare Garbe $O_V(D)$ und wählen wie folgt einen eindeutigt bestimmten globalen Schnitt

$$s_D \in O_V(D) \text{ mit } div(s_D) = D.$$

Falls D irreduzibel ist betrachten wir die natürliche Einbettung

$$O_V(-D) \to O_V$$

des Ideals von D in die Strukturgarbe, tensorieren diese Einbettung mit $O_V(D)$ und setzen

$$s_D := \text{Bild von } 1 \in O_V \text{ bei der natürlichen Abbildung } O_V \to O_V(D).$$

Ist

$$D = \sum_i n_i D_i$$

Linearkombination irreduzibler Divisoren D_i, so setzen wir

$$s_D := \prod_i s_{D_i}^{n_i}.$$

Nach Konstruktion gilt dann für jeden effektiven Divisor D (d.h. alle Koeffizienten sind ≥0)

$$s_D := \text{Bild von } 1 \in O_V \text{ bei der natürlichen Abbildung } O_V \to O_V(D).$$

Man kann dann $O_V(D)$ auf genau eine Weise zu einer metrisierten Garbe machen, sodaß für alle $\infty \in S_{inf}$ gilt[24]

$$v_\infty(s_D) = 0.$$

Die so entstehende metrisierte umkehrbare Garbe wollen wir im folgenden mit

$$O_V(D)$$

bezeichnen. Nach Konstruktion ist s_D ein rationaler Schnitt dieser Garbe mit

$$div(s_D) = div^\wedge(s_D) = D.$$

---

[24] Zunächst mache man $O_V(D)$ auf irgendeine Weise zu einer metrisierten Garbe, was möglich ist nach 2.3.5. Die Metriken auf den unendlich fernen Fasern sind, da sie zulässig sein sollen, nach der Bemerkung von 2.3.2 bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Durch Multiplikation der Metriken mit konstanten positiven Faktoren erreichen wir wie in 2.3.6 ,daß die Bedingungen $v_\infty(s_0) = 0$ erfüllt werden. Die zu wählenden Faktoren sind dadurch eindeutig festgelegt (da ihre Logarithmen es sind).

2.3.11 Der Beweis von Proposition von 2.3.5

Wir zeigen jetzt, jedes holomorphe Geradenbündel L auf einer kompakten Riemannschen Fläche X mit der Metrik $d\mu$ besitzt eine zulässige hermitische Metrik. (vgl. 2.3.5 Proposition 2.1).

2.3.11. a) Lemma 2.1: Existenz harmonischer Metriken auf Bündeln des Grades 0

Sei L ein Geradenbündel des Grades 0 auf einer kompakten Riemannschen Fläche X. Dann gibt es auf L eine harmonische Metrik, d.h.eine Metrik deren Krümmung gleich Null ist.

Beweis. Wir betrachten die Exponentialsequenz in der glatten Kategorie,

$$0 \to Z \to C_X^\infty \xrightarrow{\exp} C_X^\infty \to 0$$

und die zugehörige lange Kohomologiesequenz,

$$H^1(X, C_X^\infty) \to H^1(X, C_X^\infty) \xrightarrow{c_1} H^2(X, Z) \to H^2(X, C_X^\infty).$$

Da C_X^∞ kohomologisch trivial ist, ist die erste Chern-Klasse in der glatten Kategorie ein Isomorphismus,

$$c_1: H^1(X, C_X^\infty) \xrightarrow{\cong} H^2(X, Z)$$

Außerdem ist X orientierbar, $H^2(X, Z) \cong Z$ und die Grad-Abbildung

$$\deg: H^2(X, Z) \to Z, \quad \deg c_1(L) =^{25} \int_X c_1(L)$$

ein Isomorphismus. Ein Geradenbündel vom Grad 0 ist somit in der glatten Kategorie isomorph zum trivialen Bündel, und besitzt damit dessen “konstante” Metrik , d.h. eine Metrik mit der Krümmung Null.

QED.

2.3.11. b) Lemma 2.2: Existenz zulässiger Metriken bei geeigneter Wahl von dμ

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann gibt es mindestens eine Volumenform $d\mu_0$ auf X derart, daß jedes Geradenbündel $L \to X$ eine (im Sinne von 2.3.2) zulässige hermitische Metrik besitzt.

Beweis. <u>1. Schritt</u>: Reduktion auf die Konstruktion eines gewissen Bündels L_0.

Wir werden ein Geradenbündel L_0 auf X konstruieren und eine Metrik $\|\ \|$ auf L_0 mit der Eigenschaft, daß die (1,1)-Form

$$\frac{1}{\pi i}\,\partial\bar\partial \log \| s \| > 0$$

positiv ist für jeden nicht-trivialen lokalen holomorphen Schnitt[26] s von L_0, keine Nullstellen besitzt und unabhängig von der speziellen Wahl des Schnitts ist[27]. Wir definieren dann die Volumenform $d\mu_0$ von X, indem wir setzen

---

[25] vgl. Griffiths & Harris: Principles of algebraic geometry, p. 144

[26] Genauer: s soll keine Nullstellen in der betrachteten Umgebung besitzen.

[27] Die lokal definierten (1,1)-Formen verheften sich also zu einer global definierten (1,1)-Form ω mit

$$d\mu_0 := \frac{1}{\deg L_0} \cdot \frac{1}{\pi i}\, \partial\bar\partial \log \| s \|.$$

Die gegebene Metrik auf L_0 wird auf diese Weise zu einer zulässigen Metrik. Die Potenzen dieser Metrik liefern zulässige Metriken auf den Tensorpotenzen von L_0.

Ist L ein beliebiges Geradenbündel auf X, so gibt es ganze Zahlen m und n mit der Eigenschaft, daß das Geradenbündel

$$N := L^{\otimes n} \otimes L_0^{\otimes -m}$$

den Grad Null hat und demzufolge eine harmonische Metrik besitzt (nach 211 a)). Nun gilt

$$L^{\otimes n} = N \otimes L_0^{\otimes m}$$

Das Produkt aus der harmonischen Metrik von N und der m-ten Potenz der Metrik von L_0 ist ein zulässige Metrik von $L^{\otimes n}$ und deren n-te Wurzel ein zulässige Metrik von L. Dies reduziert den Beweis der Behauptung auf die Konstruktion des Geradenbündels L_0 (und dessen oben beschriebener (1,1)-Form).

2. Schritt: Konstruktion von L_0 .

Nach dem Einbettungssatz von Kodaira können wir X als algebraische Kurve im N-dimensionalen projektiven Raum auffassen, sagen wir

$$X \subseteq P(V) = P^N$$

mit einem komplexen Vektorraum V der Dimension

$$\dim V = N+1.$$

Wir wählen eine beliebige hermitische Metrik $\| \ \|$ auf V. Diese definiert eine hermitische Metrik auf dem trivialen Vektorraumbündel

$$V \times P^N.$$

Die Metrik auf dem trivialen Bündel induziert eine Metrik auf dem tautologischen Teilbündel

$$O(-1) \subseteq V \times P^N.$$

Die global definierte Krümmung dieser Metrik ist lokal von der Gestalt

$$\partial\bar\partial \log \|s\|,$$

wobei s einen lokalen Schnitt desTeilbündels bezeichnet, der nirgends Null ist. Das $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}$-fache dieser (1,1)-Form,

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\, \partial\bar\partial \log \|s\| = - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot \partial\bar\partial \log \|s\|$$

ist gerade die (1,1)-Form der Fubini-Study-Metrik des P^N (vgl. z.B. Griffiths & Harris: Principles of algebraic geometry, p. 31). Insbesondere ist diese Form streng positiv (und eine Kähler-Metrik). Diese Eigenschaft bleibt erhalten beim Einschränken auf die Kurve X. Wir können also

$$L_0 := O(-1)^{-1}|_X = O_X(1)$$

$$\int_X \omega > 0.$$

Insbesondere ist der Grad des Bündel ungleich Null.

setzen (und als Metrik die inverse Metrik der Einschränkung auf $O_X(-1)$ der trivialen Metrik von V×X verwenden).
QED.

2.3.11 c) Lemma 2.3:Abschluß des Beweises

Die Aussage von 2.3.5 ist für beliebige (normierte)[28] Metriken $d\mu$ auf der Riemannschen Fläche X richtig.

Beweis. Sei $L \to X$ ein Geradenbündel auf X und bezeichne $\| \ \|_0$ die hermitische Metrik auf L, die bezüglich der in 2.3.11 b) konstruierten Metrik $d\mu_0$ auf X zulässig ist, d.h.

$$-\frac{1}{2\pi}\,\Delta \log \| \ \|_0 \, dxdy = \deg L \cdot d\mu_0 \,.$$

Die vorgegebene Metrik ist von der Gestalt

$$d\mu = \rho \, d\mu_0$$

mit einer glatten positiven Funktion

$$\rho\colon X \to \mathbb{R}^+.$$

Wir müssen eine Metrik

$$\| \ \| = \varphi \cdot \| \ \|_0$$

auf L finden mit

$$-\frac{1}{2\pi}\,\Delta \log \| \ \| \, dxdy = \deg L \cdot d\mu \,.$$

Mit anderen Worten, gesucht ist eine glatte positive Funktion

$$\varphi\colon X \to \mathbb{R}^+$$

mit

$$-\frac{1}{2\pi}\,\Delta \log \varphi \, dxdy - \frac{1}{2\pi}\,\Delta \log \| \ \|_0 \, dxdy = \deg L \cdot \rho \, d\mu_0$$

d.h. mit

$$-\frac{1}{2\pi}\,\Delta \log \varphi \, dxdy = \deg L \cdot (\rho - 1) \cdot d\mu_0 \,.$$

Dies ist die Poisson-Gleichung. Sie ist genau dann lösbar, wenn das Integral über die rechte Seite Null ist[29]:

$$0 = \int_X (\rho - 1) \cdot d\mu_0 = \int_X d\mu - \int_X d\mu_0 \,.$$

Das ist aber der Fall, weil die von uns betrachteten Maße durch die Bedingung

---

[28] d.h. $\int_X d\mu = 1$, vgl. 2.1.3.

[29] Nach der Anmerkung von 2.2.4 ist diese Gleichung zur Laplace-Gleichung

$$(*d*d* + d*d*) \log \varphi = \deg L \cdot (\rho - 1)$$

äquivalent. Diese ist genau dann lösbar, wenn die rechte Seite auf dem Raum der harmonischen Funktionen senkrecht steht. Letzterer Raum ist 1-dimensional (nach dem Satz von Hodge) und wird als Vektorraum von der konstanten Funktion 1 erzeugt. Die Lösbarkeitsbedingung lautet also

$$0 = \langle \rho - 1, 1 \rangle = \int_X (\rho - 1) *1 = \int_X (\rho - 1) \cdot d\mu_0 \,.$$

$$\int_X d\mu = \int_X d\mu_0 = 1$$

normiert sein sollen. Da das Argument von Δ die Funktion log φ ist, ist gesichert, daß φ automatisch positiv ist.
QED.

2.3.12 Bemerkungen

(i) Es ist nicht nötig, von den betrachteten Maßen $d\mu$ auf X die strenge Positivität zu fordern. Man kann zulassen, daß $d\mu$ in endlich vielen Punkten Null ist.

(ii) Die Existenz der globalen Gleichung

$$\varphi_p(z) = 0$$

eines Punkten $p \in X$ (vgl. 2.2.4) kann man jetzt wie folgt einsehen.

Betrachten wir die Garbe $L := O_X(p)$ und versehen diese mit der (im Sinne von 2.3.2) zulässigen hermitischen Metrik $\| \ \|$. Sei s ein holomorpher Schnitt von L mit der einzigen Nullstelle p . Dann kann man

$$\varphi_p(z) = c\cdot\|s\|$$

setzen, wobei die Konstante c so zu wählen ist, daß gilt

$$\int_X \log \varphi_P \, d\mu = 0$$

(vgl. 2.2.4 (**)).

2.4 Zur Theorie der bilinearen Differentiale

2.5. Die Green-Funktion einer Riemannschen Fläche

2.5.1 Definition 3.1

Seien X eine kompakte Riemannsche Fläche mit der Volumenform $d\mu$ und

$$\varphi_p : X \to R$$

eine globale Gleichung des Punktes $p \in X$ bezüglich $d\mu$ (im Sinne von 1.4). Dann heißt die Abbildung

$$g: X{\times}X \to R,\ (p,z)\ a \log \varphi_p(z),$$

<u>Greensche Funktion</u> von X bezüglich $d\mu$. Wir setzen

$$G(p, z) := \varphi_p(z),$$

d.h. es gelte

$$g(p,z) = \log G(p,z).$$

Bemerkung

Diese Definition unterscheidet sich etwas von der allgemein üblichen. Die Funktion g(p,q) ist gerade der Schnittindex,

$g(p,q) = (p\cdot q)_X$,

aufgefaßt als Funktion von p und q.

2.5.2 Eigenschaften der Funktion $G(p,q)$

1) $G: X\times X - \Delta \to R$ ist eine nicht-negative glatte Funktion außerhalb der Diagonalen Δ.
2) G besitzt entlang der Diagonalen eine Nullstelle erster Ordnung.
3) $-\frac{1}{2\pi}\Delta_z \log G(p,z) = \frac{1}{2\pi i}\partial\bar\partial \log G(p,z)^2 = d\mu(z)$.
4) $G(p,z) = G(z,p)$.
5) $\int_X \log G(p,z)\, d\mu(z) = 0$.

Durch die obigen Eigenschaften ist die Funktion G eindeutig festgelegt.

Die Glattheit von G als Funktion von zwei Variablen erfordert natürlich Aufmerksamkeit. Wir werden hier auf einen Beweis verzichten.

2.5.3 Beispiel

Seien $X = P^1_C$, z eine affine Koordinate auf P^1 und

$$d\mu := \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{|dz|^2}{(1+|z|^2)^2} .$$

Dann ist

$$G^2(a,z) = e\cdot\frac{|a-z|^2}{(1+|a|^2)(1+|z|^2)} .$$

Man überprüft leicht ob die so definierte Funktion G die obigen Eigenschaft hat.

2.5.4 Die durch G definierte hermitische Metrik

Die Funktion $G(p,z)$ auf $X\times X$ definiert eine hermitische Metrik auf dem Geradenbündel

$$O_{X\times X}(-\Delta_X)$$

Dabei bezeichne Δ_X die Diagonale in $X\times X$. Die Metrik ist definiert durch die Bedingung

$$\|s_\Delta(z)\| := G(p,z).$$

Dabei bezeichne s_Δ den Schnitt

$$s_\Delta \in O_{X\times X}(\Delta_X),$$

welcher gerade das kanonische Bild von $1\in O_{X\times X}$ bei der natürlichen Abbildung

$$O_{X\times X} \to O_{X\times X}(\Delta_X)$$

ist. Wir bezeichnen diese Metrik im folgenden mit $\| \ \|$.

2.5.5 Die kanonische hermitische Metrik auf dem Kotangentialbündel

Zur Formulierung des nachfolgenden klassischen Resultats benötigen wir noch die kanonische hermitische Metrik auf dem Kotangentialbündel Ω^1_X einer kompakten Riemannschen Fläche X. Sie ist definiert durch

$$< \, , \, > : \Omega^1_X \times \Omega^1_X \to C, \; (\xi, \eta) \; a \; <\xi, \eta> := i \cdot \int_X \xi \# \eta \; .$$

2.5.6 Proposition 3.1: Die Krümmung der durch G definierten Metrik auf X×X

Seien X eine kompakte Riemannsche Fläche mit der Volumenform $d\mu$, die zugehörigen Greensche Funktione und

$$\| \; \|$$

die durch $G(p,z) = e^{g(p,z)}$ definierte Metrik auf $O_{X\times X}(\Delta_X)$. Weiter sei

$$\omega_1 \; , ..., \omega_g \in H^0(X, \Omega^1_X)$$

eine orthonormierte Basis (bezüglich der kanonischen Metrik 3.5). Dann gilt

$$(- \frac{1}{2\pi} \Delta \log \| \; \| \, dxdy =) \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot \; \partial\bar{\partial} \log \| \; \|^2$$

$$= p_1^* d\mu + p_2^* d\mu - \sqrt{-1} \cdot \sum_{k=1}^{g} (p_1^* \omega_k \# \, p_2^* \bar{\omega}_k + p_1^* \bar{\omega}_k \# \, p_2^* \omega_k).$$

Beweis. Siehe [1], Chapter 4, §10. Wir beschränken uns hier auf eine kurze Beweis-Skitze.

Eine anspruchsvollere Formulierung der Behauptung besagt, die rechte Seite der zu beweisenden Identität ist eine erzeugender Kern für die holomorphen Differentiale auf X, d.h.

$$(*) \qquad (\int_X \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot \frac{\partial^2 \log G^2}{\partial z \partial p} dz \# \eta(z)) \, dp = \eta(p).$$

für jedes holomorphe Differential η. Aus (*) und der Tatsache, daß

$$\frac{\partial^2 \log G^2}{\partial z \partial p} dz \; dp$$

holomorph ist bezüglich z folgt die Behauptung. Zum Beweis von (*) schreibt man das Integral auf der linken Seite in der Gestalt

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_X d(\frac{\partial \log G^2}{\partial p} \cdot \; \eta)$$

und wendet den Satz von Stokes an auf die Fläche X, aus der man eine kleine Kreisscheibe um den Punkt p entfernt.
QED.

2.5.7 Proposition 2.5.2: Vergleich der Greenschen Funktionen für unterschiedliche Metriken

Seien X eine kompakte Riemannsche Fläche, $d\mu'$ und $d\mu''$ zwei Volumenformen auf X, und $g' = \log G'$ bzw. $g''= \log G''$ die zugehörigen Greenschen Funktionen.
Weiter sei

$$\varphi: X \to R$$

eine glatte Funktion mit

$$(1) \qquad \Delta \log \varphi \; dxdy = d\mu' - d\mu''$$

welche durch die Bedingung

$$(2) \qquad \int_X \log \varphi\cdot(d\mu' + d\mu'') = 0$$

normiert ist.
Dann gilt

$$G''(p,z) = \varphi(p)\cdot\varphi(z)\cdot G'(p,z).$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, die Funktion

$$\varphi(p)\cdot\varphi(z)\cdot G'(p,z)$$

genügt den Bedingungen 1) - 5) von 3.2 bezüglich G. Für die Bedingungen 1) - 4) ist das offensichtlich. Es reicht also zu zeigen,

$$\int_X \log\,(\varphi(p)\cdot\varphi(z)\cdot G'(p,z))d\mu''(z) = 0.$$

Das Integral läßt sich mit Hilfe von (2) und der Standard-Eigenschaften 3.2 der Green-Funktion G' in der folgenden Gestalt schreiben.

$$\log \varphi(P) - \int_X \log \varphi(z)\, d\mu'(z) + \int_X \log G'(p,z)\,(d\mu''(z) - d\mu'(z))$$

Durch Anwenden der Greenschen Formel erhalten wir die Behauptung:

$$\text{3. Summand} = - \int_X \log G'(p,z)\, \Delta \log \varphi\, dxdy \qquad \text{(nach (1))}$$

$$= - \int_X \log \varphi\cdot\Delta \log G'(p,z)\, dxdy - \log \varphi(p) \qquad \text{(nach Green, 1.6)}$$

$$= 2\pi\sqrt{-1} \int_X \log \varphi\, d\mu' - \log \varphi(p) \qquad \text{(nach 3.2 Eigenschaft 3))}$$

Der dritten Summand ist also das Negative der Summe der beiden ersten Summanden. **QED**.

2.6. Kanonische Klasse und Adjunktionsformel

2.6.1 Theorem 4.1

Bei geeigneter Wahl der Metriken auf den unendlich fernen Fasern von V gibt es ein metrisiertes Geradenbündel $K \to V$ auf V mit folgender Eigenschaft:
Ist $C \subset V$ ein glatter horizontaler Divisor, der nicht durch die singulären Punkte der Fasern von

$$V \to S = \operatorname{Spec} \Lambda$$

geht[30] und bezeichnet δ_C die absolute Diskriminante von C, d.h. die Diskriminante des Körpers L = K(C) der rationalen Funktionen auf C über Q, so besteht die folgende Adjunktionsformel.

$$(C\cdot C) + (C\cdot K) = \log |\delta_C|.$$

Bemerkung
Es ist naheliegend, die Divisorklasse von K kanonische Klasse von V zu nennen.

---

[30] In der Arbeit steht statt 'singuläre' Punkte 'Doppelpunkte'. Da $V \to S$ ein stabiles Modell einer Kurve über K ist, treten als einzige Singularitäten bei den Fasern einfach Doppelpunkte auf.

Beweis. Sei [31]$\omega_{V/S}$ die umkehrbare Garbe auf V, welche außerhalb der singulären Punkte der Fasern von $V \to S$ mit der Garbe der relativen 1-Formen übereinstimmt,

$\omega_{V/S} = \Omega^1_{V/S}$ außerhalb der singulären Punkte der Fasern von $V \to S$.

Wir werden auf den unendlich fernen Fasern

$$(\omega_{V/S})_\infty = \Omega^1_\infty$$

geeignete Metriken einführen. Zunächst nehmen wir an, die Metriken sind irgendwie gewählt. Wir betrachten die beiden folgenden kurzen exakten Garbensequenzen.

(1) $$0 \to \partial_{C/S} \to O_C \xrightarrow{d} \Omega^1_{C/S}$$

(2) $$0 \to O_V(-C)|_C \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{V/S}|_C \to \Omega^1_{C/S} \to 0.$$

Die zweite Sequenz ist gerade die zweite Standard-Sequenz zu $C \subset V \to S$ (vgl. Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Prop. II.8.12). Sie ist auf der linken Seite exakt, weil C als Divisor auf dem regulären Schema V ein vollständiger Durchschnitt ist. Der O_C-Modul

$$\partial_{C/S} := \text{Ker } d$$

der ersten Sequenz ist gerade das Ideal des Verzweigungsortes des endlichen Morphismus $C \to S$. Das rechte und das mittlere Bündel der exakten Sequenze (2) betrachten wir als metrisierte Geradenbündel. Wegen

$$C = \text{Spec } \Gamma,$$

wobei Γ der Ring der ganzen Zahlen von $L = K(C)$ ist, ist für alle diese Bündel der Grad definiert. Wir nehmen jetzt an, daß die folgende Bedingung erfüllt ist.

(3) α_∞ ist eine Isometrie für jedes ∞.

Durch Vergleich von Graden erhalten wir dann[32]

---

[31] Mit anderen Worten, $\omega_{V/S}$ ist eine relative Version der dualisierenden Garbe im Sinne von Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Definition vor Prop. III.7.2. Diese Garbe existiert nach Prop. III.7.4 und ist umkehrbar nach Theorem III.7.11. Es gilt der Satz von Riemann-Roch, Ex. IV.1.9

[32] Es gilt nach 2.9 Proposition 2.3:

$$(\omega_{V/S}\cdot C) = \deg \omega_{V/S}|_C = \deg \Omega^1_{V/S}|_C$$
$$(C\cdot C) = (C\cdot O_V(C)) = \deg O_V(C)|_C = -\deg O_V(-C)|_C$$

Zur Berechnung der Grade rechts kann man einen globalen rationalen Schnitt

$$s \in \deg O_V(-C)|_C \subseteq \Omega^1_{V/S}|_C$$

und dann den Grad von div (s) berechnen. Weil C glatt ist und die Singularitäten der Fasern von $V \to S$ meidet, sind die lokalen Ringe dieser Garben diskrete Bewertungsringe, also insbesondere Hauptidealringe. Die Sequenz (2) hat lokal in jedem Punkt $p\in C$ die Gestalt

$$0 \to tO \to O \to O/tO \to 0,$$

wobei O den lokalen Ring von C in p bezeichnet. Der Schnitt s definiert ein Element $s\in tO$ und damit eine exakte Sequenz

$$0 \to tO/sO \to O/sO \to O/tO \to 0.$$

Dies ist eine exakte Sequenz von Moduln endlicher Länge, d.h. es gilt

$$l(O/sO) = l(tO/sO) + l(O/tO).$$

Die beiden ersten Summanden sind Beiträge zur Berechnung des (endlichen Teils) der Grade der Garben $\Omega^1_{V/S}|_C$ und $O_V(-C)|_C$ im Punkt p. Bezeichnen wir diese Beiträge mit $\deg_p$ so kann man die Identität in der folgenden Gestalt schreiben.

(4) $$(\omega_{V/S}\cdot C) + (C\cdot C) = \log |\delta_{C/S}|$$

wobei $\delta_{C/S}$ die relative Diskriminante von $C \to S$ bezeichnet.
Nun gilt

$$\delta_C =^{33} (\delta_S)^{[L:K]}\ \delta_{C/S}$$

d.h.

$$\begin{aligned}\log |\delta_{C/S}| &= \log |\delta_C| - [L:K]\cdot\log |\delta_S| \\ &= \log |\delta_C| - \log |f^*\delta_S|_C|\end{aligned}$$

Dabei sei
$f: V \to S$
der Strukturmorphismus, d.h. $f^*\delta_S|_C$ ist das inverse Bild von δ_S bei

$$C \subset V \to S.$$

Man beachte, jeder Punkt von C über einem festen Punkt $p \in S$ besitzt [L:K] konjugierte. Bei Bilden von $f^*\delta_S|_C$ kommt also jeder Faktor [L:K]-fach vor. Damit können wir schreiben[34]

$$\deg_p \Omega^1_{V/S}|_C = \deg_p O_V(-C)|_C + l(\Omega^1_{C/S,p})\cdot\log N_p$$

Dabei bezeichne N_p wie bisher die Ordnung des Restklassenkörpers von p. Nach Voraussetzung (3) besteht eine solche Relation auch für die unendlich fernen Punkte, wobei der zweite Summand rechts in dieser Situation Null ist. Durch Summation über alle Punkte erhalten wir damit

$$\deg \Omega^1_{V/S}|_C = \deg \deg O_V(-C)|_C + \sum_{p\in C} l(\Omega^1_{C/S,p})\cdot\log N_p,$$

d.h.

$$(\omega_{V/S}\cdot C) = - (C\cdot C) + \sum_{p\in C} l(\Omega^1_{C/S,p})\cdot\log N_p$$

Der zweite Summand rechts ist gerade der (klassische) Grad des Verzweigungsdivisors (vgl. Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Definition nach Prop. IV.2.2), d.h.

$$l(\Omega^1_{C/S,p}) = e_p - 1$$

wobei e_p den Verzweigungsindex im Punkt p bezeichne. Im schwach verzweigten Fall ist dies die Ordnung der Differente Diff von $C \to S$ im Punkt p (vgl. Cassels & Fröhlich: Algebraic number theory, Chap. I, Th. 5.2), d.h.

$$(\omega_{V/S}\cdot C) = - (C\cdot C) + \sum_{p\in C} - \log \|\, \mathrm{Diff}_p \|_p$$

Wegen

Norm (Differente) = Diskriminante

(vgl. Cassels & Fröhlich, Chap. I, Formel (4) nach Cor. 2) kann man nach der Produkt-Formel anstelle der Differente auch die Diskriminante einsetzen (wenn man über die Punkte von $S = \mathrm{Spec}\ \Lambda$ summierte statt über die von $C = \mathrm{Spec}\ \Gamma$).

[33] siehe Cassels & Fröhlich: Algebraic number theory, Chap. I Prop. 4.7(ii). Man beachte, die dortige Formel bezieht sich auf die lokalen Diskriminanten. Wir betrachten die globalen, die Produkte aller lokalen Diskriminanten. Insbesondere fällt dabei das Anwenden der Norm weg.
[34] Die Bemerkung von 0.3 gilt nicht nur für den Grad

$$\deg \mathrm{div}(\alpha)$$

$$\log|\delta_{C/S}| = \log|\delta_C| + \deg f^*\delta_S|_C$$
$$= \log|\delta_C| + (f^*\delta_S\cdot C)$$

Einsetzen in (4) liefert

$$(\omega_{V/S}\otimes(f^*\delta_S)^{-1}\cdot C) + (C\cdot C) = \log|\delta_C|.$$

Wir können also $K = \omega_{V/S}\otimes(f^*\delta_S)^{-1}$ setzen.

Wir haben uns noch um Bedingung (3) zu kümmern. Dies ist eine Frage zu einer einzelnen Riemannschen Fläche X und einem einzelnen Punkt $p\in X$. Wir haben zu entscheiden, wann der natürliche Isomorphismus[35]

$$O_X(-p)|_p \xrightarrow{\alpha_p} \Omega^1_X|_p$$

der aus dem linken Morphismus von (2) durch Basiswechsel entsteht, eine Isometrie ist. Die hermitische Metrik auf

$$O_X(-p)$$

ergibt sich aus der Definition von $O_V(-C)$ als metrisiertes Geradenbündel (vgl. Abschnitt 2). Die Metrik ist durch die Bedingung

$$\|s_0\| = \varphi_p^{-1}$$

gegeben, wobei s_0 der kanonische Schnitt von $O_X(-p)$ mit dem einzigen (einfachen) Pol in p ist. Die Bedingung, daß die Isomorphismen α_p Isometrien sein sollen definiert somit eine hermitische Metrik auf den Bündeln Ω^1_X .Wenn die Krümmungsform dieser Metrik proportional ist zur Volumenform $d\mu$, so können wir diese Metrik bei der Definition von $\omega_{V/S}$ als metrisiertes Geradenbündel verwenden und damit den Beweis abschließen. Berechnen wir also die Krümmungsform dieser Metrik.

Die Isomorphismen α_p verheften sich zu einem global definierten Isomorphismus[36]

$$\alpha\colon O_{X\times X}(-\Delta_X)|_{\Delta_X} \to \Omega^1_X ,$$

wobei $\Delta_X \subseteq X\times X$ wie bisher die Diagonale bezeichnet. Die von uns konstruierte Metrik auf Ω^1_X entsteht daher durch Einschränken auf die Diagonale aus der Metrik auf der Garbe $O_{X\times X}(-\Delta_X)$, welche durch die Funktion $G(p,z)^{-1}$ gegeben ist. Die Krümmungsform der Metrik auf Ω^1_X entsteht daher auch durch Einschränken der entsprechenden Krümmungsform auf X×X. Letztere haben wir in 3.6 berechnet. Durch Einschränken der dort angegeben Krümmungsform auf die Diagonale erhalten wir

---

eines Hauptdivisors. Für α kann man auch den Schnitt in ein Geradenbündel einsetzen.

[35] Nach Voraussetzung ist die allgemeine Faser von $V \to S$ glatt, d.h. die Garbe $\Omega^1_{C/S}$ ist in endlich vielen endlichen Punkten konzentriert.

[36] Im wesentlichen definiert dieser Isomorphismus die Garbe Ω^1_X.

$$\sqrt{-1}\cdot\sum_{k=1}^{g}(\omega_k\#\varpi_k+\varpi_k\#\,\omega_k)-2d\mu$$

Die Zulässigkeit der Metrik bedeutet, dieser Ausdruck muß gleich

$$\deg\Omega^1_X\,d\mu=(2g-2)\,d\mu$$

sein, d.h.

$$d\mu=\frac{1}{2g}\sqrt{-1}\cdot\sum_{k=1}^{g}(\omega_k\#\varpi_k+\varpi_k\#\,\omega_k)$$

Wenn die wir Metriken $d\mu_\infty$ durch diese Formel definieren, so erhalten wir die Gültigkeit der Adjunktionsformel.
QED.

2.7. Wechsel der Metrik

2-7.1 Wechsel der Bündelmetrik bei einem Welchsel der Metrik von X

In vorigen Abschnitt haben wir diejenige Metrik beschrieben, welche allen anderen vorzuziehen ist. Noch besser wäre es jedoch, ganz ohne Metrik auszukommen. Es erweist sich, daß dies im üblichen Sinne möglich ist.

Seien $d\mu'$ und $d\mu''$ zwei Volumenformen auf der Riemannschen Fläche X und sei

$$\varphi: X\to R$$

die Funktion von 3.7 Proposition 3.2, d.h.

$$\frac{1}{2\pi}\Delta\log\varphi\,dx\,dy=d\mu'-d\mu''$$

$$\int_X\log\varphi\,(d\mu'+d\mu'')=0.$$

Weiter sei $L\to X$ ein Geradenbündel mit der zulässigen Metrik $\|\ \|'$, d.h.

$$-\frac{1}{2\pi}\Delta\log\|\ \|'dxdy=\frac{1}{2\pi i}\partial\bar\partial\log\|\ \|'^2=\deg L\cdot d\mu'.$$

Dann gilt für die Metrik

$$\|\ \|'':=\varphi^{\deg L}\cdot\|\ \|'$$

die Relation

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi}\Delta\log\|\ \|''&=-\frac{1}{2\pi}\Delta\log\|\ \|'dxdy\ -\frac{\deg L}{2\pi}\Delta\log\varphi\,dxdy\\&=\deg L\cdot d\mu'-\deg L\cdot(d\mu'-d\mu'')\\&=\deg L\cdot d\mu''.\end{aligned}$$

Wir erhalten auf diese Weise die Möglichkeit jedem metrisierten Geradenbündel bezüglich der Metrik $d\mu'$ von X ein metrisierten Geradenbündel mit derselben Garbe bezüglich der Metrik $d\mu''$ zuzuordnen.
Leider ist dieser Übergang nicht von geometrischer Natur: der Divisor eines Schnittes änder bei diesem Übergang die Koeffizienten seiner unendlich fernen Komponenten. Es gilt jedoch:

2.7.2 Proposition 5.1: Erhaltung des Schnitt-Index beim Wechsel der Metrik

Der Schnitt-Index bleibt beim oben beschriebenen Übergang von einer Metrik zu einer anderen erhalten.

Wir werden hier keinen Beweis angeben. Es handelt sich um eine einfache Rechnung auf einer einzelnen Riemannschen Fläche unter Verwendung der Greenschen Formel 1.6.

2.7.3 Inverses Bild eines metrisierten Geradenbündels

Da wir jetzt die Möglichkeit haben, von einer Metrik zu einer anderen überzugehen, können wir jetzt das inverse Bild eines metrisierten Geradenbündels definieren. Sei

$$\alpha: X \to Y$$

eine holomorphe Abbildung des Grades d von kompakten Riemannschen Flächen,

$$\deg \alpha = d,$$

und sei $L \to Y$ ein metrisiertes Geradenbündel auf Y bezüglich der Volumenform

$$d\mu_Y$$

auf Y. Weiter sei auf X die Volumenform

$$d\mu_X$$

gegeben. Wir setzen

$$d\mu' := \frac{1}{d}\alpha^* d\mu_Y .$$

Das Geradenbündel α^*L ist dann bezüglich der Metrik $d\mu'$ in natürlicher Weise metrisiert. Wir gehen in der in 5.1 beschriebenen Weise von der Metrik $d\mu'$ zur gegebenen Metrik $d\mu_X$ über und erhalten ein bezüglich letzterer metrisiertes Geradenbündel auf X, welches (metrisiertes) inverses Bild von L heißt.

2.7,4 Proposition 5.2: Verhalten den Schnitt-Index bei inversen Bildern

Beim Übergang zu den inversen Bildern entlang einer holomorphen Abbildung des Grades d multipliziert sich der Schnitt-Index mit d.

Beweis: leicht.

2.8 Literatur

[1] Schiffer, M., Spencer, D.K.:Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton University Press 1954
(иффер, М., Спенсер, Д.К.: Функ ионалы на конецныш римановыш повершностяш, Москва, ИЛ, 1957)

Index

Inhalt