# Introduction to Arakelov theory

# Inhalt


## 1. A SHORT HISTORICAL INTRODUCTION TO INTERSECTION THEORY 3

Theorem of Bezout 3
Intersection multiplicities 5
The Aim of these lectures 7
The situation 7
Example 7
Subexample 7
Our basic literature 7

## 2. ARAKELOV'S WORK ON INTERSECTION THEORY 8

**2.1 Definitionen 8**
2.1.1 Die Situation 8
2.1.2 Divisoren 9
2.1.3 Divisoren auf dem Basis-Schema S = Spec (Λ) 10
2.1.4 Die Hauptdivisoren auf V 11

**2.2 Der Scbnitt-Index 13**
2.2.1 Der lokale Schnitt-Index in einem endlichen Punkt 13
2.2.2 Der Fall daß einer der Divisoren horizontal ist 14
2.2.3 Der globale Schnitt-Index 16
2.2.4 Der Schnitt-Index für Punkte einer Riemannschen Fläche 17
2.2.5 Proposition 1.1 19
2.2.6 Bemerkung: Greensche Formel 20
2.2.7 Proposition 1.2 21

**2.3 Umkehrbare hermitische Garben 23**
2.3.1 Hermitische Vektorraumbündel 23
2.3.2 Zulässige Metriken eines hermitischen Vektorraumbündels 24
2.3.3 Metrisierte Geradenbündel auf dem Modell V 24
2.3.4 Die Divisorklasse eines metrisierten Geradenbündels 25
2.3.5 Proposition 2.1 : Die Existenz zulässiger Metriken. 25
2.3.6 Das metrisierte Geradenbündel zu einer Divisorklasse 26
2.3.7 Proposition 2.2: Die Divisorklassengruppe als Gruppe von metrisierten Geradenbündeln 26
2.3.8 Die Situation im 1-dimensionalen Fall 26
2.3.9 Proposition 2.3: Der Schnitt-Index als Grad eines metrisierten Geradenbündels 27
2.3.10 Die metrisierte Garbe eines endlichen Divisors und der zugehörige kanonische Schnitt 28
2.3.11 Der Beweis von Proposition von 2.3.5 29
2.3.12 Bemerkungen 32

**2.4 Zur Theorie der bilinearen Differentiale 32**

**2.5. Die Green-Funktion einer Riemannschen Fläche 32**
2.5.1 Definition 3.1 32
2.5.2 Eigenschaften der Funktion G(p,q) 32
2.5.3 Beispiel 33
2.5.4 Die durch G definierte hermitische Metrik 33
2.5.5 Die kanonische hermitische Metrik auf dem Kotangentialbündel 33
2.5.6 Proposition 3.1: Die Krümmung der durch G definierten Metrik auf X×X 33
2.5.7 Proposition 2.5.2: Vergleich der Greenschen Funktionen für unterschiedliche Metriken 34

**2.6. Kanonische Klasse und Adjunktionsformel** **35**
2.6.1 Theorem 4.1 35

**2.7. Wechsel der Metrik** **38**
2-7.1 Wechsel der Bündelmetrik bei einem Welchsel der Metrik von X 38
2.7.2 Proposition 5.1: Erhaltung des Schnitt-Index beim Wechsel der Metrik 39
2.7.3 Inverses Bild eines metrisierten Geradenbündels 39
2.7,4 Proposition 5.2: Verhalten den Schnitt-Index bei inversen Bildern 40

**2.8 Literatur** **40**

**3. CALCULUS ON ARTIHMETIC SURFACES ACCORDING TO FALTINGS** **40**

**Notations** **40**

**1. Introduction** **40**
1.1. Arithmetic surfaces, the main results, the methods 40
1.2 Riemann-Roch theorem 41
1.3 Hodge index theorem 41
1.4 Noether's formula 42
1.5 Positivity of the relative dualizing sheaf 42
1.6 The contents of the paper 42
1.7 Donations 42

**2. Review of Arakelov's work** **42**
2.1 The situation over a function field 42
2.2 Our situation 42
2.3 Finitie and infinite places, fibres over the infinite places 42
2.4 Definition: Arakelov divisors 42
2.5 The intersection pairing 43
2.6 Local intersection multiplicities and hermitian line bundles 44
2.7 The line bundle associated with an Arakelov divisor 44
2.8 Intersection multiplicity with a section of $p: X \to B$ 44
2.9 Principal Arakelov divisors 45
2.10 Intersection product with principal divisors 46
2.11 The hermitian metrics of the dualizing sheaf at the infinite fibers, the canonical class 46

**3. Analytic part** **47**
3.1 The situation, notation 47
3.2 The canonical metric on the global holomorphic 1-forms 47
3.3 The curvature of a hermitian line bundle 47
3.4 A hermitian metric if $L = O(D)$ belongs to an irreducibe finite divisor 48
3.5 Remarks: Green's function $g(p,q)$ as inverse of the Laplace operator 49
3.6 The Fourier expansion of $g(p,q)$, symmetry in p and q 50
3.7 Description of the metric on O(D), permissible metrics 52
3.8 Remarks: About the existence of a hermitian metric on $H^i(X, O(D))$ 53
3.9 The space $\lambda(V)$ associated to a complex vector space 53
3.10 The space $\lambda(X, L)$ 54
3.11 Theorem 1: the canonical metric on $\lambda(X, L)$ 55
3.12. Idea of the further proof: 57
3.13. Properties of the map $\varphi: X^r \to \mathrm{Pic}_{g-1}(X)$, Remarks on the theta divisor 57
3.14 Riemann's theorem 57
3.15. Construction of the theta divisor 57
3.16 Description of the $\kappa$ constant occuring in Riemann's theorem 60
3.17. The singular points of the theta divisor 60

3.18. Construction of the line bundel N 61
3.19. Claim: $N = \varphi^*(O(-W))^{\otimes a}$ for some natural number a 62
3.20. The curvatures on N and N' = O(-W) 64
3.21. Remark 66
3.22 Volume forms on the global sections of bundles of large degree 66
3.23 Theorem 2: lower bound of the volume of the unit ball 66
3.24. Theta-divisors and theta-functions (repetition), a metric on $O(\Theta)$ 68
3.25 Fixing the common factor in the definition of the metric on $\lambda(X,L)$ 69
3.25 A new invariant of compact Riemann surfaces 70
3.26 A conjecture concerning the new invariant 70
3.27 Numerical description of the invariant $\delta(X)$ 70
3.28 Description of the singularities of $\delta(X)$ when X degenerates 71

**4. Riemann-Roch theorem 71**
4.1 Notations 71
4.2 Admissible hermitian line bundle on X and their degree 72
4.3 Arakelov divisors and line bundles with distinguished meromorphic sections, intersection product of admissible line bundles 72
4.4 Intersection product and pullbacks of admissible lines bundles along field extensions 73
4.5 Euler-Poincaré characteristics on Z-modules with Haar measure 73
4.6. The case of modules over R 75
4.7 Euler-Poincaré characteristics for admissible line bundles 76
4.8 Theorem 3: Riemann-Roch theorem for arithmetic surfaces 77

**5. The Hodge index theorem 81**

**6. Noether's formula 81**

**7. Elliptic curves 81**

**8. Zeta-functions 81**

**Index 81**

**References 82**

# 1. A short historical introduction to intersection theory

Intersection theory is a very old mathematical discipline. The statement that a line intersects an conic in two points is a statement of intersection theory and goes back to the old Greeks. The following generalization was an essential step in the theory and is due to Newton(1643-1727) and Bezout (1739-1783).

**Theorem of Bezout**
An two different irreducible algebraic curves in projective plane of degrees a and b, respectively, intersect in a·b points counted with multiplicities.

To be precise:
For any two different plane curves given by irrreducible polynomials

$$f(x, y) = 0$$

and

$$g(x, y) = 0$$

of degrees a and b the number of intersection points is a·b (counted with multiplicities and taking into account the points at infinity).

The considerations below are valid over an algebraically closed field

$$k = \overline{k}.$$

for example $k = \mathbb{C}$.

**Proof**. After a linear (projective) transformation we may assume that all points of intersection are in the finite part of the plane and the that the x-coordinates of the any two different intersection points are different. Thus we are reduced to find the values x = c such that the system

$$f(c, y) = g(c, y) = 0$$

has a solution. For this purpose we need a criterion for two one-variable polynomial to have common zero.

1. Step. Two polynomials $f,g \in k[T]$ have a common zero, iff there are polynomial $s,t \in k[T]$ such that

$$s \cdot f + t \cdot g = 0, \deg s < \deg g \text{ and } \deg t < \deg f.$$

Trivially

$$(-g) \cdot f + f \cdot g = 0.$$

If f and g have a common zero, say $z \in k$, then T-z is a common factor of f and g, and the above identity can be devided by T-z. We obtain

$$s \cdot f + t \cdot g = 0 \text{ with } s := (-g)/(T-z) \text{ and } t := f/(T-z)$$

as required. To prove the converse, consider the identity

$$s \cdot f = - t \cdot g$$

and decompose s, f, t, and g into products of linear polynomial. For degree reasons, the number of linear factors for g is less than those for s. The uniqueness of the decomposition implies that at least one factor occuring in the decomposition of g must occure in the decomposition of f. Hence f and g have a common zero.

Note that the identity $s \cdot f + t \cdot g = 0$ can be considered as a linear relation for the coefficients of s and t. This gives the assertion of the

2. Step. Two polynomials $f,g \in k[T]$ of degrees a and b, respectively, have a common zero, if

(*) $$x^{b-1}f, x^{b-2}f, \dots, xf, f, x^{a-1}g, x^{a-2}g, \dots, xg, g$$

are linearly independent over k.

This is just a translation of the assertion of step 1 ( write s as a linear combination of $x^{a-1}, x^{a-2}, \dots, 1$ and t as one of $x^{b-1}, x^{b-2}, \dots, 1$).

Linear depencecy can be expressed in terms of determinants. This gives the assertion of the next step.

3. Step. Two polynomials $f,g \in k[T]$ of degrees a and b, respectively,

$$f(T) := f_0 + f_1 T + \dots + f_a T^a, \ f_a \neq 0,$$

$$g(T) := g_0 + g_1 T + \dots + g_b T^b, \ g_b \neq 0,$$

have a common zero, iff the determinant below, called resultant of f and g, is zero.

$$\mathrm{Res}(f,g) := \det \begin{pmatrix} f_a & f_{a-1} & \dots & f_0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & f_a & f_{a-1} & \dots & f_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & f_a & f_{a-1} & \dots & f_0 \\ g_b & g_{b-1} & \dots & g_0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & g_b & \dots & & & & \end{pmatrix}$$

Note that the coefficients of f fill the first b = deg g rows of the matrix and the the coefficients of g fill the last a = deg f rows, so that there matrix on the right is an (a+b)×(a+b) matrix.

The assertion follows from the previous step taking into account that the rows of the matrix are the coordinates of the vectors (*) with respect to the basis $x^{a+b-1}, x^{a+b-2}, \dots, 1$.

4. Step. Proof of Bezout's theorem.

Consider the given polynomials f(x,y) and g(x,y) as polynomials in the single variable y and form their resultant

$$r(x) := \mathrm{Res}_y(f,g).$$

Then, by the previous step, the curves

$$f = 0 \text{ and } g = 0$$

intersect in a point with x-coordinate c iff r(c) = 0. Thus the number of intersection points is equal to the number of zeros of r. The claim now follows from the fact that r is a polynomial of degree a·b: using the above notation one has

$$\mathrm{Res}(f,g) = (f_a)^b \cdot (g_0)^a + \dots$$

Using projective coordinates, this is a homogeneous polynomial, with $f_a$ being homogeneous of degree 0 and $g_0$ being homogeneous of degree b.

**QED**.

### Intersection multiplicities

The above proof gives a vague idea of what one has to interprete the term "counted with multiplicities". In the special case of algebraic plane curves one would have to prove that the multiplicity of the root of $\mathrm{Res}_y(f,g)$ associated with a given intersection point p of the curves is indepentend upon the choise of the coordinate system. Then one could define this multiplicity to be the local intersection multiplicity of the curve at the point p. More general there arises the problem to define the intersection multiplicity of two algebraic varieties

$$X,, Y \subseteq Z := \mathbb{P}^n$$

in, say, projecitive n-space along a component of X∩Y. This has turned out to be a rather difficult problem which was solved only the 20 th century, see [A. Weil, Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc., Colloquium Publ. 29, 1946]. Weil established a system of axiom, a reasonable multiplicity theory should satisfy and proved that there is a well-defined local intersection number satisfying these axioms.

In fact this can be done for Z an arbitrary none-singular proper scheme over a field.

In 1965 J.-P. Serre established an explicide formula for the local intersection number involving homological algebra: the intersection number of X and Y along the component C is equal to

$$i(X,Y,C) = \sum_{i=0}^{\dim Z} (-1)^i \operatorname{length}_{\mathcal{O}_{Z,C}} \operatorname{Tor}_i^{\mathcal{O}_{Z,C}}(\mathcal{O}_{X,C}, \mathcal{O}_{Y,C}),$$

provided the intersection is proper along C, i.e.

$$\operatorname{codim}_Z C = \operatorname{codim}_Z X + \operatorname{codim}_Z Y$$

(see [J.-P. Serre: Algèbre locale - multiplicités, Springer LN 11(1965)]).

The theory culminates in the definition of an associative symmetric bilinear form

$$CH^p(Z) \times CH^q(Z) \to CH^{p+q}(Z)$$

on the Chow ring of a proper none-singular variety Z. Such that the theorem of Riemann-Roch hold to be true (see [Fulton: Intersection theory, Springer 1984]).

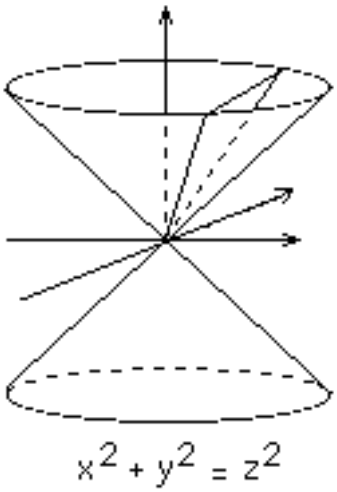
**Remarks** concerning the none-proper case.

(i) From the very beginning it is obvious that the embedding space Z must be compact if one wants to get a reasonable intersection theory (get some kind of Bezout's theorem). For none-proper space there are always lacks due to intersection points at infinity.

(ii) Formally everything can be done for none-proper varieties, but the resulting Chow groups degeneraty in the none-proper case (and may be even trivial).

**Remarks** concerning singular spaces.

Very simple examples show that the intersection numbers on singular spaces cannot be integral in general. For example, let Z be a cone.




Any straight line $l$ througt the vertex p intersects any conic on Z in a single point. In particular, the intersection number of $l$ with a pair a straight lines throught the vertex should be 1,

$$i(l, 2l; p) = 1.$$

By linearity,

$$i(l, l; p) = \frac{1}{2}.$$

In general, the intersection pairing for singular varieties cannot be defined on the integral Chow: the best we can get is one over the rational Chow ring,

$$CH^p(Z)_{\mathbb{Q}} \times CH^q(Z)_{\mathbb{Q}} \to CH^{p+q}(Z)_{\mathbb{Q}}$$

**The Aim of these lectures**

is to generalize intersection theory to schemes defined over $\mathbb{Z}$ in the easiest case, i.e. to proper smooth morphisms

$$\pi: X \to B := \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$$

of relative dimension 1.

In fact we will weaken our assumptions such that we cover a situation which occurs very often in number theory.

**The situation**

The base scheme B will be assumed to be of type

$$B = \operatorname{Spec} \mathcal{O}$$

where $\mathcal{O}$ is the ring of integers of an algebraic number field. The smoothness assumption will be weakened to the assumption that

X is none-singular with geometrically irreducible none-singular generic fiber and has stable fibers, the only singularities of the fibers are ordinary double points.

**Example**

Given a none-singular curve geometrically irreducible X over an algebraic number field K with ring of integers $\mathcal{O}$, there is - in lucky cases - the socalled semi-stable reduction,

$$\pi: V \to B := \operatorname{Spec} \mathcal{O},$$

of X/K obtained choosing equations of X with coefficients in $\mathcal{O}$. For the semi-simple reduction, these equations can be choosen in such a way that the conditions above are satisfied. For results on the existence of the semi-simple reduction see:

[Silverman, J.: The arithmetic of elliptic curves],
[Deligne, P., Mumford, D.: The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ. Math. IHES 36 (1969)75-110].
[Bosch, Little-Bomad, Reneaux: Neron-Models]

**Subexample**

Consider the plane algebraic curve

$$C: y^2 = x(x-3)(x-5).$$

The polynomial on the right has no multiple roots, hence the curve is none-singulur of genus 1. Modulo 2, 3 or 5 the situation is different: there occure roots of multiplicity 2 corresponding to ordinary douple points. In other words, if C is considered as scheme over $\mathbb{Z}$, the structural morphism

$$C \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$$

has singular fibers over the closed points (2), (3), (5)$\in$spec $\mathbb{Z}$.

In general the best one can achieve is multiplicative redurction passing to a finite extension field of $\mathbb{Q}$ (in the case of elliptic curves), i.e. the fibers of the structural morphism have at most cusp singularities.

**Our basic literature**

Arakelov, S.: An intersection theory for divisors on an arithmetic surface, Izv. Akad. Nauk 38 (1974), 1179-1192
Faltings, G.: Calculus on arithmetic surfaces, Annals of Math. 119 (1984) 387-424

The lectures can be considered as a preparation for the study of the theory for arbitrary dimensions as in the book

[Soulé, C., Abramovich, D., Burnol, J.-F., Kramer, J: Lectures on Arakelov geometry]

# 2. Arakelov's work on intersection theory

## *2.1 Definitionen*

### 2.1.1 Die Situation

| | |
|---|---|
| K | algebraischer Zahlkörper |
| $\Lambda$ | Ringe der ganzen Zahlen von K |
| S | := Spec $\Lambda$ |
| X | glatte vollständige geometrisch irreduzible Kurve über dem Körper K |
| $\infty$ | eine unendliche Primstelle von K, d.h. eine Einbettung $K \to \mathbb{C}$ von K in die komplexen Zahlen. Es gibt somit $n := [K:\mathbb{Q}]$ solche Primstellen. Manchmal bezeichnen wir mit $\sum_{\infty}$ die Summe über alle diese unendlichen Primstellen. |
| $X_\infty$ | $:= X \otimes \mathbb{C}$, wobei das Tensorprodukt bezüglich der gegebenen Einbettung $\infty$ genommen wird. |
| $S_{fin}$ | := S - {(0)} Menge der endlichen Primstellen von K |
| $S_{inf}$ | := Menge der unendlichen Primstellen von K (s.u.) |
| $f:V \to S$ | glattes vollständiges Model von X über den ganzen Zahlen $\Lambda$. |

**Bemerkung**
Der Begriff "Model" ist etwas vage, seine Verwendung in der Literatur nicht ganzeinheitlich. Wir halten hier deshalb etwas detailierter fest, welches genau unsere Annahmen sein sollen.

$f:V \to S$ ist ein projectiver Morphismus regulärer Schemata und K ist algebraisch abgeschlossen in K(X).

(vgl. Chinburg, T.: An Introduction to Arakelov Intersection Theory, in Cornell, G., Silverman, J.: Arithmetic geometry, Springer 1986):

**Voraussetzung**: K ist algebraisch abgeschlossen in K(X).

Faltings setzt voraus, daß V eine halbstabile Kurve über S ist und daß die generische Faser glatt ist und geometrisch irreduzibel,

(vgl. auch das Theorem §4 bei Arakelov: $V \to S$ sollte ein stabiles Model einer Kurve über K sein, als Fasern treten nur Kurven mit einfachen Doppelpunkten auf):

**Voraussetzung**: V ist glatt, die allgemeine Faser von f ist vollständig, glatt und geometrisch irreduzibel. Als einzige Singularitäten der speziellen Fasern von f sind gewöhnliche Doppelpunkte erlaubt.

Die nachfolgenden Bemerkungen beschreiben, wie man diese Vorausetzungen, ausgehend von der Kurve X realisieren kann.

**Bemerkungen**

(i) Man wähle eine endliche affine offene Überdeckung von X mit der Eigenschaft,, daß die Gleichungen von X in jeder dieser Überdeckungen Koeffizienten aus K besitzen. Eine solche Überdeckung existiert, da X über K definiert sein soll.

(ii) Dann multipliziere man diese Gleichungen so mit von Null verschiedenen Elementen aus K, daß die Koeffizienten sogar in $\Lambda$ liegen. Man kann zeigen, die so entstehenden affinen Schemata lassen sich so einrichten, daß man zu einen vollständigen $\Lambda$-Schema verheften kann.

(iii) Genauer: da X eine projektive Kurve ist (da eindimensional und vollständig), gibt es eine offene, affine, dicht liegende Teilmenge U von X mit der Eigenschaft, daß im Komplement von U keine ganze Komponente von X liegt.[1] Durch U (und deren Einbettung in einen projetiven Raum $\mathbb{P}^N_K$) ist damit bereits die gesamte Kurve X festgelegt. Durch Übergang zu Gleichungen mit Koeffizienten in $\Lambda$ und durch Abschließen im $\mathbb{P}^N_\Lambda = \mathbb{P}^N_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ erhalten wir ein projektives $\Lambda$-Schema

$$f: V \to S := \operatorname{Spec} \Lambda.$$

Die allgemeine Faser dieses Schemas über $\Lambda$ ist nach Konstruktion gleich X und damit glatt und geometrisch irreduzibel.

(iii) (a). Wir entfernen alle Komponenten, die die allgemeine Faser nicht schneiden und erreichen so, daß V irreduzibel wird. Es gilt ´dann

$$\dim V = \dim S + \dim X = 1 + 1 = 2.$$

Alle Fasern von f sind eindimensional,

$$\dim f^{-1}(\mathfrak{p}) = 1 \text{ für jedes } \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \Lambda.$$

(iii) (b). Durch Auflösen der Singularitäten erreichen wir, daß V glatt ist. Da die allgemeine Faser bereits von Anfang an glatt war, ändert sie sich nicht beim Auflösungsprozess (der im Aufblasen von Kurven und Punkten besteht, die ganz im singulären Ort von V liegen).

(iii) (c). Da die allgemeine Faser von f glatt ist (und S = Spec $\Lambda$ quasi-kompakt und eindimensional), gibt es nur endlich viele Fasern von f, welche Singularitäten besitzen. Jede dieser Fasern ist 1-dimensional, hat also nur endlich viele singuläre Punkte. Durch Aufblasen erreichen wir, daß diese Punkte höchstens gewöhnliche Doppelpunkte werden.

(iv) Nach Konstruktion ist die allgemeine Faser von f irreduzibel und glatt. Endlich viele Fasern können jedoch reduzibel sein.

### 2.1.2 Divisoren

Ein <u>endlicher Divisor</u> auf V ist ein Divisor im gewöhnlichen Sinne des Wortes:

$$D_{fin} = \sum_i k_i C_i$$

mit endlich vielen ganzen Zahlen $k_i \in \mathbb{Z}$ und irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen $C_i \subseteq V$ der Kodimension 1.

Die Kurven $X_\infty$ werden wir als Fasern des Morphismus f: V → S = Spec $\Lambda$ auffassen in den unendlich fernen Punkten $\infty \in S_{inf}$. Wir werden sie auch <u>unendlich ferne Komponenten</u> nennen. Nach Definition können diese Komponenten in einem <u>Divisor</u> mit reellen Koeffizienten auftreten:

---

[1] Die Konstruktion funktioniert an dieser Stelle ohne die Annahme, daß X (geometrisch) irreduzibel sein soll.

$$D = \sum_i k_i C_i + \sum_\infty \lambda_\infty X_\infty = D_{fin} + D_{inf}$$

mit endlich vielen $k_i \in \mathbb{Z}$ und reellen $\lambda_\infty \in \mathbb{R}$. Man beachte, die Anzahl der unendlichen Primstellen ∞ ist endlich (= [K:ℚ]) Die Divisoren dieser Art bilden eine Gruppe, die wir mit

$$Div^\wedge(V)$$

bezeichnen.

### 2.1.3 Divisoren auf dem Basis-Schema S = Spec (Λ)

Man kann außerdem noch die Gruppe

$$Div^\wedge(K)$$

betrachten. Das ist die Gruppe der Divisoren der Gestalt

$$d = \sum_\mathfrak{p} m_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} + \sum_\infty \lambda_\infty \cdot \infty ,$$

wobei $\mathfrak{p}$ die endlichen Primstellen von K durchläuft, ∞ die unendlichen Primstellen, $m_\mathfrak{p}$ ganz ist und $\lambda_\infty$ reell, und die Anzahl der von Null verschiedenen Summanden endlich ist.

$$\mathfrak{p} \in S_{fin} , \infty \in S_{inf} , m_\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}, \lambda_\infty \in \mathbb{R}, \text{endlich viele Summanden.}$$

Ein Hauptdivisor dieser Gruppe ist definiert als ein Divisor der Gestalt

$$div^\wedge(\alpha) := \sum_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}(\alpha) \cdot \mathfrak{p} + \sum_\infty (- \log |\alpha|_\infty) \cdot \infty$$

mit $\alpha \in K$. Dabei bezeichne $v_\mathfrak{p}(\alpha)$ die Ordnung von α bezüglich des Primideals $\mathfrak{p}$,

$v_\mathfrak{p}(\alpha) := \sup \{ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \alpha \in \mathfrak{p}^n \}$ für $\alpha \in \Lambda$.

$v_\mathfrak{p}(\alpha) := v_\mathfrak{p}(u) - v_\mathfrak{p}(u)$ falls $\alpha = u/v$ mit $u,v \in \Lambda$.

Weiter schreiben wir

$$|\alpha|_\infty := |\infty(\alpha)|$$

für den Absolutbetrag des Bildes von α in ℂ bei der Einbettung ∞. Man beachte, die endlichen Koeffizienten des Divisors lassen sich als negative Logarithmen des $\mathfrak{p}$-adischen (multiplikativen) Werts

$$|\alpha|_\mathfrak{p} = \#(\Lambda/\mathfrak{p})^{-v_\mathfrak{p}(\alpha)}$$

(bezüglich der Basis #(Λ/$\mathfrak{p}$) auffassen):

$$v_\mathfrak{p}(\alpha) = - \log |\alpha|_\mathfrak{p} / \log \#(\Lambda/\mathfrak{p}).$$

Die Gruppe der Hauptdivisoren von K wird mit

$$P^\wedge(K)$$

bezeichnet. Die Divisorklassengruppe von K ist definiert als

$$Cl^{\wedge}(K) := Div^{\wedge}(K)/P^{\wedge}(K).$$

Der Grad des Divisors d ist definiert als die reelle Zahl

$$\deg(d) := \sum_{\mathfrak{p}} m_{\mathfrak{p}} \cdot N_{\mathfrak{p}} + \sum_{\infty} \lambda_{\infty}$$

Dabei bezeichne $N_{\mathfrak{p}}$ den Logarithmus der Anzahl der Elemente des Restklassenkörpers von $\mathfrak{p}$ im lokalen Ring von $\mathfrak{p}$,

$$N_{\mathfrak{p}} := \log \# \mathcal{O}_{S,\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} = \log \Lambda/\mathfrak{p}$$

**Bemerkung**
Der Grad eines Hauptdivisors $\mathrm{div}(\alpha)$ ist

$$\begin{aligned}
\deg \mathrm{div}^{\wedge}(\alpha) &= \sum_{\mathfrak{p}} v_{\mathfrak{p}}(\alpha) \cdot N_{\mathfrak{p}} + \sum_{\infty} (-\log |\alpha|_{\infty}) \\
&= \sum_{\mathfrak{p}} \log (\# \mathcal{O}_{S,\mathfrak{p}}/\mathfrak{p})^{\nu_{\mathfrak{p}}(\alpha)} + \sum_{\infty} (-\log |\alpha|_{\infty}) \\
&= \sum_{\mathfrak{p}} (-\log |\alpha|_{\mathfrak{p}}) + \sum_{\infty} (-\log |\alpha|_{\infty}) \\
&= -\log \prod_{\mathfrak{p} \in S_{fin} \cup S_{inf}} |\alpha|_{\mathfrak{p}}
\end{aligned}$$

wobei das Produkt über die endlichen und unendlichen Primstellen von K zu erstrecken ist. Nach der Produktformel gilt damit

$$\deg \mathrm{div}^{\wedge}(\alpha) = 0.$$

Der Grad eines Divisors faktorisiert sich deshalb über die Divisorklassengruppe, d.h. wir haben einen wohldefinierten Grad

$$\deg: Cl^{\wedge}(V) \to \mathbb{R}.$$

### 2.1.4 Die Hauptdivisoren auf V

Wir wollen jetzt den Begriff des Hauptdivisors einer Funktion $f \in K(X)$ des Funktionenkörpers von X definieren. Für jede unendliche Primstelle $\infty \in S_{inf}$ können wir f als meromorphe Funktion auf der Faser $X_{\infty}$ auffassen. Den Wert

$$\nu_{\infty}(f)$$

wollen wir definieren als Mittelwert der Funktion $(-\log |f|)$ auf $X_{\infty}$.[2] Dazu betrachten wir auf jeder Faser $X_{\infty}$ eine fixierte hermitische Metrik

$$ds^2_{\infty}.$$

Die zugehörige Volumenform bezeichnen wir mit

$$d\mu_{\infty}.$$

---

[2] Entlang der Faser über einem endlichen Punkt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ \Lambda$ ist der Wert $(-\log |f|_{\mathfrak{p}}$ kontant, also gleich seinem Mittelwert bezüglich jeden Maßes.

Diese sei durch die Bedingung normiert, daß

(1) $$\int_{X_\infty} d\mu_\infty = 1.$$

gelten soll. In dieser Situation definieren wir den Wert von $f \in K(X)$ an der Stelle $\infty \in S_{inf}$ als

(2) $$v_\infty(f) := - \int_{X_\infty} \log |f| \, d\mu_\infty \, .$$

Der Hauptdivisor einer rationalen Funktion $f \in K(X)$ auf X ist nach Definiton gleich

$$\operatorname{div}(f) := \operatorname{div}(f)_{fin} + \operatorname{div}(f)_{inf}$$

mit

$$\operatorname{div}(f)_{inf} = \sum_{\infty \in S_{inf}} v_\infty(f) \cdot X \cdot_\infty .$$

Dabei sei

$$\operatorname{div}(f)_{fin} = \sum_C v_C(f) \cdot C$$

der gewöhnliche Polstellen-Nullstellen-Divisor der rationalen Funktion f auf der Fläche V, d.h. die Summe werde erstreckt über alle irreduziblen abgeschlossenen Teilschemata C der Kodimension 1 von V.
Mit

$$P^\wedge(X)$$

bezeichnen wir die Gruppe der Hauptdivisoren auf X und mit

$$Cl^\wedge(X) := Div^\wedge(X)/P^\wedge(X)$$

die Divisorklassengruppe von X.

**Bemerkungen**

(i) Es gibt Gruppenhomomorphismen

$$Div^\wedge(V) \to Div(V), D \mapsto D_{fin} ,$$

$$Div^\wedge(K) \to Div(K), D \mapsto D_{fin} ,$$

mit Werten in den gewöhnlichen Divisorgruppen, die jeden Divisor auf dessen endlichen Teil abbilden. Dabei gehen Hauptdivisoren in Hauptdivisoren über, d.h. diese Homomorphismen induzieren Homomorphismen der zugehörigen Divisorklassengruppen

$$Cl^\wedge(V) \to Cl(V)$$

$$Cl^\wedge(K) \to Cl(K)$$

mit Werten in den gewöhnlichen Divisorklassengruppen. Alle diese Homomorphismen sind surjektiv.

(ii) Der Kern der Abbildung

$$Cl^\wedge(V) \to Cl(V)$$

besteht gerade aus den ´Klassen der Divisoren, deren endlicher Teil linear äquivalent ist zu Null. Mit Hilfe einer rationalen Funktion können wir erreichen, daß diese Klassen repräsentiert werden durch Divisoren, deren endlicher Teil Null ist. Je zwei Repräsentaten einer solchen Klasse unterscheiden sich durch einen Hauptdivisor, dessen endlicher Teil gleich Null ist, d.h. durch einen Hauptdivisor einer Einheit. Mit anderen Worten,

$$G := \mathrm{Ker}(\mathrm{Cl}^{\wedge}(V) \to \mathrm{Cl}(V)) \cong \sum_{\infty \in S_{inf}} \mathbb{R} \cdot X_{\infty} / \{ \sum_{\infty \in S_{inf}} v_{\infty}(f) \cdot X_{\infty} \mid f \in K[X]^* =^{3} \Lambda^* \}$$

d.h. der Kern ist der Faktor eines reellen Vektorraums der Dimension

$$n := [K:\mathbb{Q}]$$

nach dem Bild der Einheitengruppe $\Lambda^*$ von K bei der logarthmischen Abbildung

$$f \mapsto \sum_{\infty \in S_{inf}} v_{\infty}(f) \cdot X_{\infty}$$

Insbesondere sehen wir an dieser Beschreibung, daß die Abbildung

$$\sum_{\infty \in S_{inf}} \mathbb{R} \cdot \infty \to \sum_{\infty \in S_{inf}} \mathbb{R} \cdot X_{\infty}, \infty \mapsto X_{\infty},$$

einen Isormorphismus

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Cl}^{\wedge}(K) \to \mathrm{Cl}(K)) \to \mathrm{Ker}(\mathrm{Cl}^{\wedge}(V) \to \mathrm{Cl}(V))$$

induziert. Wir bezeichnen deshalb beide Kerne mit G.

(iii)? Es wäre naheliegend, komplex konjugierte Einbettungen des Körpers K zu identifizieren und stattdessen komplex konjugierte Metriken zu betrachten. Eine solche Betrachtungsweise ergibt sich aus tieferliegeden Untersuchungen, bisher zwingt uns jedoch nichts dazu. Die Gruppe G wird dadurch ein wenig größer als man vielleicht erwarten würde.

(iv) Wir weisen hier noch auf die Abbildung des inversen Bildes hin,

$$f^*: \mathrm{Cl}^{\wedge}(K) \to \mathrm{Cl}^{\wedge}(V).$$

Die Gruppe G geht dabei in sich über.

### *2.2 Der Scbnitt-Index*

In diesem Abschnitt wollen wir den Schnitt-Index

$$(D_1 \cdot D_2)$$

zweier Arakelov-Divisoren definieren. Dieser soll dabei wie im klassischen Fall linear in seinen beiden Argumenten sein. Ebenfalls wie im klassischen Fall ist er gleich der Summe von lokalen Schnittzahlen (oder auch Schnitt-Multiplizitäten),

#### 2.2.1 Der lokale Schnitt-Index in einem endlichen Punkt

Seien $D_1$ und $D_2$ zwei endliche Divisoren von V, $f_1$ und $f_2$ lokale Gleichungen von $D_1$ bzw. $D_2$ in der Umgebung eines abgeschlossenen Punktes $P \in V$. Dann ist der Schnittindex von $D_1$ und $D_2$ im Punkt P nach Definition gleich

$$(D_1 \cdot D_2)_P := \lambda(\mathcal{O}_{V,P}/(f_1,f_2)) \cdot \log N(P).$$

Dabei ist

$$N(P) := \# \mathcal{O}_{V,P}/m_{V,P}$$

die Elementzahl des Restklassenkörpers des lokalen Rings von V in P und

$$\lambda(M)$$

bezeichnet die Länge des $\mathcal{O}_{V,P}$-Moduls M.

---

[3] Da die Elemente von k[X] weder Nullstellen noch Pole haben, sind sie global definierte reguläre Funktionen. Die Identität folgt deshalb aus dem "Proper-Mapping-Theorem".Wir brauchen an dieser Stelle, daß K algebraische abgeschlossen ist in K(X) (andernfalls müssen wir K durch die algebraische Abschließung von K in K(X) ersetzen).

**Bemerkungen**

(i) Diese Definition weicht von der klassischen Definition der lokalen Schnitt-Vielfachheit lediglich um den Faktor log N(P) ab (der im klassischen Fall in allen Punkten gleich und deshalb überflüssig ist).

(ii) Die eben angegebene Formel für den lokalen Schnitt-Index im Punkt P werden wir praktisch nur einmal nämlich beim Beweis der nachfolgenden Behauptung benutzen. Danach werden wir die Berechnung stets auf den nachfolgend angegebenen Spezialfall reduzieren.

### 2.2.2 Der Fall daß einer der Divisoren horizontal ist

Ist einer der Divisoren, sagen wir $D_2$ irreduzibel und <u>horizontal</u> (d.h. $f(D_2) = S$), so kann man ihn in der Gestalt

$$D_2 = \varepsilon(\operatorname{Spec} \Gamma)$$

schreiben, wobei $\Gamma$ der Ring der ganzen Zahlen einer endliche Körpererweiterung L von K ist und

$$\varepsilon: \operatorname{Spec} \Gamma \to V$$

ein Morphismus über Spec $\Lambda$. Sind $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k \in \operatorname{Spec} \Gamma$ die über $P \in V$ liegenden Primideale von $\Gamma$ und ist $f_1$ eine lokale Gleichung von $D_1$ in P, so gilt

$$(D_1 \cdot D_2)_P = \sum_{i=1}^{k} - \log \|\varepsilon^*(f_1)\|_{\mathfrak{P}_i}$$

**Beweis**. Betrachten wir die Einschränkung

$$D_2 \subseteq V \xrightarrow{f} S := \operatorname{Spec} \Lambda$$

des Strukturmorphismus von V auf $D_2$.Dies ist ein eigentlicher Morphismus, dessen Fasern wegen dim D = dim $\Lambda$ endlich sind, d.h. der Morphismus ist endlich (nach Zariskis Hauptsatz). Insbesondere ist der Funktionenkörper

$$L := K(D_2)$$

ein endlicher Erweiterungskörper von K,

$$[L : K] < \infty.$$

Sei

$$\Gamma := \text{ganze Abschließung von } \Lambda \text{ in L.}$$

Dann hat man ein kommutatives Diagramm von Einbettungen

$$\begin{array}{ccc} L & \supset & \Gamma \\ \| & & \cup \\ K(D_2) & \supset & \Lambda \end{array}$$

Da $D_2$ endlich ist über $\Lambda$, besitzt $D_2$ eine endliche Überdeckung

$$D_2 = \cup_{i \in I} U_i$$

durch affine offene Teilmengen mit $\mathcal{O}(U_i)$ endlich als $\Lambda$-Modul (und $\subseteq$ L) für jedes i. Insbesondere gilt

$$\mathcal{O}(U_i) \subseteq \Gamma \text{ für jedes } i \in I.$$

Diese Einbettungen definieren einen endlichen Morphismus

$$(*) \qquad D_2 \xleftarrow{\varepsilon} \operatorname{Spec} \Gamma$$

für welchen das folgende Diagramm (endlicher Morphismen) kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} & & \operatorname{Spec}\Gamma \\ & \varepsilon\swarrow & \downarrow \\ D_2 & \to & \operatorname{Spec}\Lambda \end{array}$$

Nun ist $\Gamma \subseteq L$ ganz abgeschlossen und 1-dimensional. Deshalb ist der Morphismus $\varepsilon$ von (*) gerade die Normalisierung $D_2$. Und es ist der in der Behauptung auftretende Morphismus.

Die zu beweisende Formel ist trivial, wenn P nicht auf $D_2$ liegt, denn dann sind beide Seiten der zu beweisenden Identität gleich Null. Sei also

$$P \in D_2.$$

Wir schreiben

$$A := \mathcal{O}_{D_2,P}$$

und

$$\overline{A} := \Gamma \otimes \mathcal{O}_{D_2,P}$$

für die ganze Abschließung von A in L.[4] Dies ist ein semilokaler Ring mit den zugehörigen lokalen Ringen $\Gamma_{\mathfrak{P}_1}, \ldots, \Gamma_{\mathfrak{P}_k}$. Als A-Modul ist $\overline{A}$ endlich erzeugt (weil A exzellent ist) und der volle Quotientenring ist derselbe wie der von A,

$$Q(\overline{A}) = \overline{A} \otimes Q(A) = Q(A).$$

Insbesondere gilt

$$\overline{A}/A \otimes_A Q(A) = 0,$$

d.h. jedes Element von $\overline{A}/A$ wird von einem Element von A - {0} annulliert. Weil $\overline{A}/A$ endlich erzeugter A-Modul ist, gibt es ein Element $g \in m(A) - \{0\}$ mit[5]

$$g \cdot \overline{A}/A = 0,$$

d.h. $\overline{A}/A$ ist ein A/gA-Modul und damit ein A-Modul endlicher Länge,

$$\lambda_A(\overline{A}/A) < \infty.$$

Sei jetzt $f_1 \in A$ die Einschränkung einer lokalen Gleichung von $D_1$ auf $D_2$. Dann gilt

(1) $$(D_1 \cdot D_2)_P = \lambda_A(A/(f_1)) \cdot \log N(P)$$

und

$$\begin{aligned} \lambda_A(\overline{A}/f_1 A) &= \lambda_A(\overline{A}/A) + \lambda_A(A/f_1 A) \qquad (< \infty) \\ \lambda_A(\overline{A}/f_1 A) &= \lambda_A(\overline{A}/f_1\overline{A}) + \lambda_A(f_1\overline{A}/f_1 A) \\ &= \lambda_A(\overline{A}/f_1\overline{A}) + \lambda_A(\overline{A}/A) \qquad (\text{weil } \overline{A} \text{ nullteilerfrei ist}) \end{aligned}$$

Vergleich der beiden Identitäten für $\lambda_A(\overline{A}/f_1 A)$ liefert

$$\lambda_A(A/f_1 A) = \lambda_A(\overline{A}/f_1\overline{A})$$

---

[4] Wir benutzen hier die Tatsache, daß der Übergang zur ganzen Abschließung mit dem Überganz zu Quotientenringen kommutiert.

[5] m(A) bezeichne das maximale Ideal von A.

$$= \sum_{i=1}^{k} l_A(\Gamma_{\mathfrak{p}_1}/(f_1))$$

$$= \sum_{i=1}^{k} l_{\Gamma_{\mathfrak{p}_i}}(\Gamma_{\mathfrak{p}_i}/(f_1))\cdot[k(\mathfrak{p}_i):k(P)]$$

also

$$(D_1\cdot D_2)_P = \sum_{i=1}^{k} l_{\Gamma_{\mathfrak{p}_i}}(\Gamma_{\mathfrak{p}_i}/(f_1))\cdot[k(\mathfrak{p}_i):k(P)]\cdot\log \# k(P)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} l_{\Gamma_{\mathfrak{p}_i}}(\Gamma_{\mathfrak{p}_i}/(f_1))\cdot\log \# k(P)^{[k(\mathfrak{p}_i):k(P)]}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} l_{\Gamma_{\mathfrak{p}_i}}(\Gamma_{\mathfrak{p}_i}/(f_1))\cdot\log \# k(\mathfrak{p}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} l_{\Gamma_{\mathfrak{p}_i}}(\Gamma_{\mathfrak{p}_i}/(f_1))\cdot\log N(\mathfrak{p}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_i}\varepsilon^*(f_1)\cdot\log N(\mathfrak{p}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} -\log \|\varepsilon^*(f_1)\|_{\mathfrak{p}_i}$$

**QED**.

### 2.2.3 Der globale Schnitt-Index

Für $\mathfrak{p}\in S = \mathrm{Spec}\,\Lambda$ setzen wir

$$(D_1\cdot D_2)_{\mathfrak{p}} := \sum_{f(P)=\mathfrak{p}} (D_1\cdot D_2)_P\,.$$

Der globale Schnitt-Index ist dann nach Definition die Summe

$$(D_1\cdot D_2) := \sum_{\mathfrak{p}\in S_{fin}} (D_1\cdot D_2)_{\mathfrak{p}} + \sum_{\infty\in S_{inf}} (D_1\cdot D_2)_{\infty}$$

wobei der lokale Schnitt-Index $(D_1\cdot D_2)_{\infty}$ in einem unendlich fernen Punkt $\infty$ noch zu definieren ist. Wir können dabei voraussetzen, daß beide Divisorren $D_1$ und $D_2$ irreduzibel sind. Wir setzen

$$(D_1\cdot D_2)_{\infty} = 0$$

falls einer von ihnen eine Komponente einer endlichen Faser ist. Ist einer der Divisoren eine unendliche Faser, so setzen wir

$(X_{\infty}\cdot D) = (X_{\infty}\cdot D)_{\infty} = 0$ falls D eine Komponente einer (endlichen oder unendlichen) Faser ist.

$(X_{\infty}\cdot X_{\infty},) = 0$ (Spezialfall).

$(X_\infty \cdot D) = (X_\infty \cdot D)_\infty = m$ falls D ein horizontaler Divisor des Grades m in der allgemeinen Faser ist, d.h. $m = [K(D): K]$.[6]

Seien jetzt

$$D_1 \text{ und } D_2 \text{ irreduzibel und horizontal.}$$

Sie entsprechen dann zwei Punkten $P_1$ und $P_2$ der Kurve X mit den Restklassenkörpern

$$L_1 := K(P_1) \text{ und } L_2 := K(P_2).$$

Seien

$$\infty^1_\alpha : L_1 \to \mathbb{C}\ ,\ \infty^1_\beta : L_2 \to \mathbb{C},\ \alpha=1,...,[L_1: K],\ \beta=1,...,[L_2:K]$$

die Einbettungen von $L_1$ und $L_2$ in $\mathbb{C}$, welche die gegebene Einbettung $\infty: K \to \mathbb{C}$ fortsetzen. Wir bezeichnen mit

$$\{P_{\infty^1_\alpha} \in X_{\infty^1_\alpha}\} \text{ und } \{P_{\infty^2_\beta} \in X_{\infty^2_\beta}\}$$

die Bilder von $P_1$ und $P_2$ bei den Einbettungen von K in $\mathbb{C}$. Wir schreiben

$$(D_1 \cdot D_2)_\infty = \sum_{\alpha,\beta} (P_{\infty^1_\alpha} \cdot P_{\infty^2_\beta})$$

wobei die Ausdrücke unter dem Summenzeichen noch zu definieren sind. Dabei wird

$$(P_{\infty^1_\alpha} \cdot P_{\infty^2_\beta})$$

für beliebige zwei unterschiedliche Punkte auf einer Riemannschen Fläche definiert sein, die mit einer Hermitischen Metrik versehen ist.[7]

### 2.2.4 Der Schnitt-Index für Punkte einer Riemannschen Fläche

Seien

$$X$$

eine beliebige kompakte[8] Riemannsche Fläche und seien

$$P,Q \in X$$

zwei verschiede Punkte. Weiter sei eine Volumenform

$$d\mu$$

auf X fixiert. Wir definieren dann den Schnitt-Index

$$(P \cdot Q)_X \in \mathbb{R}$$

---

[6] d.h. der Schnitt-Index ist gerade der Grad der Einschränkung von D auf $X_\infty$.

[7] Die gegebenen (nicht abgeschlossenen) Punkte $P_j$ von V können wir als Morphismen

$$\text{Spec } K(D_j) \to V$$

auffassen, d.h. als Elemente

$$P_j \in V(K(D_j)).$$

Die Fortsetzungen $\infty^j_\nu : K(D_j) \to \mathbb{C}$ von $\infty$ definieren Morphismen

$$\text{Spec } \mathbb{C} \to \text{Spec } K(D_j) \to V,$$

also Punkte von $V(\mathbb{C})$. Die $P_{\infty^j_\nu}$ lassen sich also als Punkte von ein und derselben Riemannschen Fläche auffassen.

[8] Die Kompaktheitsforderung fehlt in der Arbeit. Sie ist aber nötig um sicherzustellen, daß jede globale harmonische Funktion auf X konstant ist (s.u.).

in Analogie mit dem Schnitt-Index in der endlichen Situation. Letzteren erhält man zum Beispiel, indem man die lokalen Gleichungen des einen Punktes auf den anderen Punkt einschränkt und dann den Absolutbetrag der Einschränkung nimmt (genauer: deren Norm).

Wir konstruieren jetzt für jedem Punkt $P \in X$ eine glatte reellwertige Funktion

$$\varphi_P : X \to \mathbb{R},$$

welche wir als globale Gleichung des Punktes P verwenden werden. Den Schnitt-Index definieren wir dann als die Zahl

$$(P \cdot Q)_X := - \log \varphi_P(Q).$$

Von der Funktion $\varphi_P$ fordern wir, daß sie nicht-negativ sein und die einzige Nullstelle P haben soll. Dabei soll P eine einfache Nullstelle sein, d.h. in einer Umgebung von P sei

$$\varphi_P(q) = |z_P(q)| \cdot u(q)$$

mit einem lokalen Parameter $z_P$ im Punkt P und einer glatten Funktion u(q) mit $u(P) \neq 0$.

Wir benutzen dabei eine von Parchin vorgeschlagene Möglichkeit in der Menge dieser Funktionen eine einzige auszuzeichnen. Sie besteht darin, zu forden, daß diese Funktion der Poisson-Gleichung[9]

---

[9] In der angegebenen Schreibweise ist nicht klar, ob der Operator auf der linken Seite von (*) überhaupt invariant definiert ist. Zeigen wir, es handelt sich um den Laplace-Operator

$$L = d*d* + *d*d*$$

der Riemannschen Fläche. Dazu müssen wir uns zunächst überlegen, wie der Hodge-Operator in einer holomorphen Karte definiert ist.

Im Fall von Riemannschen Flächen hat der Hodge-Stern-Operator die folgende Gestalt. Ist $z = x + i y$ eine holomorphe Karte und $\omega = adx + bdy$ eine 1-Form, so gilt

$$*\omega = -b\, dx + a dy.$$

Für Funktionen $\alpha$ gilt

$$*\alpha = \alpha dxdy \text{ und } *(\alpha dxdx) = \alpha.$$

**Beweis**. Diese Formeln sind nach Definition richtig in einem gegebenen Punkt p (OBdA z(p) = 0), wenn dx und dy ein orthonormiertes Koordinatensystem bilden. Beim Stauchen oder Strecken des Koordinatensystems mit einem konstanten Faktor $c \neq 0$ bleiben diese Formeln ebenfalls richtig ( a und b werden beim Übergang zum neuen System mit 1/c multipliziert). Deshalb sind die Formeln auch für orthogonale (nicht notwendig normierte) Koordinaten richtig.
Da sie in der Komplexen Ebene richtig sind (orthonormierter Fall) und holomorphe Abbildungen winkeltrue ("konform") sind, folgt die Gültigkeit im Ursprung jeder holomorphen Karte, also überall.

Wir betrachten hier Riemannsche Flächen X als 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten und benutzen die Tatsache, daß durch die Metrik auf X eine konforme Struktur definiert wird.
**QED**.
**Folgerung**: $\Delta = *d*d$:
**Beweis**.

$$*d*d(\alpha) = (*d*)(\frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy) = (*d)(-\frac{\partial \alpha}{\partial y} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dy) = *(-\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} dy \wedge dx + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx \wedge dy)$$

$$= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}$$

**QED**.
**Bemerkungen**

(i) Man beachte, der Ausdruck $(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}) dx \wedge dy$ ändert seine Gestalt nicht bei holomorphen Koordinatenwechsel (z.B bei Streckungen mit einem reellen Faktor).

(*) $$\frac{1}{2\pi}\Delta \log \varphi_P \, dx\wedge dy = - d\mu$$

genügt. Je zwei Lösungen dieser Gleichung $\varphi_P$ und $\varphi'_P$ sind proportional, denn der Logarithmus ihres Quotienten ist eine überall glatte harmonische Funktion auf X, also konstant. Deshalb gibt es höchstens eine Lösung, die zusätzlich der Normalisierungsforderung

(**) $$\int_X \log \varphi_P \, d\mu = 0$$

genügt. Diese nehmen wir als <u>globale Gleichung des Punktes</u> $P\in X$ und bezeichnen sie mit $\varphi_P$. Ihre Existenz werden wir in Abschnitt 2.3 beweisen.

### 2.2.5 Proposition 1.1

Der Schnitt-Index $(P\cdot Q)_X$ ist symmetrisch.

**Beweis**. Seien $U_P$ und $U_Q$ kleine Kreisscheiben mit dem Zentrum in P bzw. Q. Nach (*) und (**) geht der folgende Ausdruck gegen Null, wenn die Radien der Kreisscheiben gegen Null gehen:

$$\int_{X-U_P-U_Q} (\log \varphi_P \, \Delta \log \varphi_Q - \log \varphi_Q \, \Delta \log \varphi_P)\, dxdy \, .$$

Nach der Greenschen Formel ist dieser Ausdruck aber gleich[10]

$$\int_{\partial U_P \cup \partial U_Q} (- \log \varphi_P \frac{\partial}{\partial n} \log \varphi_Q + \log \varphi_Q \frac{\partial}{\partial n} \log \varphi_P \,)\, ds.$$

Dabei bezeichne $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in Normalenrichtung[11] und s den natürlichen Parameter der beiden Kreislinien[12]. Nach dem Residuensatz (und der Tatsache daß harmonische Funktionen Realteile holomorpher sind) erhalten wir für den Limes[13]

---

(ii) Der Summand d*d* des invarianten Laplace-Operators ist auf Riemannschen Flächen aus Dimensionsgründen gleich Null: *α ist eine 2-Form, d.h. d*α ist eine 3-Form, also gleich Null.

[10] Mit $a := \log \varphi_P$ und $b := \log \varphi_Q$ ist die Differtialform unter dem nachfolgenden Integral gerade die Einschränkung von

$$- \omega := a \frac{\partial b}{\partial y} dx - a\frac{\partial b}{\partial x} dy - b \frac{\partial a}{\partial y} dx + b \frac{\partial a}{\partial x} dy$$

auf die Kreislinie (vgl. nächste Bemerkung). Wegen

$$d\omega = (\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial y} + a \frac{\partial^2 b}{\partial y^2})dy\wedge dx - (\frac{\partial a \partial b}{\partial x \partial x} + a \frac{\partial^2 b}{\partial x^2})dx\wedge dy$$
$$- (\frac{\partial b \partial a}{\partial y \partial y} + b\frac{\partial^2 a}{\partial y^2})dy\wedge dx + (\frac{\partial b \partial a}{\partial x \partial x} + b\frac{\partial^2 a}{\partial x^2})dx\wedge dy$$
$$= (- a \Delta b + b \Delta a)dx\wedge dy$$

folgt die Behauptung.

[11] d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial n}(p) = \langle \text{grad } f, n(p) \rangle = df\,(n(p))$$

wenn n(p) den Eineitvektor in Normalenrichtung im Punkt p bezeichnet.

$$2\pi\,(\log \varphi_Q(P) - \log \varphi_P(Q))$$

d.h. es gilt die Behauptung.
**QED**.

### 2.2.6 Bemerkung: Greensche Formel

Dieselben Überlegungen wie im obigen Beweis liefern die Formel

$$\frac{1}{2\pi}\int_X (\log \varphi\, \Delta \log \psi - \log \psi\, \Delta \log \varphi)dxdy = \sum_{p\in X} v_p(\varphi)\cdot\log \psi(p) - v_p(\psi)\cdot\log \varphi(p)$$

---

[12] d.h. $\frac{dz(s)}{ds}$ ist der Einheitsvektor in mathematische positiver Richtung (in einer holomorphen Karte von X). Mit $dz = \frac{dz(s)}{ds}ds = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} ds$ ist das Differential von f in Tangentialrichtung damit gleich

$$\frac{\partial f}{\partial s}ds = \langle \text{grad } f, ds\rangle = \langle \text{grad } f, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}\rangle \text{ (Projektion auf die Kurvenrichtung)}$$

und in Normalenrichtung gleich

$$\frac{\partial f}{\partial n}ds = \langle \text{grad } f, \begin{pmatrix} -dy \\ dx \end{pmatrix}\rangle \qquad \text{(Projektion auf die Normalenrichtung)}$$

[13] Es reicht zu zeigen,

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial U_P} (-\log \varphi_P \frac{\partial}{\partial n}\log \varphi_Q + \log \varphi_Q \frac{\partial}{\partial n}\log \varphi_P)\, ds = 2\pi\cdot \log \varphi_Q(P)$$

wenn $U_p$ eine kleine Kreisscheibe vom Radius r um den Ursprung $p = 0\in\mathbb{C}$ ist. Der ersten Summand unter dem Integral geht gegen Null für $r \to 0$. Es reicht also zu zeigen,

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial U_P} \log \varphi_Q \frac{\partial}{\partial n}\log \varphi_P\, ds = 2\pi\cdot \log \varphi_Q(P).$$

Wir schreiben $\varphi_P$ in der Gestalt $\varphi_P(q) = |z(q)|\cdot u(q)$ mit u regulär in $q = 0$ und $z(q) = r(q)\cdot e^{i\alpha}$. Dann ist

$$\log \varphi_P(q) = \log r(q) + \log u(q) \text{ und } \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

also

$$\frac{\partial}{\partial n}\log \varphi_P(q) = \frac{1}{r(q)} + \frac{\partial}{\partial n}\log u(q)$$

also

$$\log \varphi_Q \frac{\partial}{\partial n}\log \varphi_P(q) = \frac{1}{r(q)}\log \varphi_Q + \log \varphi_Q \frac{\partial}{\partial n}\log u(q)$$

Der zweite Summand ist reguläre in einer Umgebung von $q = 0$, das zugehörige Integral geht gegen Null. Es reicht also zu zeigen

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial U_P} \frac{1}{r(q)}\log \varphi_Q\, ds = 2\pi\cdot \log \varphi_Q(P).$$

Wegen $\int_{\partial U_P}\frac{1}{r(q)}ds = 2\pi$ ist das aber offensichtlich.

für beliebige glatte Funktionen $\varphi$ und $\psi$ mit einer endlichen Anzahl von Nullstellen und Polen (endlicher Ordnung). Die Summe rechts wird über die Nullstellen und Pole von $\varphi$ und $\psi$ erstreckt. Diese Formel wollen wir Greensche Formel nennen.

**2.2.7 Proposition 1.2**

Der Schnitt-Index hängt nur von der linearen Äquivalenzklasse der Divisoren ab.

**Beweis**. Wir haben zu zeigen,

$$((s)\cdot D) = 0$$

für jeden irreduziblen Divisor D und jede rationale Funktion

$$s \in K(V),\ s\colon V \dashrightarrow \operatorname{Spec} K,$$

auf V. Ist D eine Komponente einer (endlichen oder unendlichen) Faser, so sind die unendlichen Summanden von $((s)\cdot D)$ Null und die Behauptung folgt aus der analogen Aussage der gewöhnlichen Schnitt-Theorie[14]. Deshalb können wir annehmen, D ist horizontal, d.h. von der Gestalt

$$D = \varepsilon(\operatorname{Spec} \Gamma)$$

wie in 1.2.

Hat der Divisor D den Grad m auf der allgemeinen Faser, so entspricht ihm ein Punkt

$$P \in X\ ,\ \overline{\{P\}} = D,$$

der Kurve X mit einem Restklassenköper

$$k(P) = \mathcal{O}_{X,P}/m_{X,P} = L$$

des Grades

$$m = [L:K]$$

über K. Die Funktion $s \in K(X)$ definiert eine meromorphe Funktion

$$s^{\infty}\colon X_{\infty} \dashrightarrow \mathbb{C}$$

(die Einschränkung auf die geometrische Faser über $\infty \in S_{inf}$). Wir schreiben

$$\operatorname{div}(s^{\infty}) = \sum_{Q \in X_{\infty}} v_Q(s^{\infty})\cdot Q$$

und zerlegen $|s^{\infty}|$ in ein Produkt bezüglich der Nullstellen und Pole auf $X_{\infty}$ ,

$$|s^{\infty}(z)| = \Big(\prod_{Q \in X_{\infty}} \varphi_Q(z)^{v_Q(s^{\infty})}\Big)\cdot u(z). \tag{1}$$

Dabei ist u(z) eine glatte Funktion ohne Nullstellen und Pole auf $X_{\infty}$. Aus den Eigenschaften der Funktionen $\varphi_Q$ folgt, daß u der folgenden Gleichung genügt.

$$\Delta\log(u)dxdy = \Delta\log|s^{\infty}(z)|dxdy - \sum_{Q \in X_{\infty}} v_Q(s^{\infty})\Delta\log\varphi_Q(z)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\Delta\log|s^{\infty}(z)|^2 dxdy + 2\pi\Big(\sum_{Q \in X_{\infty}} v_Q(s^{\infty})\Big)d\mu \qquad \text{(vgl. (*) von 2.2.4)}$$

$$=^{15} \frac{1}{2}(\Delta\log s^{\infty} + \Delta\log \overline{s}^{\infty}) + 0$$

---

[14] Alle Betrachtungen finden dann über dem Restklassenkörper $k(\mathfrak{p})$ des Punktes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \Lambda$ statt, in dessen Faser D liegt.

[15] Die Nullstellengesamtordnung von $s^{\infty}$ ist gleich der Polstellengesamtordnung.

$=^{16} 0,$

d.h.

$$\Delta \log u = 0.$$

Die Funktion log u ist harmonisch, d.h. constant auf $X_\infty$ ,

$$\log u = c \in \mathbb{R}$$

Wir gehen in (1) zum Logarithmus über und bilden das Integral,

$c = \int_{X_\infty} \log u(z) d\mu$ (Formel (1) von 2.1.4)

$= \int_{X_\infty} \log |s^\infty| \, d\mu_\infty - \sum_{Q \in X_\infty} v_Q(s^\infty) \int_{X_\infty} \log \varphi_Q \, d\mu_\infty$

$= \int_{X_\infty} \log |s^\infty| \, d\mu_\infty$ (Eigenschaft 2.2.4 (**) von $\varphi_Q$ )

$= - v_\infty(s^\infty)$ (Definition von $v_\infty$ in 2.1.4(2))

d.h. in (1) gilt

(2) $\log u(z) = - v_\infty(s^\infty)$

unabhängig von z.

Damit gilt

$(\mathrm{div}(s) \cdot D) = (\mathrm{div}(s)_{fin} \cdot D) + (\mathrm{div}(s)_{inf}, \cdot D)$

$= \sum_{\mathfrak{p} \in S_{fin}} (\mathrm{div}(s)_{fin} \cdot D)_{\mathfrak{p}} + \sum_{\infty \in S_\infty} (\mathrm{div}(s)_{fin} \cdot D)_\infty$ (1.Summand)

$+ \sum_{\infty \in S_\infty} v_\infty(s) \cdot (X_\infty \cdot D)$ (2.Summand)

Dabei ist

$$\sum_{\mathfrak{p} \in S_{fin}} (\mathrm{div}(s)_{fin} \cdot D)_{\mathfrak{p}} = \sum_{\mathfrak{q} \in (\mathrm{Spec}\, \Gamma)_{fin}} - \log \|\varepsilon^*(s)\|_{\mathfrak{q}}$$ (nach 2.2.2)

$$(\mathrm{div}(s)_{fin} \cdot D)_\infty = (\sum_{Q \in X} v_Q(s) \cdot Q \, , D)_\infty$$

$=^{17} - \sum_{Q \in X} \sum_{\infty' | \infty} v_Q(s) \cdot \log \varphi_Q(P_{\infty'},)$ ($\infty'$:=Fortsetzung von $\infty$ auf K(D))

---

[16] $s^\infty$ ist meromorph und $\Delta \, dx \wedge dy = 4 \partial \bar{\partial} = - 4 \, \bar{\partial} \partial$.

[17] Nach Definition (vgl. 2.2.4) ist $(Q \cdot D)_\infty = - \sum_{\infty' | \infty} \log \varphi_Q(P_{\infty'},)$ wobei die Summe über alle Fortsetzungen $\infty'$ von $\infty$ erstreckt wird. Genaugenommen müßte rechts eine Doppelsumme stehen,

$$= - \sum_{\infty'|\infty} \log \prod_{Q \in X} \varphi_Q(P_{\infty'})^{v_Q(s)}$$

$$= - \sum_{\infty'|\infty} \log (s(P_{\infty'})/u(P_{\infty'})) \qquad \text{(nach (1))}$$

$$= - \sum_{\infty'|\infty} (\log (s(P_{\infty'}) + v_{\infty'}(s)) \qquad \text{(nach (2))}$$

$$= - \sum_{\infty'|\infty} \log | s(P_{\infty'}) | - [K(D):K] \cdot v_{\infty'}(s) \quad \text{(es gibt } [K(D):K]\cdot\text{Fortsetzungen)}$$

$$= - \sum_{\infty'|\infty} \log | \varepsilon^*(s) |_{\infty'} - v_{\infty'}(s) \cdot (X_{\infty'} \cdot D).$$

Einsetzen liefert

$$(\mathrm{div}(s), D) = \sum_{\mathfrak{q} \in (\mathrm{Spec}\ \Gamma)_{\mathrm{fin}}} - \log \|\varepsilon^*(s)\|_{\mathfrak{q}} - \sum_{\infty \in S_\infty} \sum_{\infty'|\infty} \log | \varepsilon^*(s) |_{\infty'},$$

Nach der Produktformel ist die rechte Seite gleich Null.
**QED**.

**Bemerkung**

Im nächsten Abschnitt beweisen wir unter anderem die Existenz der Funktionen $\varphi_p$ (vgl. 2.3.11) und befreien die Definition den Schnitt-Index von der Bedingung, daß die Divisoren der beiden Argumente keinen gemeinsamen Komponenten haben dürfen (vgl. 2.3.9).

## *2.3 Umkehrbare hermitische Garben*

### 2.3.1 Hermitische Vektorraumbündel

Wir wollen jetzt eine andere, für uns bequemere Definition einer Divisorklasse formulieren. Sei zunächst

$$X$$

eine kompakte[18] Riemannsche Fläche mit Volumenform

$$d\mu.$$

Und sei

$$L \to X$$

eine hermitisches Vektorraumbündel des Rangs 1 auf X. Die zur Metrik auf L gehörige Norm werde mit dem Symbol

$$\| \quad \|$$

bezeichnet. Ist

$$s: X \dashrightarrow L$$

ein rationaler Schnitt von L, so hängt die (1,1)-Form

$$- \partial\bar{\partial} \log \|s\|^2 =^{19} \sqrt{-1}\, \Delta \log \|s\|\, dx \wedge dy$$

---

welcher $Q_{\infty'}$, anstelle von Q vorkommt. Die Funktion $\varphi_Q$ sei hier definiert als das Produkt über alle $\varphi_{Q_{\infty'}}$.

[18] In der Arbeit wird die Kompaktheitsforderung nicht erwähnt, im folgenden aber benutzt (zum Beispiel in der Gestalt der Aussage, daß global auf X definierte harmonische Funktionen konstant sind. Siehe den Beweis der Bemerkung von 2.2).

nicht von der Wahl von s ab. Sie heißt Krümmungsform des Zusammenhangs und hat die Eigenschaft, daß

$$\int_X -\frac{1}{2\pi}\,\Delta \log \|s\|\, dx\wedge dy = \frac{1}{2\pi i}\int_X \partial\bar{\partial} \log \|s\|^2 = \deg L.$$

gilt. Diese Formel kann man erhalten, indem man die Greensche Formel (2.2.6) auf die Funktionen ||s|| und e auf X anwendet.[20]

### 2.3.2 Zulässige Metriken eines hermitischen Vektorraumbündels

Wir werden im folgenden nur solche Metriken auf L verwenden, welche der Bedingung

$$(*) \qquad -\frac{1}{2\pi}\Delta \log \|s\|\, dx\wedge dy = \frac{1}{2\pi i}\,\partial\bar{\partial} \log \|s\|^2 = (\deg L)\, d\mu$$

genügen. Dabei sie dμ die auf X gegebene Volumenform.

**Bemerkung**

Je zwei solche Metriken sind proportional, d.h. sie unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor.

**Beweis**. Sei ‖ ‖' eine zweite Metrik und dμ' die zugehörige Volumenform. Dann gilt

$$\|s\|' = t\cdot\|s\|$$

mit einer glatten positiven Funktion

$$t: X \to \mathbb{R}^+.$$

Wir haben zu zeigen, t ist konstant.

Es gilt

$$\begin{aligned}(\deg L)\, d\mu &= -\frac{1}{2\pi}\Delta \log \|s\|' dx\wedge dy \qquad \text{(Zulässigkeit der Metrik)}\\ &= -\frac{1}{2\pi}\Delta \log \|s\| dx\wedge dy - \frac{1}{2\pi}\Delta \log t\, dx\wedge dy\\ &= (\deg L) d\mu - \frac{1}{2\pi}\Delta \log t\, dx\wedge dy\end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\Delta \log t\, dx\wedge dy = 0.$$

Mit andere Worten log t ist eine globale harmonische Funktion auf X, also konstant.

**QED**.

### 2.3.3 Metrisierte Geradenbündel auf dem Modell V

Seien V wie in 2.1.1., d.h.

$$f: V \to S = \operatorname{Spec} \Lambda$$

ist ein Morphismus von Schemata mit

---

[19] Wir verwenden hier die Bezeichnungen von Griffiths & Harris, Principles of algebraic geometry, p. 142. In der Arbeit steht die Formel

$$\frac{1}{\pi i} d'd'' \log \|s\| = -\frac{1}{2\pi}\Delta \log \|s\|\, dxdy$$

wobei nicht angegeben ist, wie d' und d'' definiert sind. Auf Grund der Formel sollte d'=$\partial$ und d''= $\bar{\partial}$ sein. Man beachte, es gilt

$$\begin{aligned}\partial\bar{\partial} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)(dx + \sqrt{-1}\, dy)\wedge\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)(dx - \sqrt{-1}\, dy)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(-2dx\wedge dy)\\ &= -\frac{i}{2}\Delta\, dx\wedge dy.\end{aligned}$$

[20] vgl. auch Griffiths & Harris: Principles of algebraic geometry, p. 144 (man verwendet beim Beweis die Poincaré-Dualität).

1. K ist eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ und ist algebraisch abgeschlossen in K(X)
2. $\Lambda$ ist der Ring der ganzen Zahlen von K.
3. V ist regulär, f ist projektiv.
4. Die allgemeine Faser von f ist 1-dimensional, glatt und geometrisch irreduzibel.
5. Die einzigen Singularitäten der speziellen Fasern von f sind gewöhnliche Doppelpunkte.

Weiter sei L eine umkehrbare Garbe auf V. Für jede unendlich ferne Faser

$$X_\infty \,, \infty \in S_{inf} \,,$$

sei auf der Einschränkung

$$L_\infty := L|_{X_\infty} := L \otimes \mathcal{O}_{X_\infty}$$

eine zulässige hermitische Metrik $\| \ \|_\infty$ gegeben, d.h. sie erfülle die Bedingung (*) von 2.3.2 mit $d\mu = d\mu_\infty$ .

In dieser Situation wollen wir von L als von einem metrisierten Geradenbündel sprechen.

### 2.3.4 Die Divisorklasse eines metrisierten Geradenbündels

Seien V wie in 2.3.3 und $L \to V$ ein metrisiertes Geradenbündel auf V. Weiter sei

$$s: V \dashrightarrow L$$

ein rationaler Schnitt von L. Der Divisor dieses Schnitts ist nach Definition gleich

$$\operatorname{div}(s) = \operatorname{div}(s)_{fin} + \sum_{\infty \in S_{inf}} v_\infty(s) \cdot X_\infty$$

mit

$$v_\infty(s) := \int_{X_\infty} - \log \|s\| \, d\mu_\infty \,,$$

wobei $\operatorname{div}(s)_{fin}$ der endliche Divisor des Schnittes s auf dem Schema V sei. Ist

$$s': V \dashrightarrow L$$

ein zweiter rationaler Schnitt von L, so gilt

$$s' = t \cdot s$$

mit einer rationalen Funktion

$$t \in K(V)$$

und offensichtlich ist

$$\operatorname{div}(s') = \operatorname{div}(s) + \operatorname{div}(t).$$

Auf diese Weise definiert ein metrisiertes Geradenbündel eine Divisorklasse auf V.

Zum Beweis der Umkehrung (d.h. jede Divisorklasse definiert ein metrisiertes Geradenbündel) benuzen wir das folgende Ergebnis.

### 2.3.5 Proposition 2.1 : Die Existenz zulässiger Metriken.

Seien X eine kompakte Riemannsche Fläche mit der Volumenform $d\mu$ und L ein Geradenbündel auf X. Dann gibt es eine zulässsige hermitische Metrik $\| \ \|$ auf L (d.h. ein hermitische Metrik die der Bedingung (*) von 2.3.2 genügt.

Bevor wir uns dem Beweis dieser Aussage zuwenden, zeigen wir zunächst wie man sie benutzen kann, um zu einer gegebenen Divisorklasse ein Geradenbündel zu konstruieren.

### 2.3.6 Das metrisierte Geradenbündel zu einer Divisorklasse

Sei $\alpha \in \hat{Cl}(V)$ eine vorgegebene Divisorklasse. Wir betrachten einen beliebigen Repräsentanten, sagen wir

$$D = D_{fin} + \sum_{\infty} v_{\infty}(D) \cdot X_{\infty} .$$

Sei L die umkehrbare Garbe

$$L = \mathcal{O}_V(D_{fin}).$$

Nach 2.3.5 gibt es auf L eine zulässige Metrik. Wir fixieren eine solche und bezeichen mit

$$s \in L$$

den globalen rationalen Schnitt mit[21]

$$div(s)_{fin} = D_{fin} .$$

Wir können die Metriken auf den unendlichen Fasern von L mit positiven konstanten Faktoren multiplizieren, ohne daß die Metrik auf L aufhört zulässig zu sein. Wir können dadurch insbesondere erreichen daß für jedes $\infty \in S_{inf}$ die reelle Zahl

$$v_{\infty}(s) := - \int_{X_{\infty}} \log \|s\| \, d\mu_{\infty} .$$

(vgl. 2.4 und 0.3(2)) gleich der vorgegebenen Zahl $v_{\infty}(D)$ ist.[22] Dann ist aber D gerade der Divisor zum Schnitt s von L, d.h. $\alpha$ ist die Divisorklasse zu L.
Wir erhalten damit die folgende Aussage:

### 2.3.7 Proposition 2.2: Die Divisorklassengruppe als Gruppe von metrisierten Geradenbündeln

Die Gruppe $\hat{Cl}(V)$ läßt sich beschreiben als Gruppe der Isomorphieklassen der metrisierten Geradenbündel auf V mit dem Tensorprodukt als Gruppenoperation.

### 2.3.8 Die Situation im 1-dimensionalen Fall

Dieselbe Beschreibung ist auch für die Gruppe $\hat{Cl}(K)$ möglich. Ein <u>metrisiertes Geradenbündel</u> auf Spec $\Lambda$ ist hier nach Defintion eine umkehrbare Garbe (d.h. ein projektiver $\Lambda$-Modul des Rangs 1) L auf Spec $\Lambda$, für welchen auf jedem der 1-dimensionalen Vektorräume

$$L \otimes_{\infty} \mathbb{C}$$

eine hermitische Metrik gegeben ist. Wie oben gehört zu jedem metrisierten Geradenbündel L auf Spec $\Lambda$ eine Divisorklasse[23]

---

[21] s existiert auf Grund der Sätze der klassischen algebraischen Geometrie. Ist $\{s_{\alpha} : U_{\alpha} \dashrightarrow \Lambda\}$ ein System von lokalen Gleichungen von D, so definieren die $s_{\alpha}$ den Schnitt s.

[22] Die Multiplikation der Metrik mit der positiven Konstanten $c > 0$ ändert diesen Ausdruck um den folgenden Summanden ab:

$$- \int_{X_{\infty}} \log c \, d\mu_{\infty} = - \log(c) \cdot \int_{X_{\infty}} d\mu_{\infty} = - \log(c).$$

[23] Man wähle einen rationalen Schnitt s von L und den zugehörigen Divisor

$$[L] \in Cl^{\wedge}(K).$$

Insbesondere kann man für jedes metrisierte Geradenbündel dessen Grad definieren,

$$\deg L := \deg [L] := \text{Grad des zugehörigen Divisors.}$$

**2.3.9 Proposition 2.3: Der Schnitt-Index als Grad eines metrisierten Geradenbündels**

Seien L eine endliche Körpererweiterung von K,

$$\Gamma \subset L$$

der Ring der ganzen Zahlen von L,

$$\varepsilon: \operatorname{Spec} \Gamma \to V$$

ein Morphismus über Spec $\Lambda$ ,

$$D := \varepsilon(\operatorname{Spec} \Gamma)$$

ein horizontaler Divisor auf V (vgl. 2.2.2) und D' irgendein (Arakelov-)Divisor von V. Wir schreiben für die zugehörige metrisierte umkehrbare Garbe

$$\mathfrak{L}' := \mathcal{O}_V(D').$$

Dann gilt,

$$(D \cdot \mathfrak{L}) := (D \cdot D') = \deg \varepsilon^*(\mathfrak{L}).$$

Dabei werde das inverse Bild $\varepsilon^*(\mathfrak{L})$ von $\mathfrak{L}$ in der Kategorie der metrisierten Garben gebildet.

**Beweis**. Sei

$$D' = D'_{fin} + \sum_{\infty \in S_{inf}} v_\infty(D') \cdot X_\infty$$

ein Divisor mit $\mathfrak{L} = \mathcal{O}_V(D')$ (in der Kategorie der metrisierten umkehrbaren Garben) und $s \in \mathfrak{L}$ ein rationaler Schnitt mit

$$\operatorname{div}^{\wedge}(s) = D'.$$

Dieselbe Rechnung wie im Beweis von 2.2.7 liefert

$$(\operatorname{div}^{\wedge}(s), D) = \sum_{\mathfrak{q} \in (\operatorname{Spec} \Gamma)_{fin}} - \log \|\varepsilon^*(s)\|_{\mathfrak{q}} - \sum_{\infty \in S_\infty} \sum_{\infty' | \infty} \log | \varepsilon^*(s) |_{\infty},$$

$$= \sum_{\mathfrak{q} \in (\operatorname{Spec} \Gamma)_{fin}} - v_{\mathfrak{q}}(\varepsilon^*(s)) \cdot \log \#(\Gamma/\mathfrak{q}) - \sum_{\infty \in S_\infty} \sum_{\infty' | \infty} \log | \varepsilon^*(s) |_{\infty}, .$$

$$= \deg \operatorname{div}^{\wedge}(\varepsilon^*(s)) \qquad \text{(nach 2.1.3)}$$

Nun ist $\varepsilon^*(s)$ ein rationaler Schnitt von $\varepsilon^*\mathfrak{L}$, d.h. der letzte Ausdruck ist gerade der Grad von $\varepsilon^*\mathfrak{L}$.

**QED**.

---

$$\operatorname{div}(s) = \operatorname{div}(s)_{fin} + \sum_{\infty \in S_{inf}} v_\infty(s) \cdot \infty \text{ mit } v_\infty(s) := - \log |s|_\infty \text{ (vgl. 0.2)}$$

Die Klasse dieses Divisors hängt nicht von der speziellen Wahl des Schnitts s ab.

### 2.3.10 Die metrisierte Garbe eines endlichen Divisors und der zugehörige kanonische Schnitt

Sei D ein beliebiger endlicher Divisor auf V, d.h. für jedes $\infty \in S_{inf}$ sei der Koeffizient von $X_\infty$ Null,

$$v_\infty(D) = 0.$$

Wir betrachten die umkehrbare Garbe $\mathcal{O}_V(D)$ und wählen wie folgt einen eindeutigt bestimmten globalen Schnitt

$$s_D \in \mathcal{O}_V(D) \text{ mit } div(s_D) = D.$$

Falls D irreduzibel ist betrachten wir die natürliche Einbettung

$$\mathcal{O}_V(-D) \to \mathcal{O}_V$$

des Ideals von D in die Strukturgarbe, tensorieren diese Einbettung mit $\mathcal{O}_V(D)$ und setzen

$$s_D := \text{Bild von } 1 \in \mathcal{O}_V \text{ bei der natürlichen Abbildung } \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_V(D).$$

Ist

$$D = \sum_i n_i D_i$$

Linearkombination irreduzibler Divisoren $D_i$, so setzen wir

$$s_D := \prod_i s_{D_i}^{n_i}.$$

Nach Konstruktion gilt dann für jeden effektiven Divisor D (d.h. alle Koeffizienten sind $\geq 0$)

$$s_D := \text{Bild von } 1 \in \mathcal{O}_V \text{ bei der natürlichen Abbildung } \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_V(D).$$

Man kann dann $\mathcal{O}_V(D)$ auf genau eine Weise zu einer metrisierten Garbe machen, sodaß für alle $\infty \in S_{inf}$ gilt[24]

$$v_\infty(s_D) = 0.$$

Die so entstehende metrisierte umkehrbare Garbe wollen wir im folgenden mit

$$\mathcal{O}_V(D)$$

bezeichnen. Nach Konstruktion ist $s_D$ ein rationaler Schnitt dieser Garbe mit

$$div(s_D) = \hat{div}(s_D) = D.$$

---

[24] Zunächst mache man $\mathcal{O}_V(D)$ auf irgendeine Weise zu einer metrisierten Garbe, was möglich ist nach 2.3.5. Die Metriken auf den unendlich fernen Fasern sind, da sie zulässig sein sollen, nach der Bemerkung von 2.3.2 bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Durch Multiplikation der Metriken mit konstanten positiven Faktoren erreichen wir wie in 2.3.6 ,daß die Bedingungen $v_\infty(s_0) = 0$ erfüllt werden. Die zu wählenden Faktoren sind dadurch eindeutig festgelegt (da ihre Logarithmen es sind).

### 2.3.11 Der Beweis von Proposition von 2.3.5

Wir zeigen jetzt, jedes holomorphe Geradenbündel L auf einer kompakten Riemannschen Fläche X mit der Metrik $d\mu$ besitzt eine zulässige hermitische Metrik. (vgl. 2.3.5 Proposition 2.1).

#### *2.3.11. a) Lemma 2.1: Existenz harmonischer Metriken auf Bündeln des Grades 0*

Sei L ein Geradenbündel des Grades 0 auf einer kompakten Riemannschen Fläche X. Dann gibt es auf L eine harmonische Metrik, d.h.eine Metrik deren Krümmung gleich Null ist.

**Beweis**. Wir betrachten die Exponentialsequenz in der glatten Kategorie,

$$0 \to \mathbb{Z} \to C_X^\infty \xrightarrow{\exp} C_X^\infty \to 0$$

und die zugehörige lange Kohomologiesequenz,

$$H^1(X, C_X^\infty) \to H^1(X, C_X^\infty) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, C_X^\infty).$$

Da $C_X^\infty$ kohomologisch trivial ist, ist die erste Chern-Klasse in der glatten Kategorie ein Isomorphismus,

$$c_1 : H^1(X, C_X^\infty) \xrightarrow{\cong} H^2(X, \mathbb{Z})$$

Außerdem ist X orientierbar, $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ und die Grad-Abbildung

$$\deg : H^2(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}, \quad \deg c_1(L) =^{25} \int_X c_1(L)$$

ein Isomorphismus. Ein Geradenbündel vom Grad 0 ist somit in der glatten Kategorie isomorph zum trivialen Bündel, und besitzt damit dessen "konstante" Metrik , d.h. eine Metrik mit der Krümmung Null.

**QED**.

#### *2.3.11. b) Lemma 2.2: Existenz zulässiger Metriken bei geeigneter Wahl von $d\mu$*

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann gibt es mindestens eine Volumenform $d\mu_0$ auf X derart, daß jedes Geradenbündel $\mathfrak{L} \to X$ eine (im Sinne von 2.3.2) zulässige hermitische Metrik besitzt.

**Beweis**. <u>1. Schritt</u>: Reduktion auf die Konstruktion eines gewissen Bündels $\mathfrak{L}_0$.

Wir werden ein Geradenbündel $\mathfrak{L}_0$ auf X konstruieren und eine Metrik $\| \ \|$ auf $\mathfrak{L}_0$ mit der Eigenschaft, daß die (1,1)-Form

$$\frac{1}{\pi i} \partial\bar{\partial} \log \| s \| > 0$$

positiv ist für jeden nicht-trivialen lokalen holomorphen Schnitt[26] s von $\mathfrak{L}_0$, keine Nullstellen besitzt und unabhängig von der speziellen Wahl des Schnitts ist[27]. Wir definieren dann die Volumenform $d\mu_0$ von X, indem wir setzen

---

[25] vgl. Griffiths & Harris: Principles of algebraic geometry, p. 144

[26] Genauer: s soll keine Nullstellen in der betrachteten Umgebung besitzen.

[27] Die lokal definierten (1,1)-Formen verheften sich also zu einer global definierten (1,1)-Form $\omega$ mit

$$\int_X \omega > 0.$$

$$d\mu_0 := \frac{1}{\deg \mathfrak{L}_0} \cdot \frac{1}{\pi i}\, \partial\bar{\partial} \log \| s \|.$$

Die gegebene Metrik auf $\mathfrak{L}_0$ wird auf diese Weise zu einer zulässigen Metrik. Die Potenzen dieser Metrik liefern zulässige Metriken auf den Tensorpotenzen von $\mathfrak{L}_0$.

Ist $\mathfrak{L}$ ein beliebiges Geradenbündel auf X, so gibt es ganze Zahlen m und n mit der Eigenschaft, daß das Geradenbündel

$$\mathfrak{M} := \mathfrak{L}^{\otimes n} \otimes \mathfrak{L}_0^{\otimes -m}$$

den Grad Null hat und demzufolge eine harmonische Metrik besitzt (nach 211 a)). Nun gilt

$$\mathfrak{L}^{\otimes n} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{L}_0^{\otimes m}$$

Das Produkt aus der harmonischen Metrik von $\mathfrak{M}$ und der m-ten Potenz der Metrik von $\mathfrak{L}_0$ ist ein zulässige Metrik von $\mathfrak{L}^{\otimes n}$ und deren n-te Wurzel ein zulässige Metrik von $\mathfrak{L}$. Dies reduziert den Beweis der Behauptung auf die Konstruktion des Geradenbündels $\mathfrak{L}_0$ (und dessen oben beschriebener (1,1)-Form).

2. Schritt: Konstruktion von $\mathfrak{L}_0$ .

Nach dem Einbettungssatz von Kodaira können wir X als algebraische Kurve im N-dimensionalen projektiven Raum auffassen, sagen wir

$$X \subseteq \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^N$$

mit einem komplexen Vektorraum V der Dimension

$$\dim V = N+1.$$

Wir wählen eine beliebige hermitische Metrik $\| \ \|$ auf V. Diese definiert eine hermitische Metrik auf dem trivialen Vektorraumbündel

$$V \times \mathbb{P}^N.$$

Die Metrik auf dem trivialen Bündel induziert eine Metrik auf dem tautologischen Teilbündel

$$\mathcal{O}(-1) \subseteq V \times \mathbb{P}^N.$$

Die global definierte Krümmung dieser Metrik ist lokal von der Gestalt

$$\partial\bar{\partial} \log \|s\|,$$

wobei s einen lokalen Schnitt desTeilbündels bezeichnet, der nirgends Null ist. Das $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}$-fache dieser (1,1)-Form,

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\, \partial\bar{\partial} \log \|s\| = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}, \cdot \partial\bar{\partial} \log \|s\|$$

ist gerade die (1,1)-Form der Fubini-Study-Metrik des $\mathbb{P}^N$ (vgl. z.B. Griffiths & Harris: Principles of algebraic geometry, p. 31). Insbesondere ist diese Form streng positiv (und eine Kähler-Metrik). Diese Eigenschaft bleibt erhalten beim Einschränken auf die Kurve X. Wir können also

$$\mathfrak{L}_0 := \mathcal{O}(-1)^{-1}|_X = \mathcal{O}_X(1)$$

---

Insbesondere ist der Grad des Bündel ungleich Null.

setzen (und als Metrik die inverse Metrik der Einschränkung auf $\mathcal{O}_X(-1)$ der trivialen Metrik von V×X verwenden).
**QED**.

### *2.3.11 c) Lemma 2.3:Abschluß des Beweises*

Die Aussage von 2.3.5 ist für beliebige (normierte)[28] Metriken dμ auf der Riemannschen Fläche X richtig.

**Beweis**. Sei $\mathfrak{L} \to X$ ein Geradenbündel auf X und bezeichne $\| \|_0$ die hermitische Metrik auf $\mathfrak{L}$, die bezüglich der in 2.3.11 b) konstruierten Metrik $d\mu_0$ auf X zulässig ist, d.h.

$$-\frac{1}{2\pi}\,\Delta \log \| \|_0 \, dxdy = \deg L \cdot d\mu_0 .$$

Die vorgegebene Metrik ist von der Gestalt

$$d\mu = \rho \, d\mu_0$$

mit einer glatten positiven Funktion

$$\rho: X \to \mathbb{R}^+.$$

Wir müssen eine Metrik

$$\| \| = \varphi \cdot \| \|_0$$

auf $\mathfrak{L}$ finden mit

$$-\frac{1}{2\pi}\,\Delta \log \| \| \, dxdy = \deg L \cdot d\mu .$$

Mit anderen Worten, gesucht ist eine glatte positive Funktion

$$\varphi: X \to \mathbb{R}^+$$

mit

$$-\frac{1}{2\pi}\,\Delta \log \varphi \, dxdy - \frac{1}{2\pi}\,\Delta \log \| \|_0 \, dxdy = \deg L \cdot \rho \, d\mu_0$$

d.h. mit

$$-\frac{1}{2\pi}\,\Delta \log \varphi \, dxdy = \deg L \cdot (\rho - 1) \cdot d\mu_0 .$$

Dies ist die Poisson-Gleichung. Sie ist genau dann lösbar, wenn das Integral über die rechte Seite Null ist[29]:

$$0 = \int_X (\rho - 1) \cdot d\mu_0 = \int_X d\mu - \int_X d\mu_0 .$$

Das ist aber der Fall, weil die von uns betrachteten Maße durch die Bedingung

$$\int_X d\mu = \int_X d\mu_0 = 1$$

---

[28] d.h. $\int_X d\mu = 1$, vgl. 2.1.3.

[29] Nach der Anmerkung von 2.2.4 ist diese Gleichung zur Laplace-Gleichung

$$(*d*d* + d*d*) \log \varphi = \deg L \cdot (\rho - 1)$$

äquivalent. Diese ist genau dann lösbar, wenn die rechte Seite auf dem Raum der harmonischen Funktionen senkrecht steht. Letzterer Raum ist 1-dimensional (nach dem Satz von Hodge) und wird als Vektorraum von der konstanten Funktion 1 erzeugt. Die Lösbarkeitsbedingung lautet also

$$0 = \langle \rho - 1, 1 \rangle = \int_X (\rho - 1) \, *1 = \int_X (\rho - 1) \cdot d\mu_0 .$$

normiert sein sollen. Da das Argument von $\Delta$ die Funktion $\log \varphi$ ist, ist gesichert, daß $\varphi$ automatisch positiv ist.
**QED**.

**2.3.12 Bemerkungen**

(i) Es ist nicht nötig, von den betrachteten Maßen $d\mu$ auf X die strenge Positivität zu fordern. Man kann zulassen, daß $d\mu$ in endlich vielen Punkten Null ist.

(ii) Die Existenz der globalen Gleichung

$$\varphi_p(z) = 0$$

eines Punkten $p \in X$ (vgl. 2.2.4) kann man jetzt wie folgt einsehen.

Betrachten wir die Garbe $\mathfrak{L} := \mathcal{O}_X(p)$ und versehen diese mit der (im Sinne von 2.3.2) zulässigen hermitischen Metrik $\| \ \|$. Sei s ein holomorpher Schnitt von $\mathfrak{L}$ mit der einzigen Nullstelle p . Dann kann man

$$\varphi_p(z) = c \cdot \|s\|$$

setzen, wobei die Konstante c so zu wählen ist, daß gilt

$$\int_X \log \varphi_P \, d\mu = 0$$

(vgl. 2.2.4 (**)).

## *2.4 Zur Theorie der bilinearen Differentiale*

## *2.5. Die Green-Funktion einer Riemannschen Fläche*

**2.5.1 Definition 3.1**

Seien X eine kompakte Riemannsche Fläche mit der Volumenform $d\mu$ und

$$\varphi_p : X \to \mathbb{R}$$

eine globale Gleichung des Punktes $p \in X$ bezüglich $d\mu$ (im Sinne von 1.4). Dann heißt die Abbildung

$$g: X \times X \to \mathbb{R}, (p,z) \mapsto \log \varphi_p(z),$$

Greensche Funktion von X bezüglich $d\mu$. Wir setzen

$$G(p, z) := \varphi_p(z),$$

d.h. es gelte

$$g(p,z) = \log G(p,z).$$

**Bemerkung**

Diese Definition unterscheidet sich etwas von der allgemein üblichen. Die Funktion g(p,q) ist gerade der Schnittindex,
$g(p,q) = (p \cdot q)_X$ ,
aufgefaßt als Funktion von p und q.

**2.5.2 Eigenschaften der Funktion G(p,q)**

1) $G: X \times X - \Delta \to \mathbb{R}$ ist eine nicht-negative glatte Funktion außerhalb der Diagonalen $\Delta$.

2) G besitzt entlang der Diagonalen eine Nullstelle erster Ordnung.

3) $-\frac{1}{2\pi} \Delta_z \log G(p,z) = \frac{1}{2\pi i} \partial\bar{\partial} \log G(p,z)^2 = d\mu(z)$.

4) $G(p,z) = G(z,p)$.

5) $\int_X \log G(p,z)\, d\mu(z) = 0.$

Durch die obigen Eigenschaften ist die Funktion G eindeutig festgelegt.

Die Glattheit von G als Funktion von zwei Variablen erfordert natürlich Aufmerksamkeit. Wir werden hier auf einen Beweis verzichten.

### 2.5.3 Beispiel

Seien $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, z eine affine Koordinate auf $\mathbb{P}^1$ und

$$d\mu := \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{|dz|^2}{(1+|z|^2)^2} .$$

Dann ist

$$G^2(a,z) = e \cdot \frac{|a-z|^2}{(1+|a|^2)(1+|z|^2)} .$$

Man überprüft leicht ob die so definierte Funktion G die obigen Eigenschaft hat.

### 2.5.4 Die durch G definierte hermitische Metrik

Die Funktion G(p,z) auf X×X definiert eine hermitische Metrik auf dem Geradenbündel

$$\mathcal{O}_{X\times X}(-\Delta_X)$$

Dabei bezeichne $\Delta_X$ die Diagonale in X×X. Die Metrik ist definiert durch die Bedingung

$$\|s_\Delta(z)\| := G(p,z).$$

Dabei bezeichne $s_\Delta$ den Schnitt

$$s_\Delta \in \mathcal{O}_{X\times X}(\Delta_X),$$

welcher gerade das kanonische Bild von $1 \in \mathcal{O}_{X\times X}$ bei der natürlichen Abbildung

$$\mathcal{O}_{X\times X} \to \mathcal{O}_{X\times X}(\Delta_X)$$

ist. Wir bezeichnen diese Metrik im folgenden mit $\| \ \|$.

### 2.5.5 Die kanonische hermitische Metrik auf dem Kotangentialbündel

Zur Formulierung des nachfolgenden klassischen Resultats benötigen wir noch die kanonische hermitische Metrik auf dem Kotangentialbündel $\Omega^1_X$ einer kompakten Riemannschen Fläche X. Sie ist definiert durch

$$< , > : \Omega^1_X \times \Omega^1_X \to \mathbb{C}, (\xi, \eta) \mapsto <\xi, \eta> := i \cdot \int_X \xi \wedge \bar{\eta} .$$

### 2.5.6 Proposition 3.1: Die Krümmung der durch G definierten Metrik auf X×X

Seien X eine kompakte Riemannsche Fläche mit der Volumenform $d\mu$, die zugehörigen Greensche Funktione und

$$\| \ \|$$

die durch $G(p,z) = e^{g(p,z)}$ definierte Metrik auf $\mathcal{O}_{X\times X}(\Delta_X)$. Weiter sei

$$\omega_1, ..., \omega_g \in H^0(X, \Omega^1_X)$$

eine orthonormierte Basis (bezüglich der kanonischen Metrik 3.5). Dann gilt

$$(-\frac{1}{2\pi}\Delta \log \| \ \| \, dxdy = ) \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot \partial\bar{\partial} \log \| \ \|^2$$

$$= p_1^* d\mu + p_2^* d\mu - \sqrt{-1} \cdot \sum_{k=1}^{g} (p_1^* \omega_k \wedge p_2^* \bar{\omega}_k + p_1^* \bar{\omega}_k \wedge p_2^* \omega_k).$$

**Beweis**. Siehe [1], Chapter 4, §10. Wir beschränken uns hier auf eine kurze Beweis-Skitze.

Eine anspruchsvollere Formulierung der Behauptung besagt, die rechte Seite der zu beweisenden Identität ist eine erzeugender Kern für die holomorphen Differentiale auf X, d.h.

$$(*) \qquad (\int_X \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{\partial^2 \log G^2}{\partial z \partial \bar{p}} dz \wedge \bar{\eta}(z)) \, d\bar{p} = \bar{\eta}(p).$$

für jedes holomorphe Differential $\eta$. Aus (*) und der Tatsache, daß

$$\frac{\partial^2 \log G^2}{\partial z \partial \bar{p}} dz \, d\bar{p}$$

holomorph ist bezüglich z folgt die Behauptung. Zum Beweis von (*) schreibt man das Integral auf der linken Seite in der Gestalt

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_X d(\frac{\partial \log G^2}{\partial \bar{p}} \cdot \bar{\eta})$$

und wendet den Satz von Stokes an auf die Fläche X, aus der man eine kleine Kreisscheibe um den Punkt p entfernt.
**QED**.

### 2.5.7 Proposition 2.5.2: Vergleich der Greenschen Funktionen für unterschiedliche Metriken

Seien X eine kompakte Riemannsche Fläche, dμ' und dμ" zwei Volumenformen auf X, und g' = log G' bzw. g"= log G" die zugehörigen Greenschen Funktionen.
Weiter sei

$$\varphi: X \to \mathbb{R}$$

eine glatte Funktion mit

(1) $$\Delta \log \varphi \, dxdy = d\mu' - d\mu"$$

welche durch die Bedingung

(2) $$\int_X \log \varphi \cdot (d\mu' + d\mu") = 0$$

normiert ist.
Dann gilt

$$G"(p,z) = \varphi(p) \cdot \varphi(z) \cdot G'(p,z).$$

**Beweis**. Es reicht zu zeigen, die Funktion

$$\varphi(p) \cdot \varphi(z) \cdot G'(p,z)$$

genügt den Bedingungen 1) - 5) von 3.2 bezüglich G. Für die Bedingungen 1) - 4) ist das offensichtlich. Es reicht also zu zeigen,

$$\int_X \log (\varphi(p) \cdot \varphi(z) \cdot G'(p,z)) d\mu"(z) = 0.$$

Das Integral läßt sich mit Hilfe von (2) und der Standard-Eigenschaften 3.2 der Green-Funktion G' in der folgenden Gestalt schreiben.

$$\log \varphi(P) - \int_X \log \varphi(z)\, d\mu'(z) + \int_X \log G'(p,z)\, (d\mu''(z) - d\mu'(z))$$

Durch Anwenden der Greenschen Formel erhalten wir die Behauptung:

$$3.\ \text{Summand} = -\int_X \log G'(p,z)\, \Delta \log \varphi\, dxdy \qquad \text{(nach (1))}$$

$$= -\int_X \log \varphi \cdot \Delta \log G'(p,z)\, dxdy - \log \varphi(p) \qquad \text{(nach Green, 1.6)}$$

$$= 2\pi\sqrt{-1} \int_X \log \varphi\, d\mu' - \log \varphi(p) \qquad \text{(nach 3.2 Eigenschaft 3))}$$

Der dritten Summand ist also das Negative der Summe der beiden ersten Summanden. **QED**.

## *2.6. Kanonische Klasse und Adjunktionsformel*

### 2.6.1 Theorem 4.1

Bei geeigneter Wahl der Metriken auf den unendlich fernen Fasern von V gibt es ein metrisiertes Geradenbündel $\mathcal{K} \to V$ auf V mit folgender Eigenschaft:
Ist $C \subset V$ ein glatter horizontaler Divisor, der nicht durch die singulären Punkte der Fasern von

$$V \to S = \operatorname{Spec} \Lambda$$

geht[30] und bezeichnet $\delta_C$ die absolute Diskriminante von C, d.h. die Diskriminante des Körpers $L = K(C)$ der rationalen Funktionen auf C über $\mathbb{Q}$, so besteht die folgende Adjunktionsformel.

$$(C \cdot C) + (C \cdot \mathcal{K}) = \log |\delta_C|.$$

**Bemerkung**

Es ist naheliegend, die Divisorklasse von $\mathcal{K}$ kanonische Klasse von V zu nennen.

**Beweis**. Sei [31]$\omega_{V/S}$ die umkehrbare Garbe auf V, welche außerhalb der singulären Punkte der Fasern von $V \to S$ mit der Garbe der relativen 1-Formen übereinstimmt,

$$\omega_{V/S} = \Omega^1_{V/S} \text{ außerhalb der singulären Punkte der Fasern von } V \to S.$$

Wir werden auf den unendlich fernen Fasern

$$(\omega_{V/S})_\infty = \Omega^1_\infty$$

geeignete Metriken einführen. Zunächst nehmen wir an, die Metriken sind irgendwie gewählt. Wir betrachten die beiden folgenden kurzen exakten Garbensequenzen.

$$(1) \qquad 0 \to \partial_{C/S} \to \mathcal{O}_C \xrightarrow{d} \Omega^1_{C/S}$$

$$(2) \qquad 0 \to \mathcal{O}_V(-C)|_C \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{V/S}|_C \to \Omega^1_{C/S} \to 0.$$

---

[30] In der Arbeit steht statt 'singuläre' Punkte 'Doppelpunkte'. Da $V \to S$ ein stabiles Modell einer Kurve über K ist, treten als einzige Singularitäten bei den Fasern einfach Doppelpunkte auf.

[31] Mit anderen Worten, $\omega_{V/S}$ ist eine relative Version der dualisierenden Garbe im Sinne von Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Definition vor Prop. III.7.2. Diese Garbe existiert nach Prop. III.7.4 und ist umkehrbar nach Theorem III.7.11. Es gilt der Satz von Riemann-Roch, Ex. IV.1.9

Die zweite Sequenz ist gerade die zweite Standard-Sequenz zu $C \subset V \to S$ (vgl. Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Prop. II.8.12). Sie ist auf der linken Seite exakt, weil C als Divisor auf dem regulären Schema V ein vollständiger Durchschnitt ist. Der $\mathcal{O}_C$-Modul

$$\partial_{C/S} := \text{Ker } d$$

der ersten Sequenz ist gerade das Ideal des Verzweigungsortes des endlichen Morphismus $C \to S$. Das rechte und das mittlere Bündel der exakten Sequenze (2) betrachten wir als metrisierte Geradenbündel. Wegen

$$C = \text{Spec } \Gamma,$$

wobei $\Gamma$ der Ring der ganzen Zahlen von $L = K(C)$ ist, ist für alle diese Bündel der Grad definiert. Wir nehmen jetzt an, daß die folgende Bedingung erfüllt ist.

(3) $\alpha_\infty$ ist eine Isometrie für jedes $\infty$.

Durch Vergleich von Graden erhalten wir dann[32]

---

[32] Es gilt nach 2.9 Proposition 2.3:

$$(\omega_{V/S} \cdot C) = \deg \omega_{V/S}|_C = \deg \Omega^1_{V/S}|_C$$

$$(C \cdot C) = (C \cdot \mathcal{O}_V(C)) = \deg \mathcal{O}_V(C)|_C = -\deg \mathcal{O}_V(-C)|_C$$

Zur Berechnung der Grade rechts kann man einen globalen rationalen Schnitt

$$s \in \deg \mathcal{O}_V(-C)|_C \subseteq \Omega^1_{V/S}|_C$$

und dann den Grad von div (s) berechnen. Weil C glatt ist und die Singularitäten der Fasern von $V \to S$ meidet, sind die lokalen Ringe dieser Garben diskrete Bewertungsringe, also insbesondere Hauptidealringe. Die Sequenz (2) hat lokal in jedem Punkt $p \in C$ die Gestalt

$$0 \to t\mathcal{O} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}/t\mathcal{O} \to 0,$$

wobei $\mathcal{O}$ den lokalen Ring von C in p bezeichnet. Der Schnitt s definiert ein Element $s \in t\mathcal{O}$ und damit eine exakte Sequenz

$$0 \to t\mathcal{O}/s\mathcal{O} \to \mathcal{O}/s\mathcal{O} \to \mathcal{O}/t\mathcal{O} \to 0.$$

Dies ist eine exakte Sequenz von Moduln endlicher Länge, d.h. es gilt

$$l(\mathcal{O}/s\mathcal{O}) = l(t\mathcal{O}/s\mathcal{O}) + l(\mathcal{O}/t\mathcal{O}).$$

Die beiden ersten Summanden sind Beiträge zur Berechnung des (endlichen Teils) der Grade der Garben $\Omega^1_{V/S}|_C$ und $\mathcal{O}_V(-C)|_C$ im Punkt p. Bezeichnen wir diese Beiträge mit $\deg_p$ so kann man die Identität in der folgenden Gestalt schreiben.

$$\deg_p \Omega^1_{V/S}|_C = \deg_p \mathcal{O}_V(-C)|_C + l(\Omega^1_{C/S,p}) \cdot \log N_p$$

Dabei bezeichne $N_p$ wie bisher die Ordnung des Restklassenkörpers von p. Nach Voraussetzung (3) besteht eine solche Relation auch für die unendlich fernen Punkte, wobei der zweite Summand rechts in dieser Situation Null ist. Durch Summation über alle Punkte erhalten wir damit

$$\deg \Omega^1_{V/S}|_C = \deg \deg \mathcal{O}_V(-C)|_C + \sum_{p \in C} l(\Omega^1_{C/S,p}) \cdot \log N_p,$$

d.h.

$$(\omega_{V/S} \cdot C) = -(C \cdot C) + \sum_{p \in C} l(\Omega^1_{C/S,p}) \cdot \log N_p$$

Der zweite Summand rechts ist gerade der (klassische) Grad des Verzweigungsdivisors (vgl. Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Definition nach Prop. IV.2.2), d.h.

$$l(\Omega^1_{C/S,p}) = e_p - 1$$

(4) $$(\omega_{V/S}\cdot C) + (C\cdot C) = \log |\delta_{C/S}|$$

wobei $\delta_{C/S}$ die relative Diskriminante von $C \to S$ bezeichnet.

Nun gilt

$$\delta_C =^{33} (\delta_S)^{[L:K]}\, \delta_{C/S}$$

d.h.

$$\log |\delta_{C/S}| = \log |\delta_C| - [L:K]\cdot \log |\delta_S|$$
$$= \log |\delta_C| - \log |f^*\delta_S|_C|$$

Dabei sei

$f: V \to S$

der Strukturmorphismus, d.h. $f^*\delta_S|_C$ ist das inverse Bild von $\delta_S$ bei

$$C \subset V \to S.$$

Man beachte, jeder Punkt von C über einem festen Punkt $p \in S$ besitzt [L:K] konjugierte. Bei Bilden von $f^*\delta_S|_C$ kommt also jeder Faktor [L:K]-fach vor. Damit können wir schreiben[34]

$$\log |\delta_{C/S}| = \log |\delta_C| + \deg f^*\delta_S|_C$$
$$= \log |\delta_C| + (f^*\delta_S\cdot C)$$

Einsetzen in (4) liefert

$$(\omega_{V/S} \otimes (f^*\delta_S)^{-1}\cdot C) + (C\cdot C) = \log |\delta_C|.$$

Wir können also $\mathcal{K} = \omega_{V/S} \otimes (f^*\delta_S)^{-1}$ setzen.

Wir haben uns noch um Bedingung (3) zu kümmern. Dies ist eine Frage zu einer einzelnen Riemannschen Fläche X und einem einzelnen Punkt $p \in X$. Wir haben zu entscheiden, wann der natürliche Isomorphismus[35]

$$\mathcal{O}_X(-p)|_p \xrightarrow{\alpha_p} \Omega^1_X|_p$$

der aus dem linken Morphismus von (2) durch Basiswechsel entsteht, eine Isometrie ist. Die hermitische Metrik auf

---

wobei $e_p$ den Verzweigungsindex im Punkt p bezeichne. Im schwach verzweigten Fall ist dies die Ordnung der Differente Diff von $C \to S$ im Punkt p (vgl. Cassels & Fröhlich: Algebraic number theory, Chap. I, Th. 5.2), d.h.

$$(\omega_{V/S}\cdot C) = -(C\cdot C) + \sum_{p\in C} -\log \| \mathrm{Diff}_p \|_p$$

Wegen

$$\text{Norm (Differente)} = \text{Diskriminante}$$

(vgl. Cassels & Fröhlich, Chap. I, Formel (4) nach Cor. 2) kann man nach der Produkt-Formel anstelle der Differente auch die Diskriminante einsetzen (wenn man über die Punkte von S = Spec Λ summierte statt über die von C = Spec Γ).

[33] siehe Cassels & Fröhlich: Algebraic number theory, Chap. I Prop. 4.7(ii). Man beachte, die dortige Formel bezieht sich auf die lokalen Diskriminanten. Wir betrachten die globalen, die Produkte aller lokalen Diskriminanten. Insbesondere fällt dabei das Anwenden der Norm weg.

[34] Die Bemerkung von 0.3 gilt nicht nur für den Grad

$$\deg \mathrm{div}(\alpha)$$

eines Hauptdivisors. Für α kann man auch den Schnitt in ein Geradenbündel einsetzen.

[35] Nach Voraussetzung ist die allgemeine Faser von $V \to S$ glatt, d.h. die Garbe $\Omega^1_{C/S}$ ist in endlich vielen endlichen Punkten konzentriert.

$$\mathcal{O}_X(-p)$$

ergibt sich aus der Definition von $\mathcal{O}_V(-C)$ als metrisiertes Geradenbündel (vgl. Abschnitt 2). Die Metrik ist durch die Bedingung

$$\|s_0\| = \varphi_p^{-1}$$

gegeben, wobei $s_0$ der kanonische Schnitt von $\mathcal{O}_X(-p)$ mit dem einzigen (einfachen) Pol in p ist. Die Bedingung, daß die Isomorphismen $\alpha_p$ Isometrien sein sollen definiert somit eine hermitische Metrik auf den Bündeln $\Omega^1_X$ .Wenn die Krümmungsform dieser Metrik proportional ist zur Volumenform dμ, so können wir diese Metrik bei der Definition von $\omega_{V/S}$ als metrisiertes Geradenbündel verwenden und damit den Beweis abschließen. Berechnen wir also die Krümmungsform dieser Metrik.
Die Isomorphismen $\alpha_p$ verheften sich zu einem global definierten Isomorphismus[36]

$$\alpha: \mathcal{O}_{X\times X}(-\Delta_X)|_{\Delta_X} \to \Omega^1_X,$$

wobei $\Delta_X \subseteq X\times X$ wie bisher die Diagonale bezeichnet. Die von uns konstruierte Metrik auf $\Omega^1_X$ entsteht daher durch Einschränken auf die Diagonale aus der Metrik auf der Garbe $\mathcal{O}_{X\times X}(-\Delta_X)$, welche durch die Funktion $G(p,z)^{-1}$ gegeben ist. Die Krümmungsform der Metrik auf $\Omega^1_X$ entsteht daher auch durch Einschränken der entsprechenden Krümmungsform auf X×X. Letztere haben wir in 3.6 berechnet. Durch Einschränken der dort angegeben Krümmungsform auf die Diagonale erhalten wir

$$\sqrt{-1}\cdot \sum_{k=1}^{g} (\omega_k \wedge \bar{\omega}_k + \bar{\omega}_k \wedge \omega_k) - 2d\mu$$

Die Zulässigkeit der Metrik bedeutet, dieser Ausdruck muß gleich

$$\deg \Omega^1_X \, d\mu = (2g-2)\, d\mu$$

sein, d.h.

$$d\mu = \frac{1}{2g}\sqrt{-1}\cdot \sum_{k=1}^{g} (\omega_k \wedge \bar{\omega}_k + \bar{\omega}_k \wedge \omega_k)$$

Wenn die wir Metriken $d\mu_\infty$ durch diese Formel definieren, so erhalten wir die Gültigkeit der Adjunktionsformel.
**QED**.

## *2.7. Wechsel der Metrik*

### 2-7.1 Wechsel der Bündelmetrik bei einem Welchsel der Metrik von X

In vorigen Abschnitt haben wir diejenige Metrik beschrieben, welche allen anderen vorzuziehen ist. Noch besser wäre es jedoch, ganz ohne Metrik auszukommen. Es erweist sich, daß dies im üblichen Sinne möglich ist.

Seien dμ' und dμ" zwei Volumenformen auf der Riemannschen Fläche X und sei

---

[36] Im wesentlichen definiert dieser Isomorphismus die Garbe $\Omega^1_X$.

$$\varphi: X \to \mathbb{R}$$

die Funktion von 3.7 Proposition 3.2, d.h.

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \log \varphi \, dx \, dy = d\mu' - d\mu''$$

$$\int_X \log \varphi \, (d\mu' + d\mu'') = 0.$$

Weiter sei $L \to X$ ein Geradenbündel mit der zulässigen Metrik $\| \|'$ , d.h.

$$-\frac{1}{2\pi} \Delta \log \| \|' dxdy = \frac{1}{2\pi i} \partial\bar{\partial} \log \| \|'^2 = \deg L \cdot d\mu'.$$

Dann gilt für die Metrik

$$\| \|'' := \varphi^{\deg L} \cdot \| \|'$$

die Relation

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \Delta \log \| \|'' &= -\frac{1}{2\pi} \Delta \log \| \|' dxdy - \frac{\deg L}{2\pi} \Delta \log \varphi \, dxdy \\ &= \deg L \cdot d\mu' - \deg L \cdot (d\mu' - d\mu'') \\ &= \deg L \cdot d\mu''. \end{aligned}$$

Wir erhalten auf diese Weise die Möglichkeit jedem metrisierten Geradenbündel bezüglich der Metrik $d\mu'$ von X ein metrisierten Geradenbündel mit derselben Garbe bezüglich der Metrik $d\mu''$ zuzuordnen.
Leider ist dieser Übergang nicht von geometrischer Natur: der Divisor eines Schnittes änder bei diesem Übergang die Koeffizienten seiner unendlich fernen Komponenten. Es gilt jedoch:

### 2.7.2 Proposition 5.1: Erhaltung des Schnitt-Index beim Wechsel der Metrik

Der Schnitt-Index bleibt beim oben beschriebenen Übergang von einer Metrik zu einer anderen erhalten.

Wir werden hier keinen Beweis angeben. Es handelt sich um eine einfache Rechnung auf einer einzelnen Riemannschen Fläche unter Verwendung der Greenschen Formel 1.6.

### 2.7.3 Inverses Bild eines metrisierten Geradenbündels

Da wir jetzt die Möglichkeit haben, von einer Metrik zu einer anderen überzugehen, können wir jetzt das inverse Bild eines metrisierten Geradenbündels definieren. Sei

$$\alpha: X \to Y$$

eine holomorphe Abbildung des Grades d von kompakten Riemannschen Flächen,

$$\deg \alpha = d,$$

und sei $L \to Y$ ein metrisiertes Geradenbündel auf Y bezüglich der Volumenform

$$d\mu_Y$$

auf Y. Weiter sei auf X die Volumenform

$$d\mu_X$$

gegeben. Wir setzen

$$d\mu' := \frac{1}{d} \alpha^* d\mu_Y .$$

Das Geradenbündel $\alpha^*L$ ist dann bezüglich der Metrik $d\mu'$ in natürlicher Weise metrisiert. Wir gehen in der in 5.1 beschriebenen Weise von der Metrik $d\mu'$ zur gegebenen Metrik $d\mu_X$ über und erhalten ein bezüglich letzterer metrisiertes Geradenbündel auf X, welches (metrisiertes) inverses Bild von L heißt.

**2.7,4 Proposition 5.2: Verhalten den Schnitt-Index bei inversen Bildern**
Beim Übergang zu den inversen Bildern entlang einer holomorphen Abbildung des Grades d multipliziert sich der Schnitt-Index mit d.

**Beweis**: leicht.

### *2.8 Literatur*

[1] Schiffer, M., Spencer, D.K.:Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton University Press 1954
(Шиффер, М., Спенсер, Д.К.: Функционалы на конечных римановых поверхностях, Москва, ИЛ, 1957)

## 3. Calculus on artihmetic surfaces according to Faltings

Gerd Faltings
Annals of Mathetmatics 119 (1964) 387-424

### *Notations*

| | |
|---|---|
| X | an arithmetic surface, see 1.1 and 2.2 |
| $\mathfrak{L}$ | a line bundle on an arithmetic surface X, see 1.2 |
| $\omega_X$ | relative dualizing sheaf of an arithmetic surface X, see 1.1 |
| K | algebraic number field, see 2.2 |
| R | the ring of integers of K, see 2.2 |
| B | := Spec R, see 2.2 |
| X | a semi-stabel curve over B with smooth and geometrically irreducible generic fibre, see 2.2 |
| S | the set of places of the field K, see 2.3 |
| $S_f$ | the set of finite places of the field K, see 2.3 |
| p: X → B | the structure morphism of X over the base scheme B, 2.3 |
| $D_f$ | finite part of the Arakelov divisor D, see 2.4 |
| $D_\infty$ | infinite part of the Arakelov divisor D, see 2.4 |
| $F_v$ | the fibre of p over the finite or infinite place v of K, see 2.4 |
| $k_v$ | the residue-class field at the finite place v of K, see 2.4 |
| $q_v$ | the number of elements of the residue-class field $k_v$ of the finite place v of K, see 2.4 |
| <D, E> | the intersection product of the Arakelov divisors D and E, see 2.5 |

### *1. Introduction*

**1.1. Arithmetic surfaces, the main results, the methods**
In [A2] and [A3], Arakelov introduces an intersection calculus for arithmetic surfaces, that is, for stable models of curves over a number field. In this paper we intend to show that his intersection product ha a lot of useful properties. More precisely, we show that the following properties from the theory of algebraic surfaces have an analogue in our situation:

a) Riemann-Roch theorem,
b) Hodge index theorem

c) Noether's formula
d) positivity of the relative dualizing sheaf $\omega_X$.

Of course the proofs are different from the usual ones. Roughly speaking we mostly deal with the first cohomology-group $H^1$ of a line bundle, while classically the $H^0$ plays the main role. Our main tool will be the geometry of the $\Theta$-divisor on the Jacobian of a curve.

Before we proceed, we must explain what the above results mean in our context. This is mainly a problem about the places at infinity of our number field. We have to find analogues of the usual geometric facts for these places. This is done by first translating them into a valuation-theoretic language, and then guessing what they mean at infinity. In more detail, our results are as follows:

### 1.2 Riemann-Roch theorem

The Riemann-Roch theorem gives a formula for the volume of

$$\Gamma(X, \mathfrak{L})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} \,/\, \Gamma(X, \mathfrak{L}).$$

where $\Gamma(X, \mathfrak{L})$ are the global sections of a line bundle $\mathfrak{L}$ on the arithmetic surface X. There are two important points.

i) We have to define a volume on

$$\Gamma(X, \mathfrak{L})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}.$$

This is done in an axiomatic way. D. Quillen probably has a more direct definition via "analytic torsion". Arakelov also has proposed a certain volume (in [A3]), but examples show that for his volume the areas of the fundamental domains for $\Gamma(X, \mathfrak{L})$ do not behave as nicely as ours. The advandage of Arakelov's volume is that its definition is more geometric. Fortunately, we can prove an inequality between these different volumes, and thus derive geometric consequences from our results.

ii) We can only deal, so to speak, with the difference between

$$\Gamma(X, \mathfrak{L}) \text{ and } H^1(X, \mathfrak{L}).$$

As, for sufficiently hight degree, the second term vanishes, this is not so bad.

### 1.3 Hodge index theorem

The Hodge index theorem is derived from the Riemann-Roch theorem. The main ideal is that for bundles $\mathfrak{L}$ of degree

$$\deg \mathfrak{L} = \text{genus}(X) - 1,$$

$H^0(X, \mathfrak{L})$ usually vanishes, and $H^1(X, \mathfrak{L})$ consists only of torsion. The Euler-Poincaré characteristics of $\mathfrak{L}$ then can be bounded from above, and this leads to the necessary definiteness properties of the intersection form. A more detailed analysis shows that this intersection form is related to the Néron-Tate height on the Jacobian. This result has also been obtained by P. Hriljac.

### 1.4 Noether's formula

### 1.5 Positivity of the relative dualizing sheaf

### 1.6 The contents of the paper

### 1.7 Donations

## *2. Review of Arakelov's work*

### 2.1 The situation over a function field

Arakelov's intersection product ([A2], [A3]) was invented to apply techniques from algebraic geometry to number theory: If

$$X$$

is an algebraic curve over a function field K, we can use stabel reduction theory to get a complete algebraic surface over a base B, which is an algebraic curve with function field K. The theory of algebraic surfaces then can be used to prove results about X, as for example the Mordell conjecture. The main tool involved is the intersection theory of divisors.

### 2.2 Our situation

In the same way, we may start with an algebraic number field K. If

$$R$$

denotes the ring of integers, we can extend any algebraic curve X defined over K to a scheme over

$$B = \mathrm{Spec}\,(R).$$

From now on we assume that

$$X$$

is a semi-stable curver over B, and that its generic fibre is smooth and geometrically irreducible.
In this situation we wil say that X is an arithmetic surface over B.

### 2.3 Finitie and infinite places, fibres over the infinite places

Of course we cannot expect to have a nice intersection calculus on the divisors of X, because in the function field case our base B would correspond to an affine curve, so that our varieties would not be complete. Nevertheless we know how to complete our B, at least formally:

Let

$$S$$

denote the different places of K. Then

$$S = S_f \cup S_\infty,$$

where $S_f$ denotes the finite places and $S_\infty$ the infinite ones. The points of B are $S_f$ plus the generic point, and B should be compactified by adding $S_\infty$ .

If we could extend X to a complete scheme over $B \cup S_\infty$, there would occur new divisors on X, namely at least the fibres of the projection

$$p: X \to B$$

over the infinite places. Arakelov was thus motivated to make the following definition.

### 2.4 Definition: Arakelov divisors

An Arakelov divisor on the X (see 2,2) is a formal sum

$$D = D_f + D_\infty ,$$

where $D_f$ is a Weil divisor on the scheme X and $D_\infty$ is a fomal linear combination

$$D_\infty = \sum_{v \in S_\infty} r_v \cdot F_v$$

with real coefficients $r_v \in \mathbb{R}$. Here $F_v$ is just a symbol which should be interpretated as "the fibre of X over the inifinite place v". We will call them infinite fibres or fibres at infinity. Of course this is also the meaning of $F_v$ for finite places, i.e.,

$$F_v := p^{-1}( \operatorname{Spec} k_v)$$

for $v \in S_f$ , where $k_v$ is the residue-class field at v. We denote its order by

$$q_v := \# k_v .$$

These $F_v$ will be called finite fibres.

**2.5 The intersection pairing**

We now intend to define an intersection product

$$\langle D, E \rangle$$

for two Arakelov divisors D and E on X.

If D or E is a sum of infinite fibres $F_v$ , $v \in S_\infty$ , or of components of finite fibres $F_v$, $v \in S_f$ , it is clear what the intersection product should be (assuming that D and E have no components in common). Thus the typical case left is that D and E are 'sections' of p, i.e.,

$$D = D_f \text{ and } E = E_f$$

are finite and correspond to different points of X(K). Then the intersection-product <D,E> should be a formal sum

$$\langle D, E \rangle = \sum_{v \in S} \langle D, E \rangle_v$$

where $\langle D,E \rangle_v$ measures the intersection multiplicities in the points over v. For

$$v \in S_f$$

we define

$$\langle D, E \rangle_v := \log(q_v) \cdot \text{(usual intersection multiplicity)}.$$

This is non-zero precisely if D and E intersect $F_v$ at the same point, and it can be viewed as the logarithm of the v-adic distance between the points

$$D, E \in X(K) \subseteq X(K_v),$$

where $K_v$ denotes the v-adic completion of K.

Trying to do the same for infinite places

$$v \in S_\infty$$

, we define

$$\langle D, E \rangle_v := - \varepsilon_v \cdot \log G(D,E)$$

where

$$\varepsilon_v := 1 \text{ for } K_v = \mathbb{R}$$

$\varepsilon_v := 2$ for $K_v = \mathbb{C}$,

and G(D,E) is defined for points D, E of the Riemann surface

$$X_v := X(\overline{K}_v)$$

over $\overline{K}_v = \mathbb{C}$. Also G(D,E) has a simple zero for D = E and is a sort of distance function on $X_v$. Its precise definiton can be found in [A2] (on in the next chapter).

**2.6 Local intersection multiplicities and hermitian line bundles**

The properties of the above introduced function

$$G(D,E)$$

can also be described by saying that G(D,E) is the norm at D at the constant section 1 of $\mathcal{O}(E)$ (functions with poles in E), for a certain hermitian metric on $\mathcal{O}(E)$. We thus have obtained hermitian metrics on $\mathcal{O}(E)$ for all points E of $X_v$ , and, by taking tensor-products, for all divisors E on $X_v$.

Thus coming back to arithmetics, for any finite divisor $E = E_f$ on X, we can form the line bundle

$$\mathfrak{L} = \mathcal{O}(E)$$

on X, and we have defined hermitian metrics on the line bundles $\mathfrak{L}_v$ on $X_v$ for any infinite place $v \in S_\infty$.

**2.7 The line bundle associated with an Arakelov divisor**

Let

$$E = E_f + E_\infty$$

an arbritrary Arakelov divisor on the arithmetic surface X. We define

$$\mathcal{O}(E)$$

to be the line bundle $\mathcal{O}(E_f)$ on X, together with the hermitian metrics of the induced bundle on $X_v$ for every $v \in S_\infty$ , which we obtain as follows: if

$$E_\infty = \sum_{v \in S_\infty} r_v \cdot F_v$$

we multiply the metric on $\mathcal{O}(E_f)_v$ as given in 2.6 by $\exp(-r_v)$.

**2.8 Intersection multiplicity with a section of p: X → B**

If now

$$D = s(B)$$

is the image of a section

$$s: B \to X$$

of the projection p: X → B, we can describe <D,E> as the degree of the pullback $s^*\mathcal{O}(E)$,

(1) $$< s(B), E> = \deg s^*\mathcal{O}(E).$$

Here P:= s*$\mathcal{O}$(E) is a projective module of rank 1 over R, together with hermitian metrics at the infinite places. Its degree is defined as follows: take a non-zero element p∈P. Then

$$\deg(P) =^{37} \log(\text{order}(P/pP)) - \sum_{v\in S_\infty} \varepsilon_v \cdot \log \|p\|_v .$$

**Remarks**

(i) In other words, deg(P) is the degree of the divisor of a section of P.

(ii) Formula (1) can be taken as a definition (which also works for non-proper intersections). It has the property that under extensions $K \subseteq K'$ of the ground field, the intersection multiplicities are multiplied by [K':K] (using the obvious definition of the extension of divisors from K to K').

(iii) For any irreducible horizontal D there exists a K' over which D becomes a sum of sections and components of fibres. It is then obvious how to define <D,E> for general D, and it is clear from the definition that this depends only upon the isomorphism class of $\mathcal{O}$(E) (as a bundle with hermitian metrics).

(iv) Arakelov shows that <D,E> is symmetric in D and E.

### 2.9 Principal Arakelov divisors

Let f be a non-zero rational function on the arithmetic surface X (see 2.2). Its divisor

$$\text{div}(f) = D = D_f + D_\infty$$

is defined as follows: $D_f$ is the usual divisor of f. Then multiplication with f defines an isomorphism of line bundles

$$\mathcal{O}(D_f) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}, \; s \mapsto sf.$$

The infinite part $D_\infty$ of D is choosen so that this is an isometry at the infinite places, i.e.,

$$D_\infty = \sum_{v\in S_\infty} r_v \cdot F_v$$

where

$$r_v = -\int_{X_v} \log \|f\| \, d\mu_v$$

for a certain probability measure $\mu_v$ on $X_v$.[38]

---

[37] Here order (P/pP) stands for the product of the orders at the finite places v of B, each taken to the power $q_v$ (the order of the residue class field).

[38] Is this really true ? This would imply that on each fiber $F_v$ at infinity the metric is constant (and equal to the standard metric of the trivial bundle up to the constant factor $r_v$) while multiplication by f at infinity is not multiplication by a constant.

For E = q irreducible and finite, the metric of $\mathfrak{L} := \mathcal{O}(E)$ at $v\in S_\infty$ is given by

$$\|1\|_v(z) = G(z,q)$$

when q is considered as a point $q\in X_v$ (see 2.6). If E finite part of div(f),

$$E = \sum_q v_q(f)\cdot q$$

the metric on $\mathcal{O}(E)_v$, $v\in S_\infty$, is given by

## 2.10 Intersection product with principal divisors

From what we have said, it is clear that div(f) has intersection product zero with any Arakelov divisor.[39]

## 2.11 The hermitian metrics of the dualizing sheaf at the infinite fibers, the canonical class

There exists a canonical class: Let $\omega_X$ be the relative dualizing sheaf[40] for the morphism

$$p: X \to B.$$

For $v \in S_\infty$ the induced sheaf on $X_v$ is isomorphic to the sheaf of 1-Forms $\Omega^1_X$ (since the generic fibre of p is supposed to be smooth). We want to define a hermitian metric on this sheaf. To do so, consider for a given point $p \in X$ the residue of differentials at $p \in X$,

$$\text{Res: } \Omega^1_X(P) = \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(P) \to \mathcal{O}_p = \mathbb{C},\ f \cdot \frac{dz}{z} \mapsto f(p),\ ^{41}$$

---

$$\|1\|_v = \prod_q G(z,q)^{v_q(f)} = \prod_q \varphi_q(z)^{v_q(f)},$$

where $\varphi_q(z)$ denotes the global equation of q on $X_v$ in the sense of Arakelov (see Arakelov 1974, 1.4, 3.1 and 3.2 property 4)). The expresion on the right can be written as (see Arakelov 1974, proof of 1.8 Proposition 1.2)

$$\|1\|_v = |f|_v / c \quad \text{with} \quad \log c = \int_{X_v} \log |f|_v \, d\mu_v$$

This means, the metric on $\mathcal{O}(E)_v$ differs from the usual metric on the trivial bundle $\mathcal{O}$ only by the factor 1/c, i.e. we have to multply by c the metric on $\mathcal{O}(E)_v$ to get the metric on the trivial bundle. Multiplication by c of the metrik corresponds to addition of-log(c) to the $X_v$ component of the divisor (see 2.7). In other words, the metric on the trivial bundle corresponds to the metric of

$$\mathcal{O}(E)_v$$

where E is the Arakelov divisor with finite part

$$E_f = \text{div}(f)_f = \sum_q v_q(f) \cdot q$$

such that the coefficient of $X_v$ in the infintie part is equal to

$$-\log c = -\int_{X_v} \log |f|_v \, d\mu_v$$

[39] By construction, $\mathcal{O}(\text{div}(f))$ is isomorphic to the trivial bundle $\mathcal{O}$ as a bundle with hermitian metrics at infinity. Therefore,
$\langle \text{div}(f), D \rangle = \deg \mathcal{O}(\text{div}(s))|_D = \deg \mathcal{O}|_D = 0.$

[40] This is a relative variant of the dualizing sheaf as in Hartshorne, Algebraic geometry, Definition before Prop. III.7.2. It exists for projective morphisms (relative variant of Prop. III.7.5), is locally free of rank 1 for complete intersections (relative variant of III.7.11) and equal to the sheaf of relative 1-form near the non-singular fibres (see Cor. III.7.12).

[41] Here z is a local holomorphic coordinate near p with z(p) = 0.

which defines an isomorphism of the fibre of the vector bundle at left with $\mathbb{C}$.[42] The tensor factor $\mathcal{O}(P)$ is already equipped with a metric (see 2.7). We equip $\Omega^1_X$ with the unique metric such that all residue maps are isometries, i.e., such that

$$|f(p)| = \| f\cdot\frac{dz}{z}\|(p) = \| fdz\cdot\frac{1}{z}\|(p)$$
$$= \|fdz\|(p)\cdot \lim_{z\to p} |\frac{1}{z}|\cdot\|1\|(z)$$
$$= \|fdz\|(p) \cdot \lim_{z\to p} |\frac{1}{z}|\cdot G(z,p),$$

i.e., such that

$$\| f(z)\, dz \| = |f(p)|\cdot (\lim_{z\to p} |\frac{1}{z}|\cdot G(z,p))^{-1}$$

## *3. Analytic part*

### 3.1 The situation, notation

In this chapter

$X$ denotes a compact Riemann surface of genus $g>0$,

$\mathcal{O}$ its structure sheaf of holomorphic functions,

$\Omega^1$ the sheaf of holomorphic 1-forms

**Remark**

Our considerations apply also to $X = \mathbb{P}^1$, the only difference being that the G-function has to be given in another way (as in [A2]). We leave the details to the reader.

### 3.2 The canonical metric on the global holomorphic 1-forms

Note that

(1) $\Gamma(X, \Omega^1)$

is a vector space of dimension

$$\dim \Gamma(X, \Omega^1) = g,$$

which has a natural hermitian scalar product[43]

$$<\omega', \omega''> = \frac{\sqrt{-1}}{2}\int_X \omega'\wedge\bar{\omega}''$$

We denote by

$$\omega_1,\dots,\omega_g \in \Gamma(X, \Omega^1)$$

an orthonormal base of (1).

### 3.3 The curvature of a hermitian line bundle

For a line bundle $\mathfrak{L}$ on X with hermitian metric $\| \ \|$, the curvature is the (1,1)-form on X given by[44]

---

[42] Cf. Deligne, Equations Différentielles à Points Singuliers Réguliers, Lecture Notes in Math. 163, Springer 1970, II. (3.7.1), p. 77.

[43] In Arakelov 1974 the Skalarproduct $<\omega', \omega''> = \sqrt{-1}\int_X \omega'\wedge\bar{\omega}''$ is used. Hence all vektors of the orthonormal base $\omega_1,\dots,\omega_g$ differ by the factor $\sqrt{2}$ from the corresponding vectors in Arakelov's paper.

$$\mathrm{curv}_{\mathfrak{L}} = \partial\bar{\partial}\ \log\ (\|s\|^2) = \frac{\partial^2 \log\ (\|s\|^2)}{\partial z \partial \bar{z}}\, dz \wedge d\bar{z}$$

where s is a local (holomorphic) generating section of $\mathfrak{L}$, and z is a local (holomorphic) coordinate function.

**Remarks**

(i) The curvature satisfies[45]

$$\int_X \mathrm{curv}_{\mathfrak{L}} = 2\pi i \cdot \deg(\mathfrak{L}).$$

(ii) Any (1,1)-form on X satisfying the equalitiy (i) is the curvature form of some hermitian metric on the line bundle $\mathfrak{L}$.[46]

(iii) $\mathrm{curv}_{\mathfrak{L}}$ fixes the metric on $\mathfrak{L}$ up to constant factor.[47]

### 3.4 A hermitian metric if $\mathfrak{L} = \mathcal{O}(D)$ belongs to an irreducibe finite divisor

The function

$$G: X \times X \to \mathbb{R},\ (p,q) \mapsto G(p,q),$$

which gives a hermitian metric on

$$\mathfrak{L} = \mathcal{O}_X(q) \text{ for every } q \in X$$

by

$$\|1\|\ (p) :=\ G(p,q)$$

is characterized by the facts that[48]

---

[44] this definition of the curvature differs in sign from the definition in Griffiths & Harris: Principles of algebraic geometry, see the formula at the end of page 142.

[45] This holds for the curvature as defined in Griffiths & Harris, see page 144. For the curvature as defined here there should be a minus sign somewhere. Note that the deg($\mathfrak{L}$) denotes here the classical (none-Arakelov degree) of a classical hermitian line bundle on a Riemann surface.

[46] Since X is a Riemann surface, $\frac{1}{2\pi i}\mathrm{curv}_{\mathfrak{L}}$ is a closed (1,1)-form, hence defines an element of

$$H^2(X, \mathbb{Z}).$$

We can take integer coefficients, since the integral over this form ist deg $\mathfrak{L}$, an integer. In the $C^\infty$-category, every cohomology class of $H^2(X, \mathbb{Z})$.is the first Chern class of a unigue (up to $C^\infty$-isomorphism) $C^\infty$-line bundle $\mathfrak{L}$'. Given a metric on $\mathfrak{L}$', its curvature form is a 2-Form which differs from $\mathrm{curv}_{\mathfrak{L}}$ by a Chech Koboundary. Using this Koboundary one can replace $\mathfrak{L}$' by an isomorphic bundle with hermitian metric such that the curvature form is equal to $\mathrm{curv}_{\mathfrak{L}}$. But then $\mathfrak{L}$' is, in the $C^\infty$-categorie, isomorphic to $\mathfrak{L}$ and the given metric on $\mathfrak{L}$' defines a metric on $\mathfrak{L}$ with the required properties.

[47] Given a second hermitian metric $\|\ \|$' on $\mathfrak{L}$ one has

$$\|s\|'^2 = \alpha\ \|s\|^2$$

for some smooth and globally defined function $\alpha: X \to \mathbb{R}$ satisfying

$$0 = \partial\bar{\partial}\ \log\ (\|s\|'^2) - \partial\bar{\partial}\ \log\ (\|s\|^2) = \partial\bar{\partial}\ \log\ \alpha.$$

In other words, log $\alpha$ is a globally defined harmonic function, hence is constant, hence to is $\alpha$.

[48] see Arakelov 1974, 3.2, properties 3) and 5). As for the measure, see proof of theorem 5.1. In fact Falting's formula for $d\mu$ should differ (but it doesn't !!!) by the factor 2 from the formula given by

a) $\partial_p \bar{\partial}_p \log G^2(p,q) = 2\pi\sqrt{-1}\cdot d\mu$

b) $\int_X \log G(p,q)\, d\mu(p) = 0$

where $\mu$ is the probability measure on X defined by the (1,1)-form

$$d\mu = \frac{i}{2g}\cdot \sum_{j=1}^{g} \omega_j \wedge \bar{\omega}_j .$$

Here

$$\omega_1,\ldots,\omega_g \in \Gamma(X, \Omega^1)$$

denotes an orthonormal basis as in 3.3 (with respect to the the scalar product given there).

### 3.5 Remarks: Green's function g(p,q) as inverse of the Laplace operator

(i) For later use, we note that

$$-g(p,q) := -\log G(p,q)$$

gives an inverse for the positive elliptic differential operator $\Delta$, defined by

$$\partial\bar{\partial} f = \pi\sqrt{-1}\cdot\Delta f\cdot d\mu.$$[49]

(ii) By definition g(p,q) satisfies

$$\int_X g(p,q)\, d\mu(p) = 0.$$

**Proof** of (i). More precisely we have to show that integration with the kernel -g(p,q) is inverse to the Laplace operator,

$$f(p) = \int_X (-g(p,q))\Delta f(q)\, d\mu(q),\ f\in C^\infty(X),$$

at least on the orthogonal complement of the harmonic functions. Since the constant function 1 is harmonic, $\Delta 1 = 0$, a necessary condition on f is

$$\int_X f(p) d\mu(p) = 0.$$

We will see below that this condition is also sufficient.[50] We have

$$-\int_X (-g(p,q))\Delta f(q)\, d\mu(q) = \frac{-1}{\pi\sqrt{-1}} \int_X g(p,q)\wedge\partial\bar{\partial} f(q) \quad \text{(definition of } \Delta)$$

---

Arakelov, due to the different definition of the skalar product on $\Gamma(X, \Omega^1)$ and hence the different defintions of the orthonormal base vectors $\omega_j$.

As noted in Remark 3.3(iii) the first condition defines G(p,q) up to a constant factor. Multiplying G by a constants factor c changes the integral of the second condition by the additive constant

$$\int_X \log c\, d\mu(p) = \log c\cdot \int_X d\mu(p)$$

Hence this factor is determined by the second condition.

[49] This is just a reformulation of the above condition a) where the factor 2, in which Falting's terminology differs from Arakelov's one, is this time taken into account.
The clain is just the assertion that Green's operator is just the inverse of the Laplace operator on the orthogonal complement of the harmonic functions (see Wells: Differential calculus on complex manifolds, proof of Theorem 4.12).

[50] As should be expected, since (by Hodge theorem)

$$\dim \mathrm{Ker}(\Delta) = \dim H^0(X, \mathbb{C}) = 1.$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_X \partial g(p,q) \wedge \bar{\partial} f(q) \qquad \text{(Stoke's theorem)}^{51}$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int_X \bar{\partial} f(q) \wedge \partial g(p,q)$$

$$= -\frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int_X f(q)\, \bar{\partial}\partial g(p,q) + \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int_{\partial K} f(q) \cdot \partial g(p,q)$$

The last equality is again Stoke's theorem, since

$$d(f(q)\cdot\partial g(p,q)) = df(q)\wedge\partial g(p,q) + f(q)\cdot d\partial g(p,q)$$
$$= \bar{\partial} f(q)\wedge\partial g(p,q) + f(q)\cdot\bar{\partial}\partial g(p,q).$$

Here K is a small disk around p, whose radius goes to zero.
In the final result the first integral is a multiple of

$$\int_X f(q)\, d\mu(q) = 0$$

and if z is a local holomorphic coordinate at p with $z(p) = 0$, we have

$$g(p,q) = \log|z(p)| + C^\infty \text{ - function}$$
$$= \frac{1}{2} \log|z(p)|^2 + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}(\log z(p) + \log \bar{z}(p)) + \ldots$$
$$\partial g(p,q) = \frac{1}{2}\frac{dz}{z} + \ldots$$

so that the second integral becomes

$$\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{dz}{z}\right) f(p) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{-1}\cdot d\varphi\right) f(p) = -f(p).$$

Thus

$$f(p) = \int_X (-g(p,q))\Delta f(q)\, d\mu(q)$$

as required.
**QED**.

### 3.6 The Fourier expansion of g(p,q), symmetry in p and q

Let $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$ be the eigenvalues of $\Delta$ in $L^2(X, \mu)$ and

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \in L^2(X, \mu)$$

a corresponding orthonormal basis of $L^2(X, \mu)$. Then

---

[51] Note that,

$$g(p,q)\wedge\partial\bar{\partial} f(q) = g(p,q)\wedge d\bar{\partial} f(q)$$

and, since X has complex dimension 1,

$$\partial g(p,q)\wedge \bar{\partial} f(q) = dg(p,q)\wedge \bar{\partial} f(q)$$

Moreover, g(p,q) has a logarithmic singularity at q = p, so that the integral over the boundary of a small ´disk around p goes to zero.

$$g(p,q) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(p)\varphi_n(q).$$

This equality has to be understood in the sense that the two side become equal after convolution with some 'nice' functions.

Especially, we can derive that g(p,q) is symmetric in p and q.

**Proof**. Write

$$g(p,q) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(q)\cdot\varphi_n(p).$$

Then for $n > 0$,

$$\alpha_n(q) = \langle\varphi_n(p), g(p,q)\rangle = \int_X \varphi_n(p)\cdot\overline{g(p,q)}\, d\mu(p)$$

$$= \int_X \varphi_n(p)\cdot g(p,q)\, d\mu(p) \qquad \text{(since g is real valued)}$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n}\int_X (-g(p,q))\Delta\varphi_n(p)\, d\mu(p) \text{ (since } \varphi_n \text{ is an eigenvector)}$$

In the proof of 3.5 we have seen that

(1) $$\int_X (-g(p,q))\Delta f\, d\mu(p) = f(q)$$

for every $f \in C^\infty(X)$ satisfying

$$\int_X f(p)\, d\mu(p) = 0.$$

Since $\varphi_n$ is for $n > 0$ in the orthogonal complement of the kernel of $\Delta$, formula, i.e., the constant function $1 \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ is orthogonal to $\varphi_n$, formulat (1) holds for

$$f = \varphi_n \text{ and } n > 0.$$

Therefore

$$\alpha_n(q) = -\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(q)$$

for every $n > 0$. We have yet to calculate the coefficient $\alpha_n(q)$ for $n = 0$. Since

$$\dim \mathrm{Ker}(\Delta) = \dim H^0(X, \mathbb{C}) = 1,$$

the eigenspace for $\lambda_0 = 1$ is 1-dimensional and consists exclusively of constants. Hence

(2) $$\varphi_0(p) = \text{const}$$

and

$$\alpha_0(q) = \langle\varphi_0(p), g(p,q)\rangle = \int_X \varphi_0(p)\cdot\overline{g(p,q)}\, d\mu(p)$$

$$= \int_X \varphi_0(p)\cdot g(p,q)\, d\mu(p) \qquad \text{(since g is real valued)}$$

$= \text{const} \cdot \int_X g(p,q)\, d\mu(p)$ (by (2))

$= 0$ (by 3.4 b) and the definition of g).

**QED**.

### 3.7 Description of the metric on $\mathcal{O}(D)$, permissible metrics

For every divisor

$$D \in \mathrm{Div}(X)$$

on the compact Riemann surface X we define a hermitian metric on

$$\mathfrak{L} := \mathcal{O}_X(D)$$

such that for $D = p \in X$ a single point we have

$$\|1\|(z) := G(z,p)$$

for the global section $1 \in \mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_X(D) = \mathfrak{L}$ of $\mathfrak{L}$ as in 3.4 and such that the isomorphisms

$$\mathcal{O}(D'+D'') \cong \mathcal{O}(D') \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(D'')$$

are isometries.

**Remarks**

(i) These metrics are admissible, which we define to mean that their curvatures are multiples of $d\mu$. More precisely, we have for every hermitian line bundle $\mathfrak{L}$ on X whose metric is defined as above,

$$\mathrm{curv}_{\mathfrak{L}} = \partial_p \bar{\partial}_p \log \|\ \|^2 =^{52} 2\pi\sqrt{-1} \cdot \deg \mathfrak{L} \cdot d\mu\ .$$

(ii) Note that, for $D = \sum_i n_i p_i \in \mathrm{Div}(X)$ one has by definition

$$\|1\|(z) = \prod_i G(z,p_i)^{n_i}$$

if the constant function 1 is considered as a rational section of

$$\mathfrak{L} := \mathcal{O}(D).$$

(iii) In 2.11 we defined a hermitian metric on $\Omega^1_X$ by requiring that the residue maps are isometries. This metric is admissible, too (which was the reason for choosing our particular curvature form).[53]

---

[52] For $D = p \in X$ and $\mathfrak{L} = \mathcal{O}(D)$ this is property a) of the G-function as in 3.4:

$$\mathrm{curv}_{\mathfrak{L}} = \partial\bar{\partial} \log G(z,p)^2 = 2\pi\sqrt{-1} \cdot d\mu = 2\pi\sqrt{-1} \cdot \deg \mathfrak{L} \cdot d\mu.$$

Since both sides of the identity to be proved behave additively the general case follows from this one.

[53] More precisely, the metric on X is choosen such that the residue maps are isometries. This is the assertion of Theorem 4.1 in Arakelov 1974: in fact one proves, the inverse residue maps give isometries

$$\mathcal{O}_X(-p)|_p \to \Omega^1_X|_p$$

This is done by showing that these glue together to the natural isomorphism

$$\mathcal{O}_{X\times X}(-\Delta)|_\Delta \to \Omega^1_X\ .$$

### 3.8 Remarks: About the existence of a hermitian metric on $H^i(X, \mathcal{O}(D))$

(i) If D is a divisor on the compact Riemann surface X, we would like to define a hermitian metric on

$$\Gamma(X , \mathcal{O}(D)) \text{ and } H^1(X, \mathcal{O}(D)).$$

(ii) Of course there is an obvious way to do this, namely via the square integral of the norm of a section.

(iii) Unfortunately this is not good enough for us, since we are looking for the archimedian analogue of the following fact:

Let

$$V$$

be a discrete valuation ring ,

$$K = Q(V)$$

its field of fractions,

$$X \to \text{Spec } (V)$$

a stable curve over Spec (V), and

$$D \in \text{Div}(X \times_V K)$$

a divisor on $X \times_V K$.

Then we can extend D canonically to X,

$$D \in \text{Div}(X)$$

and

$$\Gamma(X, \mathcal{O}(D)) \subseteq \Gamma(X, \times_V K, \mathcal{O}(D))$$

is then a lattice in $\Gamma(X, \times_V K, \mathcal{O}(D))$. It consists of those meromorphic functions on

$$X \times_V K$$

which have only poles at D, and which are integral for certain valuations of the function field K(X) of K, namely the valuations corresponding to the generic points of the special fibre of X.
These valuations extend the valuation of V, and therefore a theorem of Gel'fand tells us that there cannot be an archimedian analog for them.

(iv) Thus we cannot expect to have nice scalar products on the spaces

$$\Gamma(X, \mathcal{O}(D)).$$

Fortunately enought although these scalar products do not exist, their associated volume forms do, and they will be sufficient for our purpose.

### 3.9 The space $\lambda(V)$ associated to a complex vector space

Let V be a complex vector space of finite dimension

$$\dim V = d.$$

We define

---

The permissible metrics on $\mathcal{O}_X(-p)$ are restrictions of a metric on $\mathcal{O}_{X \times X}(-\Delta)$ such that

$$\|1\|(p,q) = G(p,q)^{-1}$$

Arakelov calculates the curvature form of this hermitian metric and shows that its restriction to the diagonal ist $\frac{1}{2\pi i}$ times

$$\frac{i}{2g} \sum_{k=1}^{g} \omega_k \wedge \bar{\omega}_k ,$$

i.e. it is just the metric we defined above on X (precisely for the reason the make the metric on the canonical bundle to be permissible).

$$\lambda(V) := \wedge^d V := \det(V).$$

A volume form on V is the same as a hermitian metric on $\lambda(V)$.[54]

**Remark**

(i) Let

$$0 \to V' \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} V'' \to 0$$

be a short exact sequence of finite dimensional complex vector spaces and let

$$s: V'' \to V$$

be $\mathbb{C}$-linear section of $\beta$. Then the $\mathbb{C}$-linear map

$$\lambda(V')\otimes\lambda(V'') \to \lambda(V),\ a\otimes b \mapsto a\wedge s_*(b),$$

is well-defined ,an isomorphism und independent upon the choise of the section s.[55]

(ii) For every short exact sequence

$$0 \to V^0 \to V^1 \to \ldots \to V^n \to 0$$

of finitely many complex vectorspaces there is a canonical isomorphism

$$\otimes_{i=0}^{n} \lambda(V^i)^{\otimes(-1)^i} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}.$$

**Proof** of (ii). Split the exact sequence into short exact ones and apply (i).
**QED**.

### 3.10 The space $\lambda(X, \mathfrak{L})$

Let X be a compact Riemann surface and $\mathfrak{L}\to X$ a line bundle on X. Then we write

$$\lambda(X, \mathfrak{L}) := \lambda(R\Gamma(X,\mathfrak{L})) := \lambda(H^0(X, \mathfrak{L})) \otimes \lambda(H^1(X, \mathfrak{L}))^{\otimes -1}.$$

**Remark**

If $D\in Div(X)$ is a divisor on the compact Riemann surface X , $p \in X$ a point and

$$D' := D - p,$$

then

$$\lambda(X, \mathcal{O}(D)) \cong \lambda(X, \mathcal{O}(D'))\otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_p(D)$$

---

[54] Let $e_1,\ldots,e_d \in V$ be an orthonormal base with respect to some hermitian metric on V and write

$$dz_1,\ldots,dz_d \in V^*$$

for the dual base. The hermitian metric is then given by the (1,1)-form

(1) $$\omega = \sum_{i=1}^{d} dz_i \wedge d\bar{z}_i$$

the associated volume form by

(2) $$\frac{1}{n!}\omega^n = \prod_{i=1}^{n} dz_i \wedge d\bar{z}_i .$$

Conversely, a volume form on V can be alway writteh in the form (2), since we have a single vector space, not a bundle, where $dz_1,\ldots,dz_d$ is a base of the dual space V*. Then (1) defines a hermitian metric on V with associated volume form equal to the given one. Two hermitian metric with the same volume form differ by a (complex) linear transformation A preserving the volume form, i.e., such that

$$1 = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} = |\det(A)|^2.$$

[55] For any second section s' the map $s'_*$ differs from $s_*$ by terms which are annihilated by the base vector of $\lambda(V')$.

where $\mathcal{O}_p(D) = \mathbb{C}$ denotes the fibre over p of the bundle $\mathcal{O}(D)$.

**Proof**. Consider the short exact sequence of sheaves

$$0 \to \mathcal{O}_X(-p) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_p \to 0$$

tensor with $\mathcal{O}(D)$ to get

$$0 \to \mathcal{O}_X(D') \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_p(D) \to 0$$

and form the associated long exacte cohomology sequence. Then by remark 3.9(ii)

$$\lambda(X, \mathcal{O}(D)) = \lambda(X, \mathcal{O}(D')) \otimes \lambda(\{p\}, \mathcal{O}_p(D))$$

and the claim follows from the fact that

$$\lambda(\{p\}, \mathcal{O}_p(D)) = \mathcal{O}_p(D).$$

**QED**.

### 3.11 Theorem 1: the canonical metric on $\lambda(X, \mathfrak{L})$

Let X be a compact Riemann surface of genus g equipped with the volume form

$$d\mu = \frac{i}{2g} \sum_{k=1}^{g} \omega_k \wedge \bar{\omega}_k .$$

Then there exists for any line bundle $\mathfrak{L} \to X$ on X with admissible hermitian metric a hermitian metric on

$$\lambda(X, \mathfrak{L})$$

such that the following conditions are satisfied.

(i) An isometry of line bundles induces an isometry on the vector spaces $\lambda(X,\mathfrak{L})$.

(ii) If the metric of $\mathfrak{L}$ is changed by a (constant) factor $\alpha > 0$, the metric on $\lambda(X,\mathfrak{L})$ is changed by the factor $\alpha^{\chi(X, \mathfrak{L})}$ where

$$\chi(X, \mathfrak{L}) := \dim H^0(X, \mathfrak{L}) - \dim H^1(X, \mathfrak{L}) \; (= \deg(\mathfrak{L}) + 1 - g).$$

(iii) For a divisor on D on X and a point $p \in X$ consider the metric line bundles

$$\mathcal{O}(D) \text{ and } \mathcal{O}(D') \text{ with } D' := D - p.$$

Then the fibre $\mathcal{O}_p(D)$ is naturally equipped with a metric and the isomorphisms

$$\lambda(X, \mathcal{O}(D)) \cong \lambda(X, \mathcal{O}(D')) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_p(D)$$

is in fact an isometry.

Moreover, the metrics on the vector spaces $\lambda(X,\mathfrak{L})$ are uniquely determined by the above conditions up to a common scalar factor.

**Reduction of the proof** to the proof of property (i).

Starting with some metrics on $\lambda(X, \mathcal{O})$, property (iii) tells us

$$\|1\|_D(z) = \|1\|_{D \mp p}(z) \cdot \prod_i G(z, p_i)^{\pm n_i} \text{ if } D = \sum_i n_i p_i ,$$

i.e., how to define a metric on the spaces

$$\lambda(X, \mathcal{O}(D))$$

for any divisor D on X, by building it up from the zero divisor via addition or subtraction of points. That the resulting metric does not depend upon the order of these operations is a consequence of the equality

$$G(p,q) = G(q,p).^{56}$$

As any bundle $\mathfrak{L}$ with admissible metric is isomorphic to some $\mathcal{O}(D)$, with a scalar multiple of its canonical metric, property (ii) defines the the metric on

$$\lambda(X, \mathfrak{L})$$

for each $\mathfrak{L}$. It remains to prove property (i).

**QED**.

**Reduction of the proof of** (i) to a statement about the $\Theta$ divisor.

Let

$$\mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'$$

an isometry of line bundles with permissible hermitian metric over X.

Using property (ii) we may assume that[57]

$$\mathfrak{L} = \mathcal{O}(D) \text{ and } \mathfrak{L}' = \mathcal{O}(D').$$

Explicetly, we have to show that any isometry

$$\mathcal{O}(D) \cong \mathcal{O}(D')$$

induces an isometry

$$\lambda(X, \mathcal{O}(D)) \cong \lambda(X, \mathcal{O}(D')).$$

Roughly speaking, linearly equivalent divisors D give the same metric on $\lambda(X., \mathcal{O}(D))$.

Using property (iii) we can add or subtract points to D and D' , and reduce to the case that

$$\deg (D) = \deg (D') = g - 1.$$

In this case we will prove even more, namly, that any isomorphism

$$\mathcal{O}(D) \cong \mathcal{O}(D')$$

induces an isometry[58]

$$\lambda(X, \mathcal{O}(D)) \cong \lambda(X, \mathcal{O}(D')).$$

For this we fix a divisor E of degree

$$\deg E = r + g - 1$$

for some large enough r so that D and D' are of the form

$$E - (P_1+...+P_r).$$

Consider the map

$$\varphi: X^r \to \mathrm{Pic}_{g-1}(X), (P_1, ..., P_r) \mapsto \mathcal{O}(E - (P_1+...+P_r)).$$

Here $\mathrm{Pic}_{g-1}(X)$ denotes the space of isomorphism classes of line bundles of degree g-1 on X (which is isomorphic to the Jacobian Jac(X) of the curve X).

This map $\varphi$ is known to be a morphism.[59] Moreover, for r large enough, we may E choose such that $\mathrm{Im}(\varphi)$ is not completely contained in the divisor W of bundles having a global section, i.e.,

$$\varphi^{-1}(W)$$

is a divisor of $X^r$.[60]

---

[56] Not really, the above formula shows, this is a consequence of the fact that multiplicaton of real valued functions is commutative.

[57] This replaces the original isometry by its composition with certain scalar multiplications.

[58] Note that the map between the spaces $\lambda(X, \mathcal{O}(D))$ does not change if the map between the bundles $\mathcal{O}(D)$ is replaces by a non-zero scalar multiple, for, the definition of the former involves a 'quotient'

$$\lambda(H^0) \otimes \lambda(H^1)^{-1}.$$

[59].

### 3.12. Idea of the further proof:

Show that the vector spaces

$$\lambda(X, \mathcal{O}(E - (P_1+...+P_r))$$

are the fibres of a line bundle of type

$$\mathcal{L} = \varphi^*(\mathcal{L}')$$

for some line bundle $\mathcal{L}'$ on $Pic_{g-1}(X)$ such that the metrics on the fibres of $\mathcal{L}$ comes , up to a scalar multiple, from some metric on $\mathcal{L}'$. This will prove our theorem, because fibres associated with linear equivalent divisors come from one and the same fibre of $\mathcal{L}'$.

To prove the claim, it will be even sufficient to show that der curvatures on the fibres of $\mathcal{L}$ come from some curvature form on $\mathcal{L}'$because the curvature determines the metrics up to a scalar multiple). This will be done below.

### 3.13. Properties of the map $\varphi: X^r \to Pic_{g-1}(X)$, Remarks on the theta divisor

(what follows is a very short assembly of facts proved in Griffiths & Harris: Principles of algebraic geometry, Chaper 2.6: Complex tori and abelian varieties and Chapter 2.7: Curves and their Jacobians)

Up to an isomorphism the map $\varphi$ it is the continuation of the Abel-Jacobi map

$$\mu: X \to Jac(X),\ p \mapsto \left( \int_{p_0}^{p} \omega_1 , \dots , \int_{p_0}^{p} \omega_g \right) = \text{class of } p - p_0,$$

on the symmetric power $X^{(r)}$ of effective divisors of degree r composed with the projection $X^r \to X^{(r)}$ (see Griffiths & Harris, Chapter 2.7 Curves and their Jacobians) which is also denoted

$$\mu: X^{(r)} \to Jac\ (X),\ P_1+...+P_r \mapsto \mu(P_1)+...+ \mu(P_r).$$

For $r \le g$ the map $\mu$ is generically 1-1 and the image is an analytic subvariety

$$W_r := \mu(X^{(r)})$$

of dimension $\dim W_r = r$ (see G&H, p. 338).

In particular, in case $r = g-1$, $W_r$ is a divisor, and by a theorem of Riemann (G&H, p. 338) it is, up to translation, equal to the socalled theta-divisor.

### 3.14 Riemann's theorem

$$W_{g-1} = \Theta - \kappa \text{ , for some } \kappa \in Jac(X).$$

### 3.15. Construction of the theta divisor

The theta divisor $\Theta$ can be constructed as follows. Choose a canonical base

---

[60] One can even show, for r large enough, $\varphi$ is surjective.

$$a_1,...,a_g,b_1,...,b_g \in H^1(X, \mathbb{Z}),$$

i.e., such that

$$(a_\alpha \cdot a_\beta) = (b_\alpha \cdot b_\beta) = 0 \text{ and } (a_\alpha \cdot b_\beta) = \delta_{\alpha\beta} .$$

Let $\omega_1 , ... , \omega_g \in H^0(X, \Omega^1)$ be a basis which is just Poincaré dual to $a_1,...,a_g$ , i.e.,

$$\int_{a_\alpha} \omega_\beta = \delta_{\alpha\beta}.$$

Write

$$\lambda_\alpha := (\int_{a_\alpha} \omega_1 , ... , \int_{a_\alpha} \omega_g )^T \alpha = 1,...,g$$

$$\lambda_{g+\alpha} := (\int_{b_\alpha} \omega_1 , ... , \int_{b_\alpha} \omega_g )^T \alpha = 1,...,g$$

for the columns of the period matrix

$$\Omega := (\lambda_1 , ... , \lambda_{2g} ) = (I, Z)$$

(with $Z = Z^T$ and $\text{Im } Z > 0$). Then the Jacobian of X can be identified with

$$\text{Jac } (X) = \mathbb{C}^g / \Lambda , \Lambda := \mathbb{Z} \lambda_1 + ... + \mathbb{Z}\lambda_{2g} .$$

Choose real coordinates $x_1,...,x_{2g}$ on $\mathbb{C}^g$ (g real parts followed by g imaginary parts). The differential form[61]

---

[61] In a more general setting (G & H, p. 304), let

$$\lambda_1, ... , \lambda_{2g} \in \Lambda$$

be any integral basis of the period lattice and

$$e_1,...,e_g \in V = \mathbb{C}^g$$

any $\mathbb{C}$-linear basis of the universal covering of Jac(X). Then

$$\lambda_i := \sum_\alpha \omega_{\alpha i} e_\alpha$$

and for the dual bases (i.e. the corresponding coordinate functions) one has

$$dz_\alpha = \sum_i \omega_{\alpha i} dx_i$$

$$d\bar{z}_\alpha = \sum_i \bar{\omega}_{\alpha i} dx_i$$

The matrix

$$\Omega = (\omega_{\alpha i}) = \begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \dots & \omega_{1,2g} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_{g,1} & \dots & \omega_{g,2g} \end{pmatrix}$$

is called period-matrix. In particular, the matrix $\begin{pmatrix} \Omega \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix}$ decribes the basis $(dz, d\bar{z})$ in terms of the basis dx.

Its inverse expresses dx in terms of $(dz, d\bar{z})$. Hence a formula for

(1) $$\omega := \sum_{\alpha=1}^{g} dx_i \wedge dx_{g+\alpha} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{\alpha,\beta} Y^{-1}_{\alpha\beta} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$$

is then a well defined positive (1,1)-form on Jac(X) and there is a (positive) line bundle $L \to X$ on X with chern class equal to

$$c_1(L) = [\omega] \in H^2(X, \mathbb{Z}).$$

This line bundle is unique up to translation with a constant of the complexe torus Jac(X) and $\omega$ is the curvature form of a hermitian metric on it (up to the factor $\frac{1}{2\pi i}$). Moreover the fact that $\omega$ can be represented by a matrix with elementary divisors all equal to 1 (see (1)), i.e. $\omega$ is a principal polarization of X, implies that (see G& H, p. 317)

$$\dim H^0(X, L) = 1.$$

Take a Generator

$$\theta \in H^0(X, L).$$

an consider it as a function on the universal covering (where L is trivial),

$$\theta: \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$$

If one replaces L by an appropriate translation, one can achieve that $\theta$ is characterized by a particularly simple set of functional equantions, namly

$$\theta(z+\lambda_\alpha) = \theta(z) \quad \text{for } \alpha=1,...,g$$

$$\theta(z+\lambda_{g+\alpha}) = e^{-2\pi i(z_\alpha + Z_{\alpha\alpha}/2)} \theta(z)$$

Then the theta divisor is defined to be the divisor of the section $\theta$,

$$\Theta := \mathrm{div}(\theta).$$

Since $\theta$ is a holomorphic section of L, the divisor $\Theta$ is an effective divisor. By construction the line bundle L is just

$$L = \mathcal{O}(\Theta).$$

In particular, $\mathcal{O}(\Theta)$ is naturally equipped with a hermitian metric. Similarly

$$\mathcal{O}(-\Theta)$$

has a canonically defined metric.
If one identifies $\Theta$ (via translation) with the set

$$W \subseteq \mathrm{Pic}_{g-1}(X)$$

of line bundles of degree g-1 having a non-zero global section, then this metric can be described by giving the pullpack of its curvature with respect to the surjection (r large)

$$X^r \to \mathrm{Pic}_{g-1}(X).$$

For this let, as above,

$$\omega_1, ..., \omega_g \in \Gamma(X, \Omega^1_X)$$

---

$$\omega := \sum_{\alpha=1}^{g} dx_i \wedge dx_{g+\alpha}$$

in terms of the forms $dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$ should have coefficients which are polynomials in the entries of $\begin{pmatrix} \Omega \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix}^{-1}$ For the very particular choise of the coordinates as above,

$$e_i := \lambda_i \text{ for } i = 1, ..., g,$$

the formula for $\omega$ has the very special form as above (cf. G & H p. 306).

be an orthonormal base. Further let

$$p_k : X^r \to X$$

be the projection onto the k-the factor. Then

$$\varphi^*(\mathrm{curv}_{\mathcal{O}(-\Theta)}) = \sum_{j=1}^{g} \Big(\sum_{k=1}^{r} p_k^*(\omega_j)\Big) \wedge \Big(\sum_{k=1}^{r} p_k^*(\omega_j)\Big)^-$$

(see Faltings, p. 397).

### 3.16 Description of the κ constant occuring in Riemann's theorem

Next we want to describe the construction of the κ constant, $\kappa \in \mathrm{Jac}(X)$ occuring in Riemanns theorem. For any $\lambda \in \mathrm{Jac}(X)$ write

$$\Theta_\lambda := \Theta + \lambda = \mathrm{div}\ \theta_\lambda$$

$$\theta_\lambda(z) := \theta(z-\lambda).$$

Then always one of the following two possibilites happens (see G & H, p. 336):
1. Case: $\mu(X) \subseteq \Theta_\lambda$ .

2. Case: $\mu(X)$ intersects $\Theta_\lambda$ in exactly g points, counting multiplicities.

In the situation of the second case one writes

$$\mathrm{div}(\mu^*\theta_\lambda) = z_1(\lambda) + \ldots + z_g(\lambda).$$

Then one has the
Solution of the Jacobi inversion problem (G & H, Lemma on page 336)
There exists some $\kappa \in \mathrm{Jac}(X)$ such that

$$\sum_{i=1}^{g} \mu(z_i(\lambda)) + \kappa = \lambda$$

for every $\lambda \in \mathrm{Jac}(X)$ such that $\mu(X) \not\subseteq \Theta_\lambda$ .

This is the constant κ which also occurs in Riemanns theorem.
Remark
In general, the effective divisor Θ may have singularities. The description of these singularities can be found in great detail in G & H: Chapter 2.7: Curves and their Jacobians. All we need here is the following statement.

### 3.17. The singular points of the theta divisor

Instead of describing the singular points the subvariety $\Theta \subseteq \mathrm{Jac}(X)$ we describe the singular points of the set

$$W \subseteq \mathrm{Pic}_{g-1}(X).$$

Let D be an effective divisor of degree g-1. Then

$$\mathcal{O}(D) \in W \text{ is a singular point of } W \Leftrightarrow \dim \Gamma(X, \mathcal{O}(D)) > 1.$$

(G & H, p. 344).

**We start now with the details** of the proof of Falting's theorem.

What follows we have taken from
Chinburg, An introduction to Arakelov intersection theory, in: Cornell, Silverman: Arithmetic geometriy, p.297-299

### 3.18. Construction of the line bundel $\mathcal{JP}$

such that the fibres of $\mathcal{JP}$ are the spaces

$$\lambda(X, \mathcal{O}(E - (p_1+...+p_r))$$

Define

$$Y := X^r$$
$$Z := Y \times_{\mathbb{C}} X$$

Let $D_j$ be the divisor on Z which is the graph

$$D_j := \text{graph of } Y \to X, (p_1,....,p_r) \mapsto p_j .$$

and let

$$\mathbf{D} := D_1 + ... + D_r \in \text{Div } (Z).$$

Then the fibre $Z_p$ over $p = (p_1,....,p_r)$ of the canonical projection

$$\pi: Z \to Y, (p_1,....,p_r, x) \mapsto (p_1,....,p_r),$$

intersects **D** in the divisor

$$\mathbf{D} \cap Z_p = p_1+...+p_r \text{ if } p = (p_1,....,p_r).$$

The line bundle on Z,

$$F := \mathcal{O}_Z(Y \times_{\mathbb{C}} E - \mathbf{D})$$

is flat[62] over Y and the restriction $F_p$ to the fibre $Z_p$ over $p = (p_1,....,p_r)$ is isomorphic to

$$F|_{Z_p} = L(p) := \mathcal{O}_X(E - (p_1+...+p_r)).$$

We want to study the cohomology groups

$$H^j(Z_p , F_p)$$

as

$$p = (p_1,....,p_r) \in Y$$

varies over Y. Let

$$U := \text{Spec } A \subseteq Y$$

an affine open neighborhood of a fixed point p of Y. and let

$$L^*: L^0 \xrightarrow{\delta_0} L^1 \xrightarrow{\delta_1} ... \xrightarrow{\delta_{n-1}} L^n$$

the bounded complex as in Hartshorne, Algebraic geometry, Prop. III.12.2.[63] We apply the proposition in the special case M = k(p) the residue class field of $p = (p_1,....,p_r)$. We get

---

[62] F is locally free of rank 1 and Z is flat over Y.

[63] **Definition** preceeding Prop. III.12.1:
Let A be a noetherian ring, U = Spec A, f: X → U be a projective morphism and F a coherent sheaf on X which is flat over U. Then for any A-module M we define

$$T^i(M) := H^i(X, F \otimes_A M).$$

**Proposition** III.12.1:
Each $T^i$: A-Mod → Ab is additive and exact in the middle. The collection $(T^i)$ forms a δ-functor.
**Proposition** III.12.2:
There is a bounded complex L* of finitely generated free A-modules such that

$$T^i(M) := h^i (L^* \otimes_A M).$$

**Remark**. By construction $T^i(M) = 0$ for every $i < 0$. Therefore, $T^0$ is left exact, i.e.,

(1) $H^i(X, L(p)) = H^i(Z_p, F_p) = H^i(Z, F\otimes_A k(p)) = h^i(L^*\otimes_A k(p)) = T^i(k(p))$

Let

$r(i) := \operatorname{rank} L^i$

and

$N := \otimes_{i=0}^{n} (\wedge^{r(i)} L^i)^{\otimes(-1)^i}$.

This is a free A-modul of rank 1. Over U = Spec A we define the line bundle $\mathcal{L}$ we are looking for as

$\mathcal{L}|_U := \tilde{N}$

a $\mathcal{O}_U$-module associated with N. These local definitions of $\mathcal{L}$ glue together to give a globally defined line bundle on Y. From (1) and the fact that $H^i(X,L(p)) = 0$ for $i>1$ we see that the fibre over p of $\mathcal{L}$ is equal to

$$\begin{aligned} B\otimes_A k(p) &= \otimes(\wedge^{r(i)} L^i\otimes_A k(p))^{\otimes(-1)^i} \\ &= \wedge^{r(0)} L^0\otimes_A k(p) \otimes (\wedge^{r(1)} L^1\otimes_A k(p))^{\otimes -1} \\ &= \det H^0(X, L(p))\otimes \det H^1(X, L(p))^{\otimes -1} \\ &= \lambda(X, L(p)). \end{aligned}$$

This proves the claim, that the space $\lambda(X, L(p))$ occure as fibres of a line bundle.
**QED**.

Next we prove that the line bundle $\mathcal{L}$ comes from a line bundle on $\operatorname{Pic}_{g-1}(X)$.

### 3.19. Claim: $\mathcal{L} = \varphi^*(\mathcal{O}(-W))^{\otimes a}$ for some natural number a

where $W \subseteq \operatorname{Pic}_{g-1}(X)$ consists of the isomorphism classes of all line bundles of degree g-1 on X which have a global section, i.e., W is up to a translation equal to the theta divisor

The idea of the proof is to construct a meromorphic section $s \in \mathcal{L}$ which has a simple pole along $\varphi^{-1}(W)$ and has no zeros and poles otherwise. Then

$$\operatorname{div}(s) = -\varphi^*(W)$$

i.e.

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}(\operatorname{div}(s)) = \mathcal{O}(\varphi^*(-W)) = \varphi^*\mathcal{O}(-W).$$

Construction of the meromorphic section s of $\mathcal{L}$.
Choose

$$p \in U = \operatorname{Spec} A \subseteq Y = X^r$$

as above and tensor the complex L* with the residue class field k(p). In view of (1) the resulting complex

---

$$W^0(L) := \operatorname{coker}(L^{-1}\to L^0)$$

is projective by Prop. III.12.4. In other words, replacing $L^0$ by $W^0(L)$ we get a complex

$$0 \to L^0 \to L^1 \to \ldots$$

with the same cohomology as before and with $L^0$ only locally free instead of being free.

(1) $L^* \otimes_A k(p)$: $0 \to L^0 \otimes_A k(p) \xrightarrow{\delta_0(p)} L^1 \otimes_A k(p) \xrightarrow{\delta_1(p)} \ldots \xrightarrow{\delta_{n-1}(p)} L^n \otimes_A k(p) \to 0$

is exact except, possibly, at the position 0 and 1. Concerning these latter positions one has

$$\dim H^0(X, L(p)) - \dim H^1(X, L(p)) = \deg (E - (p_1 + \ldots + p_r)) + 1 - g = 0,$$

by Riemann-Roch theorem. Therefore, (1) is exact if and only if

$H^0(X, L(p)) = 0$

$\Leftrightarrow$ L(p) has no non-zero global sections

$\Leftrightarrow \varphi(p) \notin W$.

In particular, if (1) is exact for one point p, it is exact for all points in a neighborhood of p. Hence the affine neighborhood U = Spec A can be choosen in this case such that L* is exact. But then there is a natural isomorphism

$$(2) \qquad N := \otimes_{i=0}^{n} (\wedge^{r(i)} L^i) \otimes (-1)^i \xrightarrow{\cong} A,$$

and $1 \in A$ defines an element $s \in N$. We have proved, for every point

$$p \in Y - \varphi^{-1}(W)$$

outside the divisor $\varphi^{-1}(W)$ the sheaf $\mathfrak{M}$ has a naturally defined section in the neighborhood of this point. These sections glue together to give a meromorphis section

$$s \in \mathfrak{M}$$

such that is has no poles and zeros outside $\varphi^{-1}(W)$. It will be sufficient to show that

$$\operatorname{div}(s) = -a\, \varphi^*(W) \text{ for some } a \in \mathbb{N},$$

i.e., s has a pole of order a along $\varphi^{-1}(W)$. From the description of the singular locus of W (see above) we know, there is a dense open subset of points in

$$p'' \in \varphi^{-1}(W)$$

such that

$$\dim H^0(X, L(p'')) = \dim H^1(X, L(p'')) = 1.$$

Now let $p' \in U - \varphi^{-1}(W)$ converge to a point p" of this type. By assumption,

$\operatorname{rank} \delta_0(p'') = \operatorname{rank} \delta_0(p') - 1$

$\operatorname{rank} \delta_i(p'') = \operatorname{rank} \delta_i(p')$ for $i > 0$.

Therefore, the map (2) fails to be an isomorphism at p". Nevertheless it is defined at p" and equal to the zero map. Thus the section $s \in N$ corresponding to the constant $1 \in A$ has a pole along $\varphi^{-1}(W)$. Now

$$W = \mu(X^{(g-1)})$$

is an irreducible subvariety of $\operatorname{Pic}_{g-1}(X)$ and the fibres of

$$\varphi: X^r \to \operatorname{Pic}_{g-1}(X)$$

over the non-singular points $p \in W$ consist of the effective divisors

$$D \in \varphi^{-1}(p)$$

of degree r such that E- D is in the linear equivalence class p, i.e., the fibres are projective spaces of dimension

$$\dim |D| = \deg r + 1 - g$$

(r large enough). In particular, they are irreducible of a fixed dimension. Hence

$$\varphi^{-1}(W)$$

is irreducible. Therefore

$$\operatorname{div}(s) = a \cdot \varphi^{-1}(W)$$

for some natural number a.

**QED**.

Remark

We will see below that the line bundles $\mathcal{L}$ and $\varphi^*\mathcal{O}(-W)$ can be equipped with a hermetian metric such that the corresponding curvatures are equal. As a consequence the line bundles $\mathcal{L}$ and $\varphi^*\mathcal{O}(-W)$ have the same degree and the coefficient a in the above result must be

$$a = 1,$$

i.e.,

$$\mathcal{L} = \varphi^*(\mathcal{O}(-W))$$

### 3.20. The curvatures on $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}' = \mathcal{O}(-W)$

To complete the proof of Falting's theorem, we have yet to compare the curvature of the canonical metric on $\mathcal{O}(-W)$ with the curvature associated with the canonical metrics on the spaces $\lambda(X, L(p))$.

The metric on $\mathcal{L}$ is determined by the fact that the isomorphism

$$(1) \qquad \lambda(X, \mathcal{O}(E - \sum_{i=1}^{r} p_i) = \lambda(X, \mathcal{O}(E)) \otimes_{\mathbb{C}} \otimes_r^{i=1} \mathcal{O}_{p_i}(E)^{\otimes -1}$$

is an isometry up to a factor

$$\prod_{k<l} G(p_k, p_l).$$

Moreover, since deg E = r + g - 1 is large, K - E has negative degree[64], hence

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}(E)) = \dim H^0(X, \mathcal{O}(K-E)) = 0$$

and

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}(E)) = \deg E + 1 - g = r,$$

i.e.,

$$H^0(X, \mathcal{O}(E)) = \mathbb{C}s_1 + \ldots + \mathbb{C}s_r$$

i.e.,

$$\lambda(X, E) = \wedge^r H^0(X, \mathcal{O}(E)). = \mathbb{C}s_1 \wedge \ldots \wedge s_r$$

We have to describe the metric on $\lambda(X, E)$ as function on $X^r$, for we want to define a metric on the bundle $\mathcal{L}$ on $X^r$. Define

$$\| s_1 \wedge \ldots \wedge s_r \| (p) := \prod_{i=1}^{r} \|s_i\|(p_i)$$

for every $p = (p_1, \ldots, p_r) \in X^r$. Then

$$(2) \qquad \mathrm{curv}_{\mathcal{L}}(p) = -\sum_{i=1}^{r} \partial\bar{\partial} \log \|s_i\|^2(p_i) + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \partial\bar{\partial} \log G(p_k, p_l)^2$$

This identity requires some explanation.

Remarks

1. In the definition of the curvature, we are using here the sign as in Griffiths & Harris, Principles of algebraic geometry. See the first footnote of 3.3 concerning the sign in the definition of the curvarture.

---

[64] Here K denotes the canonical divisor on X.

2. The first sum is a kind of lift of the curvature form for the canonical metric on $\mathcal{O}(E)$, which is a bundle on X, to a bundle on $Y = X^r$. Lifting is not unique in our situation, since we have many maps

$$X^r \to X$$

(i.e., the r projections). This ubiquity in the choise of the curvature reflects the fact that all we have to guarantee is that we get the correct metrics on the different fibres. We can glue them together any way we like. All we have to make sure is that the isomorphisms (1) become isometries, which is clear from the choise of the second sum. In fact any term of the correct type will do. Note that, since the hermitian metrics on $\mathcal{O}(E)$ is assumed to be the canonical one,

$$- \sum_{i=1}^{r} \partial\bar{\partial} \log \|s_i\|^2(p_i) = - \sum_{i=1}^{r} p_i^* ( \mathrm{curv}_{\mathcal{O}(E)})$$

$$= - \sum_{i=1}^{r} p_i^* ( 2\pi i \deg(E)\, d\mu)$$

$$= \frac{r+g-1}{g}\pi \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{g} p_k^*(\omega_j) \wedge p_k^*(\bar{\omega}_j)$$

since the metric chosen in X is $d\mu = \frac{i}{2g} \cdot \sum_{j=1}^{g} \omega_j \wedge \bar{\omega}_j$ ( see 3.4).

3. According to Arakelov 1974, 3.6 Proposition 3.1,[65]

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot \partial\bar{\partial} \log G(p_k , p_l)^2$$

$$= p_k^* d\mu + p_l^* d\mu - \sqrt{-1} \cdot \sum_{j=1}^{g} (p_k^* \omega_j \wedge p_l^* \bar{\omega}_j + p_k^* \bar{\omega}_j \wedge p_l^* \omega_j),$$

hence

$$\partial\bar{\partial} \log G(p_k , p_l)^2 = - \frac{\pi}{g} \sum_{j=1}^{g} p_k^*( \omega_j) \wedge p_k^*(\bar{\omega}_j))$$

$$- \frac{\pi}{g} \sum_{j=1}^{g} p_l^*( \omega_j) \wedge p_l^*(\bar{\omega}_j))$$

$$+ 2\pi \sum_{j=1}^{g} (p_k^* \omega_j \wedge p_l^* \bar{\omega}_j + p_k^* \bar{\omega}_j \wedge p_l^* \omega_j),$$

Substituting the above expressions into (2) we obtain

$$\mathrm{curv}_{\mathcal{P}} = \frac{r+g-1}{g}\pi \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{g} p_k^*(\omega_j) \wedge p_k^*(\bar{\omega}_j)$$

---

[65] In the original formulation G is considered as a function

$$G: X \times X \to \mathbb{C}$$

and formula has the form

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot \partial\bar{\partial} \log G^2 = p_1^* d\mu + p_2^* d\mu - \sqrt{-1} \cdot \sum_{k=1}^{g} (p_1^* \omega_k \wedge p_2^* \bar{\omega}_k + p_1^* \bar{\omega}_k \wedge p_2^* \omega_k).$$

$$- \frac{\pi}{2g} \sum_{k \neq l} \sum_{j=1}^{g} ( p_k^*(\omega_j) \wedge p_k^*(\bar{\omega}_j) + p_l^*(\omega_j) \wedge p_l^*(\bar{\omega}_j))$$

$$+ \pi \sum_{k \neq l} \sum_{j=1}^{g} (p_k^* \omega_j \wedge p_l^* \bar{\omega}_j + p_k^* \bar{\omega}_j \wedge p_l^* \omega_j),$$

Hence $\frac{1}{\pi} \mathrm{curv}_{\mathcal{JP}}$ is a sum $\sum_{j=1}^{g}$ over terms

$$\frac{r+g-1}{g} \sum_{k=1}^{r} p_k^*(\omega_j) \wedge p_k^*(\bar{\omega}_j)$$

$$- \frac{r-1}{g} \sum_{k \neq l} p_k^*(\omega_j) \wedge p_k^*(\bar{\omega}_j)$$

$$+ \sum_{k \neq l} (p_k^* \omega_j \wedge p_l^* \bar{\omega}_j + p_k^* \bar{\omega}_j \wedge p_l^* \omega_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} p_k^* \omega_j \wedge p_l^* \bar{\omega}_j$$

$$= ( \sum_{k=1}^{r} p_k^* \omega_j) \wedge ( \sum_{k=1}^{r} p_k^* \bar{\omega}_j)$$

In other words, we obtain the pull-pack

$$\varphi^*(\mathrm{curv}_{\mathcal{O}(-W)})$$

of the canonical metric on $\mathcal{O}(-W)$, as required.
**QED**.
This completes the proof of 3.11. Theorem 1.

### 3.21. Remark

Quillen has proposed to define metrics on the spaces $\lambda(X, \mathfrak{L})$ via "analytic torsion" (Ray-Singer). Hopefully this will lead to a generalization of Theorem 1 to vector bundles of arbitrary rank.

### 3.22 Volume forms on the global sections of bundles of large degree

If the line bundle $\mathfrak{L}$ on the compact Riemann surface X is such that

$$H^1(X, \mathfrak{L}) = 0,$$

a metric on $\lambda(X, \mathfrak{L})$ is nothing else than a volume form on $\Gamma(X, \mathfrak{L})$. We thus can measure the volume of any interesting subset of $\Gamma(X, \mathfrak{L})$, for example the unit ball

$$B(\mathfrak{L}) := \{ f \in \Gamma(X\, \mathfrak{L}) \mid \int_X \|f\|^2 \, d\mu \leq 1 \}.$$

### 3.23 Theorem 2: lower bound of the volume of the unit ball

Let X be a compact Riemann surface equipped with the volume form $d\mu$ as defined in 3.4. Then, for every $\varepsilon > 0$, there is a constant $d(\varepsilon)$, such that for any line bundle $\mathfrak{L}$ of degree

$$d := \deg(\mathfrak{L}) \geq d(\varepsilon),$$

we have

$$\mathrm{Vol}\, B(\mathfrak{L}) \geq \exp(-\varepsilon d).$$

**Proof**. We write

$$V(\mathfrak{L}) := \mathrm{Vol}\, B(\mathfrak{L})$$

for the left hand side of the inequalitiy to be proved. We assume that $\mathfrak{L}$ is of degree

$$d = \deg \mathfrak{L} = r + g - 1$$

with $r \geq g$ , so that

$$H^1(X, \mathfrak{L}) = 0,$$

hence

$$\dim \Gamma(X, \mathfrak{L}) = \deg \mathfrak{L} + 1 - g = r.$$

For general points[66]

$$p_1, \ldots, p_r \in X$$

the line bundle

$$L(p) := \mathfrak{L} \otimes \mathcal{O}(-p_1 - \ldots - p_r),\ p := (p_1, \ldots, p_r)$$

of degree g-1 has no global sections[67], so that the space $\lambda(X, L(p))$ is just

$$\lambda(X, L(p)) = \mathbb{C},$$

and the volume form on $\lambda(X, L(p))$ is a real number[68]

$$v(p) = v(p_1, \ldots, p_r).$$

As v(p) comes from a metric on $\mathcal{O}(-W)$ (as shown in the proof of 3.11 Theorem 1), it is bounded below by a positive constant independent upon $\mathfrak{L}$ and r.[69] We have to estimate this bound.

Let $f_1, \ldots, f_r$ be an orthonormal basis for $\Gamma(X, \mathfrak{L})$ and consider the isomorphism[70]

---

[66] More precisely, for the r-tuples $(p_1, \ldots, p_r)$ which are not mapped (under $\varphi$ as in the proof of theorem 1) to the divisor W of line bundles with non-zero global sections.

[67] In particular,

$$\dim \Gamma(X, \mathfrak{L} \otimes \mathcal{O}(-p_{i_1} - \ldots - p_{i_s}) = r - s$$

for s = 0,..., r. This means, in particular, that for every $p_i$ there is a global section of $\mathfrak{L}$ which is non-zere at $p_i$.

[68] v(p) is the factor, the metric on $\lambda(X,\mathfrak{L})$ differs from the standard metric on $\mathbb{C}$.

[69] $v(p) = \| s(\varphi(p)) \|^2$ where s is the rational section of $\mathcal{O}(-W)$ constructed in the proof of 3.11 Theorem 1 corresponding to $1 \in \mathbb{C}$, such that

$$\mathrm{div}\, s = -W,$$

and s(p) is its value in the fibre of $L(p) \in \mathrm{Pic}_{g-1}(X)$. Therefore, v(p) is the pullback of a non-zero positive real function on the compact manifold $\mathrm{Pic}_{g-1}(X)$, which has a pole along W. Its inverse is everywhere smooth and has an upper bound. Hence v(p) has a lower bound.

[70] The image of the map

$$X \to \mathbb{P}^{r-1},\ p \mapsto [f_1(p), \ldots, f_r(p)]$$

is not contained in any smaller projective space (for, otherwise $f_1, \ldots, f_r$ would be linearly dependent). Therefore, the vectors

$$\Gamma(X, \mathfrak{L}) \to \mathbb{C}^r \cong \oplus_{j=1}^{r} \mathfrak{L}_{p_i}, \; f \text{ a } (f(p_1),...,f(p_r)).$$

The unit cube in $\Gamma(X, \mathfrak{L})$ corresponds under this isomorphism to a parallel epiped of volume $\|\det(f_j(p_k))\|^2$ in $\mathbb{C}^r$.[71]

It alters the volume by the factor[72]

$$\prod_{i<j} G(p_i,p_j)^2 \cdot v(p_1,...,p_r)^{-1} \; ?????????$$

(note that multiplication with $\lambda \in \mathbb{C}$ changes the volume of $\mathbb{C}$ by $|\lambda|^2$). Therefore,

$$V(\mathfrak{L}) = \frac{\pi^r}{r!} \|\det(f_j(p_k))\|^2 \cdot \frac{v(p_1,...,p_r)}{\prod_{j\neq k} G(p_j,p_k)}$$

**QED**.

continued: p. 400 last paragraph.

### 3.24. Theta-divisors and theta-functions (repetition), a metric on $\mathcal{O}(\Theta)$

As we already mentioned there is a connection between the volume and the $\Theta$–divisor. This can be made explicit: the Jacobian Jac(X) is an abelian variety. The choise of a $\Theta$-characteristics[73] leads to an isomorphism

---

$$(f_1(p),...,f_r(p)), \; p \in X$$

generate $\mathbb{C}^r$. In other word, any r of them do, if r different points p are chosen in general position. So for general r-tuples $(p_1,...,p_r)$ the points

$$(f(p_1),...,f(p_r)) \text{ with } f \in \Gamma(X, \mathfrak{L})$$

generate $\mathbb{C}^r$.

The first isomorphism identifies the unit cube generated by $f_1,...,f_r$ with the unit cube in $\mathbb{C}^r$. The former has volume v(p), the latter has volume 1.

[71] We have to take the square of the determinant since we are in complex space and the volume is measured in the underlying real space.

[72] The rectangular cuboid

$$\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j+\sqrt{-1}\cdot y_j)f_j \mid |x_j| \le 1, |y_j| \le 1, x,y \in \mathbb{R} \} \subseteq \Gamma(X, \mathfrak{L})$$

is mapped to the cuboid with the vertices

$$\pm(f_j(p_1),...,f_j(p_r)) \; j = 1,...,n$$

and the additional vertices obtained by multiplicaton with $\sqrt{-1}$ . The square of the determinant comes from the fact that there are these additional vertices (i.e., the real dimension ist 2r).

$$\mathrm{Jac}(X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}_{g-1}(X)$$

and thepre-image of the divisor $W \subseteq \mathrm{Pic}_{g-1}(X)$ gives a symmetric ample divisor on Jac(X). For suitable choises this divisor is the zero set of the Riemann theta-function: Write as usual

$$\mathrm{Jac}(X) = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + Z\cdot\mathbb{Z}^g)$$

where $Z = X + iY$ is a symmetric g×g-matrix, with its imaginary part Y positive definit. Let

$$\theta(Z,z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^n} e^{\pi i\cdot n^T Z n}.e^{2\pi i\cdot n^T z}$$

Then

$$\theta(Z, z + m) = \theta(Z,z) \quad \text{for } m\in\mathbb{Z}^g$$

$$\theta(Z, z + Zm) = e^{-\pi i\cdot m^T Z m}e^{-2\pi i\cdot m^T z}\,\theta(Z,z) \quad \text{for } m\in\mathbb{Z}^g$$

$$\theta(-Z^{-1}, -Z^{-1}\cdot z) = \sqrt{\det(-iZ)}\cdot e^{\pi i\cdot z^T Z z}\cdot\,\theta(Z,z).$$

If $\Theta\subset\mathrm{Jac}(X)$ denotes the zero set of θ, we define a hermitian metric on $\mathcal{O}(\Theta)$ by

$$\|1\|\,(x+iy) := \sqrt[4]{\det(Y)}\cdot\exp(-\pi\cdot y^T Y^{-1} y)\cdot|\theta(Z,x+iy)| \quad \text{for } x,y\in\mathbb{R}^g.$$

This metric can be characterized by the fact that its curvature is translation-invariant, and that

$$\int_{\mathrm{Jac}(X)} \|1\|^2(Z) = 2^{-g/2}.$$

After a suitable choise of the Θ-characteristics, we obtain an isomorphism between Jac(X) and $\mathrm{Pic}_{g-1}(X)$, such that the Θ-divisors on Jac(X) and $\mathrm{Pic}_{g-1}(X)$ correspond. We thus obtain on $\mathrm{Pic}_{g-1}(X)$ a metric on $\mathcal{O}(\Theta)$. The points of $\mathrm{Pic}_{g-1}(X)$ - W correspond to the line-bundles $\mathfrak{L}$ with

$$H^0(X, \mathfrak{L}) = H^1(X, \mathfrak{L}) = 0.$$

Thus

$$\lambda(X, \mathfrak{L}) = \mathbb{C}$$

for those points and a norm on $\lambda(X, \mathfrak{L})$ is just a positive real number.

### 3.25 Fixing the common factor in the definition of the metric on $\lambda(X,\mathfrak{L})$

Our previously defined volumes were only given up to a common factor. We choose this factor such that the norm on

$$\lambda(X, \Omega^1_X) =^{74} \wedge^g\Gamma(X, \Omega^1_X)$$

is the one determined by the scalar product on $\Gamma(X, \Omega^1_X)$.

---

[73] i.e., a point of $\mathrm{Pic}_{g-1}(X)$.

[74] Note that $\dim H^1(X, \Omega^1_X) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$, i.e., $H^1(X, \Omega^1_X)$ is canonically isomorphic to $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}$.

### 3.25 A new invariant of compact Riemann surfaces

If $\mathfrak{L}$ is again a line bundle of degree g-1 with no sections, the norm on

$$\lambda(X, \mathfrak{L}) = \mathbb{C}$$

is independent of the choise of an admissible metric on $\mathfrak{L}$, and we have seen in the proof of 3.11 Theorem 1 that it is a multiple of the inverse of the norm of the global section

$$1 \in \mathcal{O}(\Theta).$$

The corresponding constant factor is an invariant of the Riemann surface X, and we think that it merits further study.

### 3.26 A conjecture concerning the new invariant

We conjecture that it measures in some sense the distance from X to the locus of curves with non-separating double points in the moduli space, but we can check this only in the case of elliptic curves.

### 3.27 Numerical description of the invariant $\delta(X)$

For line bundles $\mathfrak{L}$ of degree g-1 on the compact Riemann surface the metric on $\lambda(X, \mathfrak{L})$ is indepent upon the admissible metric on $\mathfrak{L}$ (by assertion (ii) of Theorem 1). In the proof of Theorem 1 we have seen that it is a multiple of the inverse of the norm of the global section $1 \in \mathcal{O}(\Theta)$ (proving that the associated curvatures are equal). The corresponding constant factor

$$\delta(X)$$

is a new invariant of the Riemann surface X.

**Claim**:

$$\|\theta(p_1 + ... + p_g - q)\| = \exp(-\delta(X)/8) \cdot \frac{\|\det(\omega_j(p_k))\|}{\prod_{j<k} G(p_j,p_k)} \cdot \prod_j G(p_j,q)$$

if $\theta$ denotes the theta function on $\mathrm{Pic}_{g-1}(X)$ and $\omega_1,...,\omega_g \in \Gamma(X, \Omega^1)$ an orthonormal base.

**Proof**. Choose a point $q \in X$. Any line bundle of degree g-1 is given by a divisor of the form[75]

$$p_1 + ... + p_g - q$$

with certain points $p_1 + ... + p_g \in X$. We write

$$\|\theta(p_1 + ... + p_g - q)\|$$

for the norm of $1 \in \Gamma(\mathrm{Pic}_{g-1}(X), \mathcal{O}(W))$.

For general $p_1, ..., p_g$ this is non-zero, and a multiple of our previously defined norm on $\lambda(X, \mathcal{O}(p_1 + ... + p_g - q))$, which can be determined as follows. First we know that[76]

---

[75] This is since the Abel-Jacobi map $\mu: X^g \to \mathrm{Pic}_g(X)$ is surjective and the translation with -q is an isomorphism.

[76] The degrees of the line bundles of both sides differ by 1. So by Riemann-Roch it is sufficient to show that the same holds for the dimensions of the corresponding $H^1$-terms. But this follows from Serre duality:

$$\Gamma(X, \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(q)) \cong \Gamma(X, \Omega^1)$$

and property (iii) of Theorem 1 together with the fact that the residue map is an isometry, leads us to the conclusion that the norm on

$$\lambda(X, \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(q)) = \wedge^g \Gamma(X, \Omega^1)$$

takes the value 1 on $\omega_1 \wedge ... \wedge \omega_g$ where $\omega_1, ..., \omega_g \in \Gamma(X, \Omega^1)$ is an ON-basis. The volume on $R\Gamma(X, \Omega^1(q-p_1-...-p_g))$ now can be determined from the isomorphism (for general $p_i$)

$$\Gamma(X, \Omega^1(q)) \cong \oplus_{j=1}^{g} \Omega^1_{p_j}$$

which changes the volumes by the square of the factor

$$\prod_{j<k} G(p_j, p_k)^{-1} \prod_j G(q, p_j)$$

(here $\Omega^1$ has its admissible metric).

Using the fact that $\|\theta\|$ is invariant under the substitution $D \mapsto K - D$ (K = canonical class), we get the above identity.
**QED**.

### 3.28 Description of the singularities of δ(X) when X degenerates

## *4. Riemann-Roch theorem*

### 4.1 Notations

From now on X is a regular model of a geometrically irreducible curve of genus g over a number field K. We denote by R the integral closure of $\mathbb{Z}$ in K, and let

$$p: X \to B := \operatorname{Spec} R$$

be the projection. As in the introduction,

$$S := S_f \cup S_\infty$$

denotes the set of places of K.
Notations for general $v \in S$.
For $v \in S$ let

$$K_v$$

be the corresponding local field and

$$\bar{K}_v$$

its algebraic closure.
Notations for $v \in S_f$.
Let $v \in S_f$. Then

$$R_v$$

---

$\dim H^1(X, \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(q)) = \dim H^0(X, \mathcal{O}(-q)) = 0$

$\dim H^1(X, \Omega^1) = \dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$

denotes the valuation ring of v,

$$m_v$$

its maximal ideal,

$$k_v := R_v/m_v$$

the residue class field,

$$q_v := \# k_v$$

its order and

$$F_v := p^{-1}(\operatorname{Spec} k_v)$$

the fibre at v.

Notations for $v \in S_\infty$.

For $v \in S_\infty$ ,

$$F_v$$

is a symbol for the (non-existing) fibre at v, and

$$X_v$$

is the Riemann surface defined by X over $\bar{K}_v = \mathbb{C}$.

### 4.2 Admissible hermitian line bundle on X and their degree

An admissible hermitian line bundle on X is a line bundle $\mathfrak{L}$ on X in the usual sense, together with admissible metrics[77] on the bundles $\mathfrak{L}_v$ induced on the Riemann surfaces $X_v$. We denote its degree[78] by

$$\deg \mathfrak{L}.$$

### 4.3 Arakelov divisors and line bundles with distinguished meromorphic sections, intersection product of admissible line bundles

If D is an Arakelov divisor on X, $\mathcal{O}(D)$ is an admissible hermitian line bundle together with a distinguished meromorphic section, namely the constant function 1. This correspondence gives a bijection

$$\{\text{Arakelov divisors}\} \longleftrightarrow \{(\mathfrak{L},s) \mid \mathfrak{L} \text{ admissible}, s \in \mathfrak{L}-\{0\} \text{ meromorphic }\}$$

$$D \quad \mapsto \quad (\mathcal{O}(D), 1)$$

$$\operatorname{div}(s) \quad \longmapsto \quad (\mathfrak{L}, s)$$

---

[77] i.e., the curvatures of the metrics are proportional to the volume form fixed on each $X_v$ and given by

$$d\mu = \frac{i}{2g} \cdot \sum_{j=1}^{g} \omega_j \wedge \bar{\omega}_j .$$

as in 3.4.

[78] i.e.,

$$\deg \mathfrak{L} := \deg D$$

if $\mathfrak{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$ for some Arakelov divisor. This is well-defined, since $\mathfrak{L}$ determines D up to linear equivalence and principal Arakelov divisors have degree zero. There is no such definition in this article. Faltings defines the degree of a line bundle only for the pullback with respect to a section of $p: X \to B$, cf. 2.8.

between Arakelov divisors and pairs consisting of of an admissible hermitian line bundle $\mathfrak{L}$ on X together with a non-zero meromorphic section up to multiplication with a K-unit.

The intersection product of the Arakelov divisors corresponding to two pairs $(\mathfrak{L}, s)$ does not depent upon the special choise of the sections s. Thus we have defined for two admissible bundles $\mathfrak{L}$ and $\mathfrak{M}$ a symmetric intersection product

$$<\mathfrak{L}, \mathfrak{M}>.$$

### 4.4 Intersection product and pullbacks of admissible lines bundles along field extensions

If $K \subseteq K'$ is an extension of number fields,

$$R' \subseteq K'$$

the ring of integers,

$$X' \text{ a regular model of } X \times_K K'$$

over

$$B' = \operatorname{Spec} R'$$

together with a regular map $f:X' \to X$ covering $B' \to B$, i.e. together with a commutative diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \to & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & B \end{array},$$

then there is an obvious notion of pullback for admissible line bundles.[79] This notion of pullback has the property that the intersection products are multiplied by the degree $[K':K]$,
i.e.,

$$<f^*\mathfrak{L}, f^*\mathfrak{M}> = [K': K] <\mathfrak{L}, \mathfrak{M}>.$$

### 4.5 Euler-Poincaré characteristics on $\mathbb{Z}$-modules with Haar measure

If M is a finitely generated $\mathbb{Z}$-module, together with a Haar measure[80] on $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, we can define an Euler-Poincaré characteristics of M by[81]

---

[79] Take the pullback of the usual bundles and equipp them with the metrics of the fibers comming from downstairs.

[80] i.e., a translation invariant volume form.

[81] The second term is a shortcut for a weighted sum of the lengths of the different localization of M:

$$\begin{aligned} \log(\text{torsion order of M}) &= \sum_{p \text{ a prime}} \log(\text{p-order of M}) \\ &= \sum_p \log (\#\, M_p) \\ &= \sum_p \log (p^{\operatorname{length}(M_p)}) \\ &= \sum_p \log (p) \cdot \operatorname{length}(M_p) \end{aligned}$$

In particular,

$$\log(\text{torsion order of M}) = 0$$

if M = 0. A similar convention is to hold for the first term: we let log (0) be 0.

$$\chi(M) = - \log (\mathrm{vol}(M\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/M) - \log (\text{torsion order of } M).$$

This Euler-Poincaré characteristics is additive for 'volume exact' sequences. More precisely, let

(1) $$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

be a short exact sequence of finitely generated $\mathbb{Z}$-modules such that the tensor products with $\mathbb{R}$ are equipped with Haar measures and such that the measure on the product space

$$M\otimes\mathbb{R}$$

is just the product of the measures on the factors[82]

$$M'\otimes\mathbb{R} \text{ and } M''\otimes\mathbb{R}.$$

Then

$$\chi(M) = \chi(M') + \chi(M'').$$

**Proof**. Then one has a commutative diagram with exact columns a right exact upper row, a left exact lower row and two short exact rows in the middle:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & M'\otimes\mathbb{R}/M' & \to & M\otimes\mathbb{R}/M & \to & M''\otimes\mathbb{R}/M'' & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & M'\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} & \to & M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} & \to & M''\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & M'_{\mathrm{tor}} & \to & M_{\mathrm{tor}} & \to & M''_{\mathrm{tor}} & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

The snake lemma gives an exact sequence

$$0\to M'_{\mathrm{tor}} \to M_{\mathrm{tor}} \xrightarrow{\alpha} M''_{\mathrm{tor}} \xrightarrow{\beta} M'\otimes\mathbb{R}/M' \xrightarrow{\gamma} M\otimes\mathbb{R}/M \to M''\otimes\mathbb{R}/M'' \to 0.$$

Therefore the kernel of $\gamma$ is finite and

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(M\otimes\mathbb{R}/M) &= \mathrm{vol}(M''\otimes\mathbb{R}/M'')\cdot\mathrm{vol}(M'\otimes\mathbb{R}/M')/(\#\,\mathrm{Ker}(\gamma)) \\
\#\mathrm{Ker}(\gamma) &= \#\,\mathrm{Im}(\beta) \\
&= \#\,M''_{\mathrm{tor}}/\#\mathrm{Ker}(\beta) \\
&= \#M''_{\mathrm{tor}}/\#\mathrm{Im}(\alpha) \\
&= \#M_{\mathrm{tor}}\cdot\#M_{\mathrm{tor}}^{-1}\cdot\#\mathrm{Ker}(\alpha) \\
&= \#M_{\mathrm{tor}}\cdot\#M_{\mathrm{tor}}^{-1}\cdot\#M'_{\mathrm{tor}}
\end{aligned}$$

Substitution gives

$$\mathrm{vol}(M\otimes\mathbb{R}/M) = \mathrm{vol}(M''\otimes\mathbb{R}/M'')\cdot\mathrm{vol}(M'\otimes\mathbb{R}/M')\#M_{\mathrm{tor}}^{-1}\cdot\#M_{\mathrm{tor}}\cdot\#M'^{-1}_{\mathrm{tor}}$$

---

[82] i.e., volume exact means, that the isomorphism

$$(\det M'_{\mathbb{R}})\otimes(\det M_R)^{V}\otimes(\det M'') \to \mathbb{R}$$

is an isometry. In this form the definition of volume exact can be generalized to arbitrary long exact sequences.

hence

$$\log \mathrm{vol}(M\otimes\mathbb{R}/M) - \log \#M_{\mathrm{tor}} = \log(M'\otimes\mathbb{R}/M') - \log M'_{\mathrm{tor}} + \log(M''\otimes\mathbb{R}/M'') - \log M''_{\mathrm{tor}}$$

i.e.,

$$\chi(M) = \chi(M') + \chi(M'').$$

**QED**.

**Remark**

If we consider R-modules it is useful to make some normalizations:

$$R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} = \prod_{v\in S_\infty} K_v$$

has a natural Haar measure, and the volume of a fundamental domain for R is the discriminant of K. We would like this to become 1. Hence the following definition.

### 4.6. The case of modules over R

If M is a finitetly generated R-module together with a Haar measure on $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$, we let

$$\chi(M) := - \log \mathrm{vol}(M\otimes\mathbb{R}/M) - \log (\text{order of } M_{\mathrm{tor}}) + \mathrm{rank}_R(M)\cdot \log \mathrm{vol}\, R\otimes\mathbb{R}/R.$$

**Remarks**

(i) If $K\subseteq K'$ is a field extension, there is an obvious notion for extending Haar measures, and then

$$\chi(M\otimes_R R') = [K':K]\cdot\chi(M).$$

(ii) If, in addition, M is projective of rank 1 over R, then

$$\chi(M) = \deg M$$

in the sense of 2.8.

**Proof** of (ii). Let $m\in M$ be any non-zero element. As a projective module over the integral domain R, M is torsion free, hence multiplication by m defines an exact sequence

$$0 \to R \xrightarrow{m} M \to M/mR \to 0.$$

Choose a volumes at the infinite fibers of R such that m is volume preserving. The resulting volume of $R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/R$ will be denoted by

$$\mathrm{vol}'(R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/R)$$

while

$$\mathrm{vol}(R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/R)$$

is the canonical volume of $R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/R$.

Since M/mR is a torsion module, the sequence is volume exact in this case. Therefore,

$$\chi(M) = \chi(M/mR) + \chi(R) = \log \#M/mR + \chi(R)$$

with

$$\chi(R) = - \log \mathrm{vol}'(R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/R) + \mathrm{vol}(R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/R)$$

Note that the torsion of R is zero. Hence c(R) is determined by the volume parts in its definition.

Write

$$K = \mathbb{Q}[T]/(f(T))$$

and let $f = f_1\lozenge\ldots\lozenge f_s$ be the decomposition into irreducible factors over R. Then

$$R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} = (R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} = K\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} = \prod_{v\in S_\infty} K_v .$$

The local fields $K_v$ can be written

$$K_v = \mathbb{R}[T]/(f_{i(v)}T))$$

which ist R or C depending upon whether $f_{i(v)}$ has degree 1 or 2. The natural volume on $R_v$ for $v\in S_\infty$ is given by the corresponding absolute value[83]. In the real case ($\varepsilon_v = 1$), multiplicaton by m,

$$R_v \xrightarrow{m} M_v$$

maps the unit interval [0,1] which has "volume" 1 to the intervall [0,m] which has "volume" $\|m\|_v$ . In complex case ($\varepsilon_v = 2$), the unit square [0,1]×[0,1] which has "volume" 1 is mapped to the square [0,m]×[0,m] which has volume $\|m\|_v^2$. In both cases we see that the volume on $R_v$ which makes the above sequence volume exact is equal to

$$\|m\|_v^{\varepsilon_v}$$

times the standard volume on $R_v$. Therefore, the volume of the fundamental domain with respect to the above induced volume is equal to

$$\mathrm{vol}'(R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/R) = \prod_{v\in S_\infty} \|m\|_v^{\varepsilon_v} \cdot \mathrm{vol}(R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/R)$$

Therefore,

$$\chi(R) = -\sum_{v\in S_\infty} \varepsilon_v \cdot \log |m|_v$$

Substituting into the formula for $\chi(M)$ we get

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \log \#M/mR - \sum_{v\in S_\infty} \varepsilon_v \cdot \log |m|_v \\ &= \deg M \qquad\qquad \text{(see 2.8)}\end{aligned}$$

**QED**.

### 4.7 Euler-Poincaré characteristics for admissible line bundles

Let $\mathfrak{L}$ be an admissible line bundle on X. Then the Euler-Poincaré characteristics of $\mathfrak{L}$ is defined to be

$$\chi(\mathfrak{L}) := \chi(H^0(X, \mathfrak{L})) - \chi(H^1(X, \mathfrak{L})).$$

Here we assume that for every $v\in S_\infty$ the $K_v$ vector spaces

$$H^0(X, \mathfrak{L})\otimes_{R_v} K_v \text{ and } H^1(X, \mathfrak{L})\otimes_{R_v} K_v$$

---

[83] In a 1-dimensional vector normed space the length of a vector is equal to the measure of the intervall from the origin to the vertex.

are equipped with arbitrary Haar measures (i.e. translation invariant volume forms) such that the induced Volume on

$$\lambda(X_v, \mathfrak{L}) = \det H^0(X_v, \mathfrak{L}) \otimes (\det H^1(X_v, \mathfrak{L}))^v$$

is the canonical one. Here the line bundle induced by $\mathfrak{L}$ on the compact Riemann surface $X_v$ is denoted also by $\mathfrak{L}$.

**Remarks**

(i) This is well-defined, for, the Haar measures on the vector spaces

(1) $$H^0(X, \mathfrak{L}) ) \otimes_{R_v} K_v \text{ and } H^1(X, \mathfrak{L}) ) \otimes_{R_v} K_v$$

measure by some factor, then the condition relating these measures to the volume form on $\lambda(X_v, \mathfrak{L})$ implies that the measure on the other space must be multiplied by the same factor. This causes the volumes on the product spaces

$$H^0(X, \mathfrak{L}) ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \text{ and } H^1(X, \mathfrak{L}) ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

to be multiplied by the same factor. But then

$$\chi(H^0(X, \mathfrak{L})) \text{ and } \chi(H^1(X, \mathfrak{L}))$$

are changed by the same additive constant. As a result we see that

$$\chi(\mathfrak{L}) := \chi(H^0(X, \mathfrak{L})) - \chi(H^1(X, \mathfrak{L})).$$

is independent upon the special choise of the Haar measurs on the spaces (1).

(iii) By construction $\chi(\mathfrak{L})$ is multiplied by [K':K] under finite field extensions $K \subseteq K'$,

$$\chi(\mathfrak{L} \otimes_R R') = [K':K]\chi(\mathfrak{L}).$$

### 4.8 Theorem 3: Riemann-Roch theorem for arithmetic surfaces

Let $\mathfrak{L}$ be an admissible line bundle on the artihmetic surface $p: X \to B$. Then

$$\chi(\mathfrak{L}) = \frac{1}{2}\langle \mathfrak{L}, \mathfrak{L} - \omega_X \rangle + \chi(\mathcal{O}_X).$$

**Proof**. We may assume that $\mathfrak{L} = \mathcal{O}(D)$ for an Arakelov divisor D on X. The assertion is true for the zero divisor. So it is sufficient to show that both sides of the equation change by the same amount if we add to or subtract from D any prime divisor C. In fact it will be sufficient to treat the case that C is added to D.[84]

Case 1: C is an irreducible component of a fiber $F_v$ with $v \in S_f$.

Consider the short exact sequence

$$0 \to \mathcal{O}(-C) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_C \to 0.$$

It gives a short exact sequence

$$0 \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}_X(D+C) \to \mathcal{O}_C(D+C) \to 0$$

By Theorem 1 (cf. 3.11)[85], the associated cohomology sequence is a volume exact sequence of finitely generated modules over the ring R of integers of the number field K. Therefore,

---

[84] To deal with the case D' = D - C, consider the case D = D' + C instead.

[85] 3.11(iii) tells us that the metric on $\lambda(X_v, O(D+C))$ for every infinite place $v \in S_\infty$ is just the product of the metrics on $\lambda(X_v, \mathcal{O}(D))$ and $\lambda(X_v, \mathcal{O}_C(D+C))$ (consider C as a point of $X_v$). This can be translated into the assertion that the cohomology seqence for

$$\chi(\mathcal{O}(D+C)) = \chi(\mathcal{O}(D)) + \chi(\mathcal{O}_C(D+C)).$$

The R-modules $H^i(X, \mathcal{O}_C(D+C))$ are modules over $k_v = R_v/m_v$, hence torsion modules (hence of rank zero). Therefore the volume parts in the definiton of $\chi$ are zero and the only contributions are due to the torsion parts, i.e.,

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_C(D+C)) &= \chi(H^0(X, \mathcal{O}_C(D+C)) - \chi(H^1(X, \mathcal{O}_C(D+C))\\ &= \log \#\, H^0(X, \mathcal{O}_C(D+C)) - \log \#\, H^1(X, \mathcal{O}_C(D+C))\\ &= \sum_{\mu\in S_f} \log q_\mu \cdot (\text{length } H^0(X, \mathcal{O}_C(D+C)_\mu) - \text{length } H^0(X, \mathcal{O}_C(D+C)_\mu))\\ &= \log q_v \cdot (\text{length } H^0(X, \mathcal{O}_C(D+C)) - \text{length } H^0(X, \mathcal{O}_C(D+C)))\\ &=^{86} \log q_v \cdot (\text{length } H^0(C, \mathcal{O}_C(D+C)) - \text{length } H^0(C, \mathcal{O}_C(D+C)))\end{aligned}$$

The classical Riemann-Roch theorem for the curve C over $k_v$ gives

$$\chi(\mathcal{O}_C(D+C)) = \log q_v \cdot (\deg (D+C)|_C + 1 - \text{genus of } C)$$

We use the adjunction formula, to calculate the genus of C:

Adjunction Formula (Hartshorne, Prop. V.1.5):
If C is a nonsingular curve of genus g on the surface X, and if K is the canonical divisor, then

$$2g - 2 = C\cdot(C+K).$$

We get

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2} C\cdot(C+K) = 1 + \frac{1}{2\cdot \log q_v} \langle C, C+\omega_X\rangle.$$

Substituting into the above expression for $\chi(\mathcal{O}_C(D+C))$ we get

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_C(D+C)) &= \langle D+C, C\rangle - \frac{1}{2}\langle C, C+\omega_X\rangle\\ &= \frac{1}{2}(2\langle C,D\rangle + 2\langle C,C\rangle - \langle C,C\rangle - \langle C, \omega_X\rangle)\\ &= \frac{1}{2}\langle C, 2D + C - \omega_X\rangle\\ &= \frac{1}{2}\langle C, D + C - \omega_X\rangle + \frac{1}{2}\langle D, C\rangle\\ &= \frac{1}{2}\langle D+C, D+C-\omega_X\rangle - \frac{1}{2}\langle D, D - \omega_X\rangle.\end{aligned}$$

But this is presicely the amount the right hand side changes when D is replaced by D+C.

Case 2: C a fiber $F_v$ with $v\in S_\infty$ .

The right hand side changes by the amount

$$\text{RHS change} \quad = \frac{1}{2}\langle D+C, D+C-\omega_X\rangle - \frac{1}{2}\langle D, D - \omega_X\rangle$$

---

$$0 \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}_X(D+C) \to \mathcal{O}_C(D+C) \to 0$$

is volume exact.

[86] For sheaves with support in C we have an equivalence of categories.

$$= \frac{1}{2}\langle D, D+C-\omega_X\rangle + \frac{1}{2}\langle C, D+C-\omega_X\rangle - \frac{1}{2}\langle D, D-\omega_X\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\langle D,D\rangle + \frac{1}{2}\langle D,C\rangle - \frac{1}{2}\langle D,\omega_X\rangle$$
$$+ \frac{1}{2}\langle C,D\rangle + \frac{1}{2}\langle C,C\rangle - \frac{1}{2}\langle C,\omega_X\rangle$$
$$- \frac{1}{2}\langle D,D\rangle + \frac{1}{2}\langle D,\omega_X\rangle$$
$$= \langle C,D\rangle + \frac{1}{2}\langle C,C\rangle - \frac{1}{2}\langle C,\omega_X\rangle.$$

Since C is a fiber at infinity, the intersection product with all fiber components is zero. In particular $\langle C,C\rangle = 0$. So we get

$$\text{RHS change} \quad = \langle C,D\rangle - \frac{1}{2}\langle C,\omega_X\rangle$$

Since C is a fiber at infinity,

$$\langle C,P\rangle = \begin{cases} [K(P):K] & \text{if P is a horizontal prime divisor} \\ 0 & \text{if P is a fiber component} \end{cases}$$

For a horizontal prime divisor P, let $P_C$ denote the divisor induced by P on C (i.e. the sum over the geometric points of C lying over P). For P vertical let $P_C$ denote the zero divisor. Extend the map $P \mapsto P_C$ by linearity to all Arakelov divisors. Then,

$$\langle C,D\rangle = \deg D_C$$

and

(1) $$\text{RHS change} = \deg D_C - g(C) + 1$$

Next we calculate the amount the left hand side changes. Note that the bundles

$$\mathcal{O}(D+n\cdot C) \text{ and } \mathcal{O}(D),\ n\in\mathbb{Z}$$

are isomorphic as bundles. They only differ by the metrics on their fibres at infinity corresponding to C. By defintion (see 2.7 or Arakelov 2.6) the metrics of the left hand side bundle at C is obtained from the one at the right hand side via multplication with the factor[87]

$$e^{-n}.$$

In particular, for n = 1, the metrics of $\mathcal{O}(D+C)$ at C differs from the corresponding metrics of $\mathcal{O}(D)$ by the factor $e^{-1}$. By Falting's theorem 1 (3.11(ii)) the metric of

$$\lambda(X, \mathcal{O}(D+C))$$

differs from the metrics of

$$\lambda(X, \mathcal{O}(D))$$

by the factor

$$e^{-\chi(\mathcal{O}_C(D))}$$

---

[87] If s is a meromorphic section defining D+nC then the coefficient n is obtained from the metric via the formula

$$n = v_C(s) = -\int_C \log \|s\|\, d\mu.$$

Therefore, if the metric is multiplied by a constant c, the coefficient n is changed by the additive constant

$$-\log c.$$

So if n is changed by the additive constant $\Delta n$, the metric is changed by the factor $e^{-\Delta n}$.

where the exponent denotes the (negative of) the classical Euler-Poincaré characteristics of the sheaf $\mathcal{O}_C(D)$ induced by $\mathcal{O}(D)$ on the compact Riemann surface C. Therefore, the Euler-Poincaré characeristics is changed by the additive constant

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}(D+C)) - \chi(\mathcal{O}(D)) &= -\log e^{-\chi(\mathcal{O}_C(D))} \\ &= \chi(\mathcal{O}_C D)) \\ &= \deg \mathcal{O}_C(D) + 1 - g(C) \qquad \text{(by classical Riemann-Roch)} \\ &= \deg D_C + 1 - g(C).\end{aligned}$$

This proves the claim in the second case.

Case 3. C is an irreducible horizontal divisor.

After a base extension $K \subseteq K'$, which multiplies both sides of the Riemann-Roch theorem with the same factor $[K': K]$, we may assumen than C is a section $s: B \to X$ of $p: X \to B = \operatorname{Spec} R$,

i.e.,

$C = s(B)$,

From the short exact sequence

$$0 \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}_X(D+C) \to \mathcal{O}_C(D+C) \to 0$$

as in the first case we see that

$$\text{LHS change} = \chi(\mathcal{O}_C(D+C)) = \chi(s^*(\mathcal{O}(D+s(B)))$$

by Falting's theorem 1 (3.11(iii)[88]. Here

$s^*\mathcal{O}(D + s(B))$

is a projective R-module of rank 1, which has metrics and therefore Haar measures at the infinite places. Moreover, the residue map gives an isometry

$s^*(\omega_X \otimes \mathcal{O}(B)) \cong R$

hence and isometry

$$s^*\mathcal{O}(B) \cong s^*(\omega_X^{-1}). \tag{2}$$

Therefore,

$$\text{LHS change} = \chi(s^*(\omega_X^{-1} \otimes \mathcal{O}(D)))$$

By remark 4.6(ii) the $\chi$ of a projective module of rank 1 is just the degree. Therefore

$$\chi(s^*\mathcal{O}(D')) = \deg s^*\mathcal{O}(D')$$

for every Arakelov diviser D'.[89] In particular,

$$\text{LHS change} = \deg s^*(\omega_X^{-1} \otimes \mathcal{O}(D))$$

---

[88] 3.11(iii) tells us that the metric on $\lambda(X_v, O(D+C))$ for every infinite place $v \in S_\infty$ is just the product of the metrics on $\lambda(X_v, \mathcal{O}(D))$ and $\lambda(X_v, \mathcal{O}_C(D+C))$ (consider C as a point of $X_v$). This can be translated into the assertion that the cohomology seqence for

$$0 \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}_X(D+C) \to \mathcal{O}_C(D+C) \to 0$$

is volume exact.

[89] Since B is affine, $H^1(s^*\mathcal{O}(D')) = 0$, hence

$$\chi(s^*\mathcal{O}(D')) = \chi(H^0(s^*\mathcal{O}(D')) = \deg H^0(s^*\mathcal{O}(D')) = \deg s^*\mathcal{O}(D')$$

$$= \langle D - \omega_X , C \rangle$$
$$= \langle D, C \rangle - \langle \omega_X , C \rangle$$
$$= \frac{1}{2}\langle 2D, C \rangle - \frac{1}{2}\langle \omega_X , C \rangle + \frac{1}{2}\langle C , C \rangle \qquad \text{(by (2))}$$
$$= \frac{1}{2}\langle D + C, C \rangle + \frac{1}{2}\langle D+C, D \rangle - \frac{1}{2}\langle D, D \rangle - \frac{1}{2}\langle \omega_X , C \rangle$$
$$= \frac{1}{2}\langle D+C, D+C \rangle - \frac{1}{2}\langle D+C, \omega_X \rangle + \frac{1}{2}\langle D, \omega_X \rangle - \frac{1}{2}\langle D, D \rangle$$
$$= \frac{1}{2}\langle D+C, D+C - \omega_X \rangle - \frac{1}{2}\langle D, D - \omega_X \rangle$$
= RHS change.

**QED**.

## *5. The Hodge index theorem*

## *6. Noether's formula*

## *7. Elliptic curves*

## *8. Zeta-functions*

## *Index*


**—A—**

Abel-Jacobi map, 57
arithmetic surfaces, 40

**—C—**

curvature, 47

**—D—**

Divisor, 9
Divisorklassengruppe, 10; 12

**—E—**

endlicher Divisor, 9
Euler-Poincaré characteristics, 73

**—F—**

fibres at infinity, 43
finite fibres, 43

**—G—**

globale Gleichung eines Punktes, 19
Grad, 11
Greensche Formel, 21
Greensche Funktion, 32

**—H—**

Haar measure, 73
Hauptdivisor, 10
horizontal, 14

**—I—**

infinite fibres, 43
intersection product, 43
inverses Bild, 39

**—K—**

k constant, 60

**—L—**

local intersection multiplicity, 5
logarthmischen Abbildung, 13

**—M—**

metrisiertes Geradenbündel, 25; 26

**—P—**

principal polarization, 59

**—S—**

sections', 43
semi-stable reduction, 7

Solution of the Jacobi inversion problem, 60

—T—

theorem of Riemann, 57
theta divisor, 57

—U—

unendlich ferne Komponenten, 9
unit ball, 66

—W—

Wert, 12

## References

[A1] Arakelov, S.: Families of curves with fixed degeneracy, Izv. Akad. Nauk 35(1971) 1269-1293
[A2] Arakelov, S.: An intersection theory for divisors on an arithmetic surface, Izv. Akad. Nauk 38 (1974)1179-1192
[A3] Arakelov, S.: Theory of intersections on the arithmetic surface, Proc. Int. Congr. Vancouver (1974) 405-408
[M] Mamford, D.: Stability of projective varieties, Ens. Math. 23(1977)39-100
[P] Parsin, Algebraic curves over function fields I, Isv. Akad. Nauk 32 (1968)1191-1219
[S1] Szpiro, L.: Sur le théorème de rigitité de Parsin et Arakelov, Asterisque 64 (1979) 169-202
[S2] Szpiro, L.: Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au deux, Asterisque 96 (1981).