Analytische Geometrie

B. Herzog, Universität Leipzig, Institut für Mathematik und Informatik,
Vorlesung des ersten Studienjahrs im Sommersemester 2008

Bezeichnungen

$||$ Parallelität von affinen Unterräumen, vgl. 1.3.5.
$(\langle X\rangle, V_X)$ von X aufgespannter affiner Unterraum, vgl. 1.3.12.
$\mathbb{A}^n$ affiner Standardraum der Dimension n, vgl. 1.3.9.1.
$\mathbb{A}^{(I)}$ affiner Standardraum der Dimension #I, vgl. 1.3.9.1.
$\mathbb{A}(V)$ affiner Raum zum Vektorraum V, vgl. 1.3.9.1.
$K^{(I)}$ direkte Summe von #I Exemplaren von K, vgl. 1.3.9.1.
$a_{\mathbb{K}}$ Koordinatenvektor des Punktes a bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{K}$, vgl. 1.4.9.
$\overline{pq}$ die Gerade durch die Punkte p und q, vgl. 1.5.1

Literatur

[1] Fischer, G.: Lineare Algebra, Vieweg 2003
[2] Brieskorn, E.: Lineare Algebra und analytische Geometrie I+II, Vieweg 1983 und 1985
[3] Keller, O.-H.: Analytische Geometrie und lineare Algebra, Deutscher Verlag der Wissenschaften 1963
[4] Pickert, G.: Analytische Geometrie, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. Leipzig 1967.
[5] Stückrad, J.: Analytische Geometrie, Vorlesungsmanuskript einer Vorlesung im Sommersemester 2007

Vorbemerkungen

In dieser Vorlesung geht es um die Frage, was ist Geometrie. Wir werden diese Frage nicht abschließend beantworten. Statt dessen werden wir hier drei Beispiele für Geometrie beschreiben,

die affine Geometrie,
die projektive Geometrie und die
euklidische Geometrie.

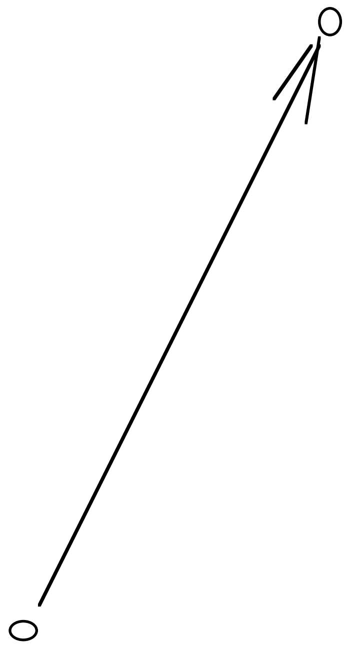
Am Ende dieser Vorlesung werden andeutungsweise beschreiben, was man allgemein unter den Begriff der Geometrie verstehen sollte.

1. Affine Räume

1.1 Eine heuristische Einführung

Ein affiner Raum ist in erster Näherung ein Vektorraum, der seinen Ursprung vergessen hat.
Etwas genauer kann man sagen, ein affiner Raum besteht aus zwei Arten von Objekten,

1. aus Punkten



2. aus Vektoren.

Ein Vektor ordnet jedem Punkt (aufgefaßt als “Angriffspunkt” des Vektors) einen weiteren Punkt zu (aufgefaßt als “Spitze” des Vektors.

Zu einem affinen Raum gehört insbesondere eine Abbildung

$$V \times A \to V,\ (v, x) \mapsto x + v,$$

Dabei bezeichne V den Vektorraum der Vektoren des affinen Raums und A die Menge der Punkte des affinen Raums.
Man stellt sich x + v als Spitze des Vektors v vor, wenn dessen Angriffspunkt gerade der Punkt x ist.

Von der Abbildung wird erwartet, daß sie einigen naheliegenden Bedingungen genügt.

1) Verschiebungen mit dem Nullvektor überführen jeden Punkt in sich:

$$x + 0 = x:$$

2) Verschiebt am erst um den Vektor v’ und danach um den Vektor v”, so erhält man eine Verschiebung um den Vektor v’+v”:

$$(x + v') + v'' = x + (v' + v'').$$

3) Für je zwei Punkte gibt es einen Vektor v, der den einen Punkt in den anderen verschiebt:

$$\forall x', x'' \ \exists\ v : x' + v = x''.$$

4) Je zwei Vektoren, die einen gegebenen Punkt beide in denselben Punkt verschieben, sind gleich:

$$x' + v = x' + v' \Rightarrow v = v'.$$

Aus den Axiomen folgt insbesondere, daß für jeden fest gewählten Punkt $x_0 \in A$ die Abbildung

$$V \to A,\ v \mapsto x_0 + v,$$

bijektiv ist. Dies gestattet es, die Menge A mit dem Vektorraum V zu identifizieren und die Punkte von A dadurch zu beschreiben, daß man die zugehörigen Punkte von V angibt.

Genauer, ein Koordinatensystem des affinen Raums besteht aus einem Punkt

$$x_0 \in A,$$
welcher Ursprung des Koordinatensystems heißt, und einer Basis
$$v_1, \ldots , v_n \in V$$
des Vektorraums V. Jeder Punkt $x \in A$ hat dann die Gestalt
$x = x_0 + (c_1v_1 + \ldots + c_nv_n)$
mit eindeutig bestimmten $c_i \in K$, welche Koordinaten von x bezüglich des gegebenen Koordinatensystems heißt. Der Vektor
$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}$$
heißt Koordinatenvektor von x bezüglich des gegebenen Koordinatensystems.

Unser Ziel ist es, zu zeigen, daß der Begriff des affinen Raums in natürlicher Weise zu den Sätzen führt wie sie sie aus der Ähnlichkeitsgeometrie des Schulunterrichts kennen.

Wir beginnen mit einigen Definitonen, die die eben durchgeführten Betrachtungen in einer etwas formaleren Sprache wiederholen.

1.2 Operationen von Gruppen auf Mengen

1.2.1 Definition

Seien G eine Gruppe und M eine Menge. Eine Operation der Gruppe G auf der Menge M von links oder auch Linksoperation von G auf M ist eine Abbildung
$$G \times M \to M, (g, m) \mapsto gm,$$
mit folgenden Eigenschaften.
(i) $g'(g''m) = (g'g'')m$ für $g',g'' \in G$ und $m \in M$.
(ii) $e \cdot m = m$ für jedes $m \in M$.
Dabei bezeichne e das neutrale Element der Gruppe G.

Analog ist eine Rechtsoperation von G auf M eine Abbildung
$$M \times G \to M, (m, g) \mapsto mg,$$
mit folgenden Eigenschaften.
(i') $(mg')g'' = m(g'g'')$.
(ii') $m \cdot e = m$.

1.2.2 Beispiele

1.2.2.1 Die Operation der allgemeinen linearen Gruppe

Seien K ein Körper,
$$G = GL(n, K)$$
die Gruppe der umkehrbaren n×n-Matrizen mit Einträgen aus K und
$$M = K^n = (= K^{n\times 1}) \text{ und } N = K^{1\times n}.$$

Dann definiert die Matrizen-Multiplikation eine Rechtsopertion
$$G \times M \to M, (g, m) \mapsto gm,$$
und eine Linksoperation
$$N \times G \to M, (m, g) \mapsto mg,$$

1.2.2.2 Die Operation eines Vektorraums auf sich

Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Wir bezeichnen mit

$$V^+$$

die dem Vektorraum zugrundeliegende additive Gruppe (d.h. die Gruppe, deren Operation gerade die Addition von Vektoren aus V ist). Dann definiert die Additon von Vektoren eine Linksoperation

$$V^+ \times V \to V, (x, y) \mapsto x + y,$$

von V^+ auf V, die sich auch als Rechtsoperation

$$V \times V^+ \to V, (x, y) \mapsto x + y,$$

der Gruppe V^+ auf der Menge V auffassen läßt.

1.2.2.3 Die Operation der S_3 auf V_4 durch Konjugation

Seien

$$S_4$$

die symmetrische Gruppe der Menge {1,2,3,4} und

$$V_4 = \{(1), (12)(23), (13)(24), (14)(23)\}$$

die Kleinsche Vierergruppe[1]. Für jede Permutation $f \in S_4$ gilt

$$f\cdot(ab)(cd)\cdot f^{-1} = (f(a)\ f(b))\ (f(c)\ f(d)).$$

Insbesondere ist

$$S_4 \times V_4 \to V_4, (f, \tau) \mapsto \sigma_f(\tau) := f\cdot\tau\cdot f^{-1},$$

eine Wohldefinierte Abbildung.

Es gilt

$$\sigma_{Id}(\tau) = \tau$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_{f'\circ f''}(\tau) &= (f'\circ f'')\cdot\tau\cdot(f'\circ f'')^{-1} \\ &= f'\cdot f''\cdot\tau\cdot f''^{-1}\cdot f'^{-1} \\ &= f'\cdot\sigma_{f''}(\tau)\cdot f'^{-1} \\ &= \sigma_f(\sigma_{f''}(\tau)), \end{aligned}$$

d.h. die Abbildung definiet eine Operation von S_4 auf V_4. Man sagt, S_4 operiert auf V_4 durch Konjugation.

1.2.3 Linksoperationen und Rechtoperationen

Sei

$$G \times M \to M, (g, m) \mapsto gm,$$

eine Rechtsoperation der Gruppe G auf der Menge M. Dann ist

$$M\times G \to M, (m, g) \mapsto g^{-1}m,$$

eine Linksoperation von G auf M.

Analog, ist eine Rechtsoperation

$$M \times G \to M, (m, g) \mapsto mg,$$

von G auf M gegeben, so ist

$$G \times M \to M, (g, m) \mapsto mg^{-1},$$

eine Linksoperaton.

---

[1] Es ist nicht schwer zu sehen, daß V_4 eine Untergruppe von S_4 ist.

Bemerkung
Mit anderen Worten, zu jeder Linksoperation gehört eine Rechtsoperation und umgekehrt. Wir werden deshalb im folgenden meist nur noch Linksoperationen betrachten und diese einfach

“Operationen”

nennen. Alle Konstruktionen und Begriffe übertragen sich auf Rechtsoperationen, indem man zur zugehörigen Linksoperation übergeht.

1.2.4 Spezielle Operationen

Sei

$$G \times M \to M, (g, m) \mapsto gm,$$

eine Operation der Gruppe G auf der Menge M. Die Operation heißt transitiv, wenn es für je zwei Elemente

$$m', m'' \in M$$

ein Gruppenelement $g \in G$ gibt mit

(1) $$gm' = m''.$$

Die Operation heißt einfach, wenn das Gruppenelement g durch die beiden Elemente m' und m'' eindeutig festgelegt ist (d.h. wenn es zu je zwei Elementen $m', m'' \in M$ genau ein $g \in G$ gibt, so daß (1) gilt). Sie heißt einfach transitiv, wenn sie einfach und transitiv ist.

Bemerkung
Entsprechend der Bemerkung von 1.2.3 heißt eine Rechtsoperation transitiv bzw. einfach transitiv, wenn die zugehörige Linksoperation transitiv bzw. einfach transitiv ist.

1.3 Affine Räume und Koordinatensysteme

1.3.1 Definition

Ein affiner Raum über dem Körper K oder auch K-affiner Raum ist eine Menge A, auf welchem eine einfach transitive Operation eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V gegeben ist,

(1) $$V \times A \to A, (v, x) \mapsto x + v.$$

Bemerkungen

(i) Die Axiome 1) und 2) von 1.1 besagen gerade, daß in einem affinen Raum der Raum der Vektoren von links auf dem Raum der Punkte operiert. Auf Grund von Axiom 3) ist diese Operation transitiv. Auf Grund von Axiom 4) ist sie sogar einfach transitiv.

(ii) Die Abbildung (1) ist integraler Bestandteil des Begriffs des affinen Raums. Die Angabe eines affinen Raums beinhaltet im wesentlichen die Angabe dieser Abbildung. Wir werden deshalb oft einfach sagen, daß diese Abbildung

$$\varphi: V \times A \to A$$

ein affiner Raum ist und damit meinen, daß A ein affiner Raum ist bezüglich dieser Abbildung.

(iii) In der Literatur ist es auch üblich, afine Räume als Tripel

$$(A, V, \varphi)$$

bestehend aus einer Menge A, einem Vektorraum V und und einer einfach transitiven Operation φ zu definieren. Wenn klar ist, von welcher Operation gesprochen wird, betrachten man auch das Paar (A, V) als affinen Raum.

(iv) Die Menge A heißt auch Punktmenge des affinen Raums, die Menge V auch Vektorenmenge des affinen Raums und die Familie der Abbildungen

$$\{A \to A, x \mapsto \varphi(v, x) = x + v\}_{v \in V}$$

Menge der Verschiebungen des affinen Raums. Die Abbildung φ selbst werden wir auch einfach Operation des affinen Raums nennen.

(v) Die Dimension eines affinen Raums $\mathbb{A}$ über K mit der Punktmenge A und der Vektorenmenge V ist definirt also die Dimension des Vektorraums V und wird mit

$$\dim_K \mathbb{A} = \dim_K V$$

bezeichnet.

(vi) Man kann den Begriff des affinen Raums einführen ohne die Forderung, daß der Vektorraum der Verschiebungen endlich-dimensional sein soll. Wir werden deshalb gelegtlich auch von unendlich-dimensionalen Räumen sprrechen und in den Aussagen, bei denen die Endlichkeit der Dimension wirklich eine Rolle spielt, auch von endlich-dimensionalen affinen Räumen.

1.3.2 Eine grundlegende Tatsache

Seien

(1) $$V \times A \to A, (v, x) \mapsto x + v,$$

ein K-affiner Raum und $x_0 \in A$ ein fest gewählter Punkt von A. Dann ist die Abbildung

(2) $$V \to A, v \mapsto x_o + v,$$

bijektiv.

Beweis.

Die Abbildung ist surjektiv, weil die Operation (1) transitiv ist. Sie ist injektiv, weil die Operaton (1) einfach ist.

QED.

Bemerkungen

(i) Die Bijektion (2) gestattet es, den Vektorraum V mit der Menge A zu identifizieren. Allerdings hängt die Identifikation von der Wahl des Punktes x_0 ab, der bei dieser Identifikation zum Nullvektor wird.

(ii) Die obige Aussage bedeutet gerade, zeichnet man in einem affinen Raum einen Punkt, aus, so wird dieser affine Raum zum Vektorraum.

(iii) Die Bijektion (2) gestattet es, die Punkte von A dadurch zu beschreiben, daß man eine Basis in V fixiert und die Koordinaten des zugehörigen Punktes von V bezüglich der gegebenen Basis angibt.

1.3.3 Koordinatensysteme

Ein Koordinatensystem des K-affinen Raums

$$V \times A \to A, (v, x) \mapsto x + v,$$

ist ein Paar

$$(x_0, B)$$

bestehend aus einem Punkt $x_0 \in A$ und einer Basis $B = (v_1,...,v_n)$ des Vektorraums V. Der Punkt x_0 heißt Ursprung des Koordinatensystems. Anstelle des Paares (x_0, B) benutzen wir auch die Bezeichnungsweise

$$(x_0 ; v_1, ..., v_n)$$

für das Koordinatensystem.

Bemerkungen

(i) Nach 1.3.2 hat jeder Punkt $x \in A$ die Gestalt

$$x = x_0 + (c_1 v_1 + ... + c_n v_n)$$

mit eindeutig bestimmten $c_1, ..., c_n \in K$, welche Koordinaten von x bezüglich des gegebenen Koordinatensystems heißen. Der Vektor

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}$$

heißt auch <u>Koordinatenvektor</u> von x bezüglich des Koordinatensystems (x_0, B).

1.3.4 Durch Punktpaare definierte Vektoren

Seien (A, V) ein K-affiner Raum und a,b ∈ A zwei Punkte des affinen Raums. Nach 1.3.2 gibt es dann genau einen Vektor v ∈ V mit

$$a + v = b.$$

Dieser Vektor wird mit

$$\overrightarrow{ab} := v$$

bezeichnet. Er heißt der Vektor mit dem Angriffspunkt in a und der Spitze in b.

Bemerkungen

(i) Es gilt

$$a + \overrightarrow{ab} = b$$

und der Vektor $\overrightarrow{ab}$ ist durch diese Bedinunge eindeutig bestimmt.

(ii) Für je drei Punkte a, b, c ∈ A des affinen Raums gilt

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}.$$

Beweis von Bemerkung (ii). Es gilt

$$\begin{aligned} a + (\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}) &= (a + \overrightarrow{ab}) + \overrightarrow{bc} \\ &= b + \overrightarrow{bc} \\ &= c \\ &= a + \overrightarrow{ac}. \end{aligned}$$

Damit ist aber $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$.

QED.

1.3.5 Affine Unterräume, Parallelität

Sei (A, V) ein K-affiner Raum. Ein K-affiner Unterraum von (A, V) ist ein K-affiner Raum (B, W) derart, daß gilt

1. B ist eine nicht-leere Teilmenge von A.
2. W ist ein K-linearer Unterraum von V.
3. Die Operation von W auf B ist gerade die Einschränkung der Operatrion von V auf A, d.h. die Inklusionen von B in A und W in V definieren eine kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V\times A & \rightarrow & A \\ \cup & & \cup \\ U\times B & \rightarrow & B \end{array}$$

Seien (B', W') und (B",W") zwei affine Unterräume des affinen Raums (A, V). Diese affinen Unterräume heißen <u>parallel</u>, wenn W' ⊆ W" oder W" ⊆ W' gilt. Man schreibt dann

$$(B', W') \parallel (B'', W'').$$

1.3.6 Parallelverschiebungen

Sei $\mathbb{A}$:= (A, V) ein K-affiner Raum. Jeder Vektor v ∈ V definiert eine bijektive Abbildung

$$t_v: A \rightarrow A, a \mapsto a + v,$$

welche Translation mit v oder auch Parallelverschiebung mit v heißt.

Bemerkungen

(i) Die Parallelverschiebung t_{-v} zum Negativen - v des Vektors ist gerade die zu t_v inverse Abbildung. Die Abbildung t_v ist also tatsächlich für jedes $v \in V$ bijektiv.

(ii) Bezeichne

$$T(\mathbb{A}) := \{t_v \mid v \in V\}$$

die Menge der Parallelverschiebungen. Dann ist die Abbildung

(1) $$V \to T(\mathbb{A}),\ v \mapsto t_v ,$$

nach Definition von $T(\mathbb{A})$ surjektiv. Sie ist außerdem injektiv, denn aus

$$t_v = t_{v'},$$

folgt $a + v = t_v(a) = t_{v'}(a) = a + v'$ für jedes $a \in A$, also nach 1.3.2 auch v' = v'',

Die Abbildung (1) gestattet es also, den Vektorraum V mit der Menge der Parallelverschiebungen des affinen Raums zu identifizieren. Wir werden deshalb auch die Elemente von V als Parallelverschiebungen von $\mathbb{A}$ bezeichnen.

(iii) Durch die Identifikation mit V wird $T(\mathbb{A})$ ein K-Vektorraum mit den Operationen

$$t_v + t_w := t_{v+w}$$

und

$$c \cdot t_v := t_{cv}$$

einen K-Vektorraum.

1.3.7 Bestimmung der Punkte aus den Vektoren und umgekehrt

Seien $\mathbb{A} = (A, V)$ ein K-affiner Raum, (B, W) ein K-affiner Unterraum von A und

$$b \in B$$

ein Punkt des Unterraums. Dann gilt

(i) $B = b + W$.

(ii) $W = \{ \overrightarrow{bx} \mid x \in B\}$.

Mit anderen Worten, die Menge B ist bereit vollständig festgelegt, wenn man einen ihrer Punkte und den Raum W kennt.
Umgekehrt ist der Vektorraum W beretis vollständigt durch die Menge der Punkte B festgelegt.

Beweis von (i) und (ii).

Zu (i). Weil (B, W) ein K-affiner Raum ist, operiert W auf der Punktmenge B, d.h. es es gilt

$$b + W \subseteq B$$

für jeden Punkt $b \in B$. Weil die Operation transitiv ist, gilt sogar das Gleichheitszeichen.

Zu (ii). Weil (B, W) ein K-affiner Raum ist, gibt es für je zwei Punkte $b, x \in B$ einen Vektor $w \in W$ mit

$$b + w = x.$$

Nach 1.3.4 wird dieser Vektor auch mit

$$\overrightarrow{bx} = w\ (\in W)$$

bezeichnet. Insbesondere gilt

$$\{ \overrightarrow{bx} \mid x \in B\} \subseteq W.$$

Umgekehrt gilt für jedes $w \in W$ auch

$$x := b + w \in W.$$

Dann ist aber

$$w = \overrightarrow{bx} \in \{ \overrightarrow{bx} \mid x \in B\}.$$

Wir haben gezeigt

$$W \subseteq \{ \overrightarrow{bx} \mid x \in B\} .$$

QED.

1.3.8 Windschiefe Unterräume

Zwei affine Unterräume (B', W') und (B", W") eines K-affinen Raums (A, V) heißen windschief, wenn sie nicht parallel sind und außerdem disjunkt sind.

Bemerkung

Sind die Unterräume parallel, so sind sie ineinander enthalten oder disjunkt:

$$B' \subseteq B'' \text{ oder } B'' \subseteq B' \text{ oder } B' \cap B'' = \emptyset.$$

1.3.9 Beispiele

1.3.9.1 Der affine Standardraum

Sei V ein K-Vektorraum. Dann ist die Addition von Vektoren eine einfach transitive Operation

$$V^{+} \times V \to V$$

und definiert dadurch einen affinen Raum (V, V). Dieser wird mit

$$\mathbb{A}(V) = \mathbb{A}_K(V) = (V, V)$$

bezeichnet und heißt der zu V gehörige affine Raum. Im Fall

$V = K^n$ oder $V =$[2] $K^{(I)}$

schreiben wir auch

$$\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_K := \mathbb{A}_K(K^n)$$

bzw.

$$\mathbb{A}^{(I)} := \mathbb{A}^{(I)}_K := \mathbb{A}_K(K^{(I)})$$

1.3.9.2 Verschobene lineare Unterräume

Seien V ein K-Vektorraum, $W \subseteq V$ ein K-linearer Unterraum und

$$v \in V$$

ein Vektor. Dann definiert die Addition von Vektoren eine einfach transitive Operation

$$W^{+} \times (v+W) \to (v + W),\ (w, v + w') \mapsto v + w' + w,$$

also einen affinen Unterraum

$$(v + W, W)$$

von $\mathbb{A}(V)$.

Bemerkungen

(i) Verschobene lineare Unterräume kann man also in natürlicher Weise mit affinen Unterräumen von $\mathbb{A}(V)$ identifizieren.

(ii) Umgekehrt ist jeder K-affine Unterraum von $\mathbb{A}(V)$ von dieser Gestalt.

Beweis von (ii). Sei (B, W) ein K-affiner Unterraum von $\mathbb{A}(V)$. Dann ist $W \subseteq V$ ein K-linearer Unterraum von V und $B \subseteq V$ eine nicht-leere Teilmenge. Wir fixieren eine Element

$$v \in B.$$

---

[2] $K^{(I)}$ ist die I-fache direkte Summe von K, d.h. die direkte Summe der Familie von Vektorräumen mit der Indexmenge I mit der Eigenschaft, daß jeder Vektorraum der Familie gleich K ist.

Dann ist die Abbildung

$$W \to B, w \mapsto v+w,$$

nach 1.3.2 bijektiv, d.h. es gilt

$$B = \{v + w \mid w \in W\} = v + W.$$

Mit anderen Worten, der Unterraum ist von der behaupteten Gestalt.
QED.

1.3.9.3 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

Seien $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$ dann ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

entweder leer oder ein K-affiner Unterraum von $\mathbb{A}^n$. Umgekehrt ist jeder K-afine Unterraum des $\mathbb{A}^n$ Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.
Beweis. Sei das Gleichungssytem

$$Ax = b$$

gegeben. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f_A: K^n \to K^n, x \mapsto Ax.$$

Für die Lösungsmenge L des Gleichungssystems gilt

$$L = \{ x \in K^n \mid Ax = b \} = \{ x \in K^n \mid f_A(x) = b \}.$$

Wir nehmen an, die Menge L ist nicht leer, d.h. es gibt einen Punkt $a \in L$. Es gilt

$$f_A(a) = b,$$

also

$$\begin{aligned} L &= \{ x \in K^n \mid f_A(x) = f_A(a) \} = \{ x \in K^n \mid f_A(x\text{-}a) = 0\} \\ &= \{ x \in K^n \mid x - a \in \mathrm{Ker}(f_A)\} \\ &= a + \mathrm{Ker}(f_A). \end{aligned}$$

Die Lösungsraum läßt sich also mit einem verschobenen linearen Unterraum und damit (nach 1.3.9.2) mit einem affinen Unterraum identifizieren.

Sei umgekehrt ein affiner Unterraum des $\mathbb{A}^n$ gegeben. Nach 1.3.9.2 ist er von der Gestalt

$$(v + W, W)$$

mit einem K-linearen Unterraum $W \subseteq K^n$ und einen Vektor $v \in K^n$. Wir fixieren eine Basis des Faktorraums K^n/W und betrachten den dazu gehörigen Isomorphismus von K-Vektorräumen, sagen wir

$$K^n/W \to K^m$$

Die Zusammensetzung mit dem natürlichen Homomorphismus $K^n \to K^n/W$ ist eine lineare Abbildung

$$f: K^n \to K^m$$

mit dem Kern

$$\mathrm{Ker}(f) = W.$$

Als lineare Abbildung : $K^n \to K^m$ ist f gerade die Multiplikation mit einer Matrix, sagen wir

$$f: : K^n \to K^m, x \mapsto Ax.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} v + W &= v + \mathrm{Ker}(f) = \{v + x \mid x \in K^n, f(x) = 0\} \\ &= \{y \mid y \in K^n , f(y\text{-}v) = 0 \} \end{aligned}$$

$= \{y \mid y \in K^n , Ay = b\}$

mit $b := Av$. Mit anderen Worten, $v + W$ ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$Ay = b.$$

QED.

1.3.10 Punkte, Geraden, Ebenen und Hyperebenen

Die nulldimensionalen Unterräume eines K-affinen Raums (A, V) haben die Gestalt

$$(a + \{0\}, \{0\}) = (\{a\}, \{0\})$$

Sie sind also durch ihren einzigen Punkt a eindeutig bestimmt. Wir werden sie oft mit dem Punkt a identifizieren. Die eindimensionalen K-affinen Unterräume heißen auch Geraden, die zweidimensionalen Ebenen und die von der Dimension dim V - 1 Hyperebenen.

1.3.11 Durchschnitte affiner Unterräume

Seien (A, V) ein K-affiner Raum und

$$\{ (B_i , W_i)\}_{i\in I}$$

eine Familie von K-affinen Unterräumen. Wir setzen

$$B := \cap_{i\in I} B_i \text{ und } W := \cap_{i\in I} W_i .$$

Falls B nicht leer ist, so ist

$$(B, W)$$

ein K-affiner Unterraum von (A, V). Er heißt Durchschnitt der Unterräume (B_i, W_i) und wird mit

$$\cap_{i\in I} (B_i, W_i)$$

bezeichnet.

Beweis. Wir haben zu zeigen, der Vektorraum W operiert einfach transitiv auf B.

1. W operiert auf B, d.h. die Abbildung

$$W \times B \to B, (w, x) \mapsto x + w,$$

ist wohldefiniert. Für $w \in W$ und $x \in B$ und beliebig vorgegebenes $i\in I$ gilt

$w \in W_i, x \in B_i$

also (da W_i auf B_i operiert) auch $x + w \in B_i$. Da letzteres für jedes $i\in I$ gilt, folgt

$$x + w \in B.$$

2. Die Operation ist einfach, d.h. aus $x + w = x + w'$ (mit $x\in B$ und $w,w'\in W$) folgt $w = w'$. Das ist aber der Fall, da für beliebig vorgegebenes i gilt

$$x \in B \subseteq B_i, w,w' \in W \subseteq W_i$$

und die Operation von W_i auf B_i einfach ist.

3. Die Operation ist transitiv, für beliebige $x, y \in B$ gibt es ein $w\in W$ mit $x + w = y$. Für $i \in I$ gilt

$$x, y \in B \subseteq B_i.$$

Da W_i auf B_i transitiv operiert, gibt es ein w_i mit

$$x + w_i = y \text{ und } w_i \in W.$$

Dies ist richtig für jedes $i \in I$. Da die Operation von V auf A einfach ist, müssen die w_i für die verschiedenen $i \in I$ alle übereinstimmen,

$$w_i = w_j \text{ für beliebige } i, j \in I,$$

d.h. $w_i = w$ ist unabhängig von i. Insbesondere liegt w im Durchschnitt der W_i , d.h.

$$w \in W.$$

QED.

1.3.12 Von Punktmengen aufgespannte affine Unterräume

Seien (A, V) ein K-affiner Raum und $X \subseteq A$ eine beliebige nicht-leere Teilmenge. Dann wird der Durchschnitt aller affinen Unterräume (B, W) von (A, V) mit $X \subseteq B$ mit

$$(\langle X\rangle, V_X)$$

bezeichnet und heißt der von X aufgespannte affine Unterraum von (A, V).

Bemerkung

Sei $x \in X$. Dann wird der Vektorraum V_X von allen Vektoren der Gestalt $\overrightarrow{xy}$ mit

$$y \in X - \{x\}$$

erzeugt,

$$V_X = \langle \overrightarrow{xy} \mid y \in X - \{x\} \rangle$$

und die Menge der Punkte ist gerade

$$\langle X\rangle = x + V_X .$$

Beweis.

Nach Definition von $\langle X\rangle$ gilt $X \subseteq \langle X\rangle$. Die zweite Identität ergibt sich deshalb aus 1.3.7 (i). Nach 1.3.7 (ii) gilt außerdem

$$V_X = \{\overrightarrow{xy} \mid y \in \langle X\rangle\} \supseteq \{ \overrightarrow{yx} \mid y \in X \}$$

Da V_X ein Vektorraum ist, folgt

$$V_X \supseteq W' \text{ mit } W' := \langle \overrightarrow{xy} \mid y \in X - \{x\} \rangle.$$

Wir müssen noch die umgekehrte Inklusion beweisen. Dazu beachten wir,

$$(x + W', W').$$

Dies ist ein K-affiner Unterraum von (A, V), und für jedes $y \in X$ gilt

$$y = x + \overrightarrow{xy} \in^{3} x + W'$$

d.h. es ist $X \subseteq x + W$. Mit anderen Worten, $(x + W', W')$ gehört zu den affinen Unterräumen von (A, V), deren Durchschnitt gerade $(\langle X\rangle, V_X)$ ist. Insbesondere ist damit

$$V_X \subseteq W',$$

d.h. es besteht die umgekehrte Inklusion.

QED.

1.3.13 Der Verbindungsraum einer Familie von Unterräumen

Seien (A, V) ein K-affiner Raum und $\{(B_i, W_i\}_{i\in I}$ eine Familie von K-afinen Unterräumen. Dann heißt der von der Menge $\cup_{i\in I} B_i$ erzeugte K-affine Unterraum von (A, V) auch Verbindungsraum dieser Familie.

Bemerkungen

(i) Der Verbindungsraum einer Familie ist der kleinste Unterraum von (A, V), der alle Unterräume der Familie enthält.

(ii) Für jede nicht-leere Menge $X \subseteq A$ ist der von X erzeugte Unterraum gerade der Verbindungsraum der Familie der Punkte von X.

1.3.14 Definition: Affine Unabhängigkeit und affine Basen

Sei $\mathbb{A} := (A, V)$ ein K-affiner Raum.

(a) Die Punkte $x_0,...,x_n \in A$ heißen affin unabhängig, wenn der von der Menge

---

[3] Dies gilt auch für $y = x$, denn dann ist $\overrightarrow{yx} = 0 \in W'$.

$$\{x_0, \dots , x_n\}$$

aufgespannte affine Unterraum von $\mathbb{A}$ die Dimension n besitzt.

(b) Eine nicht-leere Teilmenge $X \subseteq A$ heißt affin unabhängig, wenn für

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

je n+1 paarweise verschiedene Punkte von X affin unabhängig sind.

(c) Ein affin unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathbb{A}$ heißt affine Basis von $\mathbb{A}$.

1.3.15 Beispiele

A. Ein einzelner Punkt $x \in A$ eines affinen Raums (A, V) ist affin unabhängig: der von x erzeugte affine Unterraum ist gerade

$$(\{x\}, 0),$$

und es gilt dim 0 = 0.

B. Zwei Punkte $x, y \in A$ eines affinen Raums (A, V) sind genau dann unabhängig, wenn sie verschieden sind:

Ist (B, W) der von ihnen erzeugte Unterraum, so gilt nach 1.3.12

$$W = \text{der von } \overrightarrow{xy} \text{ erzeugte Vektorraum} = K\cdot\overrightarrow{xy}$$

und

$$\dim W = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die nachfolgende Aussage verallgemeinert diese beiden Beispiele.

1.3.16 Kriterium für affine Unabhängigkeit

Seien $\mathbb{A}$ =(A, V) ein K-affiner Raum und $x_0, \dots , x_n \in A$ Punkte von $\mathbb{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $x_0, \dots , x_n$ sind affin unabhängig.

(ii) $\overrightarrow{x_0x_1} , \dots , \overrightarrow{x_0x_n}$ sind linear unabhängig.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei (B, W) der von der Menge $X := \{x_0, \dots , x_n\}$ aufgespannte affine Unterraum. Dann gilt nach Definition 1.3.4 (a),

(1) $$\dim_K W = n.$$

Nach der Bemerkung von 1.3.12 wird der Vektorraum

$$W = V_X = \langle\overrightarrow{x_0x_1} , \dots , \overrightarrow{x_0x_n}\rangle$$

von den Vektoren $\overrightarrow{x_0x_1} , \dots , \overrightarrow{x_0x_n}$ erzeugt. Wegen (1) müssen diese linear unabhängig sein.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei W der von den Vektoren $\overrightarrow{x_0x_1} , \dots , \overrightarrow{x_0x_n}$ erzeugte K-Vektorraum. Weil diese Vektoren linear unabhängig sind, gilt

$$\dim W = n.$$

Nach der Bemerkung von 1.3.12 ist aber

$$W = V_X \text{ mit } X = \{x_0, \dots , x_n\},$$

d.h. der von X erzeugte K-affine Raum hat die Dimension n. Nach Definition sind dann aber die Punkte $x_0, \dots , x_n$ affin unabhängig.

QED.

1.3.17 Folgerung

Jeder n-dimensionale K-affine Raum $\mathbb{A}$ = (A, V) besitzt eine Basis

$$x_0, \ldots, x_n \in A .$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt dim V = n, d.h. es gibt eine Basis

$$v_1, \ldots, v_n \in V$$

aus n Vektoren. Wir fixieren einen Punkt

$x_0 \in A$

und setzen

$$x_i := x_0 + v_i \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Dann gilt

$$v_i := \overrightarrow{x_0 x_i} .$$

Da die v_i als Basisvektoren linear unabhängig sind, sind die Punkte $x_0, \ldots, x_n$ afin unabhängig (nach 1.3.16). Es reicht zu zeigen, diese Punkte erzeugen $\mathbb{A}$.

Zu mindest erzeugen sie eine affinen Unterraum von (A, V), sagen wir

$$(A', V').$$

Nach der Bemerkung von 1.3.12 gilt

$$V' = \langle \overrightarrow{x_0 x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_0 x_n} \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = V.$$

Wegen $x_0 \in A' \subseteq A$ gilt dann aber

$$A' = x_0 + V' = x_0 + V = A,$$

d.h. die x_i bilden ein Erzeugendensystem von (A, V).

QED.

1.3.18 Folgerung: Kriterium für (nicht notwendig endliche) Erzeugendensysteme

Seien $\mathbb{A}$ = (A, V) ein K-affiner Raum und $X \subseteq A$ eine nicht-leere Menge von Punkten. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) X ist affin unabhängig (bzw. ein Erzeugendensystem bzw. eine Basis von $\mathbb{A}$).

(ii) Es gibt ein $x \in X$ derart, daß die Vektoren

$$\overrightarrow{yx} \in V \text{ mit } y \in X - \{x\}$$

linear unabhängig sind (bzw. ein Erzeugendensystem von V bzw. eine Basis von V bilden).

(iii) Für jedes $x \in X$ sind die Vektoren

$$\overrightarrow{yx} \in V \text{ mit } y \in X - \{x\}$$

linear unabhängig (bzw. sie bilden ein Erzeugendensystem bzw. eine Basis von V).

Beweis. Die Aussage bezüglich der affinen Unabhängigkeit ergibt sich aus dem Spezialfall endlicher Mengen (d.h. aus 1.3.16) und der Definition der affinen Unabhängigkeit für unendliche Mengen.

Die Aussage bezüglich der Erzeugendensysteme ergibt sich aus der Beschreibung des Vektorraums V_X in der Bemerkung von 1.3.12 und der einfachen Transitivität der Operation dieses Vektorraums (nach derselben Argumentation wie im Beweis von 1.3.17).

Die Aussage bezüglich der Basen ergibt sich aus den beiden Aussagen bezüglich der Unabhängigkeit und der Erzeugendensysteme.

QED.

1.3.19 Folgerung

(i) Jeder affine Raum besitzt eine Basis.

(ii) Je n + 1 unabhängige Punkte eines n-dimensionalen affinen Raums bilden eine Basis dieses Raums.

1.3.20 Affine Unabhängigkeit und Koordinatenvektoren

Seien $\mathbb{A} = (A, V)$ ein K-affiner Raum mit dem Koordinatensystem
$\mathbb{K} := (o; v_1 , ... , v_n)$
und

$$p_0, ... , p_n \in A$$

Punkte von $\mathbb{A}$. mit den Koordinatenvektoren

$$\begin{pmatrix} x_{i1} \\ ... \\ x_{in} \end{pmatrix} \in K^n , i = 1 , ... , n ,$$

bezüglich $\mathbb{K}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $p_0, ... , p_n$ sind affin unabhängig.

(ii) Die Matirx $\begin{pmatrix} x_{11}-x_{01} & ... & x_{n1}-x_{01} \\ ... & ... & ... \\ x_{1n}-x_{0n} & ... & x_{nn}-x_{0n} \end{pmatrix}$ hat den Rang n.

(iii) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & ... & 1 \\ x_{01} & ... & x_{n1} \\ ... & ... & ... \\ x_{0n} & ... & x_{nn} \end{pmatrix}$ hat den Rang n+1.

Beweis. <u>(i) ⇔ (ii)</u>. Die Punkte $p_0, ... , p_n$ sind nach 1.3.16 genau dann affin unabhängig, wenn die Vektoren

$$\overrightarrow{p_0p_1} , ... , \overrightarrow{p_0p_n}$$

linear unabhängig sind. Beim Isomorphismus

$$K^n \to V, \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_1 ,$$

entsprechen diese Vektoren gerade den Koordinatenvektoren

(1) $$\begin{pmatrix} x_{11}-x_{01} \\ ... \\ x_{1n}-x_{0n} \end{pmatrix}, ... , \begin{pmatrix} x_{n1}-x_{01} \\ ... \\ x_{nn}-x_{0n} \end{pmatrix}$$

denn wegem

$$p_i = o + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}v_j$$

gilt

$$p_o + \sum_{j=1}^{n} (x_{ij}-x_{0j})v_j = o + \sum_{j=1}^{n} (x_{ij}-x_{0j} + x_{0j})v_j = p_i.$$

Die affine Unabhängigkeit der p_i ist damit äquivalent zu linearen Unabhängigkeit der Vektoren (1). Letzteres ist aber äquivalent zu (ii).
<u>(ii) ⇔ (iii)</u>. Wir betrachten die Determinante der Matrix von (iii) und ziehen die erste Spalte von allen anderen Spalten ab und wenden den Entwicklungssatz an. Wir erhalten

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_{01} & \dots & x_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{0n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{01} & x_{11}-x_{01} & \dots & x_{n1}-x_{01} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ x_{0n} & x_{1n}-x_{0n} & \dots & x_{nn}-x_{0n} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_{01} & \dots & x_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{0n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die Äquivalenz von (ii) und (iii).
QED.

1.4 Affine Abbildungen

1.4.1 Definition

Seien $\mathbb{A}$ = (A, V) und $\mathbb{A}$' = (A', V') zwei K-affine Räume. Eine K-<u>affine Abbildung</u>

$$\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$$

besteht aus einer Abbildung

$$f: A \to A'$$

und einer K-linearen Abbildung

$$\varphi: V \to V',$$

wobei gilt

$$f(a + v) = f(a) + \varphi(v)$$

für jeden Punkt $a \in A$ und jeden Vektor $v \in V$. Genauer, wir werden unter einer affinen Abbildung ein Paar (f, φ) verstehen mit f und φ wie oben. Eine <u>affine Transformation</u> oder auch <u>Affinität</u> ist eine bijektive affine Abbildung $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

Bemerkungen

(i) Intuitiv werden wir die Abbildung f als "die" affine Abbildung ansehen. Wenn man von einer Eigenschaft von (f,φ) spricht, so meint man im allgemeinen damit die entsprechende Eigenschaft von f.

(ii) Eine affine Abbildung ist also eine Abbildung affiner Räume, die mit den Verschiebungen der beiden Räume verträglich ist.

(iii) Die identische Abbildung (oder genauer, das Paar (Id, Id) identischer Abbildung $A \to A$ bzw. $V \to V$ ist eine Affinität.

(iv) Sind

$$(f, \varphi): (A, V) \to (A', V') \text{ und } (g, \psi): (A', V') \to (A'', V'')$$

affine Abbildungen, so ist auch die <u>Zusammensetzung</u>

$$(g, \psi)\circ(f, \varphi) := (g\circ f, \psi\circ\varphi): (A, V) \to (A'', V'')$$

eine affinie Abbildung.

1.4.2 Eigenschaften affiner Abbildungen

Seien $\mathbb{A}$ = (A, V) und $\mathbb{A}$' = (A', V') K-affine Räume.

(i) Für jede K-affine Abbildung (f, φ): $\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ und beliebige Punkt $p, q \in A$ gilt

$$\varphi(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}.$$

Insbesondere ist die Abbildung auf den Vektoren durch die Abbildung auf den Punkten festgelegt.

(ii) Seien $\varphi: V \to V'$ eine K-lineare Abbildung und $o \in A$, $o' \in A'$ Punkte. Dann gibt es genau eine K-affine Abbildung $(f, \varphi): \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ mit $f(o) = o'$. Ist φ injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, so gilt dasselbe auch für f.

(iii) Sei $(f, \varphi): \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ eine K-affine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) f ist bijektiv.

(b) φ ist bijektiv.

(c) (f, φ) ist ein afiner Isomorphismus, d.h. es gibt eine K-affine Abbildung

$$(g, \psi): \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$$

mit

$$(f, \varphi)\circ (g, \psi) = (Id, Id) \text{ und } (g, \psi)\circ(f, \varphi) = (Id, Id).$$

(iv) Die affinen Transformationen des affinen Raums $\mathbb{A}$ bilden eine Gruppe.

Beweis. Zu (i). Es gilt

$$f(p) + \varphi(\overrightarrow{pq}) = f(p + \overrightarrow{pq}) = f(q) = f(p) + \overrightarrow{f(p)f(q)}.$$

Die Behauptung folgt aus der Einfachheit der Operation von $\mathbb{A}'$:

Zu (ii). Falls f existiert, so gilt für jeden Punkt $x \in A$:

$$f(x) = f(o + \overrightarrow{ox}) = f(o) + \varphi(\overrightarrow{ox}) = o' + \varphi(\overrightarrow{ox}).$$

Also ist f eindeutig festgelegt. Wir haben noch die Existenz von f zu beweisen. Wir setzen

$$f(x) := o' + \varphi(\overrightarrow{ox}) \text{ für jedes } x \in A.$$

Es reicht zu zeigen, (f, φ) ist eine affine Abbildung, d.h. es gilt

$$f(p + v) = f(p) + \varphi(v) \text{ für } p \in A \text{ und } v \in V.$$

Sei $q = p + v$. Dann gilt

$$f(p + v) = f(q) = f(o + \overrightarrow{oq}) = o' + \varphi(\overrightarrow{oq})$$

und

$$\begin{aligned} f(p) + \varphi(v) &= f(p) + \varphi(\overrightarrow{pq}) && \text{(nach Definition von q)} \\ &= f(o + \overrightarrow{op}) + \varphi(\overrightarrow{pq}) \\ &= o' + \varphi(\overrightarrow{op}) + \varphi(\overrightarrow{pq}) \\ &= o' + \varphi(\overrightarrow{op} + \overrightarrow{pq}) \\ &= o' + \varphi(\overrightarrow{oq}) \\ &= f(q) && \text{(nach Definition von f)} \\ &= f(p + v) && \text{(nach Definition von q).} \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, (f, φ) ist affin.

Wir haben noch zu zeigen, die Surjktivität bzw. Injektivität von φ impliziert die von f.

Zur Injektivität. Seien φ injektiv und $p,q \in A$ Punkte mit $f(p) = f(q)$. Dann gilt

$$f(p) = f(o + \overrightarrow{op}) = o' + \varphi(\overrightarrow{op})$$

und

$$f(q) = f(o + \overrightarrow{oq}) = o' + \varphi(\overrightarrow{oq})$$

also

$$\varphi(\overrightarrow{op}) = \varphi(\overrightarrow{oq})$$

also

$$\overrightarrow{op} = \overrightarrow{oq}$$

(weil φ injektiv ist), also

$$p = o + \overrightarrow{op} = o + \overrightarrow{oq} = q.$$

Zur Surjektivität. Seien φ surjektiv und $p' \in A'$ vorgegeben. Dann gilt

$$p' = o' + \overrightarrow{o'p'}.$$

Weil φ surjektiv ist, gibt es ein $v \in V$ mit

$$\varphi(v) = \overrightarrow{o'p'}.$$

Sei

$$p := o + v.$$

Dann gilt

$$f(p) = f(o + v) = f(o) + \varphi(v) = o' + \overrightarrow{o'p'} = p'.$$

Wir haben gezeigt, f ist surjektiv.

Zu (iii). (a) $\Rightarrow$ (b). φ ist surjektiv. Sei $v' \in V$ vorgegeben. Wir fixieren einen Punkt $o \in A$ und setzen

$$x' := f(o) + v'.$$

Weil f surjektiv ist, gibt es einen Punkt $x \in A$ mit

$$f(x) = x'.$$

Es folgt

$$f(x) = f(o) + v',$$

also nach 1.4.2 (i)

$$v' = \overrightarrow{f(o)f(x)} = \varphi(\overrightarrow{ox}).$$

φ ist injektiv. Sei $v \in V$ ein Vektor mit $\varphi(v) = 0$. Wir haben zu zeigen, $v = 0$. Dazu fixieren wir einen beliebigen Punkt $p \in A$ und setzen

$$q = p + v.$$

Es gilt

$$f(q) = f(p + v) = f(p) + \varphi(v) = f(p) + 0 = f(p).$$

Weil f injektiv ist, folgt $p = q$, also

$$p + 0 = p = q = p + v,$$

also $v = 0$ (wegen der Einfachheit der Operation von $\mathbb{A}$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Nach (ii) ist mit φ auch f bijektiv. Wir setzen

$$g := f^{-1}: A' \to A \text{ und } \psi := \varphi^{-1}: V' \to V.$$

Es reicht zu zeigen, (g, ψ) ist eine affine Abbildung, denn nach Konstruktion ist (g, ψ) invers zu (f, φ). Mit φ ist auch $\psi = \varphi^{-1}$ eine lineare Abbildung. Weiter gilt für $p' \in A'$ und $v' \in V'$:

$$\begin{aligned} f(g(p'+v')) &= p' + v' \\ &= f(g(p')) + \varphi(\psi(v')) \\ &= f(g(p') + \psi(v')) \quad \text{weil } (f,\varphi) \text{ affin ist} \end{aligned}$$

Weil f injektiv ist, folgt

$$g(p'+v') = g(p') + \psi(v').$$

Mit anderen Worten, (g, ψ) ist affin.

(c) $\Rightarrow$ (a). Weil es eine zu (f, φ) inverse affine Abbildung (g, ψ) gibt, besitzt f eine Umkehrabbildung g und ist damit insbesondere bijektiv.

Zu (iv). Folgt durch direktes Nachprüfen der Gruppenaxiome. Man kann auch das Untergruppenkriterium verwenden.

QED.

1.4.3 Affine Fortsetzungen

Seien $\mathbb{A} := (A, V)$ und $\mathbb{A}' := (A', V')$ zwei K-affine Räume und

$$X \subseteq A$$

eine affine Basis von (A, V). Dann gibt es zu jeder Abbildung

$$g: X \to A'$$

genau eine affine Abbildung

$$(f, \varphi): \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$$
mit $f|_X = g$.

Beweis. Existenz. Wir fixieren einen Punkt $x \in X$. Weil X eine affine Basis von $\mathbb{A}$ ist, bilden die Vektoren

$$\overrightarrow{xy} \text{ mit } y \in X,\ y \ne x,$$

eine Basis von V. Wir können also eine K-lineare Abbildung

$$\varphi: V \to V'$$

dadurch definieren, daß wir die Bilder der Elemente der Basis (beliebig) vorgeben. Wir wählen φ derart, daß gilt

$$\varphi(\overrightarrow{xy}) := \overrightarrow{g(x)g(y)} \text{ für jedes } y \in X,\ y \ne x.$$

Nach 1.4.2 (ii) gibt es genau eine K-affine Abbildung

$$(f, \varphi): \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$$

mit

$$f(x) = g(x).$$

Für die übrigen Punkte $y \in X$ gilt

$$f(y) = f(x + \overrightarrow{xy}) = f(x) + \varphi(\overrightarrow{xy}) = g(x) + \overrightarrow{g(x)g(y)} = g(y),$$

d.h. (f, φ) ist eine Abbildung der gesuchten Art.

Eindeutigkeit. Seien zwei K-affine Abbildungen

$$(f, \varphi): \mathbb{A} \to \mathbb{A}' \text{ und } (f', \varphi'): \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$$

gegeben mit $f|_X = g = f'|_X$. Wir haben zu zeigen, die beiden affinen Abbildung sind gleich. Für jedes $y \in X - \{x\}$ gilt

$$\varphi'(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{f'(x)f'(y)} = \overrightarrow{g(x)g(y)} = \overrightarrow{f(x)f(y)} = \varphi(\overrightarrow{xy}).$$

Die beiden K-linearen Abbildung φ und φ' haben somit auf den Vektoren $\overrightarrow{xy}$ dieselben Werte. Da diese Vektoren eine Basis von V bilden, folgt

$$\varphi = \varphi'.$$

Zum Beweis der Gleichheit von (f, φ) und (f', φ') reicht es deshalb, wenn wir zeigen, daß f und f' in einem Punkt denselben Wert annehmen (nach 1.4.2 (ii)). Es gilt aber

$$f(x) = g(x) = f'(x)$$

(weil x ein Punkt von X ist).
QED.

1.4.4 Definitionen

Ein affiner Monomorphismus, Epimorphismus, Isomorphismus ist eine affine Abbildung

$$(f, \varphi): \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$$

mit f injektiv, surjektiv bzw. bijektiv. Zwei affine Räume $\mathbb{A}$ und $\mathbb{A}'$ heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus $\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ gibt. Die Gruppe der affinen Transformationen von $\mathbb{A}$ heißt auch affine Gruppe von $\mathbb{A}$.

Bemerkungen

(i) Statt der Injektivität, Surjektivität bzw. Bijektivität von f hätte man auch die von φ fordern können (vgl. 1.4.2 (iii)).

(iii) Nach 1.4.2 (iii) ist eine affine Abbldung genau dann ein affiner Isomorphismus, wenn es eine zu dieser Abbildung inverse affine Abbildung gibt.

1.4.5 Das Bild einer affinen Abbildung

Sei

$$(f, \varphi): \mathbb{A} = (A, V) \to \mathbb{A}' = (A, V')$$

eine K-affine Abbildung. Dann ist

$$(f(A), \varphi(V))$$

ein K-affiner Unterraum von $\mathbb{A}$'.
Allgemeiner ist das Bild eines K-affinen Unterraums bei einer affinen Abbildung ein K-affiner Unterraum.
Beweis. Sei

$$(B, W) \subseteq (A, V)$$

ein K-affiner Unterraum von (A, V). Es reicht zu zeigen,

$$(f(B), \varphi(W))$$

ist ein K-affiner Unterraum von (A', V'). Weil W ein K-linearer Unterraum von V und φ eine K-lineare Abbildung ist, ist

$$W' := \varphi(W) \subseteq V'$$

ein K-linearer Unterraum von V'. Damit ist aber

$$(f(b) + W', W')$$

für beliebig gewähltes $b \in B$ ein K-affiner Unterraum von (A', V'). Es reicht zu zeigen,

$$f(b) + W' = f(B).$$

Beweis von "$\subseteq$": Für $w \in W$ gilt

$$f(b) + \varphi(w) = f(b + w) \in f(B)$$

(weil b + w in B liegt, denn W operiert auf B)

Beweis von "$\supseteq$": Sei $x \in B$. Dann gilt $\overrightarrow{bx} \in W$, also

$$f(x) = f(b + \overrightarrow{bx}) = f(b) + \varphi(\overrightarrow{bx}) \in f(b) + \varphi(W) = f(b) + W'.$$

QED.

1.4.6 Das Bild einer affinen Abbildung

Sei (f, φ): $\mathbb{A} := (A, V) \to \mathbb{A}' := (A', V')$ eine K-affine Abbildung. Dann heißt der K-affine Unterraum

$$(f(A), \varphi(V))$$

von $\mathbb{A}$' Bild von (f, φ) und wird mit

$$\mathrm{Im}\ (f, \varphi) \text{ oder auch } \mathrm{Im}\ (f)$$

bezeichnet.
Vorbemerkung
Die Aussage, die wir als nächstes formulieren wollen, läßt sich suggestiver formulieren, wenn man den Begriff der Kardinalzahl verwendet. Formal wird der Begriff der Kardinalzahl für die Formulierung nicht gebraucht. Ohne diesen wäre die Aussage aber weniger einfach. Wir fügen deshalb an dieser Stelle einige Bemerkungung zum Begriff der Kardinalzahl ein.

1.4.7 Zum Begriff der Kardinalzahl

Den Begriff der Kardinalzahl einer Menge M erhält man, wenn man alle Mengen M', für welche es eine bijektive Abbildung

$$M \to M'$$

gibt, identifiziert. Etwas lax könnte man sagen, die Kardinalzahl von M ist die Gesamtheit aller dieser Mengen M'. Bezeichnung:

$$\# M$$

Die Aussage, daß die Mengen M_1 und M_2 dieselbe Kardinalzahl besitzen, drückt lediglich aus, daß es eine bijektive Abbildung

$$M_1 \to M_2$$

gibt. Man sagt, zwischen den Kardinalzahlen c_1 und c_2 besteht die Relation

$$c_1 \le c_2$$

(d.h. die erste ist höchstens so groß wie die zweite), wenn es für die zugehörigen Mengen M_1 bzw. M_2 eine injektive Abbildung

$$M_1 \to M_2$$

gibt.

Bemerkungen

(i) Die natürlichen Zahlen kann man als die Kartinalzahlen der endlichen Mengen betrachten.

(ii) Die allgemeinen Kardinalzahlen haben Eigenschaften, die denen der natürlichen Zahlen ähneln. Zum Beispiel sind je zwei Kardinalzahlen c' und c" vergleichbar, d.h. es gilt

$$c' \le c'' \text{ oder } c' = c'' \text{ oder } c' \ge c''.$$

(iii) Das Rechnen mit Kardinalzahlen ist etwas gewöhnungsbedürftig: neben den Rechenregeln, die wir von den gewöhnlichen Zahlen kennen ist zum Beispiel außerdem

$$c' + c'' = \max(c', c''),$$

falls mindestens eine der beiden Kardinalzahlen unendlich ist.

(iv) Wir verwenden im folgenden diesen Begriff nur, um die Tatsache, daß es eine bijektive Abbildung zwischen zwei Mengen gibt, in einer etwas suggestiveren Weise auszudrücken.

(v) Mit Hilfe des Begriffs der Kardinalzahl kann man die Dimension eines Vektorraums etwas genauer definieren: nämlich als gemeinsame Kardinalzahl der Basen dieses Raums.

1.4.8 Klassifikation der affinen Räume

(i) Für jeden K-affinen Raum $\mathbb{A} = (A, V)$ und jede Basis B von V ist $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}_K^{(B)}$.[4]

(ii) Zwei K-affine Räume sind genau dann isomorph, wenn Sie dieselbe Dimension haben.

(iii) Für jede Kardinalzahl d gibt es bis auf Isomorphie genau einen K-affinen Raum der Dimension d.

Beweis. Zu (i). Sei $a \in A$ ein beliebiger Punkt. Nach 1.4.2 (ii) reicht es, einen Isomorphismus von K-Vektorräumen $\varphi: K^{(B)} \to V$ zu finden. Nun ist aber

$$\varphi: K^{(B)} \to V, (x_i)_{i\in B} \mapsto \sum_{i\in B} x_i \cdot i$$

ein solcher, denn B ist eine Basis von V.

Zu (ii). Seien $\mathbb{A} = (A, V)$ und $\mathbb{A}' = (A', V')$ zwei K-affine Räume und B bzw. B' Basen der K-Vektorräume V bzw. V'. Wir haben zu zeigen,

$$\mathbb{A} \text{ und } \mathbb{A}' \text{ sind isomorph} \Leftrightarrow \#B = \#B'.$$

Sei #B = #B'. Dann gibt es zueinander inverse bijektive Abbildungen

$$f: B \to B' \ (\subseteq V') \text{ und } g: B' \to B \ (\subseteq V).$$

Diese lassen sich fortsetzen zu zueinander inversen K-linearen Abbildungen

$$\tilde{f}: V \to V' \text{ bzw. } \tilde{g}: V' \to V.$$

Damit sind aber

$$(\tilde{f},\tilde{f})\ (V, V) \to (V', V') \text{ bzw. } (\tilde{g},\tilde{g}): (V', V') \to (V, V)$$

zueinander inverse K-affine Abbidungen, d.h. es gilt

$$\mathbb{A}(V) \cong \mathbb{A}(V').$$

Dann gilt aber auch $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'$.

Sei umgekehrt $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'$. Dann gilt aber auch $\mathbb{A}(V) \cong \mathbb{A}(V')$, d.h. V und V' sind isomorphe Vektorräume. Sei ein Isomorphismus gegeben, sagen wir

$$\varphi: V \to V'.$$

Da Isomorphismen Basen in Basen überführen, ist

---

[4] Insbesondere ist $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}_K^{(B)} \cong \mathbb{A}(V)$

$$\tilde{B} := \{\varphi(i)\}_{i\in B}$$

eine Basis von V', und die Einschränkung

$$\varphi|_B: B \to \tilde{B},\ i \mapsto \varphi(i),$$

ist eine bijektive Abbildung. Da je zwei Basen eines Vektorraums aus derselben Anzahl von Basiselementen bestehen, gibt es eine bijektive Abildung

$$\psi: \tilde{B} \mapsto B'.$$

Zusammen erhalten wir eine bijektive Abbildung

$$\psi\circ\varphi|_B: B \to B'.$$

Insbesondere gilt #B' = #B.
Zu (iii). Existenz. Seien d eine Kardinalzahl und M eine Menge mit der Kardinalzahl d. Wir bezeichnen mit V den von M frei erzeugten K-Vektorraum. Dies ist ein Vektorraum mit der Basis M, d.h. es gilt

$$\dim V = \#M.$$

Dann ist aber (V, V) ein K-affiner Raum mit der Dimension

$$\dim (V, V) = \dim V = \#M = d.$$

Wir haben gezeigt, zu jeder Kardinalzahl d gibt es einen K-affinen Raum mit der Dimension d.
Eindeutigkeit. Folgt aus (ii).
QED.

1.4.9 Folgerung: der endlich-dimensionale Fall

Bis auf Isomorphie sind die Räume $\mathbb{A}^n_K$ mit $n\in\mathbb{N}$ die einzigen endlich-dimensionalen K-affinen Räume. Sie sind paarweise nicht isomorph.

1.4.10 Wirkung affiner Abbildung auf die Koordinaten

Seien $(f, \varphi): \mathbb{A} = (A, V) \to \mathbb{A}' = (A', V')$ eine K-affine Abbildung zwischen endlich-dimensionalen affinen Räumen und

$$\mathbb{K} = (o, v_1,...,v_n)\ ,\ \mathbb{K}' = (o'; v'_1,...,v'_{n'})$$

Koordinatensysteme von $\mathbb{A}$ bzw. $\mathbb{A}'$. Wir bezeichnen für jeden Punkt $a\in A$ mit

$$a_{\mathbb{K}}$$

den Koordinatenvektor von a bezüglich $\mathbb{K}$ und analog für jeden Punkt $a'\in A'$ mit

$$a'_{\mathbb{K}'}$$

den Koordinatenvektor von a' bezüglich $\mathbb{K}'$. Weiter bezeichne

$$M = M^v_{v'}(\varphi)$$

die Matrix der K-linearen Abbildung φ bezüglich der gegebenen Basen. Dann gilt für jeden Punkt $a \in A$:

$$f(a)_{\mathbb{K}'} = f(o)_{\mathbb{K}'} + M\cdot a_{\mathbb{K}}\ .$$

Beweis. Wir führen Bezeichnungen für die Einträge der auftretenden Koordinatenvektoren und Matrizen ein, sagen wir

$$\begin{aligned} a_{\mathbb{K}} &= (x_i) \\ M &= (c_{ij}) \\ f(a)_{\mathbb{K}'} &= (x'_i) \\ f(o)_{\mathbb{K}'} &= (\gamma_i). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$a = o + \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

(1) $$f(a) = o' + \sum_{i=1}^{n'} x'_i v'_i$$

$$f(o) = o' + \sum_{i=1}^{n'} \gamma_i v'_i$$

also

$$\begin{aligned}
f(a) &= f(o + \sum_{i=1}^{n} x_i v_i) \\
&= f(o) + \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(v_i) \\
&= f(o) + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n'} c_{ji} v'_j \\
&= f(o) + \sum_{j=1}^{n'} (\sum_{i=1}^{n} c_{ji}\, x_i) \cdot v'_j \\
&= o' + \sum_{j=1}^{n'} \gamma_j v'_j + \sum_{j=1}^{n'} (\sum_{i=1}^{n} c_{ji}\, x_i) \cdot v'_j \\
&= o' + \sum_{j=1}^{n'} (\gamma_j + \sum_{i=1}^{n} c_{ji}\, x_i) \cdot v'_j
\end{aligned}$$

Vergleich mit (1) liefert (weil die v'_j eine Basis bilden):

$$x'_j = \gamma_j + \sum_{i=1}^{n} c_{ji}\, x_i,$$

d.h. die j-te Koordinate von $f(o)_{\mathbb{K}}$, ist die Summe aus der j-ten Koordinate von $f(o)_{\mathbb{K}}$, und der j-ten Koordinate des Matrizen-Produkts $M \cdot a_{\mathbb{K}}$ Dies ist aber gerade die Behauptung.

QED.

1.5 Affine Geometrie

1.5.1 Die Gerade durch zwei Punkte

Für je zwei verschiedene Punkte p, q eines affinen Raums $\mathbb{A}$ bezeichnen wir mit $\overline{pq}$ den von p und q erzeugten 1-dimensionalen affinen Unterraum, d.h. die Gerade durch p und q.

1.5.2 Das Teilverhältnis

Seien $\mathbb{A} = (A, V)$ ein K-affiner Raum und

$$(p, q) \text{ und } (u, v)$$

Paare von Punkten $p, q, u, v \in A$ mit

$$p \neq q.$$

Wir nehmen an, die Punktpaare liegen auf parallelen Geraden. Dann gilt[5]

$$\overrightarrow{uv} \in \overrightarrow{pq}\cdot K.$$

Es gibt also ein eindeutig bestimmtes $\alpha \in K$ mit

$$\overrightarrow{uv} = \alpha\cdot\overrightarrow{pq}.$$

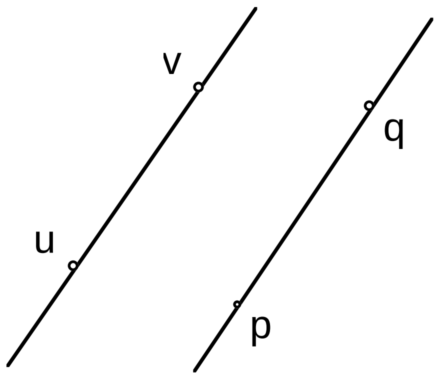
Dieses α heißt Teilverhältnis von (u, v) zu (p,q) und wird mit

$$(u, v) : (p, q) = \alpha$$

bezeichnet. Mit anderen Wort, Teilverhältnis ist durch die Bedingung

$$\overrightarrow{uv} = ((u, v) : (p, q))\cdot\overrightarrow{pq}$$

definiert.



1.5.3 Mittelpunkte

Seien $\mathbb{A}$ ein K-affiner Raum und p, q zwei Punkte von $\mathbb{A}$. Im Fall $K = \mathbb{R}$ heißt die Menge

$$[p, q] := \{ p + t\cdot\overrightarrow{pq} \mid t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 1\}$$

Verbindungsstrecke oder auch einfach nur Strecke von p nach q.
Das Teilverhältnis $(u, v) : (p, q)$ ist dann gerade das Verhältnis der Längen der Strecken [u, v] und [p, q]:

$$(u, v) : (p, q) = \frac{\text{Länge von } [u, v]}{\text{Länge von } [p, q]}$$

Über einem beliegen Körper K sind weder der Begriff der Strecken noch der Längenbegriff definiert. Das Verhält dieser Längen läßt sich jedoch immer noch definieren.

Ist die Charakteristik von K ungleich 2, so ist

$$s = p + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{pq}$$

ein wohldefinierter Punkt des von p und q erzeugten affinen Raums $\overline{pq}$ und heißt Mittelpunkt von p und q.

Bemerkungen

(i) Die Definition ist symmetrisch in p und q, denn es ist

$$q + \frac{1}{2}\overrightarrow{qp} = q + \overrightarrow{qp} - \frac{1}{2}\overrightarrow{qp} = p - \frac{1}{2}\overrightarrow{qp} = p + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{pq} = s$$

(ii) Im Fall p = q gilt s = p = q (weil dann $\overrightarrow{pq}$ der Nullvektor ist).

---

[5] Wegen $p \ne q$ ist der von $\overrightarrow{pq}$ erzeugte Vektorraum 1-dimensional. Der von $\overrightarrow{uv}$ erzeugte Vektorraum hat höchstens die Dimension 1. Die Parallelitätforderung bedeutet, die beiden Vektorräume sind ineinander enthalten, d.h. es gilt

$$\overrightarrow{uv}\cdot K \subseteq \overrightarrow{pq}\cdot K.$$

(iii) Im Fall $p \neq q$ gilt $s \neq p$ und $s \neq q$ (wegen $\overrightarrow{pq} \neq 0$ bzw. wegen (i) und $\overrightarrow{qp} \neq 0$).

(iv) Nach Defintion ist bzw. nach (i) gilt

$$\overrightarrow{ps} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{pq} \text{ bzw. } \overrightarrow{qs} = \frac{1}{2}\overrightarrow{qp},$$

d.h. für die Teilverhältnisse erhalten wir

$$(p, s) : (p, q) = \frac{1}{2} = (q, s) : (q, p).$$

(v) Aus (iv) ergibt sich insbesondere

$$\overrightarrow{ps} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{pq} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{qs},$$

also

$$(p, s) : (q, s) = -1.$$

(vi) Sind umgekehrt $\mathbb{A}$ ein K-affiner Raum (wobei der Körper beliebig sei) mit drei Punkten p, q und s, für welche

$$p \neq q \text{ und } (p, s) : (q, s) = -1.$$

ist, so ist die Charakteristik von K ungleich Null und s der Mittelpunkt von p und q.

Beweis. Siehe Übungsaufgabe 1, Serie 7.

QED.

1.5.4 Invarianz von Parallelität und Teilverhältnis

Seien $\mathbb{A} = (A, V)$ und $\mathbb{A}' = (A', V')$ zwei K-affine Räume und

$$(f, \varphi): \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$$

eine injektive K-affine Abbildung (d.h. ein Monomorphismus).

(i) Zwei K-affine Unterräume von $\mathbb{A}$ sind genau dann parallel, wenn deren Bilder bei f parallele Unterräume von $\mathbb{A}'$ sind.

(ii) Seien

$$(u, v) \text{ und } (p, q)$$

Punktpaare auf parallelen Geraden von $\mathbb{A}$ mit $p \neq q$. Dann sind

$$(f(u), f(v)) \text{ und } (f(p), f(q))$$

Punktpaare auf parallelen Geraden von $\mathbb{A}'$ mit

$$(f(u), f(v)) : (f(p), f(q)) = (u, v) : (p, q).$$

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Seien (A_1, V_1) und (A_2, V_2) zwei affine Unterräume von $\mathbb{A}'$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(A_1, V_1) \parallel (A_2, V_2) &\Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2 \text{ oder } V_2 \subseteq V_1\\ &\Leftrightarrow^{6} \varphi(V_1) \subseteq \varphi(V_2) \text{ oder } \varphi(V_2) \subseteq \varphi(V_1)\\ &\Leftrightarrow (f(A_1), \varphi(V_1)) \parallel (f(A_2), \varphi(V_2))\end{aligned}$$

<u>Zu (ii)</u>. Nach Voraussetzung gibt es ein $\alpha \in K$ mit

$$\overrightarrow{uv} = \alpha\cdot\overrightarrow{pq}.$$

Wir wenden φ an und erhalten

$$\overrightarrow{f(u)f(v)} = \varphi(\overrightarrow{uv}) = \alpha\cdot\varphi(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}.$$

QED.

1.5.5 Strahlensatz

Seien $\mathbb{A} = (A, V)$ ein K-affiner Raum und

$$g, g' \subseteq A$$

[6] Die Implikation $\Rightarrow$ besteht immer, die Implikation $\Leftarrow$ besteht, weil f injektiv ist.

zwei verschiedene Geraden von $\mathbb{A}$, die sich in einem Punkt o von $\mathbb{A}$ schneiden,

$$g \cap g' = \{o\}.$$

Weiter seien

$$p, q \in g - \{o\} \text{ und } p', q' \in g' - \{o\}$$

von o verschiedene Punkte der Geraden g bzw. g’. Dann gilt

(i) $p \neq p'$ und $q \neq q'$.

(ii) $\overline{pp'}$ und $\overline{qq'}$ sind genau dann parallel, wenn

$$(o, q) : (o, p) = (o, q') : (o, q)$$

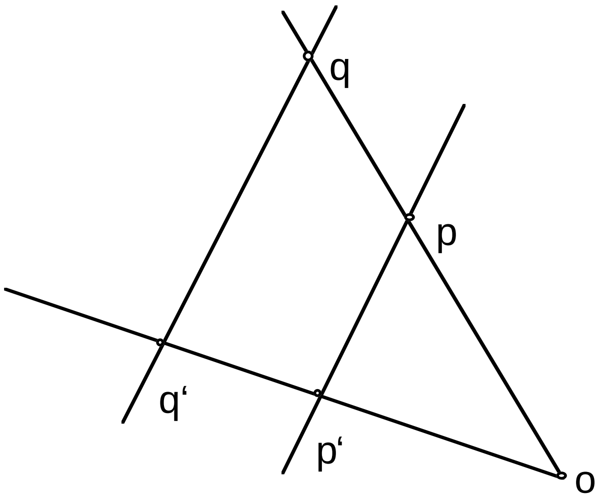
gilt.

(iii) In der Situation von (ii) ist

$$(o, q) : (o, p) = (o, q') : (o, p') = (q, q') : (p, p').$$

d.h.

$$\frac{(o,q)}{(o,p)} = \frac{(o,q')}{(o,p')} = \frac{(q,q')}{(p,p')}$$



Beweis. Zu (i). Da p von o verschieden ist, erzeugen p und o die Gerade g,

$$g = \overline{op}.$$

Analog erzeugen p’ die Gerade g’,

$$g' = \overline{op'}.$$

Wäre p = p’, so müßte damit auch g = g’ sind im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen. Also gilt

$$p \neq p'.$$

Analog folgt $q \neq q'$.

Zu (ii). Wir setzen

$$\lambda := (o, q) : (o, p) \text{ und } \lambda' := (o, q') : (o, p').$$

Nach Definition des Teilverhältnisses ist dann

(1) $$\overrightarrow{oq} = \lambda\cdot\overrightarrow{op} \text{ und } \overrightarrow{oq'} = \lambda'\cdot\overrightarrow{op'}$$

Sind $\overline{pp'}$ und $\overline{qq'}$ parallel, so gibt es ein $\alpha \in K$ mit

(2) $$\overline{qq'} = \alpha\cdot\overline{pp'}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \lambda'\cdot\overrightarrow{op'} &= \overrightarrow{oq'} && \text{(vgl. (1))} \\ &= \overrightarrow{oq} + \overrightarrow{qq'} \end{aligned}$$

$= \lambda\cdot\overrightarrow{op} + \alpha\cdot\overrightarrow{pp'}$ (vgl. (1) bzw. (2))

$= \lambda\cdot\overrightarrow{op} + \alpha\cdot(\overrightarrow{op'} - \overrightarrow{op})$

$= (\lambda - \alpha)\,\overrightarrow{op} + \alpha\cdot\overrightarrow{op'}$,

also

$$(\lambda' - \alpha)\cdot\overrightarrow{op'} = (\lambda - \alpha)\,\overrightarrow{op}.$$

Wäre dieser Vektor von Null verschieden, so hätten die Geraden außer o einen weiteren Punkt gemeinsam (den man durch Addition dieses Vektors zu o erhält). Das ist aber nicht der Fall, also gilt

$$(\lambda' - \alpha)\cdot\overrightarrow{op'} = (\lambda - \alpha)\,\overrightarrow{op} = 0.$$

Wegen $p' \neq o$ und $p \neq o$ folgt

$$\lambda' = \alpha = \lambda,$$

d.h. die beiden in (ii) angegebenen Teilverhältnisse sind gleich.
Sei jetzt umgekehrt

$$\lambda = \lambda'.$$

Dann gilt

$\overrightarrow{qq'} = \overrightarrow{oq'} - \overrightarrow{oq}$

$= \lambda'\cdot\overrightarrow{op'} - \lambda\cdot\overrightarrow{op}$ (vgl. (1))

$= \lambda\cdot(\overrightarrow{op'} - \overrightarrow{op})$

$= \lambda\cdot\overrightarrow{pp'}$

Insbesondere sind $\overrightarrow{qq'}$ und $\overrightarrow{pp'}$ linear abhängig. Diese Vektoren erzeugen aber die zu den Geraden $\overline{qq'}$ bzw. $\overline{pp'}$ gehörigen Vektorräume, d.h. diese Geraden sind parallel.
Zu (iii). Wie wir gesehen haben gilt

$$\lambda = \lambda' = \alpha$$

in der Situation von (ii). Nach (1) und (2) ist dies aber gerade die Aussage von (iii).
QED.

1.5.6 Satz von Pappos (3. Jahrhundert)

Seien $\mathbb{A} = (A, V)$ ein K-affiner Raum und

$$g, g' \subseteq A$$

zwei verschiedene Geraden von $\mathbb{A}$, die sich in einem Punkt o von $\mathbb{A}$ schneiden,

$$g \cap g' = \{o\}.$$

Weiter seien

$$p, q, r \in g - \{o\} \text{ und } p', q', r' \in g' - \{o\}$$

von o verschiedene Punkte der Geraden g bzw. g'. Dann gilt

(i) $p \neq p'$ und $q \neq q'$ und $r \neq r'$.

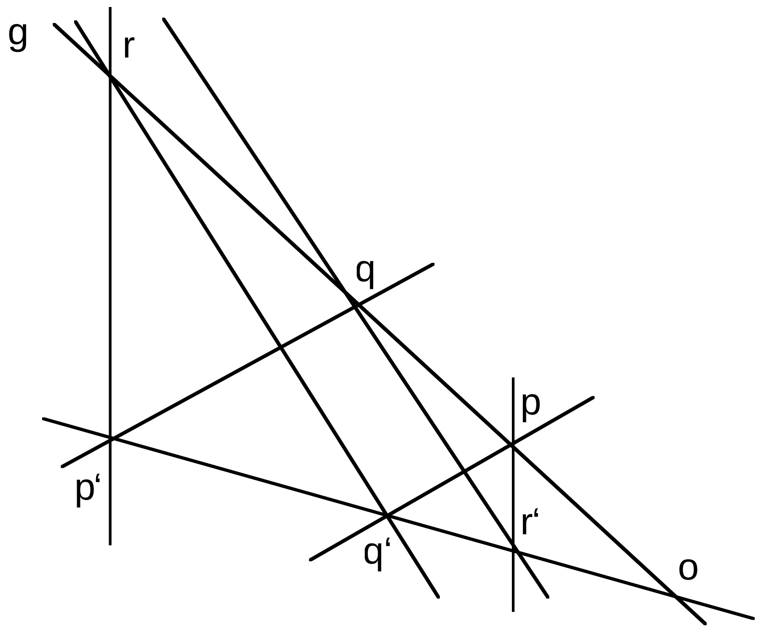
(ii) Mit $\overline{pq'} \parallel \overline{qp'}$ und $\overline{qr'} \parallel \overline{rq'}$ gilt auch $\overline{pr'} \parallel \overline{rp'}$.

(iii) In der Situation von (ii) ist

$$(r, p') : (p, r') = ((o, q) : (o, p)) \cdot ((o, r) : (o, q))$$

d.h.

$$\frac{(r,p')}{(p,r')} = \frac{(o,q)}{(o,p)} = \frac{(o,r)}{(o,q)}$$



Beweis. Zu (i). Ergibt sich aus dem Strahlensatz (1.5.5 (i)).
Zu (ii) und (iii). Es gelte

(1) $\overline{pq'} \parallel \overline{qp'}$ und $\overline{qr'} \parallel \overline{rq'}$

Wie im Beweis von 1.5.6 setzen wir

$$\lambda := (o, q) : (o, p) \text{ und } \lambda' := (o, q') : (o, p').$$

und außerdem sei

$$\mu := (o, r) : (o, q) \text{ und } \mu' := (o, r') : (o, q').$$

Wegen (1) impliziert der Strahlensatz (Aussage (ii))[7]:

$$\lambda := (o, q) : (o, p) = (o, p') : (o, q') = 1/\lambda'$$

und

$$\mu := (o, r) : (o, q) = (o, q') : (o, r') = 1/\mu'.$$

Es folgt

$$\overrightarrow{rp'} = \overrightarrow{op'} - \overrightarrow{or} = \lambda\cdot\overrightarrow{oq'} - \mu\cdot\overrightarrow{oq} = \lambda\mu\cdot\overrightarrow{or'} - \mu\lambda\cdot\overrightarrow{op} = \lambda\mu\cdot\overrightarrow{pr'}.$$

Insbesondere sind die Geraden $\overline{rp'}$ und $\overrightarrow{pr'}$ wie behauptet parallel und für das Teilverhältnis gilt

$$(r, p') : (p, r') = \lambda\mu = ((o, q) : (o, p))\cdot((o, r) : (o, q)).$$

QED.

1.5.7 Satz von Menelaos (1. Jh, Sphärische Trigonometrie)

Seien

$$a, b, c \in \mathbb{A}$$

drei affin unabhängige Punkte eines affinen Raumes $\mathbb{A} = (A, V)$. Man sagt in dieser Situation auch, diese Punkte bilden die Ecken eines nicht-ausgearteten Dreicks. Weiter seien

$$a', b', c' \in \mathbb{A}$$

Punkte auf der a bzw. b bzw. c gegenüberliegenden Seite

$$a' \in \overline{bc}, b' \in \overline{ac}, c' \in \overline{ab},$$

die auf keiner der Ecken des Dreiecks liegen:

$$\{a, b, c\} \cap \{a', b', c'\} = \emptyset.$$

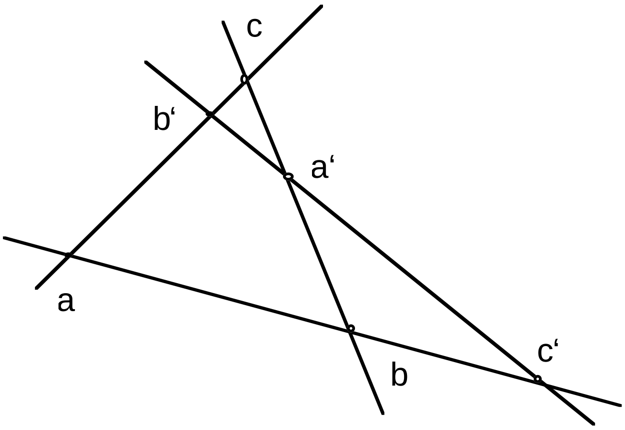
---

[7] Der Strahlensatz besagt, das Teilverhältnis ändert sich nicht, wenn man die ungestrichenen Punkte durch die gestrichenen ersetzt. Hier haben wir außerdem noch die Bezeichnungen der Punkte zu vertauschen.

Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

(i) a', b' und c' liegen auf einer Geraden.

(ii) $\frac{(a',b)}{(a';c)} \cdot \frac{(b';c)}{(b';a)} \cdot \frac{(c',a)}{(c',b)} = 1.$



Beweis. Sei E die von a, b und c aufgespannte Ebene in $\mathbb{A}$. Die Geraden $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ und $\overline{ac}$ liegen dann in E und insbesondere auch die Punke a', b', c':

$$a', b', c' \in E \text{ und } \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ac} \subseteq E.$$

Wir können deshalb $\mathbb{A}$ durch E ersetzen und annehmen,

$$\mathbb{A} \text{ wird von a, b und c aufgespannt.}$$

Insbesondere gilt dann

$$\dim \mathbb{A} = 2$$

und je zwei nicht-parallele Geraden von $\mathbb{A}$ schneiden sich in genau einem Punkt. Wir setzen

α := (a', b) : (a', c)

β := (b', c) : (b', a)

γ := (c', a) : (c', b).

Weil die Punkte a', b', c' von den Punkten a, b, c verschieden sind, sind α, β, γ von 0 und 1 verschieden:

$$\alpha, \beta, \gamma \in K - \{0, 1\}$$

(vgl. die Übungsaufgaben). Nach Definition von α, β und γ gilt

$$\overrightarrow{a'b} = \alpha \cdot \overrightarrow{a'c}$$

$$\overrightarrow{b'c} = \beta \cdot \overrightarrow{b'a}$$

$$\overrightarrow{c'a} = \gamma \cdot \overrightarrow{c'b}$$

Die Punkte a', b' und c' sind nach Konstruktion paarweise verschieden und es gilt

$$\overline{a'b'} \parallel \overline{ab} \Leftrightarrow \alpha\beta = 1$$

(vgl. die Übungsaufgaben).

Sei

$$g$$

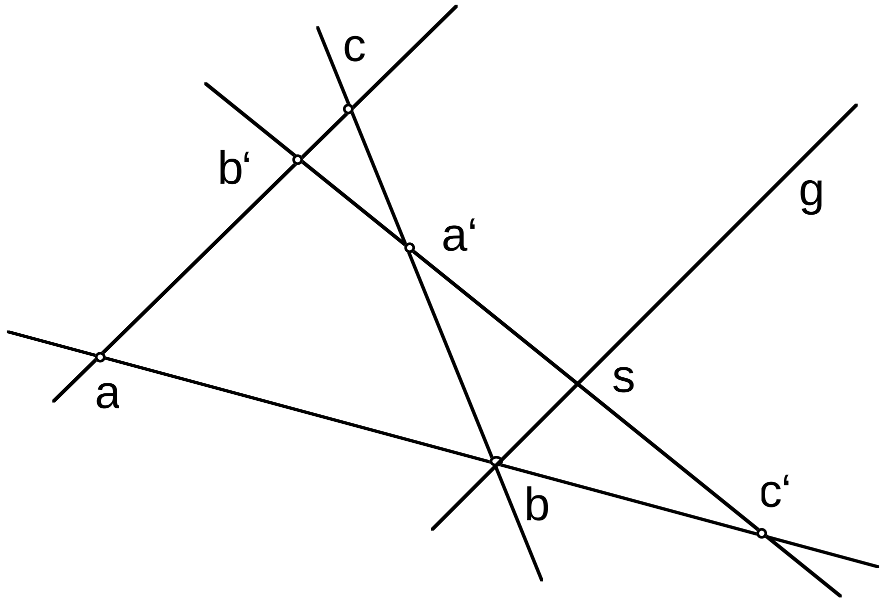
die Gerade durch b, welche parallel ist zu $\overline{ac}$. Wir überzeugen uns zunächst, diese Gerade schneidet sich mit der Geraden $\overline{a'b'}$ in genau einem Punkt, sagen wir s:

<u>1. Vorbemerkung</u>: $g \cap \overline{a'b'} = \{s\}$.

Die Geraden $\overline{a'b'}$ und $\overline{ac}$ haben einen Punkt gemeinsam (nämlich b') und sind verschieden (andernfalls wäre $a' \in \overline{ac} \cap \overline{bc} = \{c\}$). Sie sind also nicht parallel. Dann

sind aber auch $\overline{a'b'}$ und g nicht parallel, scheiden sich also in genau einem Punkt. Diesen Punkt beszeichnen wir mit s.
2. Vorbemerkung: $s \neq b$

Andernfalls wäre b auf der Geraden $\overline{a'b'}$, also $b \in \overline{a'b'} \cap \overline{bc} = \{a'\}$.



3. Vorbemerkung. $\overrightarrow{sb} = \alpha\cdot\overrightarrow{b'c} = \alpha\beta\cdot\overrightarrow{b'a}$.
Die erste Identität folgt aus dem Strahlensatz, die zweite aus der Definiton von β.

Nehmen wir jetzt an, a’, b’ und c’ liegen auf einer Geraden. Dann gilt (ebenfalls nach dem Strahlensatz)

$$\overrightarrow{b'a} = \gamma\cdot.\overrightarrow{sb}$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\overrightarrow{sb} = \alpha\beta\gamma\cdot\overrightarrow{sb}.$$

Da nach der zweiten Vorbemerkung $b \neq s$ ist, gilt $\overrightarrow{sb} \neq 0$, d.h. es ist $\alpha\beta\gamma = 1$.

Sei umgekehrt $\alpha\beta\gamma = 1$. Wegen $\gamma \neq 1$ ist $\alpha\beta \neq 1$. Deshalb sind die Geraden

$$\overline{a'b'} \text{ und } \overline{ab}$$

nicht parallel, schneiden sich also in genau einem Punkt, sagen wir

$$\overline{a'b'} \cap \overline{ab} = \{t\}$$

Aus der eben bewiesenen Implikation ergibt sich

$$\alpha\beta\cdot(t, a):(t, b) = 1,$$

also

$$\delta := (t, a):(t, b) = \frac{1}{\alpha\beta} = \gamma = (c', a) : (c', b).$$

Damit ist aber c’ = 1 (vgl. die Übungsaufgaben). Insbesondere liegt c’ auf der von a’ und b’ aufgespannten Geraden.
QED.

1.5.8 Satz von Ceva (um 1600)
Seien

$$a, b, c \in \mathbb{A}$$

drei affin unabhängige Punkte eines affinen Raumes $\mathbb{A} = (A, V)$ und

$$a', b', c' \in \mathbb{A}$$

Punkte auf der a bzw. b bzw. c gegenüberliegenden Seite

$$a' \in \overline{bc}, b' \in \overline{ac}, c' \in \overline{ab},$$

die auf keiner der Ecken des Dreiecks liegen:

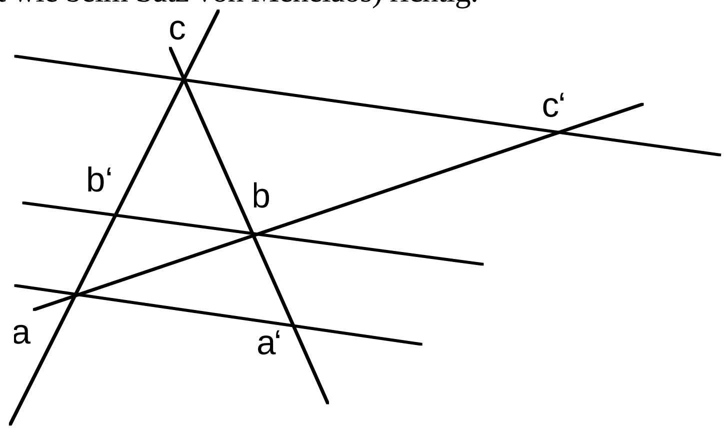
$$\{a, b, c\} \cap \{a', b', c'\} = \emptyset.$$

Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

(i) Die Geraden $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$ schneiden sich in einem Punkt oder sind parallel.

(ii) $\frac{(a',b)}{(a';c)} \cdot \frac{(b';c)}{(b';a)} \cdot \frac{(c',a)}{(c',b)} = -1.$

Beweis. Wie im Beweis des Satzes 1.5.7 von Menelaos können wir annehmen, $\mathbb{A}$ ist die von a, b und c aufgespannte Ebene. Wir verwenden die Bezeichnungen des Beweises von 1.5.7. Die Aussagen der drei Vorbemerkungen bleiben in der vorliegenden Situation (die dieselbe ist wie beim Satz von Menelaos) richtig.



Nehmen wir an, die Geraden $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$ sind parallel. Nach dem Strahlensatz gilt

$$\rho := (a, c') : (a, b) \quad = (a, c) : (a, b')$$

und

$$\tau := (c, b') : (c, a) \quad = (c, b) : (c, a').$$

Es folgt

$$(\rho - 1)\gamma\cdot\overrightarrow{c'b} = (\rho - 1)\cdot \overrightarrow{c'a} = \rho\cdot(\overrightarrow{c'a} - \overrightarrow{ba}) = \rho\cdot\overrightarrow{c'b}$$

$$(1 - \beta)\cdot \overrightarrow{b'a} = \overrightarrow{b'a} - \overrightarrow{b'c} \quad = \overrightarrow{ca} = \rho\cdot\overrightarrow{b'a}$$

also

$$(\rho - 1)\gamma = \rho = 1 - \beta,$$

also

$$\beta\gamma = (1-\rho)\gamma = - \rho = 1- \beta.$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich

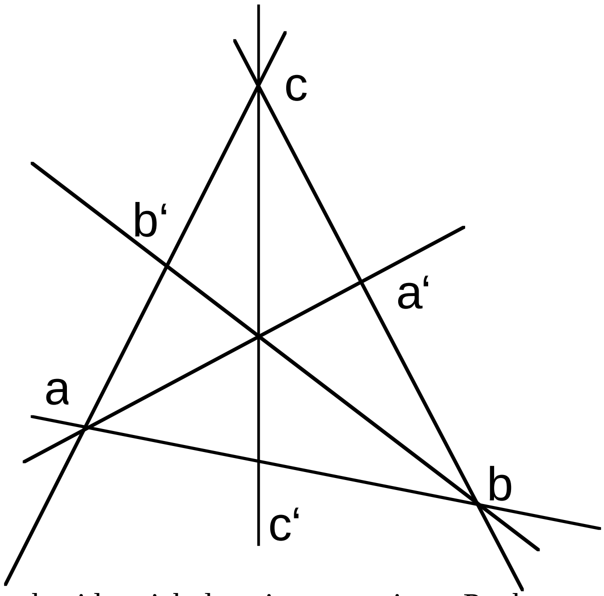
$$\alpha\beta = 1 - \alpha$$

Zusammen folgt

$$\alpha\beta\gamma = \alpha(1-\beta) = \alpha - \alpha\beta = \alpha - 1 + \alpha = -1.$$

Behandeln wir jetzt den Fall, daß die Geraden $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$ nicht parallel sind. O.B.d.A. können wir annehmen,

$\overline{aa'}$ und $\overline{cc'}$ sind nicht parallel.



Die beiden Geraden schneiden sich dann in genau einem Punkt, sagen wir in s,

$$\overline{aa'} \cap \overline{cc'} = \{s\}.$$

Weil a’,s und a’ auf einer Geraden liegen, gilt nach dem Satz von Menelaos (angewandt auf das Dreieck {c’,b, c}:

$$(a',b):(a',c) \cdot (s,c):(s,c') \cdot (a,c'):(a,b) = 1$$

(der erste Faktor links ist α). Wir setzen

$$\mu := (b, a) : (b, c')$$
$$\nu := (a, c') : (a, b)$$

Dann gilt

(1) $\alpha \cdot (s,c):(s,c') \cdot \nu = 1$

und

$$\begin{aligned}
\mu\nu\cdot\overrightarrow{bc'} &= \nu\cdot\overrightarrow{ba} && \text{(nach Definition von } \mu\text{)}\\
&= \overrightarrow{c'a} && \text{(nach Definition von } \nu\text{)}\\
&= \gamma\cdot\overrightarrow{c'b} && \text{(nach Definition von } \gamma \text{ im Beweis von 1.5.7)}\\
&= -\gamma\cdot\overrightarrow{bc'}
\end{aligned}$$

also

(2) $\gamma = -\mu\nu.$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{(s,c')}{(s,c)}\cdot\beta\cdot\frac{(b,a)}{(b;c')} - 1 &= \frac{(s,c')}{(s,c)}\cdot\beta\cdot\mu - 1 && \text{(nach Definition von } \mu\text{)}\\
&= \frac{\beta\mu}{(s,c):(s,c')} - 1\\
&= \frac{\alpha\beta\nu\mu}{\alpha(s,c):(s,c')\cdot\nu} - 1 && \text{(Erweitern mit } \alpha\nu\text{)}\\
&= -\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\cdot(s,c):(s,c')\cdot\nu} - 1 && \text{(wegen (2))}\\
&= -(\alpha\beta\gamma + 1) && \text{(wegen (1))}
\end{aligned}$$

Die Bedingung

$$\alpha\beta\gamma = -1$$

ist deshalb äquivalent zu

$$\frac{(s,c')}{(s,c)}\cdot\beta\cdot\frac{(b,a)}{(b;c')} - 1$$

d.h. zu

$$\frac{(s,c')}{(s,c)} \cdot \frac{(b',c)}{(b',a)} \frac{(b,a)}{(b;c')} - 1$$

Nach dem Satz von Menelaos, angewandt auf das Dreieck {a, c', c} ist dies wiederum äquivalent dazu, daß

$$s, b' \text{ und } b$$

auf einer Geraden liegen, d.h. zu

$$s \in \overline{bb'}.$$

Da s nach Definition der Schnittpunkt von $\overline{aa'}$ und $\overline{cc'}$ ist, bedeutet dies gerade,

$$\overline{aa'}, \overline{bb'} \text{ und } \overline{cc'} \text{ liegen auf einer Geraden.}$$

QED.

1.5.9 Satz von Desargues (1591-1661, Ingenieur in Paris)

Liegen die Schnittpunkte einander entsprechender Seiten zweier Dreiecke auf einer Geraden, so gehen die Verbindungsgeraden einander entsprechender Ecken durch einen Punkt (und umgekehrt).
Genauer: seien {a, b, c} und {a', b', c'} nicht ausgeartete Dreiecke eines K-affinen Raums $\mathbb{A}$.

Wir nehmen an, einander entsprechende Ecken sind verschieden,

$$a \ne a', b \ne b, c \ne c$$

und einander entsprechende Seiten schneiden sich in einem Punkt, sagen wir

(1) $$\overline{ab} \cap \overline{a'b'} = \{x\},\ \overline{bc} \cap \overline{b'c'} = \{y\},\ \overline{ca} \cap \overline{c'a'} = \{z\}.$$

Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(i) x , y und z liegen auf einer Geraden.

(ii) $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ und $\overline{cd'}$ gehen durch einen Punkt.

Bemerkungen

(i) Die hier angegebene Variante des Satzes von Desargues ist nur eine von vielen verschiedenen Varianten. Eine andere Variante und deren Beweis finden Sie in der Vorlesung von Stückrad zur Analytischen Geometrie.

(ii) Wir verzichten hier auf die Formulierung der verschiedenen Varianten und geben auch keinen Beweis an. Die unterschiedlichen Formulierungen wären ziemlich undurchsichtig. Es wäre zum gegenwärtigen Zeitpunkt unklar, was die verschiedenen Varianten miteinander zu tun haben, und die Beweise wären ziemlich aufwändig (vgl. und Beweis in der Vorlesung von Stückrad).

(iii) Der Grund für diese vielen verschiedenen Formulierungen und den Aufwand bei den Beweisen besteht darin, daß der Satz von Desartues im Grund kein Satz des affinen Raumes ist, sondern ein Satz des sogenannten projektiven Raum.

(iv) Wir nehmen deshalb diesen Satz zum Anlaß, den Begriff des projektiven Raums einzuführen. Danach werden wir den Satz von Desargues im projektiven Raum formulieren (es gibt dort nur eine Variante) und einen (einfachen) Beweis angeben. Der obige Satz und alle seine Varianten ergeben sich aus diesem Satz als Spezialfälle.

(v) Beginnend mit dem nächsten Kapitel werden wir stärker als bisher vom Inhalt der Vorlesung von Stückrad abweichen. Wir orientieren uns von jetzt am Buch von O.H. Keller: Analytische Geometrie und lineare Algebra.

2. Projektive Räume

2.0 Vorbemerkung

(i) Die projektiven Räume sind Räume, die den linearen und affinen Räumen sehr nahe stehen. Man verzichtet auf ein bißchen Linearität und bekommt dafür eine andere vorteilhafte Eigenschaft: die projektiven Räume sind (in den üblichen Topologien, die wir hier nicht weiter betrachten) kompakt.

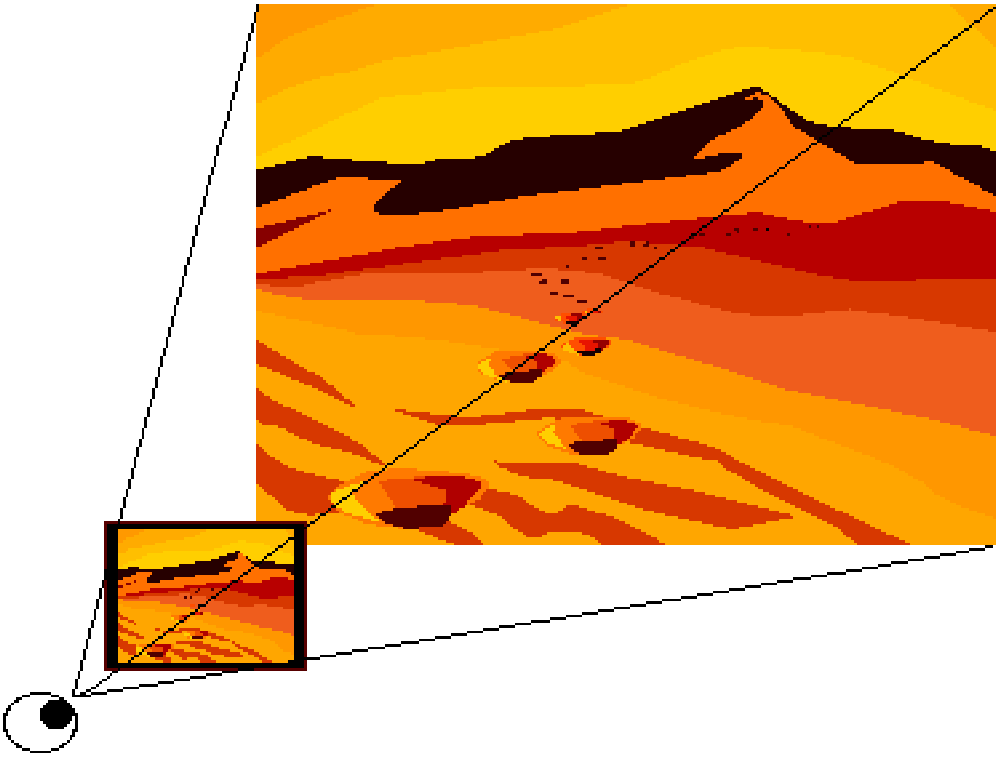
(ii) Eine der Indentionen der Theorie besteht darin, die Vielzahl von Ausnahmefällen in den Sätzen der affinen Geometrie zu reduzieren (und dadurch die Beweise zu vereinfachen), Zum Beispiel gilt statt des affinen Satzes

Je zwei verschiedene Geraden der Ebene schneiden sich in genau einem Punkt, es sei denn, sie sind parallel.

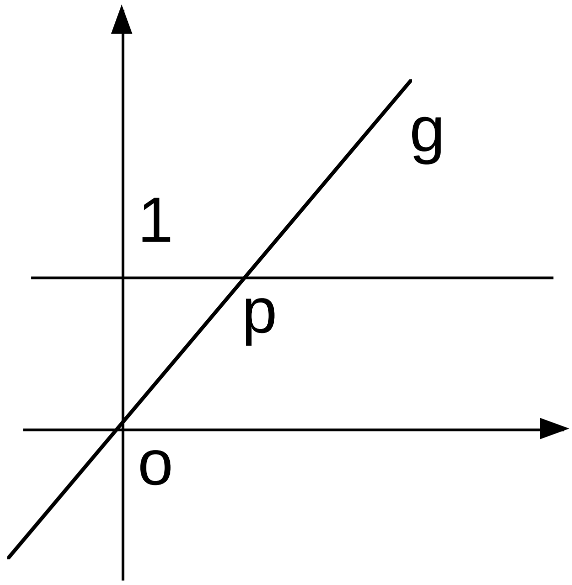
in der projektiven Geometrie die Aussage:

Je zwei verschiedene Geraden der Ebene schneiden sich in genau einem Punkt.

(wenn sie parallel sind, so schneiden sie sich im Unendlichen). Wie die affinen Räumen besitzen die projektiven Räume keinen ausgezeichneten Punkt. Man kann sie sich vorstellen als entstanden aus den affinen Räumen durch Hinzufügen unendlich ferner Punkte.



(iii) Ihren Ursprung haben die projektiven Räume in der Malerei. Sie stehen für die Idee der perspektivischen Malerei, daß das Wesentliche bei der Abbildung der Wirklichkeit auf einer Leinwand nicht die Punkte auf der Leinwand sonder der Projektionsstrahl ist, der das wirkliche Objekt mit dem Auge des Malers verbindet.



Man beachte, in der Ebene gehört zu jedem Punkt p der waagerechten Gerade durch (0,1) Gerade durch diesen Punkt und den Ursprung. Umgekehrt gehört mit einer Ausnahme zu jeder Geraden durch (0,0) ein Punkt auf der waagerechten Geraden. Diese Ausnahme ist die x-Achse. Die Menge der Geraden durch (0, 1) kann man also als Gerade ansehen, die um einen (unendlich fernen) Punkt ergänzt wurde.

2.1 Die Definition des $\mathbb{P}_K^n$

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Dann bezeichne

$$\mathbb{P}(V) := \{Kv \mid v \in V - \{0\}\}.$$

die Menge aller 1-dimensionalen Unterräume von V, d.h. die Menge aller Geraden in V durch den Ursprung. Speziell für $V = K^{n+1}$ setzen wir

$$\mathbb{P}_K^n := \mathbb{P}(K^{n+1}).$$

Diese Menge heißt n-dimensionaler projektiver Raum über K, im Fall n = 1 auch projektive Gerade über K und im Fall n = 2 projektive Ebene.
Wir schreiben

$$[x_0,\dots,x_n] := K\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

für die Gerade durch den Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ und den Ursprung. Es gilt dann

$$\mathbb{P}_K^n = \{[x_0,\dots,x_n] \mid \begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n+1} - \{0\}\}$$

und

$$[x_0,\dots,x_n] = [y_0,\dots,y_n] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} y_0 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ für ein } \lambda\in K$$

$\Leftrightarrow x_i = \lambda \cdot y_i$ für ein $\lambda \in K$ und alle i.

Die x_i heißen <u>projektive Koordinaten</u> des Punktes $[x_0,...,x_n]$ von $\mathbb{P}^n_K$.

Bemerkungen

(i) Die projektiven Koordinaten sind im Gegensatz zu gewöhnlichen Koordinaten nur bis auf einen gemeinsamen von Null verschiedenen Faktor aus K bestimmt.

(ii) Der gewöhniche Raum verhält sich zum projektiven Raum wie die Leinwand eines Malers zu der die Leinwand umgebenden Wirklichkeit. So wie man die Leinwand in der Wirklichkeit verschieden positionieren kann, so läßt sich der gewöhliche Raum auf verschiedene Weise in den projektiven Raum einbetten.

(iii) Seien $\mathbb{A} = (A, V)$ ein K-affiner Raum. Für jede Gerade $g \subseteq A$ bezeichne

$$[g]$$

die Menge der zu g parallelen Geraden. Solche Menge heißt Richtung von $\mathbb{A}$. Man sagt dann auch, g ist eine Gerade der Richtung g. Die Menge aller Richtungen von $\mathbb{A}$ wird auch mit

$$\mathbb{P}(\mathbb{A})$$

bezeichnet. Für jeden Punkt $0 \in A$ ist die Abbildung

$$\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(\mathbb{A}),\ g \to [o + g],$$

welche den 1-dimensionalen K-linearen Unterraum

$$g = K\cdot v$$

auf die Richtung $[o + g]$ der Geraden $o + g$ durch o und $o + v$ abbildet, bijektiv und unabhängig von der speziellen Wahl von o. Mit anderen Worten, die Menge $\mathbb{P}(\mathbb{A})$ läßt sich in natürlicher Weise mit dem projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$ identifizieren.

2.2 Einbettungen des K^n in den $\mathbb{P}^n_K$

Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $W \subseteq V$ ein K-linearer Unterraum mit

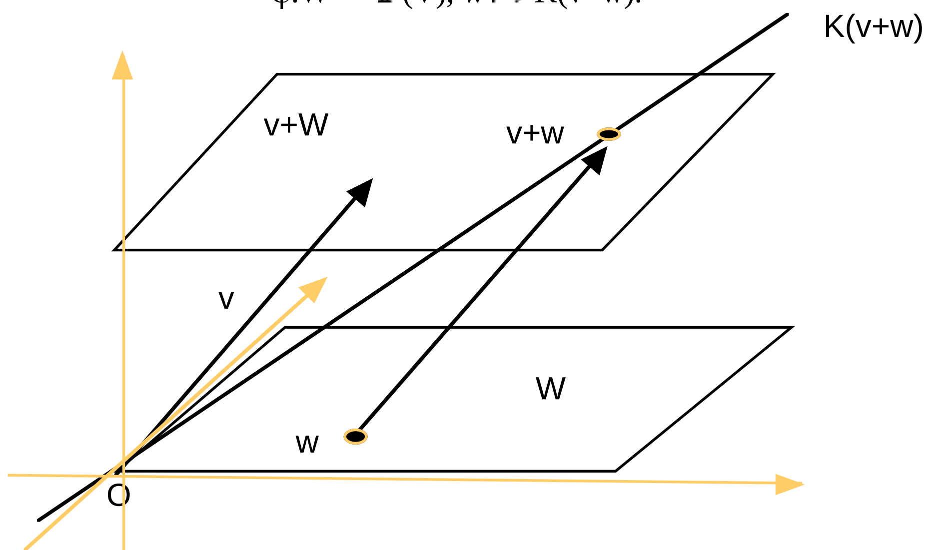
$$\dim W = \dim V - 1$$

und

$$v \in V - W$$

verschiedener Vektor. Dann ist die folgende Abbildung injektiv.

$$\varphi: W \to \mathbb{P}(V),\ w \mapsto K(v+w).$$



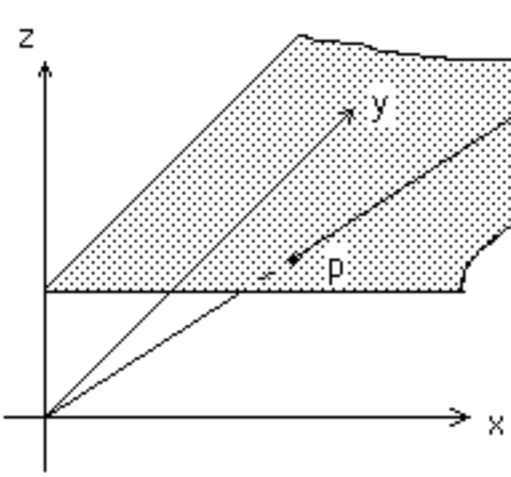
Mit anderen Worten, W läßt sich mit einer Teilmenge von $\mathbb{P}(V)$ identifizieren. Diese Teilmenge ist unabhängig von der speziellen Wahl des Vektors v.

Beweis. <u>Injektivität von</u> φ. Aus $\varphi(w) = \varphi(w')$ folgt

$$´K(v+w) = K(v+w'),$$
d.h.
$$v+w = \lambda(v+w')$$
d.h.
$$(1-\lambda)v = \lambda w' - w.$$
Der Vektor rechts liegt in W, d.h. das Bild von $(1-\lambda)v$ bei der natürlichen Abbildung $V \to V/W$ ist Null. Da dies nicht für das Bild von v gilt, folgt $1- \lambda = 0$, d.h.
$$\lambda = 1$$
also $w' = w$.

Unabhängigkeit von $\mathrm{im}(\varphi)$ von der speziellen Wahl von v.
Es reicht zeigen, für $x\in V-\{0\}$ gilt
$$Kx \in \mathrm{im}(\varphi) \Leftrightarrow x\notin W.$$
Man beachte, wegen $v\in V-W$ gilt $\dim Kv+ W > \dim W = \dim V- 1$, also
$$V = Kv + W.$$
Beweis von '$\Leftarrow$'.
Wegen $x\notin W$ kann man x in der Gestalt
$$x = \lambda v + w \text{ mit } \lambda\in K-\{0\} \text{ und } w\in W$$
schreiben. Deshalb gilt
$$Kx = K(\lambda v +w) = K(v + \frac{1}{\lambda} w) = \varphi(\frac{1}{\lambda} w),$$
d.h. Kx liegt im Bild von φ.
Beweis. von '$\Rightarrow$'.
Sei $Kx = \varphi(w)$ für ein $w\in W$. Wäre $x\in W$, so wäre $\varphi(w) = Kx\subseteq W$, d.h
$$K(v+w) \subseteq W,$$
d.h.
$$v+w \in W,$$
d.h.
$$v\in W$$
im Widerspruch zur Wahl von v.
QED.
Bemerkung
Aus dem zweiten Teil des Beweises ergibt sich
$$\mathrm{im}\,(\varphi) = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(W).$$

2.3 Beispiel: die Ferngerade
Seien
$$V := \mathbb{R}^3$$
$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$W = \mathbb{R}^2 \subseteq \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$$



Die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto [x,y,1],$$

identifiziert der reelle Ebenen mit den Geraden durch den Ursprung, die nicht in der xy-Ebene liegen. Letztere bilden gerade einen 1-dimensionalen projektiven Raum (ein projektive Gerade). Wandert ein Punkt p im $\mathbb{R}^2$ ins Unendliche, so nähert sich $\varphi(p)$ immer stärker einer Geraden der xy-Ebene an. Die Gerade der xy-Ebenen kann man sich deshalb als unendlich ferne Punkte des $\mathbb{R}^2$ vorstellen, als Punkte am Horizont. Die Menge dieser Punkte heißt Ferngerade

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) - \varphi(\mathbb{R}^2)$$

heißt Ferngerade.

Bemerkung

Der Begriff der Ferngeraden hangt von der Wahl der Einbettung φ ab.

2.4 Beispiel: die Fernhyperebene

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $W \subseteq V$ ein K-linearer Unterraum der Dimension

$$\dim W = \dim V - 1$$

und

$$v \in V - W.$$

Dann kann das Komplement des Bildes der natürlichen Einbettung

$$\varphi: W \to \mathbb{P}(V),\ w \mapsto K(v+w),$$

mit dem projetiven Raum $\mathbb{P}(W)$ (der Dimension n-1) identifizieren. Es heißt Fernhyperebene von W in P(V).

2.5 Die Überdeckung des $\mathbb{P}^n_K$ durch eindlich viele Exemplare des K^n

Wir setzen

$$U_i := \{[x_0,...,x_n] \in \mathbb{P}^n_K \mid x_i \neq 0\}.$$

Für jeden Punkt $[x_0,...,x_n] \in \mathbb{P}^n_K$ ist nach Definition mindestens eine Koordinate von Null verschieden. Deshalb gilt

$$\mathbb{P}^n_K = U_0 \cup U_1 \cup ... \cup U_n$$

Jedes U_i können wir damit mit dem K^n identifizieren vermittels der bijektiven Abbildungen

$$\varphi_i: K^n \to U_i\,,\ (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1},\dots,x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1},\dots,x_n).$$

Mit anderen Worten, $\mathbb{P}^n_K$ kann man als Vereinigung von n+1 Exemplaren des K^n ansehen.

Bijektivität der Abbildung φ_i: die Abbildung ist injektiv, denn sie ist gerade von der in 7.2 beschriebenen Art: identifiziert man K^n mit dem durch

$$x_i = 1$$

definierten verschobenen Unterraum im K^{n+1}, so ordnete φ_i gerade jedem Punkt p von K^n die Verbindungsgerade von p mit dem Ursprung des K^{n+1} zu.

Surjektivität der Abbildung φ_i: Jeder Punkt $[x_0,\dots,x_n]$ von U_i hat die Eigenschaft, daß die i-te Koordinate x_i von Null verschieden ist. Der Punkt ändert sich nicht, wenn wir alle Koordinaten mit x_i^{-1} multiplizieren. Wir können also annehmen, $x_i = 1$. Dann liegt der Punkt aber im Bild von φ_i.

2.6 Hyperflächen im $\mathbb{P}^n_K$

Wir betrachten K^n als Unterraum von $\mathbb{P}^n_K$, indem wir K^n mit U_i identifizieren,

$$K^n = U_i \subseteq \mathbb{P}^n_K .$$

Der Einfachheit halber werden wir annehmen,

$$i = 0.$$

Sei H die Hyperfläche im K^n mit der Gleichung

$$H: f(x_1,\dots,x_n) = 0.$$

Dabei sei f ein Polynom des Grades m,

$$f \in K[x_1,\dots,x_n]\,,\ \deg f = m.$$

Wir fragen nach der einer Beschreibung von H als eine Teilmenge des $\mathbb{P}^n_K$. Der Punkt

$$p = [x_0, x_1,\dots,x_n] \in \mathbb{P}^n_K$$

liegt genau dann auf der Hyperfläche H , die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

1. $[x_0, x_1,\dots,x_n] \in U_0$, d.h. $x_0 \ne 0$, d.h. $p = (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) \in K^n$.

2. $0 = f(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$.

Die zweite Bedingung kann man auch in der folgenden Gestalt schreiben (wegen $x_0 \ne 0$):

$$0 = x_0^m\, f(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}).$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite kann man dabei als homogenes Polynom des Grades m in den n+1 Unbestimmten $x_0,\dots,x_n$ auffassen. Genauer, mit

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n\le m} c_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}$$

gilt

$$F(x_0,\dots,x_n) := x_0^m f(\frac{x_1}{x_0}, \dots , \frac{x_n}{x_0}) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n\le m} c_{i_1\dots i_n} x_0^{m-i_1-\dots-i_n} x_1^{i_1}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}$$

Dies ist tatsächlich ein homogenes Polynom des Grades m in $x_0 ,\dots,x_n$. Man nennt F Homogenisierung von f. Die Homogenisierung F von f hat im Endlichen d.h. in U_0 dieselben Nullstellen wie f. Es können jedoch weitere Nullstellen hinzukommen, die sämtlich auf der Fernhyperebene $\mathbb{P}^n_K - U_0$ liegen. Die Menge

$$\overline{H} := \{[x_0,\dots,x_n] \mid F(x_0,\dots,x_n) = 0\}$$

heißt projektive Abschließung von H im $\mathbb{P}^n_K$.

Ein Hyperfläche im $\mathbb{P}^n_K$ ist definiert als die Menge der Nullstellen eines homogenen Polynoms.

Bemerkung

Ist $f = f(x_0,\dots,x_n)$ ein inhomogenes Polynom, so ist der Begriff der Nullstelle von f im Raum $\mathbb{P}^n_K$ nicht wohldefiniert. Ist $p = [x_0,\dots,x_n]$ ein Punkt, so sind dessen Koordinaten nur bis auf ein gemeinsames Vielfaches festgelegt. Setzt die Koordinaten von p in f ein, so kann es passieren, daß man als Wert manchmal Null und manchmal einen von Null verschiedenen Wert erhält, je nachdem wie man die Koordinaten von p wählt.

Ist dagegen f homogen vom Grad m, so gilt

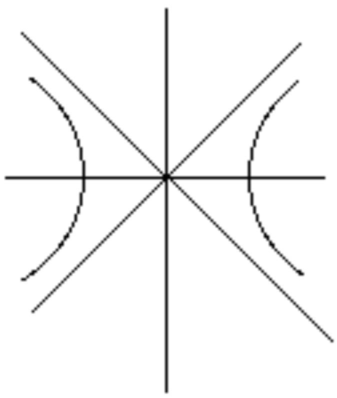
$$f(cx_0,\dots,cx_n) = c^m f(x_0,\dots,x_n).$$

Erhält man also für irgend eine Wahl der Koordinaten von p den Wert Null, so trifft dies auch für jede andere Wahl der Koordinaten zu. Der Begriff der Nullstelle im $\mathbb{P}^n_K$ besitzt also für homogenen Polynome eine koordinaten-unabhängige Bedeutung. Für inhomogene Polynome dagegen nicht.

2.7 Beispiel: die projektive Abschließung einer Hyperbel

Sei H die ebene Hyperbel

$$H: x^2 - y^2 = 1 \text{ (im } K^2)$$



Die projektive Abschließund im $\mathbb{P}^2_K$ ist die Kurve mit der Gleichung

$$\overline{H}: x^2 - y^2 = t^2 .$$

Deren Punkte im Unendlichem sind gerade die Punkt [x,y,t] mit t = 0, die dieser Gleichung genügen:

$$0 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),$$

d.h. es gilt x = y oder x = -y, d.h. die Punkte von $\overline{H}$ im Unendlichen sind gerade die Punkte der Gestalt

$$[t, x, y] = [0, x, \pm x] = [0, 1, \pm 1].$$

Es gilt also

$$\overline{H} = H \cup \{ [0, 1, 1] , [0, 1, -1] \}.$$

Auf $\overline{H}$ liegen also zwei zusätzliche Punkte. Diese entsprechen gerade den beiden Asymptoden an die Hyperbel.

2.8 Beispiel: die projektive Abschließung einer Kurve dritten Grades

Sei E die ebene Kurven dritten Grades mit der Gleichung

$$E = E_\lambda: y^2 = x(x-1)(x-\lambda).$$

Die projektive Abschließung im $\mathbb{P}^2$ ist die Kurve mit der Gleichung

$$\overline{E}: y^2t = x(x-t)(x-\lambda t).$$

Für ihre Punkte im Unendlichen gilt t = 0, also x = 0. Mit anderen Worten, der einzige Punkt im Unendlichen ist der Punkt

$$[t, x, y] = [0, 0, y] = [0, 0, 1],$$

d.h.

$$\overline{E} = E \cup \{[0, 0, 1],\}.$$

Bemerkungen (zum großen Fermatschen Problem)

(i) Sind p und q zwei Punkte der Kurve, so schneidet die Verbindungsgerade die Kurve in einem dritten Punkt, sagen wir [t, x, y]. Der Punkt

$$r := [0. 0, -y]$$

liegt dann auch auf der Kurve.

(ii) Man kann zeigen, mit der Zuordnung

$$(p, q) \mapsto r$$

ist die Kurve eine abelsche Gruppe. Der Punkt im Unendliche spielt dabei die Rolle des neutralen Elements. Ohne diesen zusätzlichen Punkt gäbe es diese Gruppenstruktur nicht. Man schreibt

$$r = p + q.$$

(iii) Man kann zeigen, liegt λ in einem Körper K, so kann man die Koordinaten von r durch Polynome in den Koordinaten von p und q beschreiben, deren Koeffizienten in K liegen.

(iv) Kurven im $\mathbb{P}^n_K$ die eine durch Polynome beschreibbare Gruppenstrukur besitzen heißen elliptische Kurven. Man kann zeigen, alle elliptischen Kurven haben bis auf Isomorphie die Gestalt $E = E_\lambda$ (außer in der Charakteristik 2 bzw. 3, dort sind Gleichungen etwas komplizierter).

(v) Ist $\lambda \in \mathbb{Q}$, und ist p ein Punkt von E_λ mit rationalen Koordinaten, so gilt das auch für die Punkte

$$2p = p + p, 3p = p + p + p, ...$$

Das Gruppengesetz elliptischer Kurven bietet also eine Möglichkeit aus einer Lösung der zugehörigen diophantischen Gleichung weitere Lösungen zu konstruieren. Bei geeigneter Wahl von p bekommt man auf diese Weise sogar unendlich viele Lösungen.

(iv) Elliptische Kurven sind daher Beispiele für Kurven, für welche die zum Fermatschen Problem analoge Aussage falsch ist: es gibt unenlich viele rationale Lösungen. Die Theorie der elliptischen Kurven spielt deshalb bei der Lösung des Fermatschen Problems eine zentrale Rolle. Tatsächlich wird gezeigt, daß die elliptischen Kurven die einzigen Ausnahme Kurven sind: alle anderen Kurven haben nur endlich viele Punkte mit rationalen Koordinaten.

2.9 Verhalten von Kegelschnitten bei einer Veränderung der Ferngeraden

Wir wollen jetzt an einem Beispiel illustrieren, wie sich die Gleichung eines Kegelschnitts ändert, wenn man die relative Lage der Ferngeraden zum Kegelschnitt verändert. Betrachtenwir die Mittelpunksgleichung der Ellipse

$$C: f(x,y) := \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0, \; a, b > 0$$

in der affinen Ebenen $\mathbb{R}^2$, die wir mit

$$\mathbb{R}^2 = U_0 \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto [1,x,y],$$

identifizieren. Die projektive Abschließung von C ist gegeben durch

$$\overline{C} : F(x,y,t) := \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - t^2 = 0.$$

Die Punkte von $\overline{C}$ im Unendlichen genügen den Bedingungen

$t = 0$ und $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 0$,

also $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$. Mit anderen Worten, es gibt keine Punkte im Unendlichen:

<u>Die "Ellipse"</u> $\overline{C}$ <u>hat keine Punkte gemeinsam mit der Ferngeraden</u>.

Wir wollen jetzt die Ferngerade so abändern, daß sie die Kurve $\overline{C}$ schneidet. Machen wir deshalb die projektive Abschließung der y-Achse zur Ferngeraden, d.h. wir identifizieren die affine Ebene $\mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbb{R}^2 = U_2 \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \mapsto [t,x,1],$$

d.h. die Punkte $[t,x,y]$ mit $y=0$ sind die Punkte im Unendlichen. Der Teil der Kurve $\overline{C}$, welcher im Endlichen liegt, ist gegeben durch

$$\overline{C} \cap U_2 : 0 = F(t,x,1) = \frac{x^2}{a} + \frac{1}{b} - t^2,$$

d.h. durch

$$\overline{C} \cap U_2 : \frac{t^2}{1/b} - \frac{x^2}{a/b} - 1 = 0.$$

Dies ist die Mitttelpunktsgleichung einer Hyperbel. Relativ zur affinen Ebeben U_2 sind die Fernpunkte diejenigen Punkte von $\overline{C}$ mit $y = 0$ und $0 = \frac{x^2}{a} - t^2 = (\frac{x}{\sqrt{a}} + t)(\frac{x}{\sqrt{a}} - t)$, d.h. mit

$$[t,x,y] = [t, \pm \sqrt{a}\, t, 0] = [1, \pm \sqrt{a}, 0].$$

<u>Die "Hyperbel"</u> $\overline{C}$ <u>schneidet die Ferngerade in den Punkten</u> $[1,\sqrt{a},0]$ <u>und</u> $[1,-\sqrt{a}, 0]$.

Als nächstes bestimmen wir die affine Gleichung von $\overline{C}$ in einem Fall, daß die Ferngerade die Kurve berührt. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn die Ferngerade die projektive Abschließung der Geraden

$$y = \sqrt{b}$$

wird. Mit anderen Worten, wir suchen eine Einbettung des $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ bei welcher die Ferngerade durch die Gleichung

$$y - \sqrt{b}t = 0$$

gegeben ist, d.h. wir betten den Unterraum des $\mathbb{R}^3$ mit dieser Gleichung in den $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ ein, zum Beispiel durch

$$W := \{\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid\ y - \sqrt{b}t\ \} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\ ,\ \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto [t,x,y+1].$$

Man beachte, der Vektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt nicht in W. Wir müssen noch den Unterraum W in irgendeiner Weise mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Dazu wählen wir eine Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{b} \end{pmatrix}$$

von W (die in diesem Fall orthogonal ist , eine Bedinung die nicht unbedingt erfüllt sein muß) und benutzen diese, um W mit dem $\mathbb{R}^2$ zu identifizieren. Wir erhalten damit die Einbettung

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\ ,\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u \\ \sqrt{b}v \end{pmatrix} \mapsto [v,u,1+\sqrt{b}v].$$

Der Teil der Kurve $\bar{C}$, welcher im Endlichen liegt, ist gegeben durch

$$\bar{C} \cap W:\ 0 = F(v,u,1-av) = \frac{u^2}{a} + \frac{(1+\sqrt{b}v)^2}{b} - v^2\ ,$$

d.h. durch

$$\bar{C} \cap W:\ \frac{u^2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{\sqrt{b}}v\ = 0,$$

$$\bar{C} \cap W:\ \frac{u^2}{2a/\sqrt{b}} + \frac{1}{2\sqrt{b}} + v\ = 0,$$

$$\bar{C} \cap W:\ \frac{u^2}{2a/\sqrt{b}} + v'\ = 0.$$

mit $v' = v + \frac{1}{2\sqrt{b}}$. Dies ist die Gleichung einer Parabel. Die Punkte im Unendlichen sind gegeben durch

$$y - \sqrt{b}t = 0\ ,\ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - t^2 = 0,$$

d.h. durch

$$\text{d.h. } y = \sqrt{b}t \text{ und } \frac{x^2}{a}\ = 0.$$

Der einzige Punkt im Unendlichen ist somit der Punkt

$$[t,x,y] = [t, 0, \sqrt{b}t] = [1,0,\sqrt{b}].$$

<u>Die "Parabel"</u> $\bar{C}$ <u>berührt die Ferngerade im Punkt</u> $[1,0,\sqrt{b}]$.

Bemerkung

Das obige Beispiel illustiert ein allgemeines Phänomen: in der projektiven Ebene gibt es keinen Unterschied zwischen Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln Der Unterschied kommt durch die unterschiedliche Lage des Kegelschnitt bezüglich der Ferngerade zustande, und diese Lage kann beliebig sein.

2.10 Basen und projektive Koordinaten

Seien V ein K-Vektorraum, $v_0,...,v_n \in V$ eine Basis von V und

$$\varphi_v: K^{n+1} \to V, \begin{pmatrix} x_0 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_0 v_0 + ... + x_n v_n ,$$

die zugehörige Koordinaten-Abbildung (vgl. 3.4.2). Dies ist ein Isomorphismus, d.h. V wird dadurch mit K^{n+1} identifiziert und die Geraden von V mit denen von K^{n+1}. Insbesondere ist die Abbildung

$$[\varphi_v]: \mathbb{P}^n_K = \mathbb{P}(K^{n+1}) \to \mathbb{P}(V), [x_0,...,x_n] = K\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto K\cdot\varphi_v\begin{pmatrix} x_0 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = K\cdot(x_0 v_0 + ... + x_n v_n)$$

bijektiv. Deshalb heißen die $x_0,...,x_n$ auch projektive Koordinaten des Bildpunktes von $[x_0,...,x_n]$ bei $[\varphi_v]$ bezüglich der Basis $v_0,...,v_n$.

Bemerkung

Bezeichnet man mit

$$[v]$$

die Gerade

$$[v] := Kv$$

durch $v \in V$ und den Ursprung (für jedes $v \in V - \{0\}$), so sind die Koordinaten von v bezüglich der Basis $v_0,...,v_n$ gerade die projektiven Koordinaten von [v] bezüglich dieser Basis.

2.11 Der duale projektive Raum

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und

$$\check{\mathbb{P}}(V)$$

die Menge aller K-lineare Unterräume von V der Dimension n-1. Diese Menge heißt duale Projektivierung von V und

$$\check{\mathbb{P}}^n_K := \check{\mathbb{P}}(K^{n+1})$$

heißt dualer n-dimensionaler projektiver Raum über K.

Bemerkung

Analog kann man die Menge aller K-linearen Unterräume von V einer fest vorgegebenen Dimension betrachten. Dies führt zum Begriff der Graßmannschen Mannigfaltigkeit. Letztere gehören zu den am intensivsten erforschen geometrischen Objekten der Mathematik (im Zusammenhang mit dem Begriff der Chern-Klasse).

2.12 Vergleich mit dem projektiven Raum

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{P}(V^*) \to \check{\mathbb{P}}(V), [\ell: V \to K] \mapsto \ker(\ell),$$

wohldefiniert und bijektiv. Die duale Projektivierung kann also mit der Projektivierung des Duals identifiziert werden.

Beweis. Korrektheit der Definition. Für $[\ell] \in \mathbb{P}(V^*)$ gilt $\ell \neq 0$, d.h. dim im ℓ = 1, d.h.

$$\dim \ker \ell = \dim V - \dim \operatorname{im} \ell = \dim V - 1,$$

d.h.

$$\ker \ell \in \check{\mathbb{P}}^n_K.$$

Sei jetzt $[\ell] = [\ell']$. Wir haben zu zeigen

$$\ker \ell = \ker \ell'.$$

Wegen $[\ell] = [\ell']$ gibt es ein $c\in K-\{0\}$ mit $\ell = c\cdot\ell'$. Deshalb haben ℓ und ℓ' tatsächlich denselben Kern.

Surjektivität der Abbildung. Sei $W\in\check{\mathbb{P}}(V)$, d.h. W ist ein K-linearer Unterraum der Dimension dim V - 1. Dann ist
V/W
von der Dimension dim V - dim W = 1, d.h. es gibt einen Isomorphismus

$$V/W \xrightarrow{f} K.$$

Sei

$$\ell := f\circ\rho: V \xrightarrow{\rho} V/W \xrightarrow{f} K$$

die Zusammensetzung von f mit der natürlichen Abbildung. Dann gilt

$$\ker \ell = \ker \rho = W.$$

Injektivität der Abbildung. Seien $\ell: V \to K$ und $\ell': V \to K$ zwei von Null verschiedene K-linerer Abbildungen mit

$$W := \ker \ell = \ker \ell'.$$

Man beachte, es gilt

$$\dim W = \dim V - 1.$$

Wir vergleichen ℓ und ℓ' mit dem Kokern der natürlichen Einbettung
$W \to V$.
Dieser Kokern ist nach Definition gerade
coker$(W \to V) = V/W$ zusammen mit der natürlichen Abbildung $\rho: V \to V/W$
(vgl. 6.6.1). Wegen

$$\ell(W) = \ell'(W) = 0.$$

und der Universalitätseigenschaft dieses Kokerns gibt es eindeutig bestimmte K-lineare Abbildungen

$$\tilde{\ell}: V/W \to K \text{ und } \tilde{\ell}': V/W \to K$$

mit

$$\ell = \tilde{\ell}\circ\rho \text{ und } \ell' = \tilde{\ell}'\circ\rho.$$

Weil ℓ und ℓ' von Null verschieden sind, gilt dasselbe für $\tilde{\ell}$ und $\tilde{\ell}'$. Letztere Abbilungen sind Abbildungen zwischen 1-dimensionale K-Vektorraumen, also Isomorphismen, also gerade Multiplikationen mit einer von Null verschiedenen Zahl aus K. Insbesondere gilt

$$\tilde{\ell}' = c\cdot\tilde{\ell} \text{ für ein } c\in K-\{0\}.$$

Dann gilt aber auch $\ell' = c\cdot\ell$, also $[\ell'] = [\ell]$.

QED.

Bemerkungen

(i) Sei durch

$$H: c_0x_0+...+c_nx_n = 0$$

eine Hyperebene im K^{n+1} (durch den Ursprung) gegeben. Ihre Punkte bilden gerade den Kern der linearen Abbildung

$$K^{n+1} \to K, \begin{pmatrix} x_0 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto c_0x_0+...+c_nx_n.$$

Der obige Satz besagt gerade, die Angabe der Hyperebene ist äquivalent zur Angabe des Punktes

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^{n+1} - \{0\}$$

wobei es auf Vielfache mit einem von Null verschiedenen Faktor $c \in K$ nicht ankommt. Zwei solche Punkte liefern genau dann dieselbe Hyperebene, wenn sie proportional sind.

(ii) Wir verwenden jetzt die Bezeichnung $[c_0,...,c_n]$ auch für die Hyperebene mit der Gleichung

$$c_0x_0+...+c_nx_n = 0,$$

d.h. für den entsprechenden Punkt im $\check{\mathbb{P}}^n_K$. Wir identifizieren die Räume $\mathbb{P}^n_K$ und $\check{\mathbb{P}}^n_K$. Ob wir die Punke dieser Räume als Punkte oder Hyperflächen auffassen ist nur eine Frage der Interpretation. Als formale mathematische Objekte besteht zwischen ihnen kein Unterschied.

(iii) Die Identifikation des dualen projektiven Raumes $\check{\mathbb{P}}^n_K$ mit dem $\mathbb{P}^n_K$ macht die Begriffe “Gerade” und “Hyperebene” austauschbar. Gültige Sätze über Hyperebenen und Geraden im projektiven Raum bleiben gültig, wenn man diese Begriffe vertauscht.

(iv) Ein besondere Rolle spielt dabei der $\mathbb{P}^n_K$, da dort diese beiden Begriffe zusammenfallen.

2.13 Beispiel: Punkte auf einer Geraden in der projektiven Ebene

Seien drei Punkte

$$[x_0,x_1,x_2],\ [y_0,y_1,y_2],\ [z_0,z_1,z_2]$$

im $\mathbb{P}^2_K$ gegeben. Wir wollen der Frage nachgehen, wann diese Punkte auf einer Geraden liegen. Da wir die Ferngerade immer so legen können, daß sie diesen Punkten ausweicht (ist das auch richtig im Fall endlicher Körper ?), können wir annehmen, dies Punkte liegen im K^2, d.h.

$$x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0,\ z_0 \neq 0,$$

Die Gleichung einer Geraden im K^2 ist von der Gestalt

$$a + bx + cy = 0,$$

wobei b und c nicht beide Null sind. Die Punkte liegen genau dann auf dieser Geraden, wenn gilt

$$a + b\cdot\frac{x_1}{x_0} + c\cdot\frac{x_2}{x_0} = 0$$

und analog für y und z. Das ist äquivalent zu

(*) $$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$$

und analog für y und z. Der Fall $a = b = 0$ (aber $c \neq 0$) entspricht dabei der Situation, in welcher alle drei Punkte auf der Ferngeraden liegen.

Zusammenfassung

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Die Punkte $[x_0,x_1,x_2]$, $[y_0,y_1,y_2]$, $[z_0,z_1,z_2] \in \mathbb{P}^2_K$ liegen auf einer Geraden.

(ii) $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in K^3$ sind linear abhängig.

(iii) Die Geraden $[x_0,x_1,x_2]$, $[y_0,y_1,y_2]$, $[z_0,z_1,z_2] \in \check{\mathbb{P}}^2_K$ schneiden sich in einem Punkt.

Beweis. Man beachte, die Bedingung (*) bedeutet auch, daß eine Gerade durch einen Punkt geht: der Punkt mit den projektiven Koordinaten a, b, c liegt auf der Ebene im K^3, deren Gleichung die Koeffizienen x_0, x_1, x_2 hat. Eine Ebene im K^3 entspricht aber gerade einer Geraden im $\mathbb{P}^2_K$, d.h. die Punkte des $\check{\mathbb{P}}^2_K$ kann man mit den Geraden des $\check{\mathbb{P}}^2_K$ identifizieren.

QED.

Alternative Formulierung

(i) Sien [a] , [b] zwei verschiedene Punkte des $\mathbb{P}^2_K$, so ist die Menge der Punkte auf der Geraden durch [a] und [b] gleich

$$\{ [\lambda a + \mu b] \mid \lambda,\mu \in K , (\lambda,\mu) \neq (0,0) \}.$$

Eine Menge dieser Gestalt heißt <u>Punktreihe</u> und kann man mit dem $\mathbb{P}^1_K$ identifizieren.

(i) Sien [a] ,[b] $\in\check{\mathbb{P}}^2_K$ zwei verschiedene Geraden des $\mathbb{P}^2_K$, so ist die Menge der Geraden durch den Schnittpunkt von [a] und [b] gleich

$$\{ [\lambda a + \mu b] \mid \lambda,\mu \in K , (\lambda,\mu) \neq (0,0) \}.$$

Eine Menge dieser Gestalt heißt <u>Geradenbüschel</u> (und kann mit d e m $\mathbb{P}^1_K$ ´indentifiziert werden).

Diese Menge kann man mit dem $\mathbb{P}^1_K$ identifizieren.

Beweis. Sind [a] , [b] und [c] drei verschiedene Punkte (bzw. Geraden), so sind keine zwei der Vektoren

a,b,c

proportional, in einer nicht-trivialen linearen Relation zwischen diesen Vektoren sind also alle drei Koeffizienten ungleich Null, d.h. man die Relation nach jedem der drei Vektoren auflösen. Deshalb liegt [c] genau dann auf einer Geraden mit [a] und [b], wenn c Linearkombination von a und b ist.

QED.

Bemerkungen

(i) Die Grundlage der klassischen (ebenen) Geometrie ist die Indizenz-Relation, d.h. die Relation, welche bedeutet, daß Punkte auf einer Geraden liegen, bzw. Gerade sich in einem Punkt schneiden.

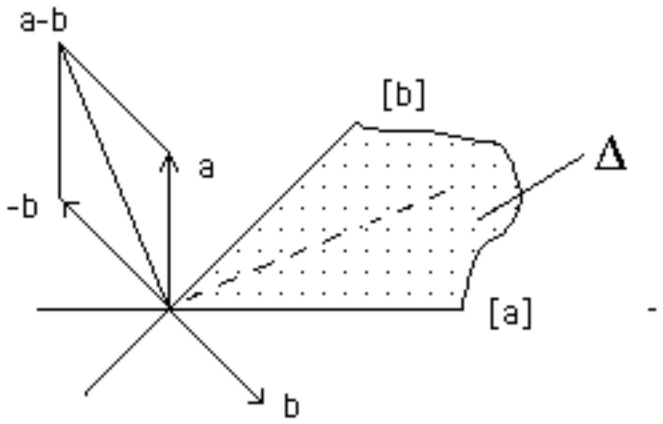
(ii) Die obige Beobachtung bedeutet, die Inzidenz-Relation läßt sich in die Sprache der linearen Algebra übersetzen. Sie hat zur Folge, daß sich Fragen der klassischen Geometrie in Fragen der linearen Algebra übersetzen und mit deren Mitteln lösen lassen. Diese Herangehensweise an die Fragen der klassischen Geometrie heißt <u>Analytische Geometrie</u>. Wir beschränken uns hier auf ein Beispiel für deren Methoden.

2.14 Die Winkel-Halbierenden im Dreieck

Die Winkel-Halbierenden im Dreieck schneiden sich in einem Punkt.
Beweis. Sei Δ das Dreick mit den Seiten

$$[a] = [a_0, a_1, a_2] , [b] = [b_0, b_1, b_2] , [c] = [c_0, c_1, c_2] \in \check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{R}},$$

(d.h. $a,b,c \in \mathbb{R}^3$).



Wir können annehmen, die Normalenvektoren der Seiten haben die Länge 1 und zeigen ins Innere des Dreiecks,

$$|a| = \sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2} = 1$$

und analog mit b und c. Dann sind

$$[a-b], [a-c], [b-c]$$

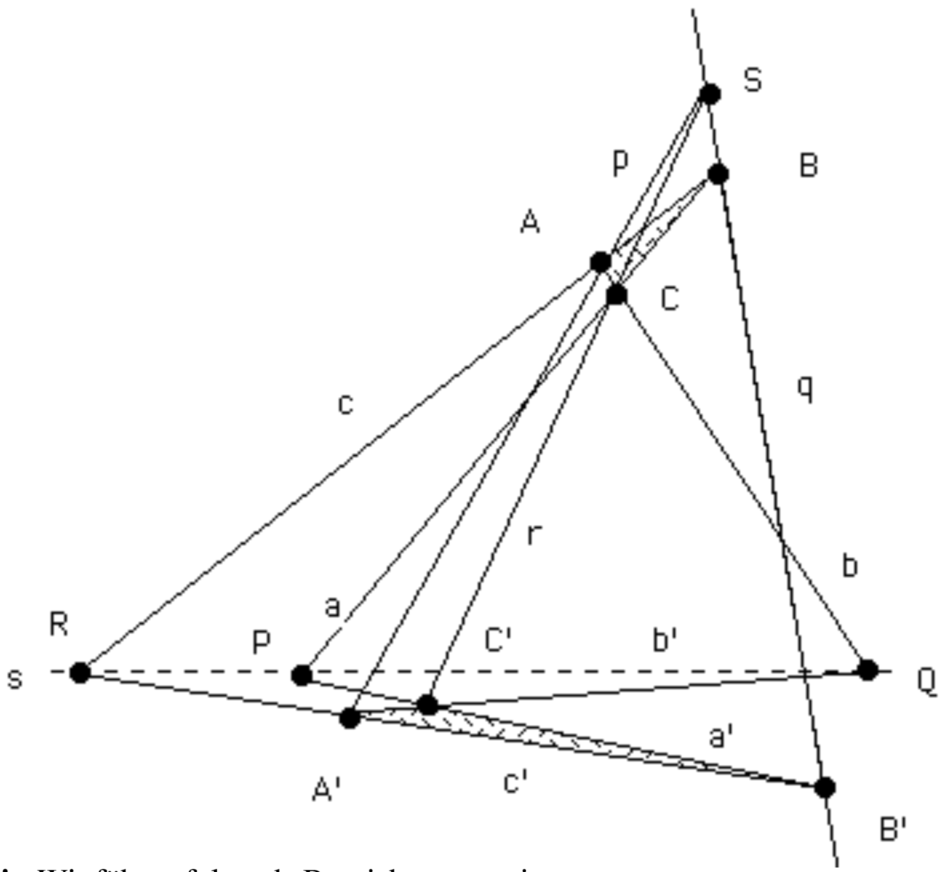
gerade die Winkel-Halbierenden dieses Dreiecks. Wegen

$$(a-b) - (a-c)+ (b-c) = 0$$

gehen diese durch einen Punkt.
QED.

2.14 Satz von Desargues

Seien zwei Dreiecke in der Ebene gegeben mit den Seiten a,b,c bzw. a’,b’, c’ und den Ecken A,B,C bzw. A’,B’,C’. Liegen die Schnittpunkte einander entsprechender Seiten auf einer Geraden s, so gehen die Verbindungsgeraden einander entsprechender Punkte durch einen Gemeinsamen Punkt S.



Beweis. Wir führen folgende Bezeichnungen ein.

P := Schnittpunkt von a und a’
Q := Schnittpunkt von b und b’
R := Schnittpunkt von c und c’

p := Verbindungsgerade von A und A’
q := Verbindungsgerade von B und B’
r := Verbindungsgerade von C und C’

Dabei sei

A := Schnittpunkt von b und c
B := Schnittpunkt von a und c
C := Schnittpunkt von a und b

und A’, B’, C’ seien analog definiert.

<u>Voraussetzung</u>: P , Q und R liegen auf einer Geraden.
<u>Behauptung</u>: p, q und r schneiden sich in einem Punkt

Beweisen wir die Behauptung. Da s mit a und a’ bzw. mit b und b’ bzw. mit c und c’ einen gemeinsamen Punkt hat gilt

$$s = \lambda a + \lambda' a' = \mu b + \mu' b' = \nu c + \nu' c'$$

(wir nehmen der Einfachheit halber an, die einander entsprechenden Seiten sind verschieden). Durch Umordnen der Glieder erhält man

$p := \mu b - \nu c = - \mu' b' + \nu' c'$
$q ;= \nu c - \lambda a = -\nu' c' + \lambda' a'$
$r := \lambda a - \mu b = -\lambda' a' + \mu' b'$

Man beachte, p , q und r lassen sich tatsächlich in der angegebenen Weise definieren:

p ist eine Gerade, die einen gemeinsame Schnittpunkt mit b und c (nämlich A) und einen gemeinsamen Schnittpunkt mit b’ und c’ (nämlich A’) hat.

q ist eine Gerade, die einen gemeinsame Schnittpunkt mit a und c (nämlich B) und einen gemeinsamen Schnittpunkt mit a’ und c’ (nämlich B’) hat.

r ist eine Gerade, die einen gemeinsame Schnittpunkt mit a und b (nämlich C) und einen gemeinsamen Schnittpunkt mit a' und b' (nämlich C') hat.

Es reicht zu zeigen, die wie oben definierten Vektoren p , q und r sind linear abhängig. Das ist aber der Fall, wegen

$$p + q + r = 0$$

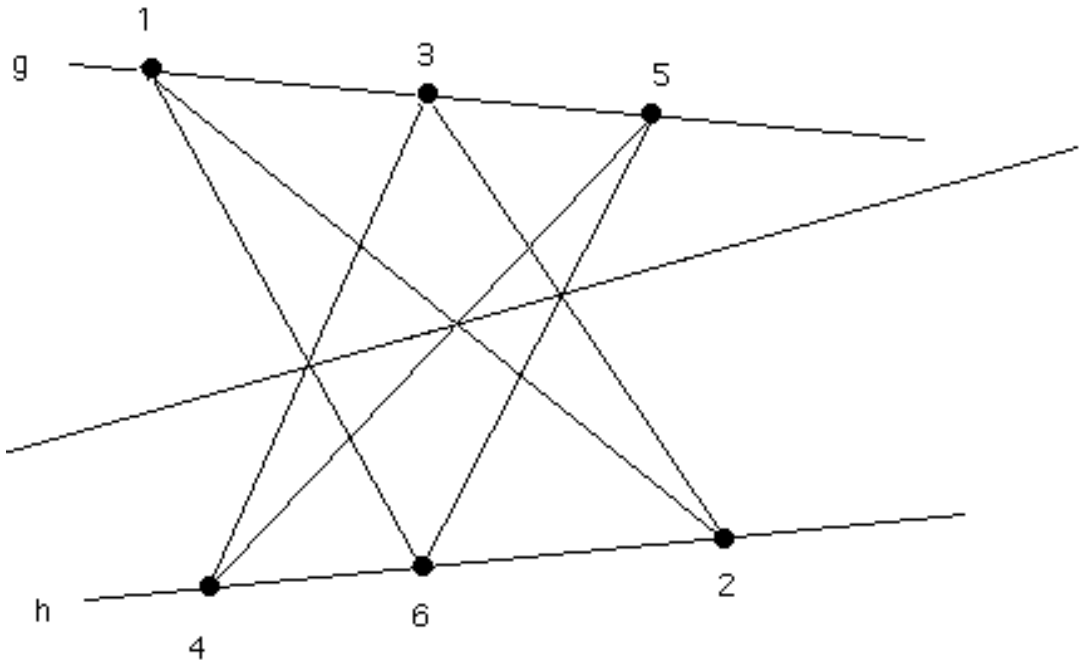
QED.

2.15 Satz von Desargues (Umkehrung)

Seien zwei Dreiecke in der Ebene gegeben mit den Seiten a,b,c bzw. a',b', c' und den Ecken A,B,C bzw. A',B',C'.
Gehen die Verbindungsgeraden einander entsprechender Punkte durch einen Punkt, so liegen die Schnittpunkte einander entsprechender Seiten auf einer Geraden.
Beweis. Man dualisiere 7.14 oder verwende den Beweis von 7.14 in dualer Interpretation.
QED.

2.16 Satz von Pascal

Liegen die Ecken 1,2,3,4,5,6 eines Sechsecks abwechseln auf zwei Gerade g und h, so liegen die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden.



Wird im selben Stil bewiesen wie 7.14. Siehe Keller: Analytische Geometrie.

2.17 Satz von Brianchon

Gehen die Seiten eines Sechsecks abwechselnd durch zwei feste Punkte, so gehen die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken durch einen Punkt.
Beweis: die Aussage ist dual zum Satz von Pascal.
QED.

2.18 Das Doppelverhältnis

Seien [m] und [n] zwei verschiedene Punkte (bzw. Geraden) in der projektiven Ebene und

$$[g_i] \text{ mit } g_i = \lambda_i m + \mu_i n$$

vier weitere Punkte (bzw. Geraden). So heißt die Zahl

$$D([g_1], [g_2]; [g_3], [g_4]) := \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}$$

Doppelverhältnis der vier Punkte bzw. Geraden.

Unabhängigkeit der Definition von der Wahl von m und n. Nach Voraussetzung sind die Vektoren m und n , linear unabhängig. Wir haben zu zeigen, die Zahl $D := D(g_1, g_2; g_3, g_4)$ ändert sich nicht, wenn man die Basis m, n des Vektorraumes Km + Kn durch eine andere Basis m',n' ersetzt,

$$Km + Kn = Km' + Kn'.$$

Die Matrix

$$D_{ij} := \begin{pmatrix} \lambda_i & \lambda_j \\ \mu_i & \mu_j \end{pmatrix} = M^{m,n}_{m,n}(\varphi)$$

ist gerade die Matrix der K-linearen Abbildung

$$\varphi: Km + Kn \to Km + Kn \text{ mit } m \mapsto g_i ,\ n \mapsto g_j$$

bezüglich der Basis (m,n). Analog ist

$$D'_{ij} := \begin{pmatrix} \lambda'_i & \lambda'_j \\ \mu'_i & \mu'_j \end{pmatrix} = M^{m,n}_{m',n'}(\varphi)$$

die Matrix derselben Abbildung bezüglich der Basis (m',n') (im Bild-Raum) falls gilt

$$g_i = \lambda'_i m' + \mu'_i n'.$$

Deshalb gilt

$$D'_{ij} = M^{m,n}_{m',n'}(\varphi) = A\cdot M^{m,n}_{m,n}(\varphi) \text{ mit } A := M^{m,n}_{m',n'}(Id)$$

also

$$\det D'_{ij} = \det D_{ij}\cdot \det A$$

Die beiden Quotienten

$$\frac{\det D_{13}}{\det D_{14}} \text{ und } \frac{\det D_{23}}{\det D_{24}}$$

in der Definition von D ändern sich also nicht, wenn man zu der neuen Basis übergeht.
QED.

Unabhängigkeit der Definition von der Wahl der Repräsentanten g_i **der** $[g_i]$. Wir haben zu zeigen, D ändert sich nicht, wenn man eines der g_i mit einem von Null verschiedenen Faktor multipliziert. Dann kann man jedoch direkt aus der Definition von D ablesen.
QED.

Bemerkung

Die Bedeutung des Doppelverhältnisses beruht darauf, daß es sich nicht ändert, wenn man eine projektive Transformation des $\mathbb{P}^2_K$ anwendet.

2.19 Projektive Transformationen, die projektive Gruppe

Sei f: V $\to$ V ein K-linearer Automorphismus des endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Dann ist die Abbildung

$$[f] = \mathbb{P}(f): \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V), [v] \mapsto [f(v)],$$
korrekt definiert und bijektive. Abbildungen dieser Gestalt heißt projektive Transformationen. Sie bilden eine Gruppe, die projektive allgemeine lineare Gruppe heißt und mit

$$PGL(V)$$

bezeichnet wird.
Bezeichnung:

$$PGL(n, K) := PGL(K^n).$$

2.20 Satz von Pappos

Seien S ein Punkt im $\mathbb{P}^2_K$ und g eine Gerade, die nicht durch S geht. Weiter seien

$$g_1, g_2, g_3, g_4$$

vier Geraden durch S und

$$P_1, P_2, P_3, P_4$$

deren vier Schnittpunkte mit g. Dann gilt

$$D(g_1, g_2, g_3, g_4) = D(P_1, P_2, P_3, P_4).$$

Beweis-Skitze. Wir können annehmen, g ist die Ferngerade und S der Ursprung von

$$K^2 = U_0 \subseteq \mathbb{P}^2_K .$$

Die Punkte P_i haben dann die Gestalt

$$P_i = [0;a_i , b_i]$$

und die Geraden g_i sind gegeben durch die Gleichungen

$$g_i : b_i x - a_i y = 0,$$

d.h. als Punkt von $\check{\mathbb{P}}^2_K$ hat g_i die Gestalt

$$g_i = [0, b_i , -a_i]$$

Der Punkt P_i hat also die projektiven Koordinaten a_i , b_i bezüglich der Punkte [0;1 , 0] und [0,0,1].
Analog hat die Gerade g_i die projektiven Koordinaten a_i , b_i bezüglich [0,0,-1] und [0,1,0].
Benutzt man diese Koordinaten zur Berechnung der Doppelverhältnisse

$$D(P_1, P_2, P_3, P_4) \text{ bzw. } D(g_1, g_2, g_3, g_4)$$

so erhält man denselben Wert.
QED.

3 Euklidische Räume