Einführung in die algebraische Topologie

B. Herzog
Sommersemester 2014

Bezeichnungen

Ens	Kategorie der Mengen, vgl. 1.1.4
Ab	Kategorie der abelschen Gruppen, vgl. 1.1.4
B^n	n-dimensionale abgeschlossene Vollkugel, vgl. 4.1.1
$\overset{\circ}{B}{}^n$	n-dimensionale offene Vollkugel, vgl. 4.1.1
B_q	Baryzentrum des Standardsimplex Δ_q, vgl. 3.6.1
$B_q \cdot \sigma$	Der Kegel mit der Spitze B_q über dem (q-1)-Simplex σ von Δ_q, vgl. 3.6.1.
$B_n K$	Gruppe der n-Ränder des Komplexes K, vgl. 2.1.1
β_q	die baryzentrische Unterteilung $S_q X \to S_q X$ der singulären q-Ketten eines topologischen Raums X, vgl. 3.6.1.
Cf	der Kegel über dem Komplex-Morphismus f, vgl. 2.1.6
CK	der Kegel über dem Komplex K, vg. 2.1.6
Δ	die simpliziale Kategorie, vgl. 1.1.4
Δ_q	q-dimensionale Standard-Simplex im $\mathbb{R}^{q+1}$, vgl. 1.1.18 und 3.1.2
$\widetilde{\Delta}$	Kategorie der abstrakten Simplizialkomplexe, vgl. 1.1.18 und 5.1.1
$\hat{\Delta}$	Kategorie der geordneten Simplizialkomplexe, vgl. 1.2.12 bzw. 5.1.1.
$\widetilde{\Delta}^{(2)}$	Kategorie der simplizialen Paare , vgl. 5.1.1
$\hat{\Delta}^{(2)}$	Kategorie der geordneten simplizialen Paare, vgl. 1.2.12 bzw. 5.1.1
∂_q	Randoperator auf den singulären q-Ketten, vgl. 3.2.2
e_i	i-ter Standard-Einheitsvektor, i-te Ecke des Standdard-Simplex, vgl. 3.1.2
ε_q^j	j-te Seiten-Abbildung des q-dimensionalen Standard-Simplex, vgl. 3.1.4
$\eta = \eta^X$	die Augmentation des singulären Komplexes SX zum topologischen Raum X, vgl. 3.4.4
$\gamma = \gamma^X$	die Augmentation des nicht-leeren topologischen Raumes X, d.h. die Projektion auf den einpunktigen Raum, vgl. 3.4.2
GAb	Kategorie der graduierten abelschen Gruppen, vgl. 2.1.4
h^A	kovarianter Hom-Funktor zum Objekt A (welcher kontravariant von A abhängt), vgl. 1.1.10.
h_A	kontravarianter Hom-Funktor zum Objekt A (welcher kovariant vom A abhängt), vgl. 1.1.10.
$H_n K$	n-te Homologie des Komplexes K, vgl. 2.1.1 und 2.1.3
$H_n X$	die singuläre Homologie des Raumes X, vgl. 3.3.1
$H_n(X,A)$	die singuläre Homologie des topologischen Paares (X,A), vgl. 3.3.1
$H_n(K,L)$	die geordnete Homologie des simplizialen Paares (K.L), vgl. 5.1.2(iii).

$\tilde{H}_q X$	die reduzierte Homologie des topologischen Raumes X, vgl. 3.4.2
Hom(C,D)	Kategorie der Funktoren C → D, vgl. 1.1.12
K(Ab)	Kategorie der Komplexe abelscher Gruppen, vgl. 2.1.2
K'(Ab)	Homotopie-Kategorie über der Kategorie der Komplexe, vgl. 2.3.3
Λ_n	das 0-Horn des Standard-n-Simplex, vgl. 4.2.1
P	der einpunktige topologische Raum, vgl. 3.4.1
Q	Basispunkt der n-Sphäre, vgl. 4.1.1
S^n	n-dimensionale Sphäre, vgl. 4.1.1
SX	Komplex der singulären Ketten auf dem topologischen Raum X, vgl. 3.2.3
SK	Komplex der geordneten Ketten auf dem abstrakten Simplizialkomplex, vgl. 5.1.1
S(K,L)	Komplex der relativen geordneten Ketten auf dem simplizialen Paar (K.L), vg. 5.1.1
$\mathbf{S}_q X$	Gruppe der singulären q-Ketten des topologischen Raums X, vgl. 3.2.2
S**U**	Komplex der singulären **U**-kleinen Ketten zu einer Familie **U** von Teilmengen eines topologischen Raumes, vgl. 3.7.2
S(**U**,**U**∩A)	Komplex der relativen singulären **U**-kleinen Ketten zu einer Familie **U** von Teilmengen eines topologischen Paars (X, A), vgl. 3.7.2
Top	Kategorie der topologischen Räume, vgl. 1.1.4
Top'	Die Homotopie-Kategorie der topologischen Räume, vgl. 1.2.6
$\mathbf{Top}^{(2)}$	Kategorie der topologischen Paare, vgl. 1.2.7
$\mathbf{Top}'^{(2)}$	Homotopie-Kategorie der topologischen Paare, vgl. 1.2.10
V(K)	Menge der Ecken des abstrakten Simplizialkomplexs K, vgl. 1.1.18 und 5.1.1
$Z_n K$	Gruppe der n-Zyklen des Komplexes K, vgl. 2.1.1
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen, vgl. 1.1.4

$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, Norm von $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, vgl. 4.1.1

$\oplus_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda$	direkte Summe der Komplexe K^λ, vgl. 2.1.5
[z]	Homologie-Klasse des Zyklus z, vgl. 2.1.1
C^{op}	die zur Kategorie C duale Kategorie, vgl. 1.1.5
C×D	das Produkte der Kategorien C und D, vgl. 1.1.6
G[i]	die graduierte Gruppe G mit der um i verschobenen Graduierung, vgl. 2.1.4
K^+	Suspension über dem Komplex K, vgl. 2.1.6
$p\cdot\sigma$	der Kegel mit der Spitze $p\in\mathbb{R}^n$ über dem Simplex $\sigma: \Delta_q \to \mathbb{R}^n$, vgl. 3.4.5
$s: f \simeq g$	Homotopie von stetigen Abbildungen oder Komplex-Abbildungen, vgl. 1.2.3 bzw. 2.3.1
$\|x\|$	Länge $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ des Vektors $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$\|\sigma\|$ Durchmesser des Simplex $\sigma: \Delta_q \to \mathbb{R}^n$, vgl. 3.6.2

$X \vee Y$ das Bukett der punktierten topologischen Räume X, Y, vgl. 3.7.6

1. Vorbereitungen

1.1 Kategorien und Funktoren

1.1.1 Vorbemerkung

Der Begriff der Kategorie systematisiert das Phenomen, daß es zu den meisten mathematischen Objekten in natürlicher Weise zugeordnete Abbildungen gibt. Beispiele solcher Paare von Objekten und Abbildungen sind

Vektorräume - lineare Abbildungen
Gruppen - Gruppenhomomorphismen
Ringe - Ringhomomorphismen
metrische Räume - abstandstreue Abbildungen, bzw. kontrahierende Abbildungen
topologische Räume - stetige Abbilungen

1.1.2 Der Begriff der Kategorie

Eine Kategorie C besteht aus

(i) einer Klasse von Objekten $|C|$

(ii) einer Menge

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}_C(X,Y) = C(X,Y)$$

von Morphismen von X nach Y für je zwei Objekte $X,Y \in |C|$.

(iii) einer Abbilung

$$\mathrm{Hom}(X,Y)\times\mathrm{Hom}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}(X,Z),\ (f,g) \mapsto g\circ f,$$

für je drei Objekte $X,Y,Z \in |C|$, welche Morphismenkomposition heißt.

Man fordert außerdem, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. **Assoziativgesetz der Morphismenkomposition**. Für je vier Objekte $X,Y,Z,W \in |C|$ und je drei Morphismen $f \in \mathrm{Hom}(Z,W)$, $g \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$, $h \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ gilt

$$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h.$$

2. **Existenz der identischen Morphismen**. Für jedes Objekt $X \in |C|$ enthält die Menge $\mathrm{Hom}(X,X)$ einen sogenannten identischen Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X,X)$ derart, daß für je zwei Objekte $X,Y \in |C|$ und jeden Morphismus $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ die folgenden beiden Relationen bestehen.

$$f\circ \mathrm{id}_X = f \text{ und } \mathrm{id}_Y \circ f = f$$

1.1.3 Bemerkungen zur Definition

(i) Man sieht leicht, daß es in jeder der Mengen $\mathrm{Hom}(X,X)$ genau einen identischen Morphismus gibt. Sind nämlich $\mathrm{id}, \mathrm{id}' \in \mathrm{Hom}(X,X)$ zwei solche Morphismen, so gilt

$$\mathrm{id} = \mathrm{id}\circ\mathrm{id}' = \mathrm{id}'.$$

(ii) Seien X und Y Objekte der Kategorie C. Ein Morphismus $f: X \to Y$ ist dann ein Element der Menge $\mathrm{Hom}(X,Y)$. Das Objekt X heißt auch Quelle des Morphismus X und Y heißt Ziel von f.

(iii) Die Klasse, welche durch Vereinigung aller Hom-Mengen einer Kategorie C entsteht heißt Klasse der Morphismen von C und wird mit Mor(C) bezeichnet.

1.1.4 Beispiele für Kategorien

(i) Die Kategorie der Mengen wird mit **Ens** bezeichnet. Ihre Objekte sind die Mengen, d.h. |**Ens**| ist die Klasse aller Mengen. Die Morphismenmenge Hom(X,Y) besteht aus allen Abbildungen $X \to Y$.

(ii) Die Kategorie der abelschen Gruppen wird mit **Ab** bezeichnet. Ihre Objekte sind die abelschen Gruppen, d.h. |**Ab**| ist die Klasse aller abelschen Gruppen. Die Morphismenmenge Hom(X,Y) besteht aus allen Gruppenhomomorphismen $X \to Y$.

(iii) Die Kategorie der topologischen Räume wird mit **Top** bezeichnet. Ihre Objekte sind die topologischen Räume. Die Morphismenmenge Hom(X,Y) besteht aus allen stetigen Abbildungen $X \to Y$.

(iv) Im nächsten Abschnitt werden wir die Homotopiekategorie **Top'** definieren. Ihre Objekte sind dieselben wie die von **Top**. Ihre Morphismen sind im allgemeinen keine Abbildungen mehr, sondern Äquivalenzklassen stetiger Abbildungen.

(v) Sei C eine quasigeordnete Menge, d.h. C sei eine Menge, die mit einer reflexiven und transitiven Relation '$\leq$' versehen sei. Dann definiert C eine Kategorie, die ebenfalls mit C bezeichnet werde. Die Objekte der Kategorie seien die Elemente von C,

$$|C| = C.$$

Die Menge Hom(X,Y) bestehe aus genau einem Element, wenn $X \leq Y$ gilt und ist andernfalls leer. Ist umgekehrt C ein Kategorie, für welche |C| eine Menge ist und deren Hom-Mengen aus jeweils höchstens einem Element besteht, so besitzt dadurch |C| die Struktur einer quasigeordneten Menge.

(vi) Sei G eine Gruppe. Dann definiert G eine Kategorie, die ebenfalls mit G bezeichnet wird. Die Kategorie besteht aus nur einem Objekt, sagen wir, dem Einselement der Gruppe,

$$|G| = \{e\},$$

und die einzige Hom-Menge Hom(e,e) besteht aus den Elementen der Gruppe,

$$\mathrm{Hom}(e,e) = G.$$

Die Morphismenkomposition sei gerade durch die Multiplikation der Gruppenelemente gegeben.

$$\mathrm{Hom}(e,e)\times\mathrm{Hom}(e,e) \to \mathrm{Hom}(e,e),\ (g,g') \mapsto g'\cdot g.$$

(vii) Die simpliziale Kategorie Δ hat als Objekte die Mengen

$$[n] := \{0,1,...,n\},\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} := \mathbb{N}\cup\{0\},$$

d.h.

$$|\Delta| := \{[n] \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

Die Morphismen sind die schwach monoton steigenden Funktionen, d.h.

$$\mathrm{Hom}([m],[n]) = \{f:[m] \to [n] \mid f(i) \leq f(j) \text{ für } i,j\in[m] \text{ und } i\leq j\}.$$

Die Morphismenkomposition ist die gewöhnliche Zusammensetzung von Abbildungen.

(viii) Vergleiche 5.1.1 für weitere Kategorien.

1.1.5 Die duale Kategorie

Sei C eine Kategorie. Die zu C duale Kategorie wird mit C^{op} bezeichnet und ist wie folgt definiert. Die Objekte von C^{op} sind dieselben wie die von C,

$$|C^{op}| := |C|.$$

Die Morphismen von C^{op} sind ebenfalls dieselben wie die von C, werden aber in anderer Weise den Paaren von Objekten zugeordnet. Es gelte

$$\mathrm{Hom}_{C^{op}}(X,Y) := \mathrm{Hom}_{C}(Y,X)$$

für je zwei Objekte $X,Y \in |C|$. Ein Morphismus $f:X \to Y$ von C ist also als Morphismus von C^{op} aufgefaßt ein Morphismus mit dem Ziel X und der Quelle Y. Morphismenkomposition von C^{op} ist ebenfalls dieselbe, wie die von C,

$$f \circ_{C^{op}} g := g \circ_{C} f$$

1.1.6 Das Produkt von Kategorien

Seien C und D Kategorien. Das Produkt von C und D wird mit $C \times D$ bezeichnet und ist die in folgender Weise definierte Kategorie. Die Objekte von $C \times D$ ist die Paare (X,Y) mit $X \in |C|$ und $Y \in |C|$. Die Menge $\mathrm{Hom}((X,Y),(X',Y'))$ besteht aus den Paaren (f,g) mit $f \in \mathrm{Hom}(X,X')$ und $g \in \mathrm{Hom}(Y,Y')$. Die Komposition ist schließlich koordinatenweise definiert.

$$(f,g) \circ (f',g') := (f \circ f',\ g \circ g').$$

1.1.7 Teilkategorien

Sei C eine Kategorie. Eine Kategorie D heißt Teilkategorie von C, falls folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) $|D| \subseteq |C|$.

(ii) $\mathrm{Hom}_{D}(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{C}(X,Y)$ für beliebige Objekte X,Y von D.

(iii) Die Komposition von Morphismen von D ist dieselbe wie die der entsprechenden Morphismen von C.

(iv) Die identischen Morphismen der Mengen $\mathrm{Hom}_{D}(X,X)$ mit $X \in |D|$ sind auch identische Morphismen von C.

Eine volle Teilkategorie ist eine Teilkategorie, für welche in (ii) stets das Gleichheitszeichen gilt.

Beispiele

(i) Die Kategorie der endlichen abelschen Gruppen ist ein Beispiel einer vollen Teilkategorie von **Ab**.

(ii) Die simpliziale Kategorie Δ ist eine Teilkategorie von **Ens**, die nicht voll ist.

(iii) Die Kategorie der metrischen Räume und abstandstreuen Abbildungen ist eine Teilkategorie in der Kategorie der metrischen Räume und kontrahierenden Abbildungen. Beide Kategorien haben dieselben Objekte. Die erstere ist keine volle Teilkategorie in der zweiten. Beide sind Teilkategorien von **Ens**.

1.1.8 Spezielle Morphismen

Seien C eine Kategorie und $f:X \to Y$, $g:Y \to X$ zwei Morphismen von C mit

$$f \circ g = \mathrm{id}.$$

Dann heißt f linksinvers zu g und g rechtsinvers zu f. Der Morphismus g heißt dann auch Schnitt von f und der Morphismus f heißt Retraktion von g. Ein Isomorphismus ist ein Morphismus, zu welchen ein linksinverser und ein rechtsinverser Morphismus existiert. Zwei Objekte X,Y heißen isomorph,

$$X \cong Y,$$

falls ein Isomorphismus $X \to Y$ existiert. Ein Monomorphismus ist ein Morphismus $f:X \to Y$ mit der Eigenschaft, daß für beliebige Morphismen u,v mit dem Ziel X gilt

$$f \circ u \neq f \circ v \text{ falls } u \neq v.$$

Ein Epimorphismus ist ein Monomorphismus der dualen Kategorie.

Beispiele

1. Ein Isomorphismus in **Ens** ist einfach eine bijektive Abbildung.
2. Ein Isomorphismus in **Top** ist eine auch topologische Abbildung (auch Homöomorphismus genannt).
3. Sie C eine Kategorie, deren Morphismen Abbildungen sind (und deren Komposition die gewöhnliche Zusammensetzung von Abbildungen ist). Zum Beispiel
$$C = Ab, Top, \Delta.$$
In dieser Kategorie sind injektive Abbildungen monomorph und surjektive Abbildungen epimorph. Die Umkehrung dieser Aussage ist im allgemeinen nicht richtig (Aufgabe!).

1.1.9 Funktoren

Seien C und D Kategorien. Ein Funktor F: C→D (oder auch kovarianter Funktor) besteht aus

(i) einer Abbildung F: |C|→|D| der Objekte, die ebenfalls mit F bezeichnet wird.

(ii) einer Abbildung F: Mor(C)→Mor(D) der Morphismen, die ebenfalls mit F bezeichnet wird.

Dabei wird gefordert, daß folgende Bedingungen erfüllt sind.

1. $F(Hom(X,Y)) \subseteq Hom(F(X),F(X))$ für beliebige $X,Y \in |C|$.
2. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ für beliebige Morphismen, welche $f \circ g$ definiert ist.
3. $F(id_X) = id_{F(X)}$ für beliebige Objekte $X \in |C|$.

Ein Kofunktor F von C nach D (oder auch kontravarianter Funktor) ist ein Funktor
$$F: C^{op} \to D,$$
der auf der zu C dualen Kategorie definiert ist. Ein Bifunktor ist ein Funktor der Gestalt
$$F: C \times C' \to D,$$
wobei C, C' und D Kategorien seien.

Bemerkung

Ist F:C→D ein (Ko-)Funktor und f:X→Y ein Isomorphismus, so ist auch F(f) ein Isomorphismus. Ist nämlich g zu f invers, so ist F(g) zu F(f) invers. Zum Beispiel gilt im Funktorfall
$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(id_X) = id_{F(X)}$$

1.1.10 Beispiele für Funktoren

(i) Sei C eine Kategorie. Der identische Funktor Id:C→C bildet jedes Objekt von C und jeden Morphismus von C auf sich selbst ab.

(ii) Seien C eine Kategorie und $A \in |C|$ ein Objekt. Der zu A gehörige kovariante Hom-Funktor ist der Funktor
$$h^A = Hom(A,?): C \to Ens, X \mapsto Hom(A,X),$$
d.h. für Objekte $X \in |C|$ gelte $h^A(X) := Hom(A,X)$. Auf den Morphismen f:X→X' von C ist h^A durch die Morphismenkomposition definiert.
$$h^A(f): Hom(A,X) \to Hom(A,X'), g \mapsto f \circ g.$$

(iii) Seien C eine Kategorie und $A \in |C|$ ein Objekt. Der zu A gehörige kontravariante Hom-Funktor ist der Funktor
$$h_A = Hom(?,A): C^{op} \to Ens, X \mapsto Hom(X,A),$$
d.h. für Objekte $X \in |C|$ gelte $h_A(X) := Hom(X,A)$. Auf den Morphismen f:X→X' von C ist h_A durch die Morphismenkomposition definiert.

$$h_A(f): \mathrm{Hom}(X',A) \to \mathrm{Hom}(X,A),\ g \mapsto g\circ f.$$

(iv) Seien C eine Kategorie. Dann ist der zu C gehörige Hom-Funkter definiert als der Bifunktor

$$\mathrm{Hom}: C^{op}\times C \to \mathrm{Ens},\ (X,Y) \mapsto \mathrm{Hom}(X,Y),$$

welche kontravariant im ersten und kovariant im zweiten Argument ist. Auf den Morphismen $(f,g):(X,Y) \to (X',Y')$ ist Hom durch die Morphismenkomposition definiert.

$$\mathrm{Hom}(f,g): \mathrm{Hom}_C(X,Y) \to \mathrm{Hom}_C(X',Y'),\ \alpha \mapsto g\circ\alpha\circ f$$

Man beachte, als Morphismen von C haben f bzw g die Gestalt $f:X'\to X$ und $g:Y\to Y'$.

(v) Wenn wir die Gruppen G und H als Kategorien auffassen, so ist ein Funktor $F:G\to H$ gerade ein Gruppenhomomorphismus und Kofunktor ein Antihomomorphismus (d.h. eine Abbildung mif $F(g\cdot g') = F(g')\cdot F(g)$).

(vi) Die Funktoren

$$\Delta \to \mathrm{Ens},\ \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ens},\ \mathrm{Top} \to \mathrm{Ens},$$

welche jedes Objekt und jeden Morphismus in sich abbilden (d.h. die Einschränkungen des identischen Funktors sind), sind Beispiele für sogenannte Vergiß-Funktoren.

(vii) Funktoren der Gestalt

$$F: \Delta^{op} \to C$$

mit irgendeiner Kategorie C heißen simpliziale Objekte der Kategorie C. Im Fall C = Ens spricht man von simplizialen Mengen, im Fall C = Ab von simpliziale abelsche Gruppe, im Fall C = Top von simplizialen topologischen Räumen usw. Ein solcher Funktor ordnet jeder nicht-negativen ganzen Zahl n ein Objekt

$$F_n := F([n])$$

und jeder schwach monoton steigenden Abbildung

$$f: [n] \to [m]$$

einen Morphismus

$$F_m \to F_n$$

einen Morphismus von C. Wir werden später sehen, daß es genügt, diese Morphismen für ganze spezielle Abbildungen f zu definieren.

(viii) Vergleiche 5.1.2 für weitere Funktoren.

1.1.11 Komposition von Funktoren

Seine $F:C\to D$ und $G:D\to E$ zwei Funktoren. Dann ist die Zusammensetzung von F und G ein Funktor

$$G\circ F: C \to E,$$

der wie folgt definiert ist. Für jedes Objekt X von C gilt

$$G\circ F(X): = G(F(X))$$

und für jeden Morphismus $f:X\to Y$ von C gilt

$$G\circ F(f) := G(F(f)).$$

Die Kategorie der Kategorien wird mit **Cat** bezeichnet. Ihre Objekte sind die Kategorien, ihre Morphismen sind die Funktoren und als Komposition nimmt man die eben beschriebene Zusammensetzung von Funktoren. Die Kategorie ist mit Vorsicht zu verwenden, da sie anfällig gegenüber den Widersprüchen der Mengenlehre ist.

1.1.12 Natürliche Transformationen

Seien F, G: C→D zwei Funktoren mit derselben Quelle und demselben Ziel. Eine natürliche Transformation ξ:F→G ist eine Familie

$$\{\xi(X):F(X)\to G(X)\}_{X\in|C|}$$

von Morphismen aus D mit der Eigenschaft, daß für jeden Morphismus f:X→X' von C das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\xi(X)} & G(X) \\ F(f)\downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(X') & \xrightarrow{\xi(X')} & G(X') \end{array}$$

Sind die Morphismen $\xi(X)$ sämtlich Isomorphismen, so heißt ξ auch natürliche Äquivalenz. Die Inversen der $\xi(X)$ definieren dann ebenfalls eine natürliche Äquivalenz. Sind ξ:F→G und η:G→H zwei natürliche Transformtionen, so ist durch

$$(\xi\circ\eta)(X) := \xi(X)\circ\eta(X)$$

eine natürliche Transformation $\xi\circ\eta$: F→H definiert, die Zusammensetzung der natürlichen Transformationen ξ und η.
Die Kategorie der Funktoren auf C mit Werten in D wird mit Hom(C,D) bezeichnet. Ihre Objekte sind die Funktoren C→D, ihre Morphismen sind die natürlichen Transformationen und die Morphismenkomposition ist eben definierte Zusammensetzung natürlicher Transformationen.

1.1.13 Beispiele natürlicher Transformationen

(i) Für jeden Funktor F:C→D definiert die Familie der identischen Morphismen von D eine natürliche Transformation id:F→F, die identische Transformation von F.

(ii) Seien C eine Kategorie und A∈|C| ein Objekt. Weiter seien F:C→Ens ein Funktor und a∈F(A) ein Element. Dann kann man wie folgt eine natürliche Transformation

$$\Phi^a:h^A \to F$$

konstruieren. Wie oben bezeichne h^A: C→Ens, X↦Hom(A,X) den kovarianten Hom-Funktor. Für jedes X∈|C| sei $\Phi^a(X)$ die Abbildung

$$\Phi^a(X): \mathrm{Hom}(A,X) \to F(X),\ (A\xrightarrow{f}X) \mapsto F(f)(a).$$

Man beachte, F(f) ist eine Abbildung F(f):F(A)→F(X). Die Kommutativität der obigen qudratischen Diagramme ist eine Folge der Funktoreigenschaft von F.

$$\Phi^a(X)(f) := F(f)(a).$$

(iii) Seien C eine Kategorie und A∈|C| ein Objekt. Weiter seien F:C^{op}→Ens ein Kofunktor und a∈F(A) ein Element. Dann kann man wie folgt eine natürliche Transformation

$$\Phi^a:h_A \to F$$

konstruieren. Wie oben bezeichne h_A: C^{op}→Ens, X↦Hom(X,A) den kontravarianten Hom-Funktor. Für jedes X∈|C| sei $\Phi(X)$ die Abbildung

$$\Phi^a(X): \mathrm{Hom}(X,A) \to F(X),\ (X\xrightarrow{f}A) \mapsto F(f)(a).$$

Man beachte F(f) ist eine Abbildung F(f):F(A)→F(X). Die Kommutativität der obigen qudratischen Diagramme ist eine Folge der Funktoreigenschaft von F.

$$\Phi^a(X)(f) := F(f)(a).$$

Das nachfolgende Lemma von Yoneda besagt, es gibt keine weiteren natürlichen Transformationen $h^A \to F$ neben den eben beschriebenen.

1.1.14 Lemma von Yoneda

Seien F: C → Ens ein Funktor, A∈|C| ein Objekt und ξ: $h^A \to F$ eine natürliche Transformation. Dann gibt es genau ein Element a∈F(A) mit $\xi = \Phi^a$. Es gilt

$$a = \xi(A)(id_A).$$

Bemerkungen

(i) Eine natürliche Transformation $h^A \to F$ ist also bereits eindeutig durch ihren Wert im Element $id_A \in h^A(A)$ bestimmt, und als Bild kann man ein beliebiges Element von F(A) vorgeben.

(ii) Eine analoge Aussage gilt auch für Kofunktoren $F:C^{op} \to$ **Ens** und natürliche Transformationen $h_A \to F$. (Man ersetze C durch C^{op}).

Beweis des Yoneda-Lemmas. Für jeden Morphismus f:A→X von C hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} h^A(A) & \xrightarrow{\xi(A)} & F(A) \\ {\scriptstyle h^A(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ h^A(X) & \xrightarrow{\xi(X)} & F(X) \end{array}$$

Insbesondere erhält man für das Bild von $id^A \in h^A(A)$ bei den beiden möglichen Kompositionen:

$$\begin{array}{ccc} \xi(X)(h^A(f)(id^A)) & = & F(f)(\xi(A)(id^A)) \\ \| & & \| \\ \xi(X)(f) & & F(f)(a) \\ & & \| \\ & & \Phi^a(X)(f) \end{array}$$

Dabei haben wir $a := \xi(A)(id^A)$ gesetzt. Es gilt also $\xi = \Phi^a$.
Zum Beweis der Eindeutigkeit von a nehmen wir an, es gilt

$$\Phi^a = \Phi^{a'}, \quad a,a' \in F(A).$$

Dann ist aber $a = F(id^A)(a) =^1 \Phi^a(A)(id^A) = \Phi^{a'}(A)(id^A) = F(id^A)(a') = a'$.
QED.

1.1.15 Darstellbare Funktoren

Seien F:C→Ens ein (Ko-)Funktor und A∈|C| ein Objekt. Ein Element a∈F(A) heißt universell für F, wenn die zugehörige natürliche Transformation

---

[1] In der obigen Identität, ξ(A)(f) = F(f)(a), welche für jeden Morphismus f:A→X gilt, setze man $f=id_A$ (und insbesondere X=A). Wegen $\xi = \Phi^a$ ergibt sich $F(id_A)(a) = \xi(A)(id_A) = \Phi^a(A)(id_A)$.

$$\Phi^a: h^A \to F \text{ (bzw. } \Phi^a: h_A \to F)$$

ein Isomorphismus von Funktoren (d.h. eine natürliche Äquivalenz) ist. Das Objekt A heißt dann darstellendes Objekt für den Funktor F. Ein Funktor, der ein darstellendes Objekt besitzt, heißt darstellbar.
Nicht jeder Funktor ist darstellbar. Das Paar (A,a) ist, falls es existiert bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

1.1.16 Eindeutigkeit des darstellenden Paares

Sei $F:C \to Ens$ ein darstellbarer Funktor mit dem universellen Element $a \in F(A)$. Dann gilt:

(i) Zu jedem Objekt $X \in |C|$ und jedem Element $x \in F(X)$ gibt es genau einen Morphismus $f:A \to X$ von C mit $F(f)(a) = x$.
(ii) Ist x ebenfalls universell, so ist f ein Isomorphismus.

Beweis. (i). Nach Voraussetzung ist die Abbildung

$$\Phi^a(X):\mathrm{Hom}(A,X) \to F(X),\ f \mapsto F(f)(a),$$

bijektiv. Es gibt also genau ein f mit $F(f)(a) = x$.
(ii) Ist auch x universell, so gibt es außerdem noch genau ein g mit $F(g)(x) = a$. Dann ist aber

$$F(fg)(x) = F(f)F(g)(x) = F(f)(a) = x$$

Vergleich mit der Identität

$$F(id_X)(x) = x$$

zusammen mit der Universalität vom x liefert $fg = id_X$. Aus Symmetriegründen gilt dann aber auch $fg = id_A$, d.h. f ist ein Isomorphismus.

QED.

1.1.17 Algebraische Konstruktionen in beliebigen Kategorien

Der Begriff des darstellbaren Funktors kann man benutzen um Konstruktionen der Mengelehre auf allgemeine Kategorien zu übertragen. Wir führen einige Beispiele an.

(i) Direkte Summen. Seien $A,B \in |C|$ zwei Objekte und F der Funktor

$$F = h_A \times h_B : C \to Ens,\ X \mapsto \mathrm{Hom}(A,X) \times \mathrm{Hom}(B,X).$$

Auf den Morphismen sei F wie folgt definiert. Für $f:X \to X' \in \mathrm{Mor}(C)$ sei F(f) die Abbildung

$$F(f):\ \mathrm{Hom}(A,X) \times \mathrm{Hom}(B,X) \to \mathrm{Hom}(A,X') \times \mathrm{Hom}(B,X'),\ (\alpha,\beta) \mapsto (f\alpha, f\beta).$$

Ist F darstellbar und ist S ein darstellendes Objekt, so gilt für jedes $X \in |C|$:

$$\mathrm{Hom}(A,X) \times \mathrm{Hom}(B,X) \cong \mathrm{Hom}(S,X).$$

Das Objekt $S \in |C|$ heißt dann direkte Summe von A und B (oder auch Koprodukt) und wird mit

$$S = A \oplus B$$

bezeichnet. Ist

$$(p,q) \in \mathrm{Hom}(A,S) \times \mathrm{Hom}(B,S)$$

das universelle Element, so heißen $p:A \to A \oplus B$ und $q:B \to A \oplus B$ natürliche Einbettungen. Die direkte Summe S von A und B ist dadurch charakterisiert, daß es zu je zwei Morphismen $a:A \to X$ und $b:B \to X$ mit demselben Ziel X genau einen Morphismus $f:S \to X$ gilt mit $a = fp$ und $b = fq$. Analog definiert man unendliche direkte Summen.

(ii) Direkte Produkte sind die direkten Summen der dualen Kategorie. Man spricht dann von den natürliche Projektionen $A\times B\to A$ und $A\times B\to B$.

Beispiele
Die direkten Summen in **Ens** und **Top** sind gerade die disjunkten Vereinigungen. In **Ab** sind es die gewöhnliche direkten Summen von Gruppen.
Die direkten Produkte in **Ens**, **Top** und **Ab** sind die Produktmengen, Produkträume bzw. die gewöhnlichen direkten Produkte.

1.1.18 Aufgaben

Kategorien

1. Zeigen Sie, |Ens| ist keine Menge.
2. Sei g linksinvers zu f und h rechtsinvers zu f. Zeigen Sie g=h. "Der zu f inverse Morphismus".
3. Definieren Sie den Begriff des Epimorphismus ohne Verwendung des Begriffs der dualen Kategorie.
4. Geben Sie Beispiele von Epimorphismen und Monomorphismen in verschiedenen Kategorien an. Untersuchen Sie die Beziehungen zu den Begriffen "injektiv" und "surjektiv".
5. Definieren sie den Begriff des kontravarianten Funktors ohne Verwendung des Begriffs der dualen Kategorie.
6. Zeigen Sie, die Kategorie Δ von 1.1.4 läßt sich mit einer Teilkategorie der Kategorie Top der topologischen Räume identifizieren, wobei man die Menge [n] mit dem Standard-Simplex

$$\Delta_n := \{(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1,\ 0 \le x_i \le 1 \text{ für } i = 0,\ldots,n\}$$

der Dimension n identifiziert und den Morphismus $f: [n] \to [m]$ von Δ mit der Einschränkung der linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ auf Δ_n, welche den i-ten Standard-Einheitsvektor e_i abbildet in $e_{f(i)}$. Beschreiben Sie diese Teilkategorie von Top und entscheiden Sie, ob es sich um eine volle Teilkategorie handelt.

Topologische Räume

7. Wiederholen Sie die Begriffe des topologischen Raumes, insbesondere den des Hausdorff-Raumes.
8. Zeigen Sie, eine stetige bijektive Abbildung eines kompakten Raumes in einen Hausdorff-Raum ist ein Homöomorphismus. Kann man die Bedingung, daß der eine Raum ein Hausdorff-Raum sein soll, weglassen?

9. Ein T_1-Raum ist ein topologischer Raum, in welchem es zu jedem Punktpaar (x,y) eine offene Menge gibt, welche x aber nicht y enthält. Versehen Sie die reelle Gerade mit einer Topologie derart, daß diese ein T_1-Raum und trotzdem kein Haussdorff-Raum wird.

10. Seien X und Y zwei topologische Räume die als Mengen identisch sind. Die Topologie von X heißt schwächer als die von Y, wenn jede offene Menge von X auch offen in Y ist und die Topologien nicht gleich sind. Sei jetzt $\{X_i\}$ ein Familie von Teilmengen von X. Beschreiben Sie die schwächste Topologie von X, bei der alle Mengen X_i offen sind. Man nennt diese Topologie die von den X_i erzeugte Topologie.

11. Ermitteln Sie, wieviele topologisch nicht-äquivalente Räume es gibt, welche genau drei Punkte besitzen. Wieviele davon sind Hausdorff-Räume?

12. Faktortopologie. Seien X ein topologischer Raum und $\cong$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge X. Bezeichne $X/\cong$ die Menge der Äquivalenzklassen von X bzgl. $\cong$ und

$$\gamma: X \to X/\cong$$

die natürliche Abbildung, welche jedes Element auf seine Äquivalenzklasse abbildet.
(a) Zeigen Sie, die Teilmengen von $X/\cong$, deren vollständige Urbilder in X offen sind, geben der Menge $X/\cong$ die Struktur eines topologischen Raumes. Die entsprechende Topologie heißt Faktortopologie von $X/\cong$. Der Raum $X/\cong$ mit dieser Topologie heißt Faktorraum von X modulo $\cong$.
(b) Geben Sie durch eine geeignete Definition der folgenden Aussage einen exakten mathematischen Gehalt. Die Faktortopologie von $X/\cong$ ist die "stärkste" Topologie der Menge $X/\cong$, bei der die natürliche Abbildung $\gamma: X \to X/\cong$ stetig ist.
(c) Charakterisieren Sie den Faktorraum $X/\cong$ (bis auf Isomorphie) durch eine Universalitätseigenschaft.

13. Verheftung topologischer Räume. Sei $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Für je zwei Räume X_{i_1} und X_{i_2} der Familie seien Unterräume

$$A_{i_2 i_1} \subseteq X_{i_1} \text{ und } A_{i_1 i_2} \subseteq X_{i_2}$$

und Homöomorphismen

$$f_{i_2 i_1} : A_{i_2 i_1} \to A_{i_1 i_2}$$

gegeben. Für je drei Elemente $i_1, i_2, i_3 \in I$ der Indexmenge gelte

$$f_{i_1 i_3} \circ f_{i_3 i_2} \circ f_{i_2 i_1} = \mathrm{Id}$$

auf der Teilmenge $A_{i_2 i_1} \cap A_{i_3 i_1}$ von X_{i_1} und für jedes $i \in I$ gelte $f_{ii} = \mathrm{Id}$.
Konstruieren Sie einen Raum mit X mit folgenden Eigenschaften.
a. Jedes X_i der Familie läßt sich mit einem Unterraum von X identifizieren (d.h. es gilt $X_i \subseteq X$ für die Mengen und die Topologie von X_i ist gerade die Unterraumtopologie).
b. X ist die Vereinigung der Unterräume X_i. Zwei Punkte $x_{i_1} \in X_{i_1}$ und $x_{i_2} \in X_{i_2}$ entsprechen genau dann demselben Punkt von X, wenn sie bei der Abbildung $f_{i_2 i_1}$ ineinander übergehen. Man sagt auch, der Raum X entsteht durch Verheften der Räume X_i entlang der Teilmengen $A_{i_1 i_2}$.
(Hinweis: beschreiben Sie X als Faktorraum der disjunkten Vereinigung der X_i mit Hilfe einer geeigneten Äquivalenzrelation).
c. Beschreiben sie den Rand eines Tetraeders als das Ergebnis einer Verheftung von mehreren Kopien eines Standarddreiecks entlang von dessen Seiten.

Zusammenhängende topologische Räume

14. Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn er nicht in die Vereinigung von zwei disjunkten und nicht-leeren offenen Teilräumen zerlegt werden kann. Eine Teilmenge von X heißt heißt zusammenhängend, wenn sie als Unterraum zusammenhängend ist. Zeigen Sie, eine beliebige Familie von zusammenhängenden Teilmengen von X, von denen je zwei einen gemeinsamen Punkt besitzen, hat eine zusammenhängende Vereinigung.
15. Zeigen Sie, die Abschließung einer zusammenhängenden Teilmenge A des topologischen Raumes X ist zusammenhängend.
16. Zeigen Sie, zu jedem Punkt x des topologischen Raumes X gibt es genau eine zusammenhängende Teilmenge $C(x) \subseteq X$, welche den Punkt x enthält und außerdem noch die folgende Eigenschaft hat: Jede zusammenhängende Teilmenge von X, welche den Punkt x enthält, ist ganz in C(x) enthalten. Diese Menge C(x) heißt Zusammenhangskomponente von x in X. Sie ist gerade die maximale zusammenhängende Teilmenge von X, welche den Punkt x enthält.
17. Zeigen Sie, die Zusammenhangskomponente jedes Punktes eines topologischen Raumes X ist abgeschlossen in X.
18. Geben Sie einen topologischen Raum X an mit einer Zusammenhangskomponente, die nicht offen ist in X.

Simplizialkomplexe

19. Ein (abstrakter oder kombinatorischer) Simplizialkomplex K mit der Ecken-Menge V(K) ist eine Menge von endlichen Teilmengen der Menge V(K), deren Elemente Ecken von K heißen. Die Elemente von K heißen Simplexe von K. Die Teilmengen eines Simplex s von K heißen auch Seiten von s.

    Dabei wird gefordert, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

    (a) Für jede Ecke $v \in V(K)$ ist $\{v\}$ ein Simplex von K.
    (b) Jede Seite eines Simplex von K ist ein Simplex von K.
    (c) Für je zwei Simplexe s und s' von K mit einer gemeinsamen Ecke ist $s \cap s'$ ein Simplex von K.

    Eine simpliziale Abbildung ist eine Abbildung $f: V(K) \to V(L)$ der Ecken-Menge eines Simplizialkomplexes K in die Ecken-Menge eines Simplizialkomplexe K' mit $f(s) \in K'$ für jedes $s \in K$.

    Zeigen Sie
    (a) Die Simplizial-Komplexe bilden mit den simplizialen Abbildungen eine Kategorie $\tilde{\Delta}$.
    (b) Die endlichen Simplizialkomplexe K (d.h. diejenigen mit V(K) endlich) bilden eine volle Teilkategorie von $\tilde{\Delta}$.

20. Für jeden Simplizialkomplex K besteht die Realisierung |K| von K aus der Menge aller Abbildungen

    $$\alpha: V(K) \to [0,1],$$

    welche den folgenden beiden Bedingungen genügen.

    (a) $\sum_{v \in V(K)} \alpha(v) = 1$

    (b) Der Trager $\mathrm{Supp}(\alpha) := \{v \in V(K) \mid \alpha(v) \neq 0\}$ von α ist ein Simplex des Simplizialkomplexes K.

Wir identifizieren die Menge V(K) mit einer Teilmenge von |K|, indem wir der Ecke v∈V(K) die Funktion α mit dem Träger Supp(α) = {v} zuordnen,

$$V(K) \subseteq |K|.$$

Zeigen Sie

(b) |K| ist mit der Abstandsfunktion $d(x,y) := \sqrt{\sum_{e\in K} (x(e)-y(e))^2}$

ein <u>metrischer Raum</u> (d.h. es gilt $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$, $d(x,y)=d(y,x)$, $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$), also insbesondere ein topologischer Raum. Die entsprechende Topologie von |K| heißt <u>metrische Topologie.</u>

(a) Es gibt genau einen Funktor

$$|\ |: \widetilde{\Delta} \to \mathrm{Top}$$

welcher jedem Simplizialkomplex dessen Realisierung zuordnet, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(c) Für jede simpliziale Abbildung f: K → L ist die Einschränkung von

$$|f|:|K|\to|L|$$

auf auf die Teilmenge V(K) gerade f,

$$|f|\,|_{V(K)} = f.$$

(d) Für jede simpliziale Abbildung f: K → L ist die zugehörige Abbildung

$$|f|: |K| \to |L|$$

$\mathbb{R}$-linear in dem Sinne, daß für je zwei Punkte

$$\alpha,\beta\in |K|$$

der Realisierung und je zwei reelle Zahlen

$$\lambda, \mu\in[0,1] \text{ mit } \lambda+\mu = 1$$

gilt

$$|f|(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda\cdot|f|(\alpha) + \mu\cdot|f|(\beta).$$

21. Sei K ein Simplizialkomplex. Ein Simplex s ∈ K, welches aus q+1 Elementen besteht heißt auch q-Simplex oder q-dimensionales Simplex und die Zahl

$$\dim s := q$$

heißt <u>Dimension</u> von s. Zeigen Sie

(a) Für jedes q-Simplex von K bilden die nicht-leeren Teilmengen von s einen Simplizialkomplex, dessen Realisierung

$$|s|$$

homöomorph ist zur Teilmenge

$$\Delta_q := \{(x_0,...,x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid \sum_{i=0}^{q} x_i = 1,\ 0 \leq x_i \leq 1 \text{ für } i = 0,...,q\}$$

des $\mathbb{R}^{q+1}$, welche q-dimensionales <u>Standard-Simplex</u> heißt. Durch diese Identifizierung wird |s| zum topologischen Raum.

(b) Es gilt

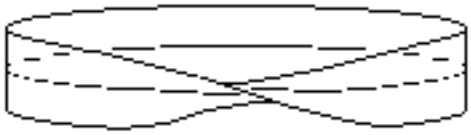
$$|K| = \cup_{s\in K} |s|.$$

(c) Es gibt genau eine Topologie auf |K| mit der Eigenschaft, daß eine Teilmenge

$$U \subseteq |K|$$

genau dann offen ist, wenn $U \cap |s|$ offen ist in $|s|$ für jedes $s \in K$. Diese Topologie heißt schwache Topologie von $|K|$. Wenn nicht explizit anders erwähnt, werden wir $|K|$ stets mit der schwachen Topologie versehen.
(d) Für endliche Simplizialkomplexe K stimmt die metrische mit der schwachen Topologie überein.
(e) Für jeden endlichen Simplizialkomplex läßt sich der metrische Raum $|K|$ mit einem Unterraum eines eines $\mathbb{R}^n$ identifizieren (d.h. es gibt eine injektive Abbildung $|K| \to \mathbb{R}^n$, die den Abstand erhält).

22. Geben sie ein Simplizialkomplex K an, dessen Realisierung homöomorph ist
(a) zum einpunktigen Raum.
(b) zum Einheitsintervall [0, 1] ($\subseteq \mathbb{R}$).
(c) zu einem (abgeschlossenen) Dreieck.
(d) zu einer Kreislinie.
(e) zu einem Tetraeder.
(f) zu einem Oktaeder.
(g) zu einem Torus.
(h) zu einem Möbiusband.



(i) zu einer Handel (-Oberfläche).

Simpliziale Objekte

23. Eine simpliziale abelsche Gruppe, ein simplizialer topologischer Raum, ein simpliziales Objekt einer Kategorie C ist ein Funktor

$$F: \Delta^{op} \to C,$$

wobei C die Kategorie der abelschen Gruppen, bzw. der topologischen Räume, bzw. irgendeine Kategorie ist.
(a) Zeigen Sie, jede simpliziale Menge

$$F: \Delta^{op} \to Ens,$$

definiert eine simpliziale abelsche Gruppe

$$<F>: \Delta^{op} \to Ab,$$

deren Werte freie abelsche Gruppen sind.

.

(b) Zeigen Sie allgemeiner, zu jeder simplizialen Menge

$$F: \Delta^{op} \to Ens$$

und jeden Funktor G: Ens → C gibt es ein simpliziales Objekt $G \circ F$ von C. Beschreiben Sie die simpliziale Gruppe von a) auf diese Weise.

1.2 Homotopie

1.2.1 Vorbemerkungen

(i) Sei $f:X\to Y$ eine stetige Abbildung. Die Homotopietheorie interessiert sich für Eigenschaften von f, die sich bei kleinen Veränderungen von f auch nur wenig ändern.

(ii) Die Physik zum Beispiel muß im allgemeinen davon ausgehen, daß dies bei allen physikalisch interessanten Eigenschaften der Fall ist (weil jede Messung mit Fehlern behaften ist, also nur Eigenschaften erfaßt werden, die sich bei geringen Meßfehlern nur unwesentlich abändern).

(iii) Läßt sich eine Eigenschaft der angegebenen Art durch eine diskrete Größe beschreiben, zum Beispiel durch eine natürliche Zahl, so bleibt diese Eigenschaft überhaupt völlig invariant auch bei großen Veränderungen, sobald sich diese nur aus vielen kleinen zusammensetzen.

(iv) Letzteres ist die Grundlage des sogenannte Prinzips der Homotopie-Invarianz. Der Begriff der Homotopie ist eine Formalisierung des beschriebenen Phänomens.

1.2.2 Der Begriff der Homotopie

Seien X,Y topologische Räume und $\mathbf{I}=[0,1]$ das Einheitsintervall. Eine Homotopie oder auch Deformation von X nach Y ist eine stetig Abbildung

$$F: X\times\mathbf{I} \to Y.$$

Für jedes $t\in\mathbf{I}$ ist dann insbesondere die Abbildung

$$F_t : X\to Y,\ x \mapsto F(x,t),$$

stetig. Wir werden im folgenden auch von der zugehörigen Familie

$$\{F_t : X\to Y\}_{t\in\mathbf{I}}$$

als von einer Homotopie sprechen, bzw. mit dem Begriff der Homotopie immer die Vorstellung einer solchen Familie von stetig variierenden Abbildungen verbinden. Statt von einer Homotopie werden wir auch von einer stetigen Familie

$$F_t : X\to Y,\ t\in I,$$

von Abbildungen sprechen.

Bemerkung

Wenn man $x\in X$ festhält und $t\in I$ variiert, so kann man sich $F_t(x)$ als einen sich mit der Zeit im Raum Y bewegenden Punkt vorstellen. Analog stellt man sich $F_t(X)$ als ein sich mit der Zeit deformierendes Gebilde vor.

1.2.3 Homotope Abbildungen

Zwei stetige Abbildungen $f,g:X\to Y$ heißen homotop, falls es eine stetige Familie von Abbildungen

$$F_t : X\to Y,\ t\in I,$$

gibt mit $f = F_0$ und $g = F_1$. Wir schreiben dann

$$f \simeq g \text{ oder } F:f \simeq g$$

und sagen, F ist eine Deformation der Abbildung f in die Abbildung g.

Sei $A\subseteq X$ ein Teilraum. Falls die Einschränkung $F_t|_A$ auf A unabhängig von t ist, so heißt F auch relative Homotopie bzgl. A. Wir schreiben dann

$$f \simeq g \text{ rel } A \text{ oder } F:f \simeq g \text{ rel } A.$$

Ist $g = F_1$ eine konstante Abbildung, so heißt F auch Nullhomotopie und $f = F_0$ heißt nullhomotop.

1.2.4 Homotopieklassen

Die Homotopierelation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen Homotopieklassen. Die Homotopieklasse der stetigen Abbildung $f:X\to Y$ wird mit [f] bezeichnet.

Beweis. Reflexivität. Die konstante Homotopie $F_t(x) = f(x)$ zeigt, es gilt $F:f \simeq f$.

Symmetrie. Ist

$$F_t : X\to Y,\ t\in I,$$

eine Deformation von f in g, so ist

$$F_{1-t} : X\to Y,\ t\in I,$$

eine Deformation von g in f.
Transitivität. Seien Homotopien

$$F:f \simeq g \text{ und } G:g \simeq h$$

gegeben Wir setzen

$$H(x,t) := \begin{cases} F(x,2t) & \text{für } 0\le t\le \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & \text{für } \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

Dann ist H eine Deformation von f in h.
QED.

1.2.5 Verträglichkeit mit Kompositionen

Seien $f,f':X\to Y$ und $g,g':Y\to Z$ stetige Abbildungen mit

$$f \simeq f' \text{ und } g \simeq g'.$$

Dann gilt $g\circ f \simeq g'\circ f'$.

Beweis. Mit $F:f \simeq f'$ und $G:g \simeq g'$ gilt $H: g\circ f \simeq g'\circ f'$, wenn man $H_t := G_t\circ F_t$ setzt.

QED.

Bemerkung

Nach Aussage 1.2.5 ist die Homotopieklasse $[f\circ g]$ nur von den Homotopieklassen [f] und [g] abhängig und nicht von den einzelnen Repräsentanten. Man kann also

$$[f]\circ[g] := [f\circ g]$$

setzten und auf diese Weise die Komposition von Homotopieklassen definieren.

1.2.6 Die Homotopiekategorie

Die Homotopiekategorie wird mit **Top'** bezeichnet. Ihre Objecte sind die topologischen Räume und ihre Morphismen die Homotopieklassen stetiger Abbildungen. Die Morphismenkomposition ist die oben definierte Komposition von Homotopieklassen.

Bemerkungen

(i) **Top'** hat dieselben Objekte wie **Top**.
(ii) Der Übergang zu den Homotopieklassen definiert einen Funktor

$$\pi: \mathbf{Top} \to \mathbf{Top'},\ X \mapsto X,\ f \mapsto [f],$$

den sogenannten Homotopiefunktor.

Bemerkungen

(i) Die wichtigste Methode der algebraischen Topologie besteht in der Konstruktion von gewissen Funktoren F: **Top** $\to$ A, wobei A eine der algebraischen Kategorien ist (Gruppen, Ringe, ...). Meistens sind diese Funktoren

homotopieinvariant, d.h. aus $f \simeq g$ in **Top** folgt stets $F(f) = F(g)$. Mit anderen Worten, F faktorisiert sich über den Homotopiefunktor π, d.h. hat die Gestalt

$$\mathbf{Top} \xrightarrow{\pi} \mathbf{Top'} \xrightarrow{F'} A.$$

Der Funktor F vernachlässigt alle Informationen, welche auch von π vernachlässigt werden. Deshalb interessiert man sich in der algebraischen Topologie mehr für die Kategorie **Top'** als für **Top**.

(iii) Insbesondere macht man oftmals keinen Unterschied zwischen topologischen Räumen, die in **Top'** isomorph sind. Das sind Räume X und Y, zu denen es stetige Abbildungen

$$f:X\to Y \text{ und } g:Y\to X$$

gibt mit $f\circ g \simeq id_Y$ und $g\circ f \simeq id_X$. Solche Abbildungen heißen Homotopieäquivalenzen. Die Räume X und Y, zwischen denen es Homotopieäquivalenzen gibt, heißt homotopieäquivalent, symbolisch,

$$X \simeq Y.$$

(iv) Homotopieinvariane Funktoren haben dieselben Werte auf homotopieäquivalenten Räumen, genauer

$$X \simeq Y \Rightarrow F(X) \cong F(Y).$$

1.2.7 Topologische Paare

Unter einem topologischen Paar wollen wir im folgenden ein Paar (X,A) verstehen, wobei X ein topologischer Raum ist und A ein Unterraum von X. Eine Abbildung von Paaren,

$$f: (X,A) \to (Y,B),$$

soll eine stetige Abbildung $f:X\to Y$ sein mit $f(A)\subseteq B$. Die topologischen Paare und ihre Abbildungen bilden bzgl. der gewöhnlichen Komposition eine Kategorie, die mit

$$\mathbf{Top}^{(2)}$$

bezeichnet wird. Mit Hilfe des Funktors

$$\mathbf{Top} \to \mathbf{Top}^{(2)},\ X \mapsto (X,\varnothing),$$

identifizieren wir im folgenden **Top** mit einer vollen Teilkategorie von $\mathbf{Top}^{(2)}$.

1.2.8 Die direkte Summe von Paaren

Sei der topologische Raum X disjunkte Vereinigung der Familie $\{X_i\}_{i\in I}$, d.h. X ist die direkte Summe dieser Räume in **Top**,

$$X = \bigoplus_{i\in I} X_i .$$

Weiter sei $A \subseteq X$ ein Unterraum und es sei $A_i = A\cap X_i$. Dann ist das Paar (X,A) in $\mathbf{Top}^{(2)}$ die direkte Summe der Paare (X_i, A_i),

$$(X,A) = \bigoplus_{i\in I} (X_i , A_i).$$

1.2.9 Ein Produkt von Paaren

Für Paare (X,A) und (Y,B) setzen wir

$$(X,A)\times(Y,B) := (X\times Y, X\times B \cup A\times Y)$$

Dies ist nicht das direkte Produkt der beiden Paare in $\mathbf{Top}^{(2)}$.

1.2.10 Homotopie von Paaren

Zwei Abbildungen $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ heißen homotop, falls es eine Homotopie $H:f\simeq g$ gibt, für welche alle H_t Abbildungen $(X,A)\to(Y,B)$ von Paaren sind. Man schreibt dann wieder $f\simeq g$. Die Relation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen werden wieder mit [f] bezeichnet. Man erhält auf diese Weise eine Kategorie $\mathbf{Top}'^{(2)}$ und einen Funktor

$$\pi:\mathbf{Top}^{(2)}\to \mathbf{Top}'^{(2)},\ (X,A)\mapsto(X,A),\ f\mapsto [f].$$

1.2.11 Tripel von topologischen Räumen

Unter einem topologischem Tripel wollen wir ein Tripel (X,A,B) von topologischen Räumen verstehen mit

$$B\subseteq A\subseteq X.$$

Falls nur $A\subseteq X\supseteq B$ gilt sprechen wir von einer Triade.

Beide Begriffe führen zu gewissen Kategorien, welche $\mathbf{Top}^{(2)}$ enthalten und sogar zu entsprechenden homotopischen Begriffen und Kategorien.

1.2.12 Aufgaben

1. Definieren Sie die Kategorie $\tilde{\Delta}^{(2)}$ der simplizialen Paare (vgl. 5.1.1).
2. Definieren Sie die Kategorie $\hat{\Delta}$ der geordneten Komplexe (vgl. 5.1.1)
3. Definieren Sie die Kategorie $\hat{\Delta}^{(2)}$ der geordneten simplizialen Paare (vgl. 5.1.1).
4. Definieren Sie in der Kategorie $\tilde{\Delta}$ der Simplizialkomplexe den Begriff der Homotopie zweier Morphismen.

2. Homologie von Komplexen

2.1 Komplexe

2.1.1 Die Homologie eines Komplexes

Ein Komplex K ist eine Familie

$$\{\partial_n:K_n\to K_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

von aufeinanderfolgenden Homomorphismen abelscher Gruppen mit der Eigenschaft, daß die Zusammensetzung von je zwei aufeinanderfolgenden Homomorphismen Null ist,

$$\partial_{n-1}\circ\partial_n = 0.$$

Schreibweise:

$$K:\ \ldots\to K_{n+1}\xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n\xrightarrow{\partial_n} K_{n-1}\xrightarrow{\partial_{n-1}} K_{n-2}\cdots$$

Die Elemente von K_n heißen n-dimensionale Ketten oder auch n-Ketten von K. Die Elemente der Untergruppe

$$Z_nK := \mathrm{Ker}(\partial_n)$$

heißen n-dimensionale Zyklen oder auch n-Zyklen von K. Die Elemente der Untergruppe

$$B_nK := \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$$

heißen n-dimensionale Ränder oder auch n-Ränder von K. Wegen $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ besteht die Inklusion $B_nK \subseteq Z_nK$. Man kann also die Faktorgruppe

$$H_nK := Z_nK/B_nK.$$

bilden. Diese heißt n-te Homologie des Komplexes K. Ihre Elemente heißen n-dimensionale Homologieklassen. Zwei Zyklen z,z' heißen homolog, wenn sie in derselben Homologieklasse liegen. Symbolisch:

$$z \sim z' \Leftrightarrow z\text{-}z' \in B_nK \Leftrightarrow z\text{-}z' = \partial c \text{ für ein } c \in K_{n+1}.$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation. Die Homologieklasse eines Zyklus z wird mit

$$[z]$$

bezeichnet. Die Abbildungen ∂_n heißen auch Randabbildungen oder Differentiale des Komplexes.
Ein Komplex heißt exakt, wenn $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) = \mathrm{Ker}(\partial_n)$ gilt für jedes n. Das ist äquivalent zu den Bedingungen

$$H_nK = 0 \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Die Homologiegruppen kann man als ein Maß für die Abweichung von der Exaktheit auffassen.

2.1.2 Komplexabbildungen

Seien $K := \{\partial_n : K_n \to K_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ und $K' := \{\partial'_n : K'_n \to K'_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ Komplexe. Eine Komplexabbildung f:K→K oder auch Kettenabbildung oder auch Komplexmorphismus ist eine Familie

$$f := \{f_n : K_n \to K'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

von Gruppenhomomorphismen, welche mit den Randabbildungen der Komplexe verträglich sind. Das bedeutet, die folgenden Diagramme sollen kommutativ sein.

$$\begin{array}{ccc} K_n & \xrightarrow{f_n} & K'_n \\ {\scriptstyle\partial_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\partial'_n} \\ K_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & K'_{n-1} \end{array}$$

Sind f:K→K' und f':K'→K" zwei Komplexabbildungen, so ist durch

$$(f' \circ f)_n := f'_n \circ f_n$$

eine Komplexabbildung K→K" definiert, welche Komposition von f und f' heißt und mit f'∘f bezeichnet wird.
Die Komplexe bilden zusammen mit den Komplexabbildungen und der eben beschriebenen Komposition eine Kategorie, die Kategorie der Komplexe abelscher Gruppen oder auch Komplexkategorie über Ab. Diese wird mit

$$\partial\mathbf{Ab}$$

bezeichnet. Die Isomorphismen in $\partial\mathbf{Ab}$ sind diejenigen Komplexabbildungen f, deren Komponenten f_n Isomorphismen in **Ab** sind.

2.1.3 Der Homologiefunktor

Sei f:K→K' eine Komplexabbildung. Aus der Kommutativität des obigen Diagramms, d.h. aus der Bedingung

$$\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$$

ergeben sich die Inklusionen

$$f_n(Z_nK) \subseteq Z_nK' \text{ und } f_n(B_nK) \subseteq B_nK'.$$

Nach dem Homomorphiesatz induziert f_n einen Homorphismus

$$H_nf: H_nK \to H_nK', [z] \mapsto [f_n(z)].$$

Trivialerweise ist $H_n(id)$ die identische Abbildung. Für je zwei Komplexabbildungen $f:K\to K'$ und $f':K'\to K''$ gilt $H_n(f'\circ f) = H_n(f')\circ H_n(f)$. Mit anderen Worten, für jedes $n\in\mathbb{Z}$ ist H_n ein Funktor

$$H_n: \partial\mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}.$$

Bemerkung

Die Funktoren der algebraischen Topologie sind typischerweise von der Gestalt

$$\mathbf{Top}\to\partial\mathbf{Ab}\to\mathbf{Ab},$$

d.h. sie setzen sich aus zwei Funktoren zusammen, wobei der zweite Funktor der gerade konstruierte Homologiefunktor ist. Für den ersten Funktor gibt es recht unterschiedliche Möglichkeiten (vielleicht soviele wie Mathematiker). Wir betrachten hier also zunächst den formalen, allen Homologietheorien gemeinsamen Teil der algebraischen Topologie (der manchmal auch als "general nonsense" bezeichnet wird).

Vereinbarungen

Wenn keine Verwechslungen möglich sind, werden wir anstelle von ∂_n, f_n, $H_n(f)$ auch ∂, f, f_* schreiben.

Alle Gruppen seien, wenn nicht ausdrücklich anderes erwähnt, abelsch.

2.1.4 Graduierte abelsche Gruppen

Eine ($\mathbb{Z}$-)graduierte abelsche Gruppe ist eine abelsche Gruppe G, welche in eine direkte Summe von Untergruppen G_n zerfällt,

$$G = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}G_n$$

Die Untergruppe G_n heißt n-ter homogener Bestandteil von G. Ein Morphismus $f:G\to G'$ graduierter abelscher Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus mit

$$f(G_n)\subseteq G'_n$$

für jedes n. Die graduierten abelschen Gruppen bilden mit den angegebenen Homomorphismen die Kategorie der graduierten abelschen Gruppen. Diese wird mit

$$\mathbf{GAb}$$

bezeichnet. Ist G eine graduierte abelsche Gruppe, so bezeichnet G[i] die graduierte abelsche Gruppe mit

$$G[i]_n := G[n+i].$$

Beispiele.

(i) Einen Komplex K kann man als graduierte abelsche Gruppe

$$K := \oplus_{n\in\mathbb{Z}}K_n$$

betrachten, zusammen mit einem Morphismus $\partial:K\to K[-1]$, welcher der Bedingung

$$\partial\circ\partial = 0$$

genügt.

(ii) Kern und Bild der Randabbildung ∂ sind dann graduierte Gruppen

$$ZK = Ker(\partial) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} Z_n K$$

$$BK = Im(\partial) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} B_n K$$

deren n-te homogene Bestandteile aus den n-Zyklen bzw. n-Rändern bestehen.

(iii) Die Homologie von K ist die Gruppe

$$HK := ZK/BK.$$

Dies ist eine graduierte abelsche Gruppe

$$HK = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n K$$

deren n-ter homogenere Bestandteil aus den n-dimensionalen Homologieklassen von K gebildet wird.

Der Übergang zur Homologie definiert einen Funktor

$$H: \partial\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Gab}.$$

Jeder abelschen Gruppe A∈Ab und jeder ganzen Zahl k∈ℤ kann man einen Komplex (A,k) zuordnen mit

$$(A,k)_n = \begin{cases} A \text{ falls } n=k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

wobei die Randabbildungen sämtlich Null sind. Diese Konstruktion definiert für jedes k einen Funktor

$$\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{GAb},\ A \mapsto (A,k).$$

2.1.5 Direkte Summen von Komplexen

Sei $\{K^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von Komplexen (die wir hier als graduierte Gruppen betrachten wollen). Dann heißt der Komplex

$$K := \oplus_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda$$

mit der Randabbildung $\partial := \oplus_{\lambda\in\Lambda} \partial^\lambda$ direkte Summe der Familie $\{K^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Es gilt

$$K_n = \oplus_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda_n$$

$$\partial_n(\{c^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) = \{\partial^\lambda_n(c^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$$

also

$$ZK = \oplus_{\lambda\in\Lambda} ZK^\lambda$$

$$BK = \oplus_{\lambda\in\Lambda} BK^\lambda$$

$$HK = \oplus_{\lambda\in\Lambda} HK^\lambda$$

Analoge Konstruktionen bestehen für das direkte Produkt.

2.1.6 Der Kegel einer Komplexabbildung

Das ist ein technisch wichtiger Begriff, der mit dem Kegel über einem topologischen Raum zusammenhängt.

Sei $f:(K',\partial')\rightarrow(K'',\partial'')$ eine Komplexabbildung. Der Kegel Cf über f ist dann definiert als der Komplex mit

$$(Cf)_n := K''_n \oplus K'_{n-1}.$$

Die n-te Randabbildung ist wie folgt definiert.

$$\partial(c'',c') = (\partial''c''+fc', -\partial'c').$$

Betrachtet man die Elemente von $(Cf)_n$ als zweizeilige Spaltenvektoren, so besteht ∂ gerade in der "Multiplikation" mit der Matrix

$$\partial = \begin{pmatrix} \partial'' & f \\ 0 & -\partial' \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist

$$\partial\circ\partial = \begin{pmatrix} \partial'' & f \\ 0 & -\partial' \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} \partial'' & f \\ 0 & -\partial' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial''\circ\partial'' & \partial''\circ f - f\circ\partial' \\ 0 & \partial'\circ\partial' \end{pmatrix}$$

die Nullabbildung, d.h. Cf ist tatsächlich ein Komplex.

Spezialfälle

(i) Im Fall K=K', K"=0, f=0 schreibt man auch

$$K^+ := Cf.$$

Es gilt dann $K_n^+ = K_{n-1}$, $\partial^{K^+} = -\partial^K$, also $H_n K^+ = H_{n-1}K$, also

$$H(K^+) = (HK)[-1].$$

K^+ heißt Suspension über K.

(ii) Im Fall K=K'=K", f=id schreibt man auch

$$CK = Cf.$$

CK heißt Kegel über K.

2.1.7 Die kurze exakte Sequenz zum Abbildungskegel

Sei f:K'→K" eine Komplexabbildung. Dann besteht eine kurze exakte Sequenz von Komplexabbildungen

$$0\to K'' \xrightarrow{\iota} Cf \xrightarrow{\kappa} K'[-1]\to 0.$$

mit $\iota(c') = (0,c')$ und $\kappa(c'',c') = c'$. Es ist leicht zu sehen, daß ι und κ Komplexabbildungen sind. Offensichtlich gilt $Im(\iota) = Ker(\kappa)$, d.h. die Sequenz ist tatsächlich exakt.

Diese Sequenz zerfällt als Sequenz graduierter Gruppen, jedoch im allgemeinen nicht in der Komplexkategorie (Nehme K = K = $(\mathbb{Z},0)$ und f = id).

2.1.8 Aufgaben

Diagramm-Lemmata

1. **Fünferlemma**.Die Zeilen des folgenden kommutativen Diagramms von abelschen Gruppen und Gruppenhomomophismen seien exakt.

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & D & \to & E \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \downarrow\delta & & \downarrow\varepsilon \\ A' & \to & B' & \to & C' & \to & D' & \to & E' \end{array}$$

Weiter seien $\alpha,\beta,\delta,\varepsilon$ Isomorphismen. Zeigen Sie, dann ist auch γ ein Isomorphismus.

2. **3×3-Lemma**. Folgendes Diagramm von abelschen Gruppen und Gruppenhomorphismen sei kommutativ.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A'' & \to & B'' & \to & C'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Die Komposition von je zwei zusammensetzbaren Homomorphismen in derselben Richtung sei Null. Sämtliche Zeilen und sämtliche Spalten mit einer Ausnahme seien exakt. Zeigen Sie, auch die verbleibende Zeile bzw. Spalte ist dann exakt.

3. **Schlangenlemma**. Die Zeilen des folgenden kommutativen Diagramms von abelschen Gruppen und Gruppenhomomophismen seien exakt.

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & D & \to & E \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \downarrow\delta & & \downarrow\varepsilon \\ A' & \to & B' & \to & C' & \to & D' & \to & E' \end{array}$$

Außerdem seien α surjektiv und ε injektiv. Zeigen Sie, es gibt eine exakte Sequenz der folgend Gestalt.

$$\mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\gamma) \to \mathrm{Ker}(\delta) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Coker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(\gamma) \to \mathrm{Coker}(\delta)$$

Hier bezeichne Ker(f) den Kern des Homomorphismus $f:X\to Y$ und Coker(f) = Y/Im(f) seinen Kokern.

Hinweis zur Konstruktion von ∂. Seien $K := \mathrm{Ker}(C\to D')$ und $K'= \mathrm{Coker}(B\to C')$. Zeigen Sie, es gibt eine surjektiven Homomophismus $K\to\mathrm{Ker}(\delta)$ und einen injektiven Homomorphismus $\mathrm{Coker}(\beta)\to K'$. Zeigen Sie weiter, es gibt genau einen Homomorphismus $\partial:\mathrm{Ker}(\delta)\to\mathrm{Coker}(\beta)$ derart, daß die beiden folgenden Kompositionen übereinstimmen.

$$K\to C\xrightarrow{\gamma} C'\to K'$$

$$K\to \mathrm{Ker}(\delta)\xrightarrow{\partial} \mathrm{Coker}(\beta)\to K'$$

4. Für je zwei Komplexe abelscher Gruppen K und L definieren wir einen Komplex Hom(K,L) indem wir für jedes $n\in\mathbb{Z}$ setzen

$$\mathrm{Hom}(K,L)_n := \times_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(K_k,L_{k+n}),$$

d.h. ein Element von $\mathrm{Hom}(K,L)_n$ ist eine Familie

$$f = \{f_k:K_k \to L_{k+n}\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

von Gruppenhomomorphismen. Der Rand von f sei durch

$$\partial(f) := \{\partial\circ f_k - (-1)^n f_{k-1}\circ\partial\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, auf diese Weise ist tatsächlich ein Komplex definiert.

(ii) Beschreiben Sie die Zyklen $Z_0\mathrm{Hom}(K,L)$.

(iii) Beschreiben Sie die Ränder $B_0\mathrm{Hom}(K,L)$.

5. Zeigen Sie, der Kegel C(K) über einem beliebigen Komplex K ist homologisch trivial, d.h. $H(C(K)) = 0$.

6. <u>Zerfallende exakte Seqenzen</u>. Zeigen Sie, für eine kurze exakte Sequenz

$$0\to A\xrightarrow{\alpha} B\xrightarrow{\beta} C\to 0$$

von abelschen Gruppen sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

(i) (*) zerfällt.

(ii) Es gibt einen zu α linksinversen Homomorphismus.

(iii) Es gibt einen zu β rechtsinversen Homomorphismus.

(iv) Es gibt Homomorphismen a':B→A und b'C→B mit

$$\alpha' \circ \alpha = id,\ \beta \circ \beta' = id,\ \alpha \circ \alpha' + \beta' \circ \beta = id.$$

7.

Simplizialkomplexe

8. Geordneter simplizialer Kettenkomplex. Sei K ein Simplizialkomplex. Ein geordnetes q-Simplex von K ist ein (q+1)-Tupel $(e_0,...,e_q)$ derart, daß $\{e_0,...,e_q\}$ ein q-Simplex von K ist. Für jeden Simplizialkomplex K bezeichne $S_q(K)$ die von den geordneten q-Simplexen erzeugte freie abelsche Gruppe.
(a) Zeigen Sie, die Familie der $S_q(K)$ bildet mit den Randhomomorphismen

$$\partial_q : S_q(K) \to S_{q-1}(K),\ (e_0,...,e_q) \mapsto \sum_{i=0}^{q} (-1)^i\ (e_0,...,e_{i-1},e_{i+1},...,e_q)$$

einen Kettenkomplex S(K). Dieser heißt geordneter simplizialer Kettenkomplex von K.
(b) Sei K der Simplizialkomplex, welcher aus allen echten Teilmengen der Dreiermenge {A,B,C} besteht (d.h. |K| ist der Rand eines Dreiecks). Bestimmen Sie S(K) und $H_1(S(K))$. Ändern Sie die Definition von S(K) so ab, daß S(K) die 'richtige' Homologie bekommt (d.h. die Homologie eines Dreiecksrandes).

(c) Setzen sie die Zuordnung K $\mapsto$ S(K) fort zu einen Funktor

$$S: \tilde{\Delta} \to K(Ab)$$

von der Kategorie der Simplizialkomplexe in die Kategorie der Kettenkomplexe.

9. Orientierter Kettenkomplex. Sei K ein abstrakter Simplizialkomplex, dessen Eckenmenge mit einer linearen Ordnung versehen ist (d.h. einer Halbordnung $\leq$, bezüglich welcher je zwei Ecken vergleichbar sind). Ein geordnetes Simplex

$$(e_0,...,e_q)$$

von K heißt orientiert, wenn gilt

$$e_0 < ... < e_q.$$

(a) Zeigen Sie, die von den orientierten Simplexen erzeugte freie abelsche Gruppe hat die Struktur eines Teilkomplexes

$$C(K) \subseteq S(K)$$

des geordneten simplizialen Kettenkomplexes (welcher orientierter simplizialer Kettenkomplex von K heißt). Zeigen Sie weiter, diese Inklusionen definieren eine natürliche Transformation

$$C \to S : \hat{\Delta} \to K(Ab)$$

Funktoren auf der Kategorie der geordneten Simplizialkomplexe $\hat{\Delta}$ mit Werten in der Kategorie K(Ab) der Komplexe abelscher Gruppen.

(b) Für jedes geordnete Simplex $(e_0,...,e_q)$ mit paarweise verschiedenen Ecken setzen wir

$$[e_0,...,e_q] := \mathrm{sign}(\sigma)\ (e_{\sigma 0}, ..., e_{\sigma q}),$$

wobei σ die Permutation bezeichne mit $e_{\sigma 0} < ... < e_{\sigma q}$. Falls das geordnete Simplex mehrfache Ecken hat, setzen wir

$$[e_0,...,e_q] := 0.$$

Zeigen Sie, durch

$$S(K) \to C(K),\ (e_0,...,e_q) \mapsto [e_0,...,e_q],$$

ist eine Komplex-Abbildung definiert.

(c) Geben Sie eine Definition von C(K) an, die unabhängig von der Wahl einer linearen Ordnung auf der Eckenmenge ist. Zeigen Sie, die Komplex-Abbildungen $S(K) \to C(K)$ definieren eine natürliche Transformation

$$S \to C : \tilde{\Delta} \to K(Ab)$$

von Funktoren auf der Kategorie der Simplizialkomplexe $\tilde{\Delta}$ mit Werten in der Kategorie K(Ab) der Komplexe abelscher Gruppen.

(d) Setzen sie die in (a) -.(c) definierten Funktoren und natürlichen Transformationen auf die jeweiligen Paar-Kategorien $\hat{\Delta}^{(2)}$ bzw. $\tilde{\Delta}^{(2)}$ fort.

Simpliziale Objekte

16. Sei $F: \Delta^{op} \to Ab$ eine simpliziale Gruppe. Zeigen Sie, F definiert einen Komplex $K(F)$ mit

$$K(F)_n = \begin{cases} F([n]) \text{ für } n \geq 0 \\ 0 \quad \text{sond} \end{cases}$$

und den Randabbildungen

$$K(F)_n \to K(F)_{n-1},\ x \mapsto \sum_{j=0}^{n} (-1)^j F(\varepsilon^j_n)(x)$$

17. Wir betrachten die Kategorie Δ von 1.1.4 wie in Aufgabe 6 von 1.1.18 als Teilkategorie von Top und fixieren einen topologischen Raum $X \in |Top|$. Sei

$$F = h^X|_\Delta : \Delta^{op} \to Ens,\ [n] \mapsto Hom_{Top}(\Delta_n, X),$$

die Einschränkung des kontravarianten Hom-Funktors auf h^X auf die Teilkategorie Δ. Beschreiben Sie den Komplex

$$K(<F>) = K(<h^X|_\Delta>)$$

zur simplizialen abelschen Gruppe <F> von 1.1.18 Aufgabe 23.

2.2 Die lange exakte Homologiesequenz

2.2.1 Teilkomplexe und Faktorkomplexe

Seien K und K' zwei Komplexe mit der Eigenschaft, daß $K'_n \subseteq K_n$ für jedes n eine Untergruppe ist und die Randabbildungen von K' die Einschränkungen der Randabbidlungen von K sind. Dann heißt K' Teilkomplex von K. Es gilt dann

$$\partial_n(K'_n) \subseteq K'_{n-1},$$

d.h. die Randabbildung $\partial_n : K_n \to K_{n-1}$ induziert einen Homomorphismus

$$\bar{\partial}_n : K_n/K'_n \to K_{n-1}/K'_{n-1},\ cl(c) \mapsto cl(\partial_n(c)),$$

wobei cl(c) die Restklasse von c bezeichnet. Wir setzen

$$\bar{K}_n := K_n/K'_n$$

Dann ist das folgende Diagramm kommutativ,

$$\begin{array}{ccc} K_n & \xrightarrow{\partial_n} & K_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{K}_n & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & \bar{K}_{n-1} \end{array}$$

und es gilt

$$\bar{\partial}_{n-1} \circ \bar{\partial}_n = 0$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$. Letzteres bedeutet, die Familie

$$\bar{K} := \{\bar{\partial}_n : \bar{K}_n \to \bar{K}_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

ist ein Komplex. Auf Grund der Kommutativität der obigen Vierecke setzen sich die natürlichen Abbildungen

$$\rho_n : K_n \to \bar{K}_n$$

zu einer Kettenabbildung $\rho: K \to \bar{K}$ zusammen. Ein Komplex der Gestalt $\bar{K}$ heißt Faktorkomplex, und $\rho: K \to \bar{K}$ heißt wie üblich natürliche Abbildung. Bezeichnung:

$$\bar{K} = K/K'.$$

2.2.2 Beispiele für Teil- und Faktorkomplexe

Sei $f: K \to K'$ eine Kettenabbildung. Der Kern von f wird mit Ker(f) bezeichnet und ist ein Teilkomplex von K mit

$$\mathrm{Ker}(f)_n := \mathrm{Ker}(f_n).$$

Das Bild von f wird mit Im(f) bezeichnet und ist ein Teilkomplex von K' mit

$$\mathrm{Im}(f) := \mathrm{Im}(f_n).$$

Auf Grund des Homomorphiesatzes für Gruppen ist der Faktorkomplex K/Ker(f) isomorph zu Im(f),

$$\mathrm{Im}(f) \cong K/\mathrm{Ker}(f).$$

Eine Sequenz von Kettenabbildungen

$$\ldots \to K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \to \ldots$$

heißt exakt an der Stelle K, wenn $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$ gilt. Sei heißt exakt, wenn sie an allen Stellen exakt ist. Zum Beispiel ist für jeden Teilkomplex $L \subseteq K$ die kurze Sequenz

$$0 \to L \to K \to K/L \to 0$$

exakt. Wie im Fall von abelschen Gruppen sind alle kurzen exakten Sequenzen isomorph zu einer Sequenz dieser Gestalt.

2.2.3 Die Halbexaktheit des Homologiefunktors

Sei

$$0 \to K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen. Dann ist die folgende Sequenz von Homomorphismen graduierter abelscher Gruppen ebenfalls exakt.

$$H(K') \xrightarrow{H(\alpha)} H(K) \xrightarrow{H(\beta)} H(K'').$$

Bemerkung. Diese Aussage ist bedeutet gerade, daß jedes der Sequenzen

$$H_n(K') \xrightarrow{H_n(\alpha)} H_n(K) \xrightarrow{H_n(\beta)} H_n(K'').$$

exakt ist.

Beweis von 2.2.3. Wir haben zu zeigen, $\mathrm{Im}(H(\alpha)) = \mathrm{Ker}(H(\beta))$. Nach Voraussetzung ist $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$, insbesondere ist also

$$\beta \circ \alpha = 0$$

die Nullabbildung. Da H ein Funktor ist, folgt $H(\beta) \circ H(\alpha) = 0$, also

$$\mathrm{Im}\, H(\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}\, H(\beta).$$

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion nehmen wir an, wir hätten ein Element $[c] \in \mathrm{Ker}(H(\beta))$ gegeben. Wir haben zu zeigen, [c] liegt im Bild von $H(\alpha)$.Es gilt

$$0 = H(\beta)(c) = [\beta(c)]$$

in H(K"). Das bedeutet, $\beta(c)$ ist ein Rand,

$$\beta(c) = \partial''(d'')$$

für eine Kette d" von K". Nun ist nach Voraussetzung die Kettenabbildung β surjektiv, d.h. es gibt eine Kette d von K mit

$$d'' = \beta(d).$$

Nach Konstruktion gilt

$$\beta(\partial d) = \partial'' \circ \beta(d) = \partial''(d'') = \beta(c)$$

also

$$\beta(c - \partial d) = 0.$$

Nun ist die gegebene Komplexsequenz aber exakt, d.h. es gibt eine Kette c' von K' mit

$$\alpha(c') = c - \partial d. \qquad (1)$$

Da auf der rechten Seite eine Differenz von Zyklen steht, ist auch $\alpha(c')$ ein Zyklus,

$$0 = \partial\alpha(c') = \alpha(\partial' c').$$

Da α nach Voraussetzung injektiv ist, folgt $\partial' c' = 0$, d.h. c' ist ein Zyklus von K'. Berechnen wir das Bild der zugehörigen Homologieklasse bei $H(\alpha)$. Nach (1) gilt

$$H(\alpha)[c'] = [\alpha(c')] = [c - \partial(d)] = [c].$$

Insbesondere liegt [c] im Bild von $H(\alpha)$.

QED.

Bemerkungen.

(i) Die obige exakte Sequenz von Homologiegruppen läßt sich im allgemeinen nicht zu einer kurzen exakten Sequenz erweitern. Um das einzusehen, kann man zum Beispiel

$$K' = K'' = (\mathbb{Z},0)$$

setzen, d.h. für K' und K" nehmen wir den im Grad 0 konzentrierten Komplex, dessen einzige von Null verschiedene Komponente $\mathbb{Z}$ ist. Als kurze exakte Komplexsequenz nehmen wir die zum Abbildungskegel der identischen Abbildung $\mathrm{id}:(\mathbb{Z},0) \to (\mathbb{Z},0)$ gehörige.

$$0 \to (\mathbb{Z},0) \to C(\mathrm{id}) \to (\mathbb{Z},1) \to 0.$$

Die Differentiale der beiden äußeren Komplexe sind identisch Null. Der Komplex in der Mitte ist konzentriert in den Grad 0 und 1 und dort isomorph zu $\mathbb{Z}$. Sein

Differential im Grad 1 ist die identische Abbildung. Alle anderen Differentiale sind ebenfalls Null.

$$C(id): \ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots$$

Damit gilt

$H(\mathbb{Z},0) = (\mathbb{Z},0)$
$HC(id) \quad = 0$
$H(\mathbb{Z},1) = (\mathbb{Z},1)$

Die Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} H(\mathbb{Z},0) & \longrightarrow & HC(id) & \longrightarrow & H(\mathbb{Z},1) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathbb{Z} & & 0 & & \mathbb{Z} \end{array}$$

ist somit nicht Teil einer kurzen exakten Sequenz.

(ii) Unser nächstes Ziel ist es, ein Maß für die Abweichung des Homomorphismus

$$H(K) \to H(K'')$$

von der Surjektivität zu finden (bzw. ein Maß für die Abweichung von $H(K') \to H(K)$ von der Injektivität). Etwas genauer, zu jedem $h'' \in H(K'')$ wollen wir ein Element

$$\partial_* h'' \in H(K')$$

konstruieren, welches genau dann Null ist, wenn h" ein Urbild in H(K) besitzt. Man sagt auch, $\partial_* h''$ ist ein Hindernis für die Existenz eines Urbildes von h" in H(K). Man kann zeigen, durch diese Eigenschaft ist die Abbildung

$$\partial_*: H(K'') \to H(K'),$$

die wir jetzt konstruieren werden, vollständig charakterisiert.

2.2.4 Konstruktion des Zusammenhangshomomorphismus

Sei eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \to 0$$

von Kettenabbildungen gegeben. Betrachten wir die Homomorphismen

$$H_{n-1}(K') \xleftarrow{\bar{\partial}} \beta^{-1}(Z_n(K'')) \xrightarrow{\bar{\beta}} H_n(K'')$$

mit

$\bar{\beta}(c) \quad := [\beta(c)]$

$\bar{\partial}(c) \quad := [\alpha^{-1} \circ \partial(c)]$

Wir haben uns zunächst zu überzeugen, daß die Homomorphismen wohldefiniert sind.

Zur Korrektheit der Definition von $\bar{\beta}$. Für $c \in \beta^{-1}(Z_n(K''))$ gilt $\beta(c) \in Z_n(K'')$, d.h. $\beta(c)$ ist ein Zyklus und $[\beta(c)]$ ein wohldefiniertes Element von $H_n(K'')$.

Zur Korrektheit der Definition von $\bar{\partial}$.Für $c \in \beta^{-1}(Z_n(K''))$ gilt $\beta(c) \in Z_n(K'')$, also

$$0 = (\partial'' \circ \beta)(c) = (\beta \circ \partial)(c),$$

d.h $\partial(c) \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$. Da α nach Voraussetzung injektiv ist, gibt es genau eine Kette

$c' := \alpha^{-1}(\partial(c)) \in K'$ mit $\alpha(c') = \partial(c)$. Wir haben noch zu zeigen, c' ist ein Zyklus. Zumindest gilt

$$\alpha(\partial'(c')) = \partial(\alpha(c')) = \partial(\partial(c)) = 0.$$

Da aber α injektiv ist, folgt $\partial'(c') = 0$, d.h. c' definiert ein Element

$$\bar{\partial}(c) := [c']$$

von $H_{n-1}(K')$.

Definition des Zusammenhangshomomorphismus.

$$\partial_*: H_n(K'') \to H_{n-1}(K'),\ [c''] \mapsto \text{einziges Element der Menge } \bar{\partial}(\bar{\beta}^{-1}([c'']))$$

(mit anderen Worten, die Zuordnung hat die Gestalt $[\beta(x)] \mapsto [\alpha^{-1}(\partial x)]$

Zur Korrektheit der Definition von ∂_*. Wir haben zu zeigen, die Menge $\bar{\partial}(\bar{\beta}^{-1}([c'']))$ besteht aus genau einem Element. Zunächst beachten wir ,die durch β induziert Abbildung

$$\beta^{-1}(Z_n(K'')) \to Z_n(K'')$$

ist surjektiv (da β surjektiv ist). Die Zusammensetzung mit der natürlichen Abbildung

$$Z_n(K'') \to H_n(K'')$$

ist also auch surjektiv. Mit anderen Worten, $\bar{\beta}$ ist eine Surjektion. Insbesondere ist also die Menge $\bar{\partial}(\bar{\beta}^{-1}([c'']))$ nicht-leer. Seien jetzt $c,d \in \bar{\beta}^{-1}([c''])$ zwei Elemente. Wir haben zu zeigen $\bar{\partial}(c) = \bar{\partial}(d)$.

$$\begin{array}{ccccc}
\partial f' & K'^{,n-1} & [c],[c-d] & \overset{\bar{\beta}}{\mapsto} & [c''],0 \in H_n(K'') \\
\updownarrow & \uparrow & \updownarrow [] & & \Updownarrow \\
 & K'^{,n} \xrightarrow{\alpha} & \beta^{-1}(Z_n(K'')) & \xrightarrow{\beta} & Z_n(K'') \\
f' & & c-d-e,c-d & & 0,\partial e''
\end{array}$$

Auf jeden Fall gilt $\bar{\beta}(c) = [c''] = \bar{\beta}(d)$, d.h. $\beta(c)-\beta(d) = \partial''e''$ ist ein Rand von K''. Sei e eine Kette von K mit $\beta(e) = e''$. Dann gilt

$$\beta(c-d-\partial e) = \beta(c-d) - \partial''\beta(e) = 0,$$

d.h. $c-d-\partial e \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$. Sei f' eine Kette von K' mit $\alpha(f') = c-d-\partial e$. Dann gilt

$$\alpha(\partial' f') = \partial(\alpha(f')) = \partial c - \partial d - \partial\partial e = \partial c - \partial d,$$

also $\partial' f' = \alpha^{-1}(\partial c) - \alpha^{-1}(\partial d)$. Übergang zu den Homologieklassen liefert $\bar{\partial} c = \bar{\partial} d$.
QED.

Bemerkung. Als nächstes zeigen wir, der Zusammenhangshomomorphismus ist eine natürliche Transformation

$$\partial_*: H_n(K'') \to H_{n-1}(K')$$

wenn man H_n und H_{n-1} als Funktoren auf der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von Komplexen auffaßt.

$$H_n: \quad 0 \to K' \to K \to K'' \to 0 \quad \mapsto \quad H_n(K'')$$

$$H_{n-1}:\ 0\to K'\to K\to K''\to 0 \quad \mapsto \quad H_{n-1}(K')$$

2.2.5 Funktorialität des Zusammenhangshomomorphismus

Sei

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & K' & \to & K & \to & K'' \to 0 \\ & & f'\downarrow & & f\downarrow & & f''\downarrow \\ 0 & \to & L' & \to & L & \to & L'' \to 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenabbildungen, dessen Zeilen exakt sind. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} H_n(K'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(K') \\ H(f'')_n\downarrow & & \downarrow H(f')_{n-1} \\ H_n(L'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(L') \end{array}$$

Beweis. Die beiden bei der Konstruktion von ∂_* auftretenden Abbildungen sind natürliche Transformationen, d.h. liefern kommutative Diagramme des obigen Typs. Diese setzen sich zu dem gesuchten kommutativen Diagramm zusammen.
QED.

2.2.6 Die Exaktheit der langen Homologiesequenz

Sei

$$0\to K'\xrightarrow{\alpha} K\xrightarrow{\beta} K''\to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen. Dann ist die zugehörige Sequenz

$$\ldots\xrightarrow{\partial_*} H_n(K')\xrightarrow{\alpha_*} H_n(K)\xrightarrow{\beta_*} H_n(K'')\xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K')\xrightarrow{\alpha_*}\ldots$$

ebenfalls exakt.
Beweis. Nach 2.2.3 genügt es, die Exaktheit an den Stellen H(K') and H(K'') zu beweisen. Das führt auf die nachfolgend bewiesenen vier Inklusionen.

1. Schritt. $\mathrm{Im}(\partial_*)\subseteq\mathrm{Ker}(\alpha_*)$. Ein Element aus dem Bild von ∂_* hat die Gestalt

$$[\alpha^{-1}(\partial x)] \text{ mit } [\beta(x)]\in H(K'').$$

Anwenden von α_* liefert

$$\alpha_*([\alpha^{-1}(\partial x)]) = [\partial x] = 0.$$

2. Schritt. $\mathrm{Ker}(\alpha_*)\subseteq\mathrm{Im}(\partial_*)$. Liege $[z']\in H_n(K')$ im Kern von α_*, d.h sei

$$0=\alpha_*[z'] = [\alpha z'].$$

Mit anderen Worten, $\alpha z'$ soll ein Rand sein: $\alpha z' = \partial c$ mit einer Kette $c\in K$. Es gilt

$$\partial''\beta c = \beta\partial c = \beta\alpha z' = 0,$$

d.h. βc definiert eine Homologieklass $[\beta c]\in H_n(K'')$. Ihr Bild bei ∂_* ist

$$\partial_*[\beta c] = [\alpha^{-1}(\partial c)] = [\alpha^{-1}(\alpha z')] = [z'],$$

d.h. $[z']$ liegt im Bild von ∂_*.

3. Schritt. $\mathrm{Im}(\beta_*)\subseteq\mathrm{Ker}(\partial_*)$. Für $[z]\in H_n(K)$ gilt $\partial_*(\beta_*([z])) = \partial_*([\beta z]) = [\alpha^{-1}(\partial z)] = 0$ (da z ein Zyklus ist).

4. Schritt. $\mathrm{Ker}(\partial_*)\subseteq\mathrm{Im}(\beta_*)$. Liege $[z"]\in H_n(K")$ im Kern von ∂_*, d.h. es gibt ein $c\in K$ mit

$$[z"] = [\beta c] \text{ und } [\alpha^{-1}(\partial c)] = 0 \text{ in } H_{n-1}(K').$$

Die zweite Bedingung bedeutet, $\alpha^{-1}(\partial c)$ ist ein Rand, d.h es gibt ein $c'\in K'$ mit

$$\alpha^{-1}(\partial c) = \partial' c'.$$

Damit ist aber

$$\partial(c-\alpha c') = \partial c - \alpha\partial' c = 0,$$

d.h. $c-\alpha c'$ definiert eine Homologiegruppe $[c-\alpha c']\in H_n(K)$. Deren Bild bei β_* ist

$$\beta_*([c-\alpha c']) = [\beta c - \beta\alpha c] = [\beta c] = [z"],$$

d.h. $[z"]$ liegt im Bild von β_*.

QED.

2.2.7 Quasi-Isomorphismen

Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K' & \to & K & \to & K" & \to & 0 \\ & & f'\downarrow & & f\downarrow & & f"\downarrow & & \\ 0 & \to & L' & \to & L & \to & L" & \to & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenabbildungen, dessen Zeilen exakt sind. Falls zwei der drei vertikalen Kettenabbildungen einen Isomorphismus der Homologiegruppen induziert, so gilt dies auch für die dritte.

Beweis. Dies ergibt sich aus den beiden langen Homologiesequenzen zu den Zeilen des Diagramms und dem Fünferlemma.

QED.

2.2.8 Zerfallende Sequenzen

Sei

$$0\to A'\xrightarrow{\alpha} A\xrightarrow{\beta} A"\to 0 \qquad (1)$$

eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Die Sequenz heißt zerfallend, wenn wenn sie zu einer Sequenz der Gestalt

$$0\to A'\xrightarrow{i} A'\oplus A"\xrightarrow{p} A"\to 0 \qquad (2)$$

mit $i(a') = (a',0)$ und $p(a',a") = a"$ isomorph ist (in der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen). Mit anderen Worten, es gebe ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A' & \xrightarrow{\alpha} & A & \xrightarrow{\beta} & A" & \to & 0 \\ & & f'\downarrow & & f\downarrow & & f"\downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{i} & A'\oplus A" & \xrightarrow{p} & A" & \to & 0 \end{array}$$

dessen vertikale Homomorphismen Isomorphismen sind.

Es ist nicht schwer, einzusehen (vgl. die Übungsaufgaben), daß das Zerfallen der exakten Sequenz äquivalent ist zu jeder der folgenden drei Aussagen.

(i) Es gibt eine Retraktion α': $A \longrightarrow A'$ von α .[2]

(ii) Es gibt einen Schnitt β': $A'' \longrightarrow A$ von β.[3]

(iii) Es gibt eine Retraktion α' von α und einen Schnitt β' von β mit

$$\alpha\circ\alpha'+\beta'\circ\beta = id.$$[4]

Man sagt, ein Komplex von Kettenabbildungen

$$0\to K'\to K\to K''\to 0$$

zerfällt in jeder Dimension, wenn für jedes $n\in\mathbb{Z}$ die zugehörige Sequenz abelscher Gruppen

$$0\to K_n'\to K_n\to K_n''\to 0$$

zerfällt. In dieser Situation ist die Beschreibung des Zusammenhangshomomorphismus besonders einfach.

2.2.8 Komplexsequenzen die in jeder Dimension zerfallen

Sei

$$0\to K'\xrightarrow{\alpha} K\xrightarrow{\beta} K''\to 0 \qquad (1)$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen, welche in jeder Dimension zerfällt. Weiter seien für jedes n Homorphismen α_n', β_n' gegeben mit

$$\alpha_n'\circ\alpha_n = id,\ \beta_n\circ\beta'_n = id,\ \alpha_n\circ\alpha'_n+\beta'_n\circ\beta_n = id.$$

Dann setzen sich die Homomorphismen

$$d_n := \alpha_n'\circ\partial_n\circ\beta_n': K''_n\to K'_{n-1} = (K'^{+})_n$$

zu einer Kettenabbildung

$$d: K''\to K'^{+}$$

zusammen. Die von d auf der Homologie induzierte Abbildung

$$H(d): H(K'')\to H(K'^{+})$$

ist gerade der Zusammenhangshomomorphismus zu (1).

Beweis. Zeigen wir, d kommutiert mit den Randabbildungen. Es gilt

$$\begin{aligned}\alpha\partial'd &= \alpha\partial'\alpha'\partial\beta' = \partial\alpha\alpha'\partial\beta' = \partial(id-\beta'\beta)\partial\beta' = \partial\partial\beta' - \partial\beta'\beta\partial\beta'\\ &= -\partial\beta'\partial''\beta\beta' = -\partial\beta'\partial''\\ &= -(\alpha\alpha'+\beta'\beta)\partial\beta'\partial'' = -\alpha\alpha'\partial\beta'\partial'' - \beta'\beta\partial\beta'\partial'' = -\alpha d\partial'' - \beta'\partial''\beta\beta'\partial''\\ &= -\alpha d\partial'' - b'\partial''\partial''\\ &= -\alpha d\partial''\end{aligned}$$

Weil α injektiv ist, folgt $\partial'^{+}d = d\partial''$, d.h. d ist eine Kettenabbildung.

Für $z''\in Z(K'')$ gilt weiter

---

[2] Die α' entsprechende Retraktion von i könnte gerade die natürliche Projektion $i': A'\oplus A''\longrightarrow A'$, $(a',a'')\mapsto a'$, auf die erste Koordinate sein.

[3] Der β' entsprechende Schnitt von p könnte gerade die natürliche Einbettung $p': A''\longrightarrow A'\oplus A''$, $a''\mapsto (0,a'')$, des zweiten direkten Summanden sein.

[4] Man beachte, für $(a', a'')\in A'\oplus A''$ gilt

$$(i\circ i' + p'\circ p)(a',a'') = i(a') + p'(a'') = (a',0) + (0,a'') = (a', a'').$$

$$\partial_*[z''] = [\alpha^{-1}\partial\beta' z''] = [\alpha'\partial\beta' z''] = [dz''].$$

QED.

2.2.9 Zusammenhangshomomorphismus eines Abbildungskegels

Seien f:K→K' eine Kettenabbildung und

$$0 \to K' \xrightarrow{\alpha} C(f) \xrightarrow{\beta} K[-1] \to 0$$

die exakte Sequenz zum Abbildungskegel von f. Der zugehörige Zusammenhangshomomorphismus ist dann gerade die von f induzierte Abbildung

$$H(f):H(K)\to H(K')$$

der Homologiegruppen.

Beweis. Die Sequenz zerfällt in jeder Dimension. Einen Schnitt von b kann man durch

$$\beta'(c) = (0,c)$$

definieren und eine Retraktion von a durch

$$\alpha'(c',c) = c'.$$

Nach 2.2.8 wird der Zusammenhangshomomorphimus induziert durch die Abbildung

$$K\to K',\ c \mapsto \begin{pmatrix}0\\ c\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\partial & f\\ 0 & -\partial\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}fc\\ -dc\end{pmatrix} \mapsto fc,$$

induziert, d.h. durch f.

QED.

2.2.10 Kriterium für Quasi-Isomorphie

Sei f:K→K' eine Kettenabbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) H(f):H(K)→H(K') ist ein Isomorphismus.

(ii) H(Cf) = 0.

Beweis. Ergibt sich aus der langen Homologiesequenz zum Abbildungskegel über f und der Interpretation 2.2.9 für deren Zusammenhangshomomorphismus.

QED.

Bemerkung

Im nächsten Abschnitt untersuchen wir das Analogon des Homotopie-Begriffs in der Kategorie der Komplexe.

2.3 Kettenhomotopie

2.3.1 Homotope Kettenabbildungen

Seien f,g: K→K' zwei Kettenabbildungen. Eine Homotopie s von f nach g ist eine Familie

$$\{s_n:K_n \to K'_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

von Homomorphismen mit

$$\partial'_{n+1}\circ s_n + s_{n-1}\circ\partial_n = f_n - g_n$$

für alle n∈ℤ. Man schreibt in dieser Situation

$$s:f \simeq g$$

und sagt, f und g sind homotop. Homotopie von Kettenabbildungen ist eine Äquivalenzrelation.

Reflexivität: 0:f≃f

Symmetrie: s: f ≃ g ⇒ -s:g ≃ f

Transitivität: s:f ≃ g und t:g≃h ⇒ s+t:f≃h.[5]
Die Äquivalenzklassen homotoper Abbildungen heißen Homotopieklassen. Die Homotopieklasse von f wird mit

[f]

bezeichnet.

2.3.2 Verträglichkeit mit der Komposition

Seien f,f':K→K und g,g':K'→K" Kettenabbildungen mit f≃f' und g≃g'. Dann gilt auch g∘f≃g'∘f'.
Beweis. Seien Homotopien

s: f ≃ f' und t: g ≃ g'

gegeben.Dann gilt

f-f' = ∂s+s∂ und g-g' = ∂t+t∂.

Wir wenden g auf die erste Identität an und erhalten

gf - gf' = g∂s+gs∂ = ∂gs+gs∂

also

gs: gf ≃ gf'.

Analog liefert die zweit Identität

tf': gf' ≃ g'f'.

Die Behauptung folgt damit aus der Transitivität der Homotopierelation.
QED.

2.3.3 Die Homotopiekategorie über ∂Ab

Die Komplexe abelscher Gruppen bilden zusammen mit den Homotopieklassen von Kettenabbildungen und der Komposition

[f]∘[g] := [f∘g]

eine Kategorie, welche mit ∂'**Ab** bezeichnet wird. Analog zur topologischen Situation gibt es einen Funktor

[]:∂**Ab) → ∂'Ab**,

der jeden Komplex in sich und jeden Morphismus in dessen Homotopie-Klasse abbildet.

Eine Kettenabbildung f:K→K', deren Homotopieklasse [f] ein Isomorphismus von ∂'**Ab** ist, heißt Homotopieäquivalenz. Falls ein solches f existiert, so heißen K und K' homotopieäquivalent. Ein Komplex K heißt kontrahiertbar, falls die identische Kettenabbildung id:K→K homotop zur Nullabbildung 0:K→K ist.

2.3.4 Die Homologie homotoper Abbildungen

Seien f,g:K→K' homotope Abbildungen. Dann gilt H(f) = H(g): H(K)→H(K').

Beweis. Sei s: f ≃ g eine Homotopie, d.h. es gelte

f - g = ∂s + s∂.

Für jedes [z]∈H(K) gilt dann,

H(f)[z] - H(g)[z] = [fz] - [gz] = [∂sz + s∂z]
= [∂sz + 0] (denn z ist ein Zyklus)
= 0 (die Homologieklasse eine Randes ist trivial).

QED.

2.3.5 Die Homologie einer Homotopieäquivalenz

Sei f:K→K' eine Homotopieäquivalenz. Dann ist H(f):H(K)→H(K') ein Isomorphismus.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Kettenabbildung g:K'→K mit

---

[5] Aus ∂'∘s + s∘∂ = f - g und ∂'∘t + t∘∂ = g - h folgt ∂'∘(s+t) + (s+t)∘∂ = f - h.

$$fg \simeq id \text{ und } gf \simeq id.$$

Durch Anwenden des Homologiefunktors erhalten wir nach 2.3.4

$$H(f)\circ H(g) = H(id) = id \text{ und } H(g)\circ H(f) = H(id) = id.$$

Mit anderen Worten, H(f) ist ein Isomorphismus.
QED.

Bemerkung
Für kontrahierbare Komplexe K gilt also H(K) = 0 (die identische Abbildung von H(K) ist gleich der Nullabbildung).

2.3.6 Kriterium für Kontrahierbarkeit

Sei K ein Komplex mit H(K)=0. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.
(i) K ist kontrahierbar.
(ii) Für jedes n ist $Z_n(K)$ ein direkter Summand von K_n.

Beweis. Betrachten wir die exakte Sequenz graduierter abelscher Gruppen,

$$0 \to Z(K) \to K \xrightarrow{\partial} B(K) \to 0.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii). Nach Voraussetzung ist die identische Kettenabbildung id:K→K nullhomotop, d.h. es gilt

$$id = id - 0 = \partial s + s\partial$$

mit einem Homomorphismus graduierter abelscher Gruppen s:K→K[+1]. Schränken wir diese Identität auf B(K) ein. Da ∂ auf B(K) identisch Null ist, folgt

$$id|_{B(K)} = \partial\circ s|_{B(K)}.$$

Mit anderen Worten, ∂ besitzt einen Schnitt, d.h. die obige Sequenz zerfällt und Z(K) ist direkter Summand von K (als graduierte abelsche Gruppe).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Ist Z(K) direkter Summand von K, so besitzt die Einbettung Z(K)⊆K ein Linksinverses, die obige Sequenz zerfällt, und ∂ besitzt einen Schnitt

$$t:B(K)\to K.$$

Insbesondere gilt

$$K = Z(K)\oplus tB(K) = B(K)\oplus tB(K).$$

Wir haben eine Homotopie von id nach 0 auf K zu definieren, d.h. einen Homomorphismus graduierter Gruppen

$$s: K \to K[+1].$$

Da K in eine direkte Summe zerfällt, genügt es, s auf jeden der beiden direkten Summanden zu definieren. Sei

$$s = \begin{cases} t \text{ auf } B(K) \\ 0 \text{ auf } tB(K) \end{cases}$$

Auf B(K) gilt dann

$$\partial\circ s + s\circ\partial = \partial\circ s = \partial\circ t = id$$

Schließlich gilt auf tB(K)

$$\partial\circ s + s\circ\partial = s\circ\partial = t\circ\partial = id$$

Man beachte, s ist auf tB(K) gleich Null, auf dem Bild von ∂ gleich t und ∂ ist auf tB(K) invers zu t..
QED.

2.3.7 Kontrahierbarkeit des Kegels und Homotopieäquivalenz

Ist der Kegel der Kettenabbildung f:K→K' kontrahierbar, so ist f eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Sei Cf kontrahierbar, d.h. Id: Cf $\longrightarrow$ Cf ist homotop zu 0: Cf $\longrightarrow$ Cf. Dann ist aber jede Kettenabbildung, die auf Cf definiert ist oder Werte in Cf annimmt, homotop zur 0-Abbildung. Es genügt also, folgende Aussagen zu beweisen.

(i) Ist die Einbettung i: K'→C(f), c'↦(c',0), nullhomotop, so besitzt f eine rechte Homotopieinverse h:K'→K, d.h. f∘h ≃ id.

(ii) Ist die Projektion p: C(f)→K, (c',c)↦c, nullhomotop, so besitzt f eine linke Homotopieinverse.

Zu (i). Sei S: i ≃ 0: K' ⟶ Cf eine Kettenhomotopie. Dann hat S die Gestalt

$$S(c') = \begin{pmatrix} g(c') \\ h(c') \end{pmatrix}$$

mit Abbildungen g: K'→K' und h:K'→K. Nun gilt in **GAb**

$$C(f) = K' \oplus K[-1]$$

in der Kategorie der graduierten abelschen Gruppen (nicht in der Komplexkategorie). Die Identität i = ∂S+S∂ läßt sich also in der folgenden Gestalt schreiben.

$$\begin{pmatrix} c' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial & f \\ 0 & -\partial \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g(c') \\ h(c') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(\partial c') \\ h(\partial c') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial g(c') + fh(c') + g\partial(c') \\ -\partial h(c') + h\partial(c') \end{pmatrix}$$

Mit anderen Worten , es gilt ∂h = h∂ und ∂g + g∂ = id - fh, d.h. h ist eine rechte Homotopieinverse von f.

Zu (ii). Sei T: p ≃ 0: Cf ⟶ K eine Kettenhomotopie. Dann hat T die Gestalt

$$T\begin{pmatrix} c' \\ c \end{pmatrix} = g(c) + h(c')$$

mit Abbildungen g: K→K und h:K'→K. Die Identität p = ∂T+T∂ läßt sich dann wie folgt schreiben (K^+ hat das Differential $\partial^+ := -\partial^K$).

$$\begin{aligned} c &= \partial(T\begin{pmatrix} c' \\ c \end{pmatrix}) + T(\begin{pmatrix} \partial & f \\ 0 & -\partial \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c' \\ c \end{pmatrix}) = \partial g(c) + \partial h(c') + T\begin{pmatrix} \partial c' + fc \\ -\partial c \end{pmatrix} \\ &= \partial g(c) + \partial h(c') + g(-\partial c) + h(\partial c' + fc) \\ &= \partial h(c') + h(\partial c') + \partial g(c) - g(\partial c) + h(f(c)) \end{aligned}$$

$$c = \partial\, g(c) + \partial h(c') - g(\partial c) + h(\partial c') + h(f(c)).$$

Es gilt also ∂h = h∂^+ und ∂^+g+g∂ = hf - id. Mit anderen Worten, h ist bis auf Homotopie linksinvers zu f.
QED.

2.3.8 Aufgaben

1. Zeigen Sie, der Kegel C(K) über einem beliebigen Komplex K ist kontrahierbar.
2. Beweisen Sie die Umkehrung von Aussage 2.3.7., d.h., ist die Kettenabbildung f:K→K' eine Homotopieäquivalenz, so ist der Kegel von f kontrahierbar.

2.4 Freie Komplexe

In 2.3.5 haben wir gezeigt, daß Homotopie-Äquivalenzen Quasi-Isomorphismen sind. In diesem Abschnitt beschreiben wir eine Klasse von Komplexen, für welche auch die umgekehrte Implikation besteht (siehe 2.4.3).

2.4.1 Definition

Ein Komplex (abelscher Gruppen) heißt frei, wenn für jede ganze Zahl q die abelsche Gruppe K_q frei ist.

2.4.2 Die Untergruppe der Zyklen ist ein direkter Summand

Sei K ein freier Komplex. Dann ist für jedes q die Untergruppe $Z_q K$ der q-Zyklen ein direkter Summand von K_q.

Beweis. Die Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist frei (siehe Anhang 1). Insbesondere ist die Untergruppe $BK \subseteq K$ frei. Dann zerfällt aber die folgende kurze exakte Sequenz graduierter ablescher Gruppen.

$$0 \to ZK \to K \to BK \to 0,$$

d.h. ZK ist ein direkter Summand von K.
QED.

2.4.3 Quasi-Isomorphie und Homotopieäquivalenz

Sei $f:K \to K'$ eine Kettenabbildung von freien Komplexen K und K', welche einen Isomorphismus $HK \to HK$ der Homologiegruppe induziert. Dann ist f eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Nach 2.3.7 genügt es zu zeigen, der Abbildungskegel $C(f) \simeq 0$ ist kontrahierbar. Nach 2.3.6 genügt es, wenn wir beweisen, es gilt $HCf = 0$ und ZCf ist direkter Summand von Cf .Das erste folgt aus 2.2.10 und das zweite aus 2.4.2.
QED.

Bemerkung

Wir haben im Fall von Kettenabbildungen $f:K \to K'$ freier Komplexe gezeigt,

f ist ein Quasi-Isomorphismus $\Rightarrow$ C(f) ist kontrahierbar

$\Nwarrow$ $\Downarrow$

f ist eine Homotopie-Äquivalenz

Die drei Bedingungen sind also für freie Komplexe äquivalent.

2.4.4 Kurze und elementare Komplexe

Ein Komplex heißt <u>kurz</u>, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$K_q = 0 \text{ für } q \in \{n, n+1\}$$

gibt und die Randabbildung

$$\partial_{n+1}: K_{n+1} \to K_n \text{ injektiv}$$

ist. Man sagt dann auch, K ist <u>im wesentlichen in der Dimension n konzentriert</u>. Der Komplex heißt <u>elementar</u>, wenn außerdem noch

$$K_n \cong \mathbb{Z}$$

gilt.

2.4.4 Zerlegung in kurze bzw. elementare Komplexe

Jeder freie Komplex K ist eine direkte Summe kurzer (freier) Komplexe. Ist außerdem noch jede der Gruppen K_q endlich erzeugt, so ist K sogar eine direkte Summe elementarer Komplexe.

2.4.5 Aufgaben

1. Zeigen Sie, die Untergruppe Z_nK der n-Zyklen eines freien Komplexes ist ein direkter Summand von K_n.
2. Ein Komplex K heißt <u>kurz</u>, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt sodaß alle K_i mit eventueller Ausnahme von K_n und K_{n-1} Null sind und die Randabbildung $\partial_n: K_n \to K_{n-1}$

injektiv ist. Zeigen Sie, jeder freie Komplex ist direkte Summe von kurzen Komplexen.

3. Ein kurzer Komplex K heißt elementar, wenn für zwei $n\in\mathbb{Z}$ die homogenen Bestandteile K_n isomorph zu $\mathbb{Z}$ sind. Zeigen Sie, jeder freie Komplex, dessen homogen Bestandteile endlich erzeugte abelsche Gruppen sind, ist direkte Summe elementarer Komplexe.
4. (Zusatzaufgabe, siehe auch Anhang). Eine (nicht notwendig endlich erzeugte) abelsche Gruppe G heißt frei, wenn sie isomorph ist zu einer direkten Summe von Exemplaren von $\mathbb{Z}$ (d.h. wenn sie ein über $\mathbb{Z}$ linear unabhängiges Erzeugendensystem besitzt). Zeigen Sie, jede Untergruppe U einer freien abelschen Gruppe G ist frei.
Hinweis: Wählen Sie ein Erzeugendensystem $\{u_i\}_{i\in I}$ von U. Da G frei ist, kann jedes u_i als (eventuell unendliches) Tupel ganzer Zahlen aufgefaßt werden. Das Erzeugendensystem $\{u_i\}_{i\in I}$ kann man daher in gewissem Sinne als eine Matrix (mit eventuell überabzählbar vielen Zeilen und/oder Spalten) betrachten. Versuchen sie diese Matrix zu vereinfachen, indem Sie elementare Umformungen an den Erzeugendensystemen von G und U ausführen.

5. Zeigen Sie, für jede abelsche Gruppe A und jedes $n\in\mathbb{Z}$ gibt es einen kurzen freien Komplex K mit $H_n(K) = A$.
6. Zeigen Sie, für jede graduierte abelsche Gruppe A gibt es einen Komplex K derart, daß H(K) und A isomorph sind als graduierte abelsche Gruppen.
7. Sei das folgende kommutative Diagramm abelscher Gruppen und Gruppenhomomorphismen gegeben.

$$\begin{array}{ccccc} F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_o} & F_{-1} \\ & & \varphi_0\downarrow & & \varphi_{-1}\downarrow \\ G_1 & \xrightarrow{g_1} & G_0 & \xrightarrow{g_0} & G_{-1} \end{array}$$

Die untere Zeile des Diagramms sei exakt und die obere ein Komplex (d.h. es gelte $f_0 f_1 = 0$). Die abelsche Gruppe F_1 sei frei.
Zeigen Sie, man kann einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi_1 : F_1 \to G_1$$

derart in das Diagramm einfügen, daß es kommutativ bleibt.
8. Seien K und L Komplexe abelscher Gruppen mit $K_n = L_n = 0$ für $n < 0$ und

$$\{\varphi_n : H_n(K) \to H_n(L)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

eine Familie von Gruppenhomomorphismen. Ist außerdem K ein freier Komplex, so gibt es einen Komplexmorphismus $f:K\to L$ mit $H_n(f) = \varphi_n$.

3. Die singuläre Homologie

3.1 Standardsimplexe und ihre linearen Abbildungen

3.1.1 Vorbemerkung

Die Intention der Konstruktionen dieses Abschnitts besteht in der Konstruktion von Zahlen, die Informationen über einen gegebenen topologischen Raum enthalten. Diese

Zahlen will man gewinnen, indem man den Raum in Dreiecke, Tetraeder, ... zerlegt und aus den kombinatorischen Relationen zwischen den so gewonnen Einzelteilen des Raumes Zahlen gewinnt.
Da sich eine Fläche aber auf sehr viele verschiedene Weisen in Dreiecke zerlegen läßt (soweit es überhaupt eine Zerlegung gibt), entsteht die Frage, inwieweit diese Zahlen unabhängig von der gewählten Zerlegung sind.
Um dieses Problem zu umgehen, betrachten wir zunächst alle möglichen Zerlegungen simultan und bemühen uns, alle Konstruktionen so auszuführen, daß sie nur von gegebenen topologischen Raum abhängen.

3.1.2 Die Standardsimplexe

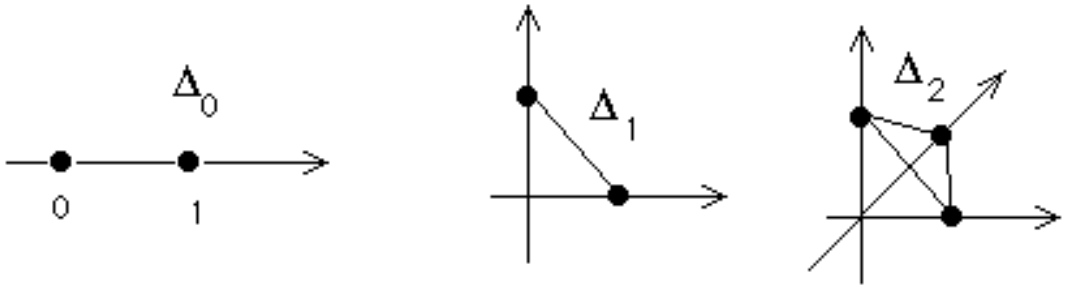
Sei q eine nicht-negative ganze Zahl. Dann heißt die Menge

$$\Delta_q := \{x=(x_0,...,x_q)\in\mathbb{R}^{q+1} \mid x_0+...+x_q = 1 \text{ und } 0\le x_i\le 1 \text{ für alle } i\}$$

q-dimensionales Standardsimplex oder auch q-Standardsimplex.

Bemerkungen

(i) Für q = 0 erhalten wir einen Punkt, für q=1 eine Strecke, für q=2 ein Dreieck und für q=3 ein Tetraeder.



(ii) Δ_q ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

(iii) Die Bedingungen $0\le x_i\le 1$ kann man durch die schwächeren Forderungen $0\le x_i$ ersetzen. Das Simplex Δ_q ist also gerade der Durchschnitt der Hyperebene

$$x_0+...+x_q = 1$$

mit dem nicht-negativen Oktanten. Insbesondere ist Δ_q konvex, d.h. mit je zwei Punkten liegt die ganze Verbindungsstrecke in Δ_q.

(iv) Die Punkte $e_i = (0,...,0,1,0,...,0)$ mit genau einer von Null verschiedenen Koordinate, welche gleich 1 ist, liegen in Δ_q. Sie sind die einzigen Punkte von Δ_q, welche nicht innere Punkte einer ganz in Δ_q verlaufenden Strecke sind. Sie heißen Ecken von Δ_q.

(v) Wir werden den $\mathbb{R}^n$ mit der Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren, deren Punkte die letzte Koordinate 0 haben und

$$\mathbb{R}^\infty := \cup_{n=1}^\infty \mathbb{R}^n.$$

Auf diese Weise ist zum Beispiel der i-te Standard-Einheitsvektor e_i wohldefiniert auch ohne die Angabe, in welchem der Räume $\mathbb{R}^n$ er liegen soll.

Beweis der Behauptung von (iv). Seien $p,q\in\Delta_q$ zwei verschiedene Punkte und liege e_i im Innern der Strecke von p nach q. Dann gilt

$$e_i = t\cdot p + (1-t)\cdot q$$

für eine reelle Zahl t mit 0<t<1. Vergleich der j-ten Koordinaten mit j≠i liefert

$$0 = t\cdot p_j + (1-t)\cdot q_j.$$

Da sowohl t als auch 1-t größer als Null sind und die Punkte p,q im nicht-negativen Oktanten liegen, folgt

$$p_j = q_j = 0 \text{ für alle } j\neq i.$$

Wegen $p,q\in\Delta_q$ ist dann aber die einzige von Null verschiedene Koordinate dieser Punkte gleich 1, d.h. es gilt p=q im Widerspruch zur Wahl von p und q.
Für Punkte aus Δ_q mit zwei von Null verschiedenen Koordinaten findet man leicht eine ganze Strecke in Δ_q, in deren Inneren sie liegen (man vergrößere die eine Koordinate im selben Maß, in dem man die andere verkleinere)[6].
QED.

3.1.3 Lineare Abbildungen auf den Standardsimplexen

Eine Abbildung $f:\Delta_q\to\mathbb{R}^n$ heißt <u>linear</u>, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $g:\mathbb{R}^{q+1}\to\mathbb{R}^n$ Abbildung gibt mit $g|_{\Delta_q} = f$ gibt.

Bemerkungen

(i) Zu je q+1 Punkten $p_0,\ldots,p_q\in\mathbb{R}^n$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f::\Delta_q\to\mathbb{R}^n$ mit $f(e_i) = p_i$ für alle i, nämlich die Abbildung f mit

$$f(x_0,\ldots,x_q) = \sum_{i=0}^{q} x_i\cdot p_i .$$

Das Bild dieser Abbildung ist gerade die Menge

$$f(\Delta_q) = \{ \sum_{i=0}^{q} x_i\cdot p_i \mid x_0+\ldots+x_q = 1 \text{ und } 0\le x_i \text{ für alle } i\}$$

Falls f injektiv[7] ist, sagt man, die Punkte $p_0,\ldots,p_q$ sind in allgemeiner Lage. Die Abbildung f identifiziert das Standardsimplex Δ_q mit der Teilmenge $f(\Delta_q)$ des $\mathbb{R}^n$.

Teilmengen dieser Gestalt heißen <u>Simplexe</u> des $\mathbb{R}^n$.
Die obige Existenzaussage läßt sich auch wie folgt formulieren.

(ii) Eine lineare Abbildung auf Δ_q ist durch ihre Werte in den Ecken bereits eindeutig bestimmt. Die Werte der Ecken kann man beliebig vorgeben. Insbesonder gibt es zu jedem Morphismus f: [n] → [m] der Kategorie Δ genau eine lineare Abbildung

$$\Delta_f\colon \Delta_n \to \Delta_m \text{ mit } \Delta_f(e_i) = e_{f(i)} \text{ für } i = 0,\ldots,n.$$

(iii) Durch die Zuordnung $[n]\to\Delta_n$, $f\mapsto\Delta_f$ ist ein Funktor

$$\Delta \to \text{Top}$$

gegeben. Er identifiziert die Kategorie Δ mit einer Teilkategorie von Top, deren Objekte die Standard-Simplexe sind und deren Morphismen die linearen Abbildungen, welche Ecken in Ecken überführen und die natürliche Ordnung der

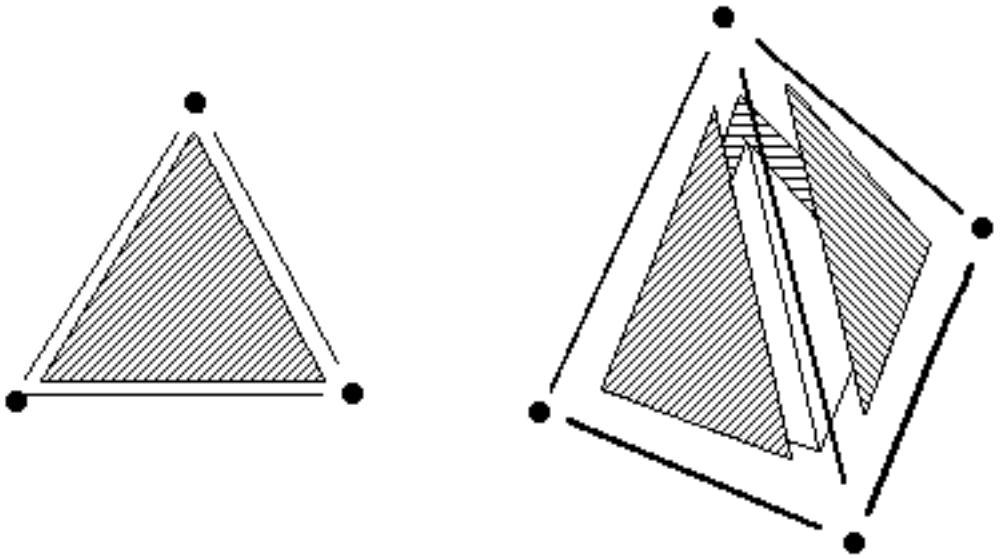
---

[6] Sind a und b positive Koordinaten von (...,a,...,b,...) so liegt (...,a-t,...,a+t,...) für kleine t im positiven Quadranten.

[7] Das ist genau dann der Fall, wenn die Vektoren $p_1-p_0, \ldots, p_q-p_0$ linear unabhängig sind.

Ecken erhalten. Wir werden im folgenden keinen Unterschied zwischen dieser Teilkategorie von Top und der Kategorie Δ machen, d.h. wir fassen Δ als Teilkategorie von Top auf.

3.1.4 Randabbildungen und Seiten der Standardsimplexe



Die j-te Randabbildung des Standardsimplex Δ_q ist definiert als die lineare Abbildung

$$\varepsilon^j_q = \varepsilon^j\colon \Delta_{q-1} \to \Delta_q \ (\subseteq \mathbb{R}^{q+1})$$

mit

$$\varepsilon^j(e_i) := \begin{cases} e_i & \text{für } i<j \\ e_{i+1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist die einzige injektive lineare Abbildung $\Delta_{q-1} \to \Delta_q$, die Ecken in Ecken abbildet, die natürliche Reihenfolge der Ecken erhält, wobei die j-te Ecke nicht im Bild liegt.

Das Bild dieser Abbildung besteht aus allen Punkten von Δ_q, deren j-te Koordite Null ist. Dieses Bild $\varepsilon^j(\Delta_{q-1})$ heißt j-te Seite von Δ_q. Es ist die der j-ten Ecke gegenüberliegende Seite. Die Vereinigung aller Seiten von Δ_q heißt Rand von Δ_q und wird mit $\dot{\Delta}_q$ bezeichnet. Der Rand von Δ_q besteht aus allen Punkten, die mindestens eine Koordinate haben, welche Null ist.

Die j-te Entartungsabbildung des Standardsimplex Δ_q ist definiert als die lineare Abbildung

$$\eta^j_q = \eta^j\colon \Delta_{q+1} \to \Delta_q \ (\subseteq \mathbb{R}^{q+1})$$

mit

$$\eta^j(e_i) := \begin{cases} e_i & \text{für } i\leq j \\ e_{i-1} & \text{für } j<i \end{cases}$$

Es ist die einzige surjektive lineare Abbildung $\Delta_{q+1} \to \Delta_q$, die Ecken in Ecken abbildet, die natürliche Reihenfolge der Ecken erhält, wobei die j-te Ecke das Bild von zwei Ecken ist.

3.1.5 Relationen zwischen den Rand- und Entartungsabbildungen

$$\varepsilon^j\varepsilon^i = \varepsilon^i\varepsilon^{j-1} \text{ für } i < j.$$

$$\eta^j\eta^i = \eta^i\eta^{j+1} \text{ für } i \le j.$$

$$\eta^j\varepsilon^i = \begin{cases} \varepsilon^i\eta^{j-1} & \text{für } i<j \\ \mathrm{id} & \text{für } i=j \text{ und } i=j+1 \\ \varepsilon^{i-1}\eta^j & \text{für } j+1<i \end{cases}$$

Für k<j gilt $\varepsilon^j_{q+1}\circ\varepsilon^k_q = \varepsilon^k_{q+1}\circ\varepsilon^{j-1}_q$.

Beweis. Wir beschränken uns hier auf den Beweis der ersten Identität. Die übrigen werden im selben Stil bewiesen. Es reicht zu zeigen, das Bild der Ecke e_ν von Δ_q ist bei beiden Abbildungen der zu beweisenden Identität für jedes ν dasselbe. Der Punkt e_ν wird bei den Abbildungen wie folgt abgebildet.

Im Fall $\nu < i$ ($< j$): $e_\nu \mapsto e_\nu \mapsto e_\nu$

Im Fall ($i \le$) $j-1 \le \nu$: $e_\nu \mapsto e_{\nu+1} \mapsto e_{\nu+2}$

Im Fall $i \le \nu < j-1$: $e_\nu \mapsto e_{\nu+1} \mapsto e_{\nu+1}$ bzw. $e_\nu \mapsto e_\nu \mapsto e_{\nu+1}$

QED.

Bemerkungen

(i) Die angegebenen Relationen bilden eine vollständie Menge von Relationen
d.h. jede weitere Relation zwischen dein ε und η ist eine Folge der hier angegebenen.

(ii) Wie in 3.1.3 (iii) vereinbart, identifizieren wir die ε und η mit den zugehörigen Abbildungen

$$[q] \to [q-1] \text{ bzw. } [q+1] \to [q]$$

(mit $i \mapsto j$ falls $\varepsilon(e_i) = e_j$ bzw. $\eta(e_i) = e_j$). Die nachfolgende Bemerkung besagt, die ε^i, η^j sie bilden ein "Erzeugendensystem" für die Morphismen dieser Kategorie.

(iii) Jeder Morphismus

$$\alpha:[n] \to [m]$$

der Kategorie Δ läßt sich auf genau eine Weise in der Gestalt

$$\alpha = \varepsilon\eta$$

schreiben mit einem Epimorphismus η und einen Monomorphismus ε , wobei ε auf genau eine Weise die Zusammensetzung von Seiten-Abbildungen ist,

$$\varepsilon = \varepsilon^{i_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon^{i_s}, \quad 0 \le i_s \le \ldots \le i_1 \le n$$

und η auf genau eine Weise die Zusammensetzung von Entartungsabbildungen,

$$\eta = \eta^{j_1} \cdot \ldots \cdot \eta^{j_t}, \quad 0 \le j_1 \le \ldots \le j_t \le n.$$

Diese Zerlegung heißt Epi-Mono-Zerlegung von α.[8]

(iv) Die behauptete Vollständigkeit der obigen Relationenmenge ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Epi-Mono-Zerlegung.[9]

(v) Zur Definition eines (Ko-)Funktors

$$F: \Delta \to C \text{ (bzw. } F:\Delta^{op} \to C)$$

reicht es, die Werte

$$F([n]),\ F(\varepsilon^j),\ F(\eta^j)$$

anzugeben, wobei die Relationen, die sich aus 3.1.5 ergeben, erfüllt sein müssen. Für C = Ens ergibt sich daraus insbesondere eine Methode zur Konstruktion simplizialer Mengen.

3.2 Der singuläre Komplex

3.2.1 Vorbemerkung

Wir konstruieren jetzt einen Funktor

$$S: \text{Top} \to \partial\text{Ab}$$

aus der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Komplexe, welcher jedem topologischen Raum seinen sogenannten singulären Komplex zuordnet.

3.2.2 Definition des singulären Komplexes

Sei X ein topologischer Raum. Ein q-dimensionales singuläres Simplex oder auch singuläres q-Simplex von X ($q \ge 0$) ist eine stetige Abbildung

$$\Delta_q \to X.$$

Bezeichne $\mathbf{S}_q X$ die frei abelschen Gruppe, welche von den singulären q-Simplexen von X erzeugt wird. Ein Element von $\mathbf{S}_q X$ heißt q-dimensionale singuläre Kette oder auch singuläre q-Kette von X. Jedes Element $c \in \mathbf{S}_q X$ läßt sich somit auf genau eine Weise als endliche ganzzahlige Linearkombination von q-Simplexen schreiben:

---

[8] Falls $\text{Im}(\alpha)$ aus q+1 Elementen besteht, so ist

$$\eta: \Delta_n \to \Delta_q$$

die eindeutig bestimmte Surjektion von Δ, die alle Ecken identifiziert, die auch von α identifiziert werden. Die injektive Abbildung

$$\varepsilon: \Delta_q \to \Delta_m$$

muß dann die i-te Ecke von Δ_q in die i-te Ecke des Bildes von α abbilden.

Zur Zerlegung in die η_i^ν: wie gesagt identifiziert η gewisse Ecken. Diese Identifikationen kann man dadurch erreichen, indem man schrittweise jeweils zwei Ecken identifiziert. Dieser Prozeß wird eindeutig, wenn man noch fordert, daß Ecken mit großem Index zuerst identifiziert werden sollen.

Zur Zerlegung in ε_i^ν: die Abbildung ε erzeugt Lücken zwischen den Ecken von Δ_q, indem sie den Index gewisser Ecken erhöht. Diese Lücken kann man in mehreren Schritten erzeugen, indem man in jedem Schritt eine Lücke der Länge 1 erzeugt (d.h. die Indizes um höchstens 1 erhöht). Dieser Prozeß wird eindeutig, indem man noch fordert, daß Lücken an den zu kleinen Indizes gehörenden Stellen zuersrt erzeugt werden sollen.

[9] Jede Relation zwischen den ε und η läßt sich mit Hilfe der obigen Relationen in Epi-Mono-Gestalt bringen.

$$c = \sum c_\sigma \cdot \sigma .$$

Eine Kette, in der nur ein Summand vorkommt, und deren einziger von Null verschiedener Koeffizient Eins ist, werden wir mit dem entsprechenden singulären Simplex identifizieren.

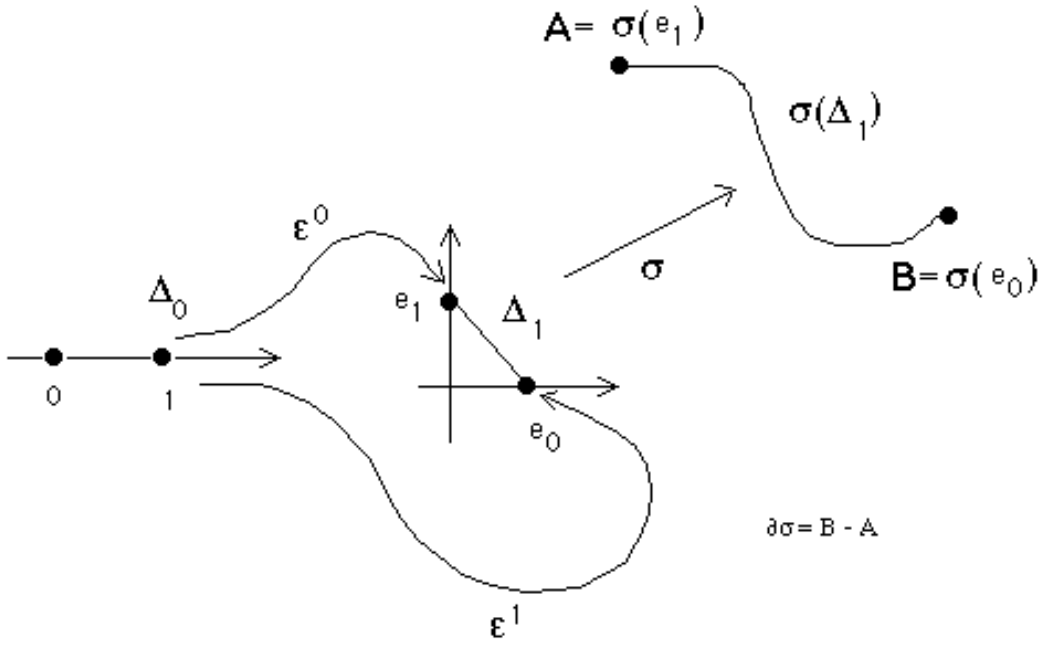
Für $q<0$ setzen wir $\mathbf{S}_q X = 0$.
Als nächstes definieren wir die Randoperatoren

$$\partial_q : \mathbf{S}_q X \to \mathbf{S}_{q-1} X.$$

Da $\mathbf{S}_q X$ eine freie abelsche Gruppe ist, genügt es $\partial_q(\sigma)$ für jedes q-Simplex σ zu definieren. Wir setzen

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \cdot (\sigma \circ \varepsilon_q^j).$$

Dabei bezeichne $\varepsilon_q^j : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$ die q-te Randabbildung des Standsimplex Δ_q (d.h. das Bild von ε_q^j ist die Seite gegenüber der j-ten Ecke).



Nachfolgend beweisen wir jetzt, daß die $\mathbf{S}_q X$ zusammen mit den eben definierten Abbildungen ∂_q einen Komplex bilden. Dieser Komplex heißt singulärer Komplex von X und wird mit $\mathbf{S}X$ bezeichnet.

3.2.3 Die Komplexeigenschaft von S(X)

Die Gruppenhomomorphismen

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{q+2}} \mathbf{S}_{q+1} X \xrightarrow{\partial_{q+1}} \mathbf{S}_q X \xrightarrow{\partial_q} \mathbf{S}_{q-1} X \xrightarrow{\partial_{q-1}} \ldots$$

bilden einen Komplex SX, d.h es gilt $\partial_{q-1}\partial_q = 0$ für jedes $q \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Für jedes singuläre q-Simplex σ gilt

$$\partial\partial\sigma = \partial(\sum_j (-1)^j\cdot\sigma\circ\varepsilon^j) = \sum_j (-1)^j\cdot\partial(\sigma\circ\varepsilon^j)$$

$$= \sum_j (-1)^j \sum_k (-1)^k\cdot\sigma\circ\varepsilon^j\circ\varepsilon^k$$

$$= \sum_{j\le k} (-1)^{j+k}\cdot\sigma\circ\varepsilon^j\circ\varepsilon^k + \sum_{j>k} (-1)^{j+k}\cdot\sigma\circ\varepsilon^j\circ\varepsilon^k$$

Auf die zweite Summe wenden wir 3.1.5 an und führen eine Indexverschiebung durch. Im Ergebnis erhalten wir

$$\partial\partial\sigma = \sum_{j\le k} (-1)^{j+k}\cdot\sigma\circ\varepsilon^j\circ\varepsilon^k - \sum_{j\ge k} (-1)^{j+k}\cdot\sigma\circ\varepsilon^k\circ\varepsilon^j = 0.$$

QED.

3.2.4 Die Abbildung der Ketten zu einer stetigen Abbildung

Sei f:X→Y eine stetige Abbildung topologischer Räume. Für jedes singuläre q-Simplex

$$\sigma: \Delta_q \to X$$

von X ist dann die Zusammensetztung $f\circ\sigma: \Delta_q \to Y$ ein singuläres q-Simplex von Y.

Durch lineare Fortsetzung auf die Ketten erhalten wir für jedes q einen Gruppenhomorphismus

$$\mathbf{S}_q f: \mathbf{S}_q X \to \mathbf{S}_q Y.$$

Die Familie der $\mathbf{S}_q f$ bezeichnen wir mit **S**f. Wir werden gleich sehen, daß die $\mathbf{S}_q f$ eine Kettenabbildung bilden.

3.2.5 Der Komplex-Morphismus Sf zu einer stetigen Abbildung f

Sei f:X→Y eine stetige Abbildung. Die zugehörige Folge $\mathbf{S}f = \{\mathbf{S}_q f\}_{q\in\mathbb{Z}}$ ist dann mit den Randabbildungen der Komplex SX und SY verträglich,

$$\partial_q\circ\mathbf{S}_q f = \mathbf{S}_{q-1} f\circ\partial_q,$$

d.h. Sf: SX → SY ist ein Komplex-Morphismus.

Beweis. Für jedes q-Simplex gilt

$$\partial\circ\mathbf{S}_q f(\sigma) = \partial(f\circ\sigma) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j\cdot(f\circ\sigma\circ\varepsilon^j_q)$$

$$= (\mathbf{S}_{q-1} f)(\sum_{j=0}^{q} (-1)^j\cdot(\sigma\circ\varepsilon^j_q))$$

$$= (\mathbf{S}_{q-1} f)(\partial\sigma)$$

QED.

3.2.6 Die Funktorialität von S

Die oben definierte Abbildung S für topologische Räume und stetige Abbildungen ist ein Funktor

$$S: \mathrm{Top} \to \partial\mathrm{Ab}.$$

Mit anderen Worten, für stetige Abbildungen id:X→X, f:X→Y und g:Y→Z gilt S(id) = id und S(f∘g) = S(f)∘S(g).

Beweis. Das folgt unmittelbar aus den Definitionen.
QED.

3.2.7 Verallgemeinerung auf den Fall von Paaren

Die oben angegebene Konstruktion läßt sich auf den Fall von Paaren verallgemeinern. Ist

$$(X,A)$$

ein Paar von topologischen Räumen und bezeichnet

$$i: A \to X$$

die natürliche Einbettung, so ist die durch i induzierte Abbildung

$$Si: SA \to SX$$

injektiv. Man kann also SA als Teilkomplex von SX auffassen. Der Faktorkomplex

$$S(X,A) := \mathrm{Koker}(i) := SX/SA$$

heißt (relativer) singulärer Komplex des Paares (X,A). Bezeichnet $j: SX \to S(X,A)$ die natürliche Abbildung, so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen

$$0 \to SA \xrightarrow{\ i\ } SX \xrightarrow{\ j\ } S(X,A) \to 0.$$

Diese Sequenz zerfällt in jedem Grad,

$$S_qX = S_qA \oplus S_q(X,A),$$

denn die Menge der singulären Simplexe $\sigma: \Delta_q \to X$ von X läßt sich in zwei Teilmengen zerlegen: in solche, welche sogar Simplexe von A sind, und solche, die es nicht sind. Die erste Menge ist aber gerade ein freies Erzeugendensystem von SA. Nach Konstruktion gilt

$$S(X,\varnothing) = SX.$$

Eine Abbildung von Paaren $f:(X,A) \to (Y,B)$ induziert ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & SA & \to & SX & \to & S(X,A) & \to & 0 \\ & & \downarrow S(f|_A) & & \downarrow Sf & & \downarrow \overline{Sf} & & \\ 0 & \to & SB & \to & SY & \to & S(Y,B) & \to & 0 \end{array},$$

wobei $\overline{Sf}$ die auf Grund des Homomorphiesatzes eindeutig bestimmte Abbilung

$$\overline{Sf}: S(X,A) \to S(Y,B),\ \overline{\textstyle\sum c_\sigma \cdot \sigma} \mapsto \overline{\textstyle\sum c_\sigma \cdot f\circ\sigma},$$

ist. Die oben bewiesene Funktoreigenschaft von S überträgt sich auf den Fall von Paaren. Genaugenommen ist S ein Funktor von der Kategorie der Paare topologischer Räume mit Werten in der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von Kettenabbildungen.

3.3 Die singuläre Homologie

3.3.1 Die singulären Homologiegruppen eines topologischen Raumes

Sei X ein topologischer Raum. Die n-te singuläre Homologiegruppe von X ist definiert als n-te Homologiegruppe des singulären Komplexes SX. Bezeichnung:

$$H_n(X) := H_n(SX).$$

Sei (X,A) ein Paar topologischer Räume. Die n-te singuläre Homologiegruppe von (X,A) ist definiert als die n-te Homologiegruppe des relativen singulären Komplexes S(X,A). Bezeichnung:

$$H_n(X,A) := H_n(S(X,A)).$$

Wir werden weiterhin folgende Bezeichnungen für die entsprechenden graduierten Gruppen benutzen.

$$HX := HSX$$
$$H(X,A) := HS(X,A)$$

Die Gruppen H(X,A) bzw. ihre homogenen Bestandteile heißen auch relative Homologiegruppen im Unterschied zu den absoluten Homologiegruppen HX. Eine Kette $z \in SX$ heißt Zyklus modulo eines Unterraumes A, wenn $\partial z \in SA$ gilt und Rand modulo A, wenn $z = \partial x + u$ gilt mit $x \in SX$ und $u \in SA$. Die relative Homologiegruppe $H^n(X,A)$ kann man dann identifizierem mit der Faktorgruppe

$$H^n(X,A) = \{\text{n-Zyklen mod A}\}/\{\text{n-Ränder mod A}\}.$$

3.3.2 Funktorialität

Für jede Abbildung von Paaren $f:(X,A)\to(Y,B)$ induziert die Abbilung

$Sf:S(X,A)\to(Y,B)$ einen Homomorphismus graduierter Gruppen

$$f_* = Hf: H(X,A)\to H(Y,B),\ \overline{\Sigma\ c_\sigma\cdot\sigma} \mapsto \overline{\Sigma\ c_\sigma\cdot f\circ\sigma}.$$

Die singuläre Homologie definiert damit einen Funktor

$$H: \mathbf{Top}^{(2)} \xrightarrow{S} \mathbf{K(A)} \xrightarrow{H} \mathbf{GAb}.$$

3.3.3 Homologiesequenz eines Paares bzw. eines Tripels

Sei (X,A) ein Paar topologischer Räume. Der Zusammenhangshomomorphismus zur kurzen exakten Sequenz

$$0\to SA\xrightarrow{i} SX\xrightarrow{j} S(X,A)\to 0$$

heißt auch Zusammenhangshomomorphismus des Paares (X,A) und die zugehörige lange Homologiesequenz

$$\ldots\xrightarrow{\partial_*} H_q(A)\xrightarrow{i_*} H_q(X)\xrightarrow{j_*} H_q(X,A)\xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A)\xrightarrow{i_*}\ldots$$

heißt Homologiesequenz des Paares (X,A). Für jede (stetige) Abbildung

$$f:(X,A)\to(Y,B)$$

von Paaren topologischer Räume hat man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & H_q(A) & \to & H_q(X) & \to & H_q(X,A) & \to & H_{q-1}(A) & \to \\
 & \downarrow fl_{A*} & & \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow fl_{A*} & \\
\to & H_q(B) & \to & H_q(Y) & \to & H_q(Y,B) & \to & H_{q-1}(B) & \to
\end{array}$$

wobei die Zeilen gerade die Homologiesequenzen der Paare (X,A) bzw. (Y,B) sind.

Sei jetzt ein Tripel (X,A,B) gegeben. Die Inklusionen $B\subseteq A\subseteq X$ induzieren dann Inklusionen von Teilkomplexen

$$SB \subseteq SA \subseteq SX$$

und damit eine kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & SA/SB & \to & SX/SB & \to & SX/SA & \to & 0 \\
 & & \| & & \| & & \| & & \\
 & & S(A,B) & & S(X,B) & & S(X,A) & &
\end{array}$$

Die zugehörige lange Homologiesequenz

$$\ldots\xrightarrow{\partial_*} H_q(A,B)\to H_q(X,B)\to H_q(X,A)\xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A,B)\to\ldots$$

heißt Homologiesequenz des Tripels (X,A,B). In Fall B=∅ ist das gerade die Homologiesequenz des Paares (X,A).

3.3.4 Homologie mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe

Seien X ein topologischer Raum und A eine beliebige abelsche Gruppe. Dann heißt der Komplex

$$S(X, A) := S(X)\otimes_{\mathbb{Z}}A$$

singulärer Kettenkomplex von X mit Koeffizienten in A und seine Homologie

$$H_q(X, A) = H_q(S(X, A))$$

heißt q-Homologie von X mit Koeffizienten in A. Für jedes topologische Paar (X, Y) heißt

$$S(X, Y, A) := S(X,A)/S(X,Y)$$

singulärer Kettenkomplex des Paares (X,Y) mit Koeffizienten in A und seine Homologie

$$H_q(X, Y, A) = H_q(S(X,Y, A))$$

heißt singuläre Homologie von (X,Y) mit Koeffizienten in A.
Analog definiert man die simplizialen Kettenkomplexe und deren Homologie mit Koeffizienen in A:

$$S(K, A) := S(K)\otimes_{\mathbb{Z}}A$$

$$C(K, A) := C(K)\otimes_{\mathbb{Z}}A$$

$$H_q(K, A) = H_q(S(K, A))$$

für jeden Simplizialkomplex K und

$$S(K, L, A) := S(K,A)/S(L,Y)$$
$$C(K, L, A) := C(K,A)/C(L,Y)$$
$$H_q(K, L, A) = H_q(S(K, L, A))$$

für jedes simpliale Paar (K, L).

Bemerkungen

(i) Die Kettenkomplexe mit Koeffizienten in A unterscheiden sich von denen bisher betrachteten nur dadurch, daß die Ketten formale Linearkombination

$$\sum_i g_i\sigma_i$$

von Simplexen σ_i sind, deren Koeffizienten g_i statt in $\mathbb{Z}$ in einer beliebigen abelschen Gruppe A liegen können.

(ii) In der allgemeinen Situation bestehen dieselben kurzen exakten Komplex-Sequenzen und deren zugehörige lange Homologie-Sequenzen.

(iii) Wir werden hier in den Bezeichnungen die Angabe der Koeffizientengruppe A oft unterdrücken, obwohl die bewiesenen Aussagen meist für allgemeine A gelten. Von besonderer Bedeutung ist für uns der Fall, daß

$$A = K$$

ein Körper ist. Im Fall kompakter Polyeder sind dann alle Homologie-Gruppen endlich-dimensionale Vektorräume.

(iv) Philosopie:, in vielen Fällen gilt

$$H_q(X,Y, A) \cong H_q(X,Y)\otimes_{\mathbb{Z}}A$$

Eine Formel, die die Homologie mit Koeffizienten aus A mit Hilfe der ganzzahligen Homologie bestimmt, heißt Formel für universelle Koeffizienten.

Wie wir wissen ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe von der Gestalt

$$H = \oplus Z_i \text{ mit } Z_i = \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$$

Für das Tensorprodukt mit dem zweielementigen Körper $K = F_2$ erhalten wir zum Beispiel

$$H\otimes_{\mathbb{Z}}K \cong \oplus (Z_i\otimes_{\mathbb{Z}}K) \text{ mit } Z_i\otimes_{\mathbb{Z}}K \cong \begin{cases} K \text{ falls } 2|n_i \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Nach der obigen Formel ignoriert die Homologie mit Koeffizienten aus K einfach alle direkten Summanden ungerader Ordnung der gewöhnlichen Homologie und vergißt die Ordnung der übrigen direkten Summanden. Für andere Körper K ist die Situation ähnlich.

Die genaue Formel für universelle Koeffizienten ist komplizierter und wird durch eine kurze exakte Sequenz beschrieben, in welche auch die (q-1)-te Homologie eingeht.

3.3.5 Aufgaben

Die Homologie freier Komplexe

1. Zeigen Sie, für jedes topologische Paar (X,A) zerfällt die zugehörige exakte Sequenz

$$0\to SA\to SX\to S(X,A)\to 0$$

als Sequenz von graduieren abelschen Gruppen.

Simpliziale Homologie

2. Definieren Sie einen Simplizialkomplex K, dessen geometrische Realisierung homöomorph zu einem Torus ist. Berechnen Sie die erste orientierte simpliziale Homologie von K, d.h. $H_1(C(K))$, und die erste geordnete simpliziale Homologie von K, d.h. $H_1(S(K))$.

3. (a) Seien K ein (abstrakter) Simplizialkomplex und p ein Element, welches in der Menge der Ecken von K nicht vorkommt. Zeigen Sie, es gibt einen kleinsten Simplizialkomplex, der alle Mengen der Gestalt

$$\{p\}\cup\sigma \text{ mit } \sigma\in K$$

als Simplexe enthält. Dieser Simplizialkomplex heißt Kegel über K mit der Spitze p und wird mit p*K bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, die Komplexe S(p*K), C(p*K) der geordneten bzw. orientierten Ketten über p*K sind kontrahierbar. (Hinweis: betrachten sie die Abbildung, welche jedem Simplex mit den Ecken $p_0,...,p_q$ das Simplex mit den Ecken p, p_0 ,...,p_q zuordnet).

(c) Bezeichne $\tilde{\Delta}_q$ den Simplizialkomplex, welcher aus der Menge aller Teilmengen von {0, 1, ..., q} besteht. Zeigen Sie für die geordnete bzw. die orientierte Homologie von $\tilde{\Delta}_q$ gilt

$$H_kS\tilde{\Delta}_q = H_kC\tilde{\Delta}_q = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ für } k=0 \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

4. Eulerzahl eines endlichen Polyeders. Sei K ein endliches Polyeder und bezeiche $n_q(K)$ die Anzahl der q-dimensionalen Simplexe von K. Dann heißt

$$\chi(K) := \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q\, n_q(K)$$

Eulerzahl von K. Bezeichne F einen Körper. Drücken sie die Eulerzahl von K mit Hilfe der Dimensionen der endlich-dimensionalen Vektorräume $H_q(K, F)$ aus.

3.4 Spezialfälle

3.4.1 Homologie des einpunktigen Raumes

Sei P = {p} der einpunktige Topologische Raum. Für jedes q≥0 besitzt P genau ein singuläres Simplex

$$\tau_q : \Delta_q \to P.$$

Die j-te Seite von τ_q ist für jedes j gleich τ_{q-1},

$$\tau_q \circ e^j = \tau_{q-1}.$$

Da τ_q gerade q+1 Seiten hat folgt

$$\partial\tau_q = \begin{cases} \tau_{q-1} & \text{für q gerade} \\ 0 & \text{für q ungerade} \end{cases}$$

Der Kettenkomplex SP hat damit bis auf Isomorphie die Gestalt

$$SP: \ldots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

wobei in den negativen Dimensionen alle Gruppen Null sind. Damit erhalten wir

$$H_q(\{p\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für q=0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Genauer gilt $H_0(\{p\}) = \mathbb{Z}\cdot\tau_0$.

3.4.2 Reduzierte Homologie

Sei X ein topologischer Raum. Die konstante Abbildung

$$\gamma = \gamma^X : X \to P := \{p\}$$

in den einpunktigen topologischen Raum induziert dann einen Homomorphismus

$$H\gamma : HX \to HP,$$

welche Augmentation von X heißt. Der Kern der Augmentation heißt reduzierte Homologie von X und wird mit

$$\tilde{H}_q X := \mathrm{Ker}(H_q(\gamma) : H_q X \to H_q P).$$

Bemerkungen

(i) Funktorialität. Die reduzierte Homologie definiert einen Funktor

$$\tilde{H}_q : (\text{nicht-leere topologische Räume}) \to \mathrm{Ab}.$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_q X & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & \tilde{H}_q Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q X & \xrightarrow{f_*} & H_q Y \\ & {\scriptstyle \gamma^X_*} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \gamma^Y_*} & \\ & H_q P & \end{array}$$

Ist nämlich $f:X\to Y$ eine stetige Abbildung, so gilt

$$\gamma^Y \circ f = \gamma^X$$

also $H(\gamma^Y)\circ H(f) = H(\gamma^X)$. Insbesonder bildet $H(f)$ den Kern von $H(\gamma^X)$ in den Kern von $H(\gamma^Y)$ ab, d.h. wir haben einen Homomorphismus

$$\tilde{H}_q f : \tilde{H}_q X \to \tilde{H}_q Y.$$

Da sich $H_q f$ funktoriell verhält, gilt dasselbe auch für $\tilde{H}_q f$. Die natürlichen Inklusionen

$$\tilde{H}_q X \subseteq H_q X$$

setzen sich zu einer natürliche Transformation zusammen. $\tilde{H}_q$ ist ein Beispiel für einen Teilfunktor (des Funktors H_q).

(ii) Vergleich mit der gewöhnlichen Homologie($q \neq 0$).Offensichtlich gilt $\tilde{H}_q X = H_q X$ für $q \neq 0$.

(iii) Vergleich mit der gewöhnlichen Homologie($q = 0$).Ist X nicht-leer, so gibt es mindestens eine Abbildung $i: P\to X$. Ihre Zusammensetzung mit γ^X liefert

$$\gamma^X \circ i = id.$$

Damit gilt aber auch $H(\gamma^X)\circ H(i) = id$. Mit anderen Worten, H) besitzt einen Schnitt und die exakte Sequenz graduierter abelscher Gruppe

$$0 \to \tilde{H}(X) \hookrightarrow H(X) \xrightarrow{H\gamma} H(P) \to 0$$

zerfällt. Insbesonder gilt

$$H_0(X) = H_0(P)\oplus\tilde{H}_0 X = \mathbb{Z}\oplus\tilde{H}_0 X$$

In der Dimension Null unterscheiden sich die reduzierten und die gewöhnliche Homologie um den direkten Summanden $\mathbb{Z}$.

(iv) Vergleich mit der relativen Homologie. Für jede Einbettung $P\to X$ in einen nicht-leeren topologischen Raum X haben wir eine exakte Sequenz

$$0\to H_0(P) \to H_0(X) \to \tilde{H}_0(X) \to 0$$

Vergleich mit der Homologiesequenz des Paares (X,P),

$$\to H_0(P) \to H_0(X) \to H_0(X,P) \to 0,$$

liefert

$$\tilde{H}_0(X) \cong H_0(X,P).$$

Wegen $H_q P = 0$ für $q > 0$ erhalten wir analog

$$\tilde{H}_q(X) = H_q(X) \cong H_q(X, P) \text{ für } q > 0.$$

3.4.3 Reduzierte Homologiesequenz eines Paares

Sei (X,A) ein topologisches Paar mit $A\neq\emptyset$. Dann hat man eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_q(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{q-1}(A) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

welche reduzierte Homologiesequenz des Paares (X,A) heißt. Dabei sind i_* und j_* die Einschränkungen der analogen Abbildungen der gewöhnlichen Homologiesequenz von (X,A).

Beweis. Wir wählen eine Inklusion i:P→A und fassen diese als Abbildung von Paaren

$$i:(P,P) \to (X,A)$$

auf. Betrachten wir die zugehörige Abbildung der langen Homologiesequenzen[10].

$$\begin{array}{ccccccccc} \to & H_q(P) & \to & H_q(P) & \to & H_q(P,P) & \to & H_{q-1}(A) & \to \\ & \fl_{A*}\downarrow & & f_*\downarrow & & \bar{f}_*\downarrow & & \downarrow\fl_{A*} & \\ \to & H_q(A) & \to & H_q(X) & \to & H_q(X,A) & \to & H_{q-1}(A) & \to \end{array}$$

Die Augmentation von X liefert induziert eine Paarabbildung

$$\gamma:(X,A) \to (P,P)$$

welche linksinvers zur Einbettung i:(P,P) → (X,A) ist. Die durch γ induzierte Abbildung zwischen den obigen Homologiesequenzen besteht aus einer Familie von linksinversen Abbildungen zu den vertikalen Abbildung des obigen Diagramms. Die obere Zeile des Diagramms kann man deshalb mit einem direkten Summanden der unteren Zeile identifizieren. Läßt man diesen direkten Summand weg, so bleibt eine exakte Sequenz übrig. Diese ist gerade die exakte Sequenz der Behauptung.
QED.

3.4.4 Die Augmentation auf den Niveau der Kettenabbildungen

Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt die Kettenabbildung

$$\eta = \eta^X : SX \to (\mathbb{Z},0),$$

welche jedes 0-Simplex in die $1\in\mathbb{Z}$ überführt, ebenfalls Augmentation von X.

Bemerkungen

(i) Mit Augmentation bezeichnet man also sowohl eine Abbildung von Homologiegruppen (3.4.3) als auch, wie eben definiert, eine Kettenbildung. Beschreiben wir den Zusammenhang zwischen den beiden eingeführten Augmentationsbegriffen.

(ii) Vergleich der beiden Augmentationen. Bezeichne γ wie oben die konstante Abbildung auf dem Raum X,

$$\gamma: X \to P = \{p\},\ x \mapsto p,$$

so ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{S\gamma} & SP \\ & {\scriptstyle\eta^X}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\eta^P} & \\ & (\mathbb{Z},0) & \end{array} \qquad (1)$$

Denn ein 0-Simplex σ von X wird bei der Komposition wie folgt abgebildet.

$$\sigma \mapsto \gamma\circ\sigma \mapsto 1.$$

Wie wir oben gesehen haben, wird die 0-te Homologie von P vom einzigen 0-Simplex von P erzeugt und ist isomorph zu $\mathbb{Z}$. Insbesondere induziert η^P einen Isomorphismus

$$H(\eta^P) : H(P) \to H(\mathbb{Z},0).$$

---

[10] Alle Homologie-Gruppen der oberen Zeile sind bis auf zwei Ausnahmen gleich Null.

Der rechte untere Morphismus von (1) induziert also einen Isomorphismus auf der Homologie.

$$\begin{array}{ccc} HX & \xrightarrow{H\gamma} & HP \\ & H\eta^X \searrow \quad \cong \quad \swarrow H\eta^P & \\ & (\mathbb{Z},0) & \end{array} \qquad (2)$$

Bis auf die durch $H(\eta^P)$ gegebene Isomorphie ist also die Augmentation $H(\gamma)$ auf der Ebene der Homologiegruppen gerade die Homologie der Augmentation η^X auf der Ebenen der Komplexe.

(iii) Wegen (2) folgt weiter

$$\text{Ker } H(\eta^X) =^{11} \text{Ker } H(\gamma).$$

Insbesondere kann man sowohl η^X also auch γ zur Definition der reduzierten Homologie nehmen.

Man beachte, η^P:SP $\to (\mathbb{Z},0)$ ist eine Homotopieäquivalenz (nach Satz 2.4.3).

3.4.5 Die Homologie der konvexen Teilmengen des affinen Raumes

Sei X eine nicht-leere konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Augmentation

$$\eta : SX \to (\mathbb{Z},0)$$

eine Homotopieäquivalenz. Insbesondere ist die reduzierte Homologie von X trivial,

$$\tilde{H}X = 0.$$

Beweis. Die Technik, mit deren Hilfe wir diesen Satz beweisen werden, nennt man auch Kegelkonstruktion.Sei $P \in X$ ein Punkt. Für jedes q-Simplex $\sigma_q:\Delta_q \to X$ von X definieren wir auf folgende Weise ein (q+1)-Simplex $(P\cdot\sigma_q)$: $\Delta_{q+1} \to X$ (den Kegel über σ_q mit der Spitze P).

$$(P\cdot\sigma_q)(x_0,\ldots,x_{q+1}) := \begin{cases} P & \text{für } x_0=1 \\ x_0P+(1-x_0)\sigma_q(\frac{x_1}{1-x_0},\ldots,\frac{x_{q+1}}{1-x_0}) & \text{für } x_0\neq 1 \end{cases}$$

Auf diese Weise erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$P = P_q : S_qX \to S_{q+1}X,\ \sigma \mapsto P\cdot\sigma.$$

Berechnen wir den Rand des Simplex $P\cdot\sigma_q$. Es gilt

$$(P\cdot\sigma_q)\circ\varepsilon^i(x_0,\ldots,x_q) = (P\cdot\sigma_q)(x_0,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_q).$$

Für i=0 ist das gerade σ_q,

$$(P\cdot\sigma_q)\circ\varepsilon^0 = \sigma_q. \qquad (1)$$

Für q>0 und i>0 gilt[12]

$$x_0P + (1-x_0)\sigma_q(\frac{x_1}{1-x_0},\ldots,\frac{x_{i-1}}{1-x_0},0,\frac{x_i}{1-x_0},\ldots,\frac{x_{q+1}}{1-x_0})$$

---

[11] Genauer: der Isomorphismus $H(\eta^P)$ identifiziert diese beiden Kerne.

[12] Man beachte im Argument des zweiten Summanden steht ein Punkt der i-ten Seite von Δ_q

$$=^{13} x_0 P + (1-x_0)(\sigma_q \circ \varepsilon^{i-1})(\frac{x_1}{1-x_0},\ldots,\frac{x_q}{1-x_0})$$

also

$$(P\cdot\sigma_q)\circ\varepsilon^i = (P\cdot(\sigma_q\circ\varepsilon^{i-1}) \text{ für } i > 0 \text{ und } q>0. \qquad (2)$$

Wir gehen zur alternierenden Summe über und erhalten

$$\partial(P\cdot\sigma_q) = \sigma_q - P\cdot(\partial\sigma_q) \qquad \text{für } q > 0.$$

Wir bezeichnen die lineare Fortsetzung der Abbildung $\sigma\mapsto P\cdot\sigma$ auf die Ketten ebenfalls mit P. Die letzte Identität läßt sich dann in der folgenden Gestalt schreiben.

$$\partial\circ P + P\circ\partial = \mathrm{Id} \text{ für Ketten positiver Dimension von SX.} \qquad (3)$$

Untersuchen wir die Wirkung der linken Seite auf den singulären 0-Simplexen. Für jedes 0-Simplex

$$\sigma\colon \Delta_0 = \{1\} \longrightarrow X$$

gilt

$$(\partial\circ P + P\circ\partial)(\sigma) = \partial(P\cdot\sigma)$$

mit $(P\cdot\sigma)(x_0,x_1) = x_0 P + \sigma(1)$ für $0 \le x_0 < 1$, also

$$(P\cdot\sigma)\circ\varepsilon^0 = \sigma \quad \text{(die der 0-ten Ecke gegenüberliegende Seite } x_0 = 0).$$

$$(P\cdot\sigma)\circ\varepsilon^1 =^{14} P \qquad \text{(die der 1-ten Ecke gegenüberliegende Seite } x_0 = 1).$$

Es folgt

$$(\partial\circ P + P\circ\partial)(\sigma) = \sigma - P.$$

Bezeichne $\hat{P}$ die Kettenabbildung $\hat{P}\colon (\mathbb{Z},0) \longrightarrow SX,\ m \mapsto m\bullet P$.[15] Dann läßt sich diese Identität in der folgenden Gestalt schreiben.

$$\partial\circ P + P\circ\partial = \mathrm{Id} - \hat{P}\circ\eta^X \qquad \text{für Ketten den Dimension 0 von SX.}$$

Weil $\hat{P}$ die Ketten positiver Dimension in die Null abbildet, folgt zusammen mit (3)

$$\partial\circ P + P\circ\partial = \mathrm{Id} - \hat{P}\circ\eta^X \quad \text{für beliebige Ketten von SX}$$

Trivialerweise gilt

$$\eta^X\circ\hat{P} = \mathrm{Id}$$

$$\hat{P}\circ\eta^X = \mathrm{Id}$$

Wir haben gezeigt, die Kettenabbildungen

$$\eta^X\colon SX \longrightarrow (\mathbb{Z},0) \text{ und } \hat{P}\colon (\mathbb{Z},0) \longrightarrow SX$$

sind invers zueinander in der Homotopie-Kategorie ∂'Ab, also zueinander homotopie-inverse Homotopie-Äquivalenzen.
QED.

---

[13] Im zweiten Summanden steht ε^{i-1} (und nicht ε^i) weil im Zähler des ersten Arguments x_1 steht (und nicht x_0).

[14] Rechts bezeichnet P die konstante Abbildung mit dem Bild {P}.

[15] m•P bezeichne das m-fache des 0-Simplex mit dem Bild {P}.

Bemerkung

Wir haben für jeden Punkt $p \in X$ einer konvexen Teilmenge X des $\mathbb{R}^n$ Gruppen-Homomorphismen

$$p: S_q(X) \to S_{q+1}(X),\ \sigma \mapsto p \cdot \sigma,$$

konstruiert, die jedem Simplex σ von X den "Kegel $p \cdot \sigma$ über σ mit der Spitze p zuordnen. Und wir haben gezeigt, diese Abbildungen p setzen sich zu einer Homotopie zusammen

$$\partial \circ p + p \circ \partial = \mathrm{id} - \hat{p} \circ \eta,$$

wenn $\eta: S(X) \to (\mathbb{Z},0)$ die Augmenation und $\hat{p}$ den Komplex-Morphismus

$$\hat{p}: (\mathbb{Z},0) \to S(X),\ m \mapsto m \bullet p$$

bezeichnet. Zur späteren Verwendung weisen wir hier noch auf zwei Eigenschaften dieser Konstruktion hin.

(i) Verträglichkeit mit linearen Abbildungen. Für jedes singuläre Simplex

$$\tau: \Delta_q \to \mathbb{R}^n$$

jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ und jede lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt

$$S(f)(p \cdot \tau) = f(p) \cdot (f \circ \tau) = f(p) \cdot S(f)(\tau).$$

(ii) Die Ecken des Kegels mit der Spitze p. Für jedes lineare Simplex

$$\tau: \Delta_q \to \mathbb{R}^n$$

mit den Ecken $p_0,\ldots,p_q$ ist

$$p \cdot \tau: : \Delta_{q+1} \to \mathbb{R}^n$$

ein lineares Simplex mit den Ecken $p, p_0,\ldots,p_q$.

3.4.6 Der Zusammenhangshomomorphismus einer Teilmenge des affinen Raumes

Für jede nicht-leere Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ist der Zusammenhangshomomorphismus

$$\partial_*: H_q(\mathbb{R}^n, Y) \to \tilde{H}_{q-1}(Y)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Da $\mathbb{R}^n$ konvex ist, gilt

$$\tilde{H}(\mathbb{R}^n) = 0$$

(nach 3.4.5). Die Behauptung ergibt sich damit aus der reduzierten Homologiesequenz des Paares $(\mathbb{R}^n, Y)$.
QED.

3.4.7 Linear zusammenhängende Räume

Ein topologischer Raum X heißt linear zusammenhängend oder auch wegeweise zusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte von X durch einen Weg verbinden lassen.
Genauer, für je zwei Punkte $p,q \in X$ gibt es eine stetige Abbildung

$$\omega: [0,1] \to X$$

auf dem Einheitintervall mit Werten in X derart, daß $\omega(0) = p$ und $\omega(1) = q$ gilt.

Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Betrachten wir die Relation R auf X mit

xRy ⇔ x und y können durch eine Weg von X verbunden werden.

Dies ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge X. Die Äquivalenzklassen bzglich dieser Äquivalenzrelation heißen lineare Komponenten von X oder auch einfach Komponenten von X. Nach Definition sind die Komponenten maximale linear zusammenhängende Unterräume von X. Jeder topologische Raum zerfällt somit in paarweise disjunkte zusammenhängende Unterräume.

3.4.8 Die Homologie linear zusammenhängender Räume

Sei X ein nicht-leerer linear zusammenhängender topologischer Raum. Dann induziert die Augmentation η: SX → ($\mathbb{Z}$,0) einen Isomorphismus

$$H_0(\eta): H_0X \to H_0(\mathbb{Z},0) = \mathbb{Z}.$$

Beweis. Sei p∈X ein fest gewählter Punkt. Wir betrachten die Kettenabbildung

$$\hat{p}: (\mathbb{Z},0) \to SX,\ m \mapsto m\cdot p.$$

Für die Zusammensetzung mit der Augmentation erhalten wir

$$\eta\circ\hat{p} = id. \qquad (1)$$

Für jedes 0-Simplex σ_0: $\Delta_0 \to X$ fixieren wir ein 1-Simplex $\pi(\sigma_0):\Delta_1 \to X$ mit den Ecken σ_0 und p,

$$\pi(\sigma_0)\circ\varepsilon^0 = \sigma_0 \text{ und } \pi(\sigma_0)\circ\varepsilon^1 = p.$$

Die Angabe eines solche 1-Simplex ist im wesentlichen dasselbe wie die Angabe eines Weges vom einzigen Punkt von σ_0 zum Punkt p. Ein solches 1-Simplex existiert, weil X nach Voraussetzung linear zusammenhänged sein soll. Nach Konstruktion gilt

$$\partial(\pi(\sigma_0)) = \sigma_0 - p = (id - \hat{p}\circ\eta)(\sigma_0)$$

für alle 0-Simplexe σ_0, d.h. es ist

$$\partial\circ\pi = id - \hat{p}\circ\eta$$

im Grade 0. Das bedeutet aber , auf der 0-ten Homologie induziert $\hat{p}\circ\eta$ die identische Abbildung: für 0-Zyklen z gilt

$$H_0(\hat{p})\circ H_0(\eta)[z] = [\hat{p}\circ\eta(z)] = [z - \partial(\pi(z))] = [z],$$

d.h.

$$H_0(\hat{p})\circ H_0(\eta) = id. \qquad (2)$$

Zusammen bedeuten (1) und (2), daß η: SX → ($\mathbb{Z}$,0) auf der 0-ten Homologie einen Isomorphismus induziert.

QED.

3.4.9 Die 0-te Homologie und lineare Komponenten

Seien X ein beliebiger topologischer Raum und

$$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$

die Familie der linearen Komponenten von X. Weiter seien A⊆X ein Unterraum und

$$A_\lambda := A\cap X_\lambda.$$

Dann induzieren die Inklusionen $i_\lambda : (X_\lambda, A_\lambda) \subseteq (X,A)$ eine Zerlegung in eine direkte Summe

$$\oplus_{\lambda\in\Lambda} S(X_\lambda, A_\lambda) \cong S(X,A)$$

und folglich auch eine Zerlegung

$$\oplus_{\lambda\in\Lambda} H(X_\lambda, A_\lambda) \cong H(X,A).$$

Insbesondere ist $H_0(X)$ isomorph zur freien abelschen Gruppe, die von den linearen Komponenten von X erzeugt wird.

Beweis. Betrachten wir die Kettenabbildung

$$\oplus_{\lambda\in\Lambda} S(X_\lambda) \to S(X),\ (c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda. \qquad (1)$$

Für unterschiedliche λ liegen die Simplexe, welche in der Kette c_λ vorkommen, in unterschiedliche Räumen und sind deshalb paarweise verschieden. Die Summe

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda$$

ist deshalb nur dann gleich Null, wenn jedes c_λ Null ist. Mit anderen Worten, die obige Kettenabbildung ist injectiv. Zeigen wir, sie ist auch surjektiv. Dazu genügt es, wenn wir zeigen, jedes Simplex von $\sigma:\Delta_q \to X$ liegt im Bild dieser Abbildung. Nun ist Δ_q linear zusammenhängend: je zwei Punkte lassen sich sogar durch eine Strecke verbinden. Das Bild von σ ist deshalb auch linear zusammenhängend: je zwei Punkte lassen sich durch das Bild einer Strecke verbinden. Somit liegt das Bild ganz in einer linearen Komponente von X, d.h. es gibt ein λ mit $\sigma(\Delta_q)\subseteq X_\lambda$. Dann ist aber σ ein Simplex von X_λ und liegt im Bild der obigen Kettenabbildung. Wir haben gezeigt, die Abbildung (1) ist ein Isomorphismus von Kettenkomplexen. Durch Einschränken erhalten wir einen Isomorphismus

$$\oplus_{\lambda\in\Lambda} S(A_\lambda) \to S(A),\ (c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda. \qquad (2)$$

und durch Faktorisieren einen Isomorphismus

$$\oplus_{\lambda\in\Lambda} S(X_\lambda)/S(A_\lambda) \to S(A)/S(X).$$

Letzterer ist gerade der gesuchte Isomorphismus $\oplus_{\lambda\in\Lambda} S(X_\lambda, A_\lambda) \cong S(X,A)$.

QED.

3.4.10 Die 0-te Homologie des diskreten Raumes

Für den diskreten topologischen Raum X gilt

$$H_0(X) \cong \oplus_{x\in X} \mathbb{Z}.$$

Beweis. Die linearen Komponenten von X sind gerade die einpunktigen Teilmengen. Die nullte Homologie dieser Teilmengen ist gerade $\mathbb{Z}$. Die Behauptung folgt damit aus 3.4.9.

QED.

3.4.11 Umgebungsretrakte

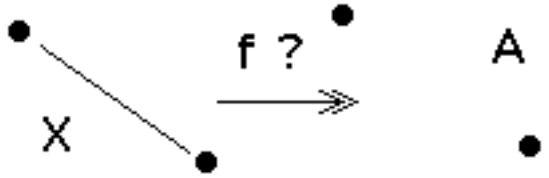
Seien X ein topologischer Raum, A ein Unteraum und

$$i:A\to X$$

die natürliche Einbettung. Der Unterraum A heißt Retrakt von X, wenn es eine stetige Abbildung $r:X\to A$ gibt mit $r\circ i = id$. Die Abbildung r heißt dann Retraktion. Ein Unterraum A eines topologischen Raumes X heißt Umgebungsretrakt, wenn es eine offene Umgebung U von A in X derart gibt, daß A ein Retrakt von U ist.

Beispiele

1. Jeder Punkt von X ist ein Retrakt von X.
2. Sind X und Y topologische Räume und $p\in X$, so ist $\{p\}\times Y$ ein Retrakt von $X\times Y$. Als Retraktion kann man folgende Abbildung verwenden.
$$X\times Y \to \{p\}\times Y,\ (x,y) \mapsto (p,y).$$
3. Jeder Retrakt ist ein Umgebungsretrakt. Die Umkehrung ist falsch. Wenn X zum Beispiel das Einheitsinterval ist und A aus dessen beiden Endpunkten besteht, so ist A ein Umgebungsretrakt von X, jedoch kein Retrakt (weil X linear zusammenhängend ist, A jedoch nicht).



Bemerkung

Später befassen wir uns mit Umgebungsretrakten. Hier beweisen wir nur ein einfaches Ergebnis über Retrakte.

3.4.12 Die Zerlegung der Homologie mit Hilfe von Retraktionen

Seien X ein topologischer Raum, A ein Teilraum, $i:A\to X$ die natürliche Einbettung und

$$r:X\to A$$

eine Retraktion. Dann ist der Homomorphismus

$$H(X) \to H(A)\oplus H(X,A),\ [z] \mapsto ([S(r)z, [z])$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Betrachten wir die kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0\to SA \xrightarrow{i_*} SX \xrightarrow{j} S(X,A) \to 0.$$

Die Existenz der Retraktion r hat zur Folge, daß i_* ein Linksinverses besitzt: mit $r\circ i = id$ gilt $r_*\circ i_* = id$. Damit zerfällt die Sequenz, und zwar sogar als Sequenz von Kettenkomplexen (nicht nur als Sequenz von graduierten abelschen Gruppen). Es es besteht also eine Isomorphie von Komplexen

$$SX \cong SA\oplus S(X,A).$$

Übergang zur Homologie liefert die Behauptung.

QED.

3.4.13 Die Homologiesequenz eines Retrakts

Seien X ein topologischer Raum und A ein Retrakt von X. Dann zerfällt die Homologie-sequenz des Paares (X,A) in lauter kurze exakte Sequenzen

$$0 \xrightarrow{\partial_*=0} H_q A \xrightarrow{i_*} H_q X \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*=0} 0$$

Beweis. Nach 3.4.12 erhält man eine kurze exakte Sequenz, wenn man in der langen exakten Homologie-Sequenz von (X,A) die Zusammenhangshomomorphismen durch

Nullabbildungen ersetzt. Weil die Homologiesequenz von (X,A) exakt ist, müssen dann aber die Zusammenhangshomomorphismen Null sein.
QED.

3.5 Homotopieinvarianz

3.5.1 Wiederholung

Zwei stetige Abbildungen f,g: X→Y heißen homotop, wenn es eine stetige Familie von Abbildungen

$$F_t : X \to Y,\ t \in I := [0,1]$$

gilt mit $F_0 = f$ und $F_1 = g$. Eine Familei $F_t : X \to Y$ mit $t \in I$ heißt stetig, wenn die Abbildung

$$X \times I \to Y\ ,\ (x,t) \mapsto F_t(x),$$

stetig ist.

3.5.2 Formulierung des Satzes über die Homotopieinvarianz

Seien f,g: X → Y homotope Abbildungen topologischer Räume. Dann sind die zugehörigen Abbildungen der singulären Kettenkomplexe

$$Sf, Sg: SX \to SY$$

(ketten-)homotop.
Bemerkung. Bevor wir den Satz beweisen, geben wir einige Folgerungen an.

3.5.3 Folgerung: die Homologie homotoper Abbildungen

Seien f,g: X → Y homotope Abbildungen. Dann sind die auf der Homologie induzierten Abbildungen gleich:

$$H(f) = H(g): HX \to HY.$$

Beweis. Kettenhomotope Abbildunge induzieren dieselben Abbildungen auf der Homologie.
QED.

3.5.4 Folgerung: die Homologie homotoper Räume

Mit $(X,A) \simeq (Y,B)$ gilt $H(X,A) \cong H(X,B)$.
Beweis. Nach Voraussetzung gibt es stetige Abbildungen

$$f:(X,A) \to (Y,B) \text{ und } g:(Y,B) \to (X,A)$$

mit

$$f \circ g \simeq id \text{ und } g \circ f \simeq id.$$

Nach dem Satz über die Homotopieinvarianz sind dann aber

$$H(f): HX \to HY \text{ und } H(g): HY \to HX$$

zueinander invers:

$$H(f) \circ H(g) = H(f \circ g) = H(id) = id$$
$$H(g) \circ H(f) = H(g \circ f) = H(id) = id.$$

Analog induzieren die Einschränkungen $f|_A$ und $g|_B$ zueinander inverse Abbildungen auf der Homologie:

$$H(f|_A): HA \to HB \text{ und } H(g|_B): HB \to HA$$

Insbesondere sind

$$f_*: HX \to HY \text{ und } (f|_A)_*: HA \to HB$$

Isomorphismen. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots\to & H_qA & \to H_qX & \to H_q(X,A) & \to H_{q-1}A & \to H_{q-1}X & \to \ldots \\ & \downarrow (f|A)_* & \downarrow f_* & \downarrow & \downarrow (f|A)_* & \downarrow f_* & \\ \ldots\to & H_qB & \to H_qY & \to H_q(Y,B) & \to H_{q-1}B & \to H_{q-1}Y & \to \ldots \end{array}$$

dessen Zeilen gerade die langen Homologie-Sequenzen der Paare (X,A) bzw. (Y,B) sind. Wir haben zu zeigen, die mittlere vertikale Abbildung ist ein Isomorphismus. Nach dem Fünfer-Lemma reicht es zu zeigen, die vier auf beiden Seiten angrenzenden Abbildungen sind Isomorphismen. Das haben wir aber gerade gezeigt.
QED.

3.5.5 Folgerung: die reduzierte Homologie kontrahierbarer Räume

Wenn der Raum X kontrahierbar ist, $X \simeq P := \{p\}$, so gilt $\tilde{H}X = 0$. Genauer, die Augmentation $\eta: SX \to (\mathbb{Z},0)$ ist eine Homotopieäquivalenz.
Beweis. Nach 3.5.4 induziert die einzige Abbildung

$$X \to P$$

einen Isomophismus

$$H_0(X) \to H_0(P) \cong \mathbb{Z},\ [\sum_\sigma c_\sigma \cdot \sigma] \mapsto [\sum_\sigma c_\sigma \cdot p] \mapsto \sum_\sigma c_\sigma .$$

Letztere Abbilung ist aber dieselbe Abbildung wie sie auch von der Augmentation induziert wird. Mit anderen Worten, die Augmentation η induziert einen Isomophismus

$$H(\eta): HX \to H(\mathbb{Z},0) = (\mathbb{Z},0).$$

(für Dimensionen $q \neq 0$ ist das trivial). Nun ist η eine Kettenabbildung freier Komplexe. Das bedeutet aber, η ist eine Homotopieäquivalenz (Satz von 2.4).
QED.

3.5.6 Vorbemerkungen

(i) Die Situation, in der wir uns befinden kann man sich wie folgt illustieren. Wir haben ein Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccccc} \text{Top} & \xrightarrow{S} & \partial\text{Ab} & \xrightarrow{H} & \text{GAb} \\ \pi\downarrow & & \pi\downarrow & & \| \\ \text{Top'} & \xrightarrow{\bar{S}} & \text{H}\partial\text{Ab} & \xrightarrow{\bar{H}} & \text{GAb} \end{array}$$

Der Satz über die Homotopieinvarianz bedeutet im wesentlichen, daß wir dieses Diagramm kommutativ durch einen gestrichelt eingezeichneten Funktor $\bar{S}$ ergänzen können.

(ii) Wenn $f:(X,A) \to (X,B)$ eine Homotopieäquivalenz ist, so sind auch

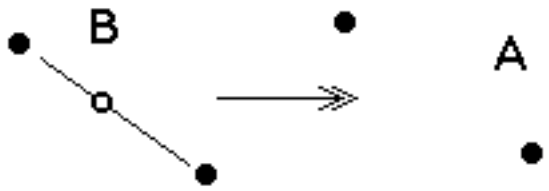
$$f:X\to Y \text{ und } f|_A:A\to B$$

Homotopieäquivalenzen. Die Umkehrung dieser Aussage ist nicht richtig. Seien zum Beispiel

$$X := Y := [0,1],\ A := \{0,1\},\ B:=[0,1] - \{\tfrac{1}{2}\}.$$

Dann sind die natürlichen Einbettungen $X\subseteq Y$ und $A\subseteq B$ Homotopieäquivalenzen (es gibt eine Retraktion $B\to A$, welche als Abbildung $B\to B$ homotop zur identischen Abbildung ist). Die Einbettung $f:(X,A) \subseteq (Y,B)$ ist jedoch keine Homotopieäquivalenz, denn eine Homotopieinverse

$$g:(Y,B) \to (X,A)$$



müßte auf jedem Teilintervall von B konstant sein[16], müßte also aus Stetigkeitsgründen auf ganz Y konstant sein. Dann ist aber auch

$$g \circ f: (X,A) \to (X,A)$$

konstant. Die Einschränkung von $g \circ f$ auf A läßt sich also nicht in die identische Abbildung von A deformieren (nach dem Zwischenwersatz - man betrachte das Bild des Punktes, der kein Wert von $g \circ f$ ist bei der Homotopie von $g \circ f$ in die Identität).

3.5.7 Vorbereitung: Kriterium für die Existenz einer natürlichen Kettenhomotopie

Seien F^0, F^1:$SX \to S([0,1]\times X)$ natürliche Kettenabbildungen (d.h. natürliche Transformationen der Funktoren in X auf beiden Seiten) mit der Eigenschaft, daß die Komposition

$$S\Delta_0 \xrightarrow{F^i} S([0,1]\times\Delta_0) \xrightarrow{\eta} (\mathbb{Z},0)$$

unabhängig von $i\in\{0,1\}$ ist. Dann existiert eine natürliche Kettenhomotopie $s:F^0 \simeq F^1$.

Bemerkung

Die Natürlichkeit einer Abbildung φ (=F^0, F^1 oder s) soll bedeuten, daß sie für alle topologischen Räume X definiert ist und daß für jede stetige Abbildung $h:X\to X'$ das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{\varphi} & S([0,1]\times X) \\ Sh\downarrow & & \downarrow S(h\times id) \\ SX' & \xrightarrow{\varphi} & S([0,1]\times X') \end{array}$$

Mit anderen Worten, φ ist eine natürliche Transformation $S(?) \to S([0,1]\times ?)$ des Funktors S in den Funktor $S([0,1]\times ?)$.

Beweis. Wir haben eine Kettenhomotopie s zu konstruieren, d.h. eine Familie von Gruppenhomomorphismen

$$s_k: S_kX \to S_{k+1}([0,1]\times X) \qquad (1)$$

mit

$$\partial_{k+1}s_k + s_{k-1}\partial_k = F^0_k - F^1_k \qquad (2)$$

für jedes $k\in\mathbb{Z}$. Für $k<0$ muß s_k der triviale Homomorphismus sein, da der Definitionsbereich die triviale Gruppe ist. Nehmen wir jetzt an, wir hätten die s_k bereits

---

[16] Jedes der beiden Intervalle von B ist linear zusammenhängend, geht also in eine lineare Komponente von A = {0,1} über, also ganz in {0} oder ganz in {1}.

für alle k<q derart konstruiert, daß (2) gilt. Wir haben s_q so zu definieren, daß die Identät auch für den neuen Index q bestehen bleibt.

Bezeichne $\iota_q:\Delta_q \to \Delta_q$ die identische Abbildung. Wir können ι_q als singuläres Simplex des topologischen Raumes Δ_q auffassen.

$$\iota_q \in S\Delta_q$$

Insbesondere können wir auf ι_q den Randoperator und die Kettenabbildungen F^i anwenden.

Wir denken uns jetzt (2) nach ∂s aufgelöst und betrachten die resultierende Identität als Bestimmungsgleichung für s, und zwar an der Stelle $\sigma = \iota_q$. Die rechte Seite dieser Bestimmungsgleichung ist gerade die folgende Kette:

(3) $$c := F^0\iota_q - F^1\iota_q - s_{q-1}\partial\iota_q \in S([0,1]\times\Delta_q).$$

1Schritt. Wir zeigen, die Kette c ist ein Rand: es gibt ein $b\in S_{q+1}([0,1]\times\Delta_q)$ mit $c = \partial b$.

Zeigen wir zunächst, c ist ein Zyklus. Es gilt

$$\begin{aligned}\partial c &= \partial F^0\iota_q - \partial F^1\iota_q - \partial s_{q-1}\partial\iota_q \\ &= F^0\partial\iota_q - F^1\partial\iota_q - (F^0 - F^1 - s_{q-2}\partial)\partial\iota_q \text{ (nach (2) mit k:= q-1)} \\ &= 0\end{aligned}$$

Damit repräsentiert c eine Homologieklasse

$$[c]\in H_q(([0,1]\times\Delta_q).$$

Es gilt sogar noch mehr: [c] liegt sogar in der reduzierten Homologie. Für $q\neq 0$ ist das trivial, da für diese q die reduzierte mit der gewöhlichen Homologie übereinstimmt. Für q=0 haben wir zu zeigen, [c] liegt im Kern der Augmentation, d.h. zu zeigen ist

$$0 = \gamma[c] = [\eta c].$$

Dabei bezeichne wie bisher η die Augmentation auf Komplexniveau. Es gilt:

$$\begin{aligned}\eta c &= \eta F^0\iota_q - \eta F^1\iota_q - \eta s_{q-1}\partial\iota_q \\ &= -\eta s_{q-1}\partial\iota_q && \text{(wegen } \eta F^0 = \eta F^1 \text{ für q=0 nach Voraussetzung)} \\ &= 0 && \text{(wegen } \partial\iota_q = 0 \text{ im Fall q=0)}^{17}.\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt,

$$[c]\in\tilde{H}_q([0,1]\times\Delta_q).$$

Nun ist $[0,1]\times\Delta_q$ eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^{q+2}$, hat also triviale reduzierte Homologie. Mit anderen Worten [c] = 0, d.h. c ist Rand einer (q+1)-Kette b,

$$c = \partial b \text{ für ein } b = b_{q+1} \in S_{q+1}([0,1]\times\Delta_q)$$

Damit ist die Behauptung des ersten Schritts bewiesen. Für jede nicht-negative ganze Zahl q fixieren wir jetzt eine solche Kette[18]

$$b = b_{q+1} \in S_{q+1}([0,1]\times\Delta_q).$$

Diese versetzt uns in die Lage, den Homomorphismus s_q wie folgt zu definieren.

---

[17] ∂i_q ist im Fall q = 0 eine (-1)-Kette.

[18] d.h. eine Kette b, deren Rand gleich der Kette c von (3) ist.

(4) $$s_q : S_q(X) \to S_{q+1}([0,1]\times X),\ \sigma \mapsto S(id\times\sigma)(b).$$

2. Schritt. Der Homomorphismus (4) ist wohldefiniert.
Die q-Simplexe von X bilden ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $S_q(X)$. Zur Definition von s_q, genügt es deshalb, für jedes q-Simplex σ dessen Bild anzugeben. Ein q-Simplex von X ist eine stetige Abbildung

$$\sigma : \Delta_q \to X.$$

Diese induziert eine stetige Abbildung $id\times\sigma$: $[0,1]\times\Delta_q \to [0,1]\times X$ und damit eine Ketten-Abbildung

$$S(id\times\sigma): S([0,1]\times\Delta_q) \to S([0,1]\times X).$$

Da b in $S_{q+1}([0,1]\times\Delta_q)$ liegt, kann man $S(id\times\sigma)$ auf b anwenden und erhält als Bild ein Element von $S_{q+1}([0,1]\times X)$. Wir haben gezeigt, die Abbildung (4) ist wohldefiniert.

Es bleibt noch die Natürlichkeit zu zeigen (d.h. die Kommutativität des Diagramms der Bemerkung) und die Gültigkeit der Identität (2) im Fall k = q.
3. Schritt. Beweis der Natürlichkeit von s_q.
Seien $h:X\to X'$ eine stetige Abbildung und $\sigma:\Delta_q \to X$ ein q-Simplex von X. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta_q & \xrightarrow{\sigma} & X \\ & {\scriptstyle h\circ\sigma}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle h} & \\ & X' & \end{array}$$

Wir wenden die Funktoren $I\times$ und S an und erhalten ein kommutativs Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S(I\times\Delta_q) & \xrightarrow{S(I\times\sigma)} & S(I\times X) \\ & {\scriptstyle S(I\times h\circ\sigma)}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle S(I\times h)} & \\ & S(I\times X') & \end{array}$$

Durch evaluieren an der Stelle $b \in S(I\times\Delta_q)$ ergibt sich

$$S(I\times h)(s(\sigma)) = s(h\circ\sigma) = s(S(h)(\sigma)).$$

Mit anderen Worten, das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{s} & S(I\times X) \\ {\scriptstyle S(h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S(I\times h)} \\ SX' & \xrightarrow{s} & S(I\times X') \end{array}$$

Das bedeutet aber gerade, s ist eine natürliche Transformation.[19]

4. Schritt. Beweis der Gültigkeit von (2) für k=q.

---

[19] Durch direktes Rechnen ergibt sich das wie folgt.

$$S(id\times h)(s_q\sigma') = S((id\times h)(id\times\sigma'))b = S(id\times(h\sigma'))b = s_q(h\sigma') = s_q(S(h)\sigma').$$

Da σ' beliebig war, folgt $S(id\times h)\circ s_q = s_q\circ S(h)$.

Nach Konstruktion gilt die zu beweisende Identität an der Stelle $\sigma = \iota_q$:

$$(\partial s + s\partial)(\iota_q) = (F^0 - F^1)(\iota_q)$$

Wir wenden auf beide Seiten $S(\sigma)$ an mit einer stetigen Abbildung $\sigma\colon \Delta_q \longrightarrow X$ und erhalten, da $S(\sigma)$, F^0, F^1 Kettenabbildungen sind und s natürliche ist

$$(\partial s + s\partial)(S(\sigma)\iota_q) = (F^0 - F^1)(S(\sigma)\iota_q)$$

d.h.

$$(\partial s + s\partial)(\sigma) = (F^0 - F^1)(\sigma)$$

Da dies für alle q-Simplexe σ gilt, folgt die Behauptung.[20]
QED.

3.5.8 Beweis der Homotopieinvarianz (Satz 3.5.2)

Sei Θ:f≃g eine Homotopie von stetigen Abbildungen

$$f,g\colon (X,A) \to (Y,B),$$

d.h.

$$f(x) = \Theta(0, x) \text{ und } g(x) = \Theta(1,x).$$

Für jedes $t\in[0,1]$ und beliebige topologische Räume Z sei $F^t_Z = F^t$ die stetige Abbildung

$$F^t\colon Z \to [0,1]\times Z,\ x \mapsto (t,x).$$

Speziell für Z = X erhalten wir $\Theta\circ F^0 = f$ und $\Theta\circ F^1 = g$. Es genügt deshalb eine Homotopie

(1) $$s\colon SF^0 \simeq SF^1\colon S(X,A) \to S([0,1]\times X,[0,1]\times A).$$

zu konstruieren. Durch Zusammensetzen mit $S(\Theta)$ erhalten wir dann die gewünschte Homotopie

$$\begin{array}{ccc} S(\Theta)\circ s\colon S(\Theta)\circ S(F^0) & \simeq & S(\Theta)\circ S(F^1) \\ \| & & \| \\ S(\Theta\circ F^0) & & S(\Theta\circ F^1) \\ \| & & \| \\ S(f) & & S(g) \end{array}$$

---

[20] Etwas expliziter ist

$$\begin{aligned} (\partial s_q)\sigma &= \partial S(id\times\sigma)b = S(id\times\sigma)\partial b && \text{(da } S(id\times\sigma) \text{ Kettenabbildung ist)} \\ &= S(id\times\sigma)(F^0\iota_q - F^1\iota_q - s_{q-1}\partial\iota_q) && \text{(wegen } \partial b = c) \\ &= F^0\sigma\iota_q - F^1\sigma\iota_q - s_{q-1}\sigma\partial\iota_q && \text{(Natürlichkeitvon } F^0, F^1 \text{ und } s_{q-1}) \\ &= F^0\sigma - F^1\sigma - s_{q-1}S(\sigma)\partial\iota_q && \text{(wegen } \iota_q = id) \\ &= F^0\sigma - F^1\sigma - s_{q-1}\partial S(\sigma)\iota_q && \text{(weil S() Kettenabbildung ist)} \\ &= (F^0 - F^1 - s_{q-1}\partial)\sigma && \text{(wegen } \iota_q = id) \end{aligned}$$

Da σ beliebig war, folgt $\partial s_q = F^0 - F^1 - s_{q-1}\partial$.

Konstruieren wir also eine Kettenhomotopie (1). Für jedes $t\in[0,1]$ induziert F^t die Abbildung

$$S(F^t):S(Z) \to S([0,1]\times Z),\ c = \sum_\sigma c_\sigma\cdot\sigma \mapsto S(F^t)c = \sum_\sigma c_\sigma\cdot\{t\}\times\sigma,$$

wenn $\{t\}\times\sigma$ das Simplex $\{t\}\times\sigma:\Delta_q \to [0,1]\times Z,\ x \mapsto (t, \sigma(x))$ bezeichnet. Insbesondere ist die Summe der Koeffizienten der Kette

$$S(F^t)c$$

unabhängig von t, d.h die Zusammensetzung von $S(F^t)$ mit der Augmentation $\eta:S([0,1]\times Z)\to(\mathbb{Z},0)$ ist unabhängig von t. Nach 2.5.7 gibt es eine natürliche Homotopie

$$s:SF^0 \simeq SF^1: S(X) \to S([0,1]\times X)$$

für jeden topologischen Raum X. Ist $A\subseteq X$ ein Unterraum, so gilt auf Grund der Natürlichkeit von s, auch

$$s(SA) \subseteq S([0,1]\times A),$$

d.h wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{s} & S([0,1]\times X) \\ \cup & & \cup \\ SA & \xrightarrow{s} & S([0,1]\times A) \end{array}$$

Durch Übergang zu den Faktorkomplexen erhalten wir eine Kettenhomotopie

$$s: \bar{S}F^0 \simeq \bar{S}F^1 : S(X,A) \to S([0,1]\times X,[0,1]\times A).$$

QED.

3.5.9 Deformationsretrakte und starke Deformationsretrakte

Sei (X,A) ein topologisches Paar und $i:A\to X$ die natürliche Einbettung. Dann heißt A <u>Deformationsretrakt</u> von X, wenn es es Homotopie $\Theta_t:X\to X$ gibt mit

$$\Theta_0 = \mathrm{id}, \qquad \Theta_1(X) = A, \quad \Theta_1|_A = i.$$

In dieser Situation ist $r:= \Theta_1:X\to A$ eine Retraktion und es gilt $r\circ i = \mathrm{id}$ und

$$i\circ r = \Theta_1 \simeq \Theta_0 = \mathrm{id},$$

d.h. i und r sind zueinander homotopieinverse Homotopieäquivalenzen. Insbesondere ist

$$Hi: HA \to HX$$

ein Isomorphismus.
Wenn man die Homotopie sogar so wählen kann, daß

$$\Theta_t|_A = i$$

gilt für alle t, so heißt A <u>starker Deformationsretrakt</u> von X.

Beispiele

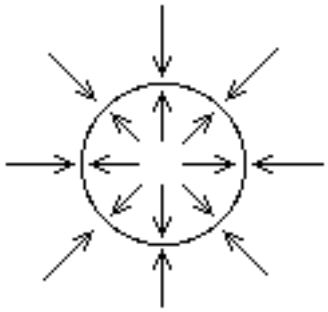
(i) Ist $p\in X$ ein Punkt von X, so ist die einpunktige Teilmenge $\{p\}\subseteq X$ genau dann ein Deformationsretrakt, wenn, X kontrahierbar ist. Es gilt dann $\tilde{H}X = 0$ (nach 3.5.5).

(ii) Die n-dimensionale Einheitssphäre

$$S^n := \{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

ist ein starker Deformationsretrakt des punktierten Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^{n+1}$-{o}. Als Deformation kann man die folgende stetige Familie nehmen.

$$\Theta_t(x) := (1\text{-}t + \frac{t}{\|x\|}) \cdot x$$



(iii) Die Deformation von (ii) zeigt auch, daß S^n ein starker Deformationsretrakt der Punktierten (n+1)-dimensionalen Vollkugel B^{n+1}-{o} ist. Dabei sei

$$B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Insbesondere gilt

$$HS^n \cong H(B^{n+1}\text{-}\{o\}) \cong H(\mathbb{R}^{n+1}\text{-}\{o\}).$$

3.5.10 Aufgaben

1 Zeigen Sie, der Volltorus (d.h. der Körper, nicht seine Oberfläche) enthält einen starken Deformationsretrakt, der homöomorph zur Kreislinie ist.

2. Der Kegel CX über einem topologischen Raum X ist definiert als der topologische Raum, welchen man aus [0,1]×X erhält, indem man alle Punkte von {0}×X miteinander identifiziert, wobei man die so entstehende Menge mit der Faktortopologie versieht. Die Punkte von {0}×X repräsentieren also ein und denselben Punkt v von CX. Dieser Punkt v heißt Spitze des Kegels.

   (i) Zeigen Sie, $\tilde{H}CX = 0$.

   (ii) Zeigen Sie, für jedes q gilt $H_q(CX, CX\text{-}\{v\}) \cong \tilde{H}_{q-1}X$.

3.6 Baryzentrische Unterteilung

3.6.1 Der Unterteilungshomomorphismus

Für jede nicht negative ganze Zahl q heißt der Punkt

$$B_q := (\frac{1}{q+1}, \ldots, \frac{1}{q+1}) \in \Delta_q$$

des q-dimensionalen Standardsimplex Baryzentrum von Δ_q (Massenmittelpunkt). Für jedes (q-1)-Simplex

$$\sigma : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$$

des topologischen Raumes Δ_q bezeichne $B_q \cdot \sigma$ wie im Beweis von 3.4.5[21] das Simplex von Δ_q, dessen Bild der Kegel mit der Spitze B_q und der Basis $Im(\sigma)$ ist. Wir denken uns die Abbildung B_q linear zu einer Abbildung

$$B_q : S_{q-1}\Delta_q \to S_q\Delta_q$$

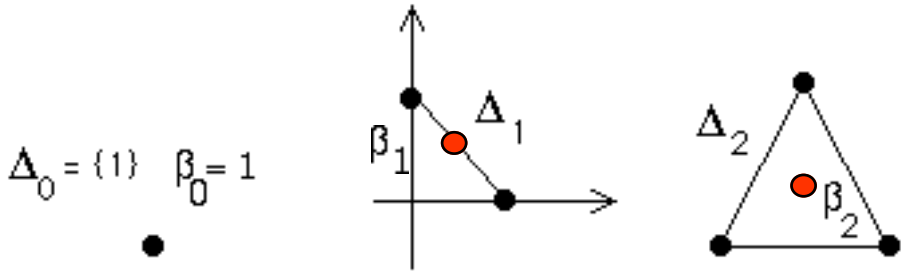
fortgesetzt.

Für jeden topologischen Raum X und für jedes $q \geq 0$ definieren wir induktiv einen Gruppenhomomorphismus

$$\beta_q : S_qX \to S_qX.$$

welcher <u>baryzentrische Unterteilung</u> heißt. Für $q=0$ sei β_q die identische Abbildung.

$$\beta_0 := id : S_0X \to S_0X,\ c \mapsto c.$$



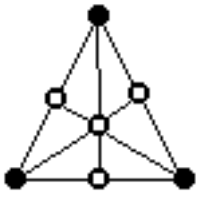
Sei jetzt $q>0$ und β_i für alle $i<q$ bereitsdefiniert. Zur Definition von β_q genügt es das Bild $\beta_q(\sigma)$ für jedes q-Simplex von $\sigma : \Delta_q \to X$ anzugeben. Falls $X := \Delta_q$ ist und $\sigma := \iota_q : \Delta_q \to \Delta_q$ die identische Abbildung, so setzen wir[22]

$$\beta_q(\iota_q) := B_q \cdot \beta_{q-1}(\partial \iota_q) \in S_q\Delta_q.$$

Schließlich sei für ein beliebiges q-Simplex $\sigma : \Delta_q \to X$,

$$\beta_q(\sigma) := S(\sigma) \circ \beta_q(\iota_q).$$

Man beachte, $S(\sigma)$ ist eine Kettenabbildung $S(\sigma) : S\Delta_q \to SX$.



Bemerkungen.

---

[21] bei der Bestimmung der Homologie der konvexen Teilmengen des affinen Raumes

[22] d.h. wir bilden den Rand von ι_q, dessen baryzentrische Unterteilung und dann den Kegel mit der Spitze B_q über dieser Unterteilung (vgl. 3.4.5).

(i) Grob gesagt, erhält man die baryzentrische Unterteilung des q-Simplex σ aus der baryzentrischen Unterteilung des Randes $\partial\sigma$, indem man über jedem Simplex der Randunterteilung den Kegel mit der Spitze im Baryzentrum von σ errichtet.

(ii) Die wichtigste Eigenschaft der baryzentrischen Unterteilung besteht darin, ein gegebenes Simplex in kleinere zu zerlegen.

3.6.2 Der Durchmesser mehrfacher baryzentrischer Unterteilungen

Die Folge der Homomorphismen $\beta_q : S_qX \to S_qX$ definiert eine natürliche Kettenabbildung

$$\beta : SX \to SX$$

mit der folgenden Eigenschaft:

Für jedes $q \geq 0$ und jedes reelle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N := N(\varepsilon, q)$ derart, daß für jedes $n \geq N$ alle Simplexe τ der Kette $c = \beta^n(\iota_q) \in S_q\Delta_q$ einen Durchmessser $\|\tau\| < \varepsilon$ besitzen. Mit anderen Worten aus $\|\tau\| \geq \varepsilon$ folgt, daß der Koeffizient c_τ von τ in c gleich Null ist,

$$c_\tau = 0.$$

Dabei sei der Durchmesser eines Simplexes $\tau: \Delta_q \to \mathbb{R}^k$ definiert als

$$\|\tau\| := \sup \{ \|\tau(x) - \tau(y)\| \; x,y \in \Delta_q \}.$$

Beweis. 1. Schritt: Natürlichkeit von β.

Für jede stetige Abbildung $f:X \to Y$ und jedes q-Simplex $\sigma:\Delta_q \to X$ gilt

$$\begin{aligned} S(f)(\beta(\sigma)) &= S(f)(S(\sigma)\circ\beta_q(\iota_q)) && \text{(induktive Definition von } \beta) \\ &= S(f\circ\sigma)(\beta_q(\iota_q)) && \text{(Funktorialität von S)} \\ &= \beta(f\circ\sigma). \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{\beta} & SX \\ S(f)\downarrow & & \downarrow S(f) \\ SY & \xrightarrow{\beta} & SY \end{array}$$

Also ist β eine natürliche Transformation.

2. Schritt. β ist eine Kettenabbildung.

Wir zeigen dies durch Induktion nach q. Für $q \leq 0$ gilt trivialerweise

$$\partial b_q = b_{q-1}\partial,$$

da auf beiden Seiten die Nullabbildung steht. Führen wir den Induktionsschritt durch. Für jedes q-Simplex $\sigma:\Delta_q \to X$, $q>0$, gilt:

$$\begin{aligned} \partial(b_q\sigma) &= \partial(S(\sigma)\circ\beta_q(\iota_q)) && \text{(induktive Definition von } \beta) \\ &= \partial(S(\sigma)(B_q\cdot\beta_{q-1}(\partial\iota_q))) && \text{(induktive Defintion von } \beta_q(\iota_q)) \\ &= S(\sigma)(\partial(B_q\cdot\beta_{q-1}(\partial\iota_q))) && (S(\sigma) \text{ ist Kettenabbildung}) \\ &= S(\sigma)(\beta_{q-1}(\partial\iota_q) - B_{q-1}\cdot\partial\beta_{q-1}(\partial\iota_q)) && \text{(siehe unten)} \\ &= S(\sigma)(\beta_{q-1}(\partial\iota_q)) && \text{(wegen } \partial\beta_{q-1} = \beta_{q-2}\partial, \text{ Ind.vor.)} \end{aligned}$$

$= \beta_{q-1}(S(\sigma)(\partial\iota_q))$ (Natürlichkeit von β)

$= \beta_{q-1}(\partial\sigma)$ (S(σ) ist Kettenabbildung)

Das vierte Gleichheitszeichen ergibt sich dabei aus der Tatsache, daß die Multiplikation mit einem Punkt P im konvexen Raum Δ_q eine Kettenhomotopie ist, $\partial P + P\partial = id - P\circ\eta$ (vgl. den Beweis von 3.4.5) und der Term $P\circ\eta$ wegen $q>0$ die Nullabbildung ist. Wir haben gezeigt, $\partial\beta_q = \beta_{q-1}\partial$, d.h. β ist Kettenabbildung.

3. Schritt. Sei $\sigma: \Delta_q \to \mathbb{R}^k$ ein lineares Simplex mit den Ecken $p_0,...,p_q$. Dann gilt

(a) $\|p-p'\| \le \max\{\|p-p_i\| \mid i=0,...,q\}$ für beliebige $p,p' \in \sigma(\Delta_q)$.

(b) $\|s\| \le \max\{\|p_i - p_j\| \mid i,j=0,...,q\}$

Beweis. Der Punkt p' läßt sich in der Gestalt $p' = \sum_{i=0}^{q} x'_i p_i$ mit $\sum_{i=0}^{q} x'_i = 1$ schreiben. Also gilt

$$\begin{aligned}
\|p-p'\| &= \|(\sum_{i=0}^{q} x'_i)p - p'\| \\
&= \|\sum_{i=0}^{q} (x'_i p - x'_i p_i)\| \\
&\le \sum_{i=0}^{q} x'_i \cdot \|p - p_i\| \\
&\le (\sum_{i=0}^{q} x'_i)\cdot \max\{\|p-p_i\| \mid i=0,...,q\} \\
&= \max\{\|p-p_i\| \mid i=0,...,q\}.
\end{aligned}$$

Damit ist (a) bewiesen. Aussage (b) erhält man durch 2-maliges Anwenden von (a).

4. Schritt. Sei $\sigma: \Delta_q \to \mathbb{R}^k$ eine lineares Simplex. Dann besteht die Kette $\beta(\sigma)$ aus linearen Simplexen eines Durchmessers $\le \frac{q}{q+1}\cdot\|\sigma\|$. Insbesondere besteht $\beta(\iota_q)$ aus Simplexen eines Durchmessers $\le \frac{q}{q+1}\cdot\|\iota_q\|$.

Wir verwenden jetzt die in der Bemerkung von 3.4.5 erwähnten Eigenschaften der Kegel-Konstruktion. Wir erhalten für das lineare Simplex $\sigma: \Delta_q \to \mathbb{R}^k$:

$$\begin{aligned}
\beta(\sigma) &= \beta(S(\sigma)\iota_q) = S(\sigma)\beta(\iota_q) && \text{(Natürlichkeit von } \beta) \\
&= S(\sigma)(B_q \cdot \beta_{q-1}(\partial\iota_q)) && \text{(Definition von } \beta) \\
&= \sigma(B_q)\cdot S(\sigma)(\beta_{q-1}(\partial\iota_q))) && \text{(Eigenschaft (i) von 3.4.5)} \\
&= \sigma(B_q)\cdot\beta_{q-1}(\partial\sigma) && \text{(Natürlichkeit von } \beta) \\
&= \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \sigma(B_q)\cdot\beta_{q-1}(\sigma\varepsilon^j) && \text{(Definition von } \partial).
\end{aligned}$$

Damit besteht $\beta(\sigma)$ aus Simplexen der Gestalt $\sigma' := \sigma(B_q)\cdot\tau$ wobei τ in einer der Ketten

$$\beta_{q-1}(\sigma\varepsilon^j)$$

vorkommt. Das Simplex σ' hat den Durchmesser $\|p-q\|$ mit geeigneten Ecken p,q von σ'.Nach Eigenschaft (ii) sind diese Ecken entweder beides Ecken von τ oder eine der Ecken ist gleich $\sigma(B_q)$. Im ersten Fall gilt (nach Induktion bzgl. q)

$$\|\sigma'\| = \|p-q\| \le \|\tau\| \le \frac{q-1}{q}\cdot\|\sigma\varepsilon^j\| \le \frac{q-1}{q}\cdot\|\sigma\| \le \frac{q}{q+1}\cdot\|\sigma\|.$$

Im zweiten Fall gilt nach Schritt 3, wenn z.B. $p = \sigma(B_q)$ ist,

$$\|\sigma'\| = \|p-q\| \le \|p-p_i\|$$

für ein i. Also ist

$$\|\sigma'\| \le \|\sigma(B_q) - p_i\| = \Big\|\sum_{\mu=0}^{q}\frac{1}{q+1}\cdot(p_\mu - p_i)\Big\| \le \frac{1}{q+1}\cdot\sum_{\mu=0}^{q}\|p_\mu - p_i\| \le \frac{q}{q+1}\cdot\|\sigma\|.$$

Damit ist die Aussage des 4.Schritts bewiesen, also auch die Aussage des Satzes.
QED.

3.6.3 Kettenabbildungen die in der Dimension 0 übereinstimmen

Seien γ^0,γ^1: SX → SX zwei natürliche Kettenabbildungen, die in der Dimension 0 übereinstimmen. Dann existiert eine natürliche Homotopie $\gamma^0 \simeq \gamma^1$.

Insbesondere ist die baryzentrische Unterteilung β: SX ⟶ SX in natürlicher Weise homotop zur identischen Abbildung von SX,

$$\beta \simeq \mathrm{Id}: SX \longrightarrow SX,$$

induziert also auf der (absoluten und relativen) Homologie die identische Abbildung.
Beweis. Betrachten wir die Kompositionen

$$F^i: SX \xrightarrow{\gamma^i} SX \xrightarrow{SJ} S([0,1]\times X),$$

wobei J die stetige Abbildung $J:X\to[0,1]\times X$, $x \mapsto (0,x)$, sei. Nach 3.5.7 existiert eine natürliche Homotopie

$$s:F^0 \simeq F^1.$$

Ihre Komposition mit $S(\pi)$, wobei $\pi:[0,1]\times X\to X$ die Projektion auf den zweiten Faktor sei, liefert eine Homotopie

$$S(\pi)s:\ S(\pi)F^0 \simeq S(\pi)F^1.$$

Wegen $S(\pi)F^i = S(\pi)S(J)\gamma^i = \gamma^i$ ist das gerade die Behauptung.
QED.

3.6.4 Aufgaben

1. Wie in Aufgabe 6 von 1.1.18 betrachten wir die Kategorie Δ als Teilkategorie der Kategorie Top. Zeigen Sie, für jeden Simplizialkomplex K ist der Teilfunktor

   $$F: \Delta^{op} \to \mathrm{Ens},\ [n] \mapsto \{f\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}([n], K) \mid \mathrm{Im}\ f \text{ ist ein Simplex von } K\},$$

   des kontravarianten Hom-Funktors h^K eine simpliziale Menge.

2. (Zusatzaufgabe) Zeigen Sie, jede simpliziale Menge

$$F: \Delta^{op} \to Ens$$

definiert einen Simplizialkomplex K(F) derart, daß es einen natürlichen Komplex-Morphismus

$$C(K(F)) \to K(<F>)$$

vom Komplex der geordneten simplizialen Ketten von K(F) mit Werten im Komplex zur von F erzeugten simplizialen freien abelschen Gruppe <F> gibt (vgl. 1.1.18 Aufgabe 23).

Hinweis: die Menge F([n]) zum Funktor von 1 enthält auch "Simplexe" mit zu wenigen "Ecken", welche entartete n-Simplexe heißen. Diese muß man entfernen, um die n-Simplexe von K zu bekommen. Außerdem enthält F([n]) jedes Simplexe in sovielen Exemplaren, wie es Permutationen von Ecken gibt. Diese muß man identifizieren.
Hinweis: Es reicht nicht,jedem Simplex die Menge seiner Ecken zuzuordnen, denn es kann "Simplexe" geben, die verschieden sind, aber dieselbe Eckenmenge besitzen.

3 Definieren Sie die Realisierung einer simplizialen Menge in einer solchen Weise, daß man die Definition der Realisierung eines Simplizialkomplexes als Spezialfall erhält.

3.7 Kleine Simplexe und Ausschneidung

3.7.1 Vorbemerkung

Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, zur Berechnung der singulären Homologie genügt es, sich auf die Betrachtung kleiner Simplexe zu beschränken. Daraus wird sich ergeben, daß sich H(X,A) nicht ändert, wenn man aus A einen gewissen Teilraum B herausnimmt, der sich nicht mit dem Rand von A scheidet.

3.7.2 Der singuläre Komplex eines Systems von Teilmengen

Seien X ein topologischer Raum und **U** ein System von Teilmengen von X. Wir bezeichnen mit

$$S\mathbf{U} := \sum_{U \in \mathbf{U}} SU$$

den kleinsten Teilkomplex von SX, welcher alle SU mit U∈**U** als Teilkomplexe enthält. Mit anderen Worten, S(**U**) ist der Teilkomplex, welcher von der Familie der Teilkomplexe

$$\{SU\}_{U \in \mathbf{U}}$$

erzeugt wird (deren Summe). Er heißt Komplex der singulären **U**-kleinen Ketten von X. Die Ketten von S(**U**) sind gerade die Linearkombinationen von Simplexen sind, welche ganz in einem U∈**U** liegen.

Für jeden Teilraum A⊆X setzen wir

$$\mathbf{U} \cap A := \{U \cap A\}_{U \in \mathbf{U}}.$$

Dann ist S(**U**∩A) ein Teilkomplex von S(**U**) und wir setzen

$$S(\mathbf{U}, \mathbf{U} \cap A) := S(\mathbf{U})/S(\mathbf{U} \cap A).$$

Man er hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & S(\mathbf{U} \cap A) & \to & S(\mathbf{U}) & \to & S(\mathbf{U}, \mathbf{U} \cap A) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & S(A) & \to & S(X) & \to & S(X,A) & \to & 0 \end{array}$$

3.7.3 Vergleich der Homologien von S(X,A) und S(U,U∩A)

Seien (X,A) ein topologisches Paar und **U** ein System von Teilmengen von X. Es sei folgende Bedingung erfüllt:

(*) Jeder Punkt x∈X befinde sich im Innern von A oder im Innern einer Menge U∈**U**.

Dann ist die Kettenabbildung S(**U**,**U**∩A) → S(X,A) eine Homotopieäquivalenz, induziert also einen Isomorphismus der Homologiegruppen

$$H(\mathbf{U},\mathbf{U}\cap A) \to H(X,A).$$

3.7.4 Folgerung: Ausschneidungssatz I

Seien (X,A) ein topologisches Paar und Y⊆X eine Teilmenge mit

$$X = \overset{\circ}{Y} \cup \overset{\circ}{A}.$$

Dann ist die natürliche Einbettung

$$j: S(Y,Y\cap A) \to S(X,A)$$

eine Homotopieäquivalenz. Insbesondere gilt $H(Y,Y\cap A) \cong H(X,A)$.

Dabei bezeichne $\overset{\circ}{Z}$ für jede Teilmenge $Z \subseteq X$ deren Inneres.

Beweis. Man wende 3.7.3 mit **U** := {Y} an.
QED.

3.7.5 Folgerung: Ausschneidungssatz II

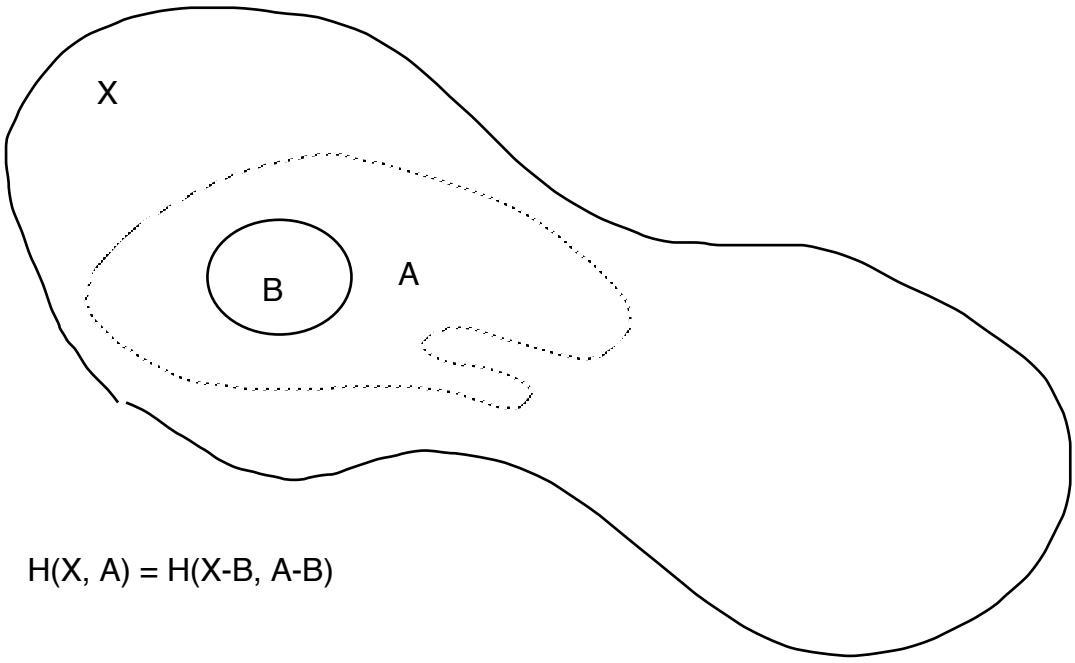
Seien (X,A) ein topologisches Paar und B⊆A eine Teilmenge, deren Abschließung

$$\bar{B} \subseteq \overset{\circ}{A}.$$

im Innern vn A liegt. Dann ist die natürliche Einbettung

$$j: S(X-B,A.- B) \to S(X,A)$$

eine Homotopieäquivalenz. Insbesonder gilt $H(X-B,A.-B) \cong H(X,A)$.



Beweis. Man wende 3.7.4 mit $Y := X - B$ an und beachte $\overset{\circ}{Y} = X - \overline{B}$.
QED.
Beweis von 3.7.3.

1. Schritt. Für jede Kette $c \in S_q X$ gibt es ein $n \in N$ mit $\beta^n(c) \in S_q \mathbf{V}$. Dabei bezeichne β die baryzentrische Unterteilung und $\mathbf{V}$ die Überdeckung

$$\mathbf{V} := \mathbf{U} \cup \{A\}$$

von X.

Da die Kette c eine endliche Linearkombination von Simplexen ist, genügt es, die Aussage für den Fall $c = \sigma : \Delta_q \to X$ eines q-Simplex zu beweisen. Nach Voraussetzung bilden die Mengen

$$\overset{\circ}{V} \text{ mit } V \in \mathbf{V}$$

eine offene Überdeckung von X. Also bilden die Mengen

$$W := \sigma^{-1}(\overset{\circ}{V}) \text{ mit } V \in \mathbf{V}$$

eine offene Überdeckung $\mathbf{W}$ von Δ_q. Sei $\varepsilon > 0$ eine Lebesque-Zahl für diese Überdeckung, d.h. jede Teilmenge des kompakten metrischen Raums Δ_q mit einem Durchmesser $< \varepsilon$ liege ganz in einer der Mengen W. Nach 3.6.2 gibt es eine iterierte baryzentrische Unterteilung $\beta^n(\iota_q)$ des identischen Simplex $\iota_q : \Delta_q \to \Delta_q$ derart, daß jedes Simplex von $\beta^n(\iota_q)$ einen Durchmesser kleiner als ε hat, also ganz in einer der Mengen $W = \sigma^{-1}(\overset{\circ}{V})$ liegt. Dann liegt aber jedes Simplex von

$$\beta^n(\sigma) = S(\sigma)(\beta^n(\iota_q))$$

in einer der Mengen $\overset{\circ}{V}$ mit $V \in \mathbf{V}$. Mit anderen Worten, es gilt $\beta^n(\sigma) \in S_q \mathbf{V}$.

2. Beweis der Behauptung.
Wir wollen zeigen, die natürliche Einbettung

$$j: S(\mathbf{U}, \mathbf{U} \cap A) \to S(X, A)$$

ist eine Homotopieäquivalenz. Da die Komplexe $S(\mathbf{U}, \mathbf{U} \cap A)$ und $S(X, A)$ frei sind, genügt es, wenn wir die Bijektivität der induzierten Abbildung $H(\mathbf{U}, \mathbf{U} \cap A) \to H(X, A)$ auf der Homologie beweisen. Aus der Homologiesequenz zur kurzen exakten Sequenz

$$0 \to S(\mathbf{U}, \mathbf{U} \cap A) \to S(X, A) \to S(X,A)/S(\mathbf{U}, \mathbf{U} \cap A) \to 0$$

ergibt sich, es genügt

$$H(S(X,A)/S(\mathbf{U}, \mathbf{U} \cap A)) = 0$$

zu beweisen, d.h wir haben zu zeigen, jeder Zyklus von

$$K := S(X,A)/S(\mathbf{U}, \mathbf{U} \cap A)$$

ist ein Rand. Ein Zyklus von K wird repräsentiert durch eine Kette $z \in S(X)$ mit

$$\partial z \in S(\mathbf{V})$$

wobei $\mathbf{V} := \mathbf{U} \cup \{A\}$ sei. Nach 3.6.3 existiert für n= 1,2, ... eine natürliche Ketten-Homotopie

$$s: \beta^n \simeq \mathrm{id} : SX \longrightarrow SX$$

d.h. es ist $Id = \partial s + s\partial + \beta^n$ und speziell für unsere Kette z,

$$z = \partial sz + s\partial z + \beta^n z.$$

Es reicht zu zeigen, z repräsentiert für großes n einen Rand von K, d.h. z ist die Summe aus einem Rand von SX und einer Kette von S(**V**). Weil s natürlich ist, hat man kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{s} & SX \\ \cup & & \cup \\ SV & \xrightarrow{s} & SV \end{array}$$

d.h. es gilt $s(SV) \subseteq SV$ für jedes $V \in \mathbf{V}$, also $s(S(\mathbf{V})) \subseteq S(\mathbf{V})$. Wegen $\partial z \in S(\mathbf{V})$ gilt insbesondere auch $s\partial z \in S(\mathbf{V})$ es genügt also, wenn wir zeigen, es gibt ein n mit

$$\beta^n z \in S(\mathbf{V}).$$

Das ist aber gerade die Aussage des ersten Schritts.
QED.

3.7.6 Das Bukett punktierter topologischer Räume

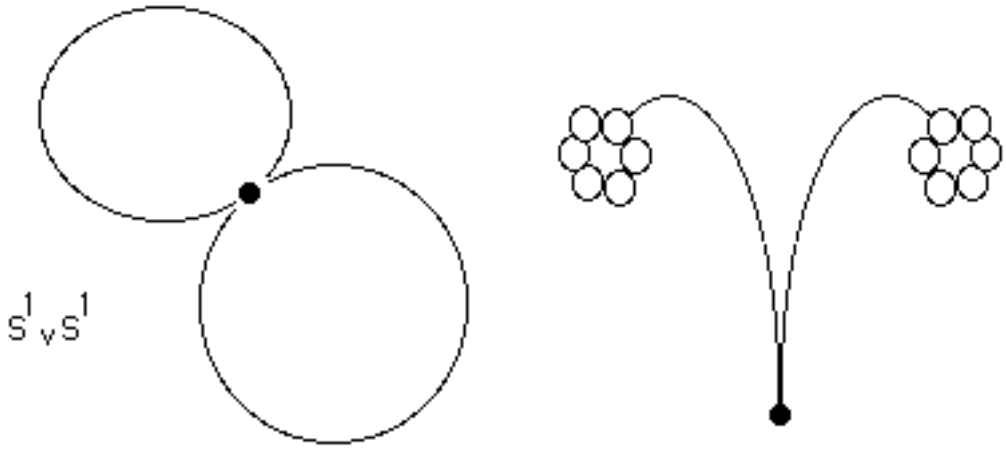
Ein punktierter topologischer Raum ist ein Paar (X,p) bestehend aus einem topologischern Raum X und einem Punkt $p \in X$. Der Punkt p heißt dann Grundpunkt oder auch Basispunkt des punktierten topologischen Raums. Eine stetige Abbildung

$$f:(X,p) \to (Y,q)$$

punktierter topologischer Räume ist eine stetige Abbilung $f:X \to Y$ mit $f(p) = q$. Die punktierten topologischer Räume bilden eine volle Teilkategorie der Kategorie $Top^{(2)}$ der topologischen Paare. Sind (X,p) und (Y,q) punktierte topologische Räume, so heißt der topologische Raum

$$X \vee Y := X \cup Y / P \sim Q$$

(d.h. man identifiziere in der disjunkten Vereinigung die Punkte P und Q und versehe das Ergebnis mit der Faktortopologie) Bukett der Räume (X,p) und (Y,q).



Das Bukett wird als punktierter topologischer Raum $(X \vee Y, *)$ aufgefaßt, wobei * den Punkt bezeichnet, welcher durch das Identifizieren von p und q zustandekommt. Die Einschränkungen der natürlichen Abbildung

$$X \cup Y \to X \vee Y$$

auf die Räume X und Y identifiziert X und Y mit Unterräumen des Buketts, wobei die Grundpunkte von X und Y zum Grundpunkt des Buketts werden. Das Bukett entsteht, indem man die Räume in ihren Grundpunkten zusammenknüpft.

3.7.7 Die Homologie eines Buketts

Seien (X,p) und (Y,q) punktierte topologischer Räume. Die Abschließung $\overline{\{p\}}$ besitze eine Umgebung U⊆X derart, daß eine stetige Familie von Abbildungen

$$d_t: (U,p)\to(X,p),\ \ t\in[0,1]$$

existiert mit

$$d_0=\mathrm{id} \text{ und } d_1(U) = \{p\}.^{23}$$

Dann induzieren die natürlichen Einbettungen

$$i: X \to X\vee Y \text{ und } j:Y \to X\vee Y$$

Isomorphismen

$$H(X,\{p\})\oplus H(Y,\{q\}) \to H(X\vee Y,*)$$

und

$$\tilde{H}X \oplus \tilde{H}Y \to \tilde{H}(X\vee Y).$$

Beweis. Die beiden Isomorphieaussagen sind nach 3.4.2 äquivalent: die reduzierte Homologie läßt sich identifizieren mit der relativen Homologie bezüglich eines einpunktigen Unterraumes. Betrachten wir die reduzierte Homologiesequenz des Paares

$$(X\vee Y,Y).$$

Da Y ein Retrakt von X∨Y ist (die Retraktion kommt von der Projektion des Raumes X auf seinen Grundpunkt),

$$\begin{array}{ccccc} Y & \hookrightarrow & X\vee Y & \supseteq & X \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}}\searrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y & \supseteq & \{q\} \end{array}$$

degeneriert die Homologiesequenz nach 3.4.13 zu einer kurzen exakten Sequenz.

$$0 \to \tilde{H}Y \to \tilde{H}(X\vee Y) \to H(X\vee Y,\, Y) \to 0.$$

Da die natürliche Einbettung $Y \to X\vee Y$ eine Linksinverse besitzt, zerfällt diese Sequenz, d.h. es gilt

$$\tilde{H}Y \oplus H(X\vee Y,\, Y) \cong \tilde{H}(X\vee Y)$$

wobei die Isomorphie durch die natürlichen Einbettung $Y \to X\vee Y$ und irgendeinen Schnitt von $\tilde{H}(X\vee Y) \to H(X\vee Y,\, Y)$ zustandekommt. Es reicht deshalb, wenn wir beweisen, die natürliche Einbettung

$$(X,p) \to (X\vee Y,\, Y)$$

induziert einen Isomorphismus $H(X,p) \to H(X\vee Y,\, Y)$. Dazu benutzen wir jetzt die Existenz der Homotopie $d_t: (U,p)\to(X,p)$. Bezeichne I = [0,1] das Einheitsintervall. Sei

$$\varphi: I\times(U\vee Y) \to X\vee Y$$

die stetige Abbildung mit

$$\varphi|_{I\times U} = d: I\times U \to X,\ (t,u) \mapsto d_t(u),$$

und

$$\varphi|_{I\times Y} = \mathrm{pr}_2: I\times Y \to Y,\ (t,y) \mapsto y.$$

Diese Abbildung existiert (und ist stetig) weil beide Teile der Defintion auf dem Durchschnitt

---

[23] d.h. {p} ist ein starkter Deformationsretrakt einer Umgebung U von $\overline{\{p\}}$.

$$(I\times U)\cap(I\times Y) = I\times\{p\}$$

übereinstimmen: nach Voraussetzung gilt $d_t(p) = p$ für jedes $t\in I$. Wir erhalten damit ein stetige Familie

$$\varphi_t\colon (U\vee Y,Y) \to (X\vee Y,Y),$$

welche für t=0 die identische Abbildung und für t=1 eine Abbilung mit Werten in Y ist. Die induzierte Familie von Kettenabbildungen

$$H(\varphi_t)\colon H(U\vee Y,Y) \to H(X\vee Y,Y)$$

ist für t=1 die-Null Abbildung, also für alle t identisch Null. Die natürliche Einbettung $U\vee Y\to X\vee Y$ induziert also die Nullabbildung auf der Homologie. Betrachten wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{array}{ccccccc} H(U\vee Y,Y) & \xrightarrow{0} & H(X\vee Y,Y) & \to & H(X\vee Y,U\vee Y) & \to & H(U\vee Y,Y) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H(U,p) & \xrightarrow{0} & H(X,p) & \to & H(X,U) & \to & H(U,p) \end{array} \qquad (1)$$

Die obere Zeile ist gerade die Homologiesequenz des Tripels $(X\vee Y, U\vee Y, Y)$, die untere die des Tripels $(X,U,\{p\})$. Man beachte die Null in der oberen Zeile hat man für jeden punktierten topologischen Raum (Y,q), insbesondere also auch im Fall, daß Y aus nur einem Punkt besteht. Dies liefert die Null in der unteren Zeile.
Die vertikalen Morphismen kommen von der natürlichen Einbettung

$$(X,U,\{p\}) \subseteq (X\vee Y,\ U\vee Y,\ Y).$$

Die Projektion des Raumes Y auf seinen Grundpunkt induziert eine Abbildung in umgekehrter Richtung, deren Einschränkung auf $(X,U,\{p\})$ die Identität ist. Deshalb sind in (1) alle vertikalen Abbildungen injektiv (und besitzen eine Linksinverse).

Wir wenden jetzt den Ausschneidungssatz auf die mittlere vertikale Abbildung an. Die Abschließung von

$$Y - \{*\}$$

$X\vee Y$ liegt ganz im Innern von $U\vee Y$ [24]. Deshalb können wir $Y-\{*\}$ entfernen, ohne daß sich die relative Homologie ändert. Mit anderen Worten, der vertikale

---

[24] Die Menge $V:=U\vee Y$ ist offen in $X\vee Y$, denn die Durchschnitte

$$V\cap X = U$$
$$V\cap Y = Y$$

sind offen in X bzw. Y. Es genügt also zu zeigen, die Abschließung von $Y - \{*\}$ liegt in $U\vee Y$. Dazu wiederum genügt es zu zeigen, die Abschließung $\bar{Y}$ liegt in $U\vee Y$. Es gilt

$$\bar{Y} = \bar{Y}\bigcap(X\cup Y) = (\bar{Y}\cap Y)\cup(\bar{Y}\cap X) = Y\cup\overline{\{p\}} \subseteq Y\cup U = U\vee Y.$$

Dabei bezeichne $\overline{\{p\}}$ wie bisher die Abschließung der Menge $\{p\}$ in X. Das zweite Gleichheitszeichen von rechts, d.h.

$$\bar{Y}\cap X = \overline{\{p\}}$$

ergibt sich dabei wie folgt. Trivialerweise gilt $\bar{Y}\cap X \supseteq \{p\}$, also - weil $\bar{Y}\cap X$ abgeschlossen in X ist, auch

$$\bar{Y}\cap X \supseteq \overline{\{p\}}$$

Homorphismus in der Mitte ist ein Isomorphismus. Nach dem Fünferlemma ist dann aber auch der vertikale Homormorphismus links bijektiv. Mit anderen Worten, die Inklusion induziert einen Isomorphismus

$$H(i)\colon H(X,p) \xrightarrow{\cong} H(X\vee Y, Y).$$

QED.

3.8 Die Mayer-Vietoris-Sequenz

3.8.1 Bezeichnungen

Seien X ein topologischer Raum und X_1 und X_2 zwei Unterräume. Wir bezeichnen mit

$$i_\mu : X_\mu \to X$$

die natürlichen Einbettungen. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, die Beziehungen zwischen den Homologien HX und HX_1 und HX_2 zu untersuchen. Wir werden von (X, X_1, X_2) als von einer Triade sprechen (Dies ist im allgemeinen kein topologisches Tripel).

3.8.2 Ausschneidungstriaden

Eine Triade (X, X_1, X_2) heißt ausschneidend oder auch Ausschneidungstriade, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

(i) $H(i_1)\colon H(X_1, X_1\cap X_2) \to H(X_1\cup X_2, X_2)$ ist bijektiv.

(ii) $H(i_2)\colon H(X_2, X_1\cap X_2) \to H(X_1\cup X_2, X_1)$ ist bijektiv.

(iii) $(H(i_1),H(i_2))\colon H(X_1, X_1\cap X_2)\oplus H(X_2, X_1\cap X_2)\to H(X_1\cup X_2,\ X_1\cap X_2)$ ist bijektiv.

(iv) $H(i)\colon HS\{X_1,X_2\} \to HS(X_1\cup X_2) = H(X_1\cup X_2)$ ist bijektiv.

(v) $H(\bar{i})\colon H\left(\frac{S\{X_1,X_2\}}{S(X_1\cap X_2)}\right)\to H\left(\frac{S(X_1\cup X_2)}{S(X_1\cap X_2)}\right) = H(X_1\cup X_2,\ X_1\cap X_2)$ ist bijektiv.

(vi) $H(p)\colon H\left(\frac{SX}{S\{X_1,X_2\}}\right) \to H(X,\ X_1\cup X_2)=H\left(\frac{SX}{S(X_1\cup X_2)}\right)$ ist bijektiv.

Dabei bezeichne $S\{X_1,X_2\}$ den von SX_1 und SX_2 erzeugten Teilkomplex von $SX_1 \cup X_2$. Weiter seien

$$i\colon S\{X_1,X_2\} \to S(X_1\cup X_2) \text{ und } p\colon \frac{SX}{S(X_1\cup X_2)} \to \frac{SX}{S\{X_1,X_2\}}$$

die natürliche Einbettung bzw. die natürliche Projektion.

Beweis. Betrachten wir die folgenden kurzen exakten Sequenzen von Kettenabbildungen.

Weiter gibt es für jeden Punkt $x \in X$, der nicht in $\overline{\{p\}}$ liegt, eine ganze offene Umgebung von x in X, die disjunkt zu {p} ist, also disjunkt ist zu Y (im Bukett). Dann ist aber x kein Berührungspunkt von Y.

$$0 \to \frac{SX_1}{S(X_1 \cap X_2)} \xrightarrow[\text{vgl. (i)}]{i_1} \frac{S(X_1 \cup X_2)}{SX_2} \to \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}} \to 0$$

$$0 \to S\{X_1, X_2\} \xrightarrow[\text{vgl. (iv)}]{i} S(X_1 \cup X_2) \to \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}} \to 0$$

$$0 \to \frac{S\{X_1, X_2\}}{S(X_1 \cap X_2)} \xrightarrow[\text{vgl. (v)}]{\bar{i}} \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S(X_1 \cap X_2)} \to \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}} \to 0$$

$$0 \to \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}} \to \frac{SX}{S\{X_1, X_2\}} \xrightarrow[\text{vgl. (vi)}]{i} \frac{SX}{S(X_1 \cup X_2)} \to 0$$

Aus den langen Homologiesequenzen zu diesen kurzen exakten Sequenzen ergibt sich, daß die Bijektivität der Abbildungen (i), (iv),(v), (vi) äquivalent ist zu

$$H\left(\frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}}\right) = 0.$$

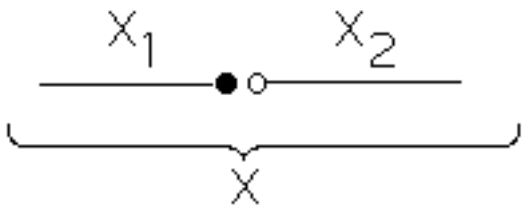
Insbesondere sind also (i), (iv),(v), (vi) äquivalent zueinander. Aus Symmetriegründen sind dann aber auch (ii), (iv), (v), (vi) zueinander äquivalent. Die Äquivalenz von (iii) und (v) ergibt sich aus dem folgenden kommutativen Diagramm von Kettenabbildungen durch Übergang zur Kohomologie.

$$\begin{array}{ccc} \frac{SX_1}{S(X_1 \cap X_2)} \oplus \frac{SX_2}{S(X_1 \cap X_2)} & \xrightarrow{\cong} & \frac{S\{X_1, X_2\}}{S(X_1 \cap X_2)} \\ (i_1, i_2) \downarrow \text{ vgl.(iii)} & & i \downarrow \text{ vgl.(v)} \\ \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S(X_1 \cap X_2)} & = & \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S(X_1 \cap X_2)} \end{array}$$

Genauer, die linke vertikale Abbildung ist genau dann ein Quasi-Isomorphismus, wenn es die rechte ist. Ersteres bedeuted, es gilt (iii), letzteres, es gilt (v).
QED.

Beispiele

1. Falls die Mengen X_1 und X_2 offen sind in $X_1 \cup X_2$, so ist nach 3.7.3[25] Bedingung (iv) erfüllt, d.h. $(X_1 \cup X_2, X_1, X_2)$ ist eine Ausschneidungstriade.
2. Andere Beispiele für Ausschneidungstriaden sind sogenannte CW-Räume und ihre CW-Unterräume. Polyeder (d.h. geometrische Realisierungen von abstrakten Simplizialkomplexen) sind Spezialfälle solcher CW-Räume.
3. Ein Beispiel für eine Triade (X, X_1, X_2),welche nicht ausschneidend ist, erhält



[25] Bezüglich der Überdeckung $X = X_1 \cup X_2$.

man, indem man setzt $X = \mathbb{R}$, $X_1 = (-\infty, 0]$, $X_2 = (0, +\infty)$ setzt (Man überprüfe (i)):

$$\begin{array}{ccc} H(X_1,X_1\cap X_2) & \to & H(X_1\cup X_2;X_2) \\ \| & & \| \\ H((-\infty,0];\varnothing) & & H(\mathbb{R},(0,+\infty)) \\ \| & & \| \alpha \\ H((-\infty;0]) & & H(\{1\},1) \\ \| & & \| \\ \mathbb{Z} & & 0 \end{array}$$

Das Gleichheitszeichen α kommt von der Tatsache, daß $(\{1\}, 1)$ ein starker Deformationsretrakt von $(\mathbb{R}, (0,\infty))$ ist. Man nehme zum Beispiel die Homotopie

$$d_t: (\mathbb{R}, (0, \infty)) \longrightarrow (\mathbb{R}, (0, \infty)), x \mapsto (1-t)x + t,$$

und beachte,

$$d_0 = Id,\ d_t(1) = 1,\ d_1(\mathbb{R}) = \{1\}$$

Das vorletzte Gleichheitzeichen rechts kommt von der Tatsache, daß

$$(\mathbb{R}, 1)$$

3.8.3 Die absolute Version der Mayer-Vietories-Sequenz

Für jede Triade (X,X_1,X_2) hat man die folgende kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen.

$$0 \to S(X_1\cap X_2) \xrightarrow[x\mapsto(x,-x)]{(j_1,-j_2)} SX_1\oplus SX_2 \xrightarrow[(x,y)\mapsto x+y]{(i_1,i_2)} S\{X_1,X_2\} \to 0$$

Falls die Triade ausschneidend ist, so hat die zugehörige Homologiesequenz die Gestalt

$$\ldots\to H_q(X_1\cap X_2) \xrightarrow{(j_1,-j_2)} H_qX_1\oplus H_qX_2 \xrightarrow{(i_1,i_2)} H_q(X_1\cup X_2) \to H_{q-1}(X_1\cap X_2)\ldots$$

Sei heißt (absolute) Mayer-Vietories-Sequenz der Triade.

Beweis: Folgt aus Bedingung (iv) in der Definition 3.8.2 für "ausschneidend".

3.8.4 Die relative Version der Mayer-Vietories-Sequenz

Für jede Triade (X,X_1,X_2) hat man die folgende kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen.

$$0\to \frac{SX}{S(X_1\cap X_2)} \xrightarrow{(j_1,-j_2)} \frac{SX}{SX_1}\oplus\frac{SX}{SX_2} \xrightarrow{(i_1,i_2)} \frac{SX}{S\{X_1,X_2\}} \to 0$$

Falls die Triade ausschneidend ist, so hat die zugehörige Homologiesequenz die Gestalt

$$\ldots\to H_q(X,X_1\cap X_2) \xrightarrow{(j_1,-j_2)} H_q(X,X_1)\oplus H_q(X,X_2) \xrightarrow{(i_1,i_2)} H_q(X,X_1\cup X_2) \to\ldots$$

Beweis. Die Exaktheit der angegebenen langen Sequenz ist eine direkte Folge der Exaktheit der Komplexsequenz und der Definition der Ausschneidungstriade (Bed. (vi)). Es genügt also, die Exaktheit der Komplexsequenz zu beweisen.

Zunächst ist leicht zu sehen, daß es sich wenigstens um einen Komplex handelt (d.h. die Zusammensetzung aufeinanderfolgender Kettenabbildungen ist Null): das ergibt sich direkt aus den Definitionen der beteiligten singulären Komplexe. Weiterhin ist klar,

die rechte Kettenabbildung ist surjektiv und die linke injektiv. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß der Kern der rechten Kettenabbildung im Bild der rechte liegt.

Betrachten wir einen Repräsentanten eines Elements aus dem Kern der rechten Kettenabbildung. Sei also

$$c:=(i_1,i_2)(a,b) = a+b \in S\{X_1,X_2\}.$$

Dabei können wir annehmen, in a kommen keine Simplexe aus X_1 vor und in b keine aus X_2. Dann bedeutet die Relation $a+b \in S\{X_1,X_2\}$ aber, $a\in SX_2$ und $b\in SX_1$. Also repräsentiert

$$(j_1,-j_2)(a-b) = (a-b, b-a)$$

dasselbe Element wie (a,b).
QED.

3.8.5 Der Zusammenhangshomomorphismus der absoluten Mayer-Vietories-Sequenz

Der Zusammenhangshomomorphismus der absoluten Mayer-Vietories-Sequenz 3.8.3 ist gerade die folgende Zusammensetzung.

$$H_q(X_1\cup X_2) \to H_q(X_1\cup X_2,X_2)\cong H_{q-1}(X_1,X_1\cap X_2) \to H_{q-1}(X_1\cap X_2)$$

Dabei sei der Homomorphismus links gerade durch die Einbettung

$$(X_1\cup X_2,\varnothing)\subseteq(X_1\cup X_2,X_2)$$

induziert, der Isomorphismus in der Mitte komme von der Ausschneidungsbedingung (i), d.h. von der Einbettung

$$(X_1,X_1\cap X_2) \subseteq (X_1\cup X_2,X_2),$$

und der Homormorphismus rechts sei der Zusammenhangshomomorphismus des Paares $(X_1,X_1\cap X_2)$.

Beweis. Der Beweis ergibt sich im wesentlichen aus dem Vergleich der Definitionen der beiden beteiligten Zusammenhangshomomorphismen. Sei $u\in H(X_1\cup X_2)=HS\{X_1,X_2\}$. Wir wählen einen Repräsentanten von u der Gestalt

$$c_1+c_2 \in S\{X_1,X_2\} \text{ mit } c_1\in SX_1,\ c_2\in SX_2 \text{ und } \partial c_1+\partial c_2 = 0.$$

Um das Bild unter dem Zusammenhangshomomorphismus zu finden, müssen wir ein Urbild dieses Repräsentanten in $SX_1\oplus SX_2$ finden. Ein solches ist (c_1,c_2). Als nächstes müssen wir den Randoperator anwenden und erhalten $(\partial c_1,\partial c_2) = (\partial c_1,-\partial c_1)$. Von letzterem Element müssen wir ein Urbild in $S(X_1\cap X_2)$ finden. Ein solches ist ∂c_1. Das Bild von u beim Zusammenhangshomomorphismus der Mayer-Vietories-Sequenz wird also durch ∂c_1 repräsentiert.

Wenn wir nun das Bild des Repräsentanten c_1+c_2 von u bei den Abbildungen unseres Satzes verfolgen, erhalten wir (mit Hilfe derselben Argumentation wie eben) wiederum den Repräsentanten ∂c_1. Die beiden Abbildungen stimmen also überein.

QED.

3.8.6 Der Zusammenhangshomomorphismus der relativen Mayer-Vietories-Sequenz

Der Zusammenhangshomomorphismus der relativen Mayer-Vietories-Sequenz 3.8.4 ist gerade die folgende Zusammensetzung.

$$H_q(X,X_1\cup X_2) \to H_{q-1}(X_1\cup X_2,X_1)\cong H_{q-1}(X_2,X_1\cap X_2) \to H_{q-1}(X,X_1\cap X_2)$$

Dabei sei der Homomorphismus links gerade der Zusammenhangshomomorphismus des Tripels $(X, X_1\cup X_2, X_1)$, der Isomorphismus in der Mitte komme von der Ausschneidungsbedingung (ii), d.h. von der Einbettung

$$(X_2,X_1\cap X_2) \subseteq (X_1\cup X_2,X_1),$$

und der Homomorphismus rechts werde durch die Einbettung

$$(X_2,X_1\cap X_2) \subseteq (X,X_1\cap X_2)$$

induziert.

Beweis. Sei $u\in H(X,X_1\cup X_2) = H(SX/S\{X_1,X_2\})$. Wir wählen einen Repräsentanten $c\in SX$ mit $\partial c \in S\{X_1,X_2\}$, d.h.

$$\partial c = c_1 + c_2 \text{ mit } c_1\in SX_1 \text{ und } c_2\in SX_2.$$

Ein Urbild in $SX/SX_1\oplus SX/SX_2$ wird durch $(c,0)$ repräsentiert. Anwenden des Randoperators liefert $(\partial c,0)$, und Übergang zum Urbild in $SX/S(X_1\cap X_2)$ schließlich c_2. Letzteres Element repräsentiert einen Zyklus von $SX/S(X_1\cap X_2)$, welcher seinerseits das Bild von u beim Zusammenhangshomomorphismus der Mayer-Vietories-Sequenz repräsentiert. Eine analoge Betrachtung für die im Satz angegebenen Abbildungen zeigt, daß deren Zusammensetzung durch diesselben Repräsentanten beschrieben wird.
QED.

3.8.7 Funktorialität der Mayer-Vietories-Sequenz

Sei $f:(X, X_1, X_2) \to (Y, Y_1, Y_2)$ eine stetige Abbildung von Ausschneidungstriaden.
Dann induziert f einen Morphismus der zugehörigen absoluten bzw. relativen Mayer-Vietories-Sequenzen.
Genauere Formulierung und deren **Beweis**: Übungsaufgabe.

3.8.8 Reduzierte Mayer-Vietories-Sequenz

Sei (X, X_1, X_2) eine Ausschneidungstriade mit $X_1\cap X_2\neq\emptyset$. Dann besteht eine exakte Sequenz

$$\ldots\to \tilde{H}_q(X_1\cap X_2)\to \tilde{H}_q X_1\oplus \tilde{H}_q X_2\to \tilde{H}_q(X_1\cup X_2)\to \tilde{H}_{q-1}(X_1\cap X_2)\to\ldots$$

Beweis. Wegen $X_1\cap X_2\neq\emptyset$ können wir einen Punkt $p\in X_1\cap X_2$ wählen. Bezeichne P den Raum mit dem einzigen Punkt p. Dann ist (P,P,P) eine Ausschneidungstriade, denn zum Beispiel ist der erste Homomorphismus von 3.8.2 ein Isomorphismus:

$$H(P, P\cap P) \to H(P\cup P, P).$$

Die natürliche Einbettung

$$(P,P,P) \subseteq (X, X_1, X_2)$$

liefert einen Morphismus der zugehörigen absoluten Mayer-Vietorissequenzen

$$\alpha: MS(P,P,P) \to MS(X, X_1, X_2).$$

Desweiteren ist die konstante Abbildung $X \to P$ stetige und induzierte eine stetige Abbildung von Triaden $(X, X_1, X_2) \to (P,P,P)$, ihrerseits einem Morphismus von Mayer-Vietories-Sequenzen

$$\beta: MS(X, X_1, X_2) \rightarrow MS(P,P,P).$$

Nach Konstruktion ist β linksinvers zu α, d.h. MS(P,P,P) ist ein direkter Summand in $MS(X, X_1, X_2)$. Durch Wegfaktorisieren des direkten Summanden MS(P,P,P) erhalten wir die angegebene reduzierte Mayer-Vietories-Sequenz.
QED.

3.8.9 Beispiel: Homologie eines Buketts

Sei (X, X_1, X_2) eine Ausschneidungstriade mit $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ und $\tilde{H}(X_1 \cap X_2) = 0$.
Auf Grund der reduzierten Mayer-Vietories-Sequenz hat man dann Isomorphismen

$$\tilde{H}_q X_1 \oplus \tilde{H}_q X_2 \rightarrow \tilde{H}_q (X_1 \cup X_2).$$

Im Fall, daß $X = X_1 \vee X_2$ das Bukett der beiden Räume X_1, X_2 ist, erhalten wir gerade das Ergebnis von 3.7.7. Der Beweis von 3.7.7 bestand im wesentlichen gerade darin, nachzuprüfen, daß die natürliche Einbettung von Paaren einen Isomorphismus

$$H(X_1, *) = H(X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow H(X_1 \cup X_2, X_2)$$

induziert, d.h. daß (X, X_1, X_2) unter den angegebenen Bedingungen ausschneidend ist.

3.8.10 Beispiel: Satz von Jordan

Der Satz von Jordan besagt daß das Komplement einer geschlossenen doppelpunktfreien Kurve in der Ebene aus zwei (linearen) Komponenten besteht.
Wir wollen hier diesen Satz für den Spezialfall einer dicken Kurve beweisen. Wir betrachten dazu die reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz für eine Ausschneidungstriade

$$(X, X_1, X_2)$$

mit $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ und $\tilde{H}(X_1 \cup X_2) = 0$.
Die Mayer-Vietories-Sequenz liefert Isomorphismen

$$\tilde{H}_q (X_1 \cap X_2) \rightarrow \tilde{H}_q X_1 \oplus \tilde{H}_q X_2$$

Seien jetzt

$$X = \mathbb{R}^n$$

und

$$X_1 = U \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine dicke Sphäre, d.h. eine offene Menge welche homöomorph ist zu $S^{n-1}\times(-1,1)$ ist. Sei

$$\Phi: S^{n-1}\times(-1,1) \to U$$

ein Homöomorphismus. Die Menge

$$\Sigma := \Phi(S^{n-1}\times\{0\})$$

heißt dann Gerüst der dicken Sphäre U. Sei schließlich

$$X_2 := V := \mathbb{R}^n - \Sigma$$

das Komplement des Skeletts. Dann ist

$$(\mathbb{R}^n, U, V)$$

eine Ausschneidungstriade, denn auf Grund des Satzes über kleine Simplexe ist

$$HS\{U,V\} \to H(U\cup V)$$

ein Isomorphismus (U und V sind offen im $\mathbb{R}^n$). Außerdem gilt

$$\tilde{H}(U\cup V) = \tilde{H}\mathbb{R}^n = 0.$$

Die reduzierte Mayer-Vietories-Sequenz liefert Isomorphismen

$$\tilde{H}_q(U\cap V)\to\tilde{H}_q U\oplus\tilde{H}_q V.$$

Insbesondere erhalten wie für q=0, da U linear zusammenhängend ist,

$$\tilde{H}_0(U\cap V) \cong \tilde{H}_0 U\oplus\tilde{H}_0 V \cong \tilde{H}_0 V.$$

Weiterhin besteht der Durchschnitt U∩V aus zwei linearen Komponenten,

$$U\cap V = U-\Sigma \approx S^{n-1}\times(-1,1) - S^{n-1}\times\{0\} = S^{n-1}\times(-1,0) \cup S^{n-1}\times(0,1),$$

d.h. es ist $\tilde{H}_0 V = \tilde{H}_0(U\cap V) = \mathbb{Z}$. Damit hat V ebenfalls zwei lineare Komponenten. Wir haben damit einen wichtigen Spezialfall des verallgemeinerten Satzen von Jordan bewiesen:

Das Gerüst $\Sigma^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ einer beliebigen dicken Sphäre teilt im Fall n>1 den $\mathbb{R}^n$ in zwei Komponenten, welche Inneres und Äußeres von Σ^{n-1} heißen.

3.8.11 Beispiel: Homologie einer Suspension

Sei (X, X_1, X_2) eine Ausschneidungstriade mit $X_1\cap X_2\neq\emptyset$ und $\tilde{H}X_1 = \tilde{H}X_2 = 0$. Auf Grund der reduzierten Mayer-Vietories-Sequenz hat man dann Isomorphismen

$$\tilde{H}_q(X_1\cup X_2)\to\tilde{H}_{q-1}(X_1\cap X_2).$$

Ein interessantes Beispiel für eine solche Situation ist die Suspension ΣX eines topologischen Raumes X. Sie ist definiert als das Ergebnis

$$\Sigma X = [0,1]\times X/\sim$$

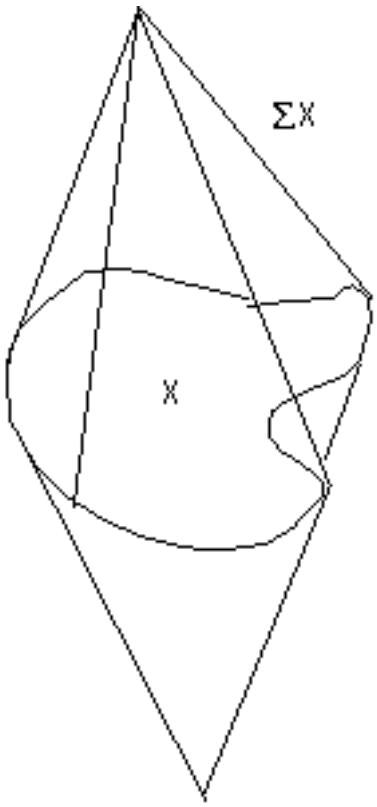
einer Kontraktion von Dach $\{0\}\times X$ und Boden $\{1\}\times X$ des Zylinders $[0,1]\times X$ in jeweils einen Punkt. Mit anderen Worten, $\sim$ ist die Äquivalenzrelation deren Äquivalenzklassen gerade die folgenden sind.

$$\{0\}\times X,\ \{1\}\times X,\ \{(t,x)\} \text{ mit } 0<t<1 \text{ und } x\in X.$$

Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit der Faktortopologie bezüglich der natürlichen Surjektion

$$\gamma: [0,1]\times X \to \Sigma X,\ (t,x) \mapsto [t,x],$$

versehen. Dabei bezeichne [t,x] die Äquivalenzklasse von (t,x) in ΣX. Man kann sich ΣX veranschaulichen als zweiseiten Kegel über X mit der Basis $\{\frac{1}{2}\}\times X$ und den Spitzen $\gamma(0,x)$ und $\gamma(1,x)$.



Zum Beispiel ist die Suspension der n-Sphäre bis auf Homöomorphie gerade eine (n+1)-Sphäre,

$$\Sigma S^n \approx S^{n+1}$$

Die Projektion $[0,1]\times X \to [0,1]$ induziert eine stetige Abbildung

$$h: \Sigma X \to [0,1],\ (t,x) \mapsto t.$$

Die Suspension ΣX ist Vereinigung der beiden offenen Teilmengen

$$C_0X = h^{-1}(0,1]$$

$$C_1X = h^{-1}[0,1)$$

Dies sind zwei "offene Kegel" über X und als solche sind sie kontrahierbar. Zum Beispiel erhält man wie folgt für C_1X eine kontrahierende Deformation.

$$s_t : C_1X \to C_1X,\ [u,x] \mapsto [tu,x].$$

Auf Grund der Definition der Topologie von ΣX ist dies eine stetige Familie. Für t=1 erhält man die identische Abbildung und für t=0, wird der gesamte Raum in die Spitze des Kegels abgebildet. Mit andere Worten, C_1X ist kontrahierbar. Damit ist

$$\tilde{H}C_0X = 0 = \tilde{H}C_1X.$$

Da die beiden Kegel offen in ΣX sind, ist die Triade $(\Sigma X, C_0X, C_1X)$ ausschneidend. Insbesondere hat man Isomorphismen

$$\tilde{H}_q(\Sigma X) = \tilde{H}_q(C_0X \cup C_1X) \to \tilde{H}_{q-1}(C_0X \cap C_1X) = \tilde{H}_{q-1}((0,1)\times X) \cong \tilde{H}_{q-1}X.$$

Insbesondere erhalten wir für die reduzierte Homologie der Sphären

$$\tilde{H}_q S^n = \tilde{H}_q \Sigma S^{n-1} = \tilde{H}_{q-1} S^{n-1} = \ldots = \tilde{H}_0 S^{n-q} = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ falls } n-q = 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

3.8.12 Die Mayer-Vietories-Sequenz eines Paars von Ausschneidungstriaden

Seien zwei Triaden (A, A_1, A_2) und (X, X_1, X_2) gegeben mit

$$(A, A_1, A_2) \subseteq (X, X_1, X_2).$$

Dann hat man ein kommutatives Diagramm von Kettenabbildungen mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & S\{A_1,A_2\} & \to & S\{X_1,X_2\} & \to & \dfrac{S\{X_1,X_2\}}{S\{A_1,A_2\}} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & S(A_1 \cup A_2) & \to & S(X_1 \cup X_2) & \to & \dfrac{S(X_1 \cup X_2)}{S(A_1 \cup A_2)} & \to & 0 \end{array}$$

Wenn die beiden Triaden ausschneidend sind, so induzieren die beiden linken vertikalen Abbildungen Isomorphismen auf der Homologie, und auf Grund des Fünferlemmas gilt dies dann auch für die rechte vertikale Abbildung. Nun sind alle beteiligten Komplexe frei, d.h. die Kettenabbildungen selbst sind Homotopieäquivalenzen, insbesondere ist

$$\frac{S\{X_1,X_2\}}{S\{A_1,A_2\}} \simeq \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S(A_1 \cup A_2)}.$$

Die folgende kurze Sequenz von Kettenabbildunge ist exakt.

$$0 \to \frac{S(X_1 \cap X_2)}{S(A_1 \cap A_2)} \to \frac{SX_1}{SA_1} \oplus \frac{SX_2}{SA_2} \to \frac{S\{X_1,X_2\}}{S\{A_1,A_2\}} \to 0.$$

Die zugehörige Homologiesequenz hat die folgende Gestalt.

$$\ldots \to H_q(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \to H_q(X_1,A_1) \oplus H(X_2,A_2) \to H_q(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \to H_{q-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \to \ldots$$

Sei heißt Mayer-Vietories-Sequenz des Triadenpaares $(A, A_1, A_2) \subseteq (X, X_1, X_2)$.

Im Fall $A=\emptyset$ ist dies gerade die absolute Mayer-Vietories-Sequenz, und im Fall $X = X_1 = X_2$ die relative. Im Fall, daß $A_1 = A_2$ aus nur einem Punkt besteht, erhalten wir die reduzierte Mayer-Vietories-Sequenz. Ist $X_1 = X$ und $A_1 \subseteq A_2 = X_2$, so erhalten wir die Homologiesequenz eines Tripels.

3.8.13 Aufgaben

Simpliziale Mayer-Vietoris-Sequenzen

1. Sei K ein Simplizialkomplex. Ein Teilkomplex von K ist eine Teilmenge $K' \subseteq K$ welche selbst wieder ein abstrakter Simplizialkomplex ist (über einer möglicherweise kleineren Eckenmenge). Seien K' und K" Teilkomplexe von K.

(a) Zeigen Sie, dann sind auch K'∪K" und K'∩K" Teilkomplexe.

(b) Konstruieren Sie kurze exakte Sequenzen von Komplexen

$$0 \to S(K' \cap K") \to S(K') \oplus S(K") \to S(K' \cup K") \to 0$$

$$0 \to C(K' \cap K") \to C(K') \oplus C(K") \to C(K' \cup K") \to 0$$

in den geordneten bzw. orientierten Kettenkomplexen von K',K",K'∩K", K'∪K". Die zugehörigen langen Homologiesequenzen heißen Mayer-Vietoris-Sequenzen der geordneten bzw. orientierten simplizialen Homologie.

(c) Zeigen Sie, für jeden SimplizialkomplexK induzieren die natürliche Surjektion

$$S(K) \to C(K)$$

und (bei gegebener linearen Ordung auf der Eckenmenge von K) die natürliche Injektion

$$C(K) \to C(K)$$

einen Isomorphismus der Homologie.

3.9 Die Ausschneidungseigenschaft polyedraler Triaden

Seien K ein (kombinatorischer) Simplizialkomplex und

$$K', K" \subseteq K$$

zwei Teilkomplexe. Weiter seien

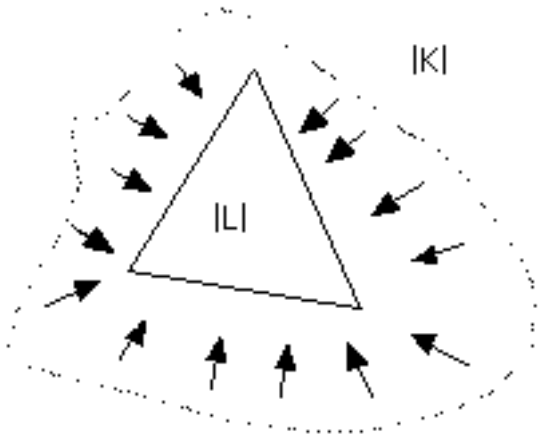
$$X := |K|, X' := |K'| \text{ und } X" := |K"|$$

die zugehörigen geometrischen Realisierungen. Das Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, daß dann

$$(X, X', X")$$

eine Ausschneidungstriade ist .

Beweis-Idee: Wir zeigen für jedes topologische Paar der Gestalt (|K|, |L|) mit einem Simplizialkomplex K und einem Teilkomplex $L \subseteq K$, daß |L| ein starker Deformationsretrakt einer offenen Umgebung U von |L| in |K| ist.



3.9.1. Die geometrische Realisierung eines Simplizialkomplexes

Sei K ein kombinatorischer Simplizialkomplex und

$$|K| := \cup_{s\in K} |s| \text{ , } |s| := \{ \alpha\colon s \to [0,1] : \sum_{e\in s} \alpha(e) = 1\},$$

dessen geometrische Realisierung. Für jeden Punkt $\alpha\in|K|$ schreiben wir auch

$$\alpha = \sum_{e\in V(K)} \alpha(e)\cdot e\,.$$

Die $\alpha(e)$ heißen auch Koordinaten von α.
Ein topologischer Raum der homöomorph ist zu einem topologischen Raum der Gestalt $|K|$ heißt Polyeder. Falls K endlich ist, so spricht man auch von einem endlichen Polyeder. Ein topologisches Paar, welches isomorph ist in $\mathrm{Top}^{(2)}$ zu einem Paar der Gestalt

$$(|K|, |L|)$$

mit einem Teilkomplex L von K, heißt polyedrales Paar.

Wiederholung.

1. Für jedes Simplex $s = \{e_0,\ldots,e_q\} \in K$ mit q+1 Ecken e_i kann man $|s|$ mit Δ_q identifizieren vermittels der Abbildung
   $$|s| \to \Delta_q,\ \alpha \mapsto (\alpha(e_0),\ldots,\alpha(e_q)).$$
   Dadurch bekommt $|s|$ die Struktur eines zu Δ_q homöomorphen topologischen Raums.
2. Eine Teilmenge $A\subseteq|K|$ ist genau dann offen, wenn $A\cap|s|$ offen ist in $|s|$ für jedes $s\in K$.
3. Eine Abbildung $f\colon|K| \to X$ ist genau dann stetig, wenn die Einschränkung
   $$f|_{|s|};\ |s| \to X$$
   stetig ist für jedes $s\in K$.

3.9.2. Die baryzentische Unterteilung eines Simplizialkomplexes

Sei K ein kombinatorischer Simplizialkomplex und

$$|K| := \cup_{s\in K} |s| \text{ , } |s| := \{ \alpha\colon s \to [0,1] : \sum_{e\in s} \alpha(e) = 1\},$$

dessen geometrische Realisierung. Für jedes Simplex

$$s = \{e_0,\ldots,e_q\} \in K$$

heißt der Punkt $\alpha\in|s|$ mit

$$\alpha(e_i) = \frac{1}{q+1} \text{ für jedes } i$$

Baryzentrum von $|s|$ (oder auch von s) und wird mit b(s) bezeichnet.

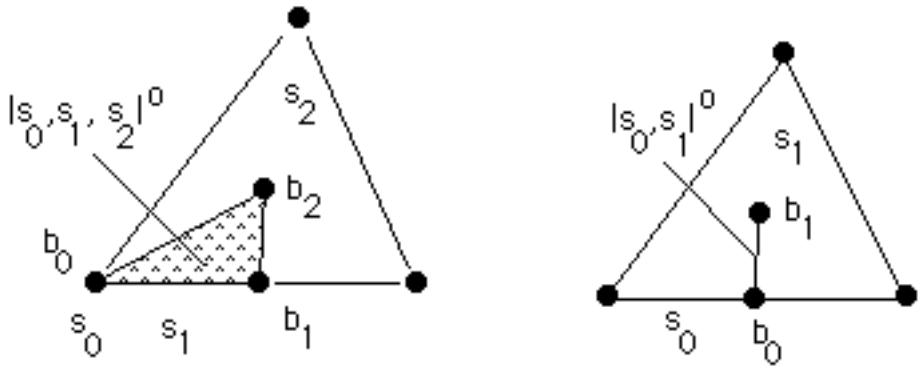
Wiederholung

1. s, $|s|$ und b(s) bestimmen einander eindeutig:
   a) s ist der Träger von b(s), d.h. das kleinste Simplex von K, dessen Realizierung den Punkt p := b(s) enthält,
   $$s = \mathrm{supp}\ p := \{e\in V(K) \mid p(e) \neq 0\ \}.$$
   b) s ist die Menge der Ecken von $|s|$.

2. Ist $s_0 \subset s_1 \subset ... \subset s_q$ eine echt aufsteigende Kette von Seiten eines Simplex $s \in K$, so definieren die Baryzentren eine Teilmenge

$$|s_0,s_1,... ,s_q|^o := \{ \sum_{i=0}^{q} x_i b(s_i) \mid \sum_{i=0}^{q} x_i = 1, x_i > 0\} \subseteq |s|$$

deren Abschließung ein geometrisches Simplex der Dimension q ist (d.h. es ist homöomorph zu Δ_q)[26].



3. Das geometrische Simplex |s| ($s \in K$) ist die disjunkte Vereinigung aller offenen Simplexe der Gestalt

$$|s_0,s_1,... ,s_q|^o \text{ mit } s_0 \subset s_1 \subset ... \subset s_q \subseteq s.$$[27]

4. Wegen 3 ist |K| die disjunkte Vereinigung aller Simplexe der Gestalt

$$|s_0,s_1,... ,s_q|^o \text{ mit } s_0 \subset s_1 \subset ... \subset s_q \subseteq s \in K.$$

Die Zerlegung von |K| in diese Simplexe heißt offene baryzentrische Unterteilung von |K| (bezüglich K). Die Mengen der Gestalt

$$\{ s_0, s_1, ...,s_q \} \text{ mit } s_0 \subset s_1 \subset ... \subset s_q \subseteq s \in K$$

---

[26] Wir identifizieren |s| mit einem Standardsimplex. Die Summe der Koordinaten von $b(s_i)$ ist 1, die der von $x_i b(s_i)$ ist also gleich x_i und die der von

$$\sum_{i=0}^{q} x_i b(s_i)$$

ist gleich 1. Also liegt dieser Punkt im Standard-Simplex |s|. Da die $b(s_i)$ linear unabhängig sind ($b(s_{i+1})$ ist nicht Linearkombination vorhergehender Baryzentren $b(s_\nu)$ mit $\nu \le i$, da die Anzahl der von Null verschiedenen Koordinaten von $b(s_{i+1})$ dafür zu groß ist), hat die Abschließung die Dimension q.

[27] Sei $\alpha \in |s|$ und seien $e_1,...,e_k$ die Ecken von s, in denen α ungleich Null ist. Mit

$$s' := \{ e_1,...,e_k\} \text{ und } b = b(s')$$

gibt es dann ein eindeutig bestimmtes $x \in (0,1)$ mit der Eigenschaft, daß

$$\alpha - x \cdot b$$

in weniger als k Ecken von s von Null verschieden ist.Dabei ist x das k-fache der kleinsten von Null verschiedenen Koordinate von α.

Durch Wiederholen der Prozedur erhält man eine Darstellung von α als Linearkombination von Baryzentren, die zu einer echt absteigenden Folge von Seiten gehören.

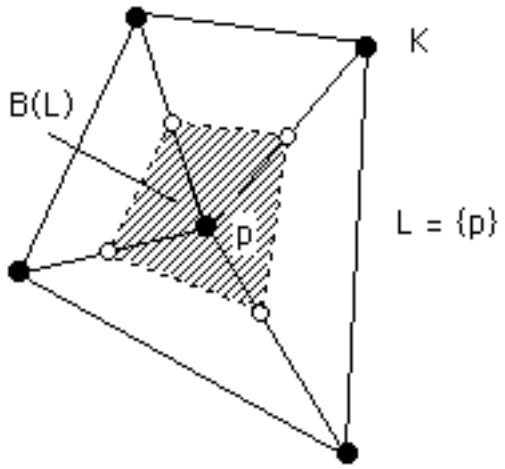
bilden einen kombinatorischen Simplizialkomplex K', dessen geometrische Realisierung homöomorph ist zu der von K.[28] Der Komplex K' heißt baryzentrische Unterteilung von K.

3.9.3. Die baryzentrische Umgebung eines Teilpolyeders in einem Polyeder

Seien K ein kombinatorischer Simplizialkomplex und $L \subseteq K$ ein Teilkomplex. Dann ist die baryzentrische Unterteilung L' von L ein Teilkomplex der baryzentrischen Unterteilung K' von K. Die baryzentrische Umgebung von L in K ist definiert als die folgende Teilmenge von $|K| = |K'|$.

$$B(L) := \{ \sum_{i=0}^{q} x_i b(s_i) \mid \sum_{i=0}^{q} x_i = 1,\ x_i > 0,\ s_0 \subset \ldots \subset s_q \in K,\ s_0 \in L \}$$

$$= \bigcup_{L \ni s_0 \subset \ldots \subset s_q \in K} |s_0, s_1, \ldots, s_q|^o$$



Bemerkungen

(i) Nach Konstruktion gilt

$$|L| = |L'| \subseteq B(L) \subseteq |K'| = |K|.$$

(ii) B(L) ist eine offene Teilmenge von |K|.

(iii) Für je zwei Teilkomplexe L, M von K gilt

$$B(L \cap M) = B(L) \cap B(M).$$

Beweis. Zu (i). Jeder Punkt von |K'| ist von der Gestalt

$$\sum_{i=0}^{q} x_i b(s_i) \text{ mit } \sum_{i=0}^{q} x_i = 1,\ x_i > 0$$

wobei die s_i Simplexe von K sind mit

$$s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_q \in K.$$

Stellt man die Zusatzbedingung $s_0 \in L$, so erhält man gerade die Punkte der Teilmenge B(L). Fordert man zusätzlich, daß alle s_i in L liegen, so erhält man die Punkte der noch kleineren Menge |L'|.

Zu (ii). Es reicht zu zeigen

---

[28] Wegen 3 gilt dies für jedes einzelne Simplex und damit für den ganzen Komplex.

$$B(L)\cap|s'| \text{ ist offen in } |s'| \text{ für jedes Simplex } s'\in K'.$$

Als Simplex der baryzentrischen Unterteilung K' hat s' die Gestalt

$$s' = \{ s_0,s_1,\dots ,s_q\} \text{ mit } s_0 \subset s_1 \subset \dots \subset s_q \in K.$$

Die Punkte von |s'| sind gerade die Punkte der Gestalt

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{q} x_i b(s_i) \text{ mit } \sum_{i=0}^{q} x_i = 1,\ x_i \geq 0.$$

Falls s_0 nicht in L liegt, so liegt auch keines der übrigen s_i in L und keiner dieser Punkte liegt in B(L). Im Fall $s_0 \notin L$ gilt also

$$B(L)\cap|s'| = \emptyset,$$

d.h. wir erhalten eine offene Teilmenge von |s'|. Es bleibt noch der Fall

$$s_0 \in L$$

zu betrachten. Wir wählen $r \geq 0$ derart, daß gilt

$$s_0 \subset \dots \subset s_r \in L \text{ und } s_{r+1} \notin L.$$

Die Punkte von |s'| sind wieder gerade die Punkte der Gestalt (1). Sind alle x_i mit $i \leq r$ Null, so liegt ein solcher Punkt nicht in B(L). Ist wenigstens eines dieser x_i ungleich Null, so liegt der Punkt in B(L). Mit anderen Worten,

$$B(L)\cap|s'| = \{ \sum_{i=0}^{q} x_i b(s_i) \in |s'| : x_0+\dots+x_r > 0 \}.$$

Also ist B(L)∩|s'| der Durchschnitt von |s'| mit der offenen Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^{q+1} \mid x_0+\dots+x_r > 0 \ \}$$

des $\mathbb{R}^{q+1}$, also offen in |s'|. Wir haben gezeigt, B(L) ist offen in |K|.

Zu (iii). B(L)∩B(M) ist die Vereinigung der offenen Simplexe

$$|s_0,s_1,\dots ,s_q|^o \text{ mit } s_0 \subset s_1 \subset \dots \subset s_q \in K,\ s_0 \in L \text{ und } s_0 \in M.$$

Diese Vereinigung ist aber auch gleich B(L∩M).

QED.

3.9.4. Die baryzentrische Deformation eines polyedralen Paares

Seien K ein kombinatorischer Simplizialkomplex und $L \subseteq K$ ein Teilkomplex. Dann gibt es eine Homotopie

$$h_t = h_t^{K,L}: B(L) \to B(L),\ 0 \leq t \leq 1$$

mit

$$h_t|_{|L|} = Id_{|L|},\ h_0 = Id_{B(L)} \text{ und } h_1(B(L)) = |L|.$$

Insbesondere ist |L| ein starker Deformationsretrakt der offenen Umgebung B(L) von L und die natürliche Einbettung

$$|L| \to B(L)$$

induziert einen Isomorphismus

$$H(|L|) = H(B(L))$$

der Homologie. Die Homtopie $h_t^{K,L}$ heißt auch baryzentrische Deformation des Paares (K,L).

Beweis. Sei $s' = \{ s_0,\dots,s_q\} \in K'$ ein Simplex der baryzentrischen Unterteilung von K mit

$$s_0 \subset ... \subset s_q$$

und

$$s_0 \subset ... \subset s_r \in L \text{ und } s_{r+1} \notin L.$$

Wir definieren h_t auf

$$B(L) \cap |s'| = \{ \sum_{i=0}^{q} x_i b(s_i) \in |s'| : x_0 + ... + x_r > 0 \}.$$

wie folgt.

$$(1) \qquad h_t\left(\sum_{i=0}^{q} x_i b(s_i)\right) := (1-t) \sum_{i=r+1}^{q} x_i b(s_i) + \frac{1-(1-t)\sum_{i=r+1}^{q} x_i}{\sum_{i=0}^{r} x_i} \cdot \sum_{i=0}^{r} x_i b(s_i).$$

Dann ist h_t auf $B(L) \cap |s'|$ eine wohldefinierte Homotopie[29], und für verschiedene s' sind die Defintionen verträglich und verheften sich zu einer stetigen Abbildung

$$B(L) \times [0,1] \to B(L), (\alpha, t) \mapsto h_t(\alpha).$$

Man beachte, die erste Summe rechts wird über die Baryzentren erstreckt, die nicht in $|L|$ liegen und die zweite über die Baryzentren, die in $|L|$ liegen. In diesem Sinne ist die Definition unabhängig von der Wahl des spezielen Simplex s', in welchem der abzubildende Punkt liegt.

Für Punkte aus $|L|$ ist die erste Summe auf der rechten Seite von (1) gleich Null und der Bruch vor dem zweiten Summanden hat die Gestalt 1/1, d.h. auf $|L|$ ist h_t für jedes t die identische Abbildung. Für t = 0 ist der Quotient des zweiten Summanden rechts gleich 1, d.h. h_0 ist die identische Abbildung. Schließlich ist der erste Summand für t = 1 Null und das Bild von h_1 liegt ganz in $|L|$.

QED.

3.9.5. (weglassen?) Eine Eigenschaft der baryzentrischen Deformation

Seien K ein Simplizialkomplex und L, M ⊆ K Teilkomplexe. Dann gilt

$$B_K(L) \bigcap |M| = B_M(L \bigcap M).$$

Insbesondere induziert (nach 3.9.4) die natürliche Einbettung

$$|L| \cap |M| \to B_K(L) \cap |M|$$

einen Isomorphismus auf der Homologie,

$$H(|L| \cap |M|) \to H(B(L) \cap |M|).$$

Beweis. Die Punkte von $|M|$ kann man sich als Linearkombinationen von gewissen Baryzentren von Simplexen von M geschrieben denken,

$$\sum_i x_i b(s_i), \; s_i \in M.$$

Eine solche Linearkombination liegt genau dann in $B_K(L)$, wenn mindestens ein Koeffizient eines Baryzentrums eines Simplexes von L ungleich Null ist,

---

[29] die Summe der Koordinaten rechts ist 1.

$$x_i \neq 0 \text{ für ein i mit } s_i \in L,$$

d.h. wenn der Punkt in der baryzentrischen Umgebung von L∩M in M liegt.
QED.

3.9.6. Die Ausschneidungseigenschaft polyedraler Triaden

Seien K ein Simplizialkomplex und L', L" ⊆ K zwei Teilkomplexe. mit

$$K = L' \cup L".$$

Dann ist

$$(|K|, |L'|, |L"|)$$

eine Ausschneidungstriade.
Beweis. Wir setzen

$X := |K|$
$X' := |L'|$
$X" := |L"|$
$\widetilde{K} := L' \bigcup L"$
$\widetilde{X} := |\widetilde{K}|$
$B' := B_{\widetilde{K}}(L')$
$B" := B_{\widetilde{K}}(L").$

Dann gilt

$$\widetilde{X} = X' \cup X"$$

und erst recht

$$\widetilde{X} = B' \cup B".$$

Da B' und B" offen sind in $\widetilde{X}$, ist

$$(\widetilde{X}, B', B")$$

eine Ausschneidungstriade (nach Beispiel 1 von 3.8.2), d.h. die natürliche Abbildung

$$(B', B' \cap B") \rightarrow (B' \cup B", B").$$

induziert einen Isomorphismus auf der Homologie. Wir betrachten das folgende kommuative Diagramm von natürlichen Einbettungen von topologischen Paaren.

$$\begin{array}{ccc} (B', B' \bigcap B") & \hookrightarrow & (B' \bigcup B", B") = (\widetilde{X}; B") \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ (X', X' \bigcap X") & \hookrightarrow & (X' \bigcup X", X") = (\widetilde{X}; X") \end{array}$$

Es reicht zu zeigen, die untere horizontale Abbildung induziert einen Isomorphismus auf der Homologie (vgl. 3.8.2, Bedingung (i)). Da die obere horizontale Abbildung diese Eigenschaft hat, reicht es zu zeigen, daß dies für die beiden vertikalen Abbildungen der Fall ist. Es reicht also zu zeigen die beiden folgenden natürlichen Einbettungen topologischer Paare inzuzieren Isomorphismen auf der Homologie.

1. $(\widetilde{X}, X") \hookrightarrow (\widetilde{X}, B")$.

2. $(X', X' \cap X") \hookrightarrow (B', B' \cap B")$.

Zu 1. Die Abbildung $(\widetilde{X}, X") \rightarrow (\widetilde{X}, B")$ induziert einen Morphismus zwischen den langen Homologiesequenzen der beiden Paare:

$$\begin{array}{ccccccc} \to H_q X'' & \to H_q \widetilde{X} & \to H_q(\widetilde{X},X'') & \to H_{q-1} X'' & \to \\ \downarrow & \| & \downarrow & \downarrow & \\ \to H_q B'' & \to H_q \widetilde{X} & \to H_q(\widetilde{X},B'') & \to H_{q-1} B'' & \to \end{array}$$

Dabei sind alle vertikalen Abbildungen zwischen absoluten Homologiegruppen Isomorphismen (nach 3.9.4). Also sind es auch die vertikalen Abbildungen zwischen den relativen Homologiegruppen (nach dem 5-Lemma).

Zu 2. Die Abbildung $(X', X'\cap X'') \to (X', B'\cap B'')$ induziert einen Morphismus zwischen den langen Homologiesequenzen der beiden Paare:

$$\begin{array}{ccccccc} \to H_q(X'\cap X'') & \to H_q X' & \to H_q(X',X'\cap X'') & \to H_{q-1}(X'\cap X'') & \to \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \to H_q(B'\cap B'') & \to H_q B' & \to H_q(B',B'\cap B'') & \to H_{q-1}(B'\cap B'') & \to \end{array}$$

Wie beim Beweis von 2. reicht es zu zeigen, die Inklusionen

$$X' \to B' \text{ und } X'\cap X'' \to B'\cap B''$$

induzieren Isomorphismen auf der Homologie. Für die erste Inklusion ist das klar auf Grund von 3.9.4. Betrachten wir die zweite. Nach 3.9.4 reicht es zu zeigen,

$$B'\cap B'' = B(L')\cap B(L'')$$

ist baryzentrische Umgebung von $L'\cap L''$ in $\widetilde{K}$. Nach 3.9.3 ist aber

$$B(L')\cap B(L'') = B(L'\cap L'').$$

QED.

4. Anwendungen auf den euklidischen Raum

4.1 Standardabbildungen zwischen Zellen und Sphären

4.1.1 Wiederholung

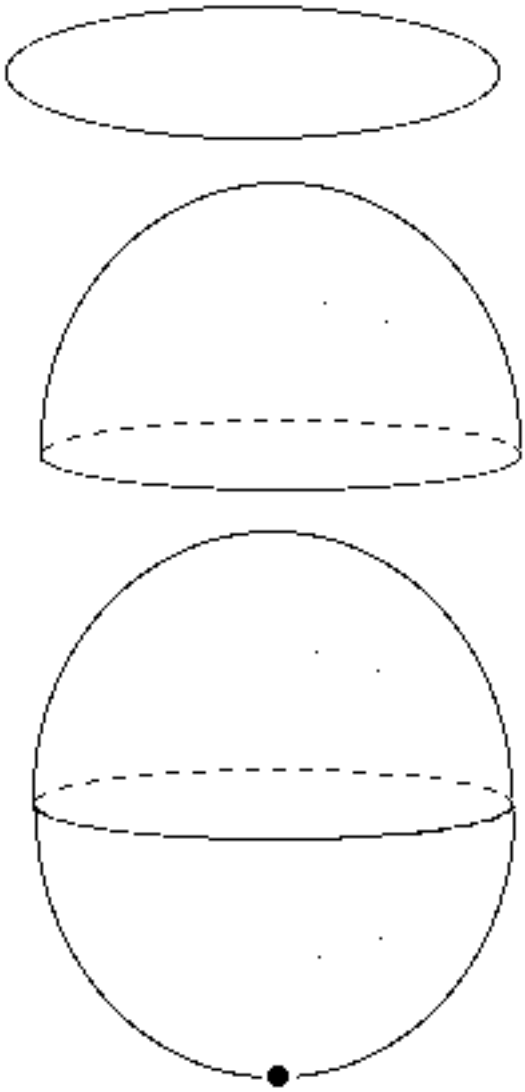
Wie bisher verwenden wir folgende Bezeichnungen

$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$	Norm von $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$
$S^n := \{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \| x \| = 1\}$	n-dimensionale Einheitssphäre, n-Sphäre
$B^n := \{x\in\mathbb{R}^n \mid \| x \| \le 1\}$	n-dimensionale Vollkugel, n-Kugel
$\overset{\circ}{B}{}^n := \{x\in\mathbb{R}^n \mid \| x \| < 1\}$	n-dimensionale offene Vollkugel, offene n-Kugel, n-Zelle
$Q:=(0,...,0,1)\in S^n$	Grundpunkt von S^n

4.1.2 Die Standardabbildungen der Vollkugel

Die folgende Abbildung heißt Standardabbildung der abgeschlossenen n-Kugel auf die n-Sphäre.

$$\pi:(B^n,S^{n-1})\to(S^n,Q),\ y \mapsto (2(\sqrt{1-\| y \|^2})\cdot y,\ 2\| y \|^2-1)\ (\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^{n+1}).$$



Die folgende Abbildung heißt Standardabbildung der offenen n-Kugel auf den $\mathbb{R}^n$.

$$\pi': \overset{\circ}{B}^n \to \mathbb{R}^n,\ y \mapsto \frac{y}{1-\| y \|}.$$

Die Abbildung π ist wohldefiniert. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\pi(y)\|^2 &= 4(1-\| y \|^2)\cdot \| y \|^2 + (2\| y \|^2-1)^2 \\ &= 4\cdot \| y \|^2 - 4\cdot \| y \|^4 + 4\cdot \| y \|^4 - 4\cdot \| y \|^2 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Für $y \in S^{n-1}$ ist $\|y\| = 1$, also $\pi(y) = (0, 2-1) = (0,1) = Q$.
QED.

4.1.3 Eigenschaften der Standardabbildung π

(i) $\pi^{-1}(Q) = S^{n-1}$, $\pi^{-1}(p)$ ist einpunktig für $p \in S^n-\{Q\}$.

(ii) Die Standardabbildung $\pi:(B^n,S^{n-1}) \to (S^n,Q)$ induziert einen Homöomorphismen

$$\bar{\pi}: B^n/S^{n-1} \to S^n \text{ und } \pi: \overset{\circ}{B}^n \to S^n-\{Q\}.$$

(iii) Die folgende Abbildung ist die Umkehrung von $\pi: \overset{\circ}{B}^n \to S^n-\{Q\}$.

$$\rho: S^n\text{-}\{Q\} \to \overset{\circ}{B}{}^n,\ (z,t) \mapsto \frac{z}{\sqrt{2(1\text{-}t)}}$$

Man erhält also die n-Sphäre aus der n-dimensionalen Vollkugel, indem man den Rand der letzteren zu einen Punkt zusammenzieht. Anschaulich kann man sich S^n vorstellen als ein rundgebogenes Exemplar der "Scheibe" B^n, wobei der Rand von B^n zu einen Punkt zusammengezogen wurde.

Beweis. Zu (i). Es gilt

$$\pi(y) = Q \Leftrightarrow \sqrt{1\text{-}\| y \|^2}\cdot y = 0 \text{ und } 2\| y \|^2\text{-}1 = 1 \Leftrightarrow \| y \|^2 = 1 \Leftrightarrow y \in S^{n-1}$$

Sei $p = (z,t) \in S^n\text{-}\{Q\}$. Dann gilt

$$\pi(y) = p \Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{1\text{-}\| y \|^2}\cdot y = z \text{ und } 2\| y \|^2\text{-}1 = t$$

Im Fall $z = 0$ gilt $t =^{30} -1$, also $y =^{31} 0$. Sei jetzt $z \neq 0$. Die Gleichungen rechts haben dann, wenn sie überhaupt lösbar sein sollten nur Lösungen der Gestalt $y = \lambda\cdot z$ mit $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$. Einsetzen liefert die Bedingungen

$$4\cdot(1\text{-}|\lambda|^2\cdot\| z \|^2)\cdot|\lambda|^2\cdot\| z \|^2 = \| z \|^2 \text{ und } 2\cdot|\lambda|^2\cdot\| z \|^2 - 1 = t$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cdot(1\text{-}|\lambda|^2\cdot\| z \|^2)\cdot|\lambda|^2 =^{32} 1 \text{ und } |\lambda|^2 = \frac{t+1}{2\cdot\| z \|^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cdot(1 - t)|\lambda|^2 =^{33} 1 \text{ und } |\lambda|^2 = \frac{t+1}{2\cdot\| z \|^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\lambda|^2 = \frac{1}{2(1\text{-}t)} = \frac{t+1}{2\cdot\| z \|^2}$$

Wegen $\lambda \geq 0$ sind somit λ und $y = \lambda\bullet z$ durch $p = (z,t)$ eindeutig festgelegt. Damit existiert höchstens ein Punkt in $\pi^{-1}(p)$ und die Bedingung für die tatsächliche Existenz eines Punktes ist

$$\frac{1}{2(1\text{-}t)} = \frac{t+1}{2\cdot\| z \|^2} \Leftrightarrow \| z \|^2 = 1\text{-}\, t^2 \Leftrightarrow \| z \|^2 + t^2 = 1$$

Letztere Bedingung ist aber erfüllt, wegen $p = (z,t) \in S^n$.

Zu (ii). Nach (i) ist $\bar{\pi}$ wohldefiniert und bijektiv. Da π stetig ist, ist es auch $\bar{\pi}$. Damit ist $\bar{\pi}$ eine stetige bijektive Abbildung eines kompakten Raumes in einen Hausdorff-Raum, und als solche Abbildung ein Homöomorphismus. Die Homöomorphie von $\pi:\overset{\circ}{B}{}^n \to S^n\text{-}\{Q\}$ ergibt sich aus der von $\bar{\pi}$ und (i).

Zu (iii). Folgt aus der obigen Berechnung von λ (und $y = \lambda\bullet z$, $\lambda \geq 0$).

QED.

---

[30] Wegen $p = (z,t) \in S^n$ ist dann $t = \pm 1$. Wegen $p \neq Q$, also $t = -1$.

[31] Wegen $2\bullet\|y\| - 1 = t = -1$ ist $\|y\| = 0$, also $y = 0$.

[32] Wegen $\|z\| \neq 0$ können wir in der ersten Identität $\|z\|$ kürzen.

[33] Wegen der rechten Identität können wir links für $2|\lambda|^2\bullet\|z\|^2$ den Wert $t+1$ einsetzen.

4.1.4 Eigenschaften der Standardabbildung π'

Die Standardabbildung $\pi': \overset{\circ}{B}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein Homöomorphismus mit der Umkehrabbildung

$$\rho': \mathbb{R}^n \to \overset{\circ}{B}^n,\ z \mapsto \frac{z}{1+\| z \|}.$$

Zusammen mit 4.1.3 ergibt sich $S^n\text{-}\{Q\} \approx \mathbb{R}^n$. Anders ausgedrückt, S^n ist die Einpunktkompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$ (vgl. Stereographische Projektion).

Beweis. Offensichtlich ist ρ' wohldefiniert und stetig. Für $z \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\pi'(\rho'(z)) = \frac{z}{1+\| z \|} / (1 - \| \frac{z}{1+\| z \|} \|) = \frac{z}{1 + \| z \| - \| z \|} = z\ .$$

Analog gilt für $y \in \overset{\circ}{B}^n$

$$\rho'(\pi'(z)) = \frac{y}{1-\| y \|} / (1 + \| \frac{y}{1-\| y \|} \|) = \frac{y}{1-\|y\| + \|y\|} = y.$$

QED.

4.1.5 Kompakte konvexe Teilmengen des euklidischen Raumes

Sei K eine kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, welche eine n-Kugel B enthält. Dann sind die Paare $(K,\partial K)$ und $(B,\partial B)$ homöomorph.

Beweis. Durch Verschieben und Strecken reduzieren wir den Beweis auf den Fall

$$B = B^n.$$

1. Schritt. $\nu: \partial K \to S^{n-1},\ y \mapsto \frac{y}{\| y \|}$ ist ein Homöomorphismus.

Die Abbildung ist stetig und bildet einen kompakten Raum in einen Hausdorff-Raum ab. Es genügt also, ihre Bijektivität zu beweisen.

Die Abbildung ist surjektiv: Sei $z \in S^{n-1}$. Bezeichne g die Gerade durch z und den Ursprung $0 \in B$. Dann ist $g \cap K$ konvex und Kompakt, also ein abgeschlossenes Intervall von $g \cong \mathbb{R}$, welches den Ursprung enthält,

$$g \cap K =^{34} [a,b] \cdot z \quad (:= \{x \bullet z \mid x \in [a,b]\}).$$

Der Punkt $b \cdot z$ liegt in K und jede Umgebung von $b \cdot z$ enthält Punkte des Komplements, d.h.

$$b \cdot z \in \partial K$$

ist ein Punkt, der durch ν in z abgebildet wird.

Die Abbildung ist injektiv: Für je zwei Urbilder x', x'' desselben Punktes gilt

$$x'' = \lambda \cdot x' \text{ mit } \lambda > 0.$$

Durch eventuelles Vertauschen von x' und x'' erreichen wir

$$0 < \lambda < 1.$$

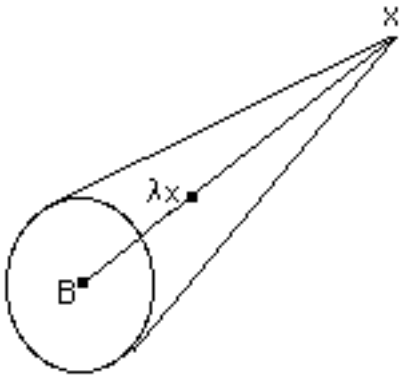
Es reicht zu zeigen, in dieser Situation kann x'' kein Randpunkt von K sein. Es reicht also die folgende Aussage zu beweisen.

Für jedes $x \in K$ und $0 \leq \lambda < 1$ ist $\lambda \cdot x$ ein innerer Punkt von K.

---

[34] Man beachte, wegen $B \subseteq K$ gilt $[-1,+1] \subseteq [a, b]$, also $a < 0 < b$

Um letzteres einzusehen, betrachten wir den Kegel, der durch Zentralprojektion von B in den Punkt x entsteht. Der Punkt $\lambda \cdot x$ liegt im Innern der Strecke von 0 nach x, also ganz im Innern dieses Kegels.



Da K konvex ist, liegt außerdem dieser Kegel ganz in K, d.h. $\lambda \cdot x$ ist tatsächlich ein innerer Punkt von K. Wir haben damit gezeigt:

(1) Auf jeden vom Ursprung ausgehenden Strahl gibt es genau einen Punkt, welcher auf dem Rand von K liegt.

Das bedeutet aber gerade, die Abbildung ν ist bijektiv.

2. Schritt. Die radiale Forsetzung $\tilde{\nu}\ K \to B^n$, $\lambda y \mapsto \frac{\lambda y}{\| y \|}$, $0 \le \lambda \le 1$von ν ist ein Homöomorphismus.

Genauer ist diese Fortsetzung wie folgt definiert. Für gegebenes $z \in K$ wählen wir den eindeutig bestimmten Schnittpunkt $y \in \partial K$ des Strahls durch 0 und z mit ∂K (außer im Fall $z = 0$, in welchem wir $y \in \partial K$ beliebig wählen können) und schreiben z in der Gestalt

$$z = \lambda \bullet y$$

mit eindeutig bestimmten nicht-negativen λ.
Wir setzen

$$\tilde{\nu}(z) := \frac{\lambda y}{\| y \|}$$

Aus der Stetigkeit von ν kann man die Stetigkeit $\tilde{\nu}$ ableiten. Aus der Bijektivität von ν ergibt sich die Bijektivität der Fortsetzung $\tilde{\nu}$. Da ein kompakter Raum in einen Hausdorff-Raum abgebildet wird, ergib sich daraus die Behauptung.

Der explizite Beweis der Bijektivität ist einfach. Wir beschränken uns hier auf den Beweis der Stetigkeit. Wir haben zu zeigen, für jede konvergente Folge

$$\lambda_n y_n \longrightarrow \lambda y$$

gilt auch $\frac{\lambda_n y_n}{\|y_n\|} \longrightarrow \frac{\lambda y}{\|y\|}$. Dazu wiederum reicht es zu zeigen:

1. Im Fall $\lambda = 0$ ist $\{\lambda_n\}$ eine Nullfolge.

2. Im Fall $\lambda \neq 0$ gilt $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ und $y_n \longrightarrow y$.

1. Schritt. Wir zeigen, die Folge $\{y_n\}$ hat mindestens einen Häufungspunkt y' in dem Sinne, daß für jede Umgebung U von y' gilt $y_n \in U$ für unendlich viele n.

Angenommen, das ist falsch. Dann gibt es für jedes $x \in \partial K$ eine Umgebung U(x) mit $y_n \in U(x)$ für nur endlich viele n. Weil ∂K kompakt ist, überdecken endlich viele U(x) die Menge ∂K. Das ist aber nicht möglich wegen $y_n \in \partial K$ für alle n (d.h. für unendlich viele n).

2. Schritt. Einziger Häufungspunkt von $\{y_n\}$ ist y, außer eventuell im Fall $\lambda = 0$.

Sei y' ein Häufungspunkt von $\{y_n\}$. Dann hat man für eine Teilfolge

$$y_{i_n} \longrightarrow y'$$

Mit $y_n \in \partial K$ gilt auch $y' \in \partial K$. Wegen $B \subseteq K$ haben alle diese Vektoren eine Länge ≥ 1. Weiter gilt

$$\lambda_{i_n} = \frac{\lambda_{i_n} \cdot \|y_{i_n}\|}{\|y_{i_n}\|} = \frac{\|\lambda_{i_n} \cdot y_{i_n}\|}{\|y_{i_n}\|} \longrightarrow \frac{\|\lambda \cdot y\|}{\|y'\|}$$

also

$$\lambda_{i_n} \cdot y_{i_n} \longrightarrow \frac{\|\lambda \cdot y\|}{\|y'\|} \cdot y'$$

Gleichzeitig gilt nach Voraussetzung

$$\lambda_{i_n} y_{i_n} \longrightarrow \lambda \cdot y$$

also $\frac{\|\lambda \cdot y\|}{\|y'\|} \cdot y' = \lambda \cdot y$. Im Fall $\lambda \neq 0$ bedeutet dies, y und y' sind proportionale Randpunkte von K mit einem Proportionalitätfaktor > 0. Wegen (1) ist dies nur möglich im Fall y' = y.

3. Schritt. Im Fall $\lambda = 0$ gilt $\lambda_n \longrightarrow 0$.

Nach Voraussetzung gilt

$$\lambda_n y_n \longrightarrow \lambda \cdot y = 0.$$

Wegen $B \subseteq K$ und $y_n \in \partial K$ git $\|y_n\| \geq 0$ für alle n. Die Folge der $\lambda_n y_n$ deshalb keine Nullfolge sein, wenn die der λ_n keine ist.

Für die nachfolgenden Schritte nehmen wir an, daß λ von Null verschieden ist.

4. Schritt. Es gilt $y_n \longrightarrow y$.

Sei U eine offene Umgebung von y. Wir haben zu zeigen, $y_n \in U$ für fast alle n. Sei

$$x \in \partial K - U.$$

Nach dem zweiten Schritt (und wegen $\lambda \neq 0$) ist x kein Häufungspunkt der Folge $\{y_n\}$.

Es gibt also eine offene Umgebung U(x) von x mit $y_n \in U(x)$ für höchstens endlich

viele n. Die Mengen U(x) überdecken zusammen mit U die Menge ∂K. Weil ∂K kompakt ist, überdecken bereits endlich viel U(x) zusammen mit U die Menge ∂K. Die Vereinigung dieser endlich vielen U(x) enthält y_n nur für endlich viele n. Die übrigen y_n (d.h. fast alle) müssen also in U liegen.

5. Schritt. $\lambda_n \longrightarrow \lambda$.

Es gilt

$$\lambda_n = \frac{\lambda_n \bullet \|y_n\|}{\|y_n\|} = \frac{\|\lambda_n \bullet y_n\|}{\|y_n\|} \longrightarrow \frac{\|\lambda \bullet y\|}{\|y\|} = \lambda.$$

QED.

4.1.6 Folgerungen

(i) Der n-Kubus ist homöomorph zur n-Kugel: $[-1,+1]^n=[-1,+1]\times\ldots\times[-1,+1]\approx B^n$.

(ii) Das n-Standardsimplex Δ_n ist homöomorph zur n-Kugel: $\Delta_n \approx B^n$.

(iii) Der Rand

$$\dot{\Delta}_n = \{x\in\Delta_n \mid x_i=0 \text{ für ein } i\}$$

des n-Standardsimplex ist homöomorph zur (n-1)-Sphäre: $\dot{\Delta}_n \approx S^{n-1}$.

Beweis. (i). Folgt unmittelbar aus 4.1.5.

(ii). Wir betten Δ_n in den $\mathbb{R}^n$ ein vermittels der linearen Abbildung

$$\iota: \Delta_n \to \mathbb{R}^n,\ e_i \mapsto \begin{cases} e_i & \text{falls } i<n \\ -\sum_{j=0}^{n-1} e_j & \text{falls } i=n \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, daß ι bijektiv ist, also $\iota(\Delta_n)\approx\Delta_n$ gilt. Außerdem ist $\iota(\Delta_n)$ eine konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$, welche eine Vollkugel mit dem Zentrum $i(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} e_i)$ enthält. Daraus ergibt sich die Behauptung.

(iii). Der eben konstruierte Homöomorphismus $\Delta_n \to B^n$ bildet den Rand $\dot{\Delta}_n$ von Δ_n ab in den Rand $\partial B^n = S^{n-1}$ von B^n.

QED.

4.2 Die Homologie von Zellen und Sphären

4.2.1 Lemma

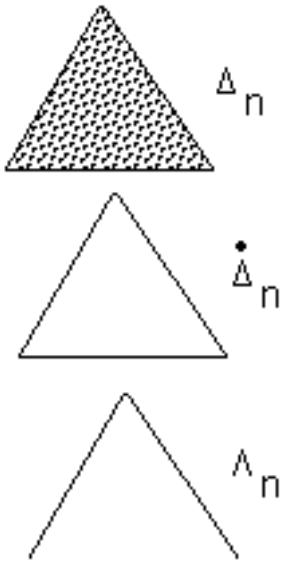
Sei Δ_n wie bisher das n-dimensionale Standard-Simplex,

$$\dot{\Delta}_n := \{x\in\Delta_n \mid x_j = 0 \text{ für mindestens ein } j\}$$

dessen Rand, und

$$\Lambda_n := \{x\in\Delta_n \mid x_j = 0 \text{ für mindestens ein } j>0\}$$

das 0-Horn von $\dot{\Delta}_n$, d.h. die Vereinigung aller echten Seiten von Δ_n mit Ausnahme der 0-ten.



Dann bestehen folgende Isomorphien.

$$H_q(\Delta_n,\dot{\Delta}_n) \xrightarrow[\cong]{\partial_*} H_{q-1}(\dot{\Delta}_n,\Lambda_n) \xleftarrow[\cong]{i_*} H_{q-1}(\dot{\Delta}_n-\{e_0\},\Lambda_n-\{e_0\}) \xleftarrow[\cong]{\varepsilon^0_*} H_{q-1}(\dot{\Delta}_{n-1},\dot{\Delta}_{n-1}).$$

Dabei seien ∂_* der Zusammenhangshomomorphismus des Tripels $(\Delta_n,\dot{\Delta}_n,\Lambda_n)$,

$$i:(\dot{\Delta}_n,\Lambda_n) \hookrightarrow (\dot{\Delta}_n-\{e_0\},\Lambda_n-\{e_0\})$$

die natürliche Einbettung, und

$$\varepsilon^0: (\Delta_{n-1},\dot{\Delta}_{n-1}) \hookrightarrow (\dot{\Delta}_n-\{e_0\},\Lambda_n-\{e_0\})$$

die 0-te Seitenabbildung.

Beweis. Bijektivität von ∂_*. Es reicht zu zeigen, $H_q(\Delta_n,\Lambda_n)=0$ (auf Grund der langen Homologiesequenz des Tripels $(\Delta_n,\dot{\Delta}_n,\Lambda_n)$). Betrachten wir die stetige Familie

$$h_t:(\Delta_n,\Lambda_n) \to (\Delta_n,\Lambda_n),\ x \mapsto (1-t)x+te_0.$$

Diese ist wohldefiniert, weil Δ_n und die (n-1)-Seiten von Δ_n , welche e_0 als Ecke besitzen, konvex sind. Nun ist h_t auf $\{e_0\}$ die identische Abbildung und für $t = 0$ sogar auf Δ_n. Für $t = 1$ wird alles auf e_0 abgebildet. Mit anderen Worten,

$$(\{e_0\},\{e_0\}) \subseteq (\Delta_n,\Lambda_n)$$

ist ein starker Deformationsretrakt, d.h.

$$H_q(\Delta_n,\Lambda_n) = H_q(\{e_0\},\{e_0\}) = 0.$$

Bijektivität von i_*. Folgt aus dem Ausschneidungssatz: Abschließung von $\{e_0\}$ ist gleich $\{e_0\}$ und liegt im Innern der Teilmenge Λ_n von $\dot{\Delta}_n$.

Bijektivität von ε^0_*. Es reicht zu zeigen, $\varepsilon^0:(\Delta_{n-1},\dot{\Delta}_{n-1})\to(\dot{\Delta}_n-\{e_0\},\Lambda_n-\{e_0\})$ ist eine Homotopieäquivalenz. Die stetige Familie

$$s_t:(\dot{\Delta}_n-\{e_0\},\Lambda_n-\{e_0\}) \to (\dot{\Delta}_n-\{e_0\},\Lambda_n-\{e_0\}),\ x \mapsto x(t),$$

mit

$$x_j(t) := \begin{cases} (1-t)x_0 & \text{für } j=0 \\ \dfrac{1-(1-t)x_0}{1-x_0}\,x_j & \text{für } j>0 \end{cases}$$

ist wohldefiniert: es gilt

$$\sum_{j=0}^{n} x_j(t) = (1-t)x_0 + \frac{1-(1-t)x_0}{1-x_0}\,(1-x_0) = 1,$$

und aus $x_j=0$ folgt $x_j(t)=0$.

Außerdem ist die Einschränkung von s_t auf die 0-te Seite $x_0=0$ für alle t die identische Abbildung. Für t=0 ist s_t selbst die identische Abbildung. Für t=1 liegt das Bild von s_t ganz auf der 0-ten Seite $\varepsilon^0(\Delta_{n-1})$. Mit anderern Worten, die 0-te Seite ist vermittels s_t ein starker Deformationsretrakt von $\dot{\Delta}_n-\{e_0\}$. Die Punkte x von Λ_n (d.h. $x_j=0$ für ein $j>0$) werden bei s_0 in den Rand der 0-ten Seite von Δ_n abgebildet. Mit anderen Worten, durch s_t wird

$$\varepsilon^0(\Delta_{n-1},\dot{\Delta}_{n-1})$$

zum starken Deformationsretrakt von $(\dot{\Delta}_n-\{e_0\},\Lambda_n-\{e_0\})$. Damit ist die Behauptung bewiesen.
QED.
Bemerkung: die obige Abbildung s_0 ist gerade die Projektion des n-Simplex aus der 0-ten Ecke auf die 0-te Seite.

4.2.2 Die Homologie von Zellen und Sphären

(i) $\tilde{H}_q(S^n) = \begin{cases} 0 \text{ für } q\neq n \\ \mathbb{Z} \text{ für } q=n \end{cases}$

(ii) $H_q(B^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0 \text{ für } q\neq n \\ \mathbb{Z} \text{ für } q=n \end{cases}$

(iii) $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-\{p\}) = \begin{cases} 0 \text{ für } q\neq n \\ \mathbb{Z} \text{ für } q=n \end{cases}$

Beweis. Zu (ii). Es gilt

$$H_q(B^n, S^{n-1}) \cong H_q(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \qquad \text{(nach 4.1.5)}$$

$$\cong H_{q-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \qquad \text{(nach 4.2.1)}$$

$$\dots$$

$$\cong H_{q-n}(\Delta_0, \dot{\Delta}_0) \qquad \text{(nach 4.2.1)}$$

$$\cong H_{q-n}(\Delta_0) \qquad \text{(wegen } \dot{\Delta}_0 = \varnothing\text{)}.$$

Da Δ_0 der einpunktige Raum ist, ergibt sich daraus die Aussage von (ii).

Zu (i). Da B^{n+1} kontrahierbar ist, d.h. $\tilde{H}(B^{n+1}) = 0$ gilt, ergibt sich aus der reduzierten Homologiesequenz des Paares (B^{n+1}, S^n),

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong H_{q+1}(B^{n+1}, S^n).$$

Die Aussage von (i) folgt damit aus (ii).
Zu (iii). OBdA sei p = 0 der Ursprung. Die Beispiele (ii) und (iii) von 3.5.9 (für Deformationstrakte) zeigen, die Einbettung

$$i:(B^n, S^{n-1}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{p\})$$

induziert Isomorphismen $H(B^n) \to H(\mathbb{R}^n)$[35] und $H(S^{n-1}) \to H(\mathbb{R}^n - \{p\})$: B^n ist ein Deformatinsretrakt von $\mathbb{R}^n$ und S^{n-1} ist einer von $\mathbb{R}^n - \{p\}$. Aus diesen Isomorphismen erhält man nach dem Fünferlemma mit Hilfe der Homologiesequenzen von (B^n, S^{n-1}) und $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{p\})$, daß i auch einen Isomorphismus

$$H(B^n, S^{n-1}) \to H(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{p\})$$

induziert. Damit folgt (iii) ebenfalls aus (ii).
QED.

Bemerkung
Wir sind jetzt in der Lage einige geometrische Schlußfolgerungen aus unseren Berechnungen zu ziehen.

4.2.3 Sphären und euklidische Räume mit unterschiedlicher Dimension

Sphären unterschiedlicher Dimension sind nicht homöomorph. Euklidische Räume unterschiedlicher Dimension sind nicht homöomorph.

Beweis. Für Sphären folgt dies aus 4.2.2(i). Sei $h:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus mit $m \neq n$. Dann ist auch $h:\mathbb{R}^m - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{h(0)\}$ ein Homöomorphismus im Widerspruch zu 4.2.2(iii).
QED.

4.2.4 Sphären und Vollkugeln

Die Shpäre S^{n-1} ist kein Retrakt der Vollkugel B^n.

Beweis. Angenommen, es gibt eine Retraktion $r:B^n \to S^{n-1}$. Dann ist die Zusammensetzung

---

[35] alternativ kann man auch so argumentieren: B^n und $\mathbb{R}^n$ sind beide kontrahierbar, d.h. man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H(B^n) & \to & H(\mathbb{R}^n) \\ \cong & \nearrow & \cong \\ & H\{p\} & \end{array}$$

$$S^{n-1} \xrightarrow{\ i\ } B^n \xrightarrow{\ r\ } S^{n-1}$$

mit der natürlichen Einbettung die identische Abbildung. Also ist auch

$$\tilde{H}S^{n-1} \xrightarrow{\ i_*\ } \tilde{H}B^n \xrightarrow{\ r_*\ } \tilde{H}S^{n-1}$$

die identische Abbildung. Das ist aber unmöglich, denn es gilt $\tilde{H}S^{n-1} \neq 0$ und $\tilde{H}B^n = 0$.
QED.

4.2.5 Einbettungen von Vollkugeln in den Euklidischen Raum

Sei $f: B^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung.

(i) Es gilt $f(y) = 0$ für ein $y \in B^n$ oder $f(z) = \lambda z$ für ein $z \in S^{n-1}$ und ein $\lambda > 0$.

(ii) Es gilt $f(y) = y$ für ein $y \in B^n$ oder $f(z) = \lambda z$ für ein $z \in S^{n-1}$ und ein $\lambda > 1$.

Beweis. Zu (i). Betrachten wir die Abbildung

$$p: B^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \begin{cases} (2\cdot\| x \| - 1)\cdot x - (2-2\cdot\| x \|)\cdot f\left(\frac{x}{\| x \|}\right) & \text{für } 2\cdot\| x \| \geq 1 \\ f(4\cdot\| x \|\cdot x) & \text{für } 2\cdot\| x \| \leq 1 \end{cases}$$

Insbesondere ist $\rho(x) = f(2\cdot x)$ für $\|x\| = \frac{1}{2}$ (d.h. r ist stetig) und $\rho(x) = x$ für $x \in S^{n-1}$.

Falls ρ keine Nullstelle besitzt, so ist die Abbildung

$$B^n \to S^{n-1},\ x \mapsto \frac{\rho(x)}{\| \rho(x) \|}$$

eine wohldefinierte Retraktion, was nach 4.2.4 nicht möglich ist. Auf dem Rand der Vollkugel besitzt ρ kein Nullstelle (weil dort $\rho(x) = x$ gilt), also muß es eine Nullstelle im Innern der Vollkugel geben,

$$\rho(x) = 0 \text{ für ein } x \in \overset{\circ}{B}{}^n.$$

Im Fall $2\cdot\|x\| \leq 1$ folgt $f(y) = 0$ mit $y = 4\cdot\| x \|\cdot x \in \overset{\circ}{B}{}^n$. Im Fall $2\cdot\| x \| > 1$ folgt

$$f(y) = (2\cdot\| x \| - 1)/(2-2\|x\|)\cdot\| x \|\cdot y \text{ mit } y = \frac{x}{\| x \|} \in S^{n-1}.$$

Damit ist (i) bewiesen.
Zu (ii). Wir betrachten die Abbildung

$$g: B^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto f(x) - x.$$

Nach (i) gibt es ein $y \in B^n$ mit $f(y) - y = 0$ oder ein $z \in S^{n-1}$ mit $f(z) - z = \lambda z$ mit $\lambda > 0$, d.h.

$$f(z) = (\lambda+1)x.$$

QED.

4.2.6 Fixpunktsatz von Brouwer

Jede stetige Abbildung $f: B^n \to B^n$ der Vollkugel in sich hat mindestens einen Fixpunkt.

Beweis. Hätte f keinen Fixpunkt, so würde es nach 4.2.5(ii) ein $z \in S^{n-1}$ und ein $\lambda > 1$ geben mit

$$\| f(z) \| = \lambda\cdot\| z \|.$$

Wegen $f(z) \in B^n$ ist das aber nicht möglich.
QED.

4.2.7 Fundamentale Zyklen

Die identische Abbildung $i_n:\Delta_n \to \Delta_n$ des n-Simplex ist ein Zyklus mod $\dot{\Delta}_n$. Seine Homologieklasse erzeugt $H_n(\Delta_n,\dot{\Delta}_n) \cong \mathbb{Z}$, .d.h.

$$H_n(\Delta_n,\dot{\Delta}_n) = \mathbb{Z}\cdot[i_n].$$

Der Rand von i_n ist ein Zyklus des Raumes $\dot{\Delta}_n$. Seine Homologieklasse erzeugt $\tilde{H}_{n-1}(\dot{\Delta}_n) \cong \mathbb{Z}$, d.h.

$$\tilde{H}_{n-1}(\dot{\Delta}_n) = \mathbb{Z}\cdot[\partial i_n].$$

Beweis. Wegen $\tilde{H}(\Delta_n) = 0$ liefert die reduzierte Homologiesequenz von $(\Delta_n,\dot{\Delta}_n)$ Isomorphismen

$$\partial_* : H_n(\Delta_n,\dot{\Delta}_n) \to \tilde{H}_{n-1}(\dot{\Delta}_n).$$

Dieser bildet $[i_n]$ in $[\partial i_n]$ ab. Die beiden Aussagen von 4.2.7 sind also äquivalent. Es genügt die erste zu beweisen. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Für n=0 wird

$$H_0(\Delta_0,\dot{\Delta}_0) = H_0(\Delta_0)$$

trivialerweise vom einzigen Punkt i_0 von Δ_0 erzeugt. Sei jetzt bereits gezeigt, daß

$$H_{n-1}(\Delta_{n-1},\dot{\Delta}_{n-1}) = \mathbb{Z}\cdot[i_{n-1}]$$

gilt. Nach 4.2.1 wird dann

$$H_{n-1}(\dot{\Delta}_n,\Lambda_n)$$

erzeugt von $i_*(\varepsilon^0_*([i_{n-1}])) = [\varepsilon^0:\Delta_{n-1} \to \Lambda_n]$. Letztere Klasse ist aber gerade das Bild von

$$[i_n] \in H_n(\Delta_n,\dot{\Delta}_n).$$

QED.

4.2.8 Produkte mit Sphären

Seien $p \in S^n$ ein Punkt und Y ein beliebiger topologischer Raum. Dann bestehen folgende Isomorphien.

(i) $H_q(S^n\times Y,\{p\}\times Y) \cong H_{q-n}(Y)$.

(ii) $H_q(B^n\times Y,S^{n-1}\times Y) \cong H_{q-n}(Y)$.

(iii) $H_q(S^n\times Y) \cong H_{q-n}(Y)\oplus H_q(Y)$, $[z] \mapsto (\rho[z], p_*[z])$.

Dabei sie $p:S^n\times Y\to Y$ die Projektion auf den zweiten Faktor und ρ sei induziert durch die Einbettung $S^n\times Y\subseteq (S^n\times Y,\{p\}\times Y)$den Isomorphismus von (i).

Beweis. Zu (ii). Die Beweise sind analog zum Beweis von 4.2.2. Wie dort haben wir (aus denselben Gründen) Isomorphismen

$$H_q((\dot\Delta_n,\Lambda_n)\times Y)\xrightarrow[\cong]{\partial_*} H_{q-1}((\dot\Delta_n,\Lambda_n)\times Y)\xleftarrow[\cong]{i_*} H_{q-1}((\dot\Delta_n-\{e^0\},\Lambda_n-\{e^0\})\times Y)\xleftarrow[\cong]{\varepsilon^0_*} H_{q-1}((\dot\Delta_{n-1},\Delta_{n-1})\times Y).$$

Dabei sei $(A,B)\times Y = (A\times Y,B\times Y)$. Insbesondere ergibt sich

$$H_q((\Delta_n,\dot\Delta_n)\times Y)\cong H_{q-n}((\Delta_0,\dot\Delta_0)\times Y) = H_{q-n}(Y).$$

Wegen $(\Delta_n,\dot\Delta_n)\approx(B^n,S^{n-1})$ ist dies gerade die Aussage von (ii).

Zu (i). Zum Beweis von (i) betrachten wir das Tripel $(B^{n+1}\times Y,S^n\times Y,\{p\}\times Y)$. Da $\{p\}\times Y\subseteq B^{n+1}\times Y$ eine Homotopieäquivalenz ist, gilt

$$H(B^{n+1}\times Y,\{p\}\times Y) = 0.$$

Die Homologiesequenz des Tripels liefert daher,

$$H_q(B^{n+1}\times Y,S^n\times Y)\cong H_{q-n1}(S^n\times Y,\{p\}\times Y).$$

Damit folgt (i) aus (ii).

Zu (iii). Die Projektion $S^n\times Y\to\{p\}\times Y$, $(s,y)\mapsto(p,y)$, ist eine Retraktion. Als solche liefert sie nach 3.4.13 eine zerfallende exakte Sequenz:

$$0\to H(\{p\}\times Y)\to H(S^n\times Y)\to H(S^n\times Y,\{p\}\times Y)\to 0.$$

Die Behauptung ergibt sich damit aus (i).

QED.

Bemerkung: die Künneth-Formeln

Die Isomorphie 4.2.8(iii) kann man auch in der folgenden Weise schreiben. Es gilt

$$H_q(X\times Y)\cong\oplus_{i+j=q}H_i(X)\otimes H_j(Y)$$

wenn einer der beiden Räume X, Y homöomorph zu einer Sphäre ist. Die eben bewiesene Isomorphie ist ein erstes Beispiel für eine sehr allgemeine Aussage, die unter dem Namen Künneth-Formeln bekannt ist. Später werden wir die graduierten Gruppen H(X) und H(Y) (genauer ihre Duale, die Kohomologiegruppen) mit einer Ringstruktur versehen. Die Künnethformeln bekommen dann die Gestalt

$$H(X\times Y)\cong H(X)\otimes H(Y)$$

eines Isomorphismus graduierter Ringe. Sie gelten für die Kohomologie sehr allgemeiner Räume X,Y.[36]

Als Beispiel für die Abbildungen, die diese Isomorphie realisieren, betrachten wir die die Abbildungen

$$(*)\qquad H_nS^n\oplus H_nS^n\xrightarrow{(i_{1*},i_{2*})}H_n(S^n\times S^n)\xrightarrow{(p_{1*},p_{2*})}H_nS^n\oplus H_nS^n$$

Dabei seien die Abbildungen wie folgt definiert.

$$i_1:S^n\to S^n\times S^n,x\mapsto(x,p)$$

$$i_2:S^n\to S^n\times S^n,x\mapsto(p,x)$$

$$p_1:S^n\times S^n\to S^n,(x,y)\mapsto x$$

[36] Zum Beispiel, wenn die Homologie des einen Raumes endlich erzeugt und die des anderen torsionsfrei ist.

$$p_2: S^n \times S^n \to S^n, (x,y) \mapsto y$$

Die Komposition der Abbildungen (*) ist offensichtlich die Identität. Deshalb ist

$$H_n S^n \oplus H_n S^n = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

ein direkter Summand von $H_n(S^n \times S^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Das ist aber nur möglich, wenn die beiden Abbildung von (*) Isomorpismen sind.

4.3 Lokale Homologie

4.3.1 Vorbemerkung

Die singulären Homologiegruppen sind globale Invarianten. Räume mit unterschiedlichen Homologiegruppen können lokal isomorph sein, wie das zum Beispiel bei S^n und $\mathbb{R}^n$ der Fall ist. Wie wir in diesem Abschnitt sehen werden, haben einige relativen Homologiegruppen die Natur lokaler Invarianten.

4.3.2 Definition der lokalen Homologie

Seien X ein topologischer Raum und $p \in X$ ein Punkt. Dann heißt

$$H_q(X, X-p)$$

p-te lokale Homologie von X im Punkt p. Diese Bezeichnung wird durch die nachfolgende Aussage erklärt. Ein Punkt $p \in X$ heißt abgeschlossen, wenn $\overline{\{p\}} = \{p\}$ gilt. Man beachte, in Hausdorff-Räumen ist jeder Punkt abgeschlossen.

4.3.3 Lokalität der lokalen Homologie

Sein X ein topologischer Raum und $p \in X$ ein abgeschlossener Punkt. Dann induziert für jede offene Umgebung U von p die natürliche Einbettung $(U, U-p) \to (X, X-p)$ Isomorphismen

$$H_q(U, U-p) \to H_q(X, X-p).$$

Mit anderen Worten, die lokale Homologie von X in p ist durch jede noch so kleine Umgebung von p festgelegt.

Beweis. Das Paar (U,U-p) entsteht aus (X,X-p) durch entfernen der Menge F:= X-U. Nach dem Ausschneidungssatz genügt es zu zeigen, die Abschließung von F liegt im Innern von X-p. Offensichtlich gilt

$$F = X - U \subseteq X - p.$$

Die Behauptung folgt deshalb aus der Tatsache, daß F abgeschlossen und X-p offen ist in X.

QED.

4.3.4 p-Abbildungen und Abbildungskeime

Zum besseren Verständnis der lokalen Homologie werden wir ihr Verhalten bei Abbildungen untersuchen, d.h. ihre funktoriellen Eigenschaften. Nach 4.3.3 genügt es, die Abbildung lokal in einer Umgebung des betrachteten Punktes zu definieren.

Seien X, Y topologische Räume, $p \in X$ ein abgeschlossener Punkt und

$$f: U \to Y$$

eine auf einer Umgebung U von p definierte stetige Abbildung. Dann heißt f p-Abbildung, wenn es eine offenen Umgebung $V \subseteq U$ von p gibt mit

$$f(V-p) \subseteq Y - f(p)$$

(d.h. p liegt isoliert in der Faser $f^{-1}(f(p))$ durch p). Eine p-Abbildung induziert einen Homomorphismus der lokalen Homologie

$$f^p_*: H_q(X,X\text{-}p) \cong H_q(U,U\text{-}p) \xrightarrow{f|_U} H_q(Y,Y\text{-}f(p)).$$

Man sagt, zwei Abbildungen, die in einer Umgebung von p∈X definiert sind, heißen p-äquivalent, wenn sie in einer Umgebung von p übereinstimmen. Die p-Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation. Eine Äquivalenzklasse bezüglich dieser Relation heißt Keim im Punkt p. Der Keim der Abbildung f im Punkt p wird mit f^p bezeichnet.

Beispiel

Potenzreihen analytischer Funktionen sind Beispiele für Keime: zwei analytische Funktionen haben genau dann dieselbe Potenzreihe, wenn sie in einer Umgebung des Betrachteten Punktes übereinstimmen.

4.3.5 p-Abbildungen mit demselben Keim

Seien X, Y topologische Räume, p∈X und f, g zwei p-Abbildungen mit Werten in Y, die in p denselben Keim besitzen, Dann induzieren sie denselben Homomorphismus

$$H_q(X,X\text{-}p) \to H_q(Y,Y\text{-}q),\ (q:=f(p) = g(p))$$

auf der lokalen Homologie.

Beweis. Sei q = f(p) = f'(p) und seien U und U' offene Umgebungen von p mit[37]

$$f(U\text{-}p) \subseteq Y\text{-}q \text{ und } f'(U'\text{-}p) \subseteq Y\text{-}q.$$

Nach Voraussetzung gibt es eine offene Umgebung W von p mit W⊆U∩U' und

$$g := f|_W = f'|_W .$$

Insbesondere gilt g(W-p) ⊆ Y-q. Es genügt zu zeigen, f und g induzieren dieselbe Abbildung $f^p_* = g^p_*$ auf der lokalen Homologie. Aus Symmetriegründen gilt dann nämlich

$$f^p_* = g^p_* = f'^p_*.$$

Betrachten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccc}
H(X,X\text{-}p) & \xrightarrow{f^p_*} & H(Y,Y\text{-}q) \\
\| & & \| \\
H(U,U\text{-}p) & \xrightarrow{(f|U)_*} & H(Y,Y\text{-}q) \\
\uparrow\gamma & & \| \\
H(W,W\text{-}p) & & \| \\
\| & & \| \\
H(X,X\text{-}p) & \xrightarrow{g^p_*} & H(Y,Y\text{-}q)
\end{array}$$

Die Abbildungen α, β und γ seien induziert durch die entsprechenden natürlichen Einbettungen der topologischen Paare. Auf Grund es Ausschneidungssatzes handelt es sich um Isomorphismen. Die Kommutativität des Diagramms zeigt, daß f^p_* und g^p_* übereinstimmen.

QED.

---

[37] Insbesondere seien f und g auf U bzw. U' definiert.

4.3.6 Die Kategorie der Keime von p-Abbildungen

Wir definieren wir folgt eine Kategorie $\mathbf{Top}_*$. Die Objekte von $\mathbf{Top}_*$ seien punktierte topologische Räume (X,p), wobei der Grundpunkt p von X abgeschlossen ist. Ein Morphismus

$$f^p:(X,p)\to(Y,q)$$

von $\mathbf{Top}_*$ ist ein Keim in p einer p-Abbildung f:U→Y mit f(p)=q. Die Morphismenkomposition sei wie folgt definiet. Seien

$$f^p:(X,p)\to(Y,q) \text{ und } g^q:(Y,q)\to(Z,r)$$

Morphismen von $\mathbf{Top}_*$ und seien

$$f:U\to Y \text{ und } g:V\to Z$$

eine p-Abbildung und eine q-Abbildung, welche f^p bzw. g^q repräsentieren. Durch Verkleinern von U bzw. V können wir erreichen, daß gilt

$$g(V-q)\subseteq Z-r \text{ und } f(U-p)\subseteq V-q.$$

Dann gilt aber auch $(g\circ f)(U-p)\subseteq Z-r$, d.h. $g\circ f$ ist eine p-Abbildung. Deren Keim in p bezeichnen wir mit

$$f^p\circ g^q := (g\circ f)^p.$$

Ersetzt man f und g in der obigen Konstruktion durch andere Repräsentanten f' und g' von f^p bzw. g^q, so stimmen f' und g' in einer Umgebung von p bzw. q mit f und g überein. Die Zusammensetzung $g\circ f$ stimmt also mit $g'\circ f'$ in einer Umgebung von p überein. Dieses zeigt, der Keim $(g\circ f)^p$ ist unabhängig von der Wahl der verwendeten Repräsentanten. Die Komposition $f^p\circ g^q$ ist somit wohldefiniert und nur von f^p und g^q abhängig. Offensichtlich ist $\mathbf{Top}_*$ mit dieser Komposition eine Kategorie.

Aussage 4.3.5 besagt gerade, die lokale Homologie faktorisiert sich über $\mathbf{Top}_*$, definiert also für jedes q einen Funktor

$$\mathbf{Top}_* \to \mathbf{Ab},\ (X,p) \mapsto H_q(X,X-p).$$

4.3.7 Die lokale Homologie lokale homöomorpher Räume

Seien $p\in X$ und $q\in Y$ abgeschlossene Punkte, welche offene Umgebungen U bzw. V besitzen, welche als punktierte Räume homöomorph sind,

$$(U,p)\approx(V,q) \text{ in } \mathbf{Top}^{(2)}.$$

Dann gilt $H(X,X-p)\cong H(Y,Y-q)$.

Beweis. Aus der Isomorphie der Paare (U,p) und (V,q) in $\mathrm{Top}^{(2)}$ folgt deren Isomorphie in Top_*. Dann sind aber auch (X, p) und (Y, q) isomorph in Top_*. Durch Anwenden des Funktors

$$\mathbf{Top}_* \to \mathbf{Ab},\ (X,p) \mapsto H_q(X,X-p).$$

erhalten wir die Behauptung (da Funktoren Isomorphismen in Isomorphismen überführen).
QED.

4.3.8 Invarianz der Dimension

Wenn die Punkte $p\in\mathbb{R}^m$ und $q\in\mathbb{R}^n$ homöomorphe punktierte Umgebungen U bzw. V besitzen (d.h. Umgebungen mit $(U,p)\approx(V,q)$) so gilt m=n.

Beweis. Nach 4.3.7 gilt $H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m\text{-}p) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\text{-}q)$ für alle i. Wegen 4.2.2 ist das aber nur möglich, wenn m=n gilt.
QED.

4.3.9 Invarianz der Randeigenschaft

Werde die Menge

$$\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_0 \geq 0\}$$

als positiver Halbraum bezeichnet. Wenn zwei Punkte $p,q \in \mathbb{R}^n_+$ homöomorphe punktierte Umgebungen U bzw. V besitzen (d.h. Umgebungen mit $(U,p) \approx (V,q)$), so liegen entweder beide Punkte auf dem Rand

$$\partial\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_0 = 0\}$$

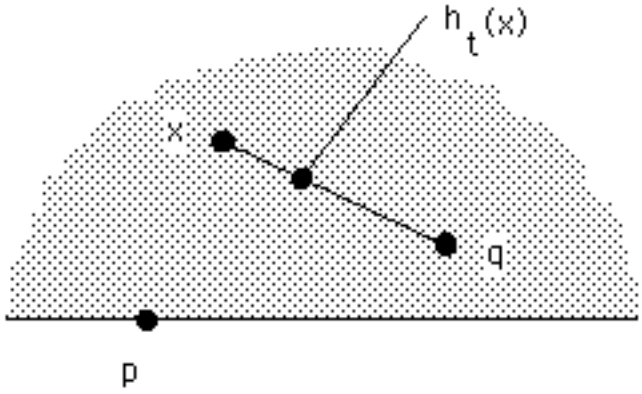
von $\mathbb{R}^n_+$, oder sie liegen beide im Innern

$$\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_0 > 0\}.$$

Mit anderen Worten, ein lokaler Homöomorphismus bildet niemals innere Punkte in Randpunkte oder Randpunkte in innere Punkte ab.

Beweis. Seien $p \in \partial\mathbb{R}^n_+$ ein Randpunkt und $q \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ ein innerer Punkt. Die stetige Familie

$$h_t:(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+\text{-}p) \to (\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+\text{-}p),\ x \mapsto tx+(1-t)q$$



bildet für jedes t den Punkt q in sich ab und kontrahiert $(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+\text{-}p)$ in das Paar (q,q). Mit anderen Worten, (q,q) ist ein starker Deformationsretrakt von $(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+\text{-}p)$. Insbesondere gilt

$$H(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+\text{-}p) \cong H(q,q) = 0.$$

Da q im Innern von $\mathbb{R}^n_+$, gibt es eine kleine offene Vollkugel $U \subseteq \mathbb{R}^n_+$ mit dem Mittelpunkt q. Dann gilt aber

$$H(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+\text{-}q) = H(U, U\text{-}q) = H(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\text{-}q) = \mathbb{Z}.$$

Nach 4.3.7 können p und q keine punktierten homöomorphen Umgebungen besitzen.
QED.

4.3.10 Lokale und reduzierte Homologie

Seien X ein topologischer Raum und p∈X ein abgeschlossener Punkt, welcher eine Umgebung U⊆X mit $\tilde{H}U = 0$ besitzt. Dann gilt für jedes q

$$H_q(X,X-p) \cong \tilde{H}_{q-1}(U-p).$$

Bemerkungen

1. Umgebungen U mit $\tilde{H}U = 0$ heißen azyklisch. Eine topologische n-Mannigfaltigkeit ist ein Hausdorff-Raum in welchem jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu einer offenen Menge des $\mathbb{R}^n$. Auf topologischen Mannigfaltigkeiten besitzt also jeder Punkt auch eine azyklische Umgebung.
2. Falls U kontrahierbar ist auf einen Punkt, so ist U azyklisch.
3. Wenn man anstelle von $\tilde{H}U = 0$ nur fordert, daß die natürliche Abbildung

$$\tilde{H}_q U \to \tilde{H}_q X$$

die Nullabbildung ist, so erhält man wenigstens noch

$$H_q(X,X-p) \cong \mathrm{Ker}(\tilde{H}_{q-1}(U-p) \to \tilde{H}_{q-1}U).$$

Beweis. Betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_q U & \to & H_q(U,U-p) & \xrightarrow{\partial *} & \tilde{H}_{q-1}(U-p) & \to & \tilde{H}_{q-1}U \\ \downarrow 0 & & \downarrow i_* & & & & \\ \tilde{H}_q X & \to & H_q(X,X-p) & & & & \end{array}$$

Die obere Zeile ist gerade ein Ausschnitt aus der reduzierten Homologiesequenz des Paares (U, U-p) und die untere der des Paares (X,X-p). Nach dem Ausschneidungssatz ist auch i_* ein Isomorphismus.

Ist U azyklisch, so ist auch ∂_* ein Isomorphismus und wir erhalten die behauptete Isomorphie.
Unter den Voraussetzungen von Bemerkung 3 ist die erste Abbildung der oberen Zeile die Nullabbildung. Die Aussage von Bemerkung (iii) ergibt sich damit aus der Exaktheit dieser Zeile.
QED.

4.4 Der Grad einer Abbildung

4.4.1 Vorbemerkung

Jeder Endomorphismus φ:ℤ→ℤ der freien zyklischen Gruppe ist durch eine ganze Zahl d∈ℤ gegeben, d.h. es gilt φ(x) = dx für alle x∈ℤ. Wendet man diese Tatsache auf die Homologie von Shpären, so führt das zum Begriff des Grades einer Abbildung, welcher viele Anwendungen besitzt.
Wir benutzen hier diesen Begriff, um den Satz vom Igel (4.4.6) und den Fundamentalsatz der Algebra (4.4.9) zu beweisen.

4.4.2 Der Gradbegriff

Sei $f:S^n \to S^n$ und $g:(B^{n+1},S^n) \to (B^{n+1},S^n)$ stetige Abbildungen. Ihre Grade deg f bzw. deg g sind durch die Bedingung

$$f_*(x) = \deg(f)\cdot x \text{ bzw. } g_*(x) = \deg(g)\cdot x$$

definiert, wobei f_* bzw. g_* die auf der Homologie $\tilde{H}_n(S^n)\cong\mathbb{Z}$ bzw. $H_n(B^{n+1},S^n)\cong\mathbb{Z}$ induzierten Abbildungen seien.

4.4.3 Eigenschaften des Grades

(i) $\deg(Id) = +1$.

(ii) $\deg(f\circ f') = \deg(f)\cdot\deg(f')$.

(iii) $f \simeq f' \Rightarrow \deg(f) = \deg(f')$.

(iv) Ist f eine Homotopieäquivalenz, so gilt $\deg(f) = \P 1$.

(v) Für jede stetige Abbildung $f:(B^{n+1},S^n)\to(B^{n+1},S^n)$ gilt $\deg(f) = \deg(f|_{S^n})$.

Beweis. (i) und (ii) gelten, weil der Übergang zur Homologie ein Funktor ist. (iii) und (iv) ergeben sich aus der Homotopie-Invarianz des Homologiefunktors. Eigenschaft (iv) ergibt aus der Kommutativität des folglenden Diagramms und der Tatsache, daß die vertikalen Abbildungen übereinstimmen und bijektiv sind.

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(B^{n+1};S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_{n+1}(B^{n+1};S^n) \\ \partial_*\downarrow & & \downarrow\partial_* \\ \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{(f|_{S^n})_*} & \tilde{H}_n(S^n) \end{array}$$

QED.

4.4.4 Der Grad einiger linearer Abbildungen

(i) Der Grad einer linearen Abbildung $f:(\Delta_n,\dot{\Delta}_n)\to(\Delta_n,\dot{\Delta}_n)$, welche die Ecken des Standardsimplex Δ_n permutiert, ist gleich dem Vorzeichen der zugehörigen Permutation:

$$\deg(f) = \operatorname{sign}(f|_{\{e,0\ldots,e^n\}}).$$

(ii) Der Grad einer orthogonalen Abbildung[38] $f: S^n \to S^n$ ist gleich ihrer Determinante:

$$\deg(f) = \det(f).$$

(iii) Der Grad der antipotalen Abbildung $f: S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$, ist gleich

$$\deg(f) = (-1)^n.$$

Beweis. Zu (i). Nach 4.4.3(ii) ist der Grad multiplikativ. Da dies auch für das Vorzeichen einer Permutation gilt und jede Permutation Produkt von Nachbartauschen ist, genügt es, die Behauptung für den Fall eines Nachbartauschs zu beweisen. Bezeichne $\nu = (\nu_0,\ldots,\nu_r)$ die lineare Abbildung

$$\nu: \Delta_r \to \Delta_n,\ e^i \mapsto e^{\nu_i}.$$

Wir fassen ν als singuläres Simplex von Δ_n auf. Für die j-te Seite $\nu\circ\varepsilon^j$ von ν gilt:

$$(\nu_0,\ldots,\nu_r)\circ\varepsilon^j = (\nu_0,\ldots,\hat{\nu}_j,\ldots,\nu_r)$$

Wir wollen zeigen, wenn ν ein Nachbartausch der Ecken ist (r=n), so gilt

---

[38] Eine orthogonale (lineare) Abbildung ist durch ihre Werte auf den Einheitsvektoren bereits festgelegt, wir können sie also als eine Abbildung $S^n \to S^n$ auffassen.

$$[(\nu_0,...,\nu_r)] = \operatorname{sign}(\nu)[(0,1,...,n)]$$
$$= - [(0,1,...,n)].$$

Dabei bezeichne [] den Übergang zur Homologieklasse in $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$. Man beachte, die identische Abbildung (0,1,...,n) von Δ_n repräsentiert ein erzeugendes Element dieser Homologiegruppe. Sei ν die Transposition, welche i und i+1 vertauscht,

$$\nu = (0,1,...,i-1,i+1,i,i+2,...,n).$$

und bezeichne μ die lineare Abbildung

$$\mu = (0,1,...,i-1,i+1,i,i+1,...,n):\Delta_{n+1} \to \Delta_n.$$

Dann gilt

$$\partial\mu = (-1)^i(0,1,...,n) + (-1)^{i+2}(0,...,i-1,i+1,i,i+2,...,n) + R,$$

wobei der Rest R aus solchen Termen besteht, in denen eine der Ecken von Δ_n nicht vorkommt. Es gilt also $R \in S(\dot{\Delta}_n)$. Übergang zu den Homologie-Klassen in $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ liefert

$$0 = [(0,1,...,n)] + [(0,...,i-1,i+1,i,i+2,...,n)],$$

also

$$\nu_* [(0,1,...,n)] = [(0,...,i-1,i+1,i,i+2,...,n)] = - [(0,1,...,n)].$$

Damit ist (i) beweisen.
Zu (ii). Jede orthogonale Abbilung ist Zusammensetzung von endlich vielen ebenen Drehungen und eventuel einer Spiegelung an einer Hyperebene. Es reicht also die Behauptung für ebene Drehungen und Spiegelungen zu beweisen.

Ebene Drehungen sind homotop zur identischen Abbildung. Zum Beispiel kann man im Fall

$$f = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

die folgende stetige Familie betrachten

$$f_t = \begin{pmatrix} \cos t\varphi & \sin t\varphi \\ -\sin t\varphi & \cos t\varphi \end{pmatrix}.$$

Es gilt also deg(f) = +1 = det(f).
Sei jetzt f eine Spiegelung an einer Hyperfläche H. Bei geeigneter Wahl der Koordinaten können wir erreichen, H ist die Hyperebene

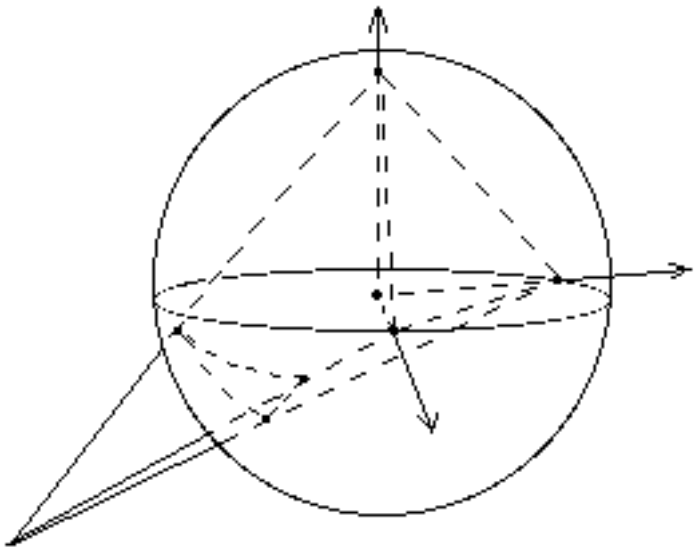
$$H: x_0 - x_1 = 0.$$

Die Abbildung f vertauscht dann gerade die ersten beiden Koordinaten,

$$f(x_0,x_1,x_3,...,x_n) = (x_1,x_0,x_3,...,x_n).$$

Wir betrachten die Abbildung, die von f induziert wird auf dem (n+1)-Simplex

$$s = \text{konvexe Hülle von } \{e^0,e^1,e^3,...,e^n, -\sum_{i=0}^{n} e^i\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$



Sie vertauscht die ersten beiden Ecken und läßt alle übrigen Ecken fest. Nach (i) induziert fl_s auf der Homologiegruppe $H_{n+1}(s,\partial s)$ gerade die Multiplikation mit -1,

$$f_*: H_{n+1}(s,\partial s) \to H_{n+1}(s,\partial s),\ x \mapsto -x.$$

Sei weiter

$$g: \partial s \to S^n,\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|},$$

die Projektion auf die Einheitssphäre und

$$h: s \to B^{n+1},\ tx \mapsto t\cdot\frac{x}{\|x\|}\ (\text{für } x\in\partial s),$$

die radiale Fortsetzung von g auf ganz s. Wie wir in 4.1.5 gesehen haben, ist dies ein Homöomorphismus. Da h alle Punkte nur mit einem reellen Faktor multipliziert, kommutieren h und f, d.h. das folgende Diagramm ist kommutativ.[39]

$$\begin{array}{ccc} (B^{n+1};S^n) & \xrightarrow{f} & (B^{n+1};S^n) \\ \approx\downarrow h & & \approx\downarrow h \\ (s,\partial s) & \xrightarrow{f} & (s,\partial s) \end{array}$$

Durch Übergang zur Homologie sehen wir, f induziert auch auf der Homologie des Paares (B^{n+1}, S^n) die Multiplikation mit -1. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(B^{n+1};S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_{n+1}(B^{n+1};S^n) \\ \partial_*\downarrow\cong & & \cong\downarrow\partial_* \\ \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{(fl_{S^n})_*} & \tilde{H}_n(S^n) \end{array}$$

(dessen vertikale Abbildungen bijektiv sind) lesen wir schließlich ab, f induziert auch auf $\tilde{H}_n(S^n)$ die Multiplikation mit -1, d.h.

$$\deg(f) = -1 = \det(f).$$

Zu (iii). Dies ist ein Spezialfall von (ii).
QED.

---

[39] Es ist gleichgültig ob man erst die beiden Koordinaten vertauscht und dann mit einem Faktor multipliziert, oder ob man dies in umgekehrter Reihenfolge tut.

4.4.5 Stetige Abbildungen der n-Sphäre in sich.

Sei f: $S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung.

(i) Falls f keine Fixpunkte besitzt, so gilt $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.
(ii) Falls f keine antipodalen Punkte besitzt (d.h. keine Punkte x mit f(x)=-x), so gilt deg(f) = +1.

Beweis. Zu (i). Besitzt f keine Fixpunkte, so hat die stetige Familie

$$d_t: S^n \to \mathbb{R}^{n+1},\ x \mapsto (1-t)\cdot f(x) - t\cdot x,\ t\in[0,1],$$

keine Nullstellen.[40] Sie definiert deshalb eine stetige Familie

$$D_t: S^n \to S^n,\ x \mapsto \frac{d_t(x)}{\| d_t(x) \|}.$$

Diese Familie zeigt, daß f homotop zur antipodalen Abbildung -Id: x ↦ -x ist, d.h. es gilt

$$\deg(f) = \deg(-Id) = \det(-Id) = (-1)^{n+1}.$$

Zu (ii). Hat f keine antipodalen Punkte, so hat die Abbildung g(x) := -f(x) keine Fixpunkte. Also gilt nach (i):

$$(-1)^{n+1}\cdot\deg(f) = \deg(g) = (-1)^{n+1},$$

d.h. deg(f) = +1.
QED.

4.4.6 Der Satz vom Igel

Sei f: $S^2 \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Tangentialvektorfeld, d.h. f sei stetig und für jedes $x\in S^n$ sei f(x) ein Tangentialvektor an S^n im Punkt x. Dann hat f mindestens eine Nullstelle.
Beweis. Hat f keine Nullstelle, so ist

$$g: S^2 \to S^2,\ x \mapsto \frac{f(x)}{\| f(x)\|},$$

eine wohldefinierte stetige Abbildung. Nach Konstruktion ist g(x) für jedes x ein zu x orthogonaler Einheitsvektor. Also gilt

$$f(x) \neq \P x.$$

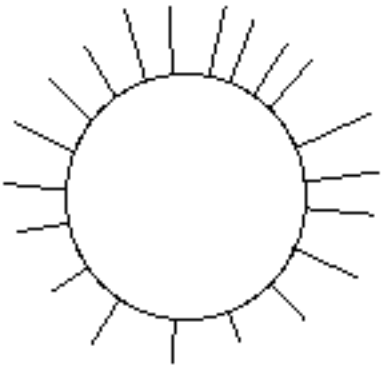
Nach 4.4.5 (i) gilt also $\deg(f) = (-1)^3 = -1$ und nach 4.4.5(ii) ist deg(f) = +1. Dieser Widerspruch zeigt, daß f eine Nullstelle haben muß.
QED.

Bemerkungen

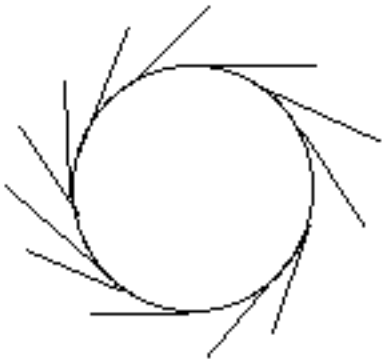
(i) Eine andere Formulierung dieses Satzes lautet, ein Igel läßt sich nicht kämmen.

---

[40] Aus $d_t(x) = 0$ folgt, die Vektoren x und f(x) zeigen in dieselbe Richtung und haben dieselbe Länge 1, d.h. f(x) = x.



Ein ungekämmter Igel (Querschnitt)



Ein gekämmter Igel (alle Haare haben dieselbe Länge und liegen glatt an)

(ii) Die Menge $TS^2 = \{(x,v) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 \mid v \ddot{O} x\}$ der tangentialen Ortsvektoren an S^2 heißt auch Tangentialbündel von S^2. Die Projektion auf den ersten Faktor induziert eine stetige Abbildung

$$\pi: TS^2 \to S^2,\ (x,v) \mapsto x,\ \text{Vektor} \mapsto \text{Fußpunkt},$$

Die Faser über $x \in S^2$ ist gerade der Raum der Tangentialvektoren

$$T_x S^2 := \pi^{-1}(x)$$

an S^2 im Punkt x. Dies ist ein 2-dimensionaler Vektorraum von Vektoren, die im Punkt x angreifen. Ein Tangentialvektorfeld an S^2 ist gerade eine stetige Abbildung $f: S^2 \to TS^2$ mit $\pi \circ f = id$. Man nennt solche Abbildungen auch Schnitte ins Tangentialbündel.

(iii) Das Tangentialbündel $\pi: TS^2 \to S^2$ ist lokal trivial, d.h. zu jedem Punkt $x \in S^2$ gibt es eine offene Umgebung U von x derart, daß die Einschränkung

$$\pi|_{\pi^{-1}(U)} \pi^{-1}(U) \to U$$

bis auf Homöomorphie gerade die Projektion $p: U \times \mathbb{R}^2 \to U$ auf den ersten Faktor ist. Genauer, es gibt einen Homöomorphismus $f: U \times \mathbb{R}^2 \to \pi^{-1}(U)$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \pi^{-1}(U) \\ p \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & = & U \end{array}$$

kommutativ ist und die Einschränkungen von f auf die Fasern (bijektiv und) R-linear sind. Ist zum Beispiel U eine kleine Umgebung des Nordpols und identifiziert man $\mathbb{R}^2$ mit der Äquatorebene des $\mathbb{R}^3$, so ist die folgende Abbildung ein solcher Homöomorphismus.

$$U \times \mathbb{R}^2 \to \pi^{-1}(U),\ (u,v) \mapsto (u,\ v + \lambda(u,v)u) \text{ mit } \lambda(u,v) := -\langle u,v \rangle$$

(Man beachte, die Linearisierung im Nordpol ist die identische Abbildung $(u,v) \mapsto (u, v)$).

(iv) Die lokale Trivialität des Tangentialbündels TS^2 legt die Frage nach der Existenz einer globalen Trivialisierung nahe, d.h. nach der Existenz eines Homöomorphismus wie in (iii) mit $U = S^2$:

$$\begin{array}{ccc} S^2\times\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\ f\ } & TS^2 \\ p\downarrow & & \downarrow\pi \\ S^2 & = & S^2 \end{array}$$

Aus dem Satz vom Igel folgt eine solche Trivialisierung f kann nicht existieren, d.h. das Tangentialbündel von S^2 ist nicht-trivial. Andernfalls würde nämlich jeder Schnitt s von p einen Schnitt $f\circ s$ von π definieren. Speziell für den Schnitt

$$s:S^2\to S^2\times\mathbb{R}^2,\ x \mapsto (x,(1,1))$$

von p wäre $f\circ s$ ein in jedem Punkt von Null verschiedenes Vektorfeld auf S^2 (welches nach dem Satz vom Igel nicht existiert).

(v) Unser nächstes Ziel ist der Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Wir müssen dazu einige Grade bestimmen, die sich am besten mit Hilfe des "Bigrades" berechnen lassen.

4.4.7 Der Bigrad einer Abbildung

Für jede stetige Abbildung $\mu: S^n\times S^n \to S^n$ hat die induzierte Abbildung

$$(1)\qquad (\mathbb{Z}^2 \cong)\ H_nS^n\oplus H_nS^n \cong H_n(S^n\times S^n) \xrightarrow{\ \mu_*\ } H_nS^n\ (\cong\mathbb{Z}).$$

die Gestalt $\mu_*(x_1,x_2) = d_1x_1 + d_2x_2$ mit eindeutig bestimmten ganzen Zahlen d_1 und d_2. Das Paar $(d_1,d_2) = \deg\mu$ heißt Bigrad der Abbildung μ. Seine Eigenschaften sind so ähnlich wie die des Grades. Zum Beispiel gilt das folgende Analogon von 4.4.2(ii).

Bemerkungen.

(i) Bei der obigen Definition des Bigrades haben wir $H_n(S^n\times S^n)$ mit der direkten Summe $H_nS^n\oplus H_nS^n$ identifiziert. Um die Definition des Bigrades eindeutig zu machen müssen wir genau festlegen, welchen Isomorphismus wir meinen. Um den Isomorphimus zu beschreiben, fixieren wir einen Punkt $q\in S^n$ und betrachten die folgenden stetigen Abbildungen.

$$i_1:S^n\to S^n\times S^n,\ x \mapsto (x,q)$$

$$i_2:S^n\to S^n\times S^n,\ x \mapsto (q,x).$$

Weiter sein $p_1, p_2:S^n\times S^n \to S^n$ die Projektionen auf die beiden Faktoren. Dann ist die folgenden Kompositon gerade die identische Abbildung.

$$(2)\qquad \mathrm{Id}:\tilde H_nS^n\oplus\tilde H_nS^n \xrightarrow{(i_{1*},i_{2*})} \tilde H_n(S^n\times S^n) \xrightarrow{(p_{1*},p_{2*})} \tilde H_nS^n\oplus\tilde H_nS^n$$

$$([a],[b]) \mapsto [i_1\circ a + i_2\circ b] \mapsto ([p_1\circ i_1\circ a + p_1\circ i_2\circ b],[p_2\circ i_1\circ a + p_2\circ i_2\circ b]) = ([a],[b]).$$

Man beachte, $p_\alpha \circ i_\beta$ ist die identische Abbildung für $\alpha=\beta$ und eine konstante Abbildung für $\alpha\neq\beta$.[41] Aus (2) lesen wir ab, $\tilde{H}_n S^n \oplus \tilde{H}_n S^n$ ist ein direkter Summand von $\tilde{H}_n(S^n \times S^n)$. Da beide Gruppen isomorph zu $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ sind, ist das nur möglich, wenn die linke Abbildung von (2) (also auch die rechte) ein Isomorphismus ist. [42]

(ii) Wir haben gezeigt (p_{1*}, p_{2*}) und (i_{1*}, i_{2*}) sind zueinander inverse Abbildungen. Wir vereinbaren jetzt, daß diese den Isomorphismus von (1) realisieren sollen. Die definierende Gleichung für den Bigrad bekommt dann genauer die Gestalt.

$$\mu_* \circ (i_{1*}, i_{2*})(x_1, x_2) = d_1 x_1 + d_2 x_2$$

(iii) Die Abbildungen i_1 und i_2 hängen von der Wahl des Basispunktes q ab, nicht jedoch die Abbildung (i_{1*}, i_{2*}): diese ist das Inverse der Abbilung (p_{1*}, p_{2*}), welche nicht von q abhängt.

4.4.8 Eine Eigenschaft des Bigrades

Seien $f: S^n \to S^n \times S^n$ und $\mu: S^n \times S^n \to S^n$ stetige Abbildungen. Die Abbildung f habe die Koordinatenfunktionen $f_1, f_2: S^n \to S^n$, d.h.

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \text{ für alle } x \in S^n,$$

und die Abbildung μ habe den Bigrad (d_1, d_2). Dann gilt

$$\deg(\mu \circ f) = d_1 \cdot \deg(f_1) + d_2 \cdot \deg(f_2).$$

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen von 4.4.6. Für $x \in \tilde{H}_n S^n$ gilt:

$$(p_{1*}, p_{2*}) \circ f_*(x) = (f_{1*}(x), f_{2*}(x)) = (\deg(f_1)x, \deg(f_2)x)$$

also:

$$\begin{aligned} \mu_* \circ f_*(x) &= \mu_* \circ (i_{1*}, i_{2*}) \circ (p_{1*}, p_{2*}) \circ f_*(x) \quad (\text{wegen } Id = (i_{1*}, i_{2*}) \circ (p_{1*}, p_{2*})) \\ &= \mu_* \circ (i_{1*}, i_{2*})(\deg(f_1)x, \deg(f_2)x) \\ &= d_1 \cdot \deg(f_1)x + d_2 \cdot \deg(f_2)x \qquad \text{(Bemerkung (ii) von 4.4.6)} \end{aligned}$$

QED.

4.4.9 Der Grad der Potenzabbildung

Sei $S = S^1 = \{z \in C \mid \|z\| = 1\}$ oder $S = S^3 = \{z \in H \mid \|z\| = 1\}$. Dann hat die Abbildung

$$\rho_k: S \to S,\ z \mapsto z^k,$$

den Grad k.

Beweis. Sei

$$\mu: S \times S \to S,\ (z_1, z_2) \mapsto z_1 \cdot z_2,$$

---

[41] d.h. die letztere Abbildung faktoriersiert sich über $\tilde{H}_n(\{p\}) = 0$.

[42] (i_{1*}, i_{2*}) ist durch eine 2×2-Matrix gegeben, die ein linkes Inverses besitzt. Letzters ist auch ein rechtes Inverses.

induziert durch die Multiplikation im Körper C der komplexen Zahlen bzw. im Schiefkörper H der Quaternionen.

1. Schritt: Berechnung des Bigrades von μ.

Sei (d_1,d_2) der Bigrad von μ, d.h.μ_* ist die Abbildung

$$\mu_*: \tilde{H}_n S^n \oplus \tilde{H}_n S^n \xrightarrow{(i_{1*},i_{2*})} \tilde{H}_n(S^n \times S^n) \xrightarrow{\mu_*} \tilde{H}_n S^n$$

$$([a], [b]) \mapsto i_{1*}[a] + i_{2*}[b] \mapsto \mu_* i_{1*}[a] + \mu_* \circ i_{2*}[b] = d_1[a] + d_2[b]$$

d.h.

$$\mu_* i_{1*}[a] = d_1[a] \text{ und } \mu_* \circ i_{2*}[b] = d_2[b]$$

(man setze erst [b] = 0 und [a] = 0). Nun ist

$$\mu \circ i_1 (x) = \mu(x, q) = x \cdot q \text{ und } \mu \circ i_2 (x) = \mu(q, x) = q \cdot x$$

mit der oben fest aber beliebig gewählten Zahl $q \in S$. Speziel für $q = 1$ (vgl. Bemerkung (iii) von 4.4.6) erhalten wir

$$\mu_*([a], [b]) = [a] + [b],$$

d.h. μ hat den Bigrad[43]

$$\deg \mu = (1,1).$$

Nach 4.4.6 mit

$$f_i: S^n \times S^n \to S^n$$

2. Schritt: Berechnung des Grades von ρ_k.

Es gilt $\rho_k = \mu \circ (\rho_{k-1}, id)$. Wiederum nach 4.4.6 ist also

$$\deg(\rho_k) = \deg(\rho_{k-1}) + \deg(id) = \deg(\rho_{k-1}) + 1.$$

Da der Grad von $\rho_1 = Id$ gleich 1 ist, folgt induktiv

$$\deg(\rho_k) = k$$

für jedes k.
QED.

4.4.10 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nicht-konstante komplexe Polynom $p(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + ... + c_k$ hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Beweis. Angenommen, es gibt ein nicht-konstantes komplexes Polynom p ohne Nullstelle. Wir betrachten die Abbildung

$$p: S^1 \to S^1, z \mapsto \frac{p(z)}{\|p(z)\|}^3 .$$

Diese ist wohldefiniert und stetig. Zum Beweis der Behauptung genügt es die folgenden beiden Aussagen zu beweisen.

---

[43] der μ und damit der Bigrad von μ hängt nicht von speziellen Wahl von q ab: (i_{1*}, i_{2*}) hangt davon nicht ab, denn (i_{1*}, i_{2*}) ist die zu (p_{1*}, p_{2*}) inverse Abbildung, die von der Wahl von q nicht abhängt.

(i) Hat p keine Nullstelle z mit $\|z\| \leq 1$, so gilt $\deg(\overset{3}{p}) = 0$.

(ii) Hat p keine Nullstelle z mit $\|z\| \geq 1$, so gilt $\deg(\overset{3}{p}) = k$.

Denn dann gilt $k = \deg \overset{3}{p} = 0$ im Widerspruch zur Annahme, daß das Polynom nicht konstant sein soll.

Beweis von (i). Wir betrachten die folgende stetige Familie.

$$\overset{3}{p}_t : S^1 \to S^1, z \mapsto \frac{p(tz)}{\|p(tz)\|} .$$

Für t = 1 gilt $\overset{3}{p}_t = \overset{3}{p}$ und für t=0 ist $\overset{3}{p}_t$ eine konstante Abbildung. Also gilt

$$\deg(\overset{3}{p}) = \deg(\overset{3}{p}_0) = 0.$$

Beweis von (ii). Wir betrachten die folgende stetige Familie.

$$\overset{3}{p}_t : S^1 \to S^1, z \mapsto \frac{q(z,t)}{\|q(z,t)\|}$$

mit $q(z,t) := t^k p(\frac{z}{t}) = z^k + t\cdot(c_1 z^{k-1} + tc_2 z^{k-2} + \ldots + t^{k-1} c_k)$. Die explizite Beschreibung von q zeigt, daß die Funktion q(z,t) auch für t=0 stetig ist. Für t=1 gilt $\overset{3}{p}_t = \overset{3}{p}$ und für t=0 ist $\overset{3}{p}_t(z) = z^k$. Also gilt

$$\deg(\overset{3}{p}) = \deg(z \mapsto z^k) = k.$$

QED.

Bemerkung

Der obige Beweis läßt sich auf andere Multiplikationen $\mu: S^n \times S^n \to S^n$ verallgemeinern deren Bigradkomponenten positiv sind.

5 Die Homologie der Polyeder

5.1 Vergleich von simplizialer und singulärer Homologie

5.1.1 Einige Kategorien von (abstrakten) Simplizialkomplexen

Bezeichne

$$\tilde{\Delta}$$

die Kategorie der Simplizialkomplexe, d.h. die Objekte dieser Kategorie seien die abstrakten Simplizialkomplexe, die Morphismen

$$K \to K'$$

für je zwei Objekte K, K' von $\tilde{\Delta}$ seien die Abbildungen

$$f: V(K) \to V(K)$$

der Eckenmenge V(K) von K in die Eckenmenge V(K') von K' mit der Eigenschaft, daß das Bild eines jeden Simplexes von K ein Simplex von K' ist,

$$s \in K \Rightarrow f(s) \in K'.$$

Die Morphismen-Komposition in $\tilde{\Delta}$ sei die gewöhnliche Zusammensetzung von Abbildungen. Weiter bezeichne

$$\tilde{\Delta}^{(2)}$$

die Kategorie der Paare abstrakter Simplizialkomplexen oder auch Kategorie der simplizialen Paare. Die Objekte dieser Kategorie sind die Paare

$$(K, L)$$

bestehend aus einem abstrakten Simplizialkomplex K und einem Teilkomplex L von K. Ein Morphismus

$$(K, L) \to (K', L')$$

ist ein Morphismus $f: K \to K'$ der Kategorie $\tilde{\Delta}$, dessen Einschränkung auf L ein Morphismus $L \to L'$ von $\tilde{\Delta}$ ist. Die Komposition ist die gewöhnliche Komposition von Abbildungen.
Weiter bezeichne

$$\hat{\Delta}$$

die Kategorie der geordneten Simplizialkomplexe. Die Objekte dieser Kategorie sind die abstrakten Simplizialkomplexe K, deren Eckenmengen V(K) mit einer linearen Halbordnung "≤" versehen sind.[44] Die Morphismen sind Morphismen

$$f: K \to K'$$

von $\tilde{\Delta}$, welche die Ordnung der Ecken respektieren,

$$x,y \in V(K),\ x \leq y \mapsto f(x) \leq f(y).$$

Analog bezeichne

$$\hat{\Delta}^{(2)}$$

die Kategorie der geordneten simplizialen Paare. Die Objekte sind die Paare

$$(K, L)$$

bestehend aus zwei Objekten K und L von $\hat{\Delta}$, wobei L ein Teilkomplex von K ist und die Eckenordnung von L mit der von K verträglich ist, d.h. die natürliche Einbettung

$$L \to K$$

ist ein Morphismus von $\hat{\Delta}$. Die Morphismen $(K, L) \to (K', L')$ von $\hat{\Delta}^{(2)}$ sind Morphismen $f: K \to K$ von $\hat{\Delta}$ mit $f(L) \subseteq L'$.

5.1.2 Einige Funktoren

(i) Die geometrische Realisierung eines Simplizialkomplexes definiert Funktoren

$$|-|: \tilde{\Delta} \to \mathrm{Top},\ K \mapsto |K|$$

und

$$|-|: \tilde{\Delta}^{(2)} \to \mathrm{Top},\ (K,L) \mapsto (|K|, |L|).$$

(ii) Der Übergang zum geordneten Kettenkomplex definiert Funktoren

$$S: \tilde{\Delta} \to K(Ab),\ K \mapsto S(K),$$

und

$$S: \tilde{\Delta}^{(2)} \to K(Ab),\ (K, L) \mapsto S(K, L) := S(K)/S(L)$$

und man hat wie im Fall der singulären Homologie die üblichen kurzen exakten Sequenzen und langen Homologie-Sequenzen.

(iii) Der Übergang zum orientierten Kettenkomplex definiert Funktoren

$$C: \tilde{\Delta} \to K(Ab),\ K \mapsto C(K),$$

und

$$C: \tilde{\Delta}^{(2)} \to K(Ab),\ (K, L) \mapsto C(K, L) := C(K)/C(L)$$

---

[44] d.h. die Halbordnung ist reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und je zwei Elemente sind vergleichbar.

und man hat wie im Fall der singulären Homologie die üblichen kurzen exakten Sequenzen und langen Homologie-Sequenzen. Außerdem hat man eine natürliche Transformationen

$$S \to C$$

des Funktors S in den Funktor C (auf $\tilde{\Delta}$ bzw. $\tilde{\Delta}^{(2)}$) welche für jeden Simplizialkomplex K jedes geordnete Simplex $(e_0,...,e_q)$ in das zugehörige orientierte Simplex $[e_0,...,e_q]$ abbildet. Wie wir in den Übungen gesehen haben, induziert diese natürliche Transformation für jedes simpliziale Paar (K,L) einen Isomorphismus

$$H(K.L) := H(S(K,L)) \to H(C(K,L))$$

auf der Homologie.

(iv) Die Aussagen von (iii) gelten analog auch für die Kategorien $\hat{\Delta}$ und $\hat{\Delta}^{(2)}$ anstelle von $\tilde{\Delta}$ und $\tilde{\Delta}^{(2)}$. Außerdem hat man in dieser Situation noch eine natürliche Transformation

$$C \to S,$$

bei welcher jedes orientierte Simplex $[e_0,...,e_q]$ in sich selbst abgebildet wird.

Wie wir in den Übungen gesehen haben, induziert diese natürliche Transformation für jedes simpliziale Paar (K,L) einen Isomorphismus

$$H(C(K,L)) \to H(S(K,L))$$

auf der Homologie (der invers ist zum Isomorphismus von (iii).

(iv) Jedes geordnete Simplex $s = (e_0,...,e_q)$ eines Simplizialkomplexes K läßt sich mit einem singulären Simplex der Realisierung |K| identifizieren, nämlich mit dem singulären Simplex

$$\Delta_q \to |K|, (x_0,...,x_q) \mapsto x_0e_0+...+x_qe_q.$$

Dabei bezeichne $x_0e_0+...+x_qe_q$ das Element $\alpha \in |K|$ mit

$$\alpha(e_i) = x_i \text{ für } i = 0,...,q$$

und $\alpha(e) = 0$ für jede weitere Ecke e von K. Durch diese Identifikation wird der Komplex der geordneten Ketten von K zu einem Teilkomplex des singulären Komplexes der Realisierung,

$$S(K) \subseteq S(|K|).$$

Diese natürliche Einbettung definiert eine natürliche Transformation

$$S(-) \to S(|-|)$$

von Funtoren

$$\tilde{\Delta} \to K(Ab).$$

Für jedes simpliziale Paar (K, L) hat man ein kommutatives Diagramm natürlicher Einbettungen

$$\begin{array}{ccc} S(K) & \to & S(|K|) \\ \uparrow & & \uparrow \\ S(L) & \to & S(|L|) \end{array}$$

und damit nach dem Homomorphiesatz einen Morphismus von Kettenkomplexen

$$S(K,L) \to S(|K|, |L|).$$

Es ist leicht zu sehen, daß der Morphismus injektiv ist.[45] Diese Abbildung definiert einen funktoriellen Morphismus

$$S(-,-) \to S(|-|, |-|)$$

von Funktoren

$$\tilde{\Delta}^{(2)} \to K(Ab).$$

Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, zu zeigen, dieser funktorielle Morphismus induziert für jedes simpliziale Paar (K, L) einen Isomorphismus

$$H(K.L) \to H(|K|, |L|)$$

auf der Homologie.

5.1.3 Kompakte Teilmengen von Polyedern

Seien K ein Simplizialkomplex und

$$F \subseteq |K|$$

eine kompakte Teilmenge. Dann gibt es einen endlichen Teilkomplex $K' \subseteq K$ mit

$$F \subseteq |K'|.$$

Beweis. Sei zunächst $F \subseteq |K|$ eine beliebige Teilmenge.

1. Schritt: Es gibt eine diskrete[46] Teilmenge F' von F, welche mit jedem offenen Simplex von K, welches F schneidet, genau einen Punkt gemeinsam hat.

Sie I die Menge der Simplexe von K mit der Eigenschaft, daß das offene Simplex

$$|s|^o$$

einen Punkt mit F gemeinsam hat. Für jedes $s \in I$ wählen wir einen Punkt

$$p_s \in F \cap |s|^o$$

und setzen

$$F' := \{p_s\}_{s \in I}.$$

Weil |K| die disjunkte Vereinigung seiner offenen Simplexe ist, gilt für jedes $s \in K$:

$$F' \cap |s|^o = \begin{cases} \{p_s\} \text{ falls } s \in I \\ \varnothing \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Jedes abgeschlossene Simplex |s|, $s \in K$, ist Vereinigung von endlich vielen offenen Simplexen, und in jedem dieser offenen Simplexe liegt höchstens ein Punkt von von F'. Also gilt

$$F' \cap |s| \text{ ist endlich für jedes } s \in K.$$

Letzteres gilt auf für jede Teilmenge von F'. Nach Definition der Topologie von |K| bedeutet dies:

F' und jede Teilmenge von F' ist abgeschlossen in |K|.

Für jeden Punkt $p \in F'$ ist also $F'-\{p\}$ abgeschlossen, also

$$U = |K| - (F'-\{p\}) \text{ offen in } |K|.$$

U ist eine offene Umgebung des Punkts p, die mit F' nur den Punkt p gemeinsam hat. Wir haben gezeigt, F' ist diskrete Teilmenge von |K|.

2. Schritt: Ist F kompakt, so gibt es einen endlichen Teilkomplex K' von K mit $F \subseteq |K'|$.

---

[45] Links steht die freie abelschen Gruppe, die von den geordneten Simplexen von K erzeugt wird, welche keine Simplexe von L sind. Rechts steht die freie abelsche Gruppe, die von den singulären Simplexen von |K| erzeugt wird, welche keine singulären Simplexe von |L| sind. Mittels der obigen Identifikation der geordneten Simplexe mit gewissen singulären erhält man damit ineinander enthaltene Mengen von freien Erzeugendensystemen.

[46] Jeder Punkt von F' besitzt eine Umgebung, die keinen weiteren Punkt von F' enthält.

Wir wählen die Menge F' $\subseteq$ F wie im ersten Schritt. Weil F' diskret ist und F kompakt, so muß F' endlich sein.[47] Zu verschiedenen offenen Simplexen von |K|, die F schneiden, gehören verschiedene Punkte von F'. Die Zahl der offenen Simplexe von |K|, die F schneiden, ist also endlich. Diese offenen Simplexe bilden zusammen mit ihren Seiten einen endlichen Teilkomplex

$$K' \subseteq K$$

mit $F \subseteq |K'|$.
QED.

5.1.4 Der Vergleichsatz

Sei (K,L) ein simpliziales Paar. Dann ist für jedes q der natürliche Homomorphismus

$$H(K, L) \rightarrow H(|K|, |L|)$$

ein Isomorphismus.
Beweis. Wir betrachten die langen Homologie-Sequenzen des simplizialen Paares (K,L) und des polyedralen Paares (|K|, |L|). Die natürliche Transformation

$$S(-,-) \rightarrow S(|-|, |-|)$$

induziert dann einen Komplex.-Morphismus zwischen diesen Homologie-Sequenzen, d.h. wir bekommen ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots\rightarrow & H_q(K) & \rightarrow & H_q(L) & \rightarrow & H_q(K, L) & \rightarrow & H_{q-1}(K) & \rightarrow\ldots \\
& \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \downarrow & \\
\ldots\rightarrow & H_q(|K|) & \rightarrow & H_q(|L|) & \rightarrow & H_q(|K|, |L|) & \rightarrow & H_{q-1}(K) & \rightarrow\ldots
\end{array}$$

Wir wollen zeigen, der Homomorphismus γ ist für jedes q bijektiv. Nach dem Fünfer-Lemma reicht es zu zeigen, die Homomorphismen α und β sind für jedes q bijektiv. Wir könnena also annehmen,

$$L = \varnothing$$

ist der leere Komplex, d.h. wir können uns auf den Fall der absoluten Homologie-Gruppen beschränken Zu zeigen ist, für jeden Simplizialkomplex K induziert die natürliche Einbettung

$$S(K) \rightarrow S(|K|)$$

einen Isomorphismus auf der Homologie. Wir beweisen die Aussage zunächst für den Spezialefall, daß K ein endlicher Komplex ist.
Der Beweis im endliche Fall wird durch Induktion nach der Anzahl l der Simplexe von K geführt.
Im Fall $l = 0$ ist die Behauptung trivial: beide Komplexe sind gleich, nämlich in jedem Grad gleich der trivialen Gruppe. Sei jetzt $l > 0$. Wir wählen in K ein Simplex s mit maximaler Dimension. Die Menge aller nicht-leeren Teilmengen von s ist dann ein Teilkomplex, sagen wir

$$L \subseteq K.$$

Dasselbe gilt für

$$K' := K - \{s\}.$$

Im Fall L = K ist K ein Kegel und |K| homöomorph zu einem Standard-Simplex. Die reduzierte Homologie von S(K) und S(|K|) ist Null und

$$S(K) \rightarrow S(|K|)$$

induziert einen Isomorphismus auf der Homologie. Wir können also annehmen, L ist ein echter Teilkomplex,

$$L \subset K.$$

Nach Konstruktion gilt

---

[47] Die Punkte von F' bilden zusammen mit der Menge F-F' eine offene Überdeckung des Raumes F. Da dieser kompakt ist, reichen endliche viele Mengen zum Überdecken aus. Also ist F' endlich.

$$K = L \cup K' \text{ und } |K| = |L| \cup |K'|$$

Wir betrachten die Mayer-Vietoris-Sequenzen von (K, L, K') und (|K|, |L|, |K'|) (vgl. 3.8.3 und 3.9.5). Der funktorielle Morphismus $S(-) \to S(|-|)$ induziert einen Komplex-Morphismus zwischen diesen Mayer-Vietoris-Sequenzen. Wir erhaltn also ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & H_q(L\cap K') & \to & H_q(L)\oplus H_q(K') & \to & H_q(K) & \to & H_{q-1}(L\cap K') & \to \ldots \\ & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \downarrow & \\ \ldots \to & H_q(|L|\cap|K'|) & \to & H_q(|L|)\oplus H_q(|K'|) & \to & H_q(|K|) & \to & H_{q-1}(|L|\cap|K'|) & \to \ldots \end{array}$$

Wir wollen zeigen, γ ist für jedes q ein Isomorphismus. Nach dem Fünfer-Lemma reicht es zu zeigen, α und β sind für jedes q Isomorphismen. Letzteres ist aber nach Induktionsvoraussetzung der Fall, da die Anzahl der Simplexe von

$$L\cap K',\ L \text{ und } K'$$

kleiner ist als die Anzahl l der Simplexe von K. Damit ist der Beweis im Fall endlicher Simplizialkomplexe abgeschlossen.
Sei jetzt K nicht notwendig endlich. Wir haben zu zeigen, die natürliche Einbettung

$$S(K) \to S(|K|)$$

induziert für jedes q einen Isomorphismus

$$H_q(S(K)) \to H_q(|K|).$$

<u>Beweis der Surjektivität</u>. Sei $\zeta \in H_q(|K|)$. Wir wählen einen Repräsentanten

$$z = g_1\sigma_1 + \ldots + g_r\sigma_r\ ,\ g_i \in \mathbb{Z}$$

von ζ. Jedes Simplex σ_i hat als Bild eine kompakte Teilmenge von |K|. Nach 5.1.3 gibt es einen endlichen Teilkomplex

$$K' \subseteq K$$

derart, daß jedes der σ_i bereits ein Simplex von |K'| ist. Dann repräsentiert z ein Element

$$[z] \in H_q(|K'|).$$

Da die Behauptung für endliche Simplizialkomplexe richtig ist, gibt es einen geordneten Zyklus

$$z' \in S(K') \subseteq S(K)$$

mit

$$[z'] = [z] \text{ in } H_q(|K'|).$$

Die Bilder dieser Homologie-Klassen bei der natürlichen Abbildung[48]

$$H_q(|K'|) \to H_q(|K|)$$

sind dann aber auch gleich:

$$[z'] = [z] = \zeta \text{ in } H_q(|K|).$$

Wir haben gezeigt: jede Homologie-Klasse von $H_q(|K|)$ wird durch eine geordnete Kette von K repräsentiert, d.h. die Abbildung ist surjektiv.
<u>Beweis der Injektivität</u>: Sei $\zeta' \in \mathrm{Ker}(H_q(S(K)) \to H_q(|K|))$ und

$$z' \in S(K)$$

[48] die durch die natürliche Inklusion |K'| → |K| induziert wird.

ein Repräsentant von ζ'. Dann gibt es eine singuläre Kette

$$c = g_1\sigma_1+...+g_r\sigma_r\ ,\ g_i \in \mathbb{Z},$$

von |K| mit

$$\partial c = z'.$$

Wie oben sehen wir, daß es einen endlichen Teilkomplex

$$K' \subseteq K$$

gibt mit der Eigenschaft, daß c und z' bereits Ketten von |K'| sind. Das bedeutet, die Homologie-Klasse

$$[z'] \in H_q(K')$$

liegt im Kern der Abbildung $H_q(K') \rightarrow H_q(|K'|)$. Da letztere ein Isomorphismus ist, gilt

$$[z'] = 0 \text{ in } H_q(K'),$$

d.h. es gibt ein geordnete Kette c' von K' mit $z' = \partial c'$. Da c' auch geordnete Kette von K ist, folgt

$$\zeta' = [z'] = [\partial c'] = 0 \text{ in } H_q(K).$$

QED.

5.1.5 Vergleichssatz für geordnete simpliziale Paare

Sei (K,L) ein geordnetes simpliziales Paar.[49] Dann induziert die natürliche Transformation

$$C(-,-) \rightarrow S(|-|, |-|)$$

von Funktoren $\hat{\Delta}^{(2)} \rightarrow K(Ab)$ für jedes q einen Isomorphismus

$$H(C(K, L)) \rightarrow H(|K|, |L|).$$

Beweis. Man kann dieselben Argumente wie im Beweis von 5.1.4 benutzen. Stattdessen kann man aber auch die in den Übungen bewiesene Tatsache verwenden, daß die natürliche Transformation

$$C(-\ ,\ -\ ) \rightarrow S(-\ ,\ -\ )$$

einen Isomorphismus

$$H(C(K, L)) \rightarrow\ H(K, L)$$

induziert. Zusammen mit 5.1.4 ergibt sich daraus die Behauptung.
QED.

Bemerkung

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Hinweis auf eine einfache Konsequenz von 5.1.3.

5.1.6 Endlichkeit und Kompaktheit von Polyedern

Ein Polyeder ist genau dann kompakt, wenn es endlich ist.
Beweis. Sei K ein Simplizialkomplex. Falls |K| kompakt ist, so liegt |K| nach 5.1.3 bereits in der Realisierung eines endlichen Teilkomplexes K' von K,

$$|K| \subseteq |K'| \subseteq |K|.$$

Es folgt |K'| = |K|, also K' = K, d.h. K ist endlich.
Ist umgekehrt K endlich, so ist |K| als Vereinigung der endlich vielen geometrischen Simplexe

$$|s| \text{ mit } s \in K,$$

welche kompakt sind, ebenfalls kompakt.
QED.

---

[49] d.h. ein Objekt der Kategorie $\hat{\Delta}^{(2)}$ von 5.1.1

5.1.7 Aufgaben

1. Zeigen Sie, die Eulerzahl zweier endlicher Polyeder mit homöomorphen Realisierungen sind gleich.

5.2 Simpliziale Mannigfaltigkeiten

5.2.1 Vorbemerkungen

Mannigfaltigkeiten (der Dimension d), genauer, topologische d-Mannigfaltigkeiten sind Hausdorff-Räume M, die eine offene Überdeckung

$$M = \cup_{i \in I} U_i$$

durch Mengen U_i besitzen, die homöomorph sind zu offenen Mengen des $\mathbb{R}^d$. Zum Beispiel sind die Kugeloberfläche und die Oberfläche des Torus 2-Mannigfaltigkeiten.

Wir führen im folgenden Simplizialekomplexe ein, deren Realisierungen Mannigfaltigkeiten sind. Das Ziel in diesem Abschnitt ist es, die d-te Homologie dieser Polyeder zu berechnen (im kompaktn Fall).

5.2.2 Simpliziale Mannigfaltigkeiten

Ein d-dimensionaler Simplizialkomplex K heißt simpliziale Mannigfaltigkeit, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

1. Jede Seite von K ist Seite eines d-Simplex.

2. Jedes (d-1)-Simplex von K ist Seite von genau zwei d-Simplexen.

3. Im Fall d > 1 ist für jede Ecke e von K der Rand des Simplex-Sterns $(st_e K)$ eine zusammenhängende(!) simpliziale Mannigfaltigkeit (der Dimension d-1).[50]

Beim Begriff der berandeten simplizialen d-Mannigfaltigkeit oder auch simplizialen d-Mannigfaltigkeit mit Rand fordert man anstelle von 2. nur

2'. Jedes (d-1)-Simplex von K ist Seite von höchstens zwei d-Simplexen.

Die (d-1)-Simplexe, welche Seite von nur einem d-Simplex sind, und deren Teilmengen heißen Randsimplexe. Man fordert zusätzlich:

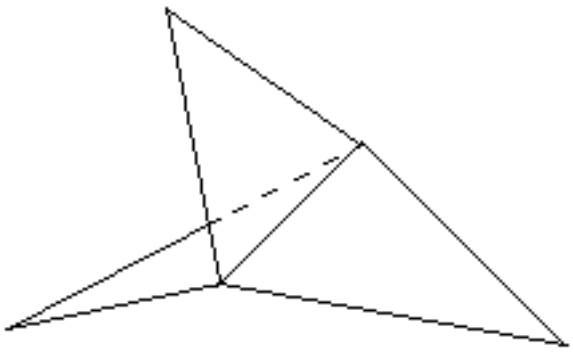
4' Im Fall d > 1 bilden die Randsimplexe eine (d-1)-Mannigfaltigkeit.

Im folgenden wollen wir, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, annehmen, daß alle Mannigfaltigkeiten zusammenhängend sind.

Eine 1-dimensionale simpliziale Mannigfaltigkeit heißt auch simpliziale Kurve. Eine 2-dimensionale simpliziale Mannigfaltigkeit heißt auch simpliziale Fläche.

Bemerkungen

(i) Ein Simplizialkomplex der Dimension 2, der einen Komplex der Gestalt



als Teilkomplex enthält, ist keine Mannigfaltigkeit.

(iI) Die "richtige" Definition der simplizialen Mannigfaltigkeit K müßte eigentlich fordern, daß |K| eine Mannigfaltigkeit ist. Die oben angegebenen Bedingungen

[50] Hier müssen wir den Zusammenhang fordern, auch wenn wir zulassen, daß Mannigfaltigkeiten nicht zusammenhängend sind.Die Realisierung sollte eigentlich sogar eine (d-1)-Sphäre sein.

sind jedenfalls notwendige Bedingungen. Wir lassen hier offen, ob sie auch hinreichend sind. Im Flächenfalls ist dies leicht einzusehen (und es wird sich aus unseren weiteren Betrachtungen ergebenen).

5.2.3 Lemma

Seien K eine (zusammenhängende) kompakte simpliziale d-Mannigfaltigkeit,

$$J$$

die Menge der d-Simplexe von K und

$$J = J' \cup J''$$

eine disjunkte Zerlegung von J in nicht-leere Teilmengen. Dann gibt es zwei d-Simplexe

$$s' \in J' \text{ und } s'' \in J''$$

die ein (d-1)-Simplex gemeinsam haben,

$$\dim s' \cap s'' = d-1.$$

Beweis. Weil K ein Mannigfaltigkeit ist, gilt

$$|K| = F' \cup F'' \text{ mit}$$

$$F' := \cup_{s \in J'} |s|$$

$$F'' := \cup_{s \in J''} |s|.$$

Die Mengen F' und F'' sind kompakte, also abgeschlossene Teilmengen. Weil K zusammenhängend ist, kann die Vereinigung nicht disjunkt sein,

(1) $$F' \cap F'' \neq \emptyset.$$

Wir führen den weiteren Beweis durch Induktion nach d.

Der Fall d = 1 ist einfach: F' und F'' sind zwei Kantenzüge ohne gemeinsame Kante. Ihr Durchnitt muß daher aus Ecken bestehen. Jeder Punkt von F'∩F'' ist daher gemeinsame Ecke einer Kante von F' und einer Kante von F''. Sei jetzt

d > 1. Da F' und F'' Vereinigungen von Simplexen |s| mit s∈K sind[51], gibt es wegen (1) sogar eine Ecke e∈K mit

$$e \in F' \cap F''.$$

Nach Definition 5.2.2 ist der Rand des Simplexsterns

$$\dot{(st_e K)}$$

eine (d-1)-Mannigfaltigkeit. Insbesondere ist dessen Realisierung Vereinigung von (d-1)-Simplexen von K,

$$|\dot{(st_e K)}| = \cup_{s \in I} |s| \text{ mit}$$

$$I = \{s \in K \mid e \notin s,\ s \cup \{e\} \in K,\ \dim s = d-1\}$$

Wir zerlegen die Menge I in zwei Teilmengen,

$$I = I' \cup I''$$

mit

$$I' := \{s \in I : s \cup \{e\} \in J'\} = \{s \in I : |s \cup \{e\}| \subseteq F'\}$$

$$I'' := \{s \in I : s \cup \{e\} \in J''\} = \{s \in I : |s \cup \{e\}| \subseteq F''\}.$$

Nach Wahl von e gibt es d-Simplexe s,s'∈$st_e K$ mite

$$e \in |s| \subseteq F' \text{ und } e \in |s'| \subseteq F''.$$

Entfernt man aus diesen Simplexen die Ecke e, so erhält man (d-1)-Simplexe aus I' bzw. I''.Beide Mengen sind somit nicht leer,

$$I' \neq \emptyset,\ I'' \neq \emptyset.$$

---

[51] d.h. F'∩F'' ist Vereinigung von Durchschnitten der Gestalt |s'|∩|s''| = |s'∩s''|.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es (d-1)-Simplexe

$$\tilde{s}' \in I' \text{ und } \tilde{s}'' \in I'' \text{ mit } \dim \tilde{s}' \cap \tilde{s}'' = d-2.$$

Wir setzen

$$s' := \tilde{s}' \cup \{e\}$$

$$s'' := \tilde{s}'' \cup \{e\}$$

Dann sind s' und s'' d-Simplexe von K mit

$$\dim s' \cap s'' = \dim \tilde{s}' \cap \tilde{s}'' + 1 = d-1$$

und

$|s'| \subseteq F'$ und $|s''| \subseteq F''$,

d.h.

$s' \in J'$ und $s'' \in J''$.

Mit anderen Worten, s' und s'' sind Simplexe der gesuchten Art.
QED.

5.2.4 Die d-te Homologie kompakter d-Mannigfaltigkeiten

Sei K eine (zusammenhängende) kompakte simpliziale Mannigfaltigkeit der Dimension d. Dann gilt

$$H_d(|K|) \cong \mathbb{Z} \text{ oder } H_d(|K|) = 0.$$

Im ersten Fall heißt K <u>orientierbar</u> im zweiten Fall <u>nicht orientierbar</u>.
Beweis. Nach 5.1.6 ist K ein endliches Polyeder. Seien

$$e_1, \dots, e_m$$

die Ecken von K. Durch diese Bezeichnung ist auf der Eckenmengen von K eine lineare Halbordnung definiert. Für jedes Simplex

$$s = \{e_{i_0}, \dots, e_{i_q}\} \in K \text{ mit } i_0 < i_1 < \dots < i_q$$

bezeichne

$$[s] = [e_{i_0}, \dots, e_{i_q}] = (e_{i_0}, \dots, e_{i_q})$$

das zugehörige orientierte Simplex.
Weiter führen wir auf der Menge der d-Simplexe eine lineare Halbordnung "$\leq$" ein.[52]

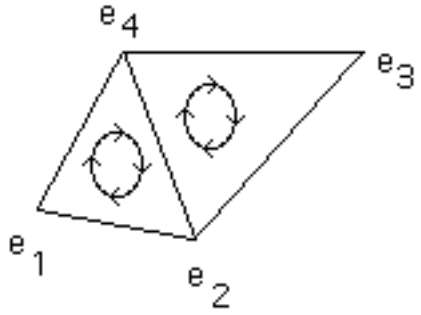
<u>1. Schritt</u>: Konstruktion einer Folge von d-Simplexen $s_1,\dots,s_l$ und einer Folge $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_l$ von "Vorzeichen", d.h. Elementen aus {+1,-1}.

Sei

s_1 das erste d-Simplex von K und $\varepsilon_1 = 1$.

Weiter sei s_2 das erste von s_1 verschiedene d-Simplex von K, welches mit s_1 eine (d-1)-Seite s gemeinsam hat. Die Zahl $\varepsilon_2 \in \{+1,-1\}$ wählen wir so, daß in den Rändern

[52] d.h. wir denken uns diese Simplexe in irgendeiner Weise durchnummeriert.



$\varepsilon_1\partial[s_1]$ und $\varepsilon_2\partial[s_2]$

das Simplex [s] mit entgegengesetztem Vorzeichen vorkommt, d.h. [s] kommt in

$$\varepsilon_1\partial[s_1] + \varepsilon_2\partial[s_2]$$

nur mit dem Koeffizienten Null vor. Wir werden in dieser Situation sagen, $\varepsilon_1[s]_1$ und $\varepsilon_2[s_2]$ sind kohärent orientiert.

Seien jetzt $s_1,...,s_{i-1}$ bereits konstruiert. Dann sei

$$s_i$$

das erste von $s_1,...,s_{i-1}$ verschiedene d-Simplex von K, welches mit einen der $s_1,...,s_{i-1}$ eine (d-1)-Seite gemeinsam hat. Sei

$$j := j(i) \in \{1,...,i-1\}$$

die kleinste natürliche Zahl derart, daß s_j eine (d-1)-Seite mit s_i gemeinsam hat,

(1) $$\dim s = d-1,\ s := s_i \cap s_{j(i)},\ j(i) < i.$$

Die Zahl $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$ wählen wir derart, daß $\varepsilon_i[s_i]$ und $\varepsilon_{j(i)}[s_{j(i)}]$ kohärent orientiert sind, d.h. daß [s] in

$$\varepsilon_i\partial[s_i] + \varepsilon_{j(i)}\partial[s_{j(i)}]$$

nur mit dem Koeffizienten Null vorkommt.

Da die Zahl der d-Simplexe von K endlich ist, bricht dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten ab und wir erhalten die endlichen Folgen

$$s_1,...,s_l \text{ und } \varepsilon_1,...,\varepsilon_l\ .$$

2. Schritt: $\{s_1,...,s_l\}$ ist die Menge aller d-Simplex von K.

Andernfalls gibt es mindestens ein d-Simplex $s \in K$, welches nicht in dieser Menge liegt. Sei

$$I \neq \varnothing$$

die Menge aller dieser d-Simplexe. Nach Lemma 5.2.3 gibt es ein s_i und ein $s \in I$ mit der Eigenschaft, daß die beiden d-Simplexe eine gemeinsame (d-1)-Seite haben,

$$\dim\ s_i \cap s = d-1.$$

Die Menge der Simplexe von I, die mit einem s_i eine (d-1)-Seite haben, ist somit nicht leer. Das erste Simplex dieser Art ist aber nach dem 1. Schritt eines der s_i im Widerspruch zur Wahl von I. Also gilt die Behauptung.

3. Schritt: Jeder d-Zyklus von S(K) ist ein ganzzahliges Vielfaches von $c := \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i[s_i]$

Sei z ein d-Zyklus von K. Weil alle ε_i gleich ¶1 sind, können wir z in der folgenden Gestalt schreiben.

$$z = \sum_{i=1}^{r} g_i \varepsilon_i [s_i] \quad , g_i \in \mathbb{Z}$$

Nach Konstruktion der Folge der s_i ist

$$s := s_i \cap s_j \text{ mit } j := j(i) < i$$

ein (d-1)-Simplex von K. Die Simplexe s_i und s_j sind die einzigen d-Simplexe mit der Seite s. In der Summe auf der rechten Seite von

$$0 = \partial z = \sum_{i=1}^{r} g_i \varepsilon_i \partial [s_i] \tag{2}$$

kommt der Summand [s] also nur zweimal vor, nämlich in $g_i \varepsilon_i \partial[s_i]$ und in $g_j \varepsilon_j \partial[s_j]$. Nach Wahl der ε_i kommt [s] in $\varepsilon_i \partial[s_i]$ und $\varepsilon_j \partial[s_j]$ mit entgegengesetzen Vorzeichen vor. In der Summe von (2) heben sich die zu s gehörigen Summanden genau dann weg, wenn gilt

$$g_i = g_j.$$

Wir haben gezeigt, für jedes $i > 1$ ist g_i gleich einem früheren g_j. Die g_i sind also alle gleich, d.h. es ist

$$z = g_1 \cdot c.$$

4. Schritt. Berechnung von $H_d(|K|)$.

Es gilt

$$H_d(|K|) = H_d(C(K)).$$

Da K von der Dimension d ist, gilt $C_q(K) = 0$ für $q > d$. Es folgt

$$H_d(|K|) = Z_d(C(K)).$$

Jeder d-Zyklus ist nach dem 3. Schritt von der Gestalt g·c.

1. Fall: c ist ein Zyklus.

Dann sind auch alle ganzzahligen Vielfachen von c Zyklen und es gilt

$$H_d(|K|) = \mathbb{Z} \cdot c \cong \mathbb{Z}.$$

2. Fall: c ist kein Zyklus.

Dann ist auch g·c kein Zyklus, es sei denn g ist gleich Null. Damit ist

$$H_d(|K|) = 0.$$

QED.

Bemerkungen

(i) Die im Beweis konstruierte Kette c heißt, wenn sie ein Zyklus ist, fundamentaler Zyklus.

(ii) Sind alle Koeffizienten aus F_2 anstelle von $\mathbb{Z}$, so ist c stets ein Zyklus. Deshalb gilt für jede simpliziale d-Mannigfaltigkeit K

$$H_d(|K|, F_2) = F_2 \cdot [c] \cong F_2$$

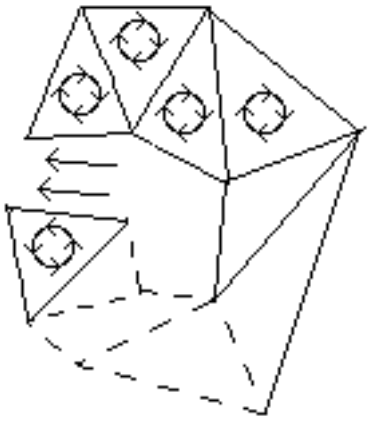
(auf Grund des obigen Beweises).

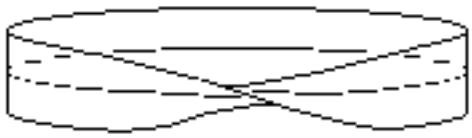
(iii) Dieselben Betrachtungen wie oben zeigen, für jede berandete d-Mannigfaltig K mit nicht-leerem Rand und jede abelsche Gruppe gilt

$$H_d(|K|, A) = 0.$$

Denn in dieser Situation ist c nie ein Zyklus: ∂c ist eine alternierende Summe der Randsimplexe der Dimension d-1.

(iv) Im Fall d = 2 übersetzt sich die Bedingung, daß c ein Zyklus ist in die Ausage, K enthält keine berandete 2-Teilmannigfaltigkeit $L \subseteq K$, deren Realisierung homöomorph zum Möbius-Band ist:





Mit anderen Worten, eine Fläche ist genau dann orientierbar, wenn sie kein Möbius-Band enthält. Man beachte, bewegt man ein positiv orientiertes Koordinatensystem ("Rechtssystem") entlang der Mittellinie des Möbius-Bandes, ist es nach einer Umrundung in ein negativ orientiertes (Linkssystem") übergegangen.

5.2.5 Aufgaben

1. Seien K ein Simplizialkomplex und p eine Ecke von K. Man sagt, K hat die Dimension n in p und schreibt

$$\dim_p K = n,$$

wenn es ein n-Simplex in K mit der Ecke p aber kein (n+1)-Simplex mit dieser Ecke gibt.

(a). Zeigen Sie, der Simplexstern

$$\mathrm{st}_p K := \{\sigma \in K \mid \sigma \subseteq s \text{ für ein } s \text{ mit } p \in s \in K\}$$

ist ein Teilkomplex der Dimension $\dim_p K$.

(b) Der Rand des Simplexsterns

$$(\mathrm{st}_p K)^{\cdot} := \{\sigma \in \mathrm{st}_p K \mid p \notin \sigma\}$$

ist ein Komplex der Dimension $\dim_p K - 1$.

2. Klassifikation der Kantenzüge. Seien K ein Simplizialkomplex und n eine natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften. a) K besitzt ein n-Simplex. b) K besitzt kein (n+1)-Simplex. Dann heißt n Dimension von K und man schreibt

$$\dim K = n.$$

Ein Kantenzug von K ist ein 1-dimensionaler Komplex L mit folgenden Eigenschaften. a) Jede Ecke von L ist Seite von höchstens zwei Kanten (1-Simplexen) von L. b) L ist nicht disjunkte Vereinigung von zwei Teilkomplexen. Ein Kantenzug heißt geschlossen, wenn jede Ecke Seite von genau zwei Kanten ist. Ein Simplizialkomplex heißt endlich, wenn die Zahl seiner Ecken endlich ist.

(a) Zeigen Sie, für jeden geschlossenen endlichen Kantenzug L ist die Realisierung |L| homöomorph zur Kreislinie S^1.

(b) Zeigen Sie, für jeden nicht geschlossenen endlichen Kantenzug L ist die Realisierung |L| homöomorph zum Einheitsintervall [0,1]. **Hinweis**. Zeigen Sie,

es gibt paarweise verschiedenen Kanten $k_1,...,k_r$ und paarweise verschiedene Ecken $e_1,...,e_{r-1}(,e_r)$ mit

a) $L = \{ k_1,...,k_r, e_1,...,e_{r-1}(,e_r)\}$

b) $$k_i \cap k_j = \begin{cases} \{e_j\} & \text{falls } j=i+1 \\ \{e_1\} & \text{falls } i=1 \text{ und } j=r \text{ im geschlossenen Fall} \\ \varnothing & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Verallgemeinern Sie die Aussagen von (i) und (ii) auf nicht notwendig endliche Kantenzüge. Hinweis. Lösen Sie zuerst Aufgabe 3.

(d) Zeigen Sie, jeder 1-dimensionale Komplex K mit $|K| = S^1$ ist ein geschlossener Kantenzug. **Hinweis**. Zeigen Sie, für jede Ecke $p \in K$ besteht $|st_p K|-\{p\}$ aus zwei Komponenten.

3. Ein Simplizialkomplex K heißt zusammenhängend,bzw. linear zusammenhängend, wenn dessen Realisierung |K| die entsprechende Eigenschaft hat.

(a) Zeigen Sie, K ist genau dann linear zusammenhängend, wenn sich je zwei seiner Ecken durch einen Kantenzug verbinden lassen. **Hinweis**. Zerlegen Sie jeden Weg in Teilstücke, die ganz in einem Simplex liegen und ändern Sie jedes Teilstück durch Hinzufügen von Strecken so ab, daß seine Endpunkte Ecken sind.

(b) Zeigen Sie, zusammenhängende Simplizialkomplexe sind linear zusammenhängend.

4. Zeigen Sie, die Realisierung des Randes eines Simplex-Sterns einer simplizialen Fläche ist homöomorph zu einer Kreislinie.

5.3 Kompakte simpliziale Flächen

5.3.1 Einfach zusammenhängende simpliziale Flächen

Eine simpliziale (zusammenhängende) Fläche F heißt einfach zusammenhängend, wenn für jeden (zusammenhängenden) geschlossenen Kantenzug L (ohne Selbstschnitte)[53], die Differenz |F|-|L| nicht mehr zusammenhängend ist.

5.3.2 Struktur der einfach zuzammenhängenden simplizialen Flächen

Sei K eine einfach zusammenhängende kompakte simpliziale Fläche. Dann dann ist die Realisierung von K homöomorph zur Kugeloberfläche,

$$|K| \cong S^2.$$

Beweis. 1. Schritt: Satz von Jordan: Für jeden geschlossenen zusammenhängenden Kantenzug L von K ohne Selbstschnitte[54] ist die Anzahl der Komponenten von |K| - |L| gleich 2:

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Nach Definition von “einfach zusammenhängend” ist die Anzahl der Komponenten mindestens 2. Jede Komponente ist Vereinigung von offenen Simplexen[55]. Da die Zahl der Simplexe endlich ist, ist auch die Zahl der Komponenten endlich. Seien

---

[53] d.h. jede Ecke von L ist Ecke von genau zwei Seiten von L.

[54] d.h. jede Ecke von L ist Ecke von genau zwei Seitten von L.

[55] Hat ein offenes Simplex einen Punkt gemeinsam mit einer Komponente, so liegt das ganze offene Simplex in der Komponente.

$$C_1 , ... , C_t \ (t \geq 2)$$

die Komponenten von |K| - |L|.
Eigenschaften der C_i :

1. Die C_i sind disjunkte Vereinigungen offener Dreiecke von K.
2. Die Abschließungen $\overline{C}_i$ sind Vereinigungen abgeschlossener Dreiecke von K.
3. Die C_i sind abgeschlossene Teilmengen von |K| - |L|.[56]
4. Die C_i sind offene Teilmenge von |K| - |L| und damit von |K|.[57]

Zum Beweis der Behauptung des ersten Schrittes reicht es zu zeigen, der Kantenzug |L| ist in der Abschließung jeder Komponente vollständig enthalten,

(1) $$|L| \subseteq \overline{C}_i \text{ für alle } i = 1, ... , t.$$

Ist nämlich l irgendeine Kante von L und sind Δ' und Δ" die beiden Dreiecke mit der Seite l, so liegt jeder innere Punkt von |l| ganz im Innern von

(2) $$|\Delta'| \cup |\Delta"|.$$

Wegen (1) enthält dann jedes $\overline{C}_i$ einen inneren Punkt von (2), d.h. ein Dreick von $\overline{C}_i$ enthält einen Inneren Punkt von (2). Da Δ' und Δ" die beiden einzigen Dreicke sind, die an l grenzen, muß eines dieser Dreicke ein Dreick von C_i sein,

$$|\Delta'|^0 \subseteq C_i \text{ oder } |\Delta"|^0 \subseteq C_i.$$

Da die C_i paarweise disjunkt sind, ist ihre Anzahl damit höchstens gleich 2.

Beweisen wir also (1). Da |L| und $\overline{C}_i$ endlich Vereinigungen abgeschlossener Simplexe von K sind, gilt dasselbe auch für den Durchschnitt, d.h.

(3) $\overline{C}_i \cap |L|$ ist disjunkte Vereinigung von endlich vielen Kantenzügen und Ecken.

Dabei ist nicht ausgeschlossen, daß die Zahl der Kantenzüge bzw. die der Ecken gleich Null ist. Zeigen wir, die Anzahl der Kantenzüge in (3) ist größer als Null. Dazu reicht es zu zeigen, mindestens eine Kante von K liegt in (3).

Seien

$$J$$

die Menge der Dreicke von K,

$$J' := \{s \in J \mid |s| \subseteq \overline{C}_i \}$$

die Menge der Dreiecke, die in $\overline{C}_i$ liegen und J" := J - J' die Menge der übrigen Dreiecke. Dann ist

$$J = J' \cup J"$$

eine Zerlegung von J in zwei disjunkge nicht-leere Teilmengen.[58] Nach 5.2.3 gibt es Dreiecke

$$\Delta' \in J \text{ und } \Delta" \in J" \text{ mit dim } \Delta' \cap \Delta" = 1,$$

---

[56] Als Zusammenhangskomponenten dieses Raumes, vgl Übungsaufgabe 3, Serie 8.

[57] Wegen 3. und weil |K| - |L| disjunkte Vereinigung der C_i ist.

[58] J" ist nicht leer, weil nicht alle Dreicke in $\overline{C}_i$ liegen können, dann wäre $|K| = \overline{C}_i$ und die Anzahl der Komponenten gleich 1.

d.h. die beiden Dreiecke haben eine Seite l gemeinsam. Nach Konstruktion liegt diese Seite ganz in den Abschließungen von zwei verschiedenen Komponenten, wobei eine dieser Komponenten gleich C_i ist,

$$|l| \subseteq \mathcal{C}_i .$$

Wir wissen damit,

(4) Mindestens eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{C}_i \cap |L|$ ist ein Kantenzug.

Angenommen, (1) ist falsch. Dann sind die Kantenzüge von (4) ein echte Teilkantenzüge des geschlossenen Kantenzugs |L|. Sie Kantenzug können also nicht geschlossen sein. Sei

$$l_1 \subseteq \mathcal{C}_i \cap |L|$$

eine Kante, mit welcher einer der Kantenzüge, sagen wir L', endet und sei

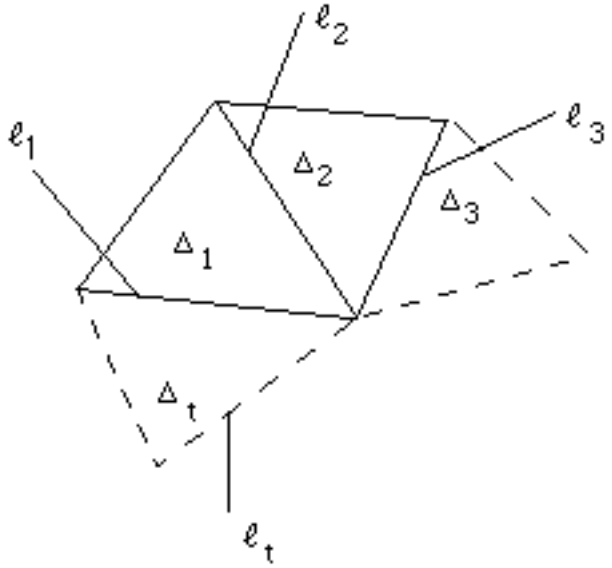
$$e \in l_1$$

die Ecke mit der er endet. Die Kante l_1 ist Seite von genau zwei Dreiecken von K, sagen wir

$$l_1 \subset \Delta' \text{ und } l_1 \subset \Delta''$$

Da l_1 ganz in $\mathcal{C}_i$ liegt, muß (wie wir sehen werden genau) eines der Dreiecke in $\mathcal{C}_i$ liegen, sagen wir

$$e \in l_1 \subset \Delta_1 = \Delta' \subseteq \mathcal{C}_i \text{ (also } \Delta'' \not\subseteq \mathcal{C}_i \text{ wie wir sehen werden).}$$



Die von l_1 verschiedene Seite von Δ_1 mit der Ecke e ist Seite von genau einem weiteren Dreieck Δ_2 von K,

$$e \in \Delta_1 \cap \Delta_2 =: l_2$$

Die von l_2 verschiedene Seite von Δ_2 mit der Ecke e ist Seite von genau einem weiteren Dreieck Δ_3 von K,

$$e \in \Delta_2 \cap \Delta_3 =: l_3$$

Indem wir so fortfahren erhalten wir eine Folge von Dreiecken und Kanten

$$\Delta_j \text{ bzw, } l_j$$

mit

$$e \in \Delta_j \cap \Delta_{j+1} =: l_{j+1}.$$

Da die Zahl der von e ausgehenden Kanten endlich ist, ist diese Konstruktion periodisch mit einer Periode, sagen wir t, d.h. t ist die kleinste natürliche Zahl mit

$$\Delta_{t+1} = \Delta_1 \,, l_{t+1} = \Delta_t \cap \Delta_{t+1} = \Delta_t \cap \Delta_1 = l_1.$$

Nach Konstruktion ist $\Delta_2 \neq \Delta_1$, also $t \geq 2$. Es kann aber auch Δ_3 nicht gleich Δ_1 sein, denn dann hätten Δ_1 und Δ_2 zwei gemeinsame Seiten also dieselben Ecken, wären also gleich. Also gilt

$$t \geq 3.$$

Nach Konstruktion ist Δ_t das von Δ_1 verschiedene Dreieck mit der Seite l_1. Mindestens eins der Dreiecke Δ_j liegt nicht in ϵ_i ,

$$\Delta_j = \Delta'' \not\subseteq \epsilon_i \text{ für ein } j.$$

Denn andernfalls wäre auch die von l_1 verschiedene Kante von |L| mit der Ecke e ganz in ϵ_i , im Widerspruch zur Wahl von e.

Sei Δ_{s+1} das erste Dreieck, welches nicht mehr in ϵ_i liegt

$$\Delta_1,\ldots,\Delta_s \subseteq \epsilon_i \,, \Delta_{s+1} \not\subseteq \epsilon_i \,, 1 \leq s < t.$$

Dann ist $l_{s+1} = \Delta_s \cap \Delta_{s+1}$ eine von l_1 verschiedene Kante mit der Ecke e, die ganz in

$$\epsilon_i$$

liegt. Dann ist aber e nicht das Ende des Kantenzuges $\epsilon_i \cap |L|$ im Widerspruch zur Wahl von e. Dieser Widerspruch zeigt, es gilt (1).

2. Schritt: Für jeden geschlossenen zusammenhängenden Kantenzug L von K ohne Selbstschnitte hat jede der beiden Komponenten von |K| - |L| eine Abschließung, die homöomorph ist zur Kreisscheibe.

Seien

$$C' \text{ und } C''$$

die "abgeschlossenen Komponenten" von |K| - |L|, d.h. die Abschließungen der beiden Komponenten von |K| - |L|. Insbesondere ist dann

$$|K| - |L| = C' \cup C'' \text{ und } \emptyset = C' \cap C''.$$

Beide abgeschlossene Komponenten sind endliche Vereinigungen von (Realisierungen von) Dreiecken von K. Es reicht, die Behauptung für C' zu beweisen. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Anzahl n der Dreiecke von C',

$$n := \text{Anzahl der Dreiecke von } C'.$$

Im Fall n = 1 ist die Behauptung trivial, denn jedes abgeschlossene Dreieck ist homöomorph zu einer Kreisscheibe. Sei jetzt

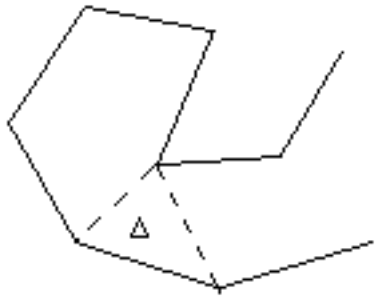
$$n > 1.$$

Wegen $|L| \subseteq C'$ gibt es ein Dreieck Δ von C', welches mit |L| eine Seite gemeinsam hat. Wir ändern L so ab, daß diese Dreieck Δ nicht mehr zu C' sondern zu C'' gehört, und erhalten so einen geschlossenen Kantenzug L_1.

1. Fall: L_1 hat keine Selbstschnitte.

Dann hat ist die eine abgeschlossene Komponente C'- $\overset{0}{\Delta}$ zu |K| - $|L_1|$ nach Induktionsvoraussetzung homöomorph zur Kreisscheibe und C' entsteht aus dieser

Kreisscheibe durch Ankleben eines Dreiecks entlang einer oder zwei Seiten. Dann ist aber auch C' homöomorph zur Kreisscheibe.
2. Fall: L_1 hat einen Selbstschnitt.



Dann ist L_1 Vereinigung von zwei zusammenhängenden geschlossenen Kantenzügen ohne Selbstschnitte,

$$L_1 = L_1 \cup L_2$$

mit nur einen gemeinsamen Punkt und der Eigenschaft, daß für i = 1,2 je eine der abgeschlossenen Komponenten von $|K| - |L_i|$, sagen wir C_i', aus weniger Dreiecken besteht als C' und außerdem gilt

$$C' = C_1' \cup \Delta. \cup C_2'$$

Nach Induktionsvorausetzung ist jedes der C_i' homöomorph zu einer Kreisscheibe. Also entsteht C' durch verkleben der Kreisscheibe C_1' mit der Kreisscheibe Δ entlang eines gemeinsamen auf den Rändern liegenden Intervalls und anschließenden Verkleben mit der Kreisscheibe C_2' eben entlang eines solchen Intervalls. Nach jedem Verkleben erhalten wir wieder eine Kreisscheibe (bis auf Homöomorphie).
3. Schritt: Abschluß des Beweises.
Nach dem 2. Schritt entsteht |K| verkleben von zwei Kreisscheiben entlang ihrer Ränder, d.h. |K| ist homöomorph zu einer Kugeloberfläche.
QED.

Bemerkungen

(i) Umgekehrt ist auch jede simpliziale Fläche K mit $|K| \cong S^2$ einfach zusammenhängend.

(ii) Eine kompakte simpliziale Fläche K ist genau dann einfach-zusammenhängend, wenn deren baryzentrischen Unterteilung K' es ist.

Beweis. Zu (i). Für eine iterierte baryzentrische Unterteilung K' von K ist der unterteilte Kantenzug L' dick und enthält einen Punkt p, der nicht auf L' liegt. Wegen

$$|K| - \{p\} \cong \mathbb{R}^2$$

können wir den Kurvensatz von Jordan (3.8.10) anwenden. Es gilt

$$H_0(|K| - |L| - \{p\}) = H_0(|K'| - |L'| - \{p\}) = \mathbb{Z} \oplus Z,$$

d.h. $|K| - |L| - \{p\}$ hat zwei lineare Komponenten, ist also nicht zusammenhängend. Dasselbe gilt dann aber auch für

$$H_0(|K| - |L|).^{59}$$

Zu (ii). Nach (i) gilt

$$K \text{ einfach zusammenhängend} \Leftrightarrow |K| \cong S^2$$

$$\Leftrightarrow |K'| \cong S^2$$

$$\Leftrightarrow K' \text{ einfach zusammenhängend.}$$

QED.

5.3.3 Kompakte Flächen die nicht einfach zusammenhängend sind

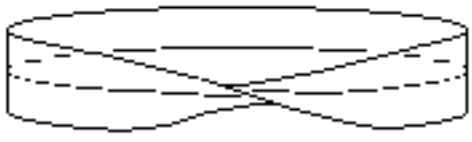
Sei K eine zusammenhängende kompakte simpliziale Fläche, welche nicht einfach zusammenhängend ist. Dann tritt einer der beiden folgenden Fälle ein.

1. Eine interierte baryzentrische Unterteilung enthält einen Teilkomplex

$$L \subseteq K,$$

desssen Realisierung homöomorph ist zu einem (kompakten) Möbiusschen Band M.

$|L| \cong M$



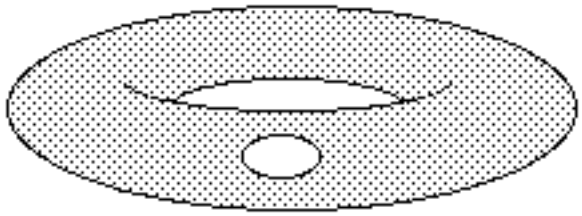
2. Eine interierte baryzentrische Unterteilen enthält einen Teilkomplex

[59] Wenn man jezwei Punkte von $|K| - |L|$ durch eine Kurve verbinden könnte, so auch je zwei Punkte von $|K| - |L| - \{p\}$: weil $|K|$ eine Mannigfaltigkeit ist, kann man jedes Kurve homolog so abändern, daß sie den Punkt p meidet.

$$L \subseteq K,$$

desssen Realisierung homöomorph zu einer Torus-Oberfläche, aus der eine offene Kreisscheibe entfernt wurde (zu einer Handel).

$|L| \cong T_*$



Beweis. Nach Voraussetzung gibt es einen zusammenhängenden geschlossenen Kantenzug C ohne Selbstschnittte mit der Eigenschaft, daß

$$|K| - |C|$$

zusammenhängend ist. Beginnend mit einer Ecke

$$e \in C$$

durchlaufen wir die Kurve |C|, wobei wir uns vorstellen, daß wir immer links neben der Kurve herlaufen. Wenn wir wieder bei der Ecke ankommen, gibt es zwei Möglichkeiten.

1. Wir befinden uns rechts neben der Kurve |C|.
2. Wir befinden uns links neben der Kurve |L|.

Im ersten Fall enthält eine iterierte baryzentrische Unterteilung von K einen Teilkomplex welcher homöomorph ist zu einem Möbiusschen Band, d.h. es tritt der erste Fall ein.

Nehmen wir jetzt an, der erste Fall tritt nicht ein, d.h. keine iterierte baryzentrische Unterteilung von K enthält einen Teilkomplex, desssen Realisierung homöomorph ist zu einem Möbius-Band. Statt eines Möbiusbandes liefert die obige Konstruktion einen Streifen, der homöomorph ist zu $[-1, +1]\times S^1$,

Wir betrachten eine von e ausgehende Kante l von C und die beiden Dreiecke Δ' und Δ" von K von denen l eine Seite ist,

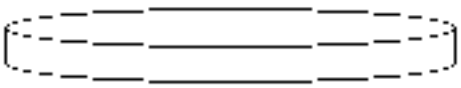
$$e \in l = \Delta' \cap \Delta" \subseteq |C|.$$

Wir stellen uns vor, Δ' liegt auf der linken Seite der Kurve |C| und Δ" auf der rechten. Seien

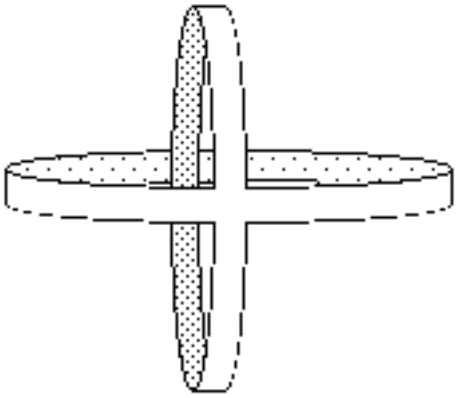
$$b' := b(\Delta') \text{ , } b" := b(\Delta")$$

die Baryzentren dieser Dreiecke. Weil |K| - |C| zusammenhängende ist, gibt es einen zusammenhängenden Kantenzug der baryzentrischen Unterteilung K' von K, welcher b' mit b" verbindet und ganz in |K| - |C| verläuft. Wir schließen diesen Kantenzug indem wir b' und b" verbinden und wiederholen die obige Konstruktion mit diesem neuen

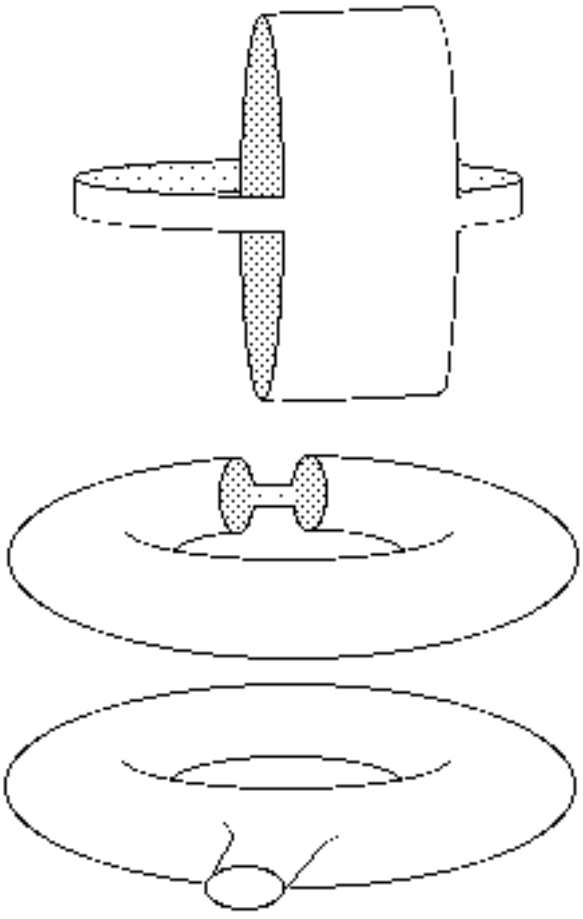
Kantenzug (indem wir “links” neben diesem Kantenzug entlanglaufen). Erneut erhalten wir anstelle eines Möbiusbandes einen zu $[-1, +1]\times S^1$ homöomorphen Streifen:



Durch Vereinigung der beiden Streifen erhalten wir einen Unterraum der homöomorph ist zu einem Raum der folgenden Gestalt:



Dieser Unterraum ist homöomorph zu Räum der folgenden Gestalt:



QED.

Bemerkungen

(i) $\tilde{H}_1(M) = \tilde{H}(M) = \mathbb{Z}$,

denn M enthält eine Kreislinie (in der “Mitte”), welche starker Deformationsretrakt von M ist.

(ii) $H_0(T_*) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(T_*) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, $H_2(T_*) = 0$

Beweis von (ii). Da T_* zusammenhängend ist, gilt

$$H_0(T_*) \cong \mathbb{Z},$$

und da T_* eine berandete 2-Mannigfaltigkeit ist mit nicht-leerem Rand, folgt

$$H_2(T_*) = 0.$$

Beweisen wir die mittlere Isomorphie-Aussage. Nach dem Aussschneidungssatz gilt

$$H_q(T_*, \partial T_*) = H_q(T, \Delta) = \tilde{H}_q(T),$$

wenn T eine Torusoberfläche und Δ eine darauf liegende Kreisscheibe bezeichnet. Insbesondere ist

$$H_2(T_*, \partial T_*) =^{60} \mathbb{Z} \text{ und } H_1(T_*, \partial T_*) =^{61} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

Die relative Homologie-Sequenz des Paares $(T_*, \partial T_*)$ hat die Gestalt

$$H_2(T_*, \partial T_*) \xrightarrow{\alpha} H_1(\partial T_*) \xrightarrow{\beta} H_1(T_*) \xrightarrow{\gamma} H_1(T_*, \partial T_*) \xrightarrow{\delta} H_0(\partial T_*) \xrightarrow{\varepsilon} H_0(T_*)$$

Dabei ist ε die identische Abbildung $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, d.h.

$$\delta = 0.$$

Der verbleibende Teil der Sequenz hat damit die Gestalt

$$(\mathbb{Z}=)H_2(T_*, \partial T_*) \xrightarrow{\alpha} H_1(\partial T_*) \xrightarrow{\beta} H_1(T_*) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to 0.$$

Nun ist ∂T_* homöomorph zur Kreislinie, die erste Homologie wird deshalb von der Klasse des Fundatmentalzyklus erzeugt. Diese liegt aber im Bild von α (man betrachte die Summe der Dreiecke von T_*). Also ist α surjektiv, also β identisch Null d.h. es gilt

$$H_1(T_*) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

QED.

5.3.4 Adjunktion von Möbiusbändern und Handeln

Sei K eine simpliziale Fläche. Wir entfernen aus |K| eine offene Kreisscheibe und kleben entlange der Rand-Linie dafür ein Möbius-Band oder eine Handel ein. Von der entsttehenden simplizialen Fläche sagt man, sie sei aus K durch Adjunktion eines Mobiusbandes bzw. einer Handel entstanden.

Bemerkungen

(i) Bei Adjunktion eines Möbiusbandes geht jede Fläche über in eine nicht-orientierbare.[62]

(ii) Bei Adjunktion einer Handel geht eine orientierbare Fläche ein eine orientierbare über.[63]

(iii) Bei Adjunktion einer Handel geht eine nicht orientierbare Fläche über in eine nicht-orientierbare.[64]

---

[60] Der Torus ist orientierbar.

[61] Man berechne die erste simpliziale Homologie des Torus.

[62] Denn die neue Mannigfaltigkeit enthält ein Möbius-Band.

[63] Man betrachte die fundamentalen Zyklen der Ausgangsmannigfaltigkeit und des Torus.

[64] Man betrachte ein Möbius-Band der Ausgangsmannigfaltigkeit und benutze die Orientierbarkeit des Torus um ein Möbiusband in der neuen Mannigfaltigkeit zu konstruieren.

5.3.5 Klassifikation der kompakten simplizialen Flächen

Sie X die Realisierung einer kompakten simplizialen Fläche.

(i) X enststeht aus der Kugeloberfläche durch Adjuktion von endlich vielen Möbius-Bändern.

(ii) Ist X orientierbar, so entsteht X aus der Kugeloberfläche durch Adjunktion von endlich vielen Handeln.

Beweis. Falls X einfach zusammenhängend ist, so ist X eine Kugeloberfläche und die Aussage ist trivial. Sei jetzt X nicht einfach zusammenhängend. Dann enthält X ein Möbius-Band oder eine Handel:

$$M \subset X \text{ oder } T_* \subset X.$$

Wir schreiben $Y := M$ bzw. $Y := T_*$ und

$$X = Y \cup Z,$$

wobei $Z \subset X$ ein Teilpolyeder ist, welches mit Y nur die Randpunkte gemeinsam hat. Weiter enstehe

W

aus Z durch Verkleben entlang der Kreislinie mit einer Kreisscheibe. Mit anderen Worten,

X einsteht aus W durch Adjunktion eines Möbius-Bandes bzw. einer Handel.

Wir haben noch zu zeigen, durch Wiederholung der obigen Konstruktion erhält man nach endlich vielen Schritten eine einfach zusammenhängende simpliziale Fläche, d.h. der Prozeß bricht ab. Dazu reicht es zu zeigen,

$$\dim \tilde{H}_1(X, F_2) > \dim \tilde{H}_1(W, F_2)$$

(da diese Dimensionen für kompakte simpliziale Flächen endlich und immer ≥ 0 sind).

Wir betrachten die reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz der polyedralen Triade (X, Y, Z):

$$\tilde{H}_2(Y)\oplus\tilde{H}_2(Z) \xrightarrow{\alpha} \tilde{H}_2(X) \xrightarrow{\beta} \tilde{H}_1(Y\cap Z) \xrightarrow{\gamma} \tilde{H}_1(Y)\oplus\tilde{H}_1(Z) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(X)$$

$$\xrightarrow{\varepsilon} \tilde{H}_0(Y\cap Z) \xrightarrow{\zeta} \tilde{H}_0(Y)\oplus\tilde{H}_0(Z) \xrightarrow{\eta} \tilde{H}_0(X) \to 0$$

Der untere Teil der Sequenz hat die Gestalt

$$\xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{\zeta} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z} \to 0$$

Also ist ζ injektiv, also ε gleich Null, also δ surjektiv. Die direkte Summe, auf welcher α definiert ist, ist Null[65], also ist α gleich Null, also β injektiv. Weiter ist $Y\cap Z$ eine Kreislinie, d.h.

$$\tilde{H}_1(Y\cap Z) = \mathbb{Z}$$

wobei $1\in\mathbb{Z}$ gerade dem fundamentalen Zyklus entspricht.Wir erhalten die Exaktheit von

$$0\to\tilde{H}_2(X)\xrightarrow{\beta}\mathbb{Z}\xrightarrow{\gamma}\tilde{H}_1(Y)\oplus\tilde{H}_1(Z)\xrightarrow{\delta}\tilde{H}_1(X)\to 0. \quad (1)$$

1. Fall: X enthält kein Möbius-Band, dagegen aber eine Handel $Y = T_*$.

Dann ist X orientierbar, d.h.

$$\tilde{H}_2(X) = \mathbb{Z}.$$

Die exakte Sequenz (1) hat die Gestalt

---

[65] weil Y und Z berandete Mannigfaltigkeiten sind : “es gibt keine 2-Zyklen”.

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\tilde{H}_1(Z) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(X) \to 0.$$

Die beiden Komponenten des Bildes von $1\in\mathbb{Z}$ bei γ ensprichen gerade der gemeinsamen Randlinie von Y und Z. In der erstem Homlogie von Y und Z repräsentiert diese die Null (sie ist im wesentliche gerade gleich ∂Y bzw. ∂Z). Insbesondere ist γ identisch Null und damit δ ein Isomorphismus,

$$\tilde{H}_1(X) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\tilde{H}_1(Z).$$

Analog erhalten wir für die Homologie mit Koeffizienten aus F_2 :

$$\dim \tilde{H}_1(X, F_2) \cong \dim \tilde{H}_1(Z, F_2) + 2.$$

Ersetzt man in den obigen Betrachtungen Y durch eine Kreisscheibe (und nutzt die Tatsache, daß die reduzierte Homologie letzterer trivial ist) so erhält man in analoger Weise

$$\tilde{H}_1(Z) \cong \tilde{H}_1(W).$$

Es folgt

$$\dim \tilde{H}_1(X, F_2) = \dim \tilde{H}_1(W, F_2) + 2 > \dim \tilde{H}_1(W, F_2).$$

2. Fall: Y = M ist ein Möbius-Band.
Die Fläche X ist nicht orientierbar, d.h.

$$\tilde{H}_2(X) = 0,$$

und die Sequenz (1) bekommt die Gestalt

(2) $$0 \xrightarrow{\beta} (\mathbb{Z} =)\ \tilde{H}_1(Y\cap Z) \xrightarrow{\gamma} \tilde{H}_1(Y)\oplus\tilde{H}_1(Z) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(X) \to 0.$$

Diese Sequenz ist weniger einfach zu analysieren als im ersten Fall. Wir gehen deshalb zur Homologie mit Koeffizienten aus F_2 über. Es gilt

$$\tilde{H}_2(X, F_2) = 0.$$

Die zu (1) analoge exakte Sequenz für die Homologie mit Koeffizienten aus F_2 hat die Gestalt

$$0 \to \tilde{H}_2(X,F_2) \xrightarrow{\beta} F_2 \xrightarrow{\gamma} \tilde{H}_1(Y,F_2)\oplus\tilde{H}_1(Z,F_2) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(X, F_2) \to 0.$$

also die Gestalt

$$0 \to F_2 \xrightarrow{\beta} F_2 \xrightarrow{\gamma} F_2\oplus\tilde{H}_1(Z,F_2) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(X,F_2) \to 0.$$

Da sie exakt ist, ist die alternierende Summe der Dimensionen der auftretenden Räume gleich Null, d.h.

$$\dim \tilde{H}_1(X,F_2) = \tilde{H}_1(Z,F_2) + 1.$$

Ersetzt man in allen Betrachtungen Y durch eine Kreisscheibe (und nutzt die Tatsache, daß die reduzierte Homologie letzterer trivial ist) so erhält man in analoger Weise

$$\tilde{H}_1(Z,F_2) \cong \tilde{H}_1(W,F_2)$$

zusammen also

$$\dim \tilde{H}_1(X,F_2) = \tilde{H}_1(W,F_2) + 1.$$

QED.

Bemerkungen

(i) Aus dem Beweis ergibt sich, für jede orientierbare kompakte simpliziale Fläche ist

$$\dim \tilde{H}_1(X, F_2) = F_2^{2g} \text{ und } \dim \tilde{H}_1(X) = \mathbb{Z}^{2g}.$$

Dabei ist g die Anzahl der Handeln, die man zur 2-Sphäre adjungieren muß um X zu erhalten. Diese Zahl heißt Geschlecht von X.

(ii) Für jede nicht-orientierbare kompakte simpliziale Fläche gilt

$$H_1(X) \neq 0.$$

Beweis von (ii). Im Fall einer nicht-orientierten Fläche X haben wir wie im obigen Beweis eine exakte Sequenz (2),

$$0 \xrightarrow{\beta} (\mathbb{Z} =) \tilde{H}_1(Y \cap Z) \xrightarrow{\gamma} \tilde{H}_1(Y) \oplus \tilde{H}_1(Z) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(X) \to 0.$$

mit

$$X = Y \cup Z,\ S^1 = Y \cap Z \text{ und } Y = M$$

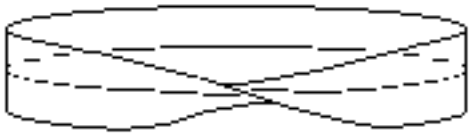
ein Möbiusband. Es reicht zu zeigen, $\delta \neq 0$. Dazu reicht es zu zeigen,

$$\gamma \text{ ist nicht surjektiv.}$$

Zum Beweis schreiben wir

$$\gamma(1) = (u, v)$$

für das Bild des Fundamentalzyklus von $Y \cap Z$ bei γ. Wir zerlegen das Möbiusband



entlang der Mittellinie g und erhalten eine berandete Mannigfaltigkeit, deren Rand aus zwei Kreislinien besteht.

Diese Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu einem Zylinder

$$S^1 \times [0, 1]$$

über einer Kreislinie, wobei die eine Randkomponente gerade dem Rand von M und die andere der Mittellinie von M entspricht. Genauer entspricht diese zweite Randkomponente dem Doppelten der Mittellinie. Die obere und die untere Kreislinie des Zylinders sind aber homolog: ihre Differenz ist gerade der Rand des Zylinders. Für das Möbiusband bedeutes dies: der Rand des Möbiusbandes ist homolog zum doppelten der Mittellinie:

$$[\partial M] = 2[g] \text{ in } \tilde{H}_1(M) = \tilde{H}_1(Y) \cong \mathbb{Z}$$

Die zweiten Koordinaten von γ sind also alle ein geradzahliges Vielfaches von [g],

$$\text{Im } \gamma \subseteq (2 \cdot \tilde{H}_1(Y)) \oplus \tilde{H}_1(Z)$$

Insbesondere ist γ nicht surjektiv.

QED.

5.3.6 Homologische Charakterisierung der einfach zusammenhängenden Flächen

Seien K ein kompakte simpliziale Fläche. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) K ist einfach zusammenhängend.
(ii) $H_1(K) = 0$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Nach 5.3.3 ist |K| homöomorph zu S^2. Also gilt

$$H_1(K) = H_1(|K|) = H_1(S^2) = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Angenommen K ist nicht einfach zusammenhängend. Nach Bemerkung 5.3.8(ii) ist K zumindest orientierbar. Deshalb gibt es eine iterierte baryzentrische Unterteilung K' von K und einen Teilkomplex

$$L' \subseteq K'$$

mit der Eigenschaft, daß |L'| homomorph ist zu einer Handel,

$$|L'| \cong M \text{ oder } |L'| \cong T_* .$$

Sei

$$L'' \subseteq K'$$

der Teilkomplex, dessen Dreiecke gerade die Dreiecke von K' sind, die nicht zu L' gehören. Dann gilt

$$K' = L' \cup L''$$

und wir haben eine Mayer-Vietoris-Sequenz

$$H_2(K') \xrightarrow{\alpha} H_1(L' \cap L'') \xrightarrow{\beta} H_1(L') \oplus H_1(L'') \xrightarrow{\gamma} H_1(K) \ (= 0).$$

Da die Realisierung von $L' \cap L''$ gerade S^1 ist, gilt $H_1(L' \cap L'') = \mathbb{Z}$. Nach Konstruktion ist $|L' \cap L''|$ die Kreislinie. Die erste Homologie wird also vom Fundamentalzyklus erzeugt.

Nach 3.8.5 ist α gerade die Zusammensetzung

(1) $$H_2(K') \to H_2(K', L'') \cong H_2(L', L' \cap L'') \to H_1(L' \cap L'')$$

Dabei kommt der Isomorphismus in der Mitte vom Ausschneidungssatz, d.h. von der Inklusion

$$(L', L' \cap L'') \to (K', L'').$$

Verfolgen wir das Bild des Fundamentalzyklus von K'. In $H_2(K', L'')$ wird dieses Bild repräsentiert von einer Summe orientierter Simplexe von L'. dasselbe gilt für das Bild in $H_1(L', L' \cap L'')$.

Der rechte Homomorphismus von (1) ist der Zusammenhangshomomorphismus zum Paar $(L', L' \cap L'')$. Das Bild eines Erzeugenden Elements von $H_2(K')$ bei α wird deshalb repräsentiert durch den Fundamentalzyklus des Randes $L' \cap L''$ von L', ist also ein erzeugendes Element von $H_1(L' \cap L'')$, Wir haben damit gezeigt, α ist surjektiv. Dann ist β aber gleich Null.

Wir erhalten die Exaktheit von

$$0 \to H_1(L') \oplus H_1(L'') \xrightarrow{\gamma} 0.$$

Dann ist aber

$$H_1(L') = H_1(L'') = 0.$$

Das steht aber im Widerspruch zu

$$|L'| \cong T_* .$$

QED.

Anhang

1. Untergruppen freier abelscher Gruppen

1.1 Wohlgeordnete Mengen

Eine geordnete Menge heißt wohlgeordnet, wenn jede ihrer Teilmengen ein kleinstes Element m hat (d.h. m ist vergleichbar mit allen anderen Elementen und $\leq$ mit diesen).

1.2 Satz von Zermelo

Jede Menge kann wohlgeordnet werden.
Die Aussage ist zum Zornschen Lemma und zum Auswahlaxiom der Mengenlehre äquivalent. Einen Beweis kann man finden auf den Seiten 13-16 des Buches von A.G.Kurosˇ: Vorlesungen über allgemeine Algebra, Teubner, Leipzig 1964.

1.3 Satz über die Untergruppen freier abelscher Gruppen

Jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist frei.
Beweis. Sei

$$F := \oplus_{i \in I} \mathbb{Z}_i$$

(mit $\mathbb{Z}_i = \mathbb{Z}$ für jedes i) eine freie abelsche Gruppe und sei

$$U \subseteq F$$

ein Untergruppe. Wir haben zu zeigen, U ist frei. Zum Beweis können wir annehmen, daß I eine wohlgeordnete Menge ist. Wir setzen

$$U_i := U \cap \oplus_{j<i} \mathbb{Z}_j = \{(z_j)_{j \in I} \in U \mid z_j = 0 \text{ für alle j mit } i \leq j\}$$

$$V_i := U \cap \oplus_{j \leq i} \mathbb{Z}_j = \{(z_j)_{j \in I} \in U \mid z_j = 0 \text{ für alle j mit } i < j\}$$

Sei weiter

$$\mathbf{p}_i : F = \oplus_{i \in I} \mathbb{Z}_i \to \mathbb{Z}, (z_j)_{j \in I} \mapsto z_i ,$$

die Projektion auf den i-ten Faktor. Dann ist $p_i(V_i)$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$, also von der Gestalt

(1) $$\mathbf{p}_i(V_i) = p_i\mathbb{Z}$$

mit einer ganzen Zahl p_i. Wir wählen ein $v_i \in V_i$ mit $p_i(v_i) = p_i$. Im Fall $p_i = 0$ wollen wir für v_i das Nullelement von F wählen.

Behauptung 1: $V_i = \mathbb{Z} \cdot v_i + U_i$

Die Inklusion "$\supseteq$" ist trivial. Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Für $x = (x_j)_{j\in I} \in V_i$ ist wegen (1) die Koordinate x_i ein Vielfaches von p_i und wir können schreiben

$$x = \frac{x_i}{p_i} v_i + (x - \frac{x_i}{p_i} v_i)$$

mit $\frac{x_i}{p_i} \in \mathbb{Z}$. Wegen $x, v_i \in V_i$ ist der zweite Summand rechts ein Element von V_i, dessen i-te Koordinate Null ist:

$$p_i(x - \frac{x_i}{p_i} v_i) = x_i - \frac{x_i}{p_i} p_i = 0.$$

Mit anderen Worten, dieser zweite Summand liegt in U_i ($\subseteq V_i$). Also gilt $x \in \mathbb{Z}\cdot v_i + U_i$.

Behauptung 2: Die von Null verschiedenen Elemente unter den v_i sind linear unabhängig (über $\mathbb{Z}$).
Angenommen es gilt

$$a_{i_1} v_{i_1} + ... + a_{i_s} v_{i_s} = 0$$

für gewisse $a_{i_\nu} \in \mathbb{Z}$, wobei sämtliche a_{i_ν} und v_{i_ν} ungleich Null seien. Wir müssen zeigen, dies ist unmöglich. Dazu können wir annehmen,

$$i_1 > i_2 > ... > i_s$$

bezüglich der Wohlordnung von I. Dann ist $v_{i_1} \in F$ das einzige Element in dieser Linearkombination, dessen i_1-te Koordinate ungleich Null ist. Da a_{i_1} ungleich Null sein soll, muß die i_1-te Koordinate von v_{i_1} ebenfalls Null sein. Diese i_1-te Koordinate ist aber gerade p_{i_1}, d.h. es gilt $p_{i_1} = 0$. Dann ist aber $v_{i_1} = 0$ im Widerspruch zu Wahl der v_{i_ν}.

Behauptung 3: Die die Elemente v_j mit $j \le i$ erzeugen die Untergruppe V_i:
Sei J die Menge aller i, für die diese Aussage falsch ist.

$$J := \{i \in I \mid V_i \text{ wird nicht erzeugt von den } v_j \text{ mit } j \le i\}$$

Wir haben zu zeigen, diese Menge ist leer. Angenommen, sie ist nicht leer. Dann besitzt sie als Teilmenge von I ein kleinstes Element i_0. Für alle $i < i_0$ ist die Behauptung also richtig. Es reicht zu zeigen, jedes Element $x \in V_{i_0}$ ist ganzzahlige Linearkombination von gewissen v_j mit $j \le i_0$. Nach der bewiesenen Behauptung 1 gilt zumindest

(2) $$x = a\cdot v_{i_0} + u \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } u \in U_{i_0}.$$

Nach Definition von U_{i_0} sind die i_0-te Koordinate und alle späteren Koordinaten gleich Null. Als Element einer direkten Summe hat u nur endlich viele von Null verschiedene

Koordinaten. Sei die j-te die letzte von Null verschiedene Koordinate. Dann gilt $j<i_0$ und

$$u \in V_j .$$

Wegen $j<i_0$ ist u Linearkombination von gewissen $v_{j'}$ mit $j' \leq j$. Nach (2) ist dann aber x Linearkombinatiion von gewissen v_j mit $j \leq i_0$. Da x beliebig gewählt war steht dies im Widerspruch zu Wahl von i_0. Dieser Widerspruch beweist die dritte Behauptung.

Behauptung 4: Die gegeben Untergruppe H wird von den Elementen v_j erzeugt.

(da wir bereits wissen, die v_j sind linear unabhängig, beweist dies die Behauptung des Satzes). Sei $x \in H$. Als Element der direkten Summe F hat x nur endlich viele von Null verschiedene Koordinaten. Dann liegt aber x in einer der Mengen V_i (wenn die i-te die letzte von Null verschiedene Koordinate ist). Als Element von V_i ist x aber Linearkombination von gewisser v_i. Wir haben gezeigt, jedes Element von H ist Linearkombination gewissen v_i, d.h. die v_i erzeugen H.

QED.

2. Lebesque-Zahlen

Existenz von Lebesque-Zahlen

Seien X ein kompakter metrischer Raum und **U** eine offene Überdeckung von X. Dann existiert ein $\varepsilon>0$ derart, daß für jede Menge von Durchmesser $\leq \varepsilon$ ganz in einer Menge der Überdeckung **U** liegt.

Beweis. Zu jedem $x \in X$ gibt es $d(x)>0$ derart, daß die Vollkugel vom Radius 2d(x) ganz in einer Menge von **U** liegt. Endlich viele der zugehörigen Vollkugeln von Radius d(x) überdecken X, sagen wir

$$X = U_{d(x_1)} \cup ... \cup U_{d(x_r)}$$

Sei $\varepsilon := \min(d(x_1),...,d(x_r))$. Ist $Y \subseteq X$ eine Teilmenge vom Durchmesser $<\varepsilon$, so liegt ein vorgegebener Punkt $y \in Y$ in einer der Mengen $U_{d(x_i)}$ und hat damit von x_i einen Abstand $<d(x_i)$. Jeder weitere Punkt von Y hat von y einen Abstand $<\varepsilon \leq d(x_i)$, also von x_i einen Abstand $< 2d(x_i)$. Damit gilt

$$Y \subseteq U_{2d(x_i)}.$$

Mit $U_{2d(x_i)}$ liegt also auch Y ganz in einer der Mengen von **U**.

QED.

Index

—A—

Abbildung
  Deformation von, 16
  homotope, 16
  homotope, von Paaren, 19
  Homotopieäquivalenz, 18
  nullhomotope, 17
  simpliziale, 13
Abbildung von Paaren, 18
absoluten Homologiegruppen, 48
abstandstreuen Abbildungen, 5
antipodaler Punkt einer Abbildung, 115

Augmentation, 51; 53

—B—

baryzentrische Deformation, 91
baryzentrische Umgebung, 90
baryzentrische Unterteilung, 68; 90
Baryzentrum, 88
Basispunkt, 75
berandete simpliziale Mannigfaltigkeit, 128
Bifunktor, 6
Bigrad, 117
Bild, 27
Bukett, 75

—D—

darstellbar, 10
darstellendes Objekt, 10
Deformation, 16
  baryzentrische, 91
Deformation von Abbildungen, 16
Deformationsretrakt, 66
dicke Sphäre, 84
Differentiale, 20
Dimension eines Simplex, 14
direkte Summe
  von Komplexen, 22
duale Kategorie, 4

—E—

Ecke des Standard-Simplex, 40
Ecke eine Simplizialkomplexes, 13
Eckenmenge, 120
ein simpliziales Objekt, 15
Einheitssphäre, 94
elementar, 38
endlicher Simplizialkomplex, 13
endliches Polyeder, 88
Entartungsabbildung, 42
entsteht durch Verheften der Räume, 12
Epi-Mono-Zerlegung, 44
Epimorphismus, 5
Eulerzahl eines endlichen Simplizialkomplexes, 51
exakt, 20

—F—

Faktorkomplex, 27
Faktortopologie, 12
Fläche
  simpliziale, 128
freier Komplex, 37
fundamentaler Zyklus, 132
Funktor, 6
  Vergiß-, 7

—G—

geordnete simpliziale Homologie, 50
Gerüst, 84
Grade, 111
graduierte Gruppe, 21
Grundpunkt, 75
Gruppe
  graduierte, abelsche, 21

—H—

Handel, 140
homogener Bestandteil, 21
homolog, 20
Homologie, 20
  simpliziale, geordnete, 50
  simpliziale, orientierte, 50
Homologieklassen, 20
Homologiesequenz des Paares (X,A), 48
Homologiesequenz des Tripels (X,A,B), 49
homotop, 34
homotope Abbildung
  von Paaren, 19
homotope Abbildungen, 16
Homotopie, 16; 34
  Nullhomotopie, 17
  relative, 16
homotopieäquivalent, 35
homotopieäquivalente Räume, 18
Homotopieäquivalenz, 18; 35
Homotopiefunktor, 17
Homotopiekategorie, 4; 17
Homotopieklassen, 17; 35
Horn, 101

—I—

identische Funktor, 6
identischen Morphismus, 3
im wesentlichen in der Dimension n konzentriert, 38
Inneres, 73
isoliert liegen in seiner Faser, 107
isomorph, 5
Isomorphismus, 5

—K—

Kategorie
  simpliziale, 4
Kategorie der Funktoren, 8
Kategorie der geordnete simplizialen Paare, 121
Kategorie der geordneten Simplizialkomplexe, 121
Kategorie der Kategorien, 7
Kategorie der Komplexe abelscher Gruppen, 20
Kategorie der Paare abstrakter Simplizialkomplexen, 121
Kategorie der simplizialen Paare, 121
Kategorie der Simplizialkomplexe, 120
Kategorie der topologischen Räume, 4
Kegel, 23; 67
Kegel einer Komplex-Abbildung, 22
Keim, 108
Kern, 27
Kette
  singuläre, **U**-kleine, 72
Ketten, 19

Kettenabbildung, 20
Koeffizien
  simpliziale Homologie mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe, 49
Koeffizienten
  singuläre Homolgie mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe, 49
  singuläre Ketten mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe, 49
  universelle, 49
Koeffizienten, 49
Kofunktor, 6
kohärent orientiert, 131
kohärent orientiert, 131
Komplex
  freier, 37
Komplex, 19
Komplexabbildung, 20
Komplexkategorie, 20
Komplexmorphismus, 20
Komponenten, 57
konstante Homotopie, 17
kontravarianter Funktor, 6
konvex, 40
Koordinaten eines Punktes einer Realisierung, 88
kovariante Hom-Funktor, 6
kovarianter Funktor, 6
Kurve
  simpliziale, 128

—L—

Lemma von Yoneda, 9
linear, 41
linear zusammenhängend, 56
lineare Komponenten, 57
linksinvers, 5
lokal trivial, 116
lokale Homologie, 107

—M—

Mannigfaltigkeit
  berandete, simpliziale, 128
  simpliziale, 128
  simpliziale, orientierbare, 130
  topologische, 127
Mannigfaltigkeit, 111
Mayer-Vietories-Sequenz, 80; 86
metrische Topologie einer Realisierung, 14
metrischer Raum, 14
Morphismen, 3
Morphismenkomposition, 3

—N—

natürliche Äquivalenz, 8
natürliche Transformation, 8
Norm, 94
nullhomotop, 17
Nullhomotopie, 17

—O—

Objekten, 3
offene baryzentrische Unterteilung, 89
offene Vollkugel, 94
orientierbare simpliziale Mannigfaltigkeit, 130
orientierte simpliziale Homologie, 50
orientierter simplizialer Kettenkomplex, 25
orientiertes Simplex, 25

—P—

Paar
  geordnetes, simpliziales, Kategorie der, 121
  simpliziales, Kategorie der, 121
  topologisches, 18
p-Abbildung, 107
p-äquivalent, 108
Polyeder, 88
  endliches, 88
polyedrales Paar, 88
Produkt
  von Kategorien, 5
punktierter topologischer Raum, 75

—Q—

quasigeordnete Menge, 4
Quelle, 3

—R—

Rand, 42
Randabbildung, 42
Randabbildungen, 20
Ränder, 20
Raum
  homotopieäquivalente, 18
  metrischer, 14
Realisierung
  Koordinaten eines Punktes, 88
Realisierung einer simplizialen Menge, 72
Realisierung eines Simplizialkomplexes (als Menge), 13
rechtsinvers, 5
relative Homologiegruppen, 48
relative Homotopie, 16
Retrakt, 59
Retraktion, 59

—S—

schwache Topologie der Realisierung eines Simplizialkomplexes, 15
Seite, 42
Seite eines Simplex, 13
Simplex, 41
Simplex eines Simplizialkomplexes, 13
simpliziale Abbildung, 13
simpliziale abelsche Gruppe, 15
simpliziale Fläche, 128
simpliziale Kategorie, 4
simpliziale Kurve, 128
simpliziale Mannigfaltigkeit mit Rand, 128

simpliziale Menge, 7
simplizialen abelschen Gruppen, 7
simplizialer topologischer Raum, 15
simplizialer topologischer Raum, 7
simpliziales Objekt, 7
Simplizialkomplex
  endlicher, 13
singuläre Homologiegruppe, 47
singuläre Kette, 44
singuläre **U**-kleine Kette, 72
singulärer Komplex, 45
singuläres Simplex, 44
Spitze, 67
Standardabbildung, 94; 95
Standardsimplex, 40
Standard-Simplex, 11
  Ecke des, 40
Standard-Simplex, 14
starker Deformationsretrakt, 66
stetigen Familie, 16
Summe
  direkte, von Komplexen, 22
Suspension, 23; 84
Symmetrie, 17

—T—

Tangentialbündel, 116
Tangentialvektorfeld, 116
Teilkategorie, 5
Teilkomplex, 26
Teilkomplex eines Simplizialekomplexes, 86
Topologie
  metrische, einer Realisierung, 14
  schwache, der Realisierung eines Simplizialkomplexes, 15
topologische d-Mannigfaltigkeit, 127
topologisches Paar, 18
topologisches Tripel, 19
Träger, 88
Triade, 19
Tripel, 19
  topologisches, 19

—U—

Umgebungsretrakt,, 59
universell, 9
universelle Koeffizienten, 49

—V—

Vergiß-Funktor, 7
Verträglichkeit mit linearen Abbildungen, 56
volle Teilkategorie, 5
Vollkugel, 94

—W—

wegeweise zusammenhängend, 56

—Z—

zerfallend, 32
zerfällt in jeder Dimension, 33
Ziel, 3
zusammenhängend, 13
Zusammenhangshomomorphismus des Paares (X,A), 48
Zyklen, 19
Zyklus
  fundamentaler, 132
Zyklus modulo eines Unterraumes, 48

Inhalt

EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE 1

BEZEICHNUNGEN 1

1. VORBEREITUNGEN 3

1.1 Kategorien und Funktoren 3
1.1.1 Vorbemerkung 3
1.1.2 Der Begriff der Kategorie 3
1.1.3 Bemerkungen zur Definition 3
1.1.4 Beispiele für Kategorien 4
1.1.5 Die duale Kategorie 4
1.1.6 Das Produkt von Kategorien 5
1.1.7 Teilkategorien 5
1.1.8 Spezielle Morphismen 5
1.1.9 Funktoren 6
1.1.10 Beispiele für Funktoren 6

1.1.11 Komposition von Funktoren 7
1.1.12 Natürliche Transformationen 8
1.1.13 Beispiele natürlicher Transformationen 8
1.1.14 Lemma von Yoneda 9
1.1.15 Darstellbare Funktoren 9
1.1.16 Eindeutigkeit des darstellenden Paares 10
1.1.17 Algebraische Konstruktionen in beliebigen Kategorien 10
1.1.18 Aufgaben 11

1.2 Homotopie 16
1.2.1 Vorbemerkungen 16
1.2.2 Der Begriff der Homotopie 16
1.2.3 Homotope Abbildungen 16
1.2.4 Homotopieklassen 17
1.2.5 Verträglichkeit mit Kompositionen 17
1.2.6 Die Homotopiekategorie 17
1.2.7 Topologische Paare 18
1.2.8 Die direkte Summe von Paaren 18
1.2.9 Ein Produkt von Paaren 18
1.2.10 Homotopie von Paaren 19
1.2.11 Tripel von topologischen Räumen 19
1.2.12 Aufgaben 19

2. HOMOLOGIE VON KOMPLEXEN 19

2.1 Komplexe 19
2.1.1 Die Homologie eines Komplexes 19
2.1.2 Komplexabbildungen 20
2.1.3 Der Homologiefunktor 20
Bemerkung 21
Vereinbarungen 21
2.1.4 Graduierte abelsche Gruppen 21
2.1.5 Direkte Summen von Komplexen 22
2.1.6 Der Kegel einer Komplexabbildung 22
2.1.7 Die kurze exakte Sequenz zum Abbildungskegel 23
2.1.8 Aufgaben 23

2.2 Die lange exakte Homologiesequenz 26
2.2.1 Teilkomplexe und Faktorkomplexe 26
2.2.2 Beispiele für Teil- und Faktorkomplexe 27
2.2.3 Die Halbexaktheit des Homologiefunktors 27
2.2.4 Konstruktion des Zusammenhangshomomorphismus 29
2.2.5 Funktorialität des Zusammenhangshomomorphismus 31
2.2.6 Die Exaktheit der langen Homologiesequenz 31
2.2.7 Quasi-Isomorphismen 32
2.2.8 Zerfallende Sequenzen 32
2.2.8 Komplexsequenzen die in jeder Dimension zerfallen 33
2.2.9 Zusammenhangshomomorphismus eines Abbildungskegels 34
2.2.10 Kriterium für Quasi-Isomorphie 34

2.3 Kettenhomotopie 34
2.3.1 Homotope Kettenabbildungen 34
2.3.2 Verträglichkeit mit der Komposition 35
2.3.3 Die Homotopiekategorie über ∂Ab 35
2.3.4 Die Homologie homotoper Abbildungen 35
2.3.5 Die Homologie einer Homotopieäquivalenz 35
2.3.6 Kriterium für Kontrahierbarkeit 36

2.3.7 Kontrahierbarkeit des Kegels und Homotopieäquivalenz 36
2.3.8 Aufgaben 37

2.4 Freie Komplexe 37
2.4.1 Definition 37
2.4.2 Die Untergruppe der Zyklen ist ein direkter Summand 37
2.4.3 Quasi-Isomorphie und Homotopieäquivalenz 38
2.4.4 Kurze und elementare Komplexe 38
2.4.4 Zerlegung in kurze bzw. elementare Komplexe 38
2.4.5 Aufgaben 38

3. DIE SINGULÄRE HOMOLOGIE 39

3.1 Standardsimplexe und ihre linearen Abbildungen 39
3.1.1 Vorbemerkung 39
3.1.2 Die Standardsimplexe 40
3.1.3 Lineare Abbildungen auf den Standardsimplexen 41
3.1.4 Randabbildungen und Seiten der Standardsimplexe 42
3.1.5 Relationen zwischen den Rand- und Entartungsabbildungen 43

3.2 Der singuläre Komplex 44
3.2.1 Vorbemerkung 44
3.2.2 Definition des singulären Komplexes 44
3.2.3 Die Komplexeigenschaft von S(X) 45
3.2.4 Die Abbildung der Ketten zu einer stetigen Abbildung 46
3.2.5 Der Komplex-Morphismus Sf zu einer stetigen Abbildung f 46
3.2.6 Die Funktorialität von S 46
3.2.7 Verallgemeinerung auf den Fall von Paaren 47

3.3 Die singuläre Homologie 47
3.3.1 Die singulären Homologiegruppen eines topologischen Raumes 47
3.3.2 Funktorialität 48
3.3.3 Homologiesequenz eines Paares bzw. eines Tripels 48
3.3.4 Homologie mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe 49
3.3.5 Aufgaben 50

3.4 Spezialfälle 51
3.4.1 Homologie des einpunktigen Raumes 51
3.4.2 Reduzierte Homologie 51
3.4.3 Reduzierte Homologiesequenz eines Paares 52
3.4.4 Die Augmentation auf den Niveau der Kettenabbildungen 53
3.4.5 Die Homologie der konvexen Teilmengen des affinen Raumes 54
3.4.6 Der Zusammenhangshomomorphismus einer Teilmenge des affinen Raumes 56
3.4.7 Linear zusammenhängende Räume 56
3.4.8 Die Homologie linear zusammenhängender Räume 57
3.4.9 Die 0-te Homologie und lineare Komponenten 57
3.4.10 Die 0-te Homologie des diskreten Raumes 58
3.4.11 Umgebungsretrakte 58
3.4.12 Die Zerlegung der Homologie mit Hilfe von Retraktionen 59
3.4.13 Die Homologiesequenz eines Retrakts 59

3.5 Homotopieinvarianz 60
3.5.1 Wiederholung 60
3.5.2 Formulierung des Satzes über die Homotopieinvarianz 60
3.5.3 Folgerung: die Homologie homotoper Abbildungen 60
3.5.4 Folgerung: die Homologie homotoper Räume 60
3.5.5 Folgerung: die reduzierte Homologie kontrahierbarer Räume 61

3.5.6 Vorbemerkungen 61
3.5.7 Vorbereitung: Kriterium für die Existenz einer natürlichen Kettenhomotopie 62
3.5.8 Beweis der Homotopieinvarianz (Satz 3.5.2) 65
3.5.9 Deformationsretrakte und starke Deformationsretrakte 66
3.5.10 Aufgaben 67

3.6 Baryzentrische Unterteilung 67
3.6.1 Der Unterteilungshomomorphismus 67
3.6.2 Der Durchmesser mehrfacher baryzentrischer Unterteilungen 69
3.6.3 Kettenabbildungen die in der Dimension 0 übereinstimmen 71
3.6.4 Aufgaben 71

3.7 Kleine Simplexe und Ausschneidung 72
3.7.1 Vorbemerkung 72
3.7.2 Der singuläre Komplex eines Systems von Teilmengen 72
3.7.3 Vergleich der Homologien von S(X,A) und S(U,U∩A) 73
3.7.4 Folgerung: Ausschneidungssatz I 73
3.7.5 Folgerung: Ausschneidungssatz II 73
3.7.6 Das Bukett punktierter topologischer Räume 75
3.7.7 Die Homologie eines Buketts 76

3.8 Die Mayer-Vietoris-Sequenz 78
3.8.1 Bezeichnungen 78
3.8.2 Ausschneidungstriaden 78
3.8.3 Die absolute Version der Mayer-Vietories-Sequenz 80
3.8.4 Die relative Version der Mayer-Vietories-Sequenz 80
3.8.5 Der Zusammenhangshomomorphismus der absoluten Mayer-Vietories-Sequenz 81
3.8.6 Der Zusammenhangshomomorphismus der relativen Mayer-Vietories-Sequenz 81
3.8.7 Funktorialität der Mayer-Vietories-Sequenz 82
3.8.8 Reduzierte Mayer-Vietories-Sequenz 82
3.8.9 Beispiel: Homologie eines Buketts 83
3.8.10 Beispiel: Satz von Jordan 83
3.8.11 Beispiel: Homologie einer Suspension 84
3.8.12 Die Mayer-Vietories-Sequenz eines Paars von Ausschneidungstriaden 86
3.8.13 Aufgaben 86

3.9 Die Ausschneidungseigenschaft polyedraler Triaden 87
3.9.1. Die geometrische Realisierung eines Simplizialkomplexes 88
3.9.2. Die baryzentische Unterteilung eines Simplizialkomplexes 88
3.9.3. Die baryzentrische Umgebung eines Teilpolyeders in einem Polyeder 90
3.9.4. Die baryzentrische Deformation eines polyedralen Paares 91
3.9.5. (weglassen?) Eine Eigenschaft der baryzentrischen Deformation 92
3.9.6. Die Ausschneidungseigenschaft polyedraler Triaden 93

4. ANWENDUNGEN AUF DEN EUKLIDISCHEN RAUM 94

4.1 Standardabbildungen zwischen Zellen und Sphären 94
4.1.1 Wiederholung 94
4.1.2 Die Standardabbildungen der Vollkugel 94
4.1.3 Eigenschaften der Standardabbildung π 95
4.1.4 Eigenschaften der Standardabbildung π' 97
4.1.5 Kompakte konvexe Teilmengen des euklidischen Raumes 97
4.1.6 Folgerungen 100

4.2 Die Homologie von Zellen und Sphären 100
4.2.1 Lemma 100
4.2.2 Die Homologie von Zellen und Sphären 102

4.2.3 Sphären und euklidische Räume mit unterschiedlicher Dimension 103
4.2.4 Sphären und Vollkugeln 103
4.2.5 Einbettungen von Vollkugeln in den Euklidischen Raum 104
4.2.6 Fixpunktsatz von Brouwer 104
4.2.7 Fundamentale Zyklen 105
4.2.8 Produkte mit Sphären 105

4.3 Lokale Homologie 107
4.3.1 Vorbemerkung 107
4.3.2 Definition der lokalen Homologie 107
4.3.3 Lokalität der lokalen Homologie 107
4.3.4 p-Abbildungen und Abbildungskeime 107
4.3.5 p-Abbildungen mit demselben Keim 108
4.3.6 Die Kategorie der Keime von p-Abbildungen 109
4.3.7 Die lokale Homologie lokale homöomorpher Räume 109
4.3.8 Invarianz der Dimension 109
4.3.9 Invarianz der Randeigenschaft 110
4.3.10 Lokale und reduzierte Homologie 111

4.4 Der Grad einer Abbildung 111
4.4.1 Vorbemerkung 111
4.4.2 Der Gradbegriff 111
4.4.3 Eigenschaften des Grades 112
4.4.4 Der Grad einiger linearer Abbildungen 112
4.4.5 Stetige Abbildungen der n-Sphäre in sich. 115
4.4.6 Der Satz vom Igel 115
4.4.7 Der Bigrad einer Abbildung 117
4.4.8 Eine Eigenschaft des Bigrades 118
4.4.9 Der Grad der Potenzabbildung 118
4.4.10 Fundamentalsatz der Algebra 119

5 DIE HOMOLOGIE DER POLYEDER 120

5.1 Vergleich von simplizialer und singulärer Homologie 120
5.1.1 Einige Kategorien von (abstrakten) Simplizialkomplexen 120
5.1.2 Einige Funktoren 121
5.1.3 Kompakte Teilmengen von Polyedern 123
5.1.4 Der Vergleichsatz 124
5.1.5 Vergleichssatz für geordnete simpliziale Paare 126
5.1.6 Endlichkeit und Kompaktheit von Polyedern 126
5.1.7 Aufgaben 127

5.2 Simpliziale Mannigfaltigkeiten 127
5.2.1 Vorbemerkungen 127
5.2.2 Simpliziale Mannigfaltigkeiten 128
5.2.3 Lemma 129
5.2.4 Die d-te Homologie kompakter d-Mannigfaltigkeiten 130
5.2.5 Aufgaben 133

5.3 Kompakte simpliziale Flächen 134
5.3.1 Einfach zusammenhängende simpliziale Flächen 134
5.3.2 Struktur der einfach zuzammenhängenden simplizialen Flächen 134
5.3.3 Kompakte Flächen die nicht einfach zusammenhängend sind 139
5.3.4 Adjunktion von Möbiusbändern und Handeln 142
5.3.5 Klassifikation der kompakten simplizialen Flächen 143
5.3.6 Homologische Charakterisierung der einfach zusammenhängenden Flächen 146

ANHANG **147**

1. Untergruppen freier abelscher Gruppen **147**
1.1 Wohlgeordnete Mengen 147
1.2 Satz von Zermelo 147
1.3 Satz über die Untergruppen freier abelscher Gruppen 147

2. Lebesque-Zahlen **149**

INDEX **149**