Vorlesungen zur algebraischen Topologie

frei nach A. Dold
Springer Verlag Berlin 1972

Bezeichnungen

Ab	Kategorie der abelschen Gruppen, vgl. 1.1.4.
B^n	n-dimensionale Vollkugel im euklidsichen Raum von Radius 1, vgl. 3.5.9.
B_nK	Gruppe der n-Ränder des Komplexes K, vgl. 2.1.1.
Cat	Kategorie der Kategorien, vgl. 1.1.11.
C(K)	Komplex der orientierten simplizialen Ketten des Kettenkomplexes K, vgl. 5.1.2.
C(K,L)	Komplex der orientierten simplizialen Ketten des simplizialen Paares (K,L), vgl. 5.1.2.
∂**Ab**	Kategorie der Komplexe abelscher Gruppen, vgl. 2.1.4.
∂_q	n-ter Rand-Operator eines Komplexes, vgl. 2.1.1, insbesondere des singulären Komplexes eines topologischen Raums, vgl. 3.2.2.
∂_n^K	n-ter Rand-Operator des Komplexes K, vgl. 2.1.1.
Δ_q	das q-dimensionale Standard-Simplex, vgl. 3.1.2
$\dot{\Delta}_q$	Rand des q-dimensionalen Standard-Simplexes, vgl. 3.1.4.
$\tilde{\Delta}$	Kategorie der (abstrakten) Simplizialkomplexe, vgl. 5.1.1.
$\tilde{\Delta}^{(2)}$	Kategorie der simplizialen Paare, vgl. 5.1.1.
$\hat{\Delta}$	Kategorie der geordneten Simplizialkomplexe, vgl. 5.1.1.
$\hat{\Delta}^{(2)}$	Kategorie der geordnete simplizialen Paare, vgl. 5.1.1.
Ens	Kategorie der Mengen, vgl. 1.1.4.
ε_q^j	die j-te Rand-Abbildung des q-dimensionalen Standard-Simplex, vgl. 3.1.4.
GAb	Kategorie der graduierten abelschen Gruppen, vgl. 2.1.4.
γ^X	die konstante Abbildung des topologischen Raums X mit Werten im einpunktigen topologischen Raum P, vgl. 3.4.2.
$\mathrm{Hom}_C(X,Y)$	Menge der Morphismen $X \longrightarrow Y$ der Kategorie C, vgl. 1.1.2.
$H_n(K)$	n-te Homologie-Gruppe des Komplexes K, vgl. 2.1.1
$H^n(X)$	n-te singuläre Homologie des topologischen Raums X, vgl. 3.3.1.
$H^n(X,A)$	n-te singuläre Homologie des topologischen Paares (X, A), vgl. 3.3.1.
$\tilde{H}_qX$	q-te reduzierte Homologie des nicht-leeren topologischen Raums X, vgl. 3.4.2.
id_X	identischer Morphismus des Objekts X, vgl. 1.1.2.
Mor(C)	Klasse der Morphismen der Kategorie C, vgl. 1.1.3.
P	= {p} der einpunktige topologische Raum, vgl. 3.4.1.
S^n	n-dimensionale Einheitssphäre, vgl. 3.5.9.
S(K)	Komplex der geordneten simplizialen Ketten des Simplizialkomplexes K, vgl. 5.1.2.

$S(K,L)$	Komplex der geordneten simplizialen Ketten des simplizialen Paares (K,L), vgl. 5.1.2.
Top	Kategorie der topologischen Räume, vgl. 1.1.4
$\mathbf{Top}^{(2)}$	Kategorie der topologischen Paare, vgl. 1.2.7.
Vect_K	Kategorie der Vektorräume über dem Körper K und K-linearen Abbildungen, vgl. 1.1.10.
$\mathbf{S}_q X$	Gruppe der q-dimensionalen singulären Ketten des topologischen Raums X, vgl. 3.2.2.
$V(K)$	Menge der Ecken des abstrakten Simplizialkomplexes K, vgl. 5.1.1.
$Z_n K$	Gruppe der n-Zyklen des Komplexes K, vgl. 2.1.1.
$\|?\|$	Realisierungsfunktor, vgl. 5.1.2.
$\simeq$	Homotopie von stetigen Abbildungen, vgl. 1.2.3, Homotopie-Äquivalenz von topologischen Räumen, vgl. Bemerkung 1.2.6 (iv), Kontrahierbarkeit eines Raumes, vgl.1.2.3.
	$\hat{}$ welche 1 in das 0-Simplex P abbildet, vgl. 3.4.5.
(A, k)	der im Grad k konzentrierte Komplex zur abelschen Gruppe A, vgl. 2.1.4.
$\|C\|$	Klasse der Objekte einer Kategorie, vgl. 1.1.2
C^{op}	die zur Kategorie C duale Kategorie, vgl. 1.1.5.
$C \times D$	Das Produkt der Kategorie C und D, vgl. 1.1.6
$\hat{}$ P	das singuläre 0-Simplex mit dem Wert P, wobei P einen Punkt eines topologischen Raums X bezeichnet, bzw. die Ketten-Abbildung $(\mathbb{Z},0) \longrightarrow SX$,

1. Vorbereitungen

1.1 Kategorien und Funktoren

1.1.1 Vorbemerkung

Der Begriff der Kategorie axiomatisiert das Phänomen, daß es zu den meisten mathematischen Objekten in natürlicher Weise zugeordnete Abbildungen gibt.

Beispiele solcher Paare von Objekten und Abbildungen sind:

Vektorräume - lineare Abbildungen
Gruppen - Gruppenhomomorphismen
Ringe - Ringhomomorphismen
metrische Räume - abstandstreue Abbildungen, bzw. kontrahierende Abbildungen
topologische Räume - stetige Abbilungen

1.1.2 Der Begriff der Kategorie

Eine Kategorie C besteht aus
(i) einer Klasse von Objekten $|C|$
(ii) einer Menge

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}_C(X,Y) = C(X,Y)$$

von Morphismen von X nach Y für je zwei Objekte $X,Y \in |C|$.
(iii) einer Abbilung

$$\mathrm{Hom}(X,Y)\times\mathrm{Hom}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}(X,Z),\ (f,g) \mapsto g\circ f,$$

für je drei Objekte $X,Y,Z\in|C|$, welche Morphismenkomposition heißt.

Man fordert außerdem, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. **Assoziativgesetz der Morphismenkomposition**. Für je vier Objekte $X,Y,Z,W \in |C|$ und je drei Morphismen $f\in\mathrm{Hom}(Z,W)$, $g\in\mathrm{Hom}(Y,Z)$, $h\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ gilt
$$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h.$$
2. **Existenz der identischen Morphismen**. Für jedes Objekt $X\in|C|$ enthält die Menge $\mathrm{Hom}(X,X)$ einen sogenannten identischen Morphismus $\mathrm{id}_X\in\mathrm{Hom}(X,X)$ derart, daß für je zwei Objekte $X,Y\in|C|$ und jeden Morphismus $f\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ die folgenden beiden Relationen bestehen.
$$f\circ\mathrm{id}_X = f \text{ und } \mathrm{id}_Y\circ f = f$$
3. Die Hom-Mengen einer Kategorie sind paarweise disjunkt, d.h. aus
$$\mathrm{Hom}(X,Y) \bigcap \mathrm{Hom}(X',Y') \neq \varnothing$$
folgt stets $X = X'$ und $Y = Y'$. Zum Beispiel werden in der algebraischen Topologie die Abbildung
$$\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{R},\ x \mapsto x,$$
und
$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \mapsto x,$$
als verschieden angesehen (obwohl sie als Mengen von Paaren, d.h. aus der Sicht der Mengentheorie, gleich sind).

1.1.3 Bemerkungen zur Definition

(i) Man sieht leicht, daß es in jeder der Mengen $\mathrm{Hom}(X,X)$ genau einen identischen Morphismus gibt. Sind nämlich $\mathrm{id}, \mathrm{id}'\in\mathrm{Hom}(X,X)$ zwei solche Morphismen, so gilt
$$\mathrm{id} = \mathrm{id}\circ\mathrm{id}' = \mathrm{id}'.$$

(ii) Seien X und Y Objekte der Kategorie C. Ein Morphismus $f: X\to Y$ ist dann ein Element der Menge $\mathrm{Hom}(X,Y)$. Das Objekt X heißt auch Quelle des Morphismus X und Y heißt Ziel von f.

(iii) Die Klasse, welche durch Vereinigung aller Hom-Mengen einer Kategorie C entsteht heißt Klasse der Morphismen von C und wird mit Mor(C) bezeichnet.

1.1.4 Beispiele für Kategorien

(i) Die Kategorie der Mengen wird mit **Ens** bezeichnet. Ihre Objekte sind die Mengen, d.h. $|\mathbf{Ens}|$ besteht aus allen Mengen. Die Morphismenmenge $\mathrm{Hom}(X,Y)$ besteht aus allen Abbildungen $X\to Y$.

(ii) Die Kategorie der abelschen Gruppen wird mit **Ab** bezeichnet. Ihre Objekte sind die abelschen Gruppen, d.h. $|\mathbf{Ab}|$ ist die Klasse aller abelschen Gruppen. Die Morphismenmenge $\mathrm{Hom}(X,Y)$ besteht aus allen Gruppenhomomorphismen $X\to Y$.

(iii) Die Kategorie der topologischen Räume wird mit **Top** bezeichnet. Ihre Objekte sind die topologischen Räume. Die Morphismenmenge $\mathrm{Hom}(X,Y)$ besteht aus allen stetigen Abbildungen $X\to Y$.

(iv) Im nächsten Abschnitt werden wir die Homotopiekategorie **Htp** definieren. Ihre Objekte sind dieselben wie die von **Top**. Ihre Morphismen sind im allgemeinen keine Abbildungen mehr, sondern Äquivalenzklassen stetiger Abbildungen.

(v) Sei C eine quasigeordnete Menge, d.h. C sei eine Menge, die mit einer reflexiven und transitiven Relation '=' versehen sei. Dann definiert C eine Kategorie, die ebenfalls mit C bezeichnet werde. Die Objekte der Kategorie seien die Elemente von C,
$$|C| = C.$$
Die Menge $\mathrm{Hom}(X,Y)$ bestehe aus genau einem Element, wenn $X=Y$ gilt und ist andernfalls leer. Ist umgekehrt C ein Kategorie, für welche $|C|$ eine Menge ist und

deren Hom-Mengen aus jeweils höchstens einem Element besteht, so besitzt dadurch $|C|$ die Struktur einer quasigeordneten Menge.

(vi) Sei G eine Gruppe. Dann definiert G eine Kategorie, die ebenfalls mit G bezeichnet wird. Die Kategorie besteht aus nur einem Objekt, sagen wir, dem Einselement der Gruppe,

$$|G| = \{e\},$$

und die einzige Hom-Menge Hom(e,e) besteht aus den Elementen der Gruppe,

$$\mathrm{Hom}(e,e) = G.$$

Die Morphismenkomposition sei gerade durch die Multiplikation der Gruppenelemente gegeben.

$$\mathrm{Hom}(e,e)\times\mathrm{Hom}(e,e)\to\mathrm{Hom}(e,e),\ (g,g') \mapsto g'\cdot g.$$

1.1.5 Die duale Kategorie

Sei C eine Kategorie. Die zu C duale Kategorie wird mit C^{op} bezeichnet und ist wie folgt definiert. Die Objekte von C^{op} sind dieselben wie die von C,

$$|C^{op}| := |C|.$$

Die Morphismen von C^{op} sind ebenfalls dieselben wie die von C, werden aber in anderer Weise den Paaren von Objekten zugeordnet. Es gelte

$$\mathrm{Hom}_{C^{op}}(X,Y) := \mathrm{Hom}_C(Y,X)$$

für je zwei Objekte $X,Y\in|C|$. Ein Morphismus $f:X\to Y$ von C ist also als Morphismus von C^{op} ein Morphismus mit dem Ziel X und der Quelle Y. Morphismenkomposition von C^{op} ist ebenfalls dieselbe, wie die von C,

$$f\circ_{C^{op}} g := g\circ_C f$$

1.1.6 Das Produkt von Kategorien

Seien C und D Kategorien. Das Produkt von C und D wird mit

$$C\times D$$

bezeichnet und ist die in folgender Weise definierte Kategorie. Die Objekte von $C\times D$ ist die Paare (X,Y) mit $X\in|C|$ und $Y\in|C|$. Die Menge $\mathrm{Hom}((X,Y),(X',Y'))$ besteht aus den Paaren (f,g) mit $f\in\mathrm{Hom}(X,X')$ und $g\in\mathrm{Hom}(Y,Y')$. Die Komposition ist schließlich koordinatenweise definiert.

$$(f,g)\circ(f',g') := (f\circ f', g\circ g').$$

1.1.7 Teilkategorien

Sei C eine Kategorie. Eine Kategorie D heißt Teilkategorie von C, falls folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) $|D| \subseteq |C|$.

(ii) $\mathrm{Hom}_D(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_C(X,Y)$ für beliebige Objekte X,Y von D.

(iii) Die Komposition von Morphismen von D ist dieselbe wie die der entsprechenden Morphismen von C.

(iv) Die identischen Morphismen der Mengen $\mathrm{Hom}_D(X,X)$ mit $X\in|D|$ sind auch identische Morphismen von C.

Eine volle Teilkategorie ist eine Teilkategorie, für welche in (ii) stets das Gleichheitszeichen gilt.

Beispiele

(i) Die Kategorie der endlichen abelschen Gruppen ist ein Beispiel einer vollen Teilkategorie von **Ab**.

(ii) Die Kategorie der metrischen Räume und abstandstreuen Abbildungen ist eine Teilkategorie in der Kategorie der metrischen Räume und kontrahierenden

Abbildungen. Beide Kategorien haben dieselben Objekte. Die erstere ist keine volle Teilkategorie in der zweiten. Beide sind Teilkategorien von **Ens**.

1.1.8 Spezielle Morphismen

Seien C eine Kategorie und $f:X\to Y$, $g:Y\to X$ zwei Morphismen von C mit

$$f\circ g = id.$$

Dann heißt f linksinvers zu g und g rechtsinvers zu f. Der Morphismus g heißt dann auch Schnitt von f und der Morphismus f heißt Retraktion von g. Ein Isomorphismus ist ein Morphismus, zu welchen ein linksinverser und ein rechtsinverser Morphismus existiert. Zwei Objekte X,Y heißen isomorph,

$$X \cong Y,$$

falls ein Isomorphismus $X\to Y$ existiert. Ein Monomorphismus ist ein Morphismus $f:X\to Y$ mit der Eigenschaft, daß für beliebige Morphismen u,v mit dem Ziel X gilt

$$f\circ u \neq f\circ v \text{ falls } u \neq v.$$

Ein Epimorphismus ist ein Monomorphismus der dualen Kategorie.

Beispiele

Ein Isomorphismus in **Ens** ist einfach eine bijektive Abbildung. Ein Isomorphismus in **Top** ist eine bijektive stetige Abbildung mit stetiger Umkehrung. Solche Abbildungen heißen auch Homöomorphismen.

1.1.9 Funktoren

Seien C und D Kategorien. Ein Funktor $F: C\to D$ (oder auch kovarianter Funktor) besteht aus

(i) einer Abbildung $F: |C|\to|D|$ der Objekte, die ebenfalls mit F bezeichnet wird.

(ii) einer Abbildung $F: Mor(C)\to Mor(D)$ der Morphismen, die ebenfalls mit F bezeichnet wird.

Dabei wird gefordert, daß folgende Bedingungen erfüllt sind.

1. $F(Hom(X,Y)) \subseteq Hom(F(X),F(X))$ für beliebige $X,Y\in|C|$, d.h. $f(X\xrightarrow{f}Y)$ ist ein Morphismus der Gestalt $f(X)\xrightarrow{F(f)}f(Y)$.
2. $F(f\circ g) = F(f)\circ F(g)$ für beliebige Morphismen, welche $f\circ g$ definiert ist.
3. $F(id_X) = id_{F(X)}$ für beliebige Objekte $X\in|C|$.

Ein Kofunktor F von C nach D (oder auch kontravarianter Funktor) ist ein Funktor

$$F:C^{op}\to D,$$

der auf der zu C dualen Kategorie definiert ist, d.h. $f(X\xrightarrow{f}Y)$ ist ein Morphismus der Gestalt $f(Y)\xrightarrow{F(f)}f(X)$.

Ein Bifunktor ist ein Funktor der Gestalt

$$F: C\times C' \to D,$$

wobei C, C' und D Kategorien seien.

Bemerkung

Ist $F:C\to D$ ein (Ko-)Funktor und $f:X\to Y$ ein Isomorphismus, so ist auch F(f) ein Isomorphismus. Ist nämlich g zu f invers, so ist F(g) zu F(f) invers. Zum Beispiel gilt im Funktorfall

$$F(g)\circ F(f) = F(g\circ f) = F(id_X) = id_{F(X)}$$

1.1.10 Beispiele für Funktoren

(i) Sei C eine Kategorie. Der identische Funktor Id:C→C bildet jedes Objekt von C und jeden Morphismus von C auf sich selbst ab.

(ii) Seien C eine Kategorie und A∈|C| ein Objekt. Der zu A gehörige kovariante Hom-Funktor ist der Funktor

$$h_A = \mathrm{Hom}(A,?): C \to \mathrm{Ens}, X \mapsto \mathrm{Hom}(A,X),$$

d.h. für Objekte X∈|C| gelte $h_A(X) := \mathrm{Hom}(A,X)$. Auf den Morphismen f:X→X' von C ist h_A durch die Morphismenkomposition definiert.

$$h_A(f): \mathrm{Hom}(A,X) \to \mathrm{Hom}(A,X'), g \mapsto f \circ g.$$

(iii) Seien C eine Kategorie und A∈|C| ein Objekt. Der zu A gehörige kontravariante Hom-Funktor ist der Funktor

$$h^A = \mathrm{Hom}(?,A): C^{op} \to \mathrm{Ens}, X \mapsto \mathrm{Hom}(X,A),$$

d.h. für Objekte X∈|C| gelte $h^A(X) := \mathrm{Hom}(X,A)$. Auf den Morphismen f:X→X' von C ist h^A durch die Morphismenkomposition definiert.

$$h_A(f): \mathrm{Hom}(X',A) \to \mathrm{Hom}(X,A), g \mapsto g \circ f.$$

(iv) Seien C eine Kategorie. Dann ist der zu C gehörige Hom-Funktor definiert als der Bifunktor

$$\mathrm{Hom}: C^{op} \times C \to \mathrm{Ens}, (X,Y) \mapsto \mathrm{Hom}(X,Y),$$

welcher kontravariant im ersten und kovariant im zweiten Argument ist. Auf den Morphismen (f,g):(X,Y) → (X',Y') ist Hom durch die Morphismenkomposition definiert.

$$\mathrm{Hom}(f,g): \mathrm{Hom}_C(X,Y) \to \mathrm{Hom}_C(X',Y'), \alpha \mapsto g \circ \alpha \circ f$$

Man beachte, als Morphismen von C haben f bzw g die Gestalt f:X'→X und g:Y→Y'.

(v) Wenn wir die Gruppen G und H als Kategorien auffassen, so ist ein Funktor F:G→H gerade ein Gruppenhomomorphismus und Kofunktor ein Antihomomorphismus (d.h. eine Abbildung mif F(g·g') = F(g')·F(g)).

(vi) Für jeden Körper K definert der Übergang zum dualen Vektorraum einen kontravarianten Funktor

$$*: (\mathrm{Vect}_K)^{op} \longrightarrow \mathrm{Vect}_K, V \mapsto V^*, f \mapsto f^*.$$

der Kategorie Vect_K der K-Vektorräume und K-lineare Abbildungen in sich.

(vii) Für jeden K-Vektorraum W definiert das Tensorprodukt einen kovarianten Funktor

$$W\otimes_K: \mathrm{Vect}_K \longrightarrow \mathrm{Vect}_K, V \mapsto W\otimes_K V, f \mapsto f\otimes \mathrm{Id}_W .$$

1.1.11 Komposition von Funktoren

Seine F:C→D und G:D→E zwei Funktoren. Dann ist die Zusammensetzung von F und G ein Funktor

$$G \circ F: C \to E,$$

der wie folgt definiert ist. Für jedes Objekt X von C gilt

$$G \circ F(X): = G(F(X))$$

und für jeden Morphismus f:X→Y von C gilt

$$G \circ F(f) := G(F(f)).$$

Die Kategorie der Kategorien wird mit **Cat** bezeichnet. Ihre Objekte sind die Kategorien, ihre Morphismen sind die Funktoren und als Komposition nimmt man die

eben beschriebene Zusammensetzung von Funktoren. Die Kategorie ist mit Vorsicht zu verwenden, da sie anfällig gegenüber den Widersprüchen der Mengenlehre ist.

1.1.12 Natürliche Transformationen

Seien F, G: C→D zwei Funktoren mit derselben Quelle und demselben Ziel. Eine natürliche Transformation ξ:F→G oder ein funktorieller Morphismus ist eine Familie

$$\{\xi(X):F(X)\rightarrow G(X)\}_{X\in|C|}$$

von Morphismen aus D mit der Eigenschaft, daß für jeden Morphismus f:X→X' von C das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\xi(X)} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(X') & \xrightarrow{\xi(X')} & G(X') \end{array}$$

Sind die Morphismen $\xi(X)$ sämtlich Isomorphismen, so heißt ξ auch natürliche Äquivalenz oder funktorieller Isomorphismus. Die Inversen der $\xi(X)$ definieren dann ebenfalls eine natürliche Äquivalenz. Sind ξ:F→G und η:G→H zwei natürliche Transformtionen, so ist durch

$$(\xi\circ\eta)(X) := \xi(X)\circ\eta(X)$$

eine natürliche Transformation $\xi\circ\eta$: F→H definiert, die Zusammensetzung der natürlichen Transformationen ξ und η.

Die Kategorie der Funktoren auf C mit Werten in D wird mit

$$\mathrm{Hom}(C,D) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(C, D)$$

bezeichnet. Ihre Objekte sind die Funktoren C→D, d.h.

$$|\mathrm{Hom}(C,D)| = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(C, D)$$

ihre Morphismen sind die natürlichen Transformationen und die Morphismenkomposition ist die eben definierte Zusammensetzung natürlicher Transformationen.

1.1.13 Beispiele natürlicher Transformationen[1]

(i) Für jeden Funktor F:C→D definiert die Familie der identischen Morphismen von D eine natürliche Transformation id:F→F, die identische Transformation von F.

(ii) Seien C eine Kategorie und A∈|C| ein Objekt. Weiter seien F:C→Ens ein Funktor und a∈F(A) ein Element. Dann kann man wie folgt eine natürliche Transformation

$$\Phi^a:h_A \rightarrow F$$

konstruieren. Wie oben bezeichne h_A: C→Ens, X↦Hom(A,X) den kovarianten Hom-Funktor. Für jedes X∈|C| sei $\Phi^a(X)$ die Abbildung

$$\Phi^a(X): \mathrm{Hom}(A,X) \rightarrow F(X), (A\xrightarrow{f}X) \mapsto F(f)(a),$$

d.h.

$$\Phi^a(X)(f) := F(f)(a).$$

---

[1] Die in der lineare Algebra definierte Abbildung

$$V \longrightarrow V^{**}$$

eines Vektorraums in sein doppeltes Dual definiert einen funktoriellen Morphismus des identischen Funktors in die Zusammensetzung des Dualisierungsfunktors mit sich selbst. Auf den endlich-dimensionalen Vektorräumen ist dies ein funktorieller Isomorphimus.

Man beachte F(f) ist eine Abbildung F(f):F(A)→F(X). Die Kommutativität der obigen qudratischen Diagramme ist eine Folge der Funktoreigenschaft von F.

(iii) Seien C eine Kategorie und A∈|C| ein Objekt. Weiter seien $F:C^{op}\to Ens$ ein Kofunktor und a∈F(A) ein Element. Dann kann man wie folgt eine natürliche Transformation

$$\Phi^a: h^A \to F$$

konstruieren. Wie oben bezeichne h^A: $C^{op}\to Ens$, $X\mapsto Hom(X,A)$ den kontravarianten Hom-Funktor. Für jedes X∈|C| sei Φ(X) die Abbildung

$$\Phi^a(X): Hom(X,A) \to F(X), (X \xrightarrow{f} A) \mapsto F(f)(a).$$

Man beachte F(f) ist eine Abbildung F(f):F(A)→F(X). Die Kommutativität der obigen qudratischen Diagramme ist eine Folge der Funktoreigenschaft von F.

Das nachfolgende Lemma von Yoneda besagt, es gibt keine weiteren natürlichen Transformationen $h_A \to F$ neben den eben beschriebenen.

1.1.14 Lemma von Yoneda

Seien F: C → **Ens** ein Funktor, A∈|C| ein Objekt und ξ: $h_A \to F$ eine natürliche Transformation. Dann gibt es genau ein Element a∈F(A) mit $\xi = \Phi^a$. Es gilt

$$a = \xi(A)(id_A).$$

Mit anderen Worten, die Abildung

$$F(A) \longrightarrow Hom_{Hom(C,Ens)}(h_A, F), a \mapsto \Phi^a,$$

ist bijektiv.

Bemerkungen

(i) Eine natürliche Transformation $h_A \to F$ ist also bereits eindeutig durch ihren Wert im Element $id_A \in h_A(A)$ bestimmt, und als Bild kann man ein beliebiges Element von F(A) vorgeben.

(ii) Eine analoge Aussage gilt auch für Kofunktoren $F:C^{op}\to$ **Ens** und natürliche Transformationen $h^A \to F$. (Man ersetze C durch C^{op}).

Beweis des Yoneda-Lemmas. Für jeden Morphismus f:A→X von C hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} h_A(A) & \xrightarrow{\xi(A)} & F(A) \\ {\scriptstyle h_A(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ h_A(X) & \xrightarrow{\xi(X)} & F(X) \end{array}$$

Insbesondere erhält man für das Bild von $id_A \in h_A(A)$ bei den beiden möglichen Kompositionen:

$$\begin{array}{ccccc} \xi(X)(h_A(f)(id_A)) & = & F(f)(\xi(A)(id_A)) & & \\ || & & || & & \\ \xi(X)(f) & & F(f)(a) & = & \Phi^a(X)(a) \end{array}$$

Dabei haben wir $a := \xi(A)(id_A)$ gesetzt. Es gilt also $\xi = \Phi^a$.

Zum Beweis der Eindeutigkeit von a nehmen wir an, es gilt

$$\Phi^a = \Phi^{a'}, a,a' \in F(A).$$

Dann ist aber $a = F(id_A)(a) =^2 \Phi^a(A)(id_A) = \Phi^{a'}(A)(id_A) = F(id_A)(a') = a'$.

QED.

1.1.15 Darstellbare Funktoren

Seien $F:C \to Ens$ ein (Ko-)Funktor und $A \in |C|$ ein Objekt. Ein Element $a \in F(A)$ heißt universell für F, wenn die zugehörige natürliche Transformation

$$\Phi^a:h^A \to F \text{ (bzw. } \Phi^a:h_A \to F)$$

ein Isomorphismus von Funktoren (d.h. eine natürliche Äquivalenz) ist. Das Objekt A heißt dann darstellendes Objekt für den Funktor F. Ein Funktor, der ein darstellendes Objekt besitzt, heißt darstellbar.
Nicht jeder Funktor ist darstellbar. Das Paar (A,a) ist, falls es existiert bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Bemerkungen

(i) Wir haben in der Vorlesung zur linearen Algebra eine Reihen von Beispielen für Universalitäteigenschaften kennengelernt, ohne genau sagen zu können, was man unter einer Universalitätseigenschaft eigentlich versteht. Der Begriff des darstellbaren Funktors ist die formale Antwort auf diese letztere Frage: der Nachweis der Darstellbarkeit eines Funktors ist gleichbedeutend mit der Konstruktion eines Objektes mit einer Universalitätseigenschaft.

(ii) Man beachte die Ähnlichkeit des nachfolgenden Beweises mit den Eindeutigkeitsbeweisen für Objekte mit Universalitätseigenschaften.

1.1.15 Eindeutigkeit des darstellenden Paares

Sei $F:C \to Ens$ ein darstellbarer Funktor mit dem universellen Element $a \in F(A)$. Dann gilt:

(i) Zu jedem Objekt $X \in |C|$ und jedem Element $x \in F(X)$ gibt es genau einen Morphismus $f:A \to X$ von C mit $F(f)(a) = x$.

(ii) Ist x ebenfalls universell, so ist f ein Isomorphismus.

Beweis. (i). Nach Voraussetzung ist die Abbildung

$$\Phi^a(X):Hom(A,X) \to F(X), f \mapsto F(f)(a),$$

bijektiv. Es gibt also genau ein f mit $F(f)(a) = x$.
(ii) Ist auch x universell, so gibt es außerdem noch genau ein g mit $F(g)(x) = a$. Dann ist aber

$$F(fg)(x) = F(f)F(g)(x) = F(f)(a) = x$$

Vergleich mit der Identität

$$F(id_X)(x) = x$$

zusammen mit der Universalität vom x liefert $fg = id_X$. Aus Symmetriegründen gilt dann aber auch $fg = id_A$, d.h. f ist ein Isomorphismus.

QED.

1.1.16 Algebraische Konstruktionen in beliebigen Kategorien

Der Begriff des darstellbaren Funktors kann man benutzen um Konstruktionen der Mengelehre auf allgemeine Kategorien zu übertragen. Wir führen einige Beispiele an.

(i) Direkte Summen. Seien $A,B \in |C|$ zwei Objekte und F der Funktor

$$F = (h_A, h_B): C \to Ens, X \mapsto Hom(A,X) \times Hom(B,X).$$

Auf den Morphismen sei F wie folgt definiert. Für $f:X \to X' \in Mor(C)$ sei F(f) die Abbildung

---

[2] In der obigen Identität, $\xi(A)(f) = F(f)(a)$, welche für jeden Morphismus $f:A \to X$ gilt, setze man $f=id_A$ (und insbesondere X=A). Wegen $\xi = \Phi^a$ ergibt sich $F(id_A)(a) = \xi(A)(id_A) = \Phi^a(A)(id_A)$.

$$F(f): \mathrm{Hom}(A,X)\times\mathrm{Hom}(B,X) \to \mathrm{Hom}(A,X')\times\mathrm{Hom}(B,X'), (\alpha,\beta) \mapsto (f\alpha,f\beta).$$

Ist F darstellbar und ist S ein darstellendes Objekt, so gilt für jedes $X\in|C|$:

$$\mathrm{Hom}(A,X)\times\mathrm{Hom}(B,X) \cong \mathrm{Hom}(S,X).$$

Das Objekt $S\in|C|$ heißt dann direkte Summe von A und B (oder auch Koprodukt) und wird mit

$$S = A\oplus B$$

bezeichnet. Ist

$$(p,q)\in\mathrm{Hom}(A,S)\times\mathrm{Hom}(B,S)$$

das universelle Element, so heißen $p:A\to A\oplus B$ und $q:B\to A\oplus B$ natürliche Einbettungen.[3] Die direkte Summe S von A und B ist dadurch charakterisiert, daß es zu je zwei Morphismen $a:A\to X$ und $b:B\to X$ mit demselben Ziel X genau einen Morphismus $f:S\to X$ gilt mit $a = fp$ und $b = fq$. Analog definiert man unendliche direkt Summen.

(ii) Direkte Produkte sind die direkten Summen der dualen Kategorie. Man spricht dann von den natürliche Projektionen $A\times B\to A$ und $A\times B\to B$.

Beispiele

Die direkten Summen in **Ens** und **Top** sind gerade die disjunkten Vereinigungen. In **Ab** sind es die gewöhnliche direkten Summen von Gruppen.

Die direkten Produkte in **Ens**, **Top** und **Ab** sind die Produktmengen, Produkträume bzw. die gewöhnlichen direkten Produkte.

1.2 Homotopie

1.2.1 Vorbemerkungen

(i) Sei $f:X\to Y$ eine stetige Abbildung. Die Homotopietheorie interessiert sich für Eigenschaften von f, die sich bei kleinen Veränderungen von f auch nur wenig ändern.

(ii) Die Physik zum Beispiel muß im allgemeinen davon ausgehen, daß dies bei allen physikalisch interessanten Eigenschaften der Fall ist (weil jede Messung mit Fehlern behaften ist, also nur Eigenschaften erfaßt werden, die sich bei geringen Meßfehlern nur unwesentlich abändern).

(iii) Läßt sich eine Eigenschaft der angegebenen Art durch eine diskrete Größe beschreiben, zum Beispiel durch eine natürliche Zahl, so bleibt diese Eigenschaft überhaupt völlig invariant auch bei großen Veränderungen, sobald sich diese nur aus vielen kleinen zusammensetzen.

(iv) Letzteres ist die Grundlage des sogenannte Prinzips der Homotopie-Invarianz. Der Begriff der Homotopie ist eine Formalisierung des beschriebenen Phänomens.

1.2.2 Der Begriff der Homotopie

Seien X,Y topologische Räume und $\mathbf{I}=[0,1]$ das Einheitsintervall. Eine Homotopie oder auch Deformation von X nach Y ist eine stetig Abbildung

$$F: X\times\mathbf{I} \to Y.$$

Für jedes $t\in\mathbf{I}$ ist dann insbesondere die Abbildung

$$F_t : X\to Y, x \mapsto F(x,t),$$

stetig. Wir werden im folgenden auch von der zugehörigen Familie

$$\{F_t : X\to Y\}_{t\in\mathbf{I}}$$

als von einer Homotopie sprechen, bzw. mit dem Begriff der Homotopie immer die Vorstellung einer solchen Familie von stetig variierenden Abbildungen verbinden. Statt von einer Homotopie werden wir auch von einer stetigen Familie

$$F_t : X\to Y, t\in I,$$

---

[3] Im Fall von Vektorräumen oder Gruppen kann man für p und q die natürlichen Einbettungen der beiden direkten Summanden in die direkte Summe verwenden.

von Abbildungen sprechen.

Bemerkung

Wenn man $x \in X$ festhält und $t \in I$ variiert, so kann man sich $F_t(x)$ als einen sich mit der Zeit im Raum Y bewegenden Punkt vorstellen. Analog stellt man sich $F_t(X)$ als ein sich mit der Zeit deformierendes Gebilde vor.

1.2.3 Homotope Abbildungen

Zwei stetige Abbildungen $f,g: X \to Y$ heißen homotop, falls es eine stetige Familie von Abbildungen

$$F_t : X \to Y, t \in I,$$

gibt mit $f = F_0$ und $g = F_1$. Wir schreiben dann

$$f \simeq g \text{ oder } F: f \simeq g$$

und sagen, F ist eine Deformation der Abbildung f in die Abbildung g.

Sei $A \subseteq X$ ein Teilraum. Falls die Einschränkung $F_t|_A$ auf A unabhängig von t ist, so heißt eine F auch relative Homotopie bzgl. A. Wir schreiben dann

$$f \simeq g \text{ rel } A \text{ oder } F: f \simeq g \text{ rel } A.$$

Ist $g = F_1$ eine konstante Abbildung, so heißt F auch Nullhomotopie und $f = F_0$ heißt nullhomotop, symbolisch

$$f \simeq 0.$$

Ein topologischer Raum X heißt kontrahierbar, fall die identische Abbildung

$$\mathrm{Id}: X \longrightarrow X$$

nullhomotop ist. Wir schreiben dann auch

$$X \simeq 0.$$

1.2.4 Homotopieklassen

Die Homotopierelation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen Homotopieklassen. Die Homotopieklasse der stetigen Abbildung $f: X \to Y$ wird mit $[f]$ bezeichnet.

Beweis. Reflexivität. Die konstante Homotopie $F_t(x) = f(x)$ zeigt, es gilt $F: f \simeq f$.

Symmetrie. Ist

$$F_t : X \to Y, t \in I,$$

eine Deformation von f in g, so ist

$$F_{1-t} : X \to Y, t \in I,$$

eine Deformation von g in f.

Transitivität. Seien Homotopien

$$F: f \simeq g \text{ und } G: g \simeq h$$

gegeben Wir setzen

$$H(x,t) := \begin{cases} F(x,2t) & \text{für } 0 = t = \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} = t = 1 \end{cases}$$

Dann ist H eine Deformation von f in h.

QED.

1.2.5 Verträglichkeit mit Kompositionen

Seien $f,f': X \to Y$ und $g,g': Y \to Z$ stetige Abbildungen mit

$$f \simeq f' \text{ und } g \simeq g'.$$

Dann gilt $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

Beweis. Mit F:f ≃ f' und G:g ≃ g' gilt H: g∘f ≃ g'∘f', wenn man $H_t := G_t \circ F_t$ setzt.

QED.

Bemerkung

Nach Aussage 1.2.5 ist die Homotopieklasse [f∘g] nur von den Homotopieklassen [f] und [g] abhängig und nicht von den einzelnen Repräsentant. Man kann also

$$[f]\circ[g] := [f\circ g]$$

setzten und auf diese Weise die Komposition von Homotopieklassen definieren.

1.2.6 Die Homotopiekategorie

Die Homotopiekategorie wird mit **Htp** bezeichnet. Ihre Objecte sind die topologischen Räume und ihre Morphismen die Homotopieklassen stetiger Abbildungen. Die Morphismenkomposition ist die oben definierte Komposition von Homotopieklassen.

Bemerkungen

(i) **Htp** hat dieselben Objekte wie **Top**.

(ii) Der Übergang zu den Homotopieklassen definiert einen Funktor

$$\pi: \mathrm{Top} \to \mathrm{Htp}, X \mapsto X, f \mapsto [f],$$

den sogenannten Homotopiefunktor.

(iii) Die wichtigste Methode der algebraischen Topologie besteht in der Konstruktion von gewissen Funktoren F: **Top** → A, wobei A eine der algebraischen Kategorien ist (Gruppen, Ringe, ...). Meistens sind diese Funktoren homotopieinvariant, d.h. aus f ≃ g in **Top** folgt stets F(f) = F(g). Mit anderen Worten, F faktorisiert sich über den Homotopiefunktor π, d.h. hat die Gestalt

$$\mathbf{Top} \xrightarrow{\pi} \mathbf{Htp} \xrightarrow{F'} A.$$

Der Funktor F vernachlässigt alle Informationen, welche auch von π vernachlässigt werden. Deshalb interessiert man sich in der algebraischen Topologie mehr für die Kategorie **Htp** als für **Top**.

(iv) Insbesondere macht man oftmals keinen Unterschied zwischen topologischen Räumen, die in **Htp** isomorph sind. Das sind Räume X,Y zu denen es stetige Abbildungen

$$f:X\to Y \text{ und } g:Y\to X$$

gibt mit $f\circ g \simeq id_Y$ und $g\circ f \simeq id_X$. Solche Abbildungen heißen Homotopieäquivalenzen. Die Räume X und Y, zwischen denen es Homotopieäquivalenzen gibt, heißt homotopieäquivalent, symbolisch,

$$X \simeq Y.$$[4]

---

[4] Ein nicht-leerer Raum X ist genau dann homotopie-äquivalent zum einpunktigen Raum P, wenn er kontrahierbar ist:

$$X \simeq P \Leftrightarrow X \simeq 0.$$

Die Bedingung links bedeutet, die einzige Abbildung f: X ⟶ P besitzt eine Homotopie-Inverse, sagen wir g: P ⟶ Y. Die konstante Abbildung g∘f: X ⟶ X ist dann homotop zur identischen Abbildung, d.h. die Bedingung rechts ist erfüllt. Die Bedingung rechts bedeutet umgekehrt, die identische Abbildung Id: X ⟶ X ist homotop zu einer konstanten Abbildung, sagen wir zu

$$f: X \longrightarrow X, f(X) = \{p\}.$$

Betrachten wir f als Abbildung

$$f: X \longrightarrow P := \{p\}$$

und bezeichnen mit g: {p} ⟶ X die natürliche Einbettung. Dann gilt

$$g\circ f \simeq Id.$$

Trivialerweise ist f∘g = Id, d.h. f und g sind zueinander homotopie-invers, d.h. es gilt

$$X \simeq P.$$

(v) Homotopieinvariane Funktoren haben dieselben Werte auf homotopieäquivalenten Räumen, genauer

$$X \simeq Y \Rightarrow F(X) \cong F(Y).$$

1.2.7 Topologische Paare

Unter einem topologischem Paar wollen wir im folgenden ein Paar (X,A) verstehen, wobei X ein topologischer Raum ist und A ein Unterraum von X. Eine Abbildung von Paaren,

$$f: (X,A) \to (Y,B),$$

soll eine stetige Abbildung $f:X \to Y$ sein mit $f(A) \subseteq B$. Die topologischen Paare und ihre Abbildungen bilden bzgl. der gewöhnlichen Komposition eine Kategorie, die mit

$$\mathbf{Top}^{(2)}$$

bezeichnet wird. Mit Hilfe des Funktors

$$\mathbf{Top} \to \mathbf{Top}^{(2)}, X \mapsto (X,\varnothing),$$

identifizieren wir im folgenden Top mit einer vollen Teilkategorie von $\mathbf{Top}^{(2)}$.

1.2.8 Die direkte Summe von topologischen Paaren

Sei der topologische Raum X disjunkte Vereinigung der Familie $\{X_i\}_{i \in I}$, d.h. X ist die direkte Summe dieser Räume in **Top**,

$$X = \oplus_{i \in I} X_i$$

Weiter sei $A \subseteq X$ ein Unterraum und es sei $A_i = A \cap X_i$. Dann ist das Paar (X,A) in $\mathbf{Top}^{(2)}$ die direkte Summe der Paare (X_i, A_i),

$$(X,A) = \oplus_{i \in I} (X_i, A_i).$$

1.2.9 Ein Produkt von topologischen Paaren

Für Paare (X,A) und (Y,B) setzen wir

$$(X,A) \times (Y,B) := (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

Dies ist *nicht* das direkte Produkt der beiden Paare in $\mathbf{Top}^{(2)}$.

1.2.10 Homotopie von Paaren

Zwei Abbildungen $f,g:(X,A) \to (Y,B)$ heißen homotop, falls es eine Homotopie $H:f \simeq g$ gibt, für welche alle H_t Abbildungen $(X,A) \to (Y,B)$ von Paaren sind. Man schreibt dann wieder $f \simeq g$. Die Relation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen werden wieder mit [f] bezeichnet. Man erhält auf diese Weise eine Kategorie $\mathbf{Htp}^{(2)}$ und einen Funktor

$$\pi: \mathbf{Top}^{(2)} \to \mathbf{Htp}^{(2)}, (X,A) \mapsto (X,A), f \mapsto [f].$$

1.2.11 Topologische Tripel von topologischen Räumen

Unter einem topologischen Tripel wollen wir ein Tripel (X,A,B) verstehen mit

$B \subseteq A \subseteq X$, wobei X ein topologischer Raum ist. Falls nur $A \subseteq X$ und $B \subseteq X$ gilt sprechen wir von einer (topologischen) Triade.

Beide Begriffe führen zu gewissen Kategorien, welche $\mathbf{Top}^{(2)}$ enthalten und sogar zu entsprechenden homotopischen Begriffen und Kategorien.

2. Homologie von Komplexen

2.1 Komplexe

2.1.1 Die Homologie eines Komplexes

Ein Komplex K (von abelschen Gruppen, von k-Vektorräumen, von R-Moduln, ...) ist eine Familie

$$\{\partial_n : K_n \to K_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

von aufeinanderfolgenden Homomorphismen (von abelschen Gruppen, von k-Vektorräumen, von R-Moduln,...) mit der Eigenschaft, daß die Zusammensetzung von je zwei aufeinanderfolgenden Homomorphismen Null ist,

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0.$$

Schreibweise:

$$K: \ldots \to K_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} K_{n-2} \cdots$$

Die Elemente von K_n heißen n-dimensionale Ketten oder auch n-Ketten von K. Die Elemente der Untergruppe

$$Z_n K := \mathrm{Ker}(\partial_n)$$

heißen n-dimensionale Zyklen oder auch n-Zyklen von K. Die Elemente der Untergruppe

$$B_n K := \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$$

heißen n-dimensionale Ränder oder auch n-Ränder von K. Wegen $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ besteht die Inklusion $B_n K \subseteq Z_n K$. Man kann also die Faktorgruppe

$$H_n K := Z_n K / B_n K.$$

bilden. Diese heißt n-te Homologie des Komplexes K. Ihre Elemente heißen n-dimensionale Homologieklassen. Zwei Zyklen z,z' heißen homolog, wenn sie in derselben Homologieklasse liegen. Symbolisch:

$$z \sim z' \Leftrightarrow z - z' \in B_n K \Leftrightarrow z - z' = \partial c \text{ für ein } c \in K_{n+1}.$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation. Die Homologieklasse eines Zyklus z wird mit

$$[z]$$

bezeichnet. Die Abbildungen ∂_n heißen auch Randabbildungen oder Differentiale des Komplexes.

Ein Komplex heißt exakt, wenn $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) = \mathrm{Ker}(\partial_n)$ gilt für jedes n. Das ist äquivalent zu den Bedingungen

$$H_n K = 0 \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Die Homologiegruppen kann man als ein Maß für die Abweichung von der Exaktheit auffassen.

2.1.2 Komplexabbildungen

Seien $K := \{\partial_n : K_n \to K_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ und $K' := \{\partial'_n : K'_n \to K'_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ Komplexe. Eine Komplexabbildung $f: K \to K$ oder auch Kettenabbildung oder auch Komplexmorphismus ist eine Familie

$$f := \{f_n : K_n \to K'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

von Gruppenhomomorphismen, welche mit den Randabbildungen der Komplexe verträglich sind. Das bedeutet, die folgenden Diagramme sollen kommutativ sein.

$$\begin{array}{ccc} K_n & \xrightarrow{f_n} & K'_n \\ {\scriptstyle \partial_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_n} \\ K_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & K'_{n-1} \end{array}$$

Sind $f:K\to K'$ und $f':K'\to K''$ zwei Komplexabbildungen, so ist durch

$$(f'\circ f)_n := f'_n \circ f_n$$

eine Komplexabbildung $K\to K''$ definiert, welche Komposition von f und f' heißt und mit $f'\circ f$ bezeichnet wird.
Die Komplexe bilden zusammen mit den Komplexabbildungen und der eben beschriebenen Komposition eine Kategorie, die Kategorie der Komplexe abelscher Gruppen oder auch Komplexkategorie über Ab. Diese wird mit

$$\partial\mathbf{Ab}$$

bezeichnet. Die Isomorphismen in $\partial\mathbf{Ab}$ sind diejenigen Komplexabbildungen f, deren Komponenten f_n Isomorphismen in **Ab** sind.

2.1.3 Der Homologiefunktor

Sei $f:K\to K'$ eine Komplexabbildung. Aus der Kommutativität des obigen Diagramms, d.h. aus der Bedingung

$$\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$$

ergeben sich die Inklusionen

$$f_n(Z_nK) \subseteq Z_nK' \text{ und } f_n(B_nK) \subseteq B_nK'.$$

Nach dem Homomorphiesatz induziert f_n einen Homorphismus

$$f_* := H_nf: H_nK \to H_nK', [z] \mapsto [f_n(z)],$$

für welchen das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} Z_nK & \xrightarrow{f_n} & Z_nK' \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_nK & \xrightarrow{H_nf} & H_nK' \end{array}$$

Trivialerweise ist $H_n(\mathrm{id})$ die identische Abbildung. Für je zwei Komplexabbildungen $f:K\to K'$ und $f':K'\to K''$ gilt $H_n(f'\circ f) = H_n(f')\circ H_n(f)$. Mit anderen Worten, für jedes $n\in\mathbb{Z}$ ist H_n ein Funktor

$$H_n: \partial\mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}.$$

Bemerkung

Die Funktoren der algebraischen Topologie sind typischerweise von der Gestalt

$$\mathbf{Top}\to\partial\mathbf{Ab}\to\mathbf{Ab},$$

d.h. sie setzen sich aus zwei Funktoren zusammen, wobei der zweite Funktor der gerade konstruierte Homologiefunktor ist. Für den ersten Funktor gibt es recht unterschiedliche Möglichkeiten (vielleicht soviele wie Mathematiker). Wir betrachte hier also zunächst den formalen, allen Homologietheorien gemeinsam Teil der algebraischen Topologie (der manchmal auch als "general nonsense" bezeichnet wird).

Vereinbarungen

Wenn keine Verwechslungen möglich sind, werden wir anstelle von ∂_n, f_n, $H_n(f)$ auch ∂, f, f_* schreiben.

Alle Gruppen seien, wenn nicht ausdrücklich anderes erwähnt, abelsch.

2.1.4 Graduierte Gruppen

Eine ($\mathbb{Z}$-)graduierte Gruppe ist eine Gruppe G welche in eine direkte Summe von Untergruppen G_n zerfällt,

$$G = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} G_n$$

Die Untergruppe G_n heißt n-ter homogener Bestandteil von G. Ein Morphismus $f:G\to G'$ graduierter Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus mit $f(G_n)\subseteq G'_n$ für jedes n. Die graduierten Gruppen bilden mit den angegebenen Homomorphismen die Kategorie der graduierten Gruppen. Diese wird mit

$$\mathbf{GAb}$$

bezeichnet. Ist G eine graduierte Gruppe, so bezeichnet G[i] die graduierte Gruppe mit

$$G[i]_n := G[n+i].$$

Bemerkungen.

(i) Einen Komplex K kann man als graduierte Gruppe

$$K := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} K_n$$

betrachten, zusammen mit einem Morphismus $\partial:K\to K[-1]$, welcher der Bedingung

$$\partial\circ\partial = 0$$

genügt.

(ii) Kern und Bild der Randabbildung ∂ sind dann graduierte Gruppen

$$ZK = \mathrm{Ker}(\partial) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} Z_n K$$

$$BK = \mathrm{Im}(\partial) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} B_n K$$

deren n-te homogene Bestandteile aus den n-Zyklen bzw. n-Rändern bestehen.

(iii) Die Homologie von K ist die graduierte Gruppe

$$HK := ZK/BK.$$

Dies ist eine graduierte Gruppe

$$HK = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n K$$

deren n-ter homogenere Bestandteil aus den n-dimensionalen Homologieklassen von K gebildet werden.

(iv) Der Übergang zur Homologie definiert einen Funktor

$$H: \partial\mathbf{Ab} \to \mathbf{Gab}.$$

(v) Jeder abelschen Gruppe $A\in Ab$ und jeder ganzen Zahl $k\in\mathbb{Z}$ kann man einen Komplex

$$(A,k): \ldots\longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

zuordnen mit

$$(A,k)_n = \begin{cases} A \text{ falls } n=k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

wobei die Randabbildungen sämtlich Null sind. Diese Konstruktion definiert für jedes k einen Funktor

$$\mathbf{Ab} \to \mathbf{GAb},\ A \mapsto (A,k).$$

2.1.5 Direkte Summen von Komplexen

Sei $\{K^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von Komplexen (die wir hier als graduierte Gruppen betrachten wollen). Dann heißt der Komplex

$$K := \oplus_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda$$

mit der Randabbildung $\partial := \oplus_{\lambda\in\Lambda}\partial^\lambda$ direkte Summe der Familie $\{K^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Es gilt

$$K_n = \oplus_{\lambda\in\Lambda} K_n^\lambda$$

$$\partial_n(\{c^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) = \{\partial_n^\lambda(c^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$$

also

$$ZK = \oplus_{\lambda\in\Lambda} ZK^\lambda$$

$$BK = \oplus_{\lambda\in\Lambda} BK^\lambda$$

$$HK = \oplus_{\lambda\in\Lambda} HK^\lambda$$

Analoge Konstruktionen bestehen für das direkte Produkt.

2.1.6 Der Kegel einer Komplexabbildung

Das ist ein technisch wichtiger Begriff, der mit dem Kegel über einem topologischen Raum zusammenhängt.

Sei $f:(K',\partial')\to(K'',\partial'')$ eine Komplexabbildung. Der Kegel Cf über f ist dann definiert als Komplex mit

$$(Cf)_n := K''_n \oplus K'_{n-1}.$$

Die n-te Randabbildung ist wie folgt definiert.

$$\partial\begin{pmatrix} c'' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial''c''+fc' \\ -\partial c' \end{pmatrix}$$

Betrachtet man die Elemente von $(Cf)_n$ als zweizeilige Spaltenvektoren, so besteht ∂ gerade in der "Multiplikation" mit der Matrix

$$\partial = \begin{pmatrix} \partial'' & f \\ 0 & -\partial' \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist

$$\partial\circ\partial = \begin{pmatrix} \partial'' & f \\ 0 & -\partial' \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} \partial'' & f \\ 0 & -\partial' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial''\circ\partial'' & \partial''\circ f - f\circ\partial' \\ 0 & \partial'\circ\partial' \end{pmatrix}$$

die Nullabbildung, d.h. Cf ist tatsächlich ein Komplex.

Spezialfälle

(i) Im Fall K=K', K''=0, f=0 schreibt man auch

$$K^+ := Cf.$$

Es gilt dann $K^+_n = K_{n-1}$, $\partial^{K^+} = -\partial^K$, also $H_n K^+ = H_{n-1}K$, also

$$H(K^+) = (HK)[-1].$$

K^+ heißt <u>Suspension</u> über K.

(ii) Im Fall K=K'=K'', f=id schreibt man auch

$$CK = Cf.$$

CK heißt <u>Kegel</u> über K.

2.1.7 Die kurze exakte Sequenz zum Abbildungskegel

Sei $f:K' \to K''$ eine Komplexabbildung. Dann besteht eine kurze exakte Sequenz von Komplexabbildungen

$$0 \to K'' \xrightarrow{\iota} Cf \xrightarrow{\kappa} K'[-1] \to 0.$$

mit $\iota(c') = (0,c')$ und $\kappa(c'',c') = c'$. Es ist leicht zu sehen, daß ι und κ Komplexabbildungen sind. Offensichtlich gilt $Im(\iota) = Ker(\kappa)$, d.h. die Sequenz ist tatsächlich exakt.
Diese Sequenz zerfällt als Sequenz graduierter Gruppen, jedoch im allgemeinen nicht in der Komplexkategorie[5] (Nehme $K' = K'' = (\mathbb{Z},0)$ und $f = id$)[6].

2.2 Die lange exakte Homologiesequenz

2.2.1 Teilkomplexe und Faktorkomplexe

Seien K und K' zwei Komplexe. Falls $K'_n \subseteq K_n$ für jedes n gilt und die Randabbildungen von K' die Einschränkungen der Randabbidlungen von K sind, so heißt K' Teilkomplex von K. Es gilt dann $\partial_n(K'_n) \subseteq K'_{n-1}$, d.h. die Randabbildung $\partial_n : K_n \to K_{n-1}$ induziert einen Homomorphismus

$$\bar{\partial}_n : K_n/K'_n \to K_{n-1}/K'_{n-1}, \; cl(c) \mapsto cl(\partial_n(c)),$$

wobei cl(c) die Restklasse von c bezeichnet. Wir setzen

$$\bar{K}_n := K_n/K'_n$$

Dann ist das folgende Diagramm kommutativ,

$$\begin{array}{ccc} K_n & \xrightarrow{\partial_n} & K_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{K}_n & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & \bar{K}_{n-1} \end{array}$$

und es gilt

$$\bar{\partial}_{n-1} \circ \bar{\partial}_n = 0$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$. Letzteres bedeutet, die Familie

$$\bar{K} := \{\bar{\partial}_n : \bar{K}_n \to \bar{K}_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

ist ein Komplex. Auf Grund der Kommutativität der obigen Vierecke setzen sich die natürliche Abbildungen

$$\gamma_n : K_n \to \bar{K}_n$$

---

[5] d.h. der Komplex in der Mitte läßt sich nicht identifizieren mit der direkten Summe der beiden äußeren Komplexe.

[6] Der Randoperator des Kegels ist dann durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, welche nicht direkte Summe von zwei 1×1-Matrizen ist.

zu einer Kettenabbildung $\gamma:K\to\bar{K}$ zusammen. Ein Komplex der Gestalt $\bar{K}$ heißt Faktorkomplex, und $\gamma:K\to\bar{K}$ heißt wie üblich natürliche Abbildung. Bezeichnung:

$$\bar{K} = K/K'.$$

2.2.2 Beispiele für Teil- und Faktorkomplexe

Sei $f:K\to K'$ eine Kettenabbildung. Der Kern von f wird mit Ker(f) bezeichnet und ist ein Teilkomplex von K mit

$$\mathrm{Ker}(f)_n := \mathrm{Ker}(f_n).$$

Das Bild von f wird mit Im(f) bezeichnet und ist ein Teilkomplex von K' mit

$$\mathrm{Im}(f) := \mathrm{Im}(f_n).$$

Auf Grund des Homomorphiesatzes für Gruppen ist der Faktorkomplex K/Ker(f) isomorph zu Im(f),

$$\mathrm{Im}(f) \cong K/\mathrm{Ker}(f).$$

Eine Sequenz von Kettenabbildungen

$$\ldots\to K'\xrightarrow{\alpha}K\xrightarrow{\beta}K''\to\ldots$$

heißt exakt an der Stelle K, wenn $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$ gilt. Sei heißt exakt, wenn sie an allen Stellen exakt ist. Zum Beispiel ist für jeden Teilkomplex $L\subseteq K$ die kurze Sequenz

$$0\to L\to K\to K/L\to 0$$

exakt. Wie im Fall von abelschen Gruppen sind alle kurzen exakten Sequenzen isomorph zu einer Sequenz dieser Gestalt.

2.2.3 Die Halbexaktheit des Homologiefunktors

Sei

$$0\to K'\xrightarrow{\alpha}K\xrightarrow{\beta}K''\to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen. Dann ist die folgende Sequenz von Homomorphismen graduierter abelscher Gruppen ebenfalls exakt.

$$H(K')\xrightarrow{H(\alpha)}H(K)\xrightarrow{H(\beta)}H(K'').$$

Bemerkung. Diese Aussage ist bedeutet gerade, daß jedes der Sequenzen

$$H_n(K')\xrightarrow{H_n(\alpha)}H_n(K)\xrightarrow{H_n(\beta)}H_n(K'').$$

exakt ist.

Beweis von 2.2.3. Wir haben zu zeigen, $\mathrm{Im}(H(\alpha)) = \mathrm{Ker}(H(\beta))$. Nach Voraussetzung ist $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$, insbesondere ist also

$$\beta\circ\alpha = 0$$

die Nullabbildung. Da H ein Funktor ist, folgt $H(\beta)\circ H(\alpha) = 0$, also

$$\mathrm{Im}(\alpha)\subseteq\mathrm{Ker}(\beta).$$

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion nehmen wir an, wir hätten ein Element $[c]\in\mathrm{Ker}(H(\beta))$ gegeben. Wir haben zu zeigen, [c] liegt im Bild von $H(\alpha)$.Es gilt

$$0 = H(\beta)(c) = [\beta(c)]$$

in H(K''). Das bedeutet, $\beta(c)$ ist ein Rand,

$$\beta(c) = \partial''(d'')$$

für eine Kette d'' von K''. Nun ist nach Voraussetzung die Kettenabbildung β surjektiv, d.h. es gibt eine Kette d von K mit

$$d'' = \beta(d).$$

Nach Konstruktion gilt

$$\beta(\partial d) = \partial''\circ\beta(d) = \partial''(d'') = \beta(c)$$

also

$$\beta(c\text{-}\partial d) = 0.$$

Nun ist die gegebene Komplexsequenz aber exakt, d.h. es gibt eine Kette c' von K' mit

$$(*) \qquad \alpha(c') = c\text{-}\partial d.$$

Da auf der Rechte Seite eine Differenz von Zyklen steht, ist auch $\alpha(c')$ ein Zyklus,

$$0 = \partial\alpha(c') = \alpha(\partial' c').$$

Da a nach Voraussetzung injektiv ist, folgt $\partial' c' = 0$, d.h. c' ist ein Zyklus von K'. Berechnen wir das Bild der zugehörigen Homologieklasse bei $H(\alpha)$. Nach (*) gilt

$$H(\alpha)[c'] = [\alpha(c')] = [c\text{-}\partial(d)] = [c].$$

Insbesondere liegt [c] im Bild von $H(\alpha)$.

QED.

Bemerkungen.

(i) Die obige exakte Sequenz von Homologiegruppen läßt sich im allgemeinen nicht zu einer kurzen exakten Sequenz erweitern. Um das einzusehen, kann man zum Beispiel

$$K' = K'' = (\mathbb{Z},0)$$

setzen, d.h. für K' und K'' nehmen wir den im Grad 0 konzentrierten Komplex, dessen einzige von Null verschiedene Komponente $\mathbb{Z}$ ist. Als kurze exakte Komplexsequenz nehmen wir die zum Abbildungskegel der identischen Abbildung $id:(\mathbb{Z},0)\to(\mathbb{Z},0)$ gehörige.

$$0\to(\mathbb{Z},0)\to C(id)\to(\mathbb{Z},1)\to 0.$$

Die Differentiale der beiden äußeren Komplexe sind identisch Null. Der Komplex in der Mitte ist konzentriert in den Graden 0 und 1 und dort isomorph zu $\mathbb{Z}$. Sein Differential im Grad 1 ist die identische Abbildung. Alle anderen Differentiale sind ebenfalls Null.

$$C(id): \ldots\to 0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{id}\mathbb{Z}\to 0\to\ldots$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} H(\mathbb{Z},0) &= (\mathbb{Z},0)\\ HC(id) &= 0\\ H(\mathbb{Z},1) &= (\mathbb{Z},1) \end{aligned}$$

Die Sequenz

$$H(\mathbb{Z},0)\to HC(id)\to H(\mathbb{Z},1)$$

ist von der Gestalt

$$(\mathbb{Z},0) \longrightarrow 0 \longrightarrow (\mathbb{Z},1),$$

also nicht Teil einer kurzen exakten Sequenz.

(ii) Unser nächstes Ziel ist es, ein Maß für die Abweichung des Homomorphismus

$$H(K)\to H(K'')$$

von der Surjektivität zu finden (bzw. ein Maß für die Abweichung von $H(K')\to H(K)$ von der Injektivität). Etwas genauer, zu jedem $h''\in H(K'')$ wollen wir ein Element

$$\partial_* h''\in H(K')$$

konstruieren, welches genau dann Null ist, wenn h'' ein Urbild in H(K) besitzt. Man sagt auch, $\partial_* h''$ ist ein Hindernis für die Existenz eines Urbildes von h'' in H(K). Man kann zeigen, durch diese Eigenschaft ist die Abbildung

$$\partial_*: H(K'')\to H(K'),$$

die wir jetzt konstruieren werden, vollständig charakterisiert.

2.2.4 Konstruktion des Zusammenhangshomomorphismus

Sei eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \to 0$$

von Kettenabbildungen gegeben. Betrachten wir die Homomorphismen

$$\begin{array}{ccccc} H_{n-1}(K') & \xleftarrow{\bar{\partial}} & \beta^{-1}(Z_n(K'')) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & H_n(K'') \\ [\alpha^{-1}(\partial(c))] & \mapsfrom & c & \mapsto & [\beta(c)] \end{array}$$

mit

$$\bar{\beta}(c) := [\beta(c)]$$

$$\bar{\partial}(c) := [\alpha^{-1} \circ \partial(c)]$$

Wir haben uns zunächst zu überzeugen, daß die Homomorphismen wohldefiniert sind.

Zur Korrektheit der Definition von $\bar{\beta}$. Für $c \in \beta^{-1}(Z_n(K''))$ gilt $\beta(c) \in Z_n(K'')$, d.h. $\beta(c)$ ist ein Zyklus und $[\beta(c)]$ ein wohldefiniertes Element von $H_n(K'')$.

Zur Korrektheit der Definition von $\bar{\partial}$.Für $c \in \beta^{-1}(Z_n(K''))$ gilt $\beta(c) \in Z_n(K'')$, also

$$0 = (\partial'' \circ \beta)(c) = (\beta \circ \partial)(c),$$

d.h $\partial(c) \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$. Da α nach Voraussetzung injektiv ist, gibt es genau eine Kette

$c' := \alpha^{-1}(\partial(c)) \in K'$ mit $\alpha(c') = \partial(c)$. Wir haben noch zu zeigen, c' ist ein Zyklus. Zumindest gilt

$$\alpha(\partial'(c')) = \partial(\alpha(c')) = \partial(\partial(c)) = 0.$$

Da aber α injektiv ist, folgt $\partial'(c') = 0$, d.h. c' definiert ein Element

$$\bar{\partial}(c) := [c']$$

von $H_{n-1}(K')$.

Definition des Zusammenhangshomomorphismus.

$$\partial_*: H_n(K'') \to H_{n-1}(K'),\ [c''] \mapsto \text{einziges Element der Menge } \bar{\partial}(\bar{\beta}^{-1}([c'']))$$

(mit anderen Worten, die Zuordnung hat die Gestalt $[\beta(x)] \mapsto [\alpha^{-1}(\partial x)]$

Zur Korrektheit der Definition von ∂_*. Wir haben zu zeigen, die Menge $\bar{\partial}(\bar{\beta}^{-1}([c'']))$ besteht aus genau einem Element. Zunächst beachten wir ,die durch β induzierte Abbildung

$$\beta^{-1}(Z_n(K'')) \to Z_n(K'')$$

ist surjektiv (da β surjektiv ist). Die Zusammensetzung mit der natürlichen Abbildung

$$Z_n(K'') \to H_n(K'')$$

ist also auch surjektiv. Mit anderen Worten, $\bar{\beta}$ ist eine Surjektion. Insbesondere ist also die Menge $\bar{\partial}(\bar{\beta}^{-1}([c'']))$ nicht-leer. Seien jetzt $c,d \in \bar{\beta}^{-1}([c''])$ zwei Elemente. Wir haben zu zeigen $\bar{\partial}(c) = \bar{\partial}(d)$.

$$\begin{array}{ccccc} \partial f' \in K'^{n-1} & & c,c\text{-}d & \mapsto & [c''],\ 0 \in H_n(K'') \\ \updownarrow & \uparrow & & \overline{\beta}\nearrow & \twoheaduparrow \\ & K'^{n} \xrightarrow{\alpha} \beta^{-1}(Z_n(K'')) & & \xrightarrow{\beta} & Z_n(K'') \\ f' & \mapsto & c\text{-}d, c\text{-}d\text{-}e & \mapsto & \partial e'',0 \end{array}$$

Auf jeden Fall gilt $\overline{\beta}(c) = [c''] = \overline{\beta}(d)$, d.h.

$$\beta(c)\text{-}\beta(d) = \partial''e''$$

ist ein Rand von K''. Sei e eine Kette von K mit

$$\beta(e) = e''.$$

Dann gilt

$$\beta(c\text{-}d\text{-}\partial e) = \beta(c\text{-}d) - \partial''\beta(e) = 0,$$

d.h. $c\text{-}d\text{-}\partial e \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$. Sei f' eine Kette von K' mit

$$\alpha(f') = c\text{-}d\text{-}\partial e.$$

Dann gilt

$$\alpha(\partial' f') = \partial(\alpha(f')) = \partial c - \partial d - \partial\partial e = \partial c - \partial d,$$

also $\partial' f' = \alpha^{-1}(\partial c) - \alpha^{-1}(\partial d)$. Übergang zu den Homologieklassen liefert $\overline{\partial} c = \overline{\partial} d$.
QED.

Bemerkung. Als nächstes zeigen wir, der Zusammenhangshomomorphismus ist eine natürliche Transformation

$$\partial_*: H_n(K'') \to H_{n-1}(K')$$

wenn man H_n und H_{n-1} als Funktoren auf der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von Komplexen auffaßt.

$$\begin{array}{lll} H_n: & 0 \to K' \to K \to K'' \to 0 & \mapsto \quad H_n(K'') \\ H_{n-1}: & 0 \to K' \to K \to K'' \to 0 & \mapsto \quad H_{n-1}(K') \end{array}$$

2.2.5 Funktorialität des Zusammenhangshomomorphismus

Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K'' & \longrightarrow & 0 \\ & & f'\downarrow & & f\downarrow & & f''\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenabbildungen, dessen Zeilen exakt sind. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} H_n(K'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(K') \\ H(f'')_n\downarrow & & \downarrow H(f')_{n-1} \\ H_n(L'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(L') \end{array}$$

Beweis. Die beiden bei der Konstruktion von ∂_* auftretenden Abbildungen sind natürliche Transformationen, d.h. liefern kommutative Diagramme des obigen Typs. Diese setzen sich zu dem gesuchten kommutativen Diagramm zusammen.
QED.

2.2.6 Die Exaktheit der langen Homologiesequenz

Sei

$$0 \to K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen. Dann ist die zugehörige Sequenz

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_n(K') \xrightarrow{\alpha_*} H_n(K) \xrightarrow{\beta_*} H_n(K'') \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K') \xrightarrow{\alpha_*} \ldots$$

ebenfalls exakt.

Beweis. Nach 2.2.3 genügt es, die Exaktheit an den Stellen H(K') and H(K'') zu beweisen. Das führt auf die nachfolgend bewiesenen vier Inklusionen.

1. Schritt. $\mathrm{Im}(\partial_*) \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha_*)$. Ein Element aus dem Bild von ∂_* hat die Gestalt

$$[\alpha^{-1}(\partial x)] \text{ mit } [\beta(x)] \in H(K'').$$

Anwenden von α_* liefert

$$\alpha_*([\alpha^{-1}(\partial x)]) = [\partial x] = 0.$$

2. Schritt. $\mathrm{Ker}(\alpha_*) \subseteq \mathrm{Im}(\partial_*)$. Liege $[z'] \in H_n(K')$ im Kern von α_*, d.h sei

$$0 = \alpha_*[z'] = [\alpha z'].$$

Mit anderen Worten, $\alpha z'$ soll ein Rand sein: $\alpha z' = \partial c$ mit einer Kette $c \in K$. Es gilt

$$\partial'' \beta c = \beta \partial c = \beta \alpha z' = 0,$$

d.h. βc definiert eine Homologieklasse $[\beta c] \in H_n(K'')$. Ihr Bild bei ∂_* ist

$$\partial_*[\beta c] = [\alpha^{-1}(\partial c)] = [\alpha^{-1}(\alpha z')] = [z'],$$

d.h. $[z']$ liegt im Bild von ∂_*.

3. Schritt. $\mathrm{Im}(\beta_*) \subseteq \mathrm{Ker}(\partial_*)$. Für $[z] \in H_n(K)$ gilt $\partial_*(\beta_*([z])) = \partial_*([\beta z]) = [\alpha^{-1}(\partial z)] = 0$ (da z ein Zyklus ist).

4. Schritt. $\mathrm{Ker}(\partial_*) \subseteq \mathrm{Im}(\beta_*)$. Liege $[z''] \in H_n(K'')$ im Kern von ∂_*, d.h. es gibt ein $c \in K$ mit

$$[z''] = [\beta c] \text{ und } [\alpha^{-1}(\partial c)] = 0 \text{ in } H_{n-1}(K').$$

Die zweite Bedingung bedeutet, $\alpha^{-1}(\partial c)$ ist ein Rand, d.h es gibt ein $c' \in K'$ mit

$$\alpha^{-1}(\partial c) = \partial' c'.$$

Damit ist aber

$$\partial(c - \alpha c') = \partial c - \alpha \partial' c = 0,$$

d.h. $c - \alpha c'$ definiert eine Homologiegruppe $[c - \alpha c'] \in H_n(K)$. Deren Bild bei β_* ist

$\beta_*([c - \alpha c']) = [\beta c - \beta \alpha c] = [\beta c] = [z'']$,

d.h. $[z'']$ liegt im Bild von β_*.

QED.

2.2.7 Quasi-Isomorphismen

Ein Komplex-Morphismus $f: K \longrightarrow K'$ heißt Quasi-Isomorphimus, wenn er für alle $n \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen

$$H_n(f): H_n(K) \longrightarrow H_n(K')$$

auf den Homologie-Gruppen induziert.

Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K'' & \longrightarrow & 0 \\ & & f'\downarrow & & f\downarrow & & f''\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenabbildungen, dessen Zeilen exakt sind. Falls zwei der drei vertikalen Kettenabbildungen Quasi-Isomorphimen sind, so gilt dies auch für die dritte.
Beweis. Dies ergibt sich aus den beiden langen Homologiesequenzen zu den Zeilen den Diagramms und dem Fünferlemma.
QED.

2.2.8 Zerfallende Sequenzen

Sei

(*) $$0 \to A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Die Sequenz heißt zerfallend, wenn wenn sie zu einer Sequenz der Gestalt

(**) $$0 \to A' \xrightarrow{i} A' \oplus A'' \xrightarrow{p} A'' \to 0$$

mit $i(a') = (a',0)$ und $p(a',a'') = a''$ isomorph ist (in der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen). Mit anderen Worten, es gebe ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha} & A & \xrightarrow{\beta} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & f'\downarrow & & f\downarrow & & f''\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A' \oplus A'' & \xrightarrow{p} & A'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dessen vertikale Homomorphismen Isomorphismen sind. Zerfällt die Sequenz (*), so existierte ein zu α linksinverse Abbildung α' und eine zu β rechtsinverse Abbildung β' mit

$$\alpha \circ \alpha' + \beta' \circ \beta = id.$$

(Für (**) gilt das trivialerweise). Durch diese Bedingung ist das Zerfallen der Sequenz charakterisiert.
Man sagt, ein Komplex von Kettenabbildungen

$$0 \to K' \to K \to K'' \to 0$$

zerfällt in jeder Dimension, wenn für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die zugehörige Sequenz abelscher Gruppen

$$0 \to K_n' \to K_n \to K_n'' \to 0$$

zerfällt. In dieser Situation ist die Beschreibung des Zusammenhangshomomorphismus besonders einfach.

2.2.8 Komplexsequenzen die in jeder Dimension zerfallen

Sei

(*) $$0 \to K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen, welche in jeder Dimension zerfällt. Weiter seien für jedes n Homorphismen α_n', β_n' gegeben mit

$$\alpha_n' \circ \alpha_n = id,\ \beta_n \circ \beta'_n = id,\ \alpha_n \circ \alpha'_n + \beta'_n \circ \beta_n = id.$$

Dann setzen sich die Homomorphismen

$$d_n := \alpha_n' \circ \partial_n \circ \beta_n' : K''_n \to K'_{n-1} = (K'^{+})_n$$

zu einer Kettenabbildung

$$d:K''\to K'^{+}$$

zusammen. Die von d auf der Homologie induzierte Abbildung

$$H(d):\ H(K'')\to H(K'^{+})$$

ist gerade der Zusammenhangshomomorphismus zu (*).

Beweis. Zeigen wir, d kommutiert mit den Randabbildungen. Es gilt

$\alpha\partial' d = \alpha\partial'\alpha'\partial\beta' = \partial\alpha\alpha'\partial\beta' = \partial(id-\beta'\beta)\partial\beta' = \partial\partial\beta' - \partial\beta'\beta\partial\beta' = -\partial\beta'\partial''\beta\beta' = -\partial\beta'\partial''$

$= -(\alpha\alpha'+\beta'\beta)\partial\beta'\partial'' = -\alpha\alpha'\partial\beta'\partial'' - \beta'\beta\partial\beta'\partial'' = \alpha d\partial'' - \beta'\partial''\beta\beta'\partial''$

$= \alpha d\partial'' - b'\partial''\partial''$

$= \alpha d\partial''$

Also gilt $\partial' d = d\partial''$, d.h. d ist eine Kettenabbildung.

Für $z''\in Z(K'')$ gilt weiter

$$\partial_*[z''] = [\alpha^{-1}\partial\beta' z''] = [\alpha'\partial\beta' z''] = [dz''].$$

QED.

2.2.9 Zusammenhangshomomorphismus eines Abbildungskegels

Seien $f:K\to K'$ eine Kettenabbildung und

$$0\to K'\xrightarrow{\alpha} C(f)\xrightarrow{\beta} K[-1]\to 0$$

die exakte Sequenz zum Abbildungskegel von f. Der zugehörige Zusammenhangshomomorphismus ist dann gerade die von f induzierte Abbildung

$$H(f):H(K)\to H(K')$$

der Homologiegruppen.

Beweis. Die Sequenz zerfällt in jeder Dimension. Einen Schnitt von β kann man durch

$$\beta'(c) = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

definieren und eine Retraktion von a durch

$$\alpha'\begin{pmatrix} c' \\ c \end{pmatrix} = c'.$$

Nach 2.2.8 wird der Zusammenhangshomorphimus induziert durch die Abbildung

$$K\to K',\ c \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \partial & f \\ 0 & -\partial \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} fc \\ -\partial c \end{pmatrix} \mapsto fc,$$

induziert, d.h. durch f.

QED.

2.2.10 Kriterium für Quasi-Isomorphie

Sei $f:K\to K'$ eine Kettenabbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $H(f):H(K)\to H(K')$ ist ein Isomorphismus.

(ii) $H(Cf) = 0$.

Beweis. Ergibt sich aus der langen Homologiesequenz zum Abbildungskegel über f und der Interpretation 2.2.9 für deren Zusammenhangshomomorphismus.

QED.

2.3 Kettenhomotopie

2.2.1 Homotope Kettenabbildungen

Seien $f,g: K\to K'$ zwei Kettenabbildungen. Eine Homotopie s von f nach g ist eine Familie

$$\{s_n:K_n\to K'_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

von Homomorphismen mit

$$\partial'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Man schreibt in dieser Situation

$$s: f \simeq g$$

und sagt, f und g sind homotop. Homotopie von Kettenabbildungen ist eine Äquivalenzrelation.

Reflexivität: $0: f \simeq f$

Symmetrie: $s: f \simeq g \Rightarrow -s: g \simeq f$

Transitivität: $s: f \simeq g$ und $t: g \simeq h \Rightarrow s+t: f \simeq h$.

Die Äquivalenzklassen homotoper Abbildungen heißen Homotopieklassen. Die Homotopieklasse von f wird mit

$$[f]$$

bezeichnet.

2.3.2 Verträglichkeit mit der Komposition

Seien $f,f': K \to K$ und $g,g': K' \to K''$ Kettenabbildungen mit $f \simeq f'$ und $g \simeq g'$. Dann gilt auch $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

Beweis. Seien Homotopien

$$s: f \simeq f' \text{ und } t: g \simeq g'$$

gegeben.Dann gilt

$$f - f' = \partial s + s\partial \text{ und } g - g' = \partial t + t\partial.$$

Wir wenden g auf die erste Identität an und erhalten

$$gf - gf' = g\partial s + gs\partial = \partial gs + gs\partial$$

also

$$gs: gf \simeq gf'.$$

Analog liefert die zweit Identität

$$tf': gf' \simeq g'f'.$$

Die Behauptung folgt damit aus der Transitivität der Homotopierelation.

QED.

2.3.3 Die Homotopiekategorie über ∂Ab

Die Komplexe abelscher Gruppen bilden zusammen mit den Homotopieklassen von Kettenabbildungen und der Komposition

$$[f] \circ [g] := [f \circ g]$$

eine Kategorie, welche mit **H∂Ab** bezeichnet wird. Eine Kettenabbildung $f: K \to K'$, deren Homotopieklasse [f] ein Isomorphismus von H∂Ab ist heißt Homotopieäquivalenz. Falls ein solches f existiert, so heißen K und K' homotopieäquivalent. Ein Komplex K heißt kontrahierbar, falls die identische Kettenabbildung $id: K \to K$ homotop zur Nullabbildung $0: K \to K$ ist.

2.3.4 Homotope Abbildungen induzierten auf der Homologie dieselben Abbildungen

Seien $f,g: K \to K'$ homotope Abbildungen. Dann gilt $H(f) = H(g): H(K) \to H(K')$.

Beweis. Sei $s: f \simeq g$ eine Homotopie, d.h. es gelte

$$f - g = \partial s + s\partial.$$

Für jedes $[z] \in H(K)$ gilt dann,

$$H(f)[z] - H(g)[z] = [fz] - [gz] = [\partial sz + s\partial z] = [\partial sz] = 0.$$

Die vorletzte Identität besteht, weil z ein Zyklus ist.

QED.

2.3.5 Homotopieäquivalenzen induzieren Isomorphismen

Sei f:K→K' eine Homotopieäquivalenz. Dann ist H(f):H(K)→H(K') ein Isomorphismus.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Kettenabbildung g:K'→K mit

$$fg \simeq id \text{ und } gf \simeq id.$$

Durch Anwenden des Homologiefunktors erhalten wir nach 2.3.4

$$H(f)\circ H(g) = H(id) = id \text{ und } H(g)\circ H(f) = H(id) = id.$$

Mit anderen Worten, H(f) ist ein Isomorphismus.

QED.

2.3.6 Kriterium für Kontrahierbarkeit

Sei K ein Komplex mit H(K)=0. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) K ist kontrahierbar.

(ii) Für jedes n ist $Z_n(K)$ ein direkter Summand von K_n.

Beweis. Betrachten wir die exakte Sequenz graduierter abelscher Gruppen,

$$0\to Z(K) \to K \xrightarrow{\partial} B(K) \to 0.$$

(i) ⇒ (ii). Nach Voraussetzung ist die identische Kettenabbildung id:K→K nullhomotop, d.h. es gilt

$$id = id - 0 = \partial s + s\partial$$

mit einem Homomorphismus graduierter abelscher Gruppen s:K→K[+1]. Schränken wir diese Identität auf B(K) ein. Da ∂ auf B(K) identisch Null ist, folgt

$$id|_{B(K)} = \partial\circ s|_{B(K)}.$$

Mit anderen Worten, ∂ besitzt einen Schnitt, d.h. die obige Sequenz zerfällt und Z(K) ist direkter Summand von K.

(ii) ⇒ (i). Ist Z(K) direkter Summand von K, so besitzt die Einbettung Z(K)⊆K ein Linksinverses, die obige Sequenz zerfällt, und ∂ besitzt einen Schnitt t[7],

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\partial} & B(K) \\ \cup & \swarrow t & \\ tB(K) & & \end{array}$$

Insbesondere gilt

$$K = Z(K)\oplus tB(K) = B(K)\oplus tB(K).$$

Wir haben eine Homotopie von id nach 0 auf K zu definieren, d.h. einen Homomorphismus graduierter Gruppen

$$s: K \to K[+1].$$

Da K in eine direkte Summe zerfällt, genügt es, s auf jeden der beiden direkten Summanden zu definieren. Sei

$$s = \begin{cases} t & \text{auf } B(K) \\ 0 & \text{auf } tB(K) \end{cases}$$

Auf B(K) gilt dann

$$\partial\circ s + s\circ\partial = \partial\circ s = \partial\circ t = id$$

Schließlich gilt auf tB(K)

$$\partial\circ s + s\circ\partial = s\circ\partial = t\circ\partial = id$$

Man beachte, s ist auf tB(K) gleich Null, auf dem Bild von ∂ gleich t und ∂ ist auf tB(K) invers zu t..

QED.

---

[7] Als Abbildung $B(K) \longrightarrow tB(K)$ ist t ein Isomorphismus mit der Inversern ∂.

2.3.7 Kontrahierbarkeit des Kegels und Homotopieäquivalenz

Ist der Kegel der Kettenabbildung f:K→K' kontrahierbar, so ist f eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die identische Abbildung $C(f) \longrightarrow C(f)$ homotop zur Null-Abbildung. Alle Komplex-Morphismen, die auf C(f) definiert sind oder Werte in C(f) annehmen, sind somit nullhomotop. Es genügt also folgende Aussagen zu beweisen.

(i) Ist die Einbettung $i: K' \to C(f), c' \mapsto \begin{pmatrix} c' \\ 0 \end{pmatrix}$, nullhomotop, so besitzt f eine rechte Homotopieinverse $h: K' \to K$, d.h. $f \circ h \simeq id$.

(ii) Ist die Projektion[8] $p: C(f) \to K^+, \begin{pmatrix} c' \\ c \end{pmatrix} \mapsto c$, nullhomotop, so besitzt f eine linke Homotopieinverse.

Zu (i). Sei $S: i \simeq 0$ eine Kettenhomotopie. Dann hat S die Gestalt

$$S(c') = \begin{pmatrix} g(c') \\ h(c') \end{pmatrix}$$

mit Abbildungen $g: K' \to K'$ und $h: K' \to K$. Nun gilt

$$C(f) = K' \oplus K[-1]$$

in der Kategorie der graduierten abelschen Gruppen (nicht in der Komplexkategorie). Die Identität $i = \partial S + S\partial$ läßt sich also in der folgenden Gestalt schreiben.

$$\begin{pmatrix} c' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial & f \\ 0 & -\partial \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g(c') \\ h(c') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(\partial c') \\ h(\partial c') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial g(c') + fh(c') + g\partial(c') \\ -\partial h(c') + h\partial(c') \end{pmatrix}$$

Mit anderen Worten , es gilt $\partial h = h\partial$ und $\partial g + g\partial = id - fh$, d.h. h ist ein Komplex-Morphismus, der in der Homotopie-Kategorie rechtsinvers zu f ist.

Zu (ii). Sei $T: p \simeq 0: C(f) \longrightarrow K^+$ eine Kettenhomotopie. Dann hat T die Gestalt

$$T\begin{pmatrix} c' \\ c \end{pmatrix} = g(c) + h(c')$$

mit Abbildungen $g: K \to K$ und $h: K' \to K$. Die Identität $p = \partial^+ T + T\partial$ läßt sich dann wie folgt schreiben.

$$\begin{aligned} c \quad &= \partial^+(T\begin{pmatrix} c' \\ c \end{pmatrix}) + T(\begin{pmatrix} \partial & f \\ 0 & -\partial \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c' \\ c \end{pmatrix}) = \partial^+ g(c) + \partial^+ h(c') + T\begin{pmatrix} \partial c' + fc \\ -\partial c \end{pmatrix} \\ &= \partial^+ g(c) + \partial^+ h(c') + g(-\partial c) + h(\partial c' + fc) \\ &= -\partial h(c') + h(\partial c') - \partial g(c) - g(\partial c) + h(f(c)) \end{aligned}$$

Für c = 0 erhalten wir damit $-\partial h(c') + h(\partial c') = 0$ für alle c', d.h.

$$\partial h = h\partial.$$

Für c' = 0 erhalten wir $-\partial g(c) - g(\partial c) + h(f(c)) = c$, d.h.

$$\partial g + g\partial = hf - id.$$

Damit ist

$$h: K' \longrightarrow K^+$$

ein Komplex-Morphismus, der in der Homotopie-Kategorie linksinvers zu f ist.
QED.

---

[8] Nach 2.1.6 entsteht K^+ aus dem Komplex K[-1], indem man den Randoperator ∂ durch dessen Negatives ersetzt. Die Projektion p wird auf diese Weise zum Komplex-Morphismus:

$$(\partial^+ \circ p - p \circ \begin{pmatrix} ? & f \\ 0 & -? \end{pmatrix})\begin{pmatrix} c' \\ c \end{pmatrix} = -\partial(c) - p\begin{pmatrix} \cdots \\ -\partial c \end{pmatrix} = -\partial(c) + \partial(c) = 0.$$

2.4 Freie Komplexe

2.4.1 Definition
Ein Komplex (abelscher Gruppen) heißt frei, wenn für jede ganze Zahl q die abelsche Gruppe K_q frei ist.

2.4.2 Die Untergruppe der Zyklen ist ein direkter Summand
Sei K ein freier Komplex. Dann ist für jedes q die Untergruppe Z_qK der q-Zyklen ein direckter Summand von K_q.

Beweis. Die Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist frei. Insbesondere ist die Untergruppe $BK \subseteq K$ frei. Dann zerfällt aber die folgende kurze exakte Sequenz graduierter ablescher Gruppen.

$$0 \to ZK \to K \to BK \to 0,$$

d.h. ZK ist ein direkter Summand von K.
QED.

2.4.3 Quasi-Isomorphie und Homotopieäquivalenz
Sei $f:K \to K'$ eine Kettenabbildung von freien Komplexen K und K', welche einen Isomorphismus $HK \to HK$ der Homologiegruppe induziert. Dann ist f eine Homologieäquivalenz.

Beweis. Nach 2.3.7 genügt es zu zeigen, der Abbildungskegel $C(f) \simeq 0$ ist kontrahierbar. Nach 2.3.6 genügt es, wenn wir beweisen, es gilt $HCf = 0$ und ZCf ist direkter Summand von Cf .Das erste folgt aus 2.2.10 und das zweite aus 2.4.2.
QED.

2.4.4 Kurze und elementare Komplexe

Ein Komplex heißt <u>kurz</u>, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$K_q = 0 \text{ für } q \in \{n, n+1\}$$

gibt und die Randabbildung

$$\partial_{n+1}: K_{n+1} \to K_n \text{ injektiv}$$

ist. Man sagt dann auch, K ist <u>im wesentlichen in der Dimension n konzentriert</u>. Der Komplex heißt elementar, wenn außerdem noch

$$K_n \cong \mathbb{Z}$$

gilt.

2.4.4 Zerlegung in kurze bzw. elementare Komplexe
Jeder freie Komplex K ist eine direkte Summe kurzer (freier) Komplexe. Ist außerdem noch jede der Gruppe K_q endlich erzeugt, so ist K sogar eine direkte Summe elementarer Komplexe.

3. Die singuläre Homologie

3.1 Standardsimplexe und ihre linearen Abbildungen

3.1.1 Vorbemerkung
Die Intention der Konstruktionen dieses Abschnitts besteht in der Konstruktion von Zahlen, die Informationen über einen gegebenen topologischen Raum enthalten. Diese Zahlen will man gewinnen, indem man den Raum in Dreiecke, Tetraeder, ... zerlegt und

aus den kombinatorischen Relationen zwischen den so gewonnen Einzelteilen des Raumes Zahlen gewinnt.
Da sich eine Fläche aber auf sehr viele verschiedene Weisen in Dreiecke zerlegen läßt (soweit es überhaupt eine Zerlegung gibt), entsteht die Frage, inwieweit diese Zahlen unabhängig von der gewählten Zerlegung sind.
Um dieses Problem zu umgehen, betrachten wir zunächst alle möglichen Zerlegungen simultan und bemühen uns, alle Konstruktionen so auszuführen, daß sie nur von gegebenen topologischen Raum abhängen.

3.1.2 Die Standardsimplexe

Sei q eine nicht-negative ganze Zahl. Dann heißt die Menge

$$\Delta_q := \{x=(x_0,...,x_q)\in\mathbb{R}^{q+1} \mid x_0+...+x_q = 1 \text{ und } 0\leq x_i\leq 1 \text{ für alle } i\}$$

q-dimensionales Standardsimplex oder auch q-Standardsimplex.

Bemerkungen

(i) Für q = 0 erhalten wir einen Punkt, für q=1 eine Strecke, für q=2 ein Dreieck und für q=3 einen Tetraeder.

Figure 1: nulldimensionales Standard-Simplex

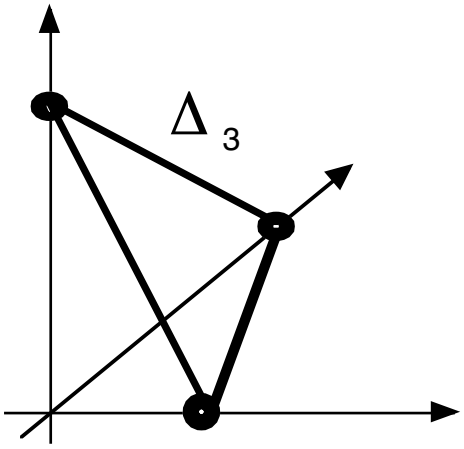

Figure 2: zweidimensionales Standard-Simplex

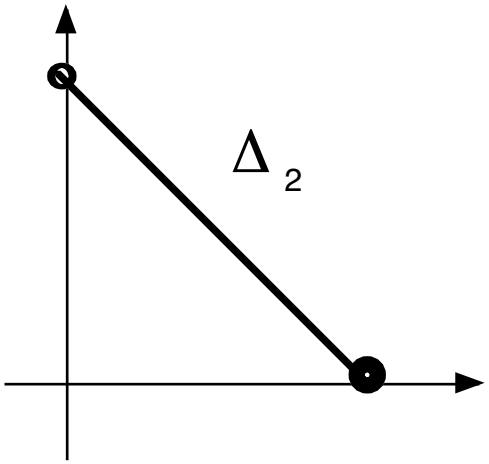

Figure 3: eindimensionales Standard-Simplex

(ii) Δ_q ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

(iii) Die Bedingungen $0 \leq x_i \leq 1$ kann man durch die schwächeren Forderungen $0 \leq x_i$ ersetzen. Das Simplex Δ_q ist also gerade der Durchschnitt der Hyperebene

$$x_0 + \ldots + x_q = 1$$

mit dem nicht-negativen Oktanten. Insbesondere ist Δ_q konvex, d.h. mit je zwei Punkten liegt die ganze Verbindungsstrecke in Δ_q.

(iv) Die Punkte $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ mit genau einer von Null verschiedenen Koordinate, welche gleich 1 ist, liegen in Δ_q. Sie sind die einzigen Punkte von Δ_q, welche nicht innere Punkte einer ganz in Δ_q verlaufenden Strecke sind. Sie heißen Ecken von Δ_q.

Beweis der Behauptung von (iv). Seien $p,q \in \Delta_q$ zwei verschiedene Punkte und liege e_i im Innern der Strecke von p nach q. Dann gilt

$$e_i = t \cdot p + (1-t) \cdot q$$

für eine reelle Zahl t mit $0<t<1$. Vergleich der j-ten Koordinaten mit $j \neq i$ liefert

$$0 = t \cdot p_j + (1-t) \cdot q_j.$$

Da sowohl t als auch 1-t größer als Null sind und die Punkte p,q im nicht-negativen Oktanten liegen, folgt

$$p_j = q_j = 0 \text{ für alle } j \neq i.$$

Wegen $p,q \in \Delta_q$ ist dann aber die einzige von Null verschiedene Koordinate dieser Punkte gleich 1, d.h. es gilt p=q im Widerspruch zur Wahl von p und q.

Für Punkte aus Δ_q mit zwei von Null verschiedenen Koordinaten findet man leicht eine ganze Strecke in Δ_q, in deren Inneren sie liegen (man vergrößere die eine Koordinate im selben Maß, in dem man die andere verkleinere)[9].

---

[9] Sind a und b positive Koordinaten von (...,a,...,b,...) so liegt (...,a-t,...,a+t,...) für kleine t im positiven Quadranten.

QED.

3.1.3 Lineare Abbildungen auf den Standardsimplexen

Eine Abbildung $f:\Delta_q \to \mathbb{R}^n$ heißt linear, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $g:\mathbb{R}^{q+1} \to \mathbb{R}^n$ Abbildung gibt mit $g|_{\Delta_q} = f$ gibt.

Bemerkungen

(i) Zu je q+1 Punkten $p_0,...,p_q \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f:\Delta_q \to \mathbb{R}^n$ mit $f(e_i) = p_i$ für alle i, nämlich die Abbildung f mit

$$f(x_0,...,x_q) = \sum_{i=0}^{q} x_i \cdot p_i .$$

Das Bild dieser Abbildung ist gerade die Menge

$$f(\Delta_q) = \{ \sum_{i=0}^{q} x_i \cdot p_i \mid x_0+...+x_q = 1 \text{ und } 0=x_i \text{ für alle i}\}$$

(d.h. ein Simplex im $\mathbb{R}^n$). Die obige Existenzaussage läßt sich auch wie folgt formulieren.

(ii) Eine lineare Abbildung auf Δ_q ist durch ihre Werte in den Ecken bereits eindeutig bestimmt. Die Werte der Ecken kann man beliebig vorgeben.

3.1.4 Randabbildungen und Seiten der Standardsimplexe

Die j-te Randabbildung des Standardsimplex Δ_q ist definiert als die lineare Abbildung

$$\varepsilon^j_q = \varepsilon^j: \Delta_{q-1} \to \Delta_q \ (\subseteq \mathbb{R}^{q+1})$$

mit

$$\varepsilon^j(e_i) := \begin{cases} e_i & \text{für } i<j \\ e_{i+1} & \text{sonst} \end{cases}$$

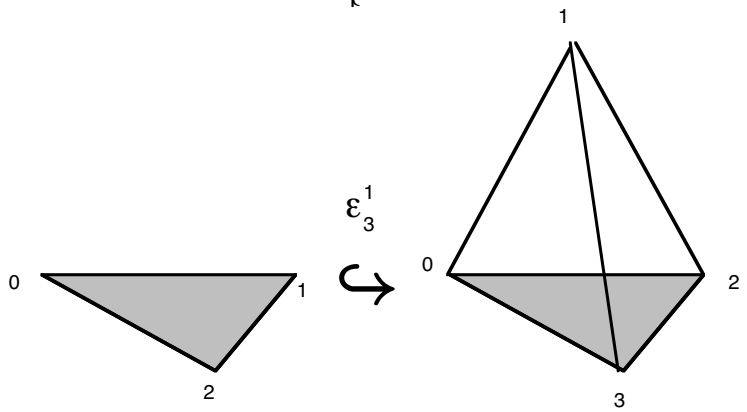

Figure 4: Seitenabbildung eines Standard-Simplex

Das Bild dieser Abbildung besteht aus allen Punkten von Δ_q, deren j-te Koordite Null ist. Dieses Bild $\varepsilon^j(\Delta_{q-1})$ heißt j-te Seite von Δ_q. Die Vereinigung aller Seiten von Δ_q heißt Rand von Δ_q und wird mit $\dot{\Delta}_q$ bezeichnet. Der Rand von Δ_q besteht aus allen Punkten, die mindestens eine Koordinate haben, welche Null ist.

Bemerkungen

(i) Die Abbildungen ε^j_q sind bilden die Ecken e_i des Simplex Δ_{q-1} in Ecken von Δ_q ab, und sie sind als lineare Abbildungen durch ihre Werte in diesen Ecken schon vollständig festgelegt. Wir werden sie deshalb oft mit ihren Einschränkungen auf diese Ecken-Mengen identifizieren, d.h. als Abbildungen

$$\varepsilon^j_q: \{e_0,...,e_{q-1}\} \longrightarrow \{e_0,...,e_q\}.$$

(ii) Für das folgende wird es gelegentlich zweckmäßig sein, die Eckenmengen mit der linearen Ordnung

$$e_0 < e_1 < ... < e_q$$

zu versehen. Die Rand-Abbildung ε^j_q läßt sich dann charakterisieren als die einzige streng monotone Abbildung

$$\{e_0,...,e_{q-1}\} \longrightarrow \{e_0,...,e_q\},$$

welchee die Ecke e_j ausläßt (d.h. deren Bild diese Ecke nicht enthält.

3.1.5 Relationen zwischen den Randabbildungen

Für k<j gilt

$$\varepsilon^{j-1}_{q+1} \circ \varepsilon^k_q = \varepsilon^k_{q+1} \circ \varepsilon^j_q.$$

Beweis. Auf beiden Seiten stehen streng monotone Abbildungen, die die Ecken e_k und e_j auslassen.

QED.

3.2 Der singuläre Komplex

3.2.1 Vorbemerkung

Wir konstruieren jetzt einen Funktor

$$S: Top \rightarrow ?Ab$$

aus der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Komplexe, welcher jedem topologischen Raum seinen sogenannten singulären Komplex zuordnet.

3.2.2 Definition des singulären Komplexes

Sei X ein topologischer Raum. Ein q-dimensionales singuläres Simplex oder auch singuläres q-Simplex von X ist eine stetige Abbildung

$$\Delta_q \rightarrow X.$$

Bezeichne $\mathbf{S}_q X$ die frei abelschen Gruppe, welche von den singulären q-Simplexen von X erzeugt wird. Ein Element von $\mathbf{S}_q X$ heißt q-dimensionale singuläre Kette oder auch singuläre q-Kette von X. Jededs Element $c \in \mathbf{S}_q X$ läßt sich somit auf genau eine Weise als endliche ganzzahlige Linearkombination von q-Simplexen schreiben:

$$c = \sum c_\sigma \cdot \sigma.$$

Eine Kette, in der nur ein Summand vorkommt, und deren einziger von Null verschiedener Koeffizient Eins ist, werden wir mit dem entsprechenden singulären Simplex identifizieren.

Für q<0 setzen wir $\mathbf{S}_q X = 0$.

Als nächstes definieren wir die Randoperatoren

$$\partial_q : \mathbf{S}_q X \to \mathbf{S}_{q-1} X.$$

Da $\mathbf{S}_q X$ eine freie abelsche Gruppe ist, genügt es $\partial_q(\sigma)$ für jedes q-Simplex σ zu definieren. Wir setzen

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \cdot (\sigma \circ \varepsilon_q^j).$$

Dabei bezeichne $\varepsilon_q^j : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$ die q-te Randabbildung des Standsimplex Δ_q (d.h. das Bild von ε_q^j ist die Seite gegenüber der q-ten Ecke). Nachfolgend beweisen wir jetzt, daß die $\mathbf{S}_q X$ zusammen mit den eben definierten Abbildungen ∂_q einen Komplex bilden. Dieser Komplex heißt singulärer Komplex von X und wird mit $\mathbf{S}X$ bezeichnet.

3.2.3 Die Komplexeigenschaft von S(X)

Die Gruppenhomomorphismen

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{q+2}} \mathbf{S}_{q+1} X \xrightarrow{\partial_{q+1}} \mathbf{S}_q X \xrightarrow{\partial_q} \mathbf{S}_{q-1} X \xrightarrow{\partial_{q-1}} \ldots$$

bilden einen Komplex SX, d.h es gilt

$$\partial_{q-1} \partial_q = 0$$

für jedes $q \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Für jedes singuläre q-Simplex σ gilt

$$\begin{aligned} \partial\partial\sigma &= \partial\Big(\sum_j (-1)^j \cdot \sigma \circ \varepsilon^j\Big) = \sum_j (-1)^j \cdot \partial(\sigma \circ \varepsilon^j) \\ &= \sum_j (-1)^j \sum_k (-1)^k \cdot \sigma \circ \varepsilon^j \circ \varepsilon^k \\ &= \sum_{j \le k} (-1)^{j+k} \cdot \sigma \circ \varepsilon^j \circ \varepsilon^k + \sum_{j > k} (-1)^{j+k} \cdot \sigma \circ \varepsilon^j \circ \varepsilon^k \end{aligned}$$

Auf die zweite Summe wenden wir 3.1.5 an und führen eine Indexverschiebung durch. Im Ergebnis erhalten wir

$$\partial\partial s = \sum_{j \le k} (-1)^{j+k} \cdot \sigma \circ \varepsilon^j \circ \varepsilon^k - \sum_{j \ge k} (-1)^{j+k} \cdot \sigma \circ \varepsilon^k \circ \varepsilon^j = 0.$$

QED.

3.2.4 Die Abbildungen der singulären Ketten zu einer stetigen Abbildung

Sei $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Für jedes singuläre q-Simplex

$$\sigma : \Delta_q \to X$$

von X ist dann die Zusammensetztung $f \circ \sigma : \Delta_q \to Y$ ein singuläres q-Simplex von Y.

Durch lineare Fortsetzung auf die Ketten erhalten wir für jedes q einen Gruppenhomorphismus

$$\mathbf{S}_q f : \mathbf{S}_q X \to \mathbf{S}_q Y.$$

Die Familie der $\mathbf{S}_q f$ bezeichnen wir mit $\mathbf{S}f$. Wir werden gleich sehen, daß die $\mathbf{S}_q f$ eine Kettenabbildung bilden.

3.2.4 Der Komplex-Morphismus zu einer stetigen Abbildung

Sei f:X→Y eine stetige Abbildung. Die zugehörige Folge $\mathbf{S}f = \{\mathbf{S}_q f\}_{q\in\mathbb{Z}}$ ist dann mit den Randabbildungen der Komplex SX und SY verträglich,

$$\partial_q \circ \mathbf{S}_q f = \mathbf{S}_{q-1} f \circ \partial_q,$$

d.h. Sf: SX → SY ist eine Kettenabbildung.

Beweis. Für jedes q-Simplex gilt

$$\begin{aligned} \partial\circ\mathbf{S}_q f(\sigma) &= \partial(f\circ\sigma) \\ &= \sum_{j=0}^{q} (-1)^j\cdot(f\circ\sigma\circ\varepsilon^j_q) \\ &= (\mathbf{S}_{q-1} f)(\sum_{j=0}^{q} (-1)^j\cdot(\sigma\circ\varepsilon^j_q)) \\ &= (\mathbf{S}_{q-1} f)(\partial\sigma) \end{aligned}$$

QED.

3.2.5 Die Funktorialität von S

Die oben definierte Abbildung S für topologische Räume und stetige Abbildungen ist ein Funktor

$$S: \mathbf{Top} \to \partial\mathbf{Ab}.$$

Mit anderen Worten, für stetige Abbildungen id:X→X, f:X→Y und g:Y→Z gilt

$$S(Id) = Id$$

$$S(f\circ g) = S(f)\circ S(g).$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus den Definitionen.
QED.

3.2.6 Verallgemeinerung auf den Fall von Paaren

Die oben angegebene Konstruktion läßt sich auf den Fall von Paaren verallgemeinern. Ist

$$(X,A)$$

ein Paar von topologischen Räumen und bezeichnet

$$i: A \to X$$

die natürliche Einbettung, so ist die durch i induzierte Abbildung

$$Si: SA \to SX$$

injektiv. Man kann also SA als Teilkomplex von SX auffassen. Der Faktorkomplex

$$S(X,A) := Koker(i) := SX/SA$$

heißt (relativer) singulärer Komplex des Paares (X,A). Bezeichnet j: SX→S(X,A) die natürliche Abbildung auf den Faktor-Komplex, so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen

$$0 \to SA \xrightarrow{i} SX \xrightarrow{j} S(X,A) \to 0.$$

Diese Sequenz zerfällt in jedem Grad,

$$S_q X = S_q A \oplus S_q(X,A),$$

denn die Menge der singulären Simplexe $\sigma: \Delta_q \to X$ von X läßt sich in zwei Teilmengen zerlegen: in solche, welche sogar Simplexe von A sind, und solche, es nicht sind. Die erste Menge ist aber gerade ein freies Erzeugendensystem von SA. Nach Konstruktion gilt

$$S(X,\varnothing) = SX.$$

Eine Abbildung von Paaren f:(X,A)→(Y,B) induziert ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & SA & \longrightarrow & SX & \longrightarrow & S(X,A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle S(f|_A)} & & \downarrow{\scriptstyle Sf} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{Sf}} & & \\ 0 & \longrightarrow & SB & \longrightarrow & SY & \longrightarrow & S(Y,B) & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

wobei $\overline{Sf}$ auf Grund des Homomorphiesatzes eindeutig bestimmte Abbilung

$$\overline{Sf}: S(X,A) \to S(Y,B),\ \overline{\Sigma c_\sigma \sigma} \mapsto \overline{\Sigma c_\sigma f\circ\sigma},$$

ist. Die oben bewiesene Funktoreigenschaft von S überträgt sich auf den Fall von Paaren. Genaugenommen ist S ein Funktor von der Kategorie der Paare topologischer Räume mit Werten in der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von Kettenabbildungen.

3.3 Die singuläre Homologie

3.3.1 Die singulären Homologiegruppen eines topologischen Raumes

Sei X ein topologischer Raum. Die n-te singuläre Homologiegruppe von X ist definiert als n-te Homologiegruppe des singulären Komplexes SX. Bezeichnung:

$$H^n(X) := H^n(SX).$$

Sei (X,A) ein Paar topologischer Räume. Die n-te singuläre Homologiegruppe von (X,A) ist definiert als die n-te Homologiegruppe des relativen singulären Komplexes S(X,A). Bezeichnung:

$$H^n(X,A) := H^n(S(X,A)).$$

Wir werden weiterhin folgende Bezeichnungen für die entsprechenden graduierten Gruppen benutzen.

$$HX := HSX$$
$$H(X,A) := HS(X,A)$$

Die Gruppen H(X,A) bzw. ihre homogenen Bestandteile heißen auch relative Homologiegruppen im Unterschied zu den absoluten Homologiegruppen HX.

Eine Kette z∈SX heißt Zyklus modulo eines Unterraumes A, wenn ∂z∈SA gilt und Rand modulo A, wenn z = ?x + u gilt mit x∈SX und u∈SA. Die relative Homologiegruppe $H^n(X,A)$ kann man dann identifizierem mit der Faktorgruppe

$$H^n(X,A) = \{\text{n-Zyklen mod A}\}/\{\text{n-Ränder mod A}\}.$$

3.3.2 Funktorialität

Für jede Abbildung von Paaren f:(X,A)→(Y,B) induziert die Abbilung Sf:S(X,A)→(Y,B) einen Homomorphismus graduierter Gruppen

$$f_* = Hf: H(X,A)\to H(Y,B), \left[\overline{\Sigma c_\sigma \sigma}\right] \mapsto \left[\overline{\Sigma c_\sigma f\circ\sigma}\right].$$

Die singulär Homologie definiert damit einen Funktor

$$H: \mathbf{Top}^{(2)} \xrightarrow{S} \partial\mathbf{Ab} \xrightarrow{H} \mathbf{Gab}.$$

3.3.3 Homologiesequenz eines topologischen Paares bzw. eines Tripels

Sei (X,A) ein Paar topologischer Räume. Der Zusammenhangshomomorphismus zur kurzen exakten Sequenz

$$0\to SA\xrightarrow{i} SX\xrightarrow{j} S(X,A)\to 0$$

heißt auch Zusammenhangshomomorphismus des Paares (X,A) und die zugehörige lange Homologiesequenz

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

heißt Homologiesequenz des Paares (X,A). Für jede (stetige) Abbildung

$$f:(X,A) \to (Y,B)$$

von topologischen Paaren hat man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H_q(A) & \longrightarrow & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X,A) & \longrightarrow & H_{q-1}(A) & \longrightarrow \\
 & \downarrow f|_{A*} & & \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f|_{A*} & \\
\longrightarrow & H_q(B) & \longrightarrow & H_q(Y) & \longrightarrow & H_q(Y,B) & \longrightarrow & H_{q-1}(B) & \longrightarrow
\end{array}$$

wobei die Zeilen gerade die Homologiesequenzen der Paare (X,A) bzw. (Y,B) sind.
Sei jetzt ein Tripel (X,A,B) gegeben. Die Inklusionen $B \subseteq A \subseteq X$ induzieren dann Inklusionen von Teilkomplexen

$$SB \subseteq SA \subseteq SX$$

und damit eine kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & SA/SB & \longrightarrow & SX/SB & \longrightarrow & SX/SA & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \| & & \| & & \\
 & & S(A,B) & & S(X,B) & & S(X,A) & &
\end{array}$$

Die zugehörige lange Homologiesequenz

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_q(A,B) \to H_q(X,B) \to H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A,B) \to \ldots$$

heißt Homologiesequenz des Tripels (X,A,B). In Fall $B=\varnothing$ ist das gerade die Homologiesequenz des Paares (X,A).

3.4 Spezialfälle

3.4.1 Homologie des einpunktigen Raumes

Sei

$$P = \{p\}$$

der einpunktige topologische Raum. Für jedes $q \geq 0$ besitzt P genau ein singuläres Simplex

$$\tau_q : \Delta_q \to P.$$

Die j-te Seite von τ_q ist für jedes j gleich τ_{q-1},

$$\tau_q \circ \varepsilon^j = \tau_{q-1}.$$

Da τ_q gerade q+1 Seiten hat folgt

$$\partial \tau_q = \begin{cases} \tau_{q-1} & \text{für q gerade} \\ 0 & \text{für q ungerade} \end{cases}$$

Der Kettenkomplex SP hat damit bis auf Isomorphie die Gestalt

$$SP... \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

wobei in den negativen Dimensionen alle Gruppen Null sind. Damit erhalten wir

$$H_q(\{p\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ für } q=0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Genauer gilt $H_0(\{p\}) = \mathbb{Z}\cdot\tau_0$.

3.4.2 Reduzierte Homologie

Sei X ein nicht-leerer topologischer Raum. Die konstante Abbildung

$$\gamma = \gamma^X : X \to P := \{p\}$$

in den einpunktigen topologischen Raum induziert dann einen Homomorphismus graduierter abelscher Gruppen

$$H\gamma : HX \to HP,$$

welcher Augmentation von X heißt. Der Kern der Augmentation heißt reduzierte Homologie von X und wird mit

$$\tilde{H}_q X := \mathrm{Ker}\ (H_q(\gamma): H_q X \to H_q P).$$

Bemerkungen

(i) Offensichtlich gilt $\tilde{H}_q X = H_q X$ für $q \neq 0$.

(ii) Die reduzierte Homologie definiert einen Funktor

$$\tilde{H}_q : (\text{nicht-leere topologische Räume}) \to Ab.$$

Ist nämlich $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & {}_{\gamma^X}\searrow \quad \swarrow_{\gamma^Y} & \\ & P & \\ & \| & \\ & (\mathbb{Z},0) & \end{array}$$

kommutativ. Dasselbe gilt damit für

$$\begin{array}{ccc} H(X) & \xrightarrow{Hf} & H(Y) \\ & {}_{H\gamma^X}\searrow \quad \swarrow_{H\gamma^Y} & \\ & H(P) & \end{array}$$

Insbesondere bildet Hf den Kern von $H(\gamma^X)$ in den Kern von $H(\gamma^Y)$ ab, d.h. wir haben einen Homomorphismus

$$\tilde{H}_q f : \tilde{H}_q X \to \tilde{H}_q Y.$$

Da sich $H_q f$ funktoriell verhält, gilt dasselbe auch für $\tilde{H}_q f$. Die natürlichen Inklusionen

$$\tilde{H}_q X \subseteq H_q X$$

setzen sich zu einer natürliche Transformation zusammen. $\tilde{H}_q$ ist ein Beispiel für einen Teilfunktor (des Funktors H_q).

(iii) Ist X nicht-leer, so gibt es mindestens eine Abbildung i: P→X. Ihre Zusammensetzung mit γ^X liefert

$$\gamma^X \circ i = \mathrm{Id}.$$

Damit gilt aber auch $H(\gamma^X)\circ H(i) = \mathrm{id}$. Mit anderen Worten, die exakte Sequenz graduierter abelscher Gruppen

$$0 \to \tilde{H}(X) \to H(X) \to H(P) \to 0$$

zerfällt. Insbesonder gilt

$$H_0(X) = H_0(P)\oplus\tilde{H}_0X = \mathbb{Z}\oplus\tilde{H}_0X$$

In der Dimension Null unterscheiden sich die reduzierte und die gewöhnliche Homologie um den direkten Summanden $\mathbb{Z}$.

(iv) Für jede Einbettung P→X in einen nicht-leeren topologischen Raum X haben wir eine exakte Sequenz[10]

$$0\to H_0(P) \to H_0(X) \to \tilde{H}_0(X) \to 0$$

Vergleich mit der Homologiesequenz des Paares (X,P),

$$\to H_0(P) \to H_0(X) \to H_0(X,P) \to 0,$$

liefert $\tilde{H}_0(X) = H_0(X,P)$. Genauer: die Einschränkung der natürlichen Surjektion

$$H_0(X) \to H_0(X,P)$$

auf die Untergruppe $\tilde{H}_0(X)$ ist ein Isomorphismus.

3.4.3 Reduzierte Homologiesequenz eines Paares

Sei (X,A) ein topologisches Paar mit A≠∅. Dann hat man eine lange exakte Sequenz

$$\ldots\xrightarrow{\partial_*}\tilde{H}_q(A)\xrightarrow{i_*}\tilde{H}_q(X)\xrightarrow{j_*}H_q(X,A)\xrightarrow{\partial_*}\tilde{H}_{q-1}(A)\xrightarrow{i_*}\ldots$$

welche reduzierte Homologiesequenz des Paares (X,A) heißt. Dabei sind i_* und j_* die Einschränkungen der analogen Abbildungen der gewöhnlichen Homologiesequenz des Paares (X,A).

Beweis. Wir wählen eine Inklusion i:P→A und fassen diese als Abbildung von Paaren

$$i:(P,P) \to (X,A)$$

auf. Betrachten wir die zugehörige Abbildung der langen Homologiesequenzen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H_q(P) & \longrightarrow & H_q(P) & \longrightarrow & H_q(P,P) & \longrightarrow & H_{q-1}(A) & \longrightarrow \\
 & f|_{A*}\downarrow & & f_*\downarrow & & \bar{f}_*\downarrow & & \downarrow f|_{A*} & \\
\longrightarrow & H_q(A) & \longrightarrow & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X,A) & \longrightarrow & H_{q-1}(A) & \longrightarrow
\end{array}$$

Die Augmentation von X läßt sich als Paarabbildung

---

[10] Genauer, die Einbettung P $\longrightarrow$ X definiert eine Schnitt des rechten Homomorphismus der exakten Sequenz von (iii), und damit eine direkte Summenzerlegung wie in (iii). Die Projektion der direkten Summe auf den zweiten Faktor ist dann die Surjektion der gesuchten kurzen exakten Sequenz. Die Einbettung des ersten direkten Summanden ist deren Injektion.

$$\gamma:(X,A) \to (P,P)$$

auffassen. Diese ist linksinvers zur Einbettung $i:(P,P) \to (X,A)$ ist. Die durch γ induzierte Abbildung zwischen den obigen Homologiesequenzen besteht aus einer Familie von linksinversen Abbildungen zu den vertikalen Abbildung des obigen Diagramms. Die obere Zeile des Diagramms kann man deshalb mit einem direkten Summanden der unteren Zeile identifizieren. Läßt man diesen direkten Summand weg, so bleibt eine exakte Sequenz übrig. Diese ist gerade die exakte Sequenz der Behauptung.
QED.

3.4.4 Die Augmentation auf den Niveau der Kettenabbildungen

Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt die Kettenabbildung

$$\eta = \eta^X : SX \to (\mathbb{Z},0), \quad \Delta_q \xrightarrow{\sigma} X \mapsto \begin{cases} 1 \text{ für } q = 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

welche jedes 0-Simplex in die $1 \in \mathbb{Z}$ überführt, ebenfalls <u>Augmentation</u> von X.

(i) Mit Augmentation bezeichnet man also sowohl eine Abbildung von Homologiegruppen (3.4.3) als auch, wie eben definiert, eine Kettenbildung. Beschreiben wir den Zusammenhang zwischen den beiden eingeführten Augmentationsbegriffen.

Bezeichne γ wie oben die konstante Abbildung des Raumes X mit Werten in P,

$$\gamma: X \to P = \{p\}.$$

Dann ist das Diagramm

(1)
$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{S\gamma} & SP \\ & {\eta^X}\searrow \quad \swarrow{\eta^P} & \\ & (\mathbb{Z},0) & \end{array}$$

kommutativ: alle q-Simplexe mit $q > 0$ werden in die Null abgebildet. Ein 0-Simplex σ von X wird bei $S\gamma$ in das 0-Simplex $\gamma \circ \sigma$ abgebildet. Beide Simplexe gehen bei der Augmentation in die 1 über.

(ii) Wie wir oben gesehen haben, wird die 0-te Homologie von P vom einzigen 0-Simplex von P erzeugt und ist isomorph zu $\mathbb{Z}$. Insbesondere induziert η^P einen Isomorphismus

(2)
$$\begin{array}{ccc} H(\eta^P): H(P) & \xrightarrow{\cong} & H(\mathbb{Z},0) \\ || & & || \\ \mathbb{Z}\tau_0 & & \mathbb{Z} \end{array} \quad ,\tau_0 \mapsto 1$$

<u>Bis auf die durch</u> $H(\eta^P)$ <u>gegebene Isomorphie ist also die Augmentation</u> $H(\gamma)$ <u>auf der Ebene der Homologiegruppen gerade die Homologie der Augmentation</u> η^X <u>auf der Ebenen der Komplexe</u>.

topologische Räume	Komplexe	Homologie
$\gamma: X \longrightarrow P$	$S\gamma: SX \longrightarrow SP$	$H(\gamma) = H(S\gamma): HX \longrightarrow HP = (\mathbb{Z},0)$
	$\neq$	$=$
	$\eta: SX \longrightarrow (\mathbb{Z},0)$	$H(\eta): HX \longrightarrow H(\mathbb{Z},0) = (\mathbb{Z},0)$

(iii) Auf Grund des kommutativen Diagramms (1) und der Isomorphie (2) gilt

$$\text{Ker } H(\eta^X) =^{11} \text{Ker } H(\gamma).$$

Insbesondere kann man sowohl η^X also auch γ zur Definition der reduzierten Homologie nehmen.

(iv) Man beachte, $\eta^P: SX \to (\mathbb{Z},0)$ ist eine Homotopie-Äquivalenz (nach Satz 2.4.3).

3.4.5 Die Homologie der konvexen Teilmenge des affinen Raumes

Sei X eine nicht-leere konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Augmentation

$$\eta : SX \to (\mathbb{Z},0)$$

eine Homotopieäquivalenz. Insbesondere ist die reduzierte Homologie von X trivial,

$$\tilde{H}X = 0.$$

Beweis. Die Technik, mit deren Hilfe wir diesen Satz beweisen werden, nennt man auch Kegelkonstruktion. Sei $P \in X$ ein Punkt. Für jedes q-Simplex $\sigma_q: \Delta_q \to X$ von X definieren wir auf folgende Weise ein (q+1)-Simplex

$$(P\cdot\sigma_q): \Delta_{q+1} \to X$$

welches Kegel über σ_q mit der Spitze P heißt.

$$(P\cdot\sigma_q)(x_0,\ldots,x_{q+1}) := \begin{cases} P & \text{für } x_0=1 \\ x_0 P+(1-x_0)\sigma_q\left(\frac{x_1}{1-x_0},\ldots,\frac{x_{q+1}}{1-x_0}\right) & \text{für } x_0 \neq 1 \end{cases}$$

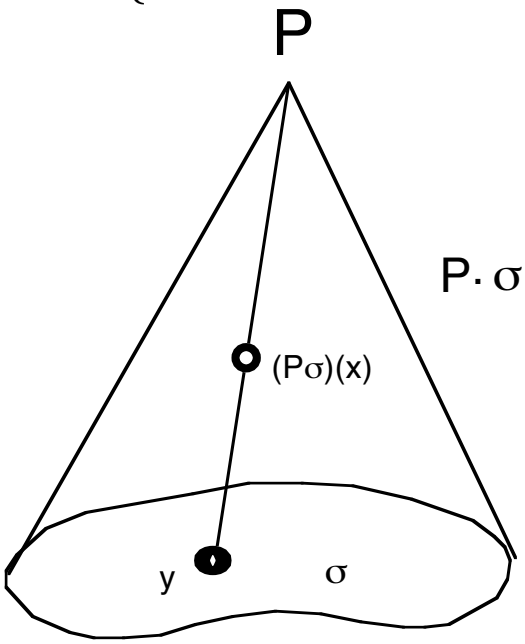

Figure 5: der Kegel über einemSimplex

$$y = \sigma_q\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \ldots, \frac{x_{q+1}}{1-x_0}\right)$$

$$(P\bullet\sigma) = x_0\bullet P + (1-x_0)\bullet y$$

---

[11] Genauer: der Isomorphismus $H(\eta^P)$ identifiziert diese beiden Kerne.

Man beachte, weil X eine konvexe Menge ist, ist $P\cdot\sigma_q$ ein (q+1)-Simplex von X. Berechnen wir den Rand des Simplex $P\cdot\sigma_q$. Es gilt

$$(P\cdot\sigma_q)\circ\varepsilon^i(x_0,...,x_q) = (P\cdot\sigma_q)(x_0,...,x_{i-1},0,x_i,...,x_q).$$

Für i=0 steht rechts gerade $(P\cdot\sigma_q)(0, x_0,...,x_q) = \sigma_q(x_0,...,x_q)$, d.h.

(1) $$(P\cdot\sigma_q)\circ\varepsilon^0 = \sigma_q \text{ für } i = 0.$$

Für q>0 und i>0 bekommt die rechte Seite die Gestalt

$$x_0P + (1-x_0)\sigma_q(\frac{x_1}{1-x_0},...,\frac{x_{i-1}}{1-x_0},0,\frac{x_i}{1-x_0},...,\frac{x_q}{1-x_0})$$

$$= x_0P + (1-x_0)(\sigma_q\circ\varepsilon^{i-1})(\frac{x_1}{1-x_0},...,\frac{x_q}{1-x_0})$$

also ist

(2) $$(P\cdot\sigma_q)\circ\varepsilon^i = P\cdot(\sigma_q\circ\varepsilon^{i-1}) \text{ für } q > 0 \text{ und } i > 0.$$

Schließlich erhalten wir für q=0 und i=1 das konstant auf P abbildende Simplex, welches wir mit P bezeichnen wollen[12],

(3) $$(P\cdot\sigma_0)\circ\varepsilon^1 = P\colon \Delta_0 \longrightarrow \{P\} \subseteq X. \text{ für } q = 0 \text{ und } i > 0 \text{ (d.h. } i = 1)$$

Aus den Formeln (1), (2) und (3) erhalten wir durch das Bilden von alternierenden Summen

$$\partial(P\bullet\sigma_q) = \sigma_q - P\bullet(\partial\sigma_q) \qquad \text{für } q > 0$$

$$\partial(P\bullet\sigma_0) = \sigma_0 - P.$$

Betrachten wir P jetzt als Abbildung

$$P\colon \{q\text{-Simplexe}\} \longrightarrow \{(q+1)\text{-Simplexe}\},\ \sigma \mapsto P\bullet\sigma,$$

und setzen diese $\mathbb{Z}$-linear auf die von den beteiligten Mengen erzeugten freien abelschen Gruppen fort. Dadurch wir P zu einem Gruppen-Homomorphismus $S_qX \longrightarrow S_{q+1}X$.

Weiter sei $\hat{P}$ die Ketten-Abbildung $(\mathbb{Z}, 0) \longrightarrow SX$, $1 \mapsto P$. Die beiden gerade bewiesenen Identitäten kann man dann als Identitäten von Gruppen-Homomorphismen schreiben:

$$\partial\circ P = Id - P\circ\partial \text{ als Homomorphismen } S_qX \longrightarrow S_qX \text{ (für } q > 0)$$

$$\partial\circ P = Id - \hat{P}\circ\eta \text{ als Homomorphismen } S_0X \longrightarrow S_0X$$

Wir haben dabei die Ketten-Abbildung $\hat{P}\colon (\mathbb{Z}, 0) \longrightarrow SX$ mit der Augmentation zusammengesetzt, damit sie den "richtigen" Definitonsbereich bekommt. Die

---

[12] Nach Definiton ist $(P\cdot\sigma_0)\circ\varepsilon^1$ ein 0-Simplex, d.h. eine Abbildung

$$(P\cdot\sigma_0)\circ\varepsilon^1\colon \Delta_0 \longrightarrow X .$$

Sein Wert im einzigen Punkt von Δ_0 ist nach Definiton

$$(P\cdot\sigma_0)(1,0) = P.$$

$\wedge$
Zusammensetzung $P\circ\eta$ bildet jedes 0-Simplex auf das 0-Simplex P ab und jedes andere Simplex in die 0.
Wir haben gezeigt, die Ketten-Abbildung

$$\wedge$$
$$P: (\mathbb{Z}, 0) \longrightarrow SX$$

ist eine linksseitige Homotopie-Inverse zur Augmentation

$$\eta: SX \longrightarrow (\mathbb{Z}, 0).$$
$$\wedge$$

Für die umgekehrte Zusammensetzung von P und η erhalten wir

$$\wedge$$
$$\eta\circ P = Id: (\mathbb{Z}, 0) \longrightarrow (\mathbb{Z},0), 1 \mapsto P \mapsto 1.$$
$$\wedge$$

Mit anderen Worten, P ist homotopie-invers zur Augmentation η, d.h. die Augmentation η ist eine Homotopie-Äquivalenz.
QED.

3.4.6 Der Zusammenhangshomomorphismus einer Teilmenge des affinen Raumes

Für jede nicht-leere Teilmenge $Y\subseteq\mathbb{R}^n$ ist der Zusammenhangshomomorphismus

$$\partial_*: H_q(\mathbb{R}^n,Y) \to \tilde{H}_{q-1}(Y)$$

ein Isomorphismus.
Beweis. Da $\mathbb{R}^n$ konvex ist, gilt

$$\tilde{H}(\mathbb{R}^n) = 0$$

(nach 3.4.5). Die Behauptung ergibt sich damit aus der reduzierten Homologiesequenz des Paares $(\mathbb{R}^n,Y)$.
QED.

3.4.7 Linear zusammenhängende Räume

Ein topologischer Raum X heißt linear zusammenhängend oder auch wegeweise zusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte von X durch einen Weg verbinden lassen. Genauer, für je zwei Punkte $p,q\in X$ gibt es eine stetige Abbildung

$$\omega: [0,1] \to X$$

auf dem Einheitintervall mit Werten in X derart, daß $\omega(0) = p$ und $\omega(1) = q$ gilt.

Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Betrachten wir die Relation $\sim$ auf X mit

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ können durch einen Weg von X verbunden werden.}$$

Dies ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge X. Die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation heißen lineare Komponenten von X oder auch einfach Komponenten von X. Nach Definition sind die Komponenten maximale linear zusammenhängende Unterräume von X. Jeder topologische Raum zerfällt somit in paarweise disjunkte linear zusammenhängende Unterräume.

3.4.8 Die Homologie linear zusammenhängender Räume

Sei X ein nicht-leerer linear zusammenhängender topologischer Raum. Dann induziert die Augmentation $\eta: SX \to (\mathbb{Z},0)$ einen Isomorphismus

$$H_0(\eta): H_0X \to H_0(\mathbb{Z},0) = \mathbb{Z}.$$

Beweis. Sei $p \in X$ ein fest gewählter Punkt. Wir betrachten die Kettenabbildung

$$\hat{p}: (\mathbb{Z},0) \to SX, m \mapsto m \cdot p.$$

Für die Zusammensetzung mit der Augmentation erhalten wir

$$\eta \circ \hat{p} = id. \tag{1}$$

Für jedes 0-Simplex $\sigma: \Delta_0 \to X$ fixieren wir ein 1-Simplex

$$\pi(\sigma): \Delta_1 \to X \text{ mit } \pi(\sigma) \circ \varepsilon^0 = \sigma \text{ und } \pi(\sigma) \circ \varepsilon^1 = p.$$

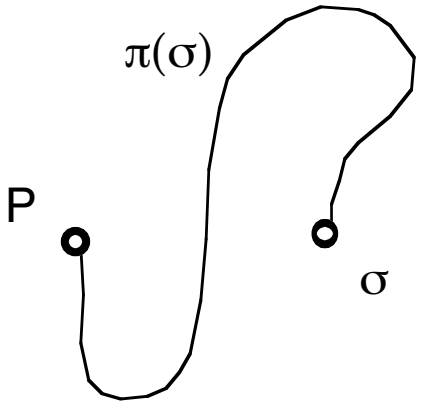

Figure 6: Wege und 1-Simplexe

Die Angabe eines solchen 1-Simplex ist im wesentlichen dasselbe wie die Angabe eines Weges vom einzigen Punkt von σ zum Punkt p. Ein solches 1-Simplex existiert, weil X nach Voraussetzung linear zusammenhänged sein soll. Nach Konstruktion gilt

$$\partial(\pi(\sigma_0)) = \sigma_0 - \hat{p} = (Id - \hat{p} \circ \eta)(\sigma_0)$$

für alle 0-Simplexe σ_0, d.h. es ist

$$\partial \circ \pi = Id - \hat{p} \circ \eta \text{ auf } S_0X.$$

Das bedeutet aber , auf der 0-ten Homologie induziert $\hat{p} \circ \eta$ die identische Abbildung:

$$H_0(\hat{p}) \circ H_0(\eta)[z] = [\hat{p} \circ \eta(z)] = [z - \partial(\pi(z))] = [z],$$

d.h.

$$H_0(\hat{p}) \circ H_0(\eta) = id. \tag{2}$$

Zusammen bedeuten (1) und (2), daß $\eta: SX \to (\mathbb{Z},0)$ auf der 0-ten Homologie einen Isomorphismus induziert.
QED.

3.4.9 Die 0-te Homologie und lineare Komponenten

Seien X ein beliebiger topologischer Raum und

$$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$

die Familie der linearen Komponenten von X. Weiter seien $A\subseteq X$ ein Unterraum und

$$A_\lambda := A\cap X_\lambda.$$

Dann induzieren die Inklusionen $i_\lambda: (X_\lambda,A_\lambda) \subseteq (X,A)$ eine Zerlegung in eine direkte Summe

$$\oplus_{\lambda\in\Lambda} S(X_\lambda,A_\lambda) \cong S(X,A)$$

und folglich auch eine Zerlegung

$$\oplus_{\lambda\in\Lambda} H(X_\lambda,A_\lambda) \cong H(X,A).$$

Insbesondere ist $H_0(X)$ isomorph zur freien abelschen Gruppe, die von den linearen Komponenten von X erzeugt wird.

Beweis. Betrachten wir die Kettenabbildung

$$(*) \qquad \oplus_{\lambda\in\Lambda} S(X_\lambda) \to S(X), (c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda.$$

Für unterschiedliche λ liegen die Simplexe, welche in der Kette c_λ vorkommen, in unterschiedliche Räumen und sind deshalb paarweise verschieden. Die Summe

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda$$

ist deshalb nur dann gleich Null, wenn jedes c_λ Null ist. Mit anderen Worten, die obige Kettenabbildung ist injectiv. Zeigen wir, sie ist auch surjektiv. Dazu genügt es, wenn wir zeigen, jedes Simplex von $\sigma:\Delta_q \to X$ liegt im Bild dieser Abbildung. Nun ist Δ_q linear zusammenhängend: je zwei Punkte lassen sich sogar durch eine Strecke verbinden. Das Bild von σ ist deshalb auch linear zusammenhängend: je zwei Punkte lassen sich durch das Bild einer Strecke verbinden. Somit liegt das Bild ganz in einer linearen Komponente von X, d.h. es gibt ein λ mit $\sigma(\Delta_q)\subseteq X_\lambda$. Dann ist aber σ ein Simplex von X_λ und liegt im Bild der obigen Kettenabbildung. Wir haben gezeigt, die Abbildung (*) ist ein Isomorphismus von Kettenkomplexen. Durch Einschränken erhalten wir einen Isomorphismus

$$(*) \qquad \oplus_{\lambda\in\Lambda} S(A_\lambda) \to S(A), (c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda.$$

und durch Faktorisieren einen Isomorphismus

$$\oplus_{\lambda\in\Lambda} S(X_\lambda)/S(A_\lambda) \to S(A)/S(X).$$

Letzterer ist gerade der gesuchte Isomorphismus $\oplus_{\lambda\in\Lambda} S(X_\lambda,A_\lambda) \to S(X,A)$.

QED.

3.4.10 Die 0-te Homologie des diskreten Raumes

Sei X ein diskreter topologischer Raum (d.h. jedes Teilmenge von X sei offen). Dann gilt

$$H_0(X) \cong \oplus_{x\in X} \mathbb{Z},$$

d.h. $H_0(X)$ ist die von den Punkten von X erzeugte freie abelsche Gruppe.

Beweis. Die linearen Komponenten von X ist gerade die einpunktigen Teilmengen. Die nullte Homologie einer einpunktigen Menge ist gerade $\mathbb{Z}$. Die Behauptung folgt damit aus 3.4.9.
QED.

3.4.11 Umgebungsretrakte

Seien X ein topologischer Raum, A ein Unteraum und

$$i:A\to X$$

die natürliche Einbettung. Der Unterraum A heißt Retrakt von X, wenn es eine stetige Abbildung $r:X\to A$ gibt mit $r\circ i = id$. Die Abbildung r heißt dann Retraktion.

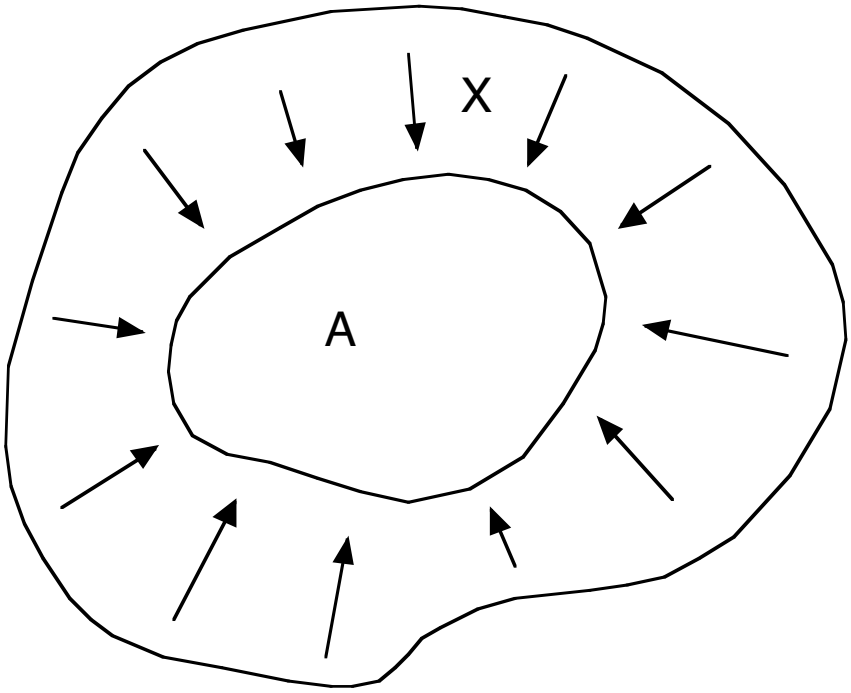

Figure 7: ein Retrakt

Ein Unterraum A eines topologischen Raumes X heißt Umgebungsretrakt, wenn es eine offene Umgebung U von A in X derart gibt, daß A ein Retrakt von U ist.

Beispiele

1. Jeder Punkt von X ist ein Retrakt von X.
2. Sind X und Y topologische Räume und $p\in X$, so ist $\{p\}\times Y$ ein Retrakt von $X\times Y$. Als Retraktion kann man folgende Abbildung verwenden.
$$X\times Y \to \{p\}\times Y, (x,y) \mapsto (p,y).$$
3. Jeder Retrakt ist ein Umgebungsretrakt. Die Umkehrung ist falsch. Wenn X zum Beispiel das Einheitsinterval ist und A aus dessen beiden Endpunkten besteht, so ist A ein Umgebungsretrakt von X, jedoch kein Retrakt (weil X linear zusammenhängend ist, A jedoch nicht).

Bemerkung

Später befassen wir uns mit Umgebungsretrakten. Hier beweisen wir nur ein einfaches Ergebnis über Retrakte.

3.4.12 Die Zerlegung der Homologie mit Hilfe von Retraktionen

Seien X ein topologischer Raum, A ein Teilraum, $i:A\to X$ die natürliche Einbettung und

$$r:X\to A$$

eine Retraktion. Dann ist der Homomorphismus

$$H(X) \to H(A)\oplus H(X,A), [z] \mapsto ([S(r)z, [z])$$

ein Isomorphismus.
Beweis. Betrachten wir die kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \to SA \xrightarrow{i_*} SX \xrightarrow{j} S(X,A) \to 0.$$

Die Existenz der Retraktion r hat zur Folge, daß i_* ein Linksinverses besitzt: mit $r \circ i = id$ gilt $r_* \circ i_* = id$. Damit zerfällt aber die Sequenz, und zwar sogar als Sequenz von Kettenkomplexen (nicht nur als Sequenz von graduierten abelschen Gruppen). Es es besteht also eine Isomorphie von Komplexen

$$SX \cong SA \oplus S(X,A).$$

Übergang zur Homologie liefert die Behauptung.
QED.

3.4.13 Die Homologiesequenz eines Retrakts

Seien X ein topologischer Raum und A ein Retrakt von X. Dann zerfällt die Homologiesequenz des Paares (X,A) in lauter kurze exakte Sequenzen

$$0 \xrightarrow{\partial_*=0} H_q A \xrightarrow{i_*} H_q X \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*=0} 0$$

Beweis. Nach 3.4.12 erhält man eine kurze exakte Sequenz, wenn man die Zusammenhangshomomorphismen an den äußeren Enden durch die Nullabbildung ersetzt. Weil die Homologiesequenz von (X,A) exakt ist, müssen dann aber die Zusammenhangshomomorphismen Null sein.
QED.

3.5 Homotopieinvarianz

3.5.1 Wiederholung

Zwei stetige Abbildungen f,g: X→Y heißen homotop, wenn es eine stetige Familie von Abbildungen

$$F_t : X \to Y, t \in I := [0,1]$$

gilt mit $F_0 = f$ und $F_1 = g$. Eine Familei $F_t : X \to Y$ mit $t \in I$ heißt stetig, wenn die Abbildung

$$X \times I \to Y , (x,t) \mapsto F_t(x),$$

stetig ist.

3.5.2 Formulierung des Satzes über die Homotopieinvarianz

Seien f,g: X → Y homotope Abbildungen topologischer Räume. Dann sind die zugehörigen Abbildungen der singulären Kettenkomplexe

$$Sf, Sg: SX \to SY$$

(ketten-)homotop.
Bemerkung. Bevor wir den Satz beweisen, geben wir einige Folgerungen an.

3.5.3 Folgerung: die Homologie homotoper Abbildungen

Seien f,g: X → Y homotope Abbildungen. Dann sind die auf der Homologie induzierten Abbildungen gleich:

$$H(f) = H(g): HX \to HY.$$

Beweis. Kettenhomotope Abbildunge induzieren dieselben Abbildungen auf der Homologie.
QED.

3.5.4 Folgerung: die Homologie homotoper Räume

Mit $(X,A) \simeq (Y,B)$ gilt $H(X,A) \cong H(X,B)$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es stetige Abbildungen

$$f:(X,A) \to (Y,B) \text{ und } g:(Y,B) \to (X,A)$$

mit

$$f \circ g \simeq id \text{ und } g \circ f \simeq id.$$

Nach dem Satz über die Homotopieinvarianz gilt dann aber

$$H(f) \circ H(g) = H(f \circ g) = H(id) = id$$

und analog

$$H(g) \circ H(f) = H(g \circ f) = H(id) = id.$$

Mit anderen Worten, $H(f)$: $H(X, A) \to H(Y,B)$ ist ein Isomorphismus.
QED.

3.5.5 Folgerung: die reduzierte Homologie kontrahierbarer Räume

Wenn der Raum X kontrahierbar ist, $X \simeq P := \{p\}$, so gilt $\tilde{H}X = 0$. Genauer, die Augmentation η: $SX \to (\mathbb{Z},0)$ ist eine Homotopieäquivalenz.
Beweis. Nach 3.5.4 induziert die einzige Abbildung

$$X \to P$$

einen Isomophismus

$$H_0(X) \to H_0(P) \cong \mathbb{Z}, [\sum_\sigma c_\sigma \cdot \sigma] \mapsto [\sum_\sigma c_\sigma \cdot p] \mapsto \sum_\sigma c_\sigma.$$

Letztere Abbilung ist aber dieselbe Abbildung wie sie auch von der Augmentation induziert wird. Mit anderen Worten, die Augmentation η induziert einen Isomophismus

$$H(\eta): HX \to H(\mathbb{Z},0) = (\mathbb{Z},0).$$

(für Dimensionen $q \neq 0$ ist das trivial). Nun ist η eine Kettenabbildung freier Komplexe. Das bedeutet aber, η ist eine Homotopieäquivalenz (Satz von 2.4).
QED.

3.5.6 Vorbemerkungen

(i) Die Situation, in der wir uns befinden kann man sich wie folgt illustieren. Wir haben ein Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccccc} \text{Top} & \xrightarrow{S} & \partial\text{Ab} & \xrightarrow{H} & \text{GAb} \\ \pi\downarrow & & \pi\downarrow & & \| \\ \text{Htp} & \xrightarrow{\bar{S}} & \text{H}\partial\text{Ab} & \xrightarrow{\bar{H}} & \text{GAb} \end{array}$$

Der Satz über die Homotopieinvarianz bedeutet im wesentlichen, daß wir dieses Diagramm kommutativ durch einen gestrichelt eingezeichneten Funktor $\bar{S}$ ergänzen können.

(ii) Wenn $f:(X,A) \to (X,B)$ eine Homotopieäquivalenz ist, so sind auch

$$f:X \to Y \text{ und } f|_A:A \to B$$

Homotopieäquivalenzen. Die Umkehrung dieser Aussage ist nicht richtig. Seien zum Beispiel

$$X := Y := [0,1],\ A := \{0,1\},\ B := [0,1] - \{\tfrac{1}{2}\}.$$

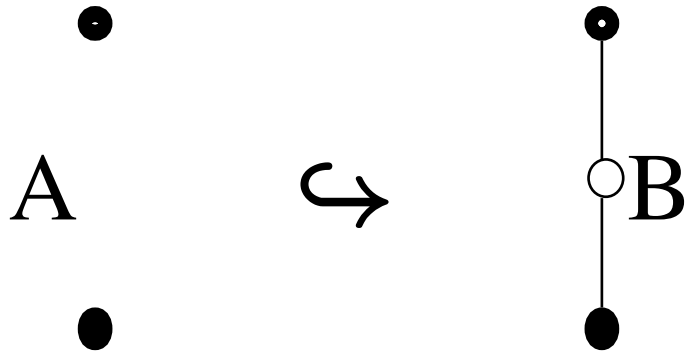

Figure 8: Homotopie-Äquivalenz von Räumen und topologischen Paaren

Dann sind die natürlichen Einbettungen $X \subseteq Y$ und $A \subseteq B$ Homotopieäquivalenzen (es gibt eine Retraktion $B \to A$, welche als Abbildung $B \to B$ homotop zur identischen Abbildung ist). Die Einbettung $f:(X,A) \subseteq (Y,B)$ ist jedoch keine Homotopieäquivalenz, denn eine Homotopieinverse

$$g:(Y,B) \to (X,A)$$

müßte auf jedem Teilintervall von B konstant sein, müßte also aus Stetigkeitsgründen auf ganz Y konstant sein. Dann ist aber auch

$$g \circ f: (X,A) \to (X,A)$$

konstant. Die Einschränkung von $g \circ f$ auf A läßt sich also nicht in die identische Abbildung von A deformieren (nach dem Zwischenwersatz - man betrachte das Bild des Punktes, der kein Wert von $g \circ f$ ist bei der Homotopie von $g \circ f$ in die Identität).

3.5.7 Ein vorbereitender Satz

Seien $F^0, F^1: SX \to S([0,1] \times X)$ natürliche Kettenabbildungen mit der Eigenschaft, daß die Komposition

$$S\Delta_0 \xrightarrow{F_i} S([0,1] \times \Delta_0) \xrightarrow{\eta} (\mathbb{Z},0)$$

unabhängig von $i \in \{0,1\}$ ist,

$$\eta F^0 = \eta F^1 \text{ auf } S\Delta_0.$$

Dann existiert eine natürliche Kettenhomotopie

$$s: F^0 \simeq F^1.$$

Bemerkung

Die Natürlichkeit der Abbildung φ ($=F^0$, F^1 oder s) soll bedeuten, daß sie für alle topologischen Räume X definiert ist und daß für jede stetige Abbildung $h:X' \to X$ das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} SX' & \xrightarrow{\varphi} & S([0,1] \times X') \\ {\scriptstyle Sh}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S(h \times id)} \\ SX & \xrightarrow{\varphi} & S([0,1] \times X) \end{array} \qquad (1)$$

Beweis. Wir haben eine Kettenhomotopie s zu konstruieren, d.h. eine Familie von Gruppenhomomorphismen

$$s_k: S_k X \to S_{k+1}([0,1] \times X)$$

mit

$$\partial_{k+1} s_k + s_{k-1} \partial_k = F_k^0 - F_k^1 \qquad (2)$$

für jedes $k\in\mathbb{Z}$. Für $k<0$ muß s_k der triviale Homomorphismus sein, da der Definitionsbereich die triviale Gruppe ist. Nehmen wir jetzt an, wir hätten die s_k bereits für alle $k<q$ derart konstruiert, daß (2) gilt. Wir haben s_q so zu definieren, daß die Identät auch für den neuen Index q bestehen bleibt.
Bezeichne $\iota_q:\Delta_q\to\Delta_q$ die identische Abbildung. Wir können ι_q als singuläres Simplex des topologischen Raumes Δ_q auffassen.

$$\iota_q\in S\Delta_q$$

Insbesondere können wir auf ι_q den Randoperator und die Kettenabbildungen F^i anwenden. Betrachtenwir die folgenden Kette

(3) $$c := F^0\iota_q - F^1\iota_q - s_{q-1}\partial\iota_q \in S([0,1]\times\Delta_q).$$

1.Schritt. Wir zeigen, die Kette c ist ein Rand: es gibt ein $b\in S_{q+1}([0,1]\times\Delta_q)$ mit

$$c = \partial b.$$

Zeigen wir zunächst, c ist ein Zyklus. Es gilt

$$\begin{aligned}\partial c &= \partial F^0\iota_q - \partial F^1\iota_q - \partial s_{q-1}\partial\iota_q && \text{nach Definition (3) von c}\\ &= F^0\partial\iota_q - F^1\partial\iota_q - (F^0 - F^1 - s_{q-2}\partial)\partial\iota_q && \text{nach (2) mit k:= q-1}\\ &= 0\end{aligned}$$

Damit repräsentiert c eine Homologieklasse

$$[c]\in H_q(([0,1]\times\Delta_q).$$

Es gilt sogar noch mehr: [c] liegt sogar in der reduzierten Homologie. Für $q\neq 0$ ist das trivial, da für diese q die reduzierte mit der gewöhlichen Homologie übereinstimmt. Für q=0 haben wir zu zeigen, [c] liegt im Kern der Augmentation, d.h. zu zeigen ist

$$0 = \gamma[c] = [\eta c].$$

Dabei bezeichne wie bisher η die Augmentation auf Komplexniveau. Es gilt:

$$\begin{aligned}\eta c &= \eta F^0\iota_q - \eta F^1\iota_q - \eta s_{q-1}\partial\iota_q && \text{nach Definitoin (3) von c}\\ &= \eta s_{q-1}\partial\iota_q && \text{wegen } \eta F^0 = \eta F^1 \text{ für q=0 nach Voraussetzung}\\ &= 0 && \text{wegen } \partial\iota_q = 0 \text{ im Fall q=0.}\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt,

$$[c]\in\tilde{H}_q([0,1]\times\Delta_q).$$

Nun ist $[0,1]\times\Delta_q$ eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^{q+2}$, hat also triviale reduzierte Homologie. Mit anderen Worten [c] = 0, d.h. c ist Rand einer (q+1)-Kette b,

$$c = \partial b \text{ für ein } b\in S_{q+1}([0,1]\times\Delta_q)$$

Damit ist die Behauptung des ersten Schritts bewiesen. Die eben konstruierte Kette b versetzt uns in die Lage, den Homomorphismus s_q wie folgt zu definieren.

(4) $$s_q:S_q(X)\to S_{q+1}([0,1]\times X),\ \sigma\mapsto S(id\times\sigma)(b).$$

2. Schritt. Der Homomorphismus (4) ist wohldefiniert.

Die q-Simplexe von X bilden ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $S_q(X)$. Zur Definition von s_q genügt es deshalb, für jedes q-Simplex σ dessen Bild anzugeben. Ein q-Simplex von X ist eine stetige Abbildung

$$\sigma:\Delta_q \to X.$$

Diese induziert eine stetige Abbildung

$$\mathrm{id}\times\sigma\colon [0,1]\times\Delta_q \to [0,1]\times X$$

und damit einen Komplex-Morphismus

$$S(\mathrm{id}\times\sigma)\colon S([0,1]\times\Delta_q) \to S([0,1]\times X).$$

Da b in $S_{q+1}([0,1]\times\Delta_q)$ liegt, kann man $S(\mathrm{id}\times\sigma)$ auf b anwenden und erhält als Bild ein Element von $S_{q+1}([0,1]\times X)$. Wir haben gezeigt, die Abbildung (4) ist wohldefiniert. Es bleibt noch die Natürlichkeit zu zeigen (d.h. die Kommutativität des Diagramms (1)) und die Gültigkeit der Identität (2) im Fall k = q.

3. Schritt. Beweis der Natürlichkeit von s_q.

Seien $h:X'\to X$ eine stetige Abbildung und $\sigma':\Delta_q \to X'$ ein q-Simplex von X'. Dann gilt

$$S(\mathrm{id}\times h)(s_q\sigma') = S((\mathrm{id}\times h)(\mathrm{id}\times\sigma'))b = S(\mathrm{id}\times(h\sigma'))b = s_q(h\sigma') = s_q(S(h)\sigma').$$

Da σ' beliebig war, folgt $S(\mathrm{id}\times h)\circ s_q = s_q\circ S(h)$.

4. Schritt. Beweis der Gültigkeit von (2) für k=q.
Es gilt

$(\partial s_q)\sigma = \partial S(\mathrm{id}\times\sigma)b = S(\mathrm{id}\times\sigma)\partial b$	da $S(\mathrm{id}\times\sigma)$ Kettenabbildung ist)
$= S(\mathrm{id}\times\sigma)(F^0\iota_q - F^1\iota_q - s_{q-1}\partial\iota_q)$	wegen $\partial b = c$
$= F^0S(\sigma)\iota_q - F^1S(\sigma)\iota_q - s_{q-1}S(\sigma)\partial\iota_q$	Natürlichkeit von F^0, F^1 und s_{q-1}
$= F^0\sigma - F^1\sigma - s_{q-1}S(\sigma)\partial\iota_q$	wegen $\iota_q=\mathrm{id}$
$= F^0\sigma - F^1\sigma - s_{q-1}\partial S(\sigma)\iota_q$	weil $S(\sigma)$ Kettenabbildung ist
$=(F^0 - F^1 - s_{q-1}\partial)\sigma$	wegen $\iota_q=\mathrm{id}$

Da σ beliebig war, folgt $\partial s_q = F^0 - F^1 - s_{q-1}\partial$.
QED.

3.5.8 Beweis der Homotopieinvarianz (Satz 3.5.2)

Sei eine Homotopie Θ von stetigen Abbildungen

$$f,g\colon (X,A) \to (Y,B)$$

gegeben, d.h. eine stetige Familie

$$\Theta\colon ([0,1]\times X,[0,1]\times A) \to (Y,B),\ (t,x) \mapsto \Theta_t(x)$$

von stetigen Abbildungen $\Theta_t\colon (X,A) \to (Y,B)$ mit $\Theta_0 = f$ und $\Theta_1 = g$.

Für jedes $t\in[0,1]$ und beliebige topologische Räume Z sei $F^t_Z = F^t$ die stetige Abbildung

$$F^t\colon Z \to [0,1]\times Z,\ x \mapsto (t,x).$$

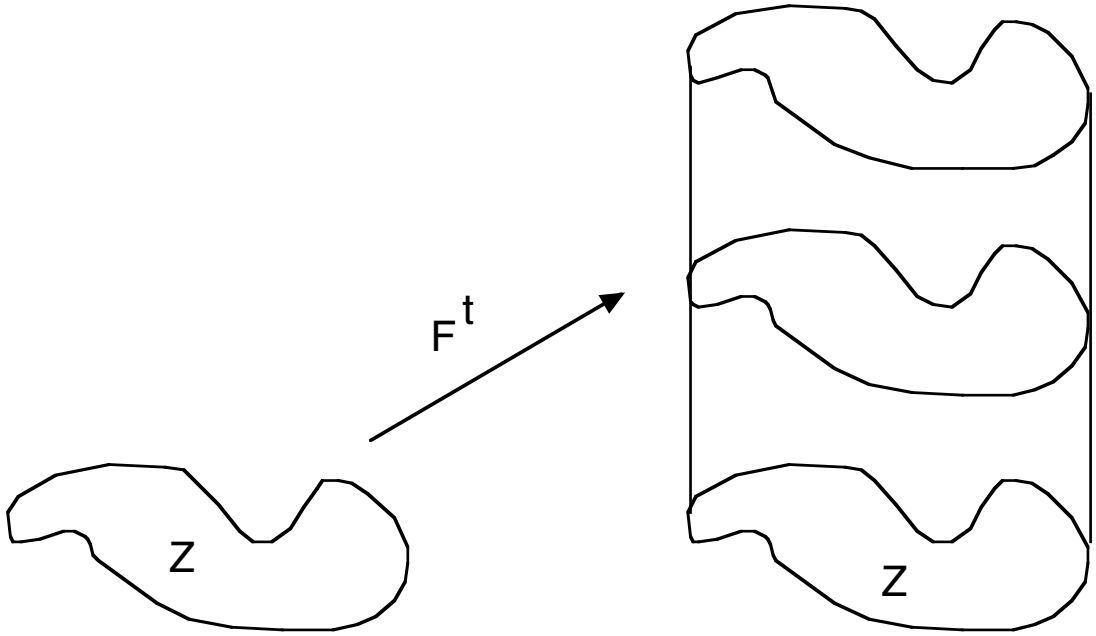

Figure 9: Palleleinbettung eines Raums in seinen Zylinder

Speziell für Z = X erhalten wir $\Theta \circ F^t = \Theta_t$, also

$$\Theta \circ F^0 = f \text{ und } \Theta \circ F^1 = g.$$

Es genügt deshalb, eine Homotopie

(1) $s: SF^0 \simeq SF^1: S(X, A) \longrightarrow S([0,1]\times X, [0,1]\times A) \quad (\overset{S(\Theta)}{\longrightarrow} S(Y,B))$

zu konstruieren. Durch Zusammensetzen mit $S(\Theta)$ erhalten wir dann die gewünschte Homotopie:

$$\begin{array}{ccc} S(\Theta)\circ s: S(\Theta)\circ S(F^0) & \simeq & S(\Theta)\circ S(F^1) \\ || & & || \\ S(\Theta\circ F^0) & & S(\Theta\circ F^1) \\ || & & || \\ S(f) & & S(g) \end{array}$$

Konstruieren wir also eine Kettenhomotopie (*).

Für jedes $t\in[0,1]$ induziert F^t den Komplex-Morphismus

(2) $$S(F^t):S(Z) \to S([0,1]\times Z),\ c = \sum_\sigma c_\sigma\cdot\sigma \mapsto S(F^t)c = \sum_\sigma c_\sigma\cdot\{t\}\times\sigma,$$

wenn $\{t\}\times\sigma$ das Simplex $\{t\}\times\sigma:\Delta_q \to [0,1]\times Z,\ x \mapsto (t, \sigma(x))$ bezeichnet. Dieser ist natürlich bezüglich Z, d.h. für jede stetige Abbildung $h: Z' \longrightarrow Z$ ist das folgende Diagramm kommutativ.

(3)
$$\begin{array}{ccc} SZ' & \overset{F^t}{\longrightarrow} & S([0,1]\times Z) \\ S(h)\downarrow & & \downarrow S(Id\times h) \\ SZ & \overset{F^t}{\longrightarrow} & S([0,1]\times Z) \end{array}$$

Aus der Abbildungsvorschrift von (2) lesen wir ab, die Summe der Koeffizienten der Kette

$$S(F^t)c$$

ist unabhängig von t, d.h die Zusammensetzung von $S(F^t)$ mit der Augmentation $\eta:S([0,1]\times Z)\to(\mathbb{Z},0)$ ist unabhängig von t. Insbesondere ist

$$\eta\circ S(F^0) = \eta\circ S(F^1).$$

Nach 2.5.7 gibt es eine natürliche Homotopie

$$s:SF^0 \simeq SF^1: S(X) \to S([0,1]\times X)$$

für jeden topologischen Raum X.

Aus (3) erhalten wir für den Fall, daß h die natürliche Einbettung $A \hookrightarrow X$ ist,

$$S(F^t)SA \subseteq S([0,1]\times A)$$

für alle t. Analog ergibt sich auf Grund der Natürlichkeit von s, daß das folgende Diagramm (graduierter abelscher Gruppen) kommutativ ist,

$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{s} & S([0,1]\times X)[+1] \\ \cup & & \cup \\ SA & \xrightarrow{s} & S([0,1]\times A)[+1] \end{array}$$

d.h. es gilt

$$s(SA) \subseteq S([0,1]\times A)[+1],$$

Durch Übergang zu den Faktorkomplexen erhalten wir eine Kettenhomotopie

$$s: \bar{S}F^0 \simeq \bar{S}F^1 : S(X,A) \to S([0,1]\times X,[0,1]\times A).$$

QED.

3.5.9 Deformationsretrakte und starke Deformationsretrakte

Seien (X,A) ein topologisches Paar und

$$i:A\to X$$

die natürliche Einbettung. Dann heißt A Deformationsretrakt von X, wenn es es Homotopie $\Theta_t:X\to X$ gibt mit

$$\Theta_0 = id, \qquad \Theta_1(X) = A, \qquad \Theta_1|_A = i.$$

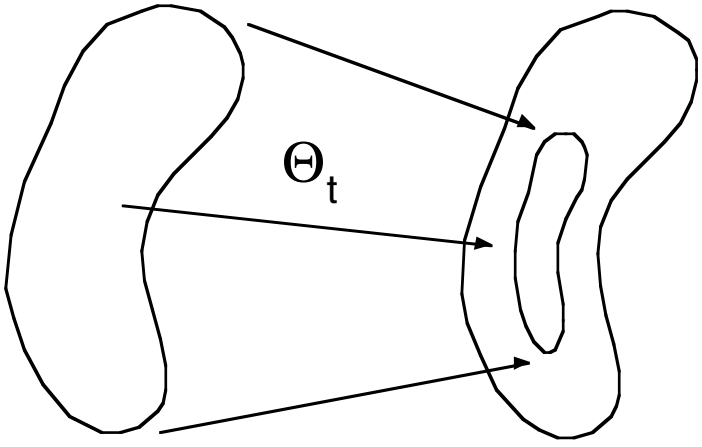

Figure 10: ein starker Deformationsretrakt

In dieser Situation ist $r := \Theta_1 : X \to A$ eine Retraktion und es gilt $r \circ i = id$ und $i \circ r \simeq id$, d.h. i und r sind zueinander homotopieinverse Homotopieäquivalenzen. Insbesondere ist

$$Hi: HA \to HX$$

ein Isomorphismus.
Wenn man die Homotopie sogar so wählen kann, daß

$$\Theta_t|_A = i$$

gilt für alle t, so heißt A starker Deformationsretrakt von X.

Beispiele

(i) Ist $p \in X$ ein Punkt von X, so ist die einpunktige Teilmenge $\{p\} \subseteq X$ genau dann ein Deformationsretrakt, wenn, X kontrahierbar[13] ist. Es gilt dann $\tilde{H}X = 0$ (nach 3.5.5).

(ii) Die n-dimensionale Einheitssphäre

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

ist ein starker Deformationsretrakt des punktierten euklidischen Raumes

$$\mathbb{R}^{n+1}\text{-}\{0\}.$$

Als Deformation kann man die folgende stetige Familie nehmen[14].

$$\Theta_t(x) := (1\text{-}t + \frac{t}{\|x\|}) \cdot x$$

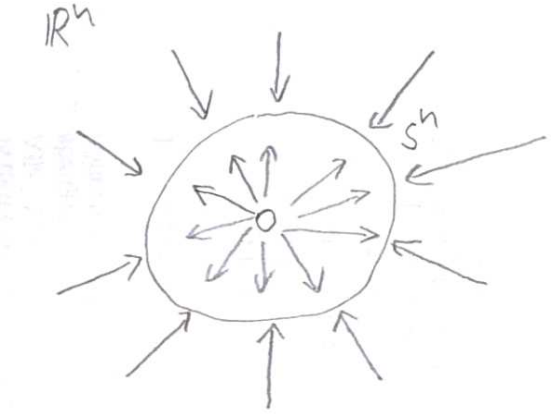

Figure 11: die Sphäre als starker Deformationsretrakt des punktierten Raums

(iii) Die Deformation von (ii) zeigt auch, daß S^n ein starker Deformationsretrakt der Punktierten (n+1)-dimensionalen Vollkugel

$$B^{n+1}\text{-}\{0\}$$

ist. Dabei sei

$$B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}.$$

Insbesondere gilt

$$HS^n \cong H(B^{n+1}\text{-}\{o\}) \cong H(\mathbb{R}^{n+1}\text{-}\{o\}).$$

---

[13] d.h. die identische Abbildung Id: $X \longrightarrow X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

[14] Θ_0 ist die identische Abbildung und Θ_1 die Abbildung $x \mapsto x/\|x\|$. Außerdem ist für jedes t die Einschränkung von Θ_t auf S^n die Abbildung $x \mapsto x$.

3.6 Baryzentrische Unterteilung

3.6.1 Der Unterteilungshomomorphismus

Für jede nicht negative ganze Zahl q heißt der Punkt

$$B_q := (\frac{1}{q+1},...,\frac{1}{q+1}) \in \Delta_q$$

des q-dimensionalen Standardsimplex Baryzentrum von Δ_q (Massenmittelpunkt). Für jedes (q-1)-Simplex σ des topologischen Raumes Δ_q bezeichne $B_q \cdot \sigma$ wie im Beweis von 3.4.5 das Simplex von Δ_q, dessen Bild der Kegel mit der Spitze B_q und der Basis σ ist. Wir denken uns die Abbildung B_q linear zu einer Abbildung

$$B_q : S_{q-1}\Delta_q \to S_q\Delta_q$$

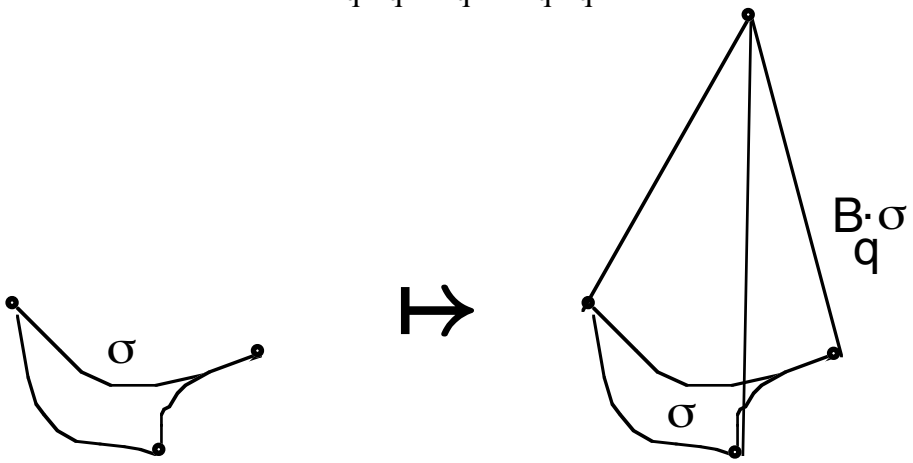

Figure 12: Kegel mit der Spitze im Baryzentrum

fortgesetzt.

Für jeden topologischen Raum X und für jedes $q \geq 0$ definieren wir induktiv einen Gruppenhomomorphismus

$$\beta_q : S_q X \to S_q X.$$

welcher baryzentrische Unterteilung heißt. Für q=0 sei β_q die identische Abbildung.

$$\beta_0 := id : S_0 X \to S_0 X, c \mapsto c.$$

Sei jetzt q>0 und β_i für alle i<q bereitsdefiniert. Zur Definition von β_q genügt es das Bild $\beta_q(\sigma)$ für jedes q-Simplex von $\sigma:\Delta_q \to X$ anzugeben. Falls $X := \Delta_q$ ist und

$$\sigma := \iota_q : \Delta_q \to \Delta_q$$

die identische Abbildung, so setzen wir

$$\beta_q(\iota_q) := B_q \cdot \beta_{q-1}(\partial \iota_q) \in S_q \Delta_q.$$

Schließlich sei für ein beliebiges q-Simplex $\sigma:\Delta_q \to X$,[15]

$$\beta_q(\sigma) := S(\sigma) \circ \beta_q(\iota_q).$$

---

[15] d.h wir unterteilen zuerst das Simplex $\iota_q = Id:\Delta_q \to \Delta_q$ und transportieren dann diese Unterteilung mit Hilfe von S(σ) in den uns interessierenden Raum.

Man beachte, $S(\sigma)$ ist eine Kettenabbildung $S(\sigma):S\Delta_q \to SX$.

Bemerkungen.

(i) Grob gesagt, erhält man die baryzentrische Unterteilung des q-Simplex σ aus der baryzentrischen Unterteilung des Randes $\partial\sigma$, indem man über jedem Simplex der Randunterteilung den Kegel mit der Spitze im Baryzentrum von σ errichtet.

(ii) Die wichtigste Eigenschaft der baryzentrischen Unterteilung besteht darin, ein gegebenes Simplex in kleinere zu zerlegen.

3.6.2 Der Durchmesser mehrfacher baryzentrischer Unterteilungen

Die Folge der Homomorphismen $\beta_q:S_qX \to S_qX$ definiert eine natürliche Kettenabbildung

$$\beta:SX \to SX$$

mit der folgenden Eigenschaft:

Für jedes $q \geq 0$ und jedes reelle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N := N(\varepsilon, q)$ derart, daß für jedes

$$n \geq N$$

alle Simplexe τ der Kette $c = \beta^n(\iota_q) \in S_q\Delta_q$ einen Durchmessser $\|\tau\| < \varepsilon$ besitzen. Mit anderen Worten aus $\|\tau\| \geq \varepsilon$ folgt, daß der Koeffizient c_τ von τ in c gleich Null ist,

$$c_\tau = 0.$$

Dabei sei der Durchmesser eines Simplexes $\tau: \Delta_q \to \mathbb{R}^k$ definiert als

$$\|\tau\| := \sup \{ \|\tau(x) - \tau(y)\| \; x,y \in \Delta_q \}.$$

Beweis. 1. Schritt: Natürlichkeit von β.

Für jede stetige Abbildung $f:X \to Y$ und jedes q-Simplex $\sigma:\Delta_q \to X$ gilt

$$\begin{aligned} S(f)(\beta(\sigma)) &= S(f)(S(\sigma)\circ\beta_q(\iota_q)) && \text{(induktive Definition von } \beta) \\ &= S(f\circ\sigma)(\beta_q(\iota_q)) && \text{(Funktorialität von S)} \\ &= \beta(f\circ\sigma). \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{\beta} & SX \\ {\scriptstyle S(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S(f)} \\ SY & \xrightarrow{\beta} & SY \end{array}$$

Also ist β eine natürliche Transformation.

2. Schritt. β ist eine Kettenabbildung.

Wir zeigen dies durch Induktion nach q. Für q=0 gilt trivialerweise

$$\partial b_q = b_{q-1}\partial,$$

da auf beiden Seiten aus Dimensionsgründen die Nullabbildung steht. Führen wir den Induktionsschritt durch. Für jedes q-Simplex $\sigma:\Delta_q \to X$, $q>0$, gilt:

$$\begin{aligned} \partial(b_q\sigma) &= \partial(S(\sigma)\circ\beta_q(\iota_q)) && \text{(induktive Definition von } \beta) \\ &= \partial(S(\sigma)(B_q\cdot\beta_{q-1}(\partial\iota_q))) && \text{(induktive Defintion von } \beta_q(\iota_q)) \\ &= S(\sigma)(\partial(B_q\cdot\beta_{q-1}(\partial\iota_q))) && (S(\sigma) \text{ ist Kettenabbildung}) \\ &= S(\sigma)(\beta_{q-1}(\partial\iota_q) - B_{q-1}\cdot\partial\beta_{q-1}(\partial\iota_q)) && \text{(siehe unten)} \end{aligned}$$

$= S(\sigma)(\beta_{q-1}(\partial\iota_q))$ (wegen $\partial\beta_{q-1} = \beta_{q-2}\partial$ nach Ind.vor.)

$= \beta_{q-1}(S(\sigma)(\partial\iota_q))$ (Natürlichkeit von β)

$= \beta_{q-1}(\partial\sigma)$ ($S(\sigma)$ ist Kettenabbildung)

Das vierte Gleichheitszeichen ergibt sich dabei aus der Tatsache, daß die Multiplikation mit einem Punkt B im konvexen Raum Δ_q eine Kettenhomotopie ist,

$$\partial \hat{B} + \hat{B}\partial = id - \hat{B}\circ\eta$$

(vgl. den Beweis von 3.4.5) und der Term $\hat{B}\circ\eta$ wegen $q>0$ die Nullabbildung ist, d.h. es ist

$$\partial B = id - B\partial.$$

Wir haben gezeigt, $\partial\beta_q = \beta_{q-1}\partial$, d.h. β ist Kettenabbildung.

3. Schritt. Sei $\sigma: \Delta_q \to \mathbb{R}^k$ ein lineares Simplex mit den Ecken

$$p_0,...,p_q \in \mathbb{R}^k,\ p_i := \sigma(e_i).$$

Dann gilt

(a) $\|p-p'\| \le \max\{\|p-p_i\| \mid i=0,...,q\}$ für beliebige $p,p' \in \sigma(\Delta_q)$.

(b) $\|\sigma\| = \max\{\|p_i - p_j\| \mid i,j=0,...,q\}$

Zum Beweis beachten wir, der Punkt p' läßt sich in der Gestalt $p' = \sum_{i=0}^{q} x'_i p_i$ mit $\sum_{i=0}^{q} x'_i = 1$ schreiben. Also gilt

$$\|p-p'\| = \|(\sum_{i=0}^{q} x'_i)p - p'\|$$

$$= \|\sum_{i=0}^{q}(x'_i p - x'_i p_i)\|$$

$$\le \sum_{i=0}^{q} x'_i \cdot \|p - p_i\| \quad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

$$\le^{16} (\sum_{i=0}^{q} x'_i)\cdot\max\{\|p-p_i\| \mid i=0,...,q\}$$

$$= \max\{\|p-p_i\| \mid i=0,...,q\}.$$

Damit ist (a) bewiesen. Aussage (b) erhält man durch 2-maliges Anwenden von (a).[17]

4. Schritt. Sei $\sigma: \Delta_q \to \mathbb{R}^k$ ein lineares Simplex. Dann besteht die Kette $\beta(\sigma)$ aus linearen Simplexen eines Durchmessers $\le \frac{q}{q+1}\cdot\|\sigma\|$.

Insbesondere besteht $\beta(\iota_q)$ aus Simplexen eines Durchmessers $\le \frac{q}{q+1}\cdot\|\iota_q\|$.

Mit dem Beweis dieser Aussage ist dann auch der Satz bewiesen.

---

[16] Wir ersetzen jeden Summanden durch das Maximum aller Summanden.

[17] Genauer: man bekommt dadurch die Ungleichung. Trivialerweise gilt dann aber das Gleichheitszeichen.

Aus der Definition der Kegelkonstruktion im Beweis von 3.4.5 ergeben sich folgende Eigenschaften.

(i) Für jedes singuläre Simplex τ: $\Delta_r \to \mathbb{R}^s$, jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^s$ und jede lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t$ gilt[18]

$$S(f)(p\cdot\tau) = f(p)\cdot(f\circ\tau).$$

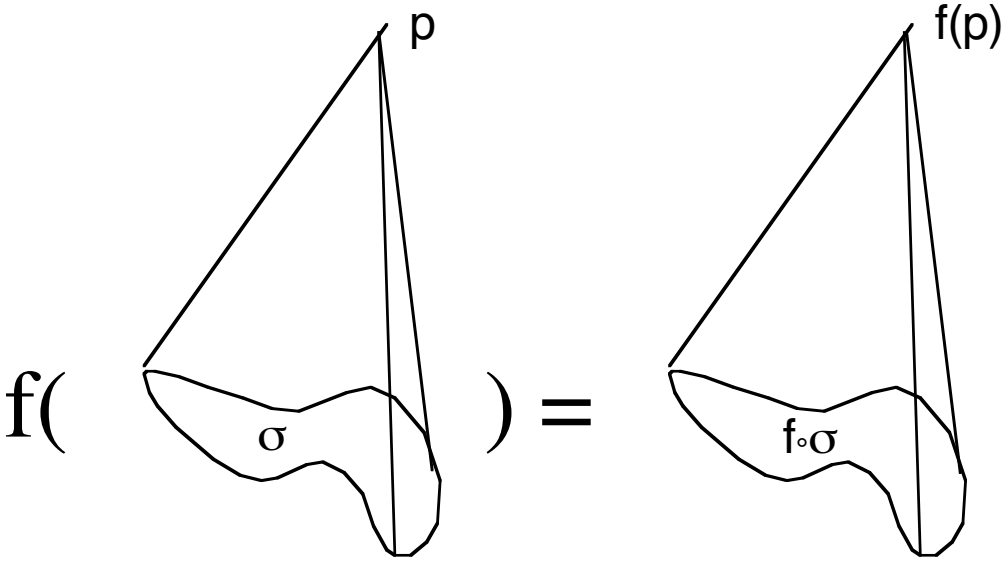

Figure 13: lineares Bild eines Kegels

(ii) Ist τ: $\Delta_r \to \mathbb{R}^s$ ein lineares Simplex mit den Ecken $q_0,...,q_r$, so ist der Kegel über τ, d.h. die Abbildung

$$p\cdot\tau:\Delta_{r+1} \to \mathbb{R}^s$$

ein lineres Simplex mit den Ecken $p,q_0,...,q_r$.

Mit Hilfe dieser beiden Eigenschaften erhalten wir für das lineare Simplex σ: $\Delta_q \to \mathbb{R}^k$ die folgenden Identitäten:

$\beta(\sigma) = \beta(S(\sigma)\iota_q) = S(\sigma)\beta(\iota_q)$ (Natürlichkeit von β)

$= S(\sigma)(B_q\cdot\beta_{q-1}(\partial\iota_q))$ (Definition von β)

$= \sigma(B_q)\cdot S(\sigma)(\beta_{q-1}(\partial\iota_q)))$ (Eigenschaft (i))

$= \sigma(B_q)\cdot\beta_{q-1}(\partial\sigma)$ (Natürlichkeit von β)

$= \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \sigma(B_q)\cdot\beta_{q-1}(\sigma\varepsilon^j)$ (Definition von ∂).

Damit besteht $\beta(\sigma)$ aus Simplexen der Gestalt

$$\sigma' := \sigma(B_q)\cdot\tau$$

wobei τ in einer der Ketten

$$\beta_{q-1}(\sigma\varepsilon^j)$$

vorkommt. Das Simplex σ' hat den Durchmesser

---

[18] weil lineare Abbildungen Strecken in Strecken abbilden (und Endpunkte von Strecken in Endpunkte von Strecken).

$$\|\sigma\| = \|p-q\|$$

mit geeigneten Ecken p,q von σ'.Nach Eigenschaft (ii) sind diese Ecken entweder beides Ecken von τ oder eine der Ecken ist gleich $\sigma(B_q)$. Im ersten Fall gilt

$$\begin{aligned}
\|\sigma'\| = \|p-q\| &\leq \|\tau\| && \text{(weil p, q Ecken von } \tau \text{ sind)}\\
&\leq \frac{q-1}{q}\cdot\|\sigma\varepsilon^j\| && \text{(Induktion bzw. q)}\\
&\leq \frac{q-1}{q}\cdot\|\sigma\| && \text{(wegen } \mathrm{Im}(\sigma\varepsilon^j)\subseteq \mathrm{Im}(\sigma)\text{)}\\
&= \frac{q}{q+1}\cdot\|\sigma\| && \text{(wegen } \frac{q-1}{q}<\frac{q}{q+1}\text{).}
\end{aligned}$$

Im zweiten Fall gilt nach dem 3.Schritt, wenn z.B. $p = \sigma(B_q)$ ist,

$$\|\sigma'\| = \|p-q\| \leq \|p-p_i\|$$

für ein i. Also ist

$$\|\sigma'\| \leq \|\sigma(B_q) - p_i\| =^{19} \Big\|\sum_{\mu=0}^{q}\frac{1}{q+1}\cdot(p_\mu - p_i)\Big\| \leq \frac{1}{q+1}\cdot\sum_{\mu=0}^{q}\|p_\mu - p_i\| =^{20} \frac{q}{q+1}\cdot\|\sigma\|.$$

Damit ist die Aussage des 4.Schritts bewiesen, also auch die Aussage des Satzes.
QED.

3.6.3 Kettenabbildungen die in der Dimension 0 übereinstimmen

Seien γ^0,γ^1: SX → SX zwei natürliche Komplex-Morphismen, die in der Dimension 0 übereinstimmen. Dann existiert eine natürliche Homotopie $\gamma^0 \simeq \gamma^1$.
Beweis. Betrachten wir die Kompositionen

$$F^i\colon SX \xrightarrow{\gamma^i} SX \xrightarrow{SJ} S([0,1]\times X),$$

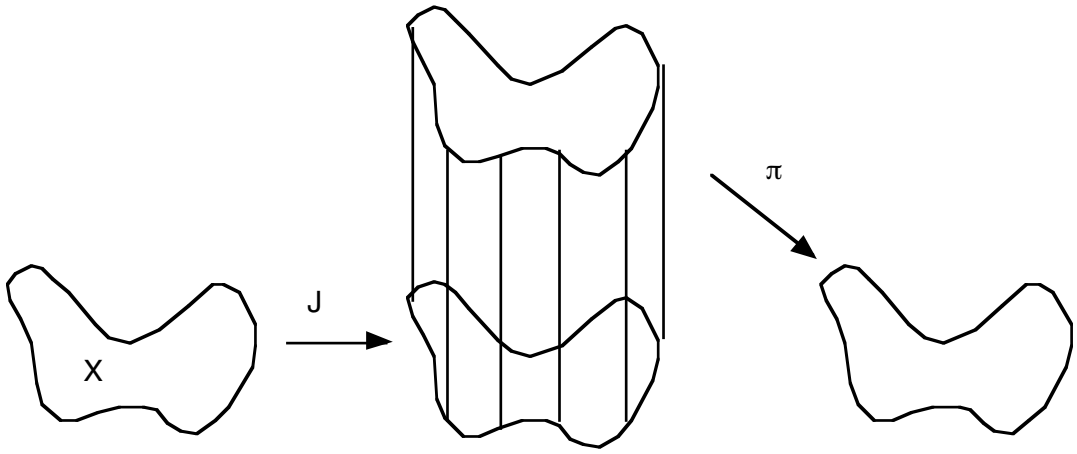

Figure 14: Einbettung in den Zylinder und Projektion

wobei J die stetige Abbildung J:X→[0,1]×X, x ↦ (0,x), sei. Nach 3.5.7 existiert eine natürliche Homotopie

$$s\colon F^0 \simeq F^1.$$

---

[19] Nach Definition ist $B_q = \frac{1}{q+1}$(Summe der Ecken von Δ_q). Weil σ ein lineares Simplex ist, ist

$$\sigma(B_q) = \frac{1}{q+1}\text{(Summe der Ecken von } \sigma)$$

[20] Der i-te Summand der Summe links ist Null.

Ihre Komposition mit $S(\pi)$, wobei $\pi:[0,1]\times X\to X$ die Projektion auf den zweiten Faktor sei, liefert eine Homotopie

$$S(\pi)s:\ S(\pi)F^0 \simeq S(\pi)F^1.$$

Wegen $S(\pi)F^i = S(\pi)S(J)\gamma^i = \gamma^i$ ist das gerade die Behauptung.
QED.

3.7 Kleine Simplexe und Ausschneidung

3.7.1 Vorbemerkung

Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, zur Berechnung der singulären Homologie genügt es, sich auf die Betrachtung kleiner Simplexe zu beschränken. Daraus wird sich ergeben, daß sich H(X,A) nicht ändert, wenn man aus X und A einen gewissen Teilraum B herausnimmt, der sich nicht mit dem Rand von A scheidet.

3.7.2 Der singuläre Komplex eines Systems von Teilmengen

Seien X ein topologischer Raum und **U** ein System von Teilmengen von X. Wir bezeichnen mit

$$S\mathbf{U}$$

den kleinsten Teilkomplex von SX, welcher alle SU mit $U\in\mathbf{U}$ als Teilkomplexe enthält. Mit anderen Worten, $S(\mathbf{U})$ ist der Teilkomplex, welcher von der Familie der Teilkomplexe

$$\{SU\}_{U\in\mathbf{U}}$$

erzeugt wird. Die Ketten von $S(\mathbf{U})$ sind gerade die Linearkombinationen von Simplexen sind, welche ganz in einem $U\in\mathbf{U}$ liegen. Man kann sagen, $S(\mathbf{U})$ wird von den Simplexen vom Kleinheitsgrad **U** erzeugt.

Für jeden Teilraum $A\subseteq X$ setzen wir

$$\mathbf{U}\cap A := \{U \bigcap A\}_{U\in\mathbf{U}}.$$

Dann ist $S(\mathbf{U}\cap A)$ ein Teilkomplex von $S(\mathbf{U})$ und wir setzen

$$S(\mathbf{U},\mathbf{U}\cap A) := S(\mathbf{U})/S(\mathbf{U} \bigcap A).$$

Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S(\mathbf{U} \bigcap A) & \longrightarrow & S(\mathbf{U}) & \longrightarrow & S(\mathbf{U},\mathbf{U} \bigcap A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S(A) & \longrightarrow & S(X) & \longrightarrow & S(X,A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dessen linke vertikale Pfeile die natürlichen Einbettungen bezeichnen. Der rechte vertikale Komplex-Morphismus exitiert nach dem Homomorphie-Satz.

3.7.3 Vergleich der Homologien von S(X,A) und S(U,U∩A)

Seien (X,A) ein topologisches Paar und **U** ein System von Teilmengen von X. Dabei sei folgende Bedingung erfüllt:

(*) Jeder Punkt $x\in X$ befindet sich im Innern von A oder im Innern einer der Mengen $U\in\mathbf{U}$.

Dann ist die Kettenabbildung $S(\mathbf{U},\mathbf{U}\cap A)\to S(X,A)$ eine Homotopieäquivalenz. Insbesondere induziert sie einen Isomorphismus der Homologiegruppen

$$H(\mathbf{U},\mathbf{U}\cap A)\to H(X,A).$$

Bevor wir diese Aussage beweisen, geben wir zunächst einige Folgerunge an.

3.7.4 Folgerung: Ausschneidungssatz I
Seien (X,A) ein topologisches Paar und Y⊆X eine Teilmenge mit

$$X =^{21} \overset{\circ}{Y} \cup \overset{\circ}{A}.$$

Dann ist die natürliche Einbettung

$$j: S(Y, Y\cap A) \to S(X,A)$$

eine Homotopieäquivalenz. Insbesondere gilt $H(Y,Y\cap A) \cong H(X,A)$.

Beweis. Das ist der Spezialfall von 3.7.3, in welchem **U** aus nur einer Menge Y besteht.
QED.

3.7.5 Folgerung: Ausschneidungssatz II
Seien (X,A) ein topologisches Paar und B⊆A eine Teilmenge mit

$$\bar{B} \subseteq \overset{\circ}{A}.$$

Dann ist die natürliche Einbettung

$$j: S(X-B, A.- B) \to S(X,A)$$

eine Homotopieäquivalenz. Insbesonder gilt $H(X-B,A.-B) \cong H(X,A)$.
Beweis. Das ergibt sich aus 3.7.4 indem man die Menge Y durch ihr Komplement B:=X-Y ersetzt.
QED.

3.7.6 Beweis von 3.7.3.

1. Schritt. Für jede Kette $c\in S_q X$ gibt es ein $n\in\mathbb{N}$ mit $\beta^n(c)\in S_q \mathbf{V}$. Dabei bezeichne β die baryzentrische Unterteilung und **V** die Überdeckung

$$\mathbf{V} := \mathbf{U}\cup\{A\}$$

von X.

Da die Kette c eine endliche Linearkombination von Simplexen ist, genügt es, die Aussage für den Fall $c=\sigma:\Delta_q \to X$ eines q-Simplex zu beweisen. Nach Voraussetzung bilden die Mengen

$$\overset{\circ}{V} \text{ mit } V\in\mathbf{V}$$

eine offene Überdeckung von X. Also bilden die Mengen

$$W := \sigma^{-1}(\overset{\circ}{V}) \text{ mit } V\in\mathbf{V}$$

eine offene Überdeckung **W** von Δ_q. Sei ε>0 eine Lebesque-Zahl für diese Überdeckung, d.h. jede Teilmenge von Δ_q mit einem Durchmesser <ε liege ganz in einer der Mengen W. Ein solches ε existiert, weil Δ_q ein kompakter metrischer Raum ist (vgl. Anhang 2). Nach 3.6.2 gibt es eine iterierte baryzentrische Unterteilung $\beta^n(\iota_q)$ des identischen Simplex $\iota_q:\Delta_q \to \Delta_q$ derart, daß jedes Simplex von $\beta^n(\iota_q)$ einen

---

[21] $\overset{\circ}{Y}$ bezeichne das Innere von Y, d.h. die Vereinigung aller offenen Teilmengen, die ganz in Y liegen.

Durchmesser kleiner als ε hat, also ganz in einer der Mengen $W=\sigma^{-1}(\overset{\circ}{V})$ liegt. Dann liegt aber jedes Simplex von

$$\beta^n(\sigma) = S(\sigma)(\beta^n(\iota_q))$$

in einer der Mengen $\overset{\circ}{V}$ mit $V\in\mathbf{V}$. Mit anderen Worten, es gilt $\beta^n(\sigma)\in S_q\mathbf{V}$.

2. Beweis der Behauptung.
Wir wollen zeigen, die natürliche Einbettung

$$j: S(\mathbf{U}, \mathbf{U}\cap A) \to S(X, A)$$

ist eine Homotopieäquivalenz. Da die Komplexe $S(\mathbf{U}, \mathbf{U}\cap A)$ und $S(X, A)$ frei sind, genügt es, wenn wir die Bijektivität der induzierten Abbildung $H(\mathbf{U}, \mathbf{U}\cap A) \to H(X, A)$ auf der Homologie beweisen (vgl. 2.4.3). Aus der Homologiesequenz zur kurzen exakten Sequenz

$$0 \to S(\mathbf{U}, \mathbf{U}\cap A) \to S(X, A) \to S(X,A)/S(\mathbf{U}, \mathbf{U}\cap A) \to 0$$

ergibt sich, es genügt zu zeigen

$$H(S(X,A)/S(\mathbf{U}, \mathbf{U}\cap A)) = 0,$$

Wir haben zu zeigen, jeder Zyklus von

$$K := S(X,A)/S(\mathbf{U}, \mathbf{U}\cap A) = (SX/SA)/(S(\mathbf{U})+SA/SA) = SX/S(\mathbf{V}),\ \mathbf{V} := \mathbf{U} \cup \{A\},$$

ist ein Rand. Ein Zyklus von K wird repräsentiert durch eine Kette $z\in S(X)$ mit

$$\partial z \in S(\mathbf{V})$$

Nach Konstruktion ist die baryzentrische Unterteilung eine natürliche Kettenabbildung $SX\to SX$, die in der Dimension 0 mit der Identischen Kettenabbildung übereinstimmt. Dasselbe gilt für die iterierte baryzentrische Unterteilung β^n. Nach 3.6.3 gibt es deshalb eine natürliche Homotopie von Komplex-Morphismen

$$s: \beta^n \simeq \mathrm{id}.$$

Es ist also

$$\mathrm{Id} = \partial s + s\partial + \beta^n$$

und speziell für unsere Kette z gilt

$$z = \partial sz + s\partial z + \beta^n z.$$

Wir haben zu zeigen, z repräsentiert einen Rand von K, d.h. z ist die Summe aus einem Rand von SX und einer Kette von $S(\mathbf{V})$. Weil s natürlich ist,

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{s} & S_{q+1}(X) \\ \cup & & \cup \\ S_q(V) & \xrightarrow{s} & S_{q+1}(V) \end{array}$$

gilt

$$s(S(V)) \subseteq S(V) \text{ für jedes } V \in \mathbf{V},$$

also

$$s(S(\mathbf{V})) = s\Big(\sum_{V\in\mathbf{V}} S(V)\Big) \subseteq \sum_{V\in\mathbf{V}} S(V) = S(\mathbf{V}),$$

Mit $\partial z\in S(\mathbf{V})$ gilt also auch $s\partial z\in S(\mathbf{V})$. Es genügt also, wenn wir zeigen, es gibt ein n mit

$$\beta^n z\in S(\mathbf{V}).$$

Das ist aber gerade die Aussage des ersten Schritts.
QED.

3.7.6 Das Bukett punktierter topologischer Räume, Faktor-Topologie

Für jeden topologischen Raum X und jede Äquivalenz-Relation $\sim$ auf der Menge X besitzt die Menge

$X/\sim$

der Äquivalenz-Klassen eine Topologie mit folgenden Eigenschaften.

1. Die natürliche Abbildung $\rho: X \longrightarrow X/\sim$, die jedes Element von X auf dessen Äquivalenzklasse abbildet, ist stetig.
2. Jede stetige Abbildung $f: X \longrightarrow Y$, die konstant ist auf jeder Äquivalenz-Klasse

von X, faktorisiert sich eindeutig über ρ, d.h. es gibt genau eine stetige Abbildung $\tilde{f}$, für welche das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \rho\downarrow & \swarrow \tilde{f} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

Die so definierte Topologie von $X/\sim$ ist gerade die Topologie, für welche eine Teilmenge $U \subseteq X/\sim$ genau dann offen ist, wenn ihr vollständiges Urbild $\rho^{-1}(U)$ offen ist in X.

Diese Topologie heißt Faktor-Topologie von $X/\sim$, und der topologische Raum $X/\sim$ heißt Faktorraum von X bezüglich $\sim$,

Ein punktierter topologischer Raum ist ein Paar (X,p) bestehend aus einem topologischern Raum X und einem Punkt $p \in X$. Der Punkt p heißt dann Grundpunkt oder auch Basispunkt des punktierten topologischen Raums. Eine stetige Abbildung

$$f:(X,p) \to (Y,q)$$

punktierter topologischer Räume ist eine stetige Abbilung $f:X \to Y$ mit $f(p) = q$. Die punktierten topologischer Räume bilden eine volle Teilkategorie der Kategorie $Top^{(2)}$ der topologischen Paare. Sind (X,p) und (Y,q) punktierte topologische Räume, so heißt der topologische Raum

$$X \vee Y := X \cup Y / P \sim Q$$

(d.h. man identifiziere in der disjunkten Vereinigung die Punkte P und Q und versehe das Ergebnis mit der Faktortopologie) Bukett der Räume (X,p) und (Y,q).[22]

Das Bukett wird als punktierter topologischer Raum $(X \vee Y, *)$ aufgefaßt, wobei * den Punkt bezeichnet, welcher durch das Identifizieren von p und q zustandekommt. Die Einschränkungen der natürlichen Abbildung

$$X \cup Y \to X \vee Y$$

auf die Räume X und Y identifiziert X und Y mit Unterräumen des Buketts, wobei die Grundpunkte von X und Y zum Grundpunkt des Buketts werden. Auf Grund der Definiton der Faktor-Topologie ist eine Teilmenge

$$U \subseteq X \vee Y$$

genau dann offen, wenn $U \cap X$ und $U \cap Y$ offen sind in X bzw. Y.

Das Bukett entsteht, indem man die Räume in ihren Grundpunkten zusammenknüpft.

---

[22] Eine Teilmenge U der disjunkten Vereinigung ist genau dann offen wenn $U \cap X$ und $U \cap Y$ offen sind in X bzw. Y..

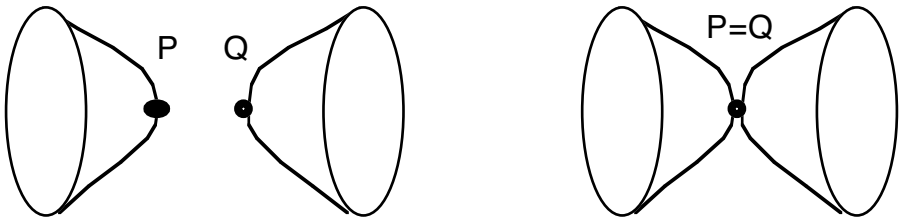

Figure 15: zwei Räume und ihr Bukett

3.7.7 Die Homologie eines Buketts

Seien (X,p) und (Y,q) punktierte topologische Räume. Die Abschließung der einpunktigen Menge {p} besitze eine kontrahierbare Umgebung U,

$$\overline{\{p\}} \subseteq U \subseteq X.$$

Statt der Kontrahierbarkeit von U reicht es auch die Existenz einer stetigen Familie von Abbildungen

$$d_t: (U,p) \to (X,p),\ t \in [0,1]$$

zu fordern mit d_0=Id und $d_1(U) = \{p\}$.[23] Dann induzieren die natürlichen Einbettungen

$$i: X \to X \vee Y \text{ und } j: Y \to X \vee Y$$

Isomorphismen

$$H(X,\{p\}) \oplus H(Y,\{q\}) \to H(X \vee Y,*),\ ([a],[b]) \mapsto [S(i)a + S(j)b]$$

und

$$\tilde{H}X \oplus \tilde{H}Y \to \tilde{H}(X \vee Y).$$

Beweis. Die beiden Isomorphieaussagen sind nach 3.4.2 äquivalent: die reduzierte Homologie läßt sich identifizieren mit der relativen Homologie bezüglich eines einpunktigen Unterraumes. Betrachten wir die reduzierte Homologiesequenz des Paares $(X \vee Y, Y)$. Da Y ein Retrakt von $X \vee Y$ ist (die Retraktion kommt von der Projektion des Raumes X auf seinen Grundpunkt), degeneriert die Homologiesequenz nach 3.4.13 zu einer kurzen exakten Sequenz.

$$0 \to \tilde{H}Y \to \tilde{H}(X \vee Y) \to H(X \vee Y, Y) \to 0.$$

Da die natürliche Einbettung $Y \to X \vee Y$ eine Linksinverse besitzt, zerfällt diese Sequenz, d.h. es gilt

$$\tilde{H}Y \oplus H(X \vee Y, Y) \cong \tilde{H}(X \vee Y)$$

wobei die Isomorphie von der natürlichen Einbettung $Y \to X \vee Y$ und irgendeinen Schnitt von $\tilde{H}(X \vee Y) \to H(X \vee Y, Y)$ kommt. Es reicht deshalb, wenn wir beweisen, die natürliche Einbettung

$$(X,p) \to (X \vee Y, Y)$$

induziert einen Isomorphismus $H(X,p) \to H(X \vee Y, Y)$.

Zum Beweis benutzen wir die Existenz der im Satz erwähnten Homotopie. Bezeichne I = [0,1] das Einheitsintervall. Die stetige Abbildung $d: I \times U \to X$ induziert eine stetige Abbildung[24]

$$d: I \times (U \bigcup Y) \to X \bigcup Y,\ (t,u) \mapsto d_t(u),\ (t,y) \mapsto y.$$

Diese wiederum liefert ein kommutatives Diagramm von stetigen Abbildungen[25]

---

[23] Einen Raum, der diese Bedingung nicht erfüllt, erhält man, indem man eine Folge von Kreislinien, deren Radius gegen Null geht, so zueinander verschiebt, daß sie sich alle in einen gemeinsamen Punkt berühren.

[24] Dabei bezeiche $\bigcup$ hier die disjunkte Vereinigung.

$$\begin{array}{ccc} I\times(U\bigcup Y) & \xrightarrow{d} & X\bigcup Y \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ I\times(U\vee Y) & \xrightarrow{\varphi} & X\vee Y \end{array}$$

wobei die vertikalen Pfeile die natürlichen Abbildungen bezeichnen sollen. Wir erhalten damit eine stetige Familie

$$\varphi_t: (U\vee Y,Y)\to(X\vee Y,Y),$$

welche für t=0 die identische Abbildung und für t=1 eine Abbilung mit Werten in Y ist. Die induzierte Familie von Kettenabbildungen

(1) $$H(\varphi_t): H(U\vee Y,Y)\to H(X\vee Y,Y)$$

ist für t=1 die Null-Abbildung[26], also für alle t identisch Null. Die natürliche Einbettung $U\vee Y\to X\vee Y$ induziert also die Nullabbildung auf der Homologie. Betrachten wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

(2)
$$\begin{array}{ccccccc} & & H_n(X\vee Y,Y) & \longrightarrow & H_n(X\vee Y,U\vee Y) & \xrightarrow{\alpha} & H_{n-1}(U\vee Y,Y) \xrightarrow{0} \\ & & \uparrow & & \uparrow\beta & & \uparrow \\ 0\longrightarrow & & H_n(X,p) & \longrightarrow & H_n(X,U) & \longrightarrow & H_{n-1}(U,p) \end{array}$$

Die obere Zeile ist gerade die Homologiesequenz des Tripels $(X\vee Y, U\vee Y, Y)$, die untere die des Tripels $(X,U,\{p\})$.
Die Null links und rechts oben ergibt sich aus der gerade bewiesenen Aussage, daß die Abbildungen (1) Null-Abbildungen sind. Man beachte, dies gilt für jeden punktierten topologischen Raum (Y, q), also auch für $(\{q\},q)$. Deshalb ist auch die linke untere Abbildung die Null-Abbildung.

Die vertikalen Morphismen kommen von der natürlichen Einbettung

$$(X,U,\{p\})\subseteq(X\vee Y, U\vee Y, Y).$$

Die Projektion des Raumes Y auf seinen Grundpunkt induziert eine Abbildung in umgekehrter Richtung, deren Einschränkung auf $(X,U,\{p\})$ die Identität ist. Deshalb sind in (2) alle vertikalen Abbildungen injektiv (und besitzen eine Linksinverse). Wir wenden jetzt den Ausschneidungssatz auf die mittlere vertikale Abbildung an. Die Abschließung von

$$Y - \{q\}\ (\subseteq U\vee Y)$$

liegt ganz im Innern von $U\vee Y$ (nachprüfen!)[27]. Deshalb können wir $Y-\{q\}$ entfernen, ohne daß sich die relative Homologie ändert. Mit anderen Worten, der vertikale Homorphismus in der Mitte ist ein Isomorphismus.

---

[25] Weil die Punkte der Gestalt (t, p) und (t,q) in die Grundpunkte p bzw q abgebildet werden.

[26] Weil sich $\varphi_1: U\vee Y\longrightarrow Y\longrightarrow X\vee Y$ über Y faktorisiert, also $H(\varphi_1)$ über $H(Y,Y) = 0$.

[27] Die Menge $V:=U\vee Y$ ist offen in $X\vee Y$, denn die Durchschnitte

$V\cap X = U$

$V\cap Y = Y$

sind offen in X bzw. Y. Es genügt also zu zeigen, die Abschließung von $Y - \{q\}$ liegt in $U\vee Y$. Dazu wiederum genügt es zu zeigen, die Abschließung $\bar{Y}$ liegt in $U\vee Y$. Es gilt

$$\bar{Y} = (\bar{Y}\bigcap Y)\bigcup(\bar{Y}\bigcap X) = Y\bigcup\overline{\{p\}} \subseteq Y\bigcup U = U\vee Y.$$

Weiter ist α surjektiv (wegen der Null ganz rechts), also ist es auch die Zusammensetzung $\alpha\circ\beta$ mit dem Isomorphismus β, also ist es auch der vertikale Homomorphismus ganz rechts. Wir haben gezeigt: auch der vertikale Homomorphismus rechts ist ein Isomorphismus.

Nach dem Fünferlemma ist dann aber auch der vertikale Homormorphismus links bijektiv. Mit anderen Worten, die Inklusion induziert einen Isomorphismus

$$H(i)\colon H(X,p) \xrightarrow{\cong} H(X\vee Y, Y).$$

QED.

3.8 Die Mayer-Vietoris-Sequenz

3.8.1 Bezeichnungen

Seien X ein topologischer Raum und X_1 und X_2 zwei Unterräume. Wir bezeichnen mit

$$i_\mu : X_\mu \to X$$

die natürlichen Einbettungen. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, die Beziehungen zwischen den Homologien HX und HX_1 und HX_2 zu untersuchen. Wir werden von (X, X_1, X_2) als von einer Triade sprechen (Dies ist im allgemeinen kein topologisches Tripel).

3.8.2 Ausschneidungstriaden

Eine Triade (X, X_1, X_2) heißt ausschneidend oder auch Ausschneidungstriade, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

(i) $H(i_1):H(X_1, X_1\cap X_2) \to H(X_1\cup X_2, X_2)$ ist bijektiv.

(ii) $H(i_2):H(X_2, X_1\cap X_2) \to H(X_1\cup X_2, X_1)$ ist bijektiv.

(iii) $(H(i_1),H(i_2)):H(X_1, X_1\cap X_2)\oplus H(X_2, X_1\cap X_2)\to H(X_1\cup X_2,\ X_1\cap X_2)$ ist bijektiv.

(iv) $H(i)\colon HS\{X_1,X_2\} \to HS(X_1\cup X_2) = H(X_1\cup X_2)$ ist bijektiv.

(v) $H(\bar{i}):H\left(\frac{S\{X_1,X_2\}}{S(X_1\cap X_2)}\right)\to H\left(\frac{S(X_1\cup X_2)}{S(X_1\cap X_2)}\right) = H(X_1\cup X_2,\ X_1\cap X_2)$ ist bijektiv.

(vi) $H(p):H\left(\frac{SX}{S\{X_1,X_2\}}\right) \to H(X,\ X_1\cup X_2)=H\left(\frac{SX}{S(X_1\cup X_2)}\right)$ ist bijektiv.

Dabei bezeichne $S\{X_1,X_2\}$ den von SX_1 und SX_2 erzeugten Teilkomplex von

---

Zur Gleichheit in der Mitte: ein Punkt von $\bar{Y}\cap X$ ist ein Punkt ein Punkt von X, der in jeder offenen Umgebung von Y liegt. Die offenen Umgebungen von Y sind Mengen V mit $V\cap Y = Y$ und $V\cap X =$ offen in X, d.h. Mengen der Gestalt

$$Y\cup V \text{ mit } V = \text{offene Umgebung von } Y\cap X = \{p\} \text{ in } X.$$

Der Durchschnitt aller offenen Mengen dieser Gestalt ist gleich $Y\cup\overline{\{p\}}$.

$$SX_1 \cup X_2.$$

Weiter seien

$$i: S\{X_1, X_2\} \to S(X_1 \cup X_2) \text{ und } p: \frac{SX}{S\{X_1, X_2\}} \longrightarrow \frac{SX}{S(X_1 \cup X_2)}$$

die natürliche Einbettung bzw. die natürliche Projektion.

Beweis. Betrachten wir die folgenden kurzen exakten Sequenzen von Kettenabbildungen.

$$0 \to \frac{SX_1}{S(X_1 \cap X_2)} \xrightarrow{i_1} \frac{S(X_1 \cup X_2)}{SX_2} \to \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}} \to 0$$

$$0 \to S\{X_1, X_2\} \xrightarrow{i} S(X_1 \cup X_2) \to \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}} \to 0$$

$$0 \to \frac{S\{X_1, X_2\}}{S(X_1 \cap X_2)} \xrightarrow{\bar{i}} \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S(X_1 \cap X_2)} \to \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}} \to 0$$

$$0 \to \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}} \to \frac{SX}{S\{X_1, X_2\}} \xrightarrow{i} \frac{SX}{S(X_1 \cup X_2)} \to 0$$

Aus den langen Homologiesequenzen zu diesen kurzen exakten Sequenzen ergibt sich, daß die Bijektivität der Abbildungen (i), (iv),(v), (vi) äquivalent ist zu

$$H\left(\frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}}\right) = 0.$$

Insbesondere sind also (i), (iv),(v), (vi) äquivalent zueinander. Aus Symmetriegründen sind dann aber auch (ii), (iv), (v), (vi) zueinander äquivalent. Die Äquivalenz von (iii) und (v) ergibt sich aus dem folgenden kommutativen Diagramm von Kettenabbildungen durch Übergang zur Kohomologie.

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{SX_1}{S(X_1 \cap X_2)} \oplus \dfrac{SX_2}{S(X_1 \cap X_2)} & \xrightarrow{\cong} & \dfrac{S\{X_1, X_2\}}{S(X_1 \cap X_2)} \\ \downarrow (i_1, i_2) & & \downarrow i \\ \dfrac{S(X_1 \cup X_2)}{S(X_1 \cap X_2)} & = & \dfrac{S(X_1 \cup X_2)}{S(X_1 \cap X_2)} \end{array}$$

QED.

Beispiele

1. Falls die Mengen X_1 und X_2 offen sind in $X_1 \cup X_2$, so ist nach 3.7.3 Bedingung (iv) erfüllt, d.h. (X, X_1, X_2) ist eine Ausschneidungstriade.
2. Andere Beispiele für Ausschneidungstriaden sind sogenannte Zellkomplexe (CW-Räume) und ihre Teilkomplexe (CW-Unterräume). Polyeder (d.h. geometrische Realisierungen von abstrakten Simplizialkomplexen) sind Spezialfälle solcher CW-Räume.

Bemerkung

Ein Beispiel für eine Triade (X,X_1,X_2),welche nicht ausschneidend ist, erfordert die Betrachtung ziemlich exodische Räume.

3.8.3 Die absolute Version der Mayer-Vietories-Sequenz

Für jede Triade (X,X_1,X_2) hat man die folgende kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen.

$$0 \to S(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(j_1,-j_2)} SX_1 \oplus SX_2 \xrightarrow{i_1+i_2} S\{X_1,X_2\} \to 0$$

Falls die Triade ausschneidend ist, so hat die zugehörige Homologiesequenz die Gestalt

$$\ldots \to H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(j_1,-j_2)} H_qX_1 \oplus H_qX_2 \xrightarrow{i_1+i_2} H_q(X_1 \cup X_2) \to H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \ldots$$

Sei heißt (absolute) Mayer-Vietories-Sequenz der Triade.

Beweis: Siehe 3.8.2 (iv).

QED.

3.8.4 Die relative Version der Mayer-Vietories-Sequenz

Für jede Triade (X,X_1,X_2) hat man die folgende kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen.

$$0 \to \frac{SX}{S(X_1 \cap X_2)} \xrightarrow{(j_1,-j_2)} \frac{SX}{SX_1} \oplus \frac{SX}{SX_2} \xrightarrow{i_1+i_2} \frac{SX}{S\{X_1,X_2\}} \to 0$$

$$[x] \mapsto ([x],[-x]) \,,\, ([x],[y]) \mapsto [x+y]$$

Falls die Triade ausschneidend ist, so hat die zugehörige Homologiesequenz die Gestalt

$$\ldots \to H_q(X,X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(j_1,-j_2)} H_q(X,X_1) \oplus H_q(X,X_2) \xrightarrow{i_1+i_2} H_q(X,X_1 \cup X_2) \to \ldots$$

Beweis. Die Exaktheit der angegebenen langen Sequenz ist eine direkte Folge der Exaktheit der Komplexsequenz und der Definition der Ausschneidungstriade (Bed. (vi)). Es genügt also, die Exaktheit der Komplexsequenz zu beweisen.

Zunächst ist leicht zu sehen, daß es sich wenigstens um einen Komplex handelt (d.h. die Zusammensetzung aufeinanderfolgender Kettenabbildungen ist Null): das ergibt sich direkt aus den Definitionen der beteiligten singulären Komplexe. Weiterhin ist klar, die rechte Kettenabbildung ist surjektiv und die linke injektiv. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß der Kern der rechten Kettenabbildung im Bild der rechte liegt.

Betrachten wir einen Repräsentanten eines Elements aus dem Kern der rechten Kettenabbildung. Sei also

$$c:=(i_1,i_2)(a,b) = a+b \in S\{X_1,X_2\}.$$

Dabei können wir annehmen, in a kommen keine Simplexe aus X_1 vor und in b keine aus X_2. Dann bedeutet die Relation $a+b \in S\{X_1,X_2\}$ aber, $a \in SX_2$ und $b \in SX_1$. Also repräsentiert

$$(j_1,-j_2)(a-b) = (a-b, b-a)$$

dasselbe Element wie (a,b).

QED.

3.8.5 Der Zusammenhangshomomorphismus der absoluten Mayer-Vietories-Sequenz

Der Zusammenhangshomomorphismus der absoluten Mayer-Vietories-Sequenz 3.8.3 ist gerade die folgende Zusammensetzung.

$$H_q(X_1 \cup X_2) \to H_q(X_1 \cup X_2, X_2) \cong H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \to H_{q-1}(X_1 \cap X_2)$$

Dabei sei der Homomorphismus links gerade durch die Einbettung

$$(X_1 \cup X_2, \varnothing) \subseteq (X_1 \cup X_2, X_2)$$

induziert, der Isomorphismus in der Mitte komme von der Ausschneidungsbedingung (i), d.h. von der Einbettung

$$(X_1, X_1 \cap X_2) \subseteq (X_1 \cup X_2, X_2),$$

und der Homormorphismus rechts sei der Zusammenhangshomomorphismus des Paares $(X_1, X_1 \cap X_2)$.

Beweis. Der Beweis ergibt sich im wesentlichen aus dem Vergleich der Definitionen der beiden beteiligten Zusammenhangshomomorphismen. Sei $u \in H(X_1 \cup X_2) = HS\{X_1, X_2\}$. Wir wählen einen Repräsentanten von u der Gestalt

$$c_1 + c_2 \in S\{X_1, X_2\} \text{ mit } c_1 \in SX_1,\ c_2 \in SX_2 \text{ und } \partial c_1 + \partial c_2 = 0.$$

Um das Bild unter dem Zusammenhangshomomorphismus zu finden, müssen wir ein Urbild dieses Repräsentanten in $SX_1 \oplus SX_2$ finden. Ein solches ist (c_1, c_2). Als nächstes müssen wir den Randoperator anwenden und erhalten $(\partial c_1, \partial c_2) = (\partial c_1, -\partial c_1)$. Von letzterem Element müssen wir ein Urbild in $S(X_1 \cap X_2)$ finden. Ein solches ist ∂c_1. Das Bild von u beim Zusammenhangshomomorphismus der Mayer-Vietories-Sequenz wird also durch ∂c_1 repräsentiert.

Wenn wir nun das Bild des Repräsentanten $c_1 + c_2$ von u bei den Abbildungen unseres Satzes verfolgen, erhalten wir (mit Hilfe derselben Argumentation wie eben) wiederum den Repräsentanten ∂c_1. Die beiden Abbildungen stimmen also überein.

QED.

3.8.6 Der Zusammenhangshomomorphismus der relativen Mayer-Vietories-Sequenz

Der Zusammenhangshomomorphismus der relativen Mayer-Vietories-Sequenz 3.8.4 ist gerade die folgende Zusammensetzung.

$$H_q(X, X_1 \cup X_2) \to H_{q-1}(X_1 \cup X_2, X_1) \cong H_{q-1}(X_2, X_1 \cap X_2) \to H_{q-1}(X, X_1 \cap X_2)$$

Dabei sei der Homomorphismus links gerade der Zusammenhangshomomorphismus des Tripels $(X, X_1 \cup X_2, X_1)$, der Isomorphismus in der Mitte komme von der Ausschneidungsbedingung (ii), d.h. von der Einbettung

$$(X_2, X_1 \cap X_2) \subseteq (X_1 \cup X_2, X_1),$$

und der Homomorphismus rechts werde durch die Einbettung

$$(X_2, X_1 \cap X_2) \subseteq (X, X_1 \cap X_2)$$

induziert.

Beweis. Sei $u \in H(X, X_1 \cup X_2) = H(SX/S\{X_1, X_2\})$. Wir wählen einen Repräsentanten $c \in SX$ mit $\partial c \in S\{X_1, X_2\}$, d.h.

$$\partial c = c_1 + c_2 \text{ mit } c_1 \in SX_1 \text{ und } c_2 \in SX_2.$$

Ein Urbild in $SX/SX_1 \oplus SX/SX_2$ wird durch $(c,0)$ repräsentiert. Anwenden des Randoperators liefert $(\partial c, 0)$, und Übergang zum Urbild in $SX/S(X_1 \cap X_2)$ schließlich c_2. Letzteres Element repräsentiert einen Zyklus von $SX/S(X_1 \cap X_2)$, welcher seinerseits das Bild von u beim Zusammenhangshomomorphismus der Mayer-Vietories-Sequenz repräsentiert. Eine analoge Betrachtung für die im Satz angegebenen Abbildungen zeigt, daß deren Zusammensetzung durch diesselben Repräsentanten beschrieben wird.

QED.

3.8.7 Funktorialität der Mayer-Vietories-Sequenz

Sei $f:(X, X_1, X_2) \to (Y, Y_1, Y_2)$ eine stetige Abbildung von Ausschneidungstriaden.
Dann induziert f einen Morphismus der zugehörigen absoluten bzw. relativen Mayer-Vietories-Sequenzen.

Genauere Formulierung und deren **Beweis**: Übungsaufgabe. Hinweis: Man füge die beiden beteiligten kurzen exakten Komplex-Sequenzen in ein kommutatives Diagramm ein.
QED.

3.8.8 Reduzierte Mayer-Vietories-Sequenz

Sei (X, X_1, X_2) eine Ausschneidungstriade mit $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Dann besteht eine exakte Sequenz

$$\ldots \to \tilde{H}_q(X_1 \cap X_2) \to \tilde{H}_q X_1 \oplus \tilde{H}_q X_2 \to \tilde{H}_q(X_1 \cup X_2) \to \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) \to \ldots$$

Beweis. Wegen $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ können wir einen Punkt $p \in X_1 \cap X_2$ wählen. Bezeichne P den Raum mit dem einzigen Punkt p. Dann ist (P,P,P) eine Ausschneidungstriade, denn zum Beispiel ist der erste Homomorphismus von 3.8.2 ein Isomorphismus:

$$H(P, P \cap P) \to H(P \cup P, P).$$

Die natürliche Einbettung

$$(P,P,P) \subseteq (X, X_1, X_2)$$

liefert einen Morphismus der zugehörigen Mayer-Vietorissequenzen

$$\alpha: MS(P,P,P) \to MS(X, X_1, X_2).$$

Desweiteren ist die konstante Abbildung $X \to P$ stetig und induziert als stetige Abbildung von Triaden $(X, X_1, X_2) \to (P,P,P)$ ihrerseits einem Morphismus von Mayer-Vietories-Sequenzen

$$\beta: MS(X, X_1, X_2) \to MS(P,P,P).$$

Nach Konstruktion ist β linksinvers zu α, d.h. MS(P,P,P) ist ein direkter Summand in $MS(X, X_1, X_2)$. Durch Wegfaktorisieren des direkten Summanden MS(P,P,P) erhalten wir die angegebene reduzierte Mayer-Vietories-Sequenz.
QED.

3.8.9 Beispiel: Homologie eines Buketts

Sei (X, X_1, X_2) eine Ausschneidungstriade mit $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ und $\tilde{H}(X_1 \cap X_2) = 0$.
Auf Grund der reduzierten Mayer-Vietories-Sequenz hat man dann Isomorphismen

$$\tilde{H}_q X_1 \oplus \tilde{H}_q X_2 \to \tilde{H}_q(X_1 \cup X_2).$$

Im Fall, daß $X = X_1 \vee X_2$ das Bukett der beiden Räume X_1, X_2 ist, erhalten wir gerade das Ergebnis von 3.7.7. Der Beweis von 3.7.7 bestand im wesentlichen gerade darin, nachzuprüfen, daß (X, X_1, X_2) unter den angegebenen Bedingungen ausschneidend ist.

3.8.10 Beispiel: Satz von Jordan

Sei (X, X_1, X_2) eine Ausschneidungstriade mit $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ und $\tilde{H}(X_1 \cup X_2) = 0$. Auf Grund der reduzierten Mayer-Vietories-Sequenz hat man dann einen Isomorphismen

$$\tilde{H}_q(X_1 \cap X_2) \to \tilde{H}_q X_1 \oplus \tilde{H}_q X_2$$

Betrachten wir zum Beispiel eine dicke Sphäre $U \subseteq \mathbb{R}^n$, d.h. U ist eine offene Menge welche homöomorph ist zu $S^{n-1}\times(-1,1)$. Sei

$$\Phi: S^{n-1}\times(-1,1) \to U\ (\subseteq \mathbb{R}^n)$$

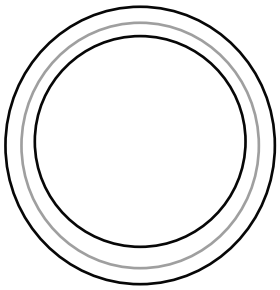

Figure 16: eine dicke Sphäre

ein Homöomorphismus. Die Menge

$$\Sigma := \Phi(S^{n-1}\times\{0\})$$

heißt dann Skelett der dicken Sphäre U. Sei $V := \mathbb{R}^n - \Sigma$ das Komplement des Skeletts. Dann ist

(1) $$(\mathbb{R}^n, U, V)$$

eine Ausschneidungstriade, denn auf Grund des Satzes über kleine Simplexe ist

$$HS\{U,V\} \to H(U\cup V)$$

ein Isomorphismus (U und V sind offen $\mathbb{R}^n$). Das bedeutet aber gerade, (1) ist eine Ausschneidungstriade.

Außerdem gilt

$$\tilde{H}(U\cup V) = \tilde{H}\mathbb{R}^n = 0.$$

Die reduzierte Mayer-Vietories-Sequenz liefert Isomorphismen

$$\tilde{H}_q(U\cap V)\to\tilde{H}_q U\oplus\tilde{H}_q V.$$

Insbesondere erhalten wie für q=0, da U zusammenhängend ist,

(2) $$\tilde{H}_0(U\cap V) \cong \tilde{H}_0 U\oplus\tilde{H}_0 V \cong \tilde{H}_0 V.$$

Weiterhin besteht der Durchschnitt $U\cap V$ aus zwei Komponenten,

$$U\cap V = U-\Sigma \approx S^{n-1}\times(-1,0) \cup S^{n-1}\times(0,1).$$

Nach (2) ist

$$\tilde{H}_0 V = \tilde{H}_0(U\cap V) = \mathbb{Z},$$

d.h V hat ebenfalls zwei Zusammenhangskomponenten. Wir haben damit einen wichtigen Spezialsatz des verallgemeinerten Satzen von Jordan bewiesen:

Das Gerüst $\Sigma^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ einer beliebigen dicken Sphäre teilt im Fall n>1 den $\mathbb{R}^n$ in zwei Komponenten, welche Inneres und Äußeres von Σ^{n-1} heißen.

3.8.11 Beispiel: Homologie einer Suspension

Sei (X, X_1, X_2) eine Ausschneidungstriade mit $X_1\cap X_2\neq\emptyset$ und $\tilde{H}X_1 = \tilde{H}X_2 = 0$. Auf Grund der reduzierten Mayer-Vietories-Sequenz hat man dann Isomorphismen

$$\tilde{H}_q(X_1\cup X_2)\to\tilde{H}_{q-1}(X_1\cap X_2).$$

Ein interessantes Beispiel für eine solche Situation ist die Suspension ΣX eines topologischen Raumes X. Sie ist definiert als das Ergebnis

$$\Sigma X = [0,1]\times X/\sim$$

einer Kontraktion von Dach $\{0\}\times X$ und Boden $\{1\}\times X$ des Zylinders $[0,1]\times X$ in jeweils einen Punkt.

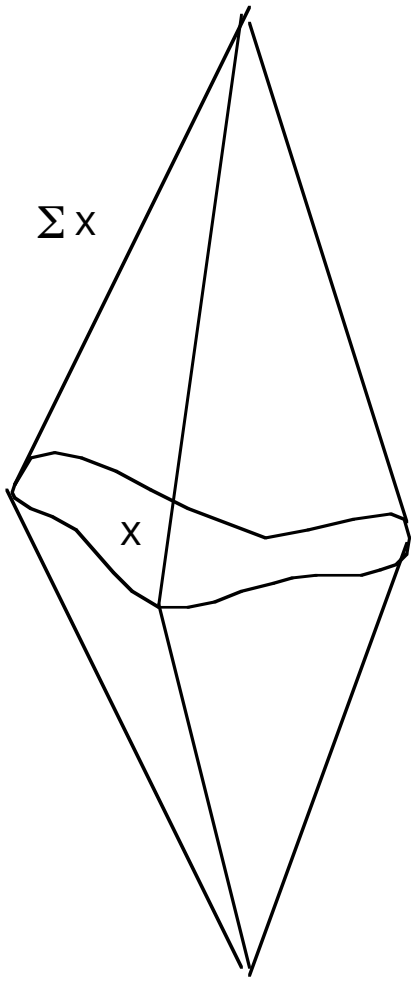

Figure 17: Suspension eines Raumes X

Mit anderen Worten, $\sim$ ist die Äquivalenzrelation deren Äquivalenzklassen gerade die folgenden sind.

$$\{0\}\times X,\ \{1\}\times X,\ \{(t,x)\} \text{ mit } 0<t<1 \text{ und } x\in X.$$

Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit der Faktortopologie bezüglich der natürlichen Surjektion

$$\gamma\colon [0,1]\times X \to \Sigma X,\ (t,x) \mapsto \text{Klasse von } (t,x),$$

versehen. Man kann sich ΣX veranschaulichen als zweiseiten Kegel über X mit der Basis $\{\frac{1}{2}\}\times X$ und den Spitzen $\gamma(0,x)$ und $\gamma(1,x)$. Die Projektion $[0,1]\times Y\to[0,1]$ induziert eine stetige Abbildung

$$h\colon \Sigma X \to [0,1],\ \gamma(t,x) \mapsto t.$$

Die Suspension ΣX ist Vereinigung der beiden offenen Teilmengen

$$C_0X = h^{-1}(0,1]$$

$$C_1X = h^{-1}[0,1)$$

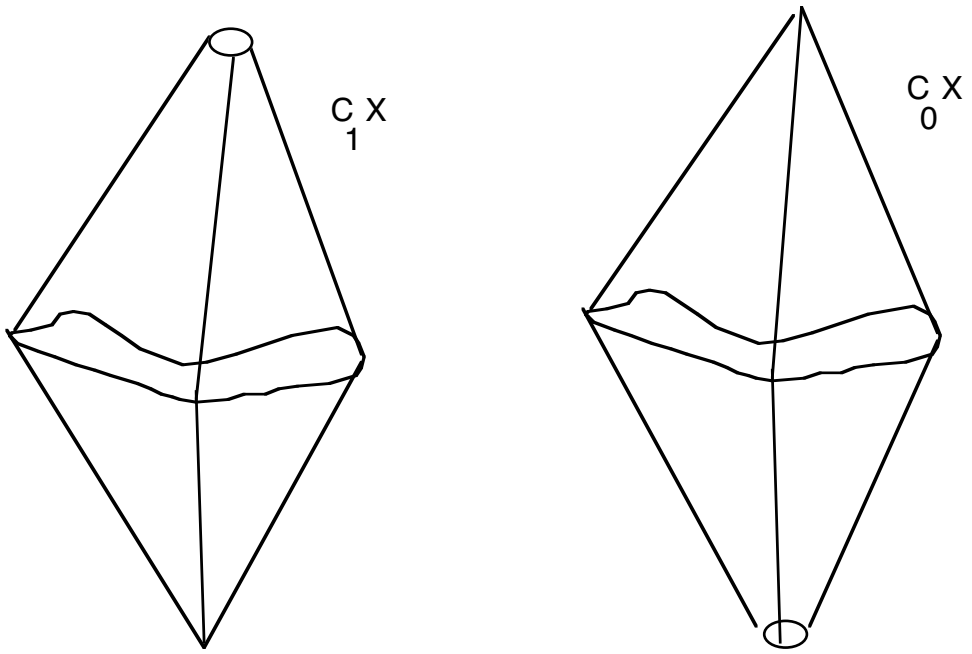

Figure 18: Punktierte Suspensionen

Dies sind zwei "offene Kegel" über X und als solche sind sie kontrahierbar. Zum Beispiel erhält man wie folgt für C_1X eine kontrahierende Deformation.

$$s_t : C_1X \to C_1X, \gamma(u,x) \mapsto \gamma(tu,x).$$

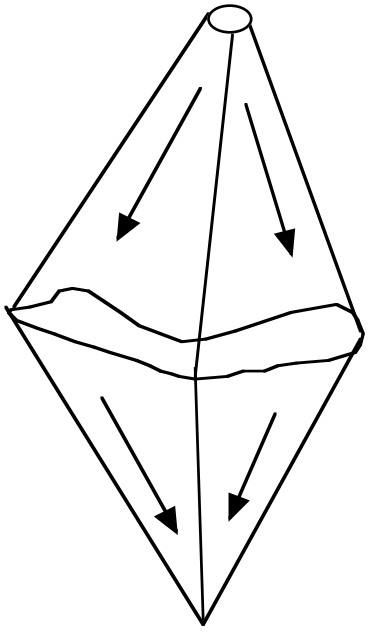

Figure 19: Kontrahierbarkeit der punktierten Suspensionen

Auf Grund der Definition der Topologie von ΣX ist dies eine stetige Familie. Für t=1 erhält man die identische Abbildung und für t=0, wird der gesamte Raum in die Spitze des Kegels abgebildet. Mit andere Worten, C_1C ist kontrahierbar. Damit ist

$$\tilde{H}C_0X = 0 = \tilde{H}C_1X.$$

Da die beiden Kegel offen in ΣX sind, ist

$$(\Sigma X, C_0X, C_1X)$$

ausschneidend. Insbesondere hat man Isomorphismen

$$\tilde{H}_q(\Sigma X) = \tilde{H}_q(C_0X \cup C_1X) \to \tilde{H}_{q-1}(C_0X \cap C_1X) = \tilde{H}_{q-1}((0,1)\times X) \cong \tilde{H}_{q-1}X.$$

Es ist nicht sehr schwer, zu zeigen $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$, sodaß man mit Hilfe der Suspension die Homologie der Sphären ausrechnen kann.

3.8.12 Die Mayer-Vietories-Sequenz eines Paars von Ausschneidungstriaden

Seien zwei Triaden (A, A_1, A_2) und (X, X_1, X_2) gegeben mit

$$(A, A_1, A_2) \subseteq (X, X_1, X_2).$$

Dann hat man ein kommutatives Diagramm von Kettenabbildungen mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S\{A_1,A_2\} & \longrightarrow & S\{X_1,X_2\} & \longrightarrow & \dfrac{S\{X_1,X_2\}}{S\{A_1,A_2\}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S(A_1 \bigcup A_2) & \longrightarrow & S(X_1 \bigcup X_2) & \longrightarrow & \dfrac{S(X_1 \bigcup X_2)}{S(A_1 \bigcup A_2)} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Wenn die beiden Triaden ausschneidend sind, so induzieren die beiden linken vertikalen Abbildungen Isomorphismen auf der Homologie, und auf Grund des Fünferlemmas gilt dies dann auch für die rechte vertikale Abbildung. Nun sind alle beteiligten Komplexe frei, d.h. die Kettenabbildungen selbst sind Homotopieäquivalenzen, insbesondere ist

$$\frac{S\{X_1,X_2\}}{S\{A_1,A_2\}} \simeq \frac{S(X_1 \bigcup X_2)}{S(A_1 \bigcup A_2)}.$$

Die folgende kurze Sequenz von Kettenabbildunge ist exakt.

$$0 \to \frac{S(X_1 \bigcap X_2)}{S(A_1 \bigcap A_2)} \to \frac{SX_1}{SA_1} \oplus \frac{SX_2}{SA_2} \to \frac{S\{X_1,X_2\}}{S\{A_1,A_2\}} \to 0.$$

Die zugehörige Homologiesequenz hat die folgende Gestalt.

$$\ldots \to H_q(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \to H_q(X_1,A_1) \oplus H(X_2,A_2) \to H_q(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \to H_{q-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \to \ldots$$

Sei heißt <u>Mayer-Vietories-Sequenz</u> des Triadenpaares $(A, A_1, A_2) \subseteq (X, X_1, X_2)$.

Im Fall $A=\emptyset$ ist dies gerade die absolute Mayer-Vietories-Sequenz, und im Fall $X = X_1 = X_2$ die relative. Im Fall, daß $A_1 = A_2$ aus nur einem Punkt besteht, erhalten wir die reduzierte Mayer-Vietories-Sequenz. Ist $X_1=X$ und $A_1 \subseteq A_2=X_2$, so erhalten wir die Homologiesequenz des Tripels (X, X_2, A_1):

$$\ldots \longrightarrow H_q(X_2,A_1) \longrightarrow H_q(X,A_1) \longrightarrow H_q(X,X_2) \longrightarrow H_{q-1}(X_2, A_1) \longrightarrow \ldots$$

4. Anwendungen auf den euklidischen Raum

4.1 Standardabbildungen zwischen Zellen und Sphären

4.1.1 Bezeichnungen

Wie bisher verwenden wir folgenden Bezeichnungen

$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ Norm von $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$

$S^n := \{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \| x \| = 1\}$ n-dimensionale Einheitssphäre, n-Sphäre

$B^n := \{x\in\mathbb{R}^n \mid \| x \| \leq 1\}$ n-dimensionale Vollkugel, n-Kugel

$\overset{\circ}{B}{}^n := \{x\in\mathbb{R}^n \mid \| x \| < 1\}$ n-dimensionale offene Vollkugel, offene n-Kugel, n-Zelle

$Q:=(0,...,0,1)\in S^n$ Grundpunkt von S^n

4.1.2 Die Standardabbildungen der Vollkugel

Die folgende Abbildung heißt Standardabbildung der abgeschlossenen n-Kugel auf die n-Sphäre.

$$\pi:(B^n,S^{n-1})\to(S^n,Q),\ y \mapsto (2(\sqrt{1-\| y \|^2})\cdot y,\ 2\| y \|^2-1)\ (\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}).$$

Die folgende Abbildung heißt Standardabbildung der offenen n-Kugel auf den $\mathbb{R}^n$.

$$\pi':\overset{\circ}{B}{}^n\to\mathbb{R}^n,\ y \mapsto \frac{y}{1-\| y \|}.$$

Die Abbildung π ist wohldefiniert. Es gilt

$$\begin{aligned}\|\pi(y)\|^2 &= 4(1-\| y \|^2)\cdot\| y \|^2 + (2\| y \|^2-1)^2\\ &= 4\cdot\| y \|^2 - 4\cdot\| y \|^4 + 4\cdot\| y \|^4 - 4\cdot\| y \|^2 + 1\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\pi(S^n) = \{(0,2-1)\} = \{Q\}$$

QED.

4.1.3 Eigenschaften der Standardabbildung π

(i) $\pi^{-1}(Q) = S^{n-1}$, $\pi^{-1}(p)$ ist einpunktig für $p\in S^n-\{Q\}$.

(ii) Die Standardabbildung $\pi:(B^n,S^{n-1})\to(S^n,Q)$ induziert Homöomorphismen

$$\overline{\pi}: B^n/S^{n-1} \to S^n \text{ und } \pi:\overset{\circ}{B}{}^n \to S^n-\{Q\}.$$

(iii) Die folgende Abbildung ist die Umkehrung von $\pi:\overset{\circ}{B}{}^n \to S^n-\{Q\}$.

$$\rho: S^n-\{Q\} \to \overset{\circ}{B}{}^n,\ (z,t) \mapsto \frac{z}{\sqrt{2(1-t)}}$$

Man erhält also die n-Sphäre aus der n-dimensionalen Vollkugel, indem man den Rand der letzteren zu einen Punkt zusammenzieht. Anschaulich kann man sich S^n vorstellen als ein rundgebogenes Exemplar der "Scheibe" B^n, wobei der Rand von B^n zu einen Punkt zusammengezogen wurde.

Beweis. Zu (i). Es gilt

$$\pi(y) = Q \Leftrightarrow \sqrt{1-\| y \|^2})\cdot y = 0 \text{ und } 2\| y \|^2-1 = 1 \Leftrightarrow \| y \|^2=1 \Leftrightarrow y\in S^{n-1}$$

Sei jetzt

$$p = (z,t)\in S^n-\{Q\}$$

vorgegeben. Dann gilt

$$\pi(y) = p \Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{1-\| y \|^2})\cdot y = z \text{ und } 2\| y \|^2-1 = t$$

Im Fall $z = 0$ gilt $t = -1$, also $y = 0$, d.h. y ist in diesem Fall durch $p = (z,t)$ festgelegt.

Sei jetzt $z \neq 0$. Die Gleichungen rechts haben dann, wenn sie überhaupt lösbar sein sollten nur Lösungen der Gestalt

$$y = \lambda \cdot z \text{ mit } 0 < \lambda \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen liefert die Bedingungen

$$4\bullet(1-|\lambda|^2\bullet\|z\|^2)\bullet|\lambda|^2\bullet\|z\|^2 = \|z\|^2 \text{ und } 2\bullet|\lambda|^2\bullet\|z\|^2 - 1 = t$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\bullet(1-|\lambda|^2\bullet\|z\|^2)\bullet|\lambda|^2 = 1 \text{ und } |\lambda|^2 = \frac{t+1}{2\bullet\|z\|^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\bullet(1-t)|\lambda|^2 = 1 \text{ und } |\lambda|^2 = \frac{t+1}{2\bullet\|z\|^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\lambda|^2 = \frac{1}{2(1-t)} = \frac{t+1}{2\bullet\|z\|^2}$$

Insbesondere ist die positive reelle Zahl λ durch $p = (z,t)$ festgelegt. Insbesondere existiert höchstens ein Punkt in $\pi^{-1}(p)$ und die Bedingung für die tatsächliche Existenz eines Punktes ist

$$\frac{1}{2(1-t)} = \frac{t+1}{2\bullet\|z\|^2} \Leftrightarrow \|z\|^2 = 1 - t^2 \Leftrightarrow \|z\|^2 + t^2 = 1$$

Letztere Bedingung ist aber erfüllt, wegen $p = (z,t) \in S^n$.

Zu (ii). Nach (i) ist $\bar{\pi}$ wohldefiniert und bijektiv. Da π stetig ist, ist es auch $\bar{\pi}$. Damit ist $\bar{\pi}$ eine stetige bijektive Abbildung eines kompakten Raumes in einen Hausdorff-Raum, und als solche ein Homöomorphismus. Die Homöomorphie von

$$\pi: \overset{\circ}{B}^n \to S^n - \{Q\}$$

ergibt sich aus der von $\bar{\pi}$ und (i).
Zu (iii). Einfach.
QED.

4.1.4 Eigenschaften der Standardabbildung π'

Die Standardabbildung $\pi': \overset{\circ}{B}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein Homöomorphismus mit der Umkehrabbildung

$$\rho': \mathbb{R}^n \to \overset{\circ}{B}^n, z \mapsto \frac{z}{1+\|z\|}.$$

Zusammen mit 4.1.3 ergibt sich $S^n - \{Q\} \approx \mathbb{R}^n$. Anders ausgedrückt, S^n ist die Einpunktkompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$ (vgl. die Stereographische Projektion).

Beweis. Offensichtlich ist ρ' wohldefiniert und stetig. Für $z \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\pi'(\rho'(z)) = \frac{z}{1+\|z\|} / (1 - \|\frac{z}{1+\|z\|}\|) = \frac{z}{1 + \|z\| - \|z\|} = z .$$

Analog gilt für $y \in \overset{\circ}{B}^n$

$$\rho'(\pi'(z)) = \frac{y}{1-\|y\|} / (1 + \|\frac{y}{1-\|y\|}\|) = \frac{y}{1-\|y\| + \|y\|} = y.$$

QED.

4.1.5 Kompakte konvexe Teilmengen des euklidischen Raumes

Sei K eine kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, welche eine n-Kugel B enthält. Dann sind die Paare $(K, \partial K)$ und $(B, \partial B)$ homöomorph.

Beweis. Durch Verschieben und Strecken reduzieren wir den Beweis auf den Fall $B=B^n$. Dann liegt insbesondere der Ursprung in K,

$$0 \in K.$$

Als kompakte Menge ist K abgeschlossen und beschränkt. Jeder Strahl durch den Ursprung enthält also auch Punkte die nicht in K liegen. Die in K liegenden Punkte des Strahls bilden eine Strecke, deren einer Randpunkt 0 ist und deren anderer Randpunkt ein Randpunkt von K ist (weil K konvex ist).

1. Schritt. $\nu: \partial K \to S^{n-1}, y \mapsto \frac{y}{\| y \|}$ ist ein Homöomorphismus.

Die Abbildung ist stetig und bildet einen kompakten Raum in einen Hausdorff-Raum ab. Es genügt also, ihre Bijektivität zu beweisen. Sie ist surjektiv auf Grund der obigen Bemerkung, daß jeder Strahl durch den Ursprung einen Randpunkt von K enthält. Wir haben zu zeigen, jeder andere Punkt auf diesem Strahl ist kein Randpunkt von K.

Sei $x \in \partial K$ und $0 \leq \lambda < 1$. Dann ist $\lambda \cdot x$ ein innerer Punkt von K. Um das einzusehen, betrachten wir den Kegel, der durch Zentralprojektion von B in den Punkt x entsteht. Der Punkt $\lambda \bullet x$ liegt ganz im Innern dieses Kegels.

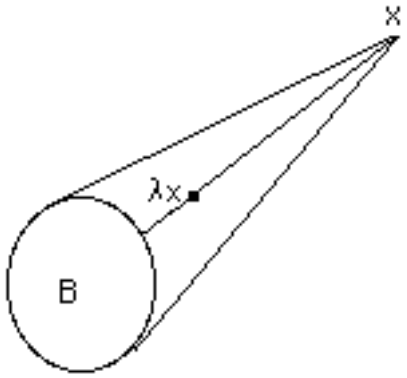

Figure 20: ein innerer Punkt einer konvexen Menge

Da K konvex ist, liegt außerdem dieser Kegel ganz in K, d.h. $\lambda \cdot x$ ist tatsächlich ein innerer Punkt von K. Wir haben damit gezeigt, auf jeden vom Ursprung ausgehenden Strahl gibt es genau einen Punkt, welcher auf dem Rand von K liegt. Das bedeutet aber gerade, die Abbildung ν ist bijektiv.

2. Schritt. Die radiale Forsetzung $K \to B^n, \lambda y \mapsto \frac{\lambda y}{\| y \|}, 0 \leq \lambda \leq 1$ von ν ist ein Homöomorphismus.

Aus der Bijektivität von ν ergibt sich die Bijektivität der Fortsetzung. Es reicht deshalt die Stetigkeit der Abbildung zu beweisen: da ein kompakter Raum in einen Hausdorff-Raum abgebildet wird, ergib sich daraus die Behauptung.

Beweisen wir die Stetigkeit.
Die Abbildungen

$$(K-\overset{\circ}{B}) \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n, (y, t) \mapsto ty, \text{ und } (K-\overset{\circ}{B}) \times I \mapsto \mathbb{R}, (y,t) \mapsto \|y\|,$$

sind offensichtlich stetig. Die zweite davon hat außerdem keine Nullstelle. Also ist die Abbildung

$$(K-\overset{\circ}{B}) \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n, (y,t) \mapsto \frac{ty}{\| y \|},$$

stetig. Wir schränken diese auf die Menge

$$X := \{(y,t) \mid y \in \partial K\}$$

ein und erhalten eine stetige Abbildung

$$X \longrightarrow K, (y,t) \mapsto \frac{ty}{\| y \|}.$$

Alle Punkte der Teilmenge $\partial K \times \{0\}$ werden dabei in denselben Punkt $0 \in K$ abgebildet, d.h. die Abbildung induziert eine stetige Abbildung

(1) $$f: X/\partial K \times \{0\} \longrightarrow K, [y,t] \longrightarrow \frac{ty}{\| y \|}.$$

Dabei werde durch die eckigen Klammern der Übergang zu den Äquivalenzklassen bezeichnet.
Als nächstes betrachten wir die stetige Abbildung

$$g: X \longrightarrow B^n, (y, t) \mapsto ty.$$

Für jeden Punkt $x \in B^n - \{0\}$ gibt es genau einen Punkt y von ∂K, der auf dem Strahl vom Ursprung aus durch x liegt und genau ein $t \in I$ mit $ty = x$. Mit anderen Worten, die Menge $g^{-1}(x)$ besteht aus genau einem Punkt. Außerdem gilt

$$g^{-1}(0) = \partial K \times \{0\}.$$

Deshalb induziert g eine stetige Bijektion

$$\overline{g}: X/\partial K \times \{0\} \longrightarrow B^n.$$

Weil der linke Raum als stetiges Bild des kompakten Raums $X = \partial K \times I$ kompakt ist und B^n ein Hausdorff-Raum ist, ist $\overline{g}$ ein Homöomorphismus. Also ist

$$f \circ \overline{g}^{-1}: B^n \longrightarrow K, ty \mapsto (t, y) \mapsto \frac{ty}{\| y \|},$$

wohldefiniert und stetig. Dies ist aber gerade die Abbildung, deren Stetigkeit zu beweisen war.
QED.

4.1.6 Folgerungen

(i) Der n-Kubus ist homöomorph zur n-Kugel: $[-1,+1]^n = [-1,+1] \times ... \times [-1,+1] \tilde{} B^n$.

(ii) Das n-Standardsimplex Δ_n ist homöomorph zur n-Kugel: $\Delta_n \approx B^n$.

(iii) Der Rand

$$\dot{\Delta}_n = \{x \in \Delta_n \mid x_i = 0 \text{ für ein } i\}$$

des n-Standardsimplex ist homöomorph zur (n-1)-Sphäre: $\dot{\Delta}_n \approx S^{n-1}$.

Beweis. (i). Folgt unmittelbar aus 4.1.5.

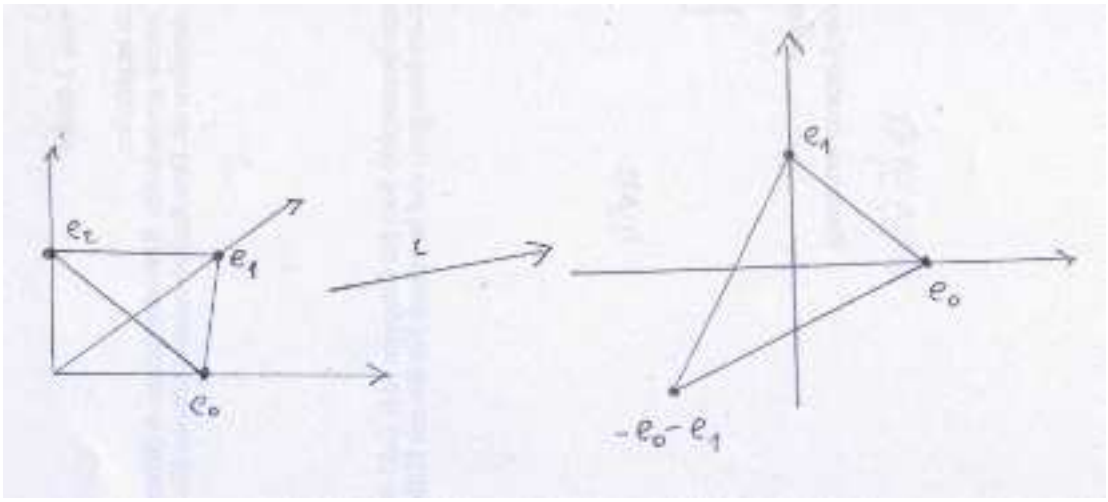

Figure 21: Einbettung des n-Standard-Simplex in den n-dimensionalen Raum

(ii). Wir betten Δ_n in den $\mathbb{R}^n$ ein vermittels der linearen Abbildung

$$\iota: \Delta_n \to \mathbb{R}^n, e^i \mapsto \begin{cases} e^i & \text{falls } i<n \\ -\sum_{j=0}^{n-1} e^j & \text{falls } i=n \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, daß ι bijektiv ist, also $\iota(\Delta_n) \approx \Delta_n$ gilt. Außerdem ist $\iota(\Delta_n)$ eine konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$, welche eine Vollkugel mit dem Zentrum $i(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} e^i)$ enthält. Daraus ergibt sich die Behauptung.

(iii). Die eben konstruierte Homöomorphismus $\Delta_n \to B^n$ bildet den Rand $\dot{\Delta}_n$ von Δ_n ab in den Rand $\partial B^n = S^{n-1}$ von B^n.
QED.

4.2 Die Homologie von Zellen und Sphären

4.2.1 Lemma

Sei Δ_n wie bisher das n-dimensionale Standard-Simplex,

$$\dot{\Delta}_n := \{x \in \Delta_n \mid x_j = 0 \text{ für mindestens ein } j\}$$

dessen Rand, und

$$\Lambda_n := \{x \in \Delta_n \mid x_j = 0 \text{ für mindestens ein } j>0\}$$

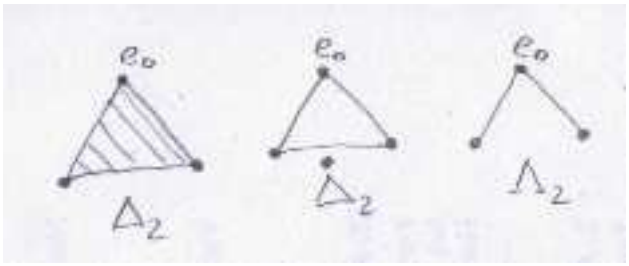

Figure 22: der Raum Λ_2

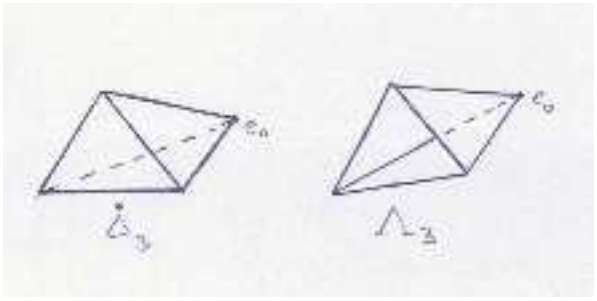

Figure 23: der Raum Λ_3

die Vereinigung aller echten Seiten von Δ_n mit Ausnahme der 0-ten. Dann bestehen folgende Isomorphien.

$$H_q(\Delta_n,\dot{\Delta}_n) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(\dot{\Delta}_n,\Lambda_n) \xleftarrow[\cong]{i_*} H_{q-1}(\dot{\Delta}_n-\{e^0\},\Lambda_n-\{e^0\}) \xleftarrow[\cong]{\varepsilon^0_*} H_{q-1}(\Delta_{n-1},\dot{\Delta}_{n-1}).$$

Dabei seien ∂_* der Zusammenhangshomomorphismus von $(\Delta_n,\dot{\Delta}_n,\Lambda_n)$,

$$(\dot{\Delta}_n,\Lambda_n) \xleftarrow{i} (\dot{\Delta}_n-\{e^0\},\Lambda_n-\{e^0\})$$

die natürliche Einbettung, und

$$(\dot{\Delta}_n-\{e^0\},\Lambda_n-\{e^0\}) \xleftarrow{\varepsilon^0} (\Delta_{n-1},\dot{\Delta}_{n-1})$$

die 0-te Seitenabbildung.

Beweis. Bijektivität von ∂_*. Es reicht zu zeigen, $H_q(\Delta_n,\Lambda_n)=0$ (auf Grund der langen Homologiesequenz des Tripels $(\Delta_n,\dot{\Delta}_n,\Lambda_n)$).

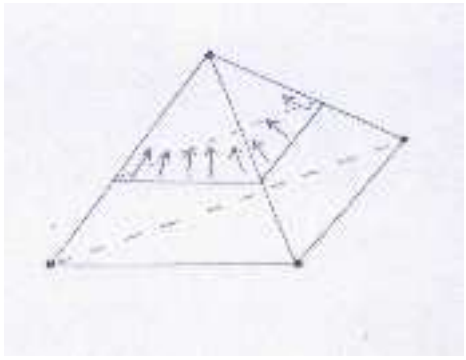

Figure 24: Eine Kontraktion des Paars (Δ_n,Λ_n)

Die stetige Familie

$$h_t:(\Delta_n,\Lambda_n) \to (\Delta_n,\Lambda_n), x \mapsto (1-t)x+te^0,$$

zeigt nun, daß

$$(\{e^0\},\{e^0\}) \subseteq (\Delta_n,\Lambda_n)$$

ein starker Deformationsretrakt ist.

Bijektivität von i_*. Folgt aus dem Ausschneidungssatz: die Abschließung von $\{e^0\}$ ist gleich $\{e^0\}$ und liegt im Innern der offenen Teilmenge Λ_n von $\dot{\Delta}_n$,

$$\Lambda_n = \{x \in \dot{\Delta}_n \mid x_0 > 0\}.$$

Bijektivität von ε^0_*. Es reicht zu zeigen, $\varepsilon^0:(\Delta_{n-1},\dot{\Delta}_{n-1}) \to (\dot{\Delta}_n-\{e^0\},\Lambda_n-\{e^0\})$ ist eine Homotopieäquivalenz.

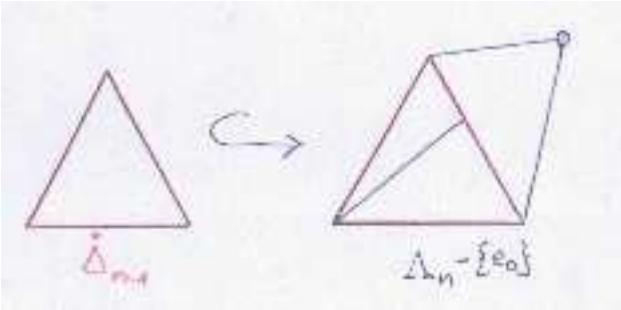

Figure 25 Einbettung des Rands $\dot{\Delta}_{n-1}$ in den Raum Λ_n-$\{e^0\}$

Die stetige Familie

$$s_t:(\dot{\Delta}_n-\{e^0\},\Lambda_n-\{e^0\}) \to (\dot{\Delta}_n-\{e^0\},\Lambda_n-\{e^0\}), x \mapsto x(t),$$

mit

$$x_j(t) := \begin{cases} (1-t)x_0 & \text{für } j=0 \\ \dfrac{1-(1-t)x_0}{1-x_0} \cdot x_j & \text{für } j>0 \end{cases}$$

ist wohldefiniert:

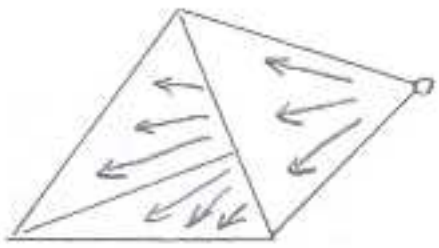

Figure 26: eine Kontraktion des Raums Λ_n-$\{e^0\}$

1. die Abbildung bildet $\dot{\Delta}_n - \{e^0\}$ in sich ab, denn
   - es gilt
   $$\sum_{j=0}^{n} x_j(t) = (1-t)x_0 + \frac{1-(1-t)x_0}{1-x_0}(1-x_0) = 1,$$
   - aus $x_j=0$ folgt $x_j(t)=0$.
   - aus $x_0 < 1$ folgt $x_0(t) < 1$.
2. die Einschränkung von s_t auf die 0-te Seite $x_0=0$ ist für alle t die identische Abbildung.

Für t=0 ist s_t selbst die identische Abbildung. Für t=1 liegt das Bild von s_t ganz auf der 0-ten Seite. Mit anderern Worten, die 0-te Seite ist vermittels s_t ein starker Deformationsretrakt von $\dot{\Delta}_n - \{e^0\}$. Die Punkte x von Λ_n (d.h. $x_j=0$ für ein $j>0$) werden bei s_0 in den Rand der 0-ten Seite von Δ_n abgebildet. Mit anderen Worten, durch s_t wird

$$\varepsilon^0(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1})$$

zum starken Deformationsretrakt von $(\dot{\Delta}_n - \{e^0\}, \Lambda_n - \{e^0\})$. Damit ist die Behauptung bewiesen.
QED.
Bemerkung: die obige Abbildung s_0 ist gerade die Projektion des n-Simplex aus der 0-ten Ecke auf die 0-te Seite.

4.2.2 Die Homologie von Zellen und Sphären

(i) $\tilde{H}_q(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{für } q \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{für } q=n \end{cases}$

(ii) $H_q(B^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{für } q \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{für } q=n \end{cases}$

(iii) $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{p\}) = \begin{cases} 0 & \text{für } q \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{für } q=n \end{cases}$

Beweis. Zu (ii). Es gilt für q = n

$$\begin{aligned} H_q(B^n, S^{n-1}) &\cong H_q(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) && \text{(nach 4.1.5)} \\ &\cong H_{q-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) && \text{(nach 4.2.1)} \\ &\cdots \\ &\cong H_{q-n}(\Delta_0, \dot{\Delta}_0) && \text{(nach 4.2.1)} \\ &\cong H_{q-n}(\Delta_0) && \text{(wegen } \dot{\Delta}_0 = \varnothing\text{).} \end{aligned}$$

Da Δ_0 der einpunktige Raum ist, ergibt sich daraus die Aussage von (ii).
Im Fall q < n erhalten wir nach derselben Argumentation

$$H_q(B^n, S^{n-1}) \cong H_q(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \cong H_0(\Delta_{n-q}, \dot{\Delta}_{n-q}).$$

Wir haben zu zeigen, die Homologie rechts ist trivial. Wegen der reduzierten Homologie-Sequenz des Paares $(\Delta_{n-q}, \dot{\Delta}_{n-q})$,

$$\ldots \longrightarrow \tilde{H}_0(\dot{\Delta}_{n-q}) \longrightarrow \tilde{H}_0(\Delta_{n-q}) \longrightarrow H_0(\Delta_{n-q}, \dot{\Delta}_{n-q}) \longrightarrow 0$$

reicht es zu zeigen,

$$\tilde{H}_0(\Delta_{n-q}) = 0.$$

Das ist aber der Fall, weil Δ_{n-q} linear zusammenhängend ist.

Zu (i). Da B^{n+1} kontrahierbar ist, d.h. $\tilde{H}(B^{n+1}) = 0$ gilt, ergibt sich aus der reduzierten Homologiesequenz des Paares (B^{n+1}, S^n),

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong H_{q+1}(B^{n+1}, S^n) = \begin{cases} 0 \text{ für } q+1 \neq n+1 \\ \mathbb{Z} \text{ für } q+1 = n+1 \end{cases}.$$

Die Aussage von (i) folgt damit aus (ii).

Zu (iii). OBdA sei p = 0 der Ursprung. Die Beispiele (ii) und (iii) von 3.5.9 zeigen, die Einbettung

$$i:(B^n, S^{n-1}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\text{-}\{p\})$$

induziert Isomorphismen $H(B^n) \to H(\mathbb{R}^n)$ und $H(S^{n-1}) \to H(\mathbb{R}^n\text{-}\{p\})$: B^n ist ein Deformatinsretrakt von $\mathbb{R}^n$ und S^{n-1} ist einer von $\mathbb{R}^n$-{p}. Aus diesen Isomorphismen erhält man nach dem Fünferlemma mit Hilfe der Homologiesequenzen von (B^n, S^{n-1}) und $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\text{-}\{p\})$, daß i auch einen Isomorphismus

$$H(B^n, S^{n-1}) \to H(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\text{-}\{p\})$$

induziert. Damit folgt (iii) ebenfalls aus (ii).

QED.

Bemerkung

Wir sind jetzt in der Lage einige geometrische Schlußfolgerungen aus unseren Berechnungen zu ziehen.

4.2.3 Sphären und euklidische Räume mit unterschiedlicher Dimension

Sphären unterschiedlicher Dimension sind nicht homöomorph. Euklidische Räume unterschiedlicher Dimension sind nicht homöomorph.

Beweis. Für Sphären folgt dies aus 4.2.2(i). Sei $h:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus mit $m \neq n$. Dann ist auch $h:\mathbb{R}^m\text{-}\{o\} \to \mathbb{R}^n\text{-}\{h(o)\}$ ein Homöomorphismus im Widerspruch zu 4.2.2(iii).

QED.

4.2.4 Sphären und Vollkugeln

Die Sphäre S^{n-1} ist kein Retrakt der Vollkugel B^n.

Beweis. Angenommen, es gibt eine Retraktion $r:B^n \to S^{n-1}$. Dann ist die Zusammensetzung

$$S^{n-1} \xrightarrow{i} B^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$$

mit der natürlichen Einbettung die identische Abbildung. Also ist auch

$$\tilde{H}S^{n-1} \xrightarrow{i_*} \tilde{H}B^n \xrightarrow{r_*} \tilde{H}S^{n-1}$$

die identische Abbildung. Das ist aber unmöglich, denn es gilt $\tilde{H}S^{n-1} \neq 0$ und $\tilde{H}B^n = 0$. **QED**.

4.2.5 Einbettungen von Vollkugeln in den Euklidischen Raum

Sei $f: B^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Dann gilt

(i) f besitzt eine Nullstelle oder einen Eigenvektor auf auf dem Rand mit positiven Eigenwert:

$$f(y) = 0 \text{ für ein } y \in B^n$$

oder

$$f(z) = \lambda z \text{ für ein } z \in S^{n-1} \text{ und ein } \lambda > 0.$$

(ii) f besitzt einen Fixpunkt oder einen Eigenvektor auf dem Rand mit eime Eigenwert > 1:

$$f(y) = y \text{ für ein } y \in B^n$$

oder

$$f(z) = \lambda z \text{ für ein } z \in S^{n-1} \text{ und ein } \lambda > 1.$$

Beweis. Zu (i). Betrachten wir die Abbildung

$$\rho: B^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \begin{cases} (2 \cdot \| x \| - 1) \cdot x - (2 - 2 \cdot \| x \|) \cdot f\left(\frac{x}{\| x \|}\right) & \text{für } 2 \cdot \| x \| \geq 1 \\ f(4 \cdot \| x \| \cdot x) & \text{für } 2 \cdot \| x \| \leq 1 \end{cases}$$

Für $\|x\| = \frac{1}{2}$ stimmen die beiden Definitonen für den Wert von ρ überein:

$$\rho(x) = f(2 \cdot x) \text{ für } \|x\| = \frac{1}{2}.$$

Insbesondere ist ρ wohldefiniert und stetig. Außerdem ist

$$\rho(x) = x \text{ für } x \in S^{n-1}.$$

Falls ρ keine Nullstelle besitzt, so ist die Abbildung

$$B^n \to S^{n-1}, x \mapsto \frac{x}{\| x \|}$$

eine wohldefinierte Retraktion, was nach 4.2.4 nicht möglich ist. Auf dem Rand der Vollkugel besitzt ρ keine Nullstelle (weil dort $\rho(x) = x$ gilt), also muß es eine Nullstelle im Innern der Vollkugel geben,

$$\rho(x) = 0 \text{ für ein } x \in \overset{\circ}{B}{}^n.$$

Im Fall $2 \cdot \|x\| \leq 1$ folgt

$$f(y) = 0 \text{ mit } y = 4 \cdot \| x \| \cdot x \in \overset{\circ}{B}{}^n.$$

Im Fall $2 \cdot \| x \| > 1$ folgt

$$f(y) = \frac{2 \cdot \|x\| - 1}{2 - 2 \cdot \|x\|} \cdot x = \frac{2 \cdot \|x\| - 1}{2 - 2 \cdot \|x\|} \cdot \|x\| \cdot y$$

mit $y = \frac{x}{\| x \|} \in S^{n-1}$.

Zu (ii). Wir betrachten die Abbildung

$$g: B^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto f(x) - x.$$

Nach (i) gibt es ein $y \in B^n$ mit $f(y) - y = 0$ oder ein $z \in S^{n-1}$ mit $f(z) - z = \lambda x$ mit $\lambda > 0$, d.h.

$$f(z) = (\lambda + 1)x.$$

QED.

4.2.6 Fixpunktsatz von Brouwer

Jede stetige Abbildung $f:B^n \to B^n$ der Vollkugel in sich hat mindestens einen Fixpunkt.

Beweis. Hätte f keinen Fixpunkt, so würde es nach 4.2.5(ii) ein $z \in S^{n-1}$ und ein $\lambda > 1$ geben mit

$$\| f(z) \| = \lambda \cdot \| z \| > 1.$$

Wegen $f(z) \in B^n$ ist das aber nicht möglich.
QED.

4.2.7 Fundamentale Zyklen

Die identische Abbildung $i_n:\Delta_n \to \Delta_n$ des n-Simplex ist ein Zyklus mod $\dot{\Delta}_n$. Seine Homologieklasse erzeugt $H_n(\Delta_n,\dot{\Delta}_n) \cong \mathbb{Z}$, .d.h.

$$H_n(\Delta_n,\dot{\Delta}_n) = \mathbb{Z}\cdot[i_n].$$

Der Rand von i_n ist ein Zyklus des Raumes $\dot{\Delta}_n$. Seine Homologieklasse erzeugt die reduzierte Homologie $\tilde{H}_{n-1}(\dot{\Delta}_n) \cong \mathbb{Z}$, d.h.

$$\tilde{H}_{n-1}(\dot{\Delta}_n) = \mathbb{Z}\cdot[\partial i_n].$$

Beweis. Wegen $\tilde{H}(\Delta_n) = 0$ liefert die reduzierte Homologiesequenz von $(\Delta_n,\dot{\Delta}_n)$ einen Isomorphismus

$$\partial_* : H_n(\Delta_n,\dot{\Delta}_n) \to \tilde{H}_{n-1}(\dot{\Delta}_n). \tag{1}$$

Dieser bildet $[i_n]$ in $[\partial i_n]$ ab. Die beiden Aussagen von 4.2.7 sind also äquivalent. Es genügt die erste zu beweisen. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Für n=0 wird

$$H_0(\Delta_0,\dot{\Delta}_0) = H_0(\Delta_0)$$

trivialerweise vom einzigen Punkt i_0 von $?_0$ erzeugt. Sei jetzt bereits gezeigt, daß

$$H_{n-1}(\Delta_{n-1},\dot{\Delta}_{n-1}) = \mathbb{Z}\cdot[i_{n-1}]$$

gilt. Nach 4.2.1 wird dann

$$H_{n-1}(\dot{\Delta}_n,\Lambda_n)$$

erzeugt von $i_*(\varepsilon^0_*([i_{n-1}])) = [\varepsilon^0:\Delta_{n-1} \to \Lambda_n]$. Letztere Klasse ist aber gerade das Bild von

$$[i_n] \in H_n(\Delta_n,\dot{\Delta}_n)$$

beim Zusammenhangshomomorphismus (1):

$$\partial_*[i_n] = [\partial i_n] = [i_n \circ \varepsilon^0] = [\varepsilon^0].$$

QED.

4.2.8 Produkte mit Sphären

Seien $p \in S^n$ ein Punkt und Y ein beliebiger topologischer Raum. Dann bestehen folgende Isomorphien.

(i) $H_q(S^n \times Y, \{p\} \times Y) \cong H_{q-n}(Y)$.

(ii) $H_q(B^n \times Y, S^{n-1} \times Y) \cong H_{q-n}(Y)$.

(iii) $H_q(S^n \times Y) \cong H_{q-n}(Y) \oplus H_q(Y)$, $[z] \mapsto (\rho[z], p_*[z])$.

Dabei sei $p: S^n \times Y \to Y$ die Projektion auf den zweiten Faktor und ρ sei induziert durch die Einbettung $S^n \times Y \subseteq (S^n \times Y, \{p\} \times Y)$und dem Isomorphismus von (i).

Beweis. Zu (ii). Die Beweise sind analog zum Beweis von 4.2.2. Wie dort haben wir (aus denselben Gründen) Isomorphismen[28]

$$H_q((\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \times Y) \xrightarrow[\cong]{\partial_*} H_{q-1}((\dot{\Delta}_n, \Lambda_n) \times Y) \xleftarrow[\cong]{i_*} H_{q-1}((\dot{\Delta}_n - \{e^0\}, \Lambda_n - \{e^0\}) \times Y) \xleftarrow[\cong]{\varepsilon_*^0} H_{q-1}((\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \times Y).$$

Dabei sei $(A,B) \times Y = (A \times Y, B \times Y)$. Insbesondere ergibt sich

$$H_q((\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \times Y) \cong H_{q-n}((\Delta_0, \dot{\Delta}_0) \times Y) = H_{q-n}(Y).$$

Wegen $(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \approx (B^n, S^{n-1})$ ist dies gerade die Aussage von (ii).

Zu (i). Zum Beweis von (i) betrachten wir das Tripel $(B^{n+1} \times Y, S^n \times Y, \{p\} \times Y)$. Da $\{p\} \times Y \subseteq B^{n+1} \times Y$ eine Homotopieäquivalenz ist, gilt

$$H(B^{n+1} \times Y, \{p\} \times Y) = 0.$$

Da Homologiesequenz des Tripels liefert daher,

$$H_{q+1}(B^{n+1} \times Y, S^n \times Y) \cong H_q(S^n \times Y, \{p\} \times Y).$$

Damit folgt (i) aus (ii).

Zu (iii). Die Projektion $S^n \times Y \to \{p\} \times Y$, $(s,y) \mapsto (p,y)$, ist eine Retraktion. Als solche liefert sie nach 3.4.13 eine zerfallende exakte Sequenz:

$$0 \to H(\{p\} \times Y) \to H(S^n \times Y) \to H(S^n \times Y, \{p\} \times Y) \to 0.$$

Die Behauptung ergibt damit aus (i).

QED.

4.2.9 Ein Beispiel für die Künneth-Formeln (weglassen ?)

Die Isomorphie 4.2.8(iii) kann man auch in der folgenden Weise schreiben. Es gilt

$$H_q(X \times Y) \cong \oplus_{i+j=q} H_i(X) \otimes H_j(Y)$$

wenn einer der beiden Räume X, Y homöomorph zu einer Sphäre ist. Die eben bewiesene Isomorphie ist ein erstes Beispiel für eine sehr allgemeine Aussage, die unter dem Namen Künneth-Formeln bekannt ist. Später werden wir die graduierten Gruppen H(X) und H(Y) (genauer ihre Duale, die Kohomologiegruppen) mit einer Ringstruktur versehen. Die Künnethformeln bekommen dann die Gestalt

$$H(X \times Y) \cong H(X) \otimes H(Y)$$

eines Isomorphismus graduierter Ringe. Sie gelten für die Kohomologie beliebiger Räume X,Y.

---

[28] Der Isomorphismus links ist der Zusammenhangshomomorphismus der Homologie-Sequenz des Tripels $(Q \times Y, \dot{\Delta}_n \times Y, \Delta_n \times Y)$.

Als weiteres Beispiel für Abbildungen, die diese Isomorphie realisieren, betrachten wir die die Abbildungen

$$(*) \qquad H_nS^n\oplus H_nS^n \xrightarrow{(i_{1*},i_{2*})} H_n(S^n\times S^n) \xrightarrow{(p_{1*},p_{2*})} H_nS^n\oplus H_nS^n$$

Dabei seien die Abbildungen wie folgt definiert.

$$i_1:S^n\to S^n\times S^n, x\mapsto(x,p)$$

$$i_2:S^n\to S^n\times S^n, x\mapsto(p,x)$$

$$p_1:S^n\times S^n\to S^n,(x,y)\mapsto x$$

$$p_2:S^n\times S^n\to S^n,(x,y)\mapsto y$$

Die Komposition der Abbildungen (*) ist offensichtlich die Identität. Deshalb ist

$$H_nS^n\oplus H_nS^n=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

ein direkter Summand von $H_n(S^n\times S^n)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Das ist aber nur möglich, wenn die beiden Abbildung von (*) Isomorpismen sind.

4.3 Lokale Homologie

4.3.1 Vorbemerkung

Die singulären Homologiegruppen sind globale Invarianten. Räume mit unterschiedlichen Homologiegruppen könne lokal isomorph sein, wie das zum Beispiel bei S^n und $\mathbb{R}^n$ der Fall ist. Wie wir in diesem Abschnitt sehen werden, haben einige relative Homologiegruppen die Natur lokaler Invarianten.

4.3.2 Definition der lokalen Homologie

Seien X ein topologischer Raum und $p\in X$ ein Punkt. Dann heißt

$$H_q(X,X-p)$$

p-te lokale Homologie von X im Punkt p. Diese Bezeichnung wird durch die nachfolgende Aussage erklärt. Ein Punkt $p\in X$ heißt abgeschlossen, wenn $\overline{\{p\}} = \{p\}$ gilt. Man beachte, in Hausdorff-Räumen ist jeder Punkt abgeschlossen.

4.3.3 Lokalität der lokalen Homologie

Sein X ein topologischer Raum und $p\in X$ ein abgeschlossener Punkt. Dann induziert für jede offene Umgebung U von p die natürliche Einbettung $(U,U-p)\to(X,X-p)$ Isomorphismen

$$H_q(U,U-p)\to H_q(X,X-p).$$

Mit anderen Worten, die lokale Homologie von X in p ist durch jede noch so kleine Umgebung von p festgelegt.

Beweis. Das Paar (U,U-p) entsteht aus (X,X-p) durch entfernen der Menge F:= X-U. Nach dem Ausschneidungssatz genügt es zu zeigen, die Abschließung von F liegt im Innern von X-p. Offensichtlich gilt

$$F = X-U \subseteq X - p.$$

Die Behauptung folgt deshalb aus der Tatsache, daß F abgeschlossen und X-p offen ist in X.

QED.

4.3.4 p-Abbildungen und Abbildungskeime

Zum besseren Verständnis der lokalen Homologie werden wir ihr Verhalten bei Abbildungen untersuchen, d.h. ihre funktoriellen Eigenschaften. Nach 4.3.3 genügt es, die Abbildung lokal in einer Umgebung des betrachteten Punktes zu definieren.
Seien X, Y topologische Räume, $p \in X$ ein abgeschlossener Punkt und

$$f: U \to Y$$

eine auf einer Umgebung U von p definierte stetige Abbildung. Dann heißt f <u>p-Abbildung</u>, wenn es eine offenen Umgebung $V \subseteq U$ von p gibt mit

$$f(V\text{-}p) \subseteq Y\text{-}f(p),$$

d.h. f nimmt in einer ganzen Umgebung von p nicht noch einmal denselben Wert an wie in p. Äquivalente Formulierung: p ist ein isolierter Punkt in seiner Faser $f^{-1}(f(p))$. Eine p-Abbildung induziert einen Homomorphismus der lokalen Homologie

$$f^p_*: H_q(X,X\text{-}p) \cong H_q(U,U\text{-}p) \xrightarrow{f|_U} H_q(Y,Y\text{-}f(p)).$$

Man sagt, zwei Abbildungen, die in einer Umgebung von $p \in X$ definiert sind, heißen <u>p-äquivalent</u>, wenn sie in einer Umgebung von p übereinstimmen. Die p-Äquivalenz ist eine Aquivalenzrelation. Eine Äquivalenzklasse bezüglich dieser Relation heißt <u>Keim</u> im Punkt p. Der Keim der Abbildung f im Punkt p wird mit f^p bezeichnet.

4.3.5 p-Abbildungen mit demselben Keim

Seien X, Y topologische Räume, $p \in X$ und f, g zwei p-Abbildungen mit Werten in Y, die in p denselben Keim besitzen, Dann induzieren sie denselben Homomorphismus

$$H_q(X,X\text{-}p) \to H_q(Y,Y\text{-}q), (q:=f(p) = g(p))$$

auf der lokalen Homologie.
Beweis. Sei $q = f(p) = f'(p)$ und seien U und U' offene Umgebungen von p mit

$$f(U\text{-}p) \subseteq Y\text{-}q \text{ und } f'(U'\text{-}p) \subseteq Y\text{-}q.$$

Nach Voraussetzung gibt es eine offene Umgebung W von p mit $W \subseteq U \cap U'$ und

$$g := f|_W = f'|_W .$$

Insbesondere gilt $g(W\text{-}p) \subseteq Y\text{-}q$. Es genügt zu zeigen, f und g induzieren dieselbe Abbildung $f^p_* = g^p_*$ auf der lokalen Homologie. Aus Symmetriegründen gilt dann nämlich

$$f^p_* = g^p_* = f'^p_*.$$

Betrachten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc} H(X,X\text{-}p) & \xleftarrow{\alpha} & H(U,U\text{-}p) & \xrightarrow{f|_U} & H(Y,Y\text{-}q) \\ \| & & \uparrow\gamma & & \| \\ H(X,X\text{-}p) & \xleftarrow{\beta} & H(W,W\text{-}p) & \xrightarrow{g} & H(Y,Y\text{-}q) \end{array}$$

Die Abbildungen α, β und γ seien induziert durch die entsprechenden natürlichen Einbettungen der topologischen Paare. Auf Grund es Ausschneidungssatzes sind α und β Isomorphismen. Die beiden Zeilen des Diagramms liefern gerade die Homomorphismen f^p_* bzw. g^p_*. Die Kommutativität des Diagramms zeigt, daß f^p_* und g^p_* übereinstimmen.
QED.

4.3.6 Die Kategorie der Keime von p-Abbildungen

Wir definieren wir folgt eine Kategorie $\mathbf{Top}_*$. Die Objekte von $\mathbf{Top}_*$ seien punktierte topologische Räume (X,p), wobei der Grundpunkt p von X abgeschlossen ist. Ein Morphismus

$$f^p:(X,p)\to(Y,q)$$

von $\mathbf{Top}_*$ ist ein Keim in p einer p-Abbildung f:U→Y mit f(p)=q. Die Morphismenkomposition sei wie folgt definiet. Seien

$$f^p:(X,p)\to(Y,q) \text{ und } g^q:(Y,q)\to(Z,r)$$

Morphismen von $\mathbf{Top}_*$ und seien

$$f:U\to Y \text{ und } g:V\to Z$$

eine p-Abbildung und eine q-Abbildung, welche f^p bzw. g^q repräsentieren. Durch Verkleinern von U bzw. V können wir erreichen, daß gilt

$$f(U-p) \subseteq V-q \text{ und } g(V-q) \subseteq Z-r$$

Dann gilt aber auch $(g\circ f)(U-p) \subseteq Z-r$, d.h. $g\circ f$ ist eine p-Abbildung. Deren Keim in p bezeichnen wir mit

$$f^p\circ g^q := (g\circ f)^p.$$

Ersetzt man f und g in der obigen Konstruktion durch andere Repräsentanten f' und g' von f^p bzw. g^q, so stimmen f' und g' in einer Umgebung von p bzw. q mit f und g überein. Die Zusammensetzung $g\circ f$ stimmt also mit $g'\circ f'$ in einer Umgebung von p überein. Dieses zeigt, der Keim $(g\circ f)^p$ ist unabhängig von der Wahl der verwendeten Repräsentanten. Die Komposition $f^p\circ g^q$ ist somit wohldefiniert und nur von f^p und g^q abhängig. Offensichtlich ist $\mathbf{Top}_*$ mit dieser Komposition eine Kategorie.

Aussage 4.3.5 besagt gerade, die lokale Homologie definiert für jedes q einen Funktor

$$\mathbf{Top}_* \to \mathbf{Ab},\ (X,p) \mapsto H_q(X,X-p).$$

4.3.7 Die lokale Homologie lokal homöomorpher Räume

Seien $p\in X$ und $q\in Y$ abgeschlossene Punkte, welche offene Umgebungen U bzw. V besitzen und welche als punktierte Räume homöomorph sind,

$$(U,p) \approx (V,q).$$

Dann gilt $H(X,X-p) \cong H(Y,Y-q)$.

Beweis. Es gilt

$$H(X,X-p) \cong H(U,U-q) \cong H(V,V-p) \cong H(Y,Y-q).$$

Die erste und die letzte Isomorphie besteht nach dem Ausschneidungssatz. Die in der Mitte ergiebt sich aus der Voraussetzung $(U,p) \approx (V,q)$.

QED.

4.3.8 Invarianz der Dimension

Wenn die Punkte $p\in\mathbb{R}^m$ und $q\in\mathbb{R}^n$ homöomorphe punktierte Umgebungen U bzw. V besitzen (d.h. Umgebungen mit $(U,p) \approx (V,q)$) so gilt m=n.

Beweis. Nach 4.3.7 gilt $H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m-p) \cong H_i(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-q)$ für alle i. Wegen 4.2.2 ist das aber nur möglich, wenn m=n gilt.

QED.

4.3.9 Invarianz der Randeigenschaft

Werde die Menge

$$\mathbb{R}^n_+ := \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_0=0\}$$

als positiver Halbraum bezeichnet. Wenn zwei Punkte $p,q\in\mathbb{R}^n_+$ homöomorphe punktierte Umgebungen U bzw. V besitzen (d.h. Umgebungen mit $(U,p)\approx(V,q)$), so liegen entweder beide Punkte auf dem Rand

$$\partial\mathbb{R}^n_+ = \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_0=0\}$$

von $\mathbb{R}^n_+$, oder sie liegen beide im Innern

$$\mathring{\mathbb{R}}^n_+ = \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_0>0\}.$$

Mit anderen Worten, ein lokaler Homöomorphismus bildet niemals innere Punkte in Randpunkte oder Randpunkte in innere Punkte ab.

Beweis. Seien $p\in\partial\mathbb{R}^n_+$ ein Randpunkt und $q\in\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ ein innerer Punkt. Die stetige Familie

$$h_t:(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+-p) \to (\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+-p),\ x \mapsto tx+(1-t)q,$$

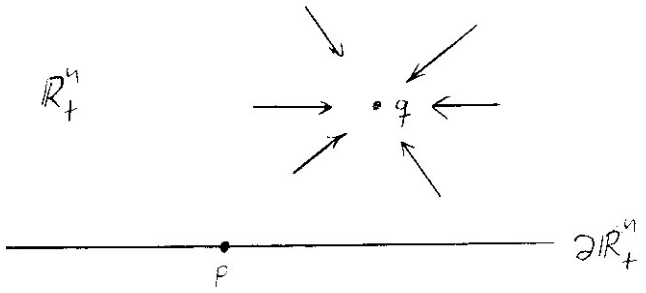

Figure 27: eine Kontraktion des Halbraums in einen inneren Punkt

bildet für jedes t den Punkt q in sich ab und kontrahiert $(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+-p)$ in das Paar (q,q). Mit anderen Worten, (q,q) ist ein starker Deformationsretrakt von $(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+-p)$. Insbesondere gilt

(1) $$H(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+-p) \cong H(q,q) = 0.$$

Da q im Innern von $\mathbb{R}^n_+$ liegt, gibt es eine kleine offene Vollkugel $U\subseteq\mathbb{R}^n_+$ mit dem Mittelpunkt q. Dann gilt aber

(2) $$H(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+-q) = H(U, U-q) = H(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-q) = \mathbb{Z}.$$

Wegen (1) und (2) können p und q keine punktierten homöomorphen Umgebungen besitzen (nach 4.3.7).
QED.

4.3.10 Lokale und reduzierte Homologie

Seien X ein topologischer Raum und $p\in X$ ein abgeschlossener Punkt, welcher eine Umgebung $U\subseteq X$ mit $\tilde{H}U = 0$ besitzt. Dann gilt für jedes q

$$H_q(X,X-p) \cong \tilde{H}_{q-1}(U-p).$$

Bemerkungen

(i) Umgebungen U mit $\tilde{H}U = 0$ heißen azyklisch.
(ii) Falls U kontrahierbar ist auf einen Punkt, so ist U azyklisch.

(iii) Wenn man anstelle von $\tilde{H}U = 0$ nur fordert, daß die natürliche Abbildung

$$\tilde{H}_q U \to \tilde{H}_q X$$

die Nullabbildung ist, so erhält man wenigstens noch

$$H_q(X,X\text{-}p) \cong \mathrm{Ker}(\tilde{H}_{q-1}(U\text{-}p) \to \tilde{H}_{q-1}U).$$

Beweis. Es reicht, die Aussage von Bemerkung (iii) unter der dort angegebenen schwächeren Bedingung zu beweisen. Dazu betrachten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \partial_* & & \\ \tilde{H}_q U & \longrightarrow & H_q(U,U\text{-}p) & \longrightarrow & \tilde{H}_{q-1}(U\text{-}p) & \longrightarrow & \tilde{H}_{q-1}U \\ \downarrow 0 & & \cong & & \downarrow i_* & & \\ \tilde{H}_q X & \longrightarrow & H_q(X,X\text{-}p) & & & & \end{array}$$

Die obere Zeile ist gerade ein Ausschnitt aus der reduzierten Homologiesequenz des Paares (U, U-p), und untere einer der Sequenz des Paares (X, X-p). Nach Voraussetzung ist die linke vertikale Abbildung die Nullabbildung. Die rechte vertikale Abbildung ist ein Isomorphismus nach dem Aussschneidungssatz. Damit ist aber auch die horizontale Abbildung links oben eine Null-Abbildung. Die Aussage von Bemerkung (iii) ergibt sich damit aus der Exaktheit der oberen Zeile.
QED.

4.4 Der Grad einer Abbildung

4.4.1 Vorbemerkung

Jeder Endomorphismus $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ der freien zyklischen Gruppe ist durch seinen Wert an der Stelle 1,

$$d := \varphi(1) \in \mathbb{Z},$$

bereits vollständig festgelegt, und diese ganze Zahl d kann beliebig sein. Es gilt dann

$$\varphi(x) = dx \text{ für alle } x\in\mathbb{Z}.$$

Wendet man diese Tatsache auf die Homologie von Sphären, so führt das zum Begriff des Grades einer Abbildung, welcher viele Anwendungen besitzt.

4.4.2 Der Gradbegriff

Seien

$$f:S^n\to S^n \text{ und } g:(B^{n+1},S^n)\to(B^{n+1},S^n)$$

stetige Abbildungen. Ihre Grade deg f bzw. deg g sind durch die Bedingung

$$f_*(x) = \deg(f)\cdot x \text{ bzw. } g_*(x) = \deg(g)\cdot x$$

definiert, wobei f_* bzw. g_* die auf der Homologie $\tilde{H}_n(S^n)\cong\mathbb{Z}$ bzw. $H_{n+1}(B^{n+1},S^n)\cong\mathbb{Z}$ induzierten Abbildungen seien.

4.4.3 Eigenschaften des Grades

(i) $\deg(\mathrm{Id}) = +1$.

(ii) $\deg(f\circ f') = \deg(f)\cdot\deg(f')$.

(iii) $f \simeq f' \Rightarrow \deg(f) = \deg(f')$.

(iv) Ist f eine Homotopieäquivalenz, so gilt $\deg(f) = \pm 1$.

(v) Für jede Abbildung $f:(B^{n+1},S^n)\to(B^{n+1},S^n)$ von topologischen Paaren gilt

$$\deg(f) = \deg(f|_{S^n}).$$

Beweis. (i) und (ii) gelten, weil der Übergang zur Homologie ein Funktor ist. (iii) und (iv) ergeben sich aus der Homotopie-Invarianz des Homologiefunktors. Eigenschaft (v) ergibt aus der Kommutativität des folglenden Diagramms und der Tatsache, daß die vertikalen Abbildungen übereinstimmen und bijektiv sind.

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(B^{n+1};S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_{n+1}(B^{n+1};S^n) \\ \partial_*\downarrow & & \downarrow\partial_* \\ \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{(f|_{S^n})_*} & \tilde{H}_n(S^n) \end{array}$$

Dabei sollen die beiden vertikale Abbildungen mit dem Zusammenhangshomomorphismus zur reduzierten Homologie-Sequenz des Paares (B^{n+1}, S^n) zusammenfallen. Die horizontalen Abbildungen seien induziert durch die Paar-Abbildung f.

Weil B^{n+1} ´kontrahierbar ist, ist ∂_* ein Isomorphismus, d.h. ∂_* ist gerade die

Multiplikation mit $\varepsilon := \pm 1$. Die Kommutativität des Diagramms bedeutet gerade, es gilt

$$\varepsilon \bullet \deg(f) = \deg(f|_{S^n}) \bullet \varepsilon$$

d.h. es ist $\deg(f) = \deg(f|_{S^n})$.

QED.

4.4.4 Der Grad einiger linearer Abbildungen

(i) Der Grad einer linearen Abbildung $f:(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \to (\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$, welche die Ecken des Standardsimplex Δ_n permutiert, ist gleich dem Vorzeichen der zugehörigen Permutation:

$$\deg(f) = \operatorname{sign}(f|_{\{e,0\ldots,e^n\}}).$$

(ii) Der Grad einer orthogonalen Abbildung $f: S^n \to S^n$ ist gleich ihrer Determinante:

$$\deg(f) = \det(f).$$

(iii) Der Grad der antipotalen Abbildung $f: S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$, ist gleich

$$\deg(f) = (-1)^{n+1}.$$

Beweis. Zu (i). Nach 4.4.3(ii) ist der Grad multiplikativ. Da dies auch für das Vorzeichen einer Permutation gilt und jede Permutation Produkt von Transpostitionen ist, genügt es, die Behauptung für den Fall einer Transposition zu beweisen. Bezeichne

$$\nu = (\nu_0,\ldots,\nu_r)$$

die lineare Abbildung

$$\nu: \Delta_r \to \Delta_n, e^i \mapsto e^{\nu_i}.$$

Wir wollen zeigen, wenn ν eine Transposition der Ecken ist (r=n), so gilt

$$[(\nu_0,\ldots,\nu_r)] = \operatorname{sign}(\nu)[(0,1,\ldots,n)].$$

Dabei bezeichne [ ] den Übergang zur Homologieklasse in $H_n(\Delta_n,\dot{\Delta}_n)$. Man beachte, die identische Abbildung (0,1,...,n) von Δ_n repräsentiert ein erzeugendes Element dieser Homologiegruppe (nach 4.2.7). Sei ν die Transposition, welche i und i+1 vertauscht,

$$\nu = (0,1,\ldots,i-1,i+1,i,i+2,\ldots,n).$$

und bezeichne μ die Abbildung $\mu = (0,1,...,i-1,i+1,i,i+1,...,n):\Delta_{n+1} \to \Delta_n$. Dann gilt

$$\partial \circ \nu = (-1)^i(0,1,...,n) + (-1)^{i+2}(0,...,i-1,i+1,i+2,...,n) + R,$$

wobei der Rest R aus solchen Termen besteht, in denen eine der Ecken von Δ_n nicht vorkommt. Es gilt also $R \in S(\dot{\Delta}_n)$. Übergang zur Homologie mod $\dot{\Delta}_n$ liefert

$$0 = [(0,1,...,n)] + [(0,...,i-1,i+1,i+2,...,n)] \text{ in } H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n),$$

also

$$\begin{aligned} \nu_*[Id]^{29} = [\nu \circ Id] &= [\nu] \\ &= [(0,...,i-1,i+1,i+2,...,n)] \\ &= -[(0,1,...,n)] \\ &= -[Id] \end{aligned}$$

Der Grad der Transposition ν ist somit -1. Damit ist (i) beweisen.

Zu (ii). Jede orthogonale Abbildung $f: S^n \to S^n$ mit der Determinante +1 ist Zusammensetzung von endlich vielen ebenen Drehungen und als solche homotop zur identischen Abbildung: man deformiere die Abbildung so, daß die endlich vielen Drehwinkel nacheinander Null werden. Zum Beispiel kann man im Fall

$$f = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

die folgende Familie betrachten

$$f_t = \begin{pmatrix} \cos t\varphi & \sin t\varphi \\ -\sin t\varphi & \cos t\varphi \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\deg(f) = +1 = \det(f)$. Hat f die Determinante -1, so ist f homotop zu einer Spiegelung an einer Hyperebene H durch den Ursprung. Bei geeigneter Wahl der Koordinaten können wir erreichen, daß H die Hyperebene,

$$H: x_0 - x_1 = 0$$

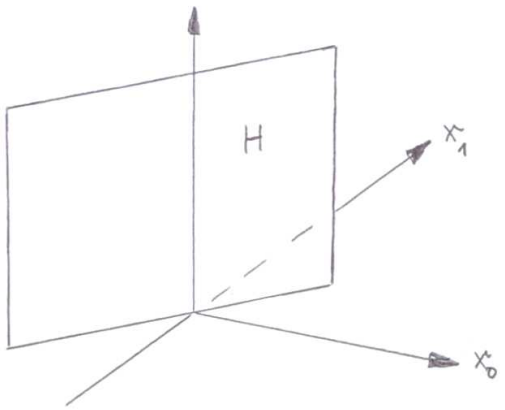

Figure 28: eine Spiegelung an einer Hyperebene

ist. Die Abbildung f vertauscht dann gerade die ersten beiden Koordinaten,

$$f(x_0,x_1,x_3,...,x_n) = (x_1,x_0,x_3,...,x_n).$$

---

[29] Die Kohomologie-Klasse der identischen Abbildung $\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ ist nach 4.2.7 ein Erzeuger der Homologie-Gruppe $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$.

Die von dieser linearen Abbildung auf dem (n+1)-Simplex

$$s = (e^0, e^1, e^3, ..., e^n, -\sum_{i=0}^{n} e^i) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

induzierte Abbildung vertauscht die ersten beiden Ecken und läßt alle übrigen Ecken fest. Nach (i) induziert f auf der Homologiegruppe $H_{n+1}(s,\partial s)$ gerade die Multiplikation mit -1,

$$f_*: H_{n+1}(s,\partial s) \to H_{n+1}(s,\partial s),\ x \mapsto -x.$$

Sei weiter g: $\partial s \to S^n$, $x \mapsto \frac{x}{||x||}$, die Projektion aus dem Ursprung auf die Einheitssphäre

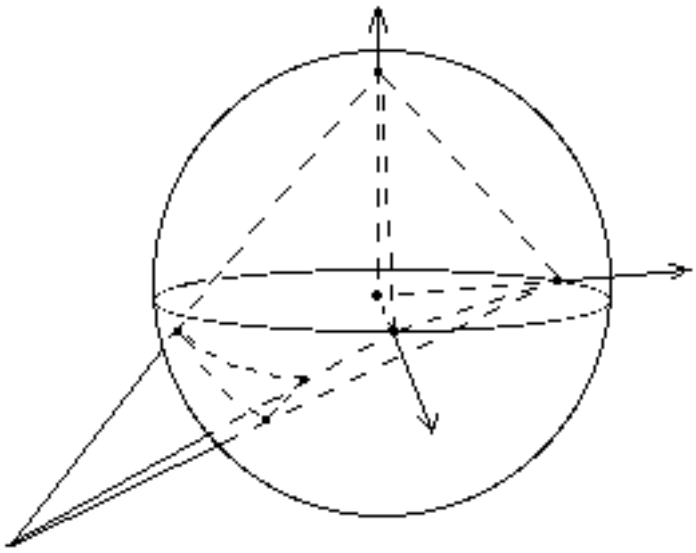

Figure 29: Projektion des Simplex-Rands auf die Sphäre

und

$$h: s \to B^{n+1},\ tx \mapsto t \cdot \frac{x}{||x||} \text{ (für } x \in \partial s),$$

die radiale Fortsetzung von g auf ganz s. Wie wir in 4.1.5 gesehen haben, ist dies ein Homöomorphismus. Da h alle Punkte nur mit einem nicht-negativen reellen Faktor multipliziert, kommutieren h und f,[30] d.h. das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} (B^{n+1};S^n) & \xrightarrow{f} & (B^{n+1};S^n) \\ \cong\downarrow h & & \cong\downarrow h \\ (s,\partial s) & \xrightarrow{f} & (s,\partial s) \end{array}$$

Durch Übergang zur Homologie sehen wir, f induziert auch auf

$$H_n(B^{n+1}, S^n)$$

die Multiplikation mit -1. Aus dem kommutativen Diagramm

[30] Es reicht, dies für f und g zu zeigen. Man beachte g bildet alle Punkte auf Punkte der Einheitssphäre ab. Zwei Bildpunkte derselben Richtung sind also gleich.

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(B^{n+1};S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_{n+1}(B^{n+1};S^n) \\ \partial_*\downarrow & & \downarrow\partial_* \\ \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{(f|_{S^n})_*} & \tilde{H}_n(S^n) \end{array}$$

(dessen vertikale Abbildungen bijektiv sind) lesen wir schließlich ab, f induziert auch auf $\tilde{H}_n(S^n)$ die Multiplikation mit -1, d.h.

$$\deg(f) = -1 = \det(f).$$

Zu (iii). Dies ist ein Spezialfall von (ii).
QED.

4.4.5 Stetige Abbildungen der n-Sphäre in sich.

Sei $f: S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung.

(i) Falls f keine Fixpunkte besitzt, so gilt $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.
(ii) Falls f keine antipodalen Punkte besitzt ($f(x)=-x$), so gilt $\deg(f) = +1$.

Beweis. Zu (i). Besitzt f keine Fixpunkte, so hat die stetige Familie

$$d_t: S^n \to \mathbb{R}^{n+1},\ x \mapsto (1-t)\cdot f(x) - t\cdot x,\ t\in[0,1],$$

keine Nullstellen. Sie definiert deshalb eine stetige Familie

$$D_t: S^n \to S^n,\ x \mapsto \frac{d_t(x)}{\| d_t(x) \|}.$$

Diese Familie zeigt, daß f homotop zur antipodalen Abbildung $x \mapsto -x$ ist, d.h. es gilt

$$\deg(f) = \deg(\text{antipodale Abbildung}) = (-1)^{n+1}.$$

Zu (ii). Hat f keine antipodalen Punkte, so hat die Abbildung $g(x) := -f(x)$ keine Fixpunkte. Also gilt nach (i):

$$(-1)^{n+1}\cdot\deg(f) = \deg(g) = (-1)^{n+1},$$

d.h. $\deg(f) = +1$.
QED.

4.4.6 Der Satz vom Igel

Sei $f: S^2 \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Tangentialvektorfeld, d.h. f sei stetig und für jedes $x\in S^n$ sei $f(x)$ ein Tangentialvektor an S^n im Punkt x. Dann hat f mindestens eine Nullstelle.

Beweis. Hat f keine Nullstelle, so ist

$$g: S^2 \to S^2,\ x \mapsto \frac{f(x)}{\| f(x)\|},$$

eine wohldefinierte stetige Abbildung. Nach Konstruktion ist $g(x)$ für jedes x ein zu x orthogonaler Einheitsvektor. Also gilt

$$f(x) \neq \pm x.$$

Nach 4.4.5 (i) gilt also $\deg(f) = (-1)^3 = -1$ und nach 4.4.5(ii) ist $\deg(f) = +1$. Dieser Widerspruch zeigt, daß f eine Nullstelle haben muß.
QED.

Bemerkungen

(i) Eine andere Formulierung dieses Satzes lautet, ein Igel läßt sich nicht kämmen (d.h. eine Stachel steht immer nach oben).

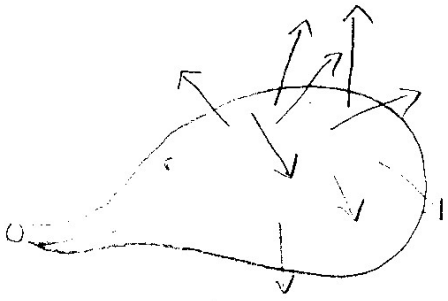

Figure 30: Igel, ungekämmt

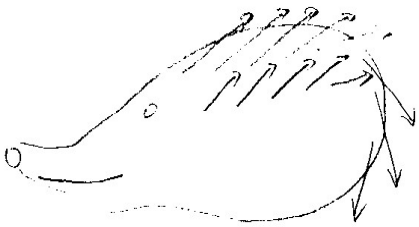

Figure 31: Igel, gekämmt

(ii) Die Menge $TS^2 = \{(x,v) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 \mid v \perp x\}$ der tangentialen Ortsvektoren an S^2 heißt auch Tangentialbündel von S^2. Das Tangentialbündel besteht also aus Paaren

$$(x, v)$$

deren erste Koordinaten ein Punkt der Sphäre (der Angriffspunkt des Vektors) und deren zweite Koordinate ein Vektor der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ ist, die die Sphäre im Punkt x berührt. Es ist deshalb naheliegend zu fragen, ob man das Tangentialbündel mit der Menge

$$S^2 \times \mathbb{R}^2$$

identifizieren kann.

(iii) Die Projektion auf den ersten Faktor induziert eine stetige Abbildung

$$\pi: TS^2 \to S^2, (x,v) \mapsto x.$$

Die Faser über $x \in S^2$ ist gerade der Raum der Tangentialvektoren

$$T_x S^2 := \pi^{-1}(x)$$

an S^2 im Punkt x. Dies ist ein 2-dimensionaler Vektorraum von Vektoren, die im Punkt x angreifen. Ein Tangentialvektorfeld an S^2 ist gerade eine stetige Abbildung $f: S^2 \to TS^2$, welche jedem Punkt $x \in S^2$ einen Tangentialvektor zuordnet, der im Punkt x angreift, d.h. eine stetige Abbildung mit $\pi \circ f = id$. Mit anderen Worten, ein Tangentialvektorfeld ist gerade ein Schnitt des Tangentialbündels.

(iv) Das Tangentialbündel $\pi: TS^2 \to S^2$ ist lokal trivial, d.h. zu jedem Punkt $x \in S^2$ gibt es eine offene Umgebung U von x derart, daß die Einschränkung

$$\pi|_{\pi^{-1}(U)} \pi^{-1}(U) \to U$$

bis auf Homöomorphie gerade die Projektion p: $U\times\mathbb{R}^2\to U$ auf den ersten Faktor ist. Genauer, es gibt einen Homöomorphismus $f:U\times\mathbb{R}^2\to\pi^{-1}(U)$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U\times\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \pi^{-1}(U) \\ p\downarrow & & \downarrow\pi \\ U & = & U \end{array}$$

kommutativ ist und die Einschränkungen von f auf die Fasern (bijektiv und) $\mathbb{R}$-linear sind. Ist zum Beispiel U eine kleine Umgebung des Nordpols und identifiziert man $\mathbb{R}^2$ mit der Äquatorebene des $\mathbb{R}^3$, so ist die folgende Abbildung ein solcher Homöomorphismus.

$$U\times\mathbb{R}^2\to\pi^{-1}(U),\ (u,v)\mapsto(u,\ v+\lambda(u,v)u),$$

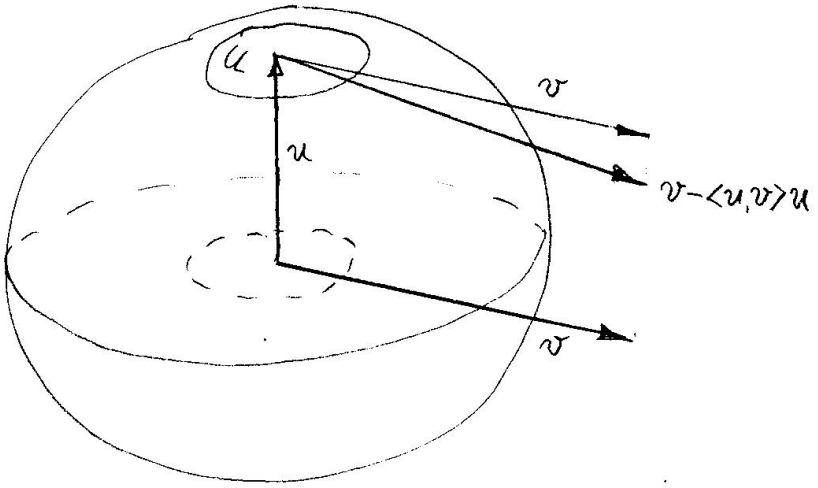

Figure 32: lokale Trivialität des Tangentialbündels

dabei sei $\lambda(u,v)$ so gewählt, daß

$$0 = \langle u,\ v+\lambda(u,v)u\rangle = \langle u,v\rangle + \lambda(u,v)$$

gilt, d.h. $\lambda(u,v) = -\langle u,v\rangle$ (Man beachte, die Linearisierung im Nordpol ist die identische Abbildung $(u,v)\mapsto(u,\ v)$).

(v) Die lokale Trivialität des Tangentialbündels TS^2 legt die Frage nach der Existenz einer globalen Trivialisierung nahe, d.h. nach der Existenz eines Homöomorphismus wie in (iii) mit $U = S^2$:

$$\begin{array}{ccc} S^2\times\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & TS^2 \\ p\downarrow & & \downarrow\pi \\ S^2 & = & S^2 \end{array}$$

Aus dem Satz vom Igel folgt, eine solche Trivialisierung f kann nicht existieren, d.h. das Tangentialbündel von S^2 ist nicht-trivial. Andernfalls würde nämlich jeder Schnitt s von p einen Schnitt $f\circ s$ von π definieren. Speziell für den Schnitt

$$s:S^2\to S^2\times\mathbb{R}^2,\ x\mapsto(x,(1,1))$$

von p wäre $f\circ s$ ein in jedem Punkt von Null verschiedenes Vektorfeld auf S^2 (welches nach dem Satz vom Igel nicht existiert).

4.4.7 Der Bigrad eine Abbildung

Für jede stetige Abbildung $\mu: S^n \times S^n \to S^n$ hat die induzierte Abbildung

(1) $$H_n S^n \oplus H_n S^n \cong H_n(S^n \times S^n) \xrightarrow{\mu_*} H_n S^n$$

die Gestalt $\mu_*(x_1,x_2) = d_1 x_1 + d_2 x_2$ mit eindeutig bestimmten ganzen Zahlen d_1 und d_2. Das Paar (d_1,d_2) heißt Bigrad der Abbildung μ. Seine Eigenschaften sind, wie wir sehen werden, so ähnlich wie die des Grades.

Bemerkungen.

(i) Bei der obigen Definition des Bigrades haben wir $H_n(S^n \times S^n)$ mit der direkten Summe $H_n S^n \oplus H_n S^n$ identifiziert. Um die Definition des Bigrades eindeutig zu machen, müssen wir genau festlegen, welchen Isomorphismus wir meinen. Um den Isomorphimus zu beschreiben, fixieren wir einen Punkt $q \in S^n$ und betrachten die folgenden stetigen Abbildungen.

$$i_1: S^n \to S^n \times S^n,\ x \mapsto (x,q)$$

$$i_2: S^n \to S^n \times S^n,\ x \mapsto (q,x).$$

Weiter seien $p_1, p_2: S^n \times S^n \to S^n$ die Projektionen auf die beiden Faktoren. Dann ist die folgende Kompositon gerade die identische Abbildung.

(2) $$\tilde{H}_n S^n \oplus \tilde{H}_n S^n \xrightarrow{i_{1*} + i_{2*}} \tilde{H}_n(S^n \times S^n) \xrightarrow{(p_{1*},p_{2*})} \tilde{H}_n S^n \oplus \tilde{H}_n S^n$$

$([a], [b]) \mapsto [i_{1*}a + i_{2*}b] \mapsto ([p_{1*}i_{1*}a + p_{1*}i_{2*}b],[p_{2*}i_{1*}a + p_{2*}i_{2*}b]) = ([a], [b])$.

Man beachte, $p_\alpha \circ i_\beta$ ist die identische Abbildung für $\alpha=\beta$ und eine konstante Abbildung für $\alpha \neq \beta$[31]. Aus (2) lesen wir ab, $\tilde{H}_n S^n \oplus \tilde{H}_n S^n$ ist ein direkter Summand von $\tilde{H}_n(S^n \times S^n)$. Da beide Gruppen isomorph zu $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sind, ist das nur möglich, wenn die linke Abbildung von (1) (also auch die rechte) ein Isomorphismus ist.

(ii) Wir haben gezeigt (p_{1*}, p_{2*}) und $i_{1*}+i_{2*}$ sind zueinander inverse Abbildungen. Wir vereinbaren jetzt, daß diese den Isomorphismus von (i) realisieren sollen. Die definierende Gleichung für den Bigrad bekommt dann genauer die Gestalt.

$$\mu_* \circ (i_{1*} + i_{2*})(x_1,x_2) = d_1 x_1 + d_2 x_2$$

oder genauer

$$\mu_*(i_{1*} x_1 + i_{2*} x_2) = d_1 x_1 + d_2 x_2$$

4.4.8 Eine Eigenschaft des Bigrades

Seien $f: S^n \to S^n \times S^n$ und $\mu: S^n \times S^n \to S^n$ stetige Abbildungen. Die Abbildung f habe die Koordinatenfunktionen $f_1, f_2: S^n \to S^n$, d.h.

$$f(x) = (f_1(x),f_2(x)) \text{ für alle } x \in S^n,$$

---

[31] Eine konstante Abbildung faktorisiert sich über den einpunktigen Raum P. Die auf der Homologie induzierte Abbildung faktorisiert sich also über $\tilde{H}(P) = 0$ und ist somit die Nullabbildung.

und die Abbildung μ habe den Bigrad (d_1,d_2). Dann gilt

$$\deg(\mu\circ f) = d_1\cdot\deg(f_1) + d_2\cdot\deg(f_2).$$

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen von 4.4.6. Für $x\in\tilde{H}_n S^n$ gilt:

$$\begin{aligned}(p_{1*}, p_{2*})\circ f_*(x) &= (p_{1*}f_*(x), p_{2*}f_*(x))\\ &= (f_{1*}(x), f_{2*}(x))\\ &= (\deg(f_1)x, \deg(f_2)x)\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\mu_*\circ f_*(x) &=^{32} \mu_*\circ(i_{1*} + i_{2*})\circ(p_{1*}, p_{2*})\circ f_*(x)\\ &= \mu_*\circ(i_{1*} + i_{2*})(\deg(f_1)x, \deg(f_2)x)\\ &=^{33} d_1\cdot\deg(f_1)x + d_2\cdot\deg(f_2)x\end{aligned}$$

QED.

4.4.9 Der Grad der Potenzabbildung

Sei $S = S^1 = \{z\in\mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ oder $S = S^3 = \{z\in\mathbb{H} \mid \|z\| = 1\}$. Dann hat die Abbildung

$$\rho_k: S \to S, z \mapsto z^k,$$

den Grad k.
Beweis. Sei

$$\mu: S\times S \to S, (z_1,z_2) \mapsto z_1\cdot z_2,$$

induziert durch die Multiplikation im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bzw. im Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen. Weiter sei

$$(d_1, d_2)$$

der Bigrad von μ, d.h.

$$\mu_*\circ(i_{1*} + i_{2*})(x_1,x_2) = d_1x_1 + d_2x_2$$

(vgl. 4.4.6(ii)). Dabei seien i_1 und i_2 die beiden Einbettungen

$$i_1: S \longrightarrow S\times S, z \mapsto (z, 1),$$

$$i_2: S \longrightarrow S\times S, z \mapsto (1,z).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}d_1x_1 + d_2x_2 &= \mu_*(i_{1*}(x_1) + i_{2*}(x_2))\\ &= (\mu\circ i_1)_*(x_1) + (\mu\circ i_2)_*(x_2)\\ &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

(für alle $x_1,x_2 \in \mathbb{Z}$). Es gilt deshalb

$$d_1 = d_2 = 1.$$

Nun gilt $\rho_k = \mu\circ(\rho_{k-1},\mathrm{id})$. Nach 4.4.7 ist also

---

[32] Die beiden in der mitte eingefügten Abbildungen sind zueinander invers nach Bemerkung (ii) von 4.4.6.
[33] Auf Grund der Identität von Bemerkung 4.4.6 (ii).

$$\deg(\rho_k) = 1 \bullet \deg(\rho_{k-1}) + 1 \bullet \deg(id) = \deg(\rho_{k-1}) + 1,$$

also $\deg(\rho_k) = k$ für jedes k.

QED.

4.4.10 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nicht-konstante komplexe Polynom $p(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + ... + c_k$ hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Beweis. Angenommen, es gibt ein nicht-konstantes komplexes Polynom p ohne Nullstelle. Wir betrachten die Abbildung

$$\hat{p}: S^1 \to S^1, z \mapsto \frac{p(z)}{\|p(z)\|} .$$

Diese ist wohldefiniert und stetig. Zum Beweis der Behauptung genügt es die folgenden beiden Aussagen zu beweisen.

(i) Hat p keine Nullstelle z mit $\|z\| \leq 1$, so gilt $\deg(\hat{p}) = 0$.

(ii) Hat p keine Nullstelle z mit $\|z\| \geq 1$, so gilt $\deg(\hat{p}) = k$.

Beweis von (i). Wir betrachten die folgende stetige Familie.

$$\hat{p}_t : S^1 \to S^1, z \mapsto \frac{p(tz)}{\|p(tz)\|} .$$

Für t = 1 gilt $\hat{p}_t = \hat{p}$ und für t=0 ist $\hat{p}_t$ eine konstante Abbildung. Also gilt

$$\deg(\hat{p}) = \deg(\hat{p}_0) = 0.$$

Beweis von (ii). Wir betrachten die folgende stetige Familie.

$$\hat{p}_t : S^1 \to S^1, z \mapsto \frac{q(z,t)}{\|q(z,t)\|}$$

mit $q(z,t) := t^k p(\frac{z}{t}) = z^k + t \cdot (c_1 z^{k-1} + t c_2 z^{k-2} + ... + t^{k-1} c_k)$. Die explizite Beschreibung von q zeigt, daß die Funktion q(z,t) auch für t=0 stetig ist. Für t=1 gilt $\hat{p}_t = \hat{p}$ und für t=0 ist $\hat{p}_t(z) = z^k$. Also gilt

$$\deg(\hat{p}) = \deg(z \mapsto z^k) = k.$$

QED.

Bemerkung

Der obige Beweis läßt sich auf andere Multiplikationen $m: S^n \times S^n \to S^n$ verallgemeinern deren Bigradkomponenten positiv sind.

5 Die Homologie der Polyeder

5.1 Vergleich von simplizialer und singulärer Homologie

5.1.1 Einige Kategorien von (abstrakten) Simplizialkomplexen

Bezeichne

$$\tilde{\Delta}$$

die Kategorie der Simplizialkomplexe, d.h. die Objekte dieser Kategorie seien die abstrakten Simplizialkomplexe, die Morphismen

$$K \to K'$$

für je zwei Objekte K, K' von $\tilde{\Delta}$ seien die Abbildungen

$$f: V(K) \to V(K)$$

der Eckenmenge V(K) von K in die Eckenmenge V(K') von K' mit der Eigenschaft, daß das Bild eines jeden Simplexes von K ein Simplex von K' ist,

$$s \in K \Rightarrow f(s) \in K'.$$

Die Morphismen-Komposition in $\tilde{\Delta}$ sei die gewöhnliche Zusammensetzung von Abbildungen. Weiter bezeichne

$$\tilde{\Delta}^{(2)}$$

die Kategorie der Paare abstrakter Simplizialkomplexen oder auch Kategorie der simplizialen Paare. Die Objekte dieser Kategorie sind die Paare

$$(K, L)$$

bestehend aus einem abstrakten Simplizialkomplex K und einem Teilkomplex L von K. Ein Morphismus

$$(K, L) \to (K', L')$$

ist ein Morphismus f: K → K' der Kategorie $\tilde{\Delta}$, dessen Einschränkung auf L ein Morphismus L → L' von $\tilde{\Delta}$ ist. Die Komposition ist die gewöhnliche Komposition von Abbildungen.
Weiter bezeichne

$$\hat{\Delta}$$

die Kategorie der geordneten Simplizialkomplexe. Die Objekte dieser Kategorie sind die abstrakten Simplizialkomplexe K, deren Eckenmengen V(K) mit einer linearen Halbordnung "≤" versehen sind.[34] Die Morphismen sind Morphismen

$$f: K \to K'$$

von $\tilde{\Delta}$, welche die Ordnung der Ecken respektieren,

$$x,y \in V(K), x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Analog bezeichne

$$\hat{\Delta}^{(2)}$$

die Kategorie der geordneten simplizialen Paare. Die Objekte sind die Paare

$$(K, L)$$

bestehend aus zwei Objekten K und L von $\hat{\Delta}$, wobei L ein Teilkomplex von K ist und die Eckenordnung von L mit der von K verträglich ist, d.h. die natürliche Einbettung

$$L \to K$$

ist ein Morphismus von $\hat{\Delta}$. Die Morphismen (K, L) → (K', L') von $\hat{\Delta}^{(2)}$ sind Morphismen f: K → K von $\hat{\Delta}$ mit $f(L) \subseteq L'$.

---

[34] d.h. die Halbordnung ist reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und je zwei Elemente sind vergleichbar.

5.1.2 Einige Funktoren

(i) Die geometrische Realisierung eines Simplizialkomplexes definiert Funktoren

$$|?|: \tilde{\Delta} \to \mathrm{Top}, K \mapsto |K|$$

und

$$|?|: \tilde{\Delta}^{(2)} \to \mathrm{Top}, (K,L) \mapsto (|K|, |L|).$$

(ii) Der Übergang zum geordneten Kettenkomplex definiert Funktoren

$$S: \tilde{\Delta} \to K(Ab), K \mapsto S(K),$$

und

$$S: \tilde{\Delta}^{(2)} \to K(Ab), (K, L) \mapsto S(K, L) := S(K)/S(L)$$

und man hat wie im Fall der singulären Homologie die üblichen kurzen exakten Sequenzen und langen Homologie-Sequenzen.

(iii) Der Übergang zum orientierten Kettenkomplex definiert Funktoren

$$C: \tilde{\Delta} \to K(Ab), K \mapsto C(K),$$

und

$$C: \tilde{\Delta}^{(2)} \to K(Ab), (K, L) \mapsto C(K, L) := C(K)/C(L)$$

und man hat wie im Fall der singulären Homologie die üblichen kurzen exakten Sequenzen und langen Homologie-Sequenzen. Außerdem hat man eine natürliche Transformationen

$$S \to C$$

des Funktors S in den Funktor C (auf $\tilde{\Delta}$ bzw. $\tilde{\Delta}^{(2)}$) welche für jeden Simplizialkomplex K jedes geordnete Simplex $(e_0,...,e_q)$ in das zugehörige orientierte Simplex $[e_0,...,e_q]$ abbildet. Wie wir in den Übungen gesehen haben, induziert diese natürliche Transformation für jedes simpliziale Paar (K,L) einen Isomorphismus

$$H(K.L) := H(S(K,L)) \to H(C(K,L))$$

auf der Homologie.

(iv) Die Aussagen von (iii) gelten analog auch für die Kategorien $\hat{\Delta}$ und $\hat{\Delta}^{(2)}$ anstelle von $\tilde{\Delta}$ und $\tilde{\Delta}^{(2)}$. Außerdem hat man in dieser Situation noch eine natürliche Transformation

$$C \to S,$$

bei welcher jedes orientierte Simplex $[e_0,...,e_q]$ mit paarweise verschiedenen Koordinaten in das geordnete Simplex $(e_0,...,e_q)$ mit $e_0 < ... < e_q$ abgebildet wird. Wie wir in den Übungen gesehen haben, induziert diese natürliche Transformation für jedes simpliziale Paar (K,L) einen Isomorphismus

$$H(C(K,L)) \to H(S(K,L))$$

auf der Homologie (der invers ist zum Isomorphismus von (iii).

(v) Jedes geordnete Simplex $s = (e_0,...,e_q)$ eines Simplizialkomplexes K läßt sich mit einem singulären Simplex der Realisierung |K| identifizieren, nämlich mit dem singulären Simplex

$$\Delta_q \to |K|, (x_0,...,x_q) \mapsto x_0e_0+...+x_qe_q.$$

Dabei bezeichne $x_0e_0+...+x_qe_q$ das Element $\alpha \in |K|$ mit

$$\alpha(e_i) = x_i \text{ für } i = 0,...,q$$

und $\alpha(e) = 0$ für jede weitere Ecke e von K. Durch diese Identifikation wird der Komplex der geordneten Ketten von K zu einem Teilkomplex des singulären Komplexes der Realisierung,

$$S(K) \subseteq S(|K|).$$

Diese natürliche Einbettung definiert eine natürliche Transformation

$$S(?) \to S(|?|)$$

von Funtoren

$$\tilde{\Delta} \to K(Ab).$$

Für jedes simpliziale Paar (K, L) hat man ein kommutatives Diagramm natürlicher Einbettungen

$$\begin{array}{ccc} S(K) & \longrightarrow & S(|K|) \\ \uparrow & & \uparrow \\ S(L) & \longrightarrow & S(|L|) \end{array}$$

und damit nach dem Homomorphiesatz einen Morphismus von Kettenkomplexen

$$S(K,L) \to S(|K|, |L|).$$

Es ist leicht zu sehen, daß der Morphismus injektiv ist.[35] Diese Abbildung definiert einen funktoriellen Morphismus

$$S(?,??) \to S(|?|, |??|)$$

von Funktoren

$$\tilde{\Delta}^{(2)} \to K(Ab).$$

Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, zu zeigen, dieser funktorielle Morphismus induziert für jedes simpliziale Paar (K, L) einen Isomorphismus

$$H(K.L) \to H(|K|, |L|)$$

auf der Homologie. Insbesondere hängt damit die simpliziale Homologie nur von den Realisierungen der beteiligten simplizialen Paaren ab und nicht von den simplizialen Paaren selbst.

5.1.3 Kompakte Teilmengen von Polyedern

Seien K ein Simplizialkomplex und

$$F \subseteq |K|$$

eine kompakte Teilmenge. Dann gibt es einen endlichen Teilkomplex $K' \subseteq K$ mit

$$F \subseteq |K'|.$$

Beweis. Sei zunächst $F \subseteq |K|$ eine beliebige Teilmenge.

1. Schritt: Es gibt eine diskrete[36] Teilmenge F' von F, welche mit jedem offenen Simplex von K, welches F schneidet, genau einen Punkt gemeinsam hat.

Sei I die Menge der Simplexe von K mit der Eigenschaft, daß das offene Simplex

$$|s|^o$$

einen Punkt mit F gemeinsam hat. Für jedes $s \in I$ wählen wir einen Punkt

$$p_s \in F \cap |s|^o$$

und setzen

$$F' := \{p_s\}_{s \in I}.$$

Weil |K| die disjunkte Vereinigung seiner offenen Simplexe ist, gilt für jedes $s \in K$:

$$F' \cap |s|^o = \begin{cases} \{p_s\} \text{ falls } s \in I \\ _ \quad \text{sonst} \end{cases}$$

---

[35] Links steht die freie abelschen Gruppe, die von den geordneten Simplexen von K erzeugt wird, welche keine Simplexe von L sind. Rechts steht die freie abelsche Gruppe, die von den singulären Simplexen von |K| erzeugt wird, welche keine singulären Simplexe von |L| sind. Mittels der obigen Identifikation der geordneten Simplexe mit gewissen singulären erhält man damit ineinander enthaltene Mengen von freien Erzeugendensystemen.

[36] Jeder Punkt von F' besitzt eine Umgebung, die keinen weiteren Punkt von F' enthält.

Jedes abgeschlossene Simplex |s|, s∈K, ist Vereinigung von endlich vielen offenen Simplexen, und in jedem dieser offenen Simplexe liegt höchstens ein Punkt von von F'. Also gilt

$$F' \cap |s| \text{ ist endlich für jedes } s \in K.$$

Letzteres gilt auch für jede Teilmenge von F'. Nach Definition der Topologie von |K| bedeutet dies:

F' und jede Teilmenge von F' ist abgeschlossen in |K|.

Für jeden Punkt p∈F' ist also F'-{p} abgeschlossen, also

$$U = |K| - (F'-\{p\}) \text{ offen in } |K|.$$

U ist eine offene Umgebung des Punkts p, die mit F' nur den Punkt p gemeinsam hat. Wir haben gezeigt, F' ist diskrete Teilmenge von |K|.

2. Schritt: Ist F kompakt, so gibt es einen endlichen Teilkomplex K' von K mit F⊆|K'|. Wir wählen die Menge F' ⊆ F wie im ersten Schritt. Weil F' diskret ist und F kompakt, so muß F' endlich sein.[37] Zu verschiedenen offenen Simplexen von |K|, die F schneiden, gehören verschiedene Punkte von F'. Die Zahl der offenen Simplexe von |K|, die F schneiden, ist also endlich. Diese offenen Simplexe bilden zusammen mit ihren Seiten einen endlichen Teilkomplex

$$K' \subseteq K$$

mit F ⊆ |K'|.

QED.

5.1.4 Endlichkeit und Kompaktheit von Polyedern

Ein Polyeder ist genau dann kompakt, wenn es endlich ist.

Beweis. Sei K ein Simplizialkomplex. Falls |K| kompakt ist, so liegt |K| nach 5.1.3 bereits in der Realisierung eines endlichen Teilkomplexes K' von K,

$$|K| \subseteq |K'| \subseteq |K|.$$

Es folgt |K'| = |K|, also K' = K, d.h. K ist endlich.

Ist umgekehrt K endlich, so ist |K| als Vereinigung der endlich vielen geometrischen Simplexe

$$|s| \text{ mit } s \in K,$$

welche kompakt sind, ebenfalls kompakt.

QED.

5.1.5 Teilpolyeder sind Umgebungsretrakte

Seien K ein Simplizialkomplex und

$$L \subseteq K$$

ein Teilkomplex.

Dann gibt es eine offene Menge U = U(L) der Realisierung von K mit folgenden Eigenschaften.

1. $|L| \subseteq U \subseteq |K|$.
2. |L| ist ein starker Deformationsretrakt von U.

Insbesondere ist die natürliche Einbettung

$$(|K|, |L|) \longrightarrow (|K|, U)$$

eine Homotopie-Äquivalenz[38].

Beweis. Wir setzen

$$U := \bigcup \{ \overset{\circ}{|s|} \mid s \in K \text{ und } |s| \cap |L| \neq \emptyset \}.$$

---

[37] Die Punkte von F' bilden zusammen mit der Menge F-F' eine offene Überdeckung des Raumes F. Da dieser kompakt ist, reichen endliche viele Mengen zum Überdecken aus. Also ist F' endlich.

[38] Man wende das Fünfer-Lemma auf den durch die Einbettung induzierten Komplex-Morphismus der reduzierten Homologie-Sequenzen an.

Weil |L| als disjunkte Vereingung der offenen Simplexe $\overset{\circ}{|s|}$ mit s∈L geschrieben werden kann, gilt

$$|L| \subseteq U.$$

<u>1. Schritt</u>: U ist eine offene Teilmenge von |K|.

Wir haben zu zeigen, für jedes t ∈ K ist der Durchschnitt

$$U \cap |t|$$

eine offene Teilmenge von |t|. Es gilt

$$U \cap |t| = \bigcup \{ \overset{\circ}{|s|} \mid s \in K, s \subseteq t \text{ und } |s| \cap |L| \neq \emptyset\}$$

$$= \bigcup \{ \overset{\circ}{|s|} \mid s \subseteq t \text{ und } |s| \cap |L| \neq \emptyset\}$$

$$= \bigcup \{ \overset{\circ}{|s|} \mid s \subseteq t \text{ und } |s| \cap |L| \cap |t| \neq \emptyset\}.$$

Seien $s_1,...,s_n$ die endlich vielen Seiten, die t und L gemeinsam haben. Dann ist

$$|s| \cap |L| \cap |t| = |s| \cap (|s_1| \cup ... \cup |s_n|)$$

$$= (|s| \cap |s_1|) \cup ... \cup (|s| \cap |s_n|),$$

d.h. $U \cap |t|$ ist die Vereinigung der endlich vielen Mengen

$$U_i := \bigcup \{ \overset{\circ}{|s|} \mid s \subseteq t \text{ und } |s| \cap |s_i| \neq \emptyset\}.$$

Es reicht zu zeigen, jede der Mengen U_i ist offen. Dazu wiederum reicht es zu zeigen[39],

(1) $$U_i = |t| - \bigcup \{|s'| \mid s' \subseteq t \text{ und } |s'| \cap |s_i| = \emptyset\}.$$

<u>Beweis der Inklusion ⊆</u>.

Sei x ein Punkt der linken Seite von (1). Dann gibt es ein s ⊆ t mit

$$x \in \overset{\circ}{|s|} \text{ und } |s| \cap |s_i| \neq \emptyset.$$

Wir haben zu zeigen, für jedes s' ⊆ t mit $|s'| \cap |s_i| = \emptyset$ gilt $x \notin |s'|$.

Wegen

$$|s| \cap |s_i| \neq \emptyset \text{ und } |s'| \cap |s_i| = \emptyset$$

kann |s| nicht ganz in |s'| liegen. Deshalb ist $|s| \cap |s'|$ eine echte Seite von |s|. Weil x im Innern von |s| liegt, folgt

$$x \notin |s| \cap |s'|.$$

Wegen x ∈ |s| muß dann aber

$$x \notin |s'|$$

gelten.

<u>Beweis der Inklusion ⊇</u>.

Sei x ein Punkt der rechten Seite von (1). Sei s ⊆ t die Seite von t, in deren Inneren x liegt,

---

[39] Auf der echten Seite steht das Komplement einer Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen.

$$x \in \overset{\circ}{|s|}.$$

Dann ist |s| nicht disjunkt zu $|s_i|$ (denn dann läge x im Komplement von |s|). Also gilt

$$|s| \bigcap |s_i| \neq \varnothing.$$

Dann liegt aber $\overset{\circ}{|s|}$ und damit x in der linken Seite von (1).

2. Schritt: Konstruktion der stetigen Familie

$$h_t : U \longrightarrow U,$$

welche |L'| zum starken Deformationsretrakt von U macht.

Sei $s \in K'$ ein Simplex mit $|s| \bigcap |L'| \neq \varnothing$. Wir definieren wie folgt die Einschränkung von h_t auf $|s| \bigcap U$.

Seien $e_1,...,e_a$ die Ecken, welche s und L' gemeinsam haben,

$$s \bigcap L' = \{e_1,...,e_a\} \ (\neq \varnothing),$$

und $f_1,...,f_b$ die übrigen Ecken von s. Dann sei die Einschränkung von h_t auf $|s| \bigcap U$ definiert als die Abbildung

(2) $$h_t : |s| \bigcap U \longrightarrow U$$

$$x_i e_i + \sum_{j=1}^{b} y_j f_j \quad \mapsto \quad t \bullet \Big(\sum_{i=1}^{a} x_i e_i + \sum_{j=1}^{b} y_j f_j \Big) + (1-t) \Big(\sum_{i=1}^{a} x_i e_i \Big) / \sum_{i=1}^{a} x_i \ .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert:

- die Summe der x_i ist stets ungleich Null.[40]
- die Summe der Koeffizienten des Bildes ist 1.
- jeder Punkt $(x,y) \in |s| \bigcap U$ wird bei h_t abgebildet in einen Punkt der Strecke, welche (x,y) mit einem Punkt $\Big(\sum_{i=1}^{a} x_i e_i \Big) / \sum_{i=1}^{a} x_i$ einer Seite von |s| verbindet. Insbesondere liegt der Bildpunkt wieder in |s|.
- für jedes t liegt das Bild der Abbildung in U, denn der Koeffizient von e_i,

  $$t \bullet x_i + (1-t) x_i / \sum_{i=1}^{a} x_i$$

  ist von Null verschieden (wenn x_i von Null verschieden ist).

Für t = 1 ist h_t die identische Abbildung und t = 0 liegt das Bild von h_t in |L|.

Für alle t ist die Einschränkung von h_t auf $\overset{\circ}{|s|} \bigcap |L'|$ die identische Abbildung.[41]

---

[40] Man beachte, die Punkte von $\overset{\circ}{|s|}$ sind gerade diejenigen der Gestalt $x_i e_i + \sum_{j=1}^{b} y_j f_j$ mit $x_i > 0$ und $y_j > 0$ für alle i und alle j. Die Punkte von U sind gerade solche Punkte von K, für welche mindestens eine Ecke von L mit einem Koeffizienten > 0 vorkommt.

[41] es sind dann alle y_j gleich Null und die Summe der x_i ist 1.

Ist schließlich s' eine Seite von s mit $|s'| \cap |L'| \neq \emptyset$, so ist die analog definierte Einschränkung von h_t auf $|s'| \cap U$ gerade die Einschränkung der Abbildung (2).[42] Deshalb setzen sich die auf den Durchschnitten $|s| \cap U$ definierten Abbildungen zu einer auf ganz U definierten stetigen Familie zusammen, durch welche |L| zum starken Deformationsretrakt von U wird.
QED.

Bemerkungen

(i) Sind K ein Simplizialkomplex und $L_1, L_2 \subseteq K$ zwei Teilkomplexe, so gilt

$$U(L_1 \cup L_2) = U(L_1) \cup U(L_2)$$

für die im Beweis konstruierte offene Umgebung U.

(ii) Bezeichne K', L'_1, L'_2 die baryzentrischen Unterteilungen von K, L_1 bzw. L_2, so gilt auch

$$U(L'_1 \cap L'_2) = U(L'_1) \cap U(L'_2).$$

(iii) Die Mengen U(L) verallgemeinern den Begriff des offenen Simplex-Sterns eines Punktes.

Beweis.Zu (i). Ein abgeschlossenes Simplex von K hat genau dann einen nicht-leeren Durchschnitt mit $|L_1 \cup L_2|$, wenn es mit einem der beiden Teilpolyeder $|L_1|$ bzw. $|L_2|$ einen nicht-leeren Durchschnitt hat.

Zu (ii). Wir haben zu zeigen, für jedes Simplex $s' \in K'$ gilt

(1) $$|s'| \cap |L'_1 \cap L'_2| \Leftrightarrow |s'| \cap |L'_1| \neq \emptyset \text{ und } |s'| \cap |L'_2| \neq \emptyset.$$

Die Implikation "$\Rightarrow$" besteht trivialerweise. Beweisen wir die Umkehrung. Sei also s' ein Simplex der baryzentrischen Unterteilung von K mit

$$|s'| \cap |L'_1| \neq \emptyset \text{ und } |s'| \cap |L'_2| \neq \emptyset.$$

Weil der Durchschnitt von je zwei Simplexen von K' eine gemeinsame Seite dieser Simplexe ist, gibt es zwei Ecken

$$p_1, p_2 \in s'$$

welche Ecken von L'_1 bzw. L'_2 sind, sagen wir

(2) $$p_1 \in L'_1 \text{ und } p_2 \in L'_2.$$

Wir haben zu zeigen, der Durchschnitt auf der linken Seite von (1) ist nicht leer. Zum Beweis können wir bei Bedarf das Simplex s' verkleinern (d.h. durch eine seiner Seiten ersetzen). Wir können also annehmen

$$s' = \{p_1, p_2\}$$

ist die Strecke mit den beiden Endpunkten p_1 und p_2. Weil s' das Ergebnis einer baryzentrischen Unterteilung ist, ist einer dieser Endpunkte, sagen wir p_1 das Baryzentrum eines Simplexes

$$s \in K$$

---

[42] Die Punkte von |s'| unterscheiden sich von denen von |s| nur dadurch, daß einige der y_j gleich Null sind.

während der andere Punkt p_2 das Baryzentrum einer Seite t von s ist. Insbesonder gilt dann

(3) $$p_1 \in \overset{\circ}{|s|} \text{ und } p_2 \in \overset{\circ}{|t|} \subseteq \overset{\circ}{|s|}.$$

Wegen $p_1 \in |L'_1| = |L_1|$ liegt das gesamte offene Simplex, in dessen Innern p_1 im Teilpolyeder $|L_1|$, d.h. es ist

$$\overset{\circ}{|s|} \subseteq |L_1| = |L'_1|,$$

und, weil das Teilpolyeder abgeschlossen ist,

$$|s| \subseteq |L_1| = |L'_1|,$$

Zusammen mit (3) folgt $p_2 \in |L'_1|$, und zusammen mit (2)

$$p_2 \in |L'_1 \cap L'_2|.$$

Der Durchschnitt auf der linken Seite von (1) ist somit nicht leer.
QED.

5.1.6 Die Ausschneidungseigenschaft der polyedralen Triaden

Seien K ein Simplizialkomplex und K', K" $\subseteq$ K zwei Teilkomplexe. Dann ist

$$(|K|, |K'|, |K"|)$$

eine Ausschneidungstriade.
Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen des Beweises von 5.1.5. Zum Beweis können wir die Komplexe K, K', K" durch deren baryzentrischen Unterteilungen ersetzen, also nach den Bemerkungen 5.1.5 (i) und (ii) annehmen,

(1) $$U(K' \cup K") = U(K') \cup U(K")$$

und

(2) $$U(K' \cap K") = U(K') \cap U(K").$$

Wir betrachten das kommutative Diagramm von Komplex-Morphismen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S(U(K') \cap U(K")) & \longrightarrow & SU(K') \oplus SU(K") & \longrightarrow & S\{U(K'),U(K")\} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S(|K'| \cap |K"|) & \longrightarrow & S|K'| \oplus S|K"| & \longrightarrow & S\{|K'|,|K"|\} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dessen vertikale Abbildungen induziert werden durch die natürlichen Einbettungen der Räume der unteren Zeile in die entsprechenden offenen Umgebungen. Durch Übergang zur Homologie erhalten wir ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} ... & \longrightarrow & H_q(U(K') \cap U(K")) & \longrightarrow & H_q U(K') \oplus H_q U(K") & \longrightarrow & H_q(U(K') \cup U(K")) & \longrightarrow & ... \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ ... & \longrightarrow & H_q(|K'| \cap |K"|) & \longrightarrow & H_q|K'| \oplus H_q|K"| & \longrightarrow & H_q\{|K'|,|K"|\} & \longrightarrow & ... \end{array}$$

In der ersten Zeile rechts haben wir dabei ausgenutzt, daß U(K') und U(K") offene Teilmengen von |K| sind, also (|K|, U(K'), U(K")) nach 3.8.2 Beispiel 1 eine Ausschneidungstriade ist.

Wegen (2) und nach Definition der offenen Umgebungen U(...) sind die vertikalen Abbildungen links und in der Mitte Isomorphismen. Nach dem Fünferlemma gilt das dann aber auch für die vertikale Abbildung rechts. Die natürliche Einbettung

$$i:S\{|K'|, |K''|\} \longrightarrow S(U(K')\bigcup U(K''))$$

induziert also einen Isomorphismus auf der Homologie. Zerlegen wir diese Einbettung in zwei Teileinbettungen,

$$i:S\{|K'|, |K''|\} \xrightarrow{i'} S(K'|\bigcup|K''|) \xrightarrow{j} S(U(K')\bigcup U(K''))$$

Wegen (1) und nach Definition der Mengen U(...) induziert auch die Einbettung j einen Isomorphismus auf der Homologie. Dann gilt dasselbe aber auch für i', d.h. Bedingung (iv) der Definition 3.8.2 der Ausschneidungstriade ist erfüllt für

$$(|K|, |K'|, |K''|).$$

QED.

5.1.7 Der Vergleichsatz

Sei (K,L) ein simpliziales Paar. Dann ist für jedes q der natürliche Homomorphismus

$$H(K, L) \to H(|K|, |L|)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. 1. Schritt: Reduktion auf den Fall $L = \varnothing$.
Wir betrachten die langen Homologie-Sequenzen des simplizialen Paares (K,L) und des polyedralen Paares (|K|, |L|). Die natürliche Transformation

$$S(-,-) \to S(|-|, |-|)$$

induziert dann einen Komplex-Morphismus zwischen diesen Homologie-Sequenzen, d.h. wir bekommen ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots\longrightarrow & H_q(K) & \longrightarrow & H_q(L) & \longrightarrow & H_q(K,L) & \longrightarrow & H_{q-1}(K) & \longrightarrow\ldots \\
& \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \downarrow & \\
\ldots\longrightarrow & H_q(|K|) & \longrightarrow & H_q(|L|) & \longrightarrow & H_q(|K|,|L|) & \longrightarrow & H_{q-1}(K) & \longrightarrow\ldots
\end{array}$$

Wir wollen zeigen, der Homomorphismus γ ist für jedes q bijektiv. Nach dem Fünfer-Lemma reicht es zu zeigen, die Homomorphismen α und β sind für jedes q bijektiv. Wir könnena also annehmen,

$$L = \varnothing$$

ist der leere Komplex, d.h. wir können uns auf den Fall der absoluten Homologie-Gruppen beschränken Zu zeigen ist, für jeden Simplizialkomplex K induziert die natürliche Einbettung

$$S(K) \to S(|K|)$$

einen Isomorphismus auf der Homologie.
2. Schritt: Der Fall, daß K endlich ist.
Der Beweis im endlichen Fall wird durch Induktion nach der Anzahl ℓ der Simplexe von K geführt.

Im Fall $\ell = 0$ ist die Behauptung trivial: beide Komplexe sind gleich, nämlich in jedem Grad gleich der trivialen Gruppe. Sei jetzt $\ell > 0$. Wir wählen in K ein Simplex s mit maximaler Dimension. Die Menge aller nicht-leeren Teilmengen von s ist dann ein Teilkomplex, sagen wir

$$L \subseteq K.$$

Dasselbe gilt für

$$K' := K - \{s\},$$

d.h. auch K' ist ein Komplex.

Im Fall L = K ist K ein Kegel und |K| homöomorph zu einem Standard-Simplex. Die reduzierte Homologie von S(K) und S(|K|) ist Null und

$$S(K) \to S(|K|)$$

induziert einen Isomorphismus auf der Homologie. Wir können also annehmen, L ist ein echter Teilkomplex,

$$L \subset K, L \neq K.$$

Nach Konstruktion gilt

$$K = L \cup K' \text{ und } |K| = |L| \cup |K'|$$

Wir betrachten die Mayer-Vietoris-Sequenzen von (K, L, K') und (|K|, |L|, |K'|) (vgl. 3.8.3 und 3.9.5). Der funktorielle Morphismus $S(-) \to S(|-|)$ induziert einen Komplex-Morphismus zwischen diesen Mayer-Vietoris-Sequenzen. Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \longrightarrow & H_q(L \cap K') & \longrightarrow & H_q(L) \oplus H_q(K') & \longrightarrow & H_q(K) & \longrightarrow & H_{q-1}(L \cap K') & \longrightarrow \ldots \\
& \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow & \\
\ldots \longrightarrow & H_q(|L| \cap |K'|) & \longrightarrow & H_q(|L|) \oplus H_q(|K'|) & \longrightarrow & H_q(|K|) & \longrightarrow & H_{q-1}(|L| \cap |K'|) & \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

Wir wollen zeigen, γ ist für jedes q ein Isomorphismus. Nach dem Fünfer-Lemma reicht es zu zeigen, α und β sind für jedes q Isomorphismen. Letzteres ist aber nach Induktionsvoraussetzung der Fall, da die Anzahl der Simplexe von

$$L \cap K', L \text{ und } K'$$

kleiner ist als die Anzahl ℓ der Simplexe von K. Damit ist der Beweis im Fall endlicher Simplizialkomplexe abgeschlossen.

3. Schritt: K beliebig

Sei jetzt K nicht notwendig endlich. Wir haben zu zeigen, die natürliche Einbettung

$$S(K) \to S(|K|)$$

induziert für jedes q einen Isomorphismus

$$H_q(S(K)) \to H_q(|K|).$$

Beweis der Surjektivität. Sei $\zeta \in H_q(|K|)$. Wir wählen einen Repräsentanten

$$z = g_1\sigma_1 + \ldots + g_r\sigma_r \,,\; g_i \in \mathbb{Z}$$

von ζ. Jedes Simplex σ_i hat als Bild eine kompakte Teilmenge von |K|. Nach 5.1.3 gibt es einen endlichen Teilkomplex

$$K' \subseteq K$$

derart, daß jedes der σ_i bereits ein Simplex von |K'| ist. Dann repräsentiert z ein Element

$$[z] \in H_q(|K'|).$$

Da die Behauptung für endliche Simplizialkomplexe richtig ist, gibt es einen geordneten Zyklus

$$z' \in S(K') \subseteq S(K)$$

mit

$$[z'] = [z] \text{ in } H_q(|K'|).$$

Die Bilder dieser Homologie-Klassen bei der natürlichen Abbildung[43]

$$H_q(|K'|) \to H_q(|K|)$$

sind dann aber auch gleich:

$$[z'] = [z] = \zeta \text{ in } H_q(|K|).$$

Wir haben gezeigt: jede Homologie-Klasse von $H_q(|K|)$ wird durch eine geordnete Kette von K repräsentiert, d.h. die Abbildung ist surjektiv.

Beweis der Injektivität: Sei $\zeta' \in \mathrm{Ker}(H_q(S(K)) \to H_q(|K|))$ und

$$z' \in S(K)$$

ein Repräsentant von ζ'. Dann gibt es eine singuläre Kette

---

[43] die durch die natürliche Inklusion $|K'| \to |K|$ induziert wird.

$$c = g_1\sigma_1+...+g_r\sigma_r \text{ , } g_i \in \mathbb{Z},$$

von |K| mit

$$\partial c = z'.$$

Wie oben sehen wir, daß es einen endlichen Teilkomplex

$$K' \subseteq K$$

gibt mit der Eigenschaft, daß c und z' bereits Ketten von |K'| sind. Das bedeutet, die Homologie-Klasse

$$[z'] \in H_q(K')$$

liegt im Kern der Abbildung $H_q(K') \to H_q(|K'|)$. Da letztere ein Isomorphismus ist, gilt

$$[z'] = 0 \text{ in } H_q(K'),$$

d.h. es gibt ein geordnete Kette c' von K' mit $z' = \partial c'$. Da c' auch geordnete Kette von K ist, folgt

$$\zeta' = [z'] = [\partial c'] = 0 \text{ in } H_q(K).$$

QED.

5.1.8 Vergleichssatz für geordnete simpliziale Paare

Sei (K,L) ein geordnetes simpliziales Paar.[44] Dann induziert die natürliche Transformation

$$C(-,-) \to S(|-|, |-|)$$

von Funktoren $\hat{\Delta}^{(2)} \to K(Ab)$ für jedes q einen Isomorphismus

$$H(C(K, L)) \to H(|K|, |L|).$$

Beweis. Man kann dieselben Argumente wie im Beweis von 5.1.4 benutzen. Stattdessen kann man aber auch die in den Übungen bewiesene Tatsache verwenden, daß die natürliche Transformation

$$C(- , -) \to S(- , -)$$

einen Isomorphismus

$$H(C(K, L)) \to H(K, L)$$

induziert. Zusammen mit 5.1.4 ergibt sich daraus die Behauptung.
QED.

Bemerkung

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Hinweis auf eine einfache Konsequenz von 5.1.3.

5.2 Simpliziale Mannigfaltigkeiten

5.2.1 Vorbemerkungen

Mannigfaltigkeiten (der Dimension d), genauer, topologische d-Mannigfaltigkeiten sind Hausdorff-Räume M, die eine offene Überdeckung

$$M = \cup_{iPI} U_i$$

durch Mengen U_i besitzen, die homöomorph sind zu offenen Mengen des $\mathbb{R}^d$. Zum Beispiel sind die Kugeloberfläche und die Oberfläche des Torus 2-Mannigfaltigkeiten.

Wir führen im folgenden Simplizialekomplexe ein, deren Realisierungen Mannigfaltigkeiten sind. Das Ziel in diesem Abschnitt ist es, die d-te Homologie dieser Polyeder zu berechnen (im kompaktn Fall).

---

[44] d.h. ein Objekt der Kategorie $?^{\hat{}(2)}$ von 5.1.1

5.2.2 Simpliziale Mannigfaltigkeiten

Ein d-dimensionaler Simplizialkomplex K heißt simpliziale Mannigfaltigkeit, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

1. Jede Seite von K ist Seite eines d-Simplex.

2. Jedes (d-1)-Simplex von K ist Seite von genau zwei d-Simplexen.

3. Im Fall $d > 1$ ist für jede Ecke e von K der Rand des Simplex-Sterns $(st_e K)$ eine zusammenhängende(!) simpliziale Mannigfaltigkeit (der Dimension d-1).[45]

Beim Begriff der berandeten simplizialen d-Mannigfaltigkeit oder auch simplizialen d-Mannigfaltigkeit mit Rand fordert man anstelle von 2. nur

2'. Jedes (d-1)-Simplex von K ist Seite von höchstens zwei d-Simplexen.

Die (d-1)-Simplexe, welche Seite von nur einem d-Simplex sind, und deren Teilmengen heißen Randsimplexe. Man fordert zusätzlich:

4' Im Fall $d > 1$ bilden die Randsimplexe eine (d-1)-Mannigfaltigkeit.

Im folgenden wollen wir, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, annehmen, daß alle Mannigfaltigkeiten zusammenhängend sind.

Eine 1-dimensionale simpliziale Mannigfaltigkeit heißt auch simpliziale Kurve. Eine 2-dimensionale simpliziale Mannigfaltigkeit heißt auch simpliziale Fläche.

Bemerkungen

(i) Ein Simplizialkomplex der Dimension 2, der einen Komplex der Gestalt

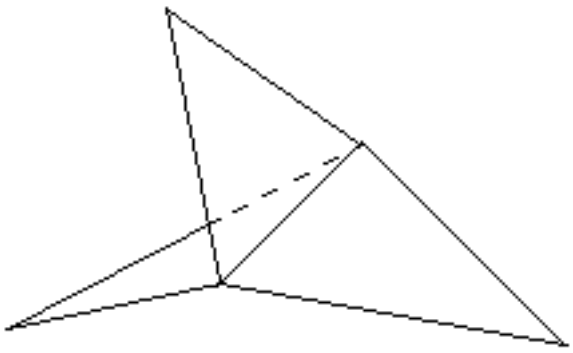

Figure 33: ein Komplex, der keine Mannigfaltigkeit ist

[45] Hier müssen wir den Zusammenhang fordern, auch wenn wir zulassen, daß Mannigfaltigkeiten nicht zusammenhängend sind.Die Realisierung sollte eigentlich sogar eine (d-1)-Sphäre sein.

als Teilkomplex enthält, ist keine Mannigfaltigkeit.

(iI) Die "richtige" Definition der simplizialen Mannigfaltigkeit K müßte eigentlich fordern, daß |K| eine Mannigfaltigkeit ist. Die oben angegebenen Bedingungen sind jedenfalls notwendige Bedingungen. Wir lassen hier offen, ob sie auch hinreichend sind. Im Flächenfalls ist dies leicht einzusehen (und es wird sich aus unseren weiteren Betrachtungen ergebenen).

5.2.3 Lemma

Seien K eine (zusammenhängende) kompakte simpliziale d-Mannigfaltigkeit,

$$J$$

die Menge der d-Simplexe von K und

$$J = J' \cup J''$$

eine disjunkte Zerlegung von J in nicht-leere Teilmengen. Dann gibt es zwei d-Simplexe

$$s' \in J' \text{ und } s'' \in J''$$

die ein (d-1)-Simplex gemeinsam haben,

$$\dim s' \cap s'' = d-1.$$

Beweis. Weil K ein Mannigfaltigkeit ist, gilt

$$|K| = F' \cup F'' \text{ mit}$$

$$F' := \cup_{s \in J'} |s|$$

$$F'' := \cup_{s \in J''} |s|.$$

Die Mengen F' und F'' sind kompakte, also abgeschlossene Teilmengen. Weil K zusammenhängend ist, kann die Vereinigung nicht disjunkt sein,

(1) $$F' \cap F'' \neq \emptyset.$$

Wir führen den weiteren Beweis durch Induktion nach d.

Der Fall d = 1 ist einfach: F' und F'' sind zwei Kantenzüge ohne gemeinsame Kante. Ihr Durchnitt muß daher aus Ecken bestehen. Jeder Punkt von $F' \cap F''$ ist daher gemeinsame Ecke einer Kante von F' und einer Kante von F''. Sei jetzt

d > 1. Da F' und F'' Vereinigungen von Simplexen |s| mit $s \in K$ sind[46], gibt es wegen (1) sogar eine Ecke $e \in K$ mit

$$e \in F' \cap F''.$$

Nach Definition 5.2.2 ist der Rand des Simplexsterns

$$\dot{(st_e K)}$$

eine (d-1)-Mannigfaltigkeit. Insbesondere ist dessen Realisierung Vereinigung von (d-1)-Simplexen von K,

$$|\dot{(st_e K)}| = \cup_{s \in I} |s| \text{ mit}$$

$$I = \{s \in K \mid e \notin s, s \cup \{e\} \in K, \dim s = d-1\}$$

Wir zerlegen die Menge I in zwei Teilmengen,

$$I = I' \cup I''$$

mit

$$I' := \{s \in I : s \cup \{e\} \in J'\} = \{s \in I : |s \cup \{e\}| \subseteq F'\}$$

$$I'' := \{s \in I : s \cup \{e\} \in J''\} = \{s \in I: |s \cup \{e\}| \subseteq F''\}.$$

Nach Wahl von e gibt es d-Simplexe $s, s' \in st_e K$ mit[47]

$$e \in |s| \subseteq F' \text{ und } e \in |s'| \subseteq F''.$$

Entfernt man aus diesen Simplexen die Ecke e, so erhält man (d-1)-Simplexe aus I' bzw. I''.Beide Mengen sind somit nicht leer,

$$I' \neq \emptyset, I'' \neq \emptyset.$$

---

[46] d.h. $F' \cap F''$ ist Vereinigung von Durchschnitten der Gestalt $|s'| \cap |s''| = |s' \cap s''|$.

[47] F' und F'' sind Vereinigungen abgeschlossener d-Simplexe und $e \in F' \bigcap F''$.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es (d-1)-Simplexe

$$\tilde{s}' \in I' \text{ und } \tilde{s}'' \in I'' \text{ mit } \dim \tilde{s}' \cap \tilde{s}'' = d-2.$$

Wir setzen

$$s' := \tilde{s}' \cup \{e\}$$

$$s'' := \tilde{s}'' \cup \{e\}$$

Dann sind s' und s'' d-Simplexe von K mit

$$\dim s' \cap s'' = \dim \tilde{s}' \cap \tilde{s}'' + 1 = d-1$$

und

$$|s'| \subseteq F' \text{ und } |s''| \subseteq F'',$$

d.h.

$$s' \in J' \text{ und } s'' \in J''.$$

Mit anderen Worten, s' und s'' sind Simplexe der gesuchten Art.
QED.

5.2.4 Die d-te Homologie kompakter d-Mannigfaltigkeiten

Sei K eine (zusammenhängende) kompakte simpliziale Mannigfaltigkeit der Dimension d. Dann gilt

$$H_d(|K|) \cong \mathbb{Z} \text{ oder } H_d(|K|) = 0.$$

Im ersten Fall heißt K orientierbar im zweiten Fall nicht orientierbar.
Beweis. Nach 5.1.4 ist K ein endliches Polyeder. Seien

$$e_1, \ldots, e_m$$

die Ecken von K. Durch diese Bezeichnung ist auf der Eckenmengen von K eine lineare Halbordnung definiert. Für jedes Simplex

$$s = \{e_{i_0}, \ldots, e_{i_q}\} \in K \text{ mit } i_0 < i_1 < \ldots < i_q$$

bezeichne

$$[s] = [e_{i_0}, \ldots, e_{i_q}] = (e_{i_0}, \ldots, e_{i_q})$$

das zugehörige orientierte Simplex.
Wir legen auf der Menge der d-Simplexe eine lineare Halbordnung "$\leq$" fest.[48]

1. Schritt: Konstruktion einer Folge von d-Simplexen $s_1,\ldots,s_l$ und einer Folge $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_l$ von "Vorzeichen", d.h. Elementen aus $\{+1,-1\}$.

Sei

s_1 das erste d-Simplex von K und $\varepsilon_1 = 1$.

Weiter sei s_2 das erste von s_1 verschiedene d-Simplex von K, welches mit s_1 eine (d-1)-Seite s gemeinsam hat. Die Zahl $\varepsilon_2 \in \{+1,-1\}$ wählen wir so, daß in den Rändern

[48] d.h. wir denken uns diese Simplexe in irgendeiner Weise durchnummeriert.

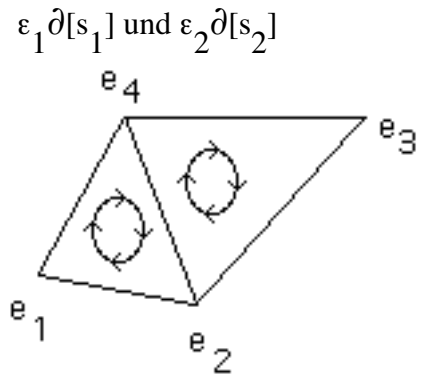

Figure 34: kohärente Orientierung der Simplexe maximaler Dimension

das die gemeinsame Seite [s] mit entgegengesetztem Vorzeichen vorkommt, d.h. [s] kommt in

$$\varepsilon_1\partial[s_1] + \varepsilon_2\partial[s_2]$$

nur mit dem Koeffizienten Null vor. Wir werden in dieser Situation sagen, $\varepsilon_1[s]_1$ und $\varepsilon_2[s_2]$ sind kohärent orientiert.

Seien jetzt $s_1,...,s_{i-1}$ bereits konstruiert. Dann sei

$$s_i$$

das erste von $s_1,...,s_{i-1}$ verschiedene d-Simplex von K, welches mit einen der $s_1,...,s_{i-1}$ eine (d-1)-Seite gemeinsam hat. Sei

$$j := j(i) \in \{1,...,i-1\}$$

die kleinste natürliche Zahl derart, daß s_j eine (d-1)-Seite s mit s_i gemeinsam hat,

(1) $$\dim s = d-1,\ s := s_i \cap s_{j(i)},\ j(i) < i.$$

Die Zahl $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$ wählen wir derart, daß $\varepsilon_i[s_i]$ und $\varepsilon_{j(i)}[s_{j(i)}]$ kohärent orientiert sind.

Da die Zahl der d-Simplexe von K endlich ist, bricht dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten ab und wir erhalten die endlichen Folgen

$$s_1,...,s_l \text{ und } \varepsilon_1,...,\varepsilon_l .$$

2. Schritt: $\{s_1,...,s_l\}$ ist die Menge aller d-Simplex von K.

Andernfalls gibt es mindestens ein d-Simplex $s \in K$, welches nicht in dieser Menge liegt. Sei

$$I \neq \emptyset$$

die Menge aller dieser d-Simplexe. Nach Lemma 5.2.3 gibt es ein s_i und ein $s \in I$ mit der Eigenschaft, daß die beiden d-Simplexe eine gemeinsame (d-1)-Seite haben,

$$\dim\ s_i \cap s = d-1.$$

Die Menge der Simplexe von I, die mit einem s_i eine (d-1)-Seite haben, ist somit nicht leer. Das erste Simplex dieser Art ist aber nach dem 1. Schritt eines der s_i im Widerspruch zur Wahl von I. Also gilt die Behauptung.

3. Schritt: Jeder d-Zyklus von S(K) ist ein ganzzahliges Vielfaches von $c := \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i[s_i]$

Sei z ein d-Zyklus von K. Weil alle ε_i gleich ± 1 sind, können wir z in der folgenden Gestalt schreiben.

$$z = \sum_{i=1}^{r} g_i \varepsilon_i [s_i] \quad , g_i \in \mathbb{Z}$$

Nach Konstruktion der Folge der s_i gibt es für jedes $i > 1$ ein $j = j(i) < i$ mit der Eigenschaft, daß

$$s := s_i \cap s_j$$

ein (d-1)-Simplex von K ist. Die Simplexe s_i und s_j sind die einzigen d-Simplexe mit der Seite s. In der Summe auf der rechten Seite von

$$0 = \partial z = \sum_{i=1}^{r} g_i \varepsilon_i \partial [s_i] \tag{2}$$

kommt der Summand [s] also nur zweimal vor, nämlich in $g_i \varepsilon_i \partial [s_i]$ und in $g_j \varepsilon_j \partial [s_j]$. Nach Wahl der ε_i kommt [s] in $\varepsilon_i \partial [s_i]$ und $\varepsilon_j \partial [s_j]$ mit entgegengesetzen Vorzeichen vor. In der Summe von (2) heben sich die zu s gehörigen Summanden genau dann weg, wenn gilt

$$g_i = g_j.$$

Wir haben gezeigt, für jedes $i > 1$ ist g_i gleich einem früheren g_j. Die g_i sind also alle gleich, d.h. es ist

$$z = g_1 \cdot c.$$

4. Schritt. Berechnung von $H_d(|K|)$.

Es gilt

$$H_d(|K|) = H_d(C(K)).$$

Da K von der Dimension d ist, gilt $C_q(K) = 0$ für $q > d$. Es folgt

$$H_d(|K|) = Z_d(C(K)).$$

Jeder d-Zyklus ist nach dem 3. Schritt von der Gestalt $g \cdot c$.

1. Fall: c ist ein Zyklus.

Dann sind auch alle ganzzahligen Vielfachen von c Zyklen und es gilt

$$H_d(|K|) = \mathbb{Z} \cdot c \cong \mathbb{Z}.$$

2. Fall: c ist kein Zyklus.

Dann ist auch $g \cdot c$ kein Zyklus, es sei denn g ist gleich Null. Damit ist

$$H_d(|K|) = 0.$$

QED.

Bemerkungen

(i) Die im Beweis konstruierte Kette c heißt, wenn sie ein Zyklus ist, fundamentaler Zyklus.

(ii) Sind alle Koeffizienten aus $\mathbb{F}_2$ anstelle von $\mathbb{Z}$, so ist c stets ein Zyklus. Deshalb gilt für jede simpliziale d-Mannigfaltigkeit K

$$H_d(|K|, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 \cdot [c] \cong \mathbb{F}_2$$

(auf Grund des obigen Beweises).

(iii) Dieselben Betrachtungen wie oben zeigen, für jede berandete d-Mannigfaltig K mit nicht-leerem Rand und jede abelsche Gruppe gilt

$$H_d(|K|, A) = 0.$$

Denn in dieser Situation ist c nie ein Zyklus: ∂c ist eine alternierende Summe der Randsimplexe der Dimension d-1 (und eventuell weiterer Summanden).

(iv) Im Fall d = 2 übersetzt sich die Bedingung, daß c ein Zyklus ist, in die Ausage, daß K keine berandete 2-Teilmannigfaltigkeit $L \subseteq K$ enthält, deren Realisierung homöomorph zum Möbius-Band ist: ein Möbius-Band läßt sich als Folge von 2-Simplexen auffassen, in welche je zwei benachbarte Simplexe kohärent orientiert sind, wobei auch das erste und das letztze Simplex eine gemeinsame Seite besitzen, die sich jedoch nicht weghebt.

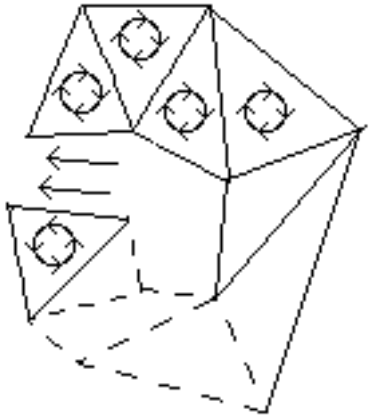

Figure 35: eine Fläche ohne fundamentalen Zyklus

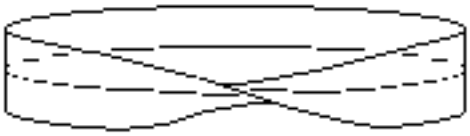

Figure 36: das Möbius-Band

Mit anderen Worten, eine Fläche ist genau dann orientierbar, wenn sie kein Möbius-Band enthält. Man beachte, bewegt man ein positiv orientiertes Koordinatensystem ("Rechtssystem") entlang der Mittellinie des Möbius-Bandes, ist es nach einer Umrundung in ein negativ orientiertes (Linkssystem") übergegangen.

5.3 Kompakte simpliziale Flächen

5.3.1 Einfach zusammenhängende simpliziale Flächen

Ein Kantenzug heiße einfach, wenn er (zusammenhängend und) geschlossen ist und keine Selbstschnitte besitzt (d.h. jede Ecke ist Seite von genau zwei Kanten).

Eine simpliziale Fläche F heißt einfach zusammenhängend, wenn sie zusammenhängend ist und für jeden einfachen Kantenzug L die Differenz |F|-|L| nicht mehr zusammenhängend ist.

5.3.2 Der Satz von Jordan

Seien F eine einfach zusammenhängende kompakte Fläche und L ein einfacher Kantenzug. Dann besteht

$$|F| - |L|$$

aus genau zwei Komponenten, d.h.

$$H_0(F) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

Beweis. Nach Definition der einfach zusammenhängenden Flächen besteht das Komplement von |L| aus mindestens zwei Komponenten:

(1) |F| - |L| hat mindestens zwei Komponenten.

Wir müssen zeigen, es gibt höchstens zwei. Der Beweis ist eine Variation des Beweises des Satzes von Jordan für dicke Sphären.

Wir durchlaufen den Kantenzug |L|, wobei wir uns immer auf der einen Seite, sagen wir der rechten Seite des Kantenzugs halten wollen. Wenn wir wieder am Ausgangpunkt ankommen, gibt es zwei Möglichkeiten.

1. Wir befinden uns auf derselben Seite des Kantenzugs.
2. Wir befinden uns auf der anderen Seite.

Zeigen wir, daß der zweite Fall nicht eintreten kann. Falls er doch eintritt, so gilt:,

(2) Jeder Punkt auf der einen Seite von |L| läßt sich durch eine Kurve, die |L| nicht schneidet, mit einem Punkt auf der anderen verbinden.

Behauptung: mit (2) gilt auch:

(3) |F| - |L| ist zusammenhängend.

Um das einzusehen, verbinden wir zwei vorgegebene Punkte von |F| durch eine Kurve. Eine solche Kurve existiert, weil |F| nach Vorsausetzung zusammenhängend ist. Wir können dabei annehmen, die beiden Punkte sind Ecken von F[49] und die Kurve ist ein Kantenzug[50]. Nach Übergang zu einer baryzentrischen Unterteilung kann man den Kantenzug so abändern, daß er mit |L| nur endlich viele Punkte gemeinsam hat. Wegen (2) kann man den Kantenzug außerdem auch so abändern, daß er |L| überhaupt nicht mehr schneidet. Wir haben damit gezeigt, es gilt (3). Das ist aber auf Grund von (1) nicht möglich. Also kann der zweite Fall nicht eintreten.

---

[49] Weil sich jeder Punkt von |F| durch eine Strecke mit einer Ecke von F verbinden läßt, die mit eventueller Ausnahme der Endpunkte aus inneren Punkten eines Simplex von F besteht.

[50] Jede (auf der kompakten Menge [0,1]) definierte Kurve zerfällt in endlich viele Teilstücke, von denen jedes (bis auf eventuelle Ausnahme der Endpunkte) ganz im Innern eines Simplex von F liegt. Die Endpunkte von jedem Teilstück kann man zunächst durch Ecken von F ersetzen. Anschließend kann man das Teilstück der Kurve selbst durch einen Kantenzug ersetzen.

Es gilt also 1. Das bedeutet aber, |L| ist die innere Kreislinie einer dicken 1-Sphäre von |F|, d.h. es gibt einen Homöomorphismus

$$h: (-\varepsilon, +\varepsilon)\times S^1 \xrightarrow{\approx} U \subseteq |F| \text{ mit } h(0\times S^1) = |L|.$$

Wir betrachten reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz zur Überdeckung von

$$|F| = U \bigcup V$$

durch die beiden offenen Teilmengen U und

$$V := |F| - |L|.$$

Wir erhalten die Exaktheit der Sequenz

$$...\longrightarrow \widetilde{H}_1(|F|) \longrightarrow \widetilde{H}_0(U \bigcap V) \longrightarrow \widetilde{H}_0(U)\oplus\widetilde{H}_0(V) \longrightarrow \widetilde{H}_0(|F|) \longrightarrow 0$$

Nun besitzen |F| und $U = (-\varepsilon, +\varepsilon)\times S^1$ jeweils nur eine Komponente und

$$U \bigcap V = U\text{-}|L| \approx (-\varepsilon,0)\times S^1 \bigcup (0,+\varepsilon)\times S^1$$

besteht aus zwei Komponenten. Die Sequenz nimmt damit die folgende Gestalt an:

$$...\longrightarrow \widetilde{H}_1(|F|) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{H}_0(V) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

Für $\widetilde{H}_0(V)$ gibt es damit nur die beiden folgenden Möglichkeiten:

$$\widetilde{H}_0(V) = 0 \text{ oder } \widetilde{H}_0(V) = \mathbb{Z}.$$

Im ersten Fall wäre V = |F| - |L| zusammenhängend im Widerpruch zu (1). Also besteht V aus zwei Komponenten wie behauptet.
QED.
Bemerkungen

(i) Der obige Beweis zeigt, einfach zusammenhängende Flächen enthalten keinen Teilkomplex, der homöomorph zu einem Möbiusband ist.

(ii) Der Beweis zeigt, der Kantenzug |L| teilt die ihn umgebende dicke Kreislinie in zwei Teile, die verschiedenen Komponenten angehören (kein Punkt des einen läßt sich durch eine Kurve in |F| - |L| mit einem Punkt des anderen verbinden). Insbesondere gilt

$$|L| \subseteq \overline{C}' \bigcap \overline{C}'',$$

wenn C' und C" die beiden Komponenten von |F| - |L|. Genauer gilt sogar die folgende Aussage.

(iii) Für jeden einfachen Kantenzug L einer einfach zusammenhängenden kompakten Fläche F gilt

$$|L| = \overline{C}' \bigcap \overline{C}'',$$

wenn C' und C" die beiden Komponenten von |F| - |L| bezeichnen.

Beweis von (ii). Wir haben noch zu zeigen, die rechte Seite ist in der linken enthalten. Wir bemerken zunächst,

(1) $$|F| - |L| = C' \bigcup C''$$

ist eine Zerlegung in zwei disjunkte offene Teilmengen[51]. Insbesondere sind C' und C" offen in der Menge (1). Da diese offen in |F| sind C' und C" offene Teilmengen von |F|, d.h.

(2) |F|-C' und |F|-C" sind abgeschlossen in |F|.

Sei jetzt x ein Punkt aus dem Durchschnitt auf der rechten Seite der zu beweisenden Identität von (ii). Dann enthält jede Umgebung von x Punkte von C' und Punkte von C", also auch Punkte von |F| - C' und |F| - C". Mit anderen Worten, x ist ein Berührungspunkt dieser beiden Mengen. Wegen (2) folgt

$$x \in (|F|\text{-}C') \bigcap (|F|\text{-}C'') = |F| - (C' \bigcup C'') = |F| - (|F| - |L|) = |L|.$$

---

[51] Jede der beiden Komponenten ist Vereinigung von offenen Simplexen.

QED.

5.3.3 Die Komplemente eines einfachen Kantenzugs

Seien F eine einfach zusammenhängende kompakte simpliziale Fläche,

$$L \subseteq F$$

ein einfacher Kantenzug und

$$C', C'' \subseteq |F|$$

die beiden Zusammenhangskomponenten von $|K| - |L|$. Dann sind C' und C" homöomorph zur offenen Kreisscheibe,

$$C' \approx C'' \approx \overset{\circ}{B}{}^1.$$

Beweis. Es gilt

$$|F| - |L| = C' \bigcup C'' \text{ und } C' \bigcap C'' = \varnothing.$$

Jedes offene Simplex von F, welches disjunkt ist zu |L|, liegt ganz in einer der beiden Komponenten C' bzw. C". Die beiden Komponenten sind deshalb beide Vereinigungen von offenen Simplexen von F. Die Abschließungen

$$\overline{C}' \text{ und } \overline{C}''$$

sind deshalb Vereinigungen von jeweils endlich vielen abgeschlossenen Dreiecken von F. Nach Bemerkung 5.3.2 (ii) gilt

$$|L| = \overline{C}' \bigcap \overline{C}''.$$

Es reicht, die Behauptung für C' zu beweisen. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Anzahl der Dreiecke, aus denen $\overline{C}'$ besteht. Sei

$$n := \text{Anzahl der abgeschlossenen Dreiecke von F, die in } \overline{C}' \text{ liegen.}$$

Im Fall n = 1 ist die Behauptung trivial, denn jedes abgeschlossene Dreieck ist homöomorph zu einer Kreisscheibe. Sei jetzt

$$n > 1.$$

Wegen $|L| \subseteq \overline{C}'$ gibt es ein Dreieck Δ von C', welches mit |L| eine Seite gemeinsam hat. Wir ändern L so ab, daß dieses Dreieck Δ nicht mehr zu C' sondern zu C" gehört und erhalten so einen neuen Kantenzur L_1. Genauer, wir setzen

$$C_1 := \overline{C}' - \overset{\circ}{\Delta}$$
$$L_1 := \partial C_1$$

Nach Konstruktion ist das Innere von C_1 eine Komponente des Komplements des Kantenzugs L_1, und die Anzahl der Dreiecke, aus denen C_1 besteht ist kleiner als n.

Fall 1: L_1 hat keine Selbstschnitte.

Nach Induktionsvoraussetzung ist C_1 homöomorph zur Kreisscheibe. Die Komponente $\overline{C}'$ entsteht aus der Kreisscheibe C_1 durch Ankleben eines Dreiecks entlang einer oder zwei Seiten. Dann ist aber auch C' homöomorph zur Kreisscheibe.

∂Fall 2: L_1 hat einen Selbstschnitt $x \in |L_1|$.

Es gibt also eine Ecke x von L_1 ,welche Seite von vier Kanten ist. Von diesen Seiten gehören zwei Kanten zum ursprünglichen Kantenzug L, die beiden anderen gehören nicht dazu, müssen dann aber Seiten von Δ sein. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn gilt:

(*) Δ hat genau eine Kante und die gegenüberliegende Ecke mit L gemeinsam.

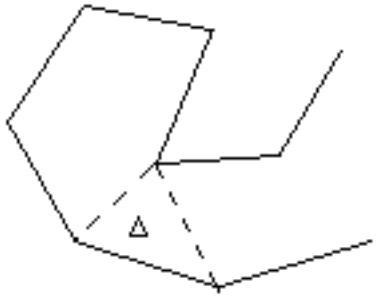

Figure 37: Zerfallen des Kantenzugs in zwei Komponenten

In dieser Situation gibt es wieder zwei Möglichkeiten:
Fall 2.1: Das Komplement $|L_1| - \{x\}$ ist nicht zusammenhängend.

Dann ist L_1 Vereinigung von zwei zusammenhängenden geschlossenen Kantenzügen ohne Selbstschnitte

$$L_1 = L'_1 \cup L''_1$$

mit nur einem gemeinsamen Punkt x. Die Menge C_1 zerfällt in zwei Teilmengen

$$C_1 = C'_1 \bigcup C''_1 \text{ mit } \partial C'_1 = L'_1 \text{ und } \partial C''_1 = L''_1.$$

Jede der Mengen C'_1 und C''_1 besteht aus weniger als n Dreiecken, ist somit nach Induktionsvoraussetzung homöomoprh zur Kreisscheibe. Außerdem gilt

$$C' \text{ entsteht durch Zusammenkleben } C_1', \mathring{\Delta} \text{ und } C_1''$$

Genauer, C' entsteht durch Verkleben der Kreisscheibe C_1' mit der Kreisscheibe $\mathring{\Delta}$ entlang eines gemeinsamen auf den Rändern liegenden Intervalls und anschließendemk Verkleben mit der Kreisscheibe C_1'' auch entlang eines solchen Intervalls. Nach jedem Verkleben erhalten wir wieder eine Kreisscheibe (bis auf Homöomorphie).
Fall 2.2: Das Komplement $|L_1| - \{x\}$ ist zusammenhängend

Dann ist L_1 Rand von C_1 und schneidet sich im Punkt x mit sich selbst.

Entfernt man aus C_1 die (offenen) Simplexe, die x als Ecke besitzen, so erhält man die Realisierung eines Teilkomplexes C_2, dessen Rand ein einfacher Kantenzug ist[52]. Nach Induktionsvoraussezung ist $|C_2|$ homöomorph zur Kreisscheibe. Die Komponente C' entsteht bis auf Homöomorphie durch Verkleben dieser Kreisscheibe mit sich selbst

[52] Man kann die Dreiecke nacheinander so entfernen, daß Bedingung (*) in jedem Schritt verletzt ist, also keine neuen Selbstschnitte auftreten.

entlang zweier Randintervalle. Für das Ergebniss dieses Verklebens gibt es zwei Möglichkeiten:

1) $C' \approx S^1 \times [0,1]$
2) C' ist homöomorph zu einem Möbius-Band.

Im ersten Fall ist der Rand $|L|$ von $|C'|$ nicht zusammenhängend, d.h. L ist kein einfacher Kantenzug.
Der zweite Fall ist nicht möglich nach Bemerkung 5.3.2 (i). Wir haben damit gezeigt, der Fall 2.2 kann nicht eintreten.
QED.

5.3.4 Die Struktur der einfach zusammenhängenden Flächen

Sei F eine einfach zusammenhängende kompakte simpliziale Fläche. Dann dann ist die Realisierung von F homöomorph zur Kugeloberfläche,

$$|F| \cong S^2.$$

Beweis. Nach dem 5.3.3 entsteht $|F|$ durch Verkleben von zwei Kreisscheiben entlang ihres gemeinsamen Randes, d.h. $|F|$ ist homöomorph zu einer Kugeloberfläche.
QED.

5.3.5 Kompakte Flächen die nicht einfach zusammenhängend sind

Sei F eine zusammenhängende kompakte simpliziale Fläche, welche nicht einfach zusammenhängend ist. Dann gilt eine der beiden folgenden Aussagen.

(i) Eine interierte baryzentrische Unterteilung enthält einen Teilkomplex

$$L \subseteq F,$$

desssen Realisierung homöomorph ist zu einem (kompakten) Möbius-Band M.

$|L| \cong M$

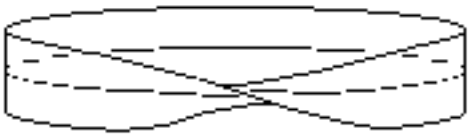

Figure 38: das Möbius-Band

(ii) Eine interierte baryzentrische Unterteilen enthält einen Teilkomplex

$$L \subseteq K,$$

desssen Realisierung homöomorph zu einer Torus-Oberfläche ist, aus der eine offene Kreisscheibe entfernt wurde, d.h. zu einer Hantel.

$|L| \cong T_*$

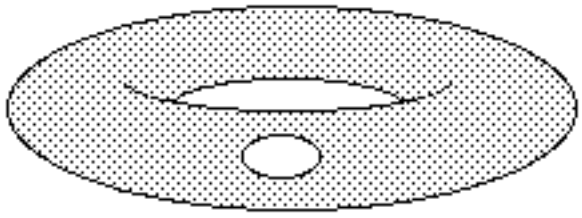

Figure 39: eine Hantel

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es einen zusammenhängenden geschlossenen Kantenzug L ohne Selbstschnittte mit der Eigenschaft, daß

$$|F| - |L|$$

zusammenhängend ist. Beginnend mit einer Ecke

$$e \in L$$

durchlaufen wir die Kurve $|L|$, wobei wir uns vorstellen, daß wir immer links neben der Kurve herlaufen. Wenn wir wieder bei der Ecke ankommen, gibt es zwei Möglichkeiten.

1. Wir befinden uns auf derselben Seite der Kurve |L|.
2. Wir befinden uns auf der anderen Seite der Kurve |L|.

Im zweiten Fall enthält eine iterierte baryzentrische Unterteilung von F einen Teilkomplex welcher homöomorph ist zu einem Möbius-Band, d.h. es tritt der in (i) beschriebene Fall ein.

Nehmen wir jetzt an, der zweite Fall tritt nicht ein, d.h. keine iterierte baryzentrische Unterteilung von K enthält einen Teilkomplex, desssen Realisierung homöomorph ist zu einem Möbius-Band. Statt eines Möbiusbandes liefert die obige Konstruktion einen Streifen, der homöomorph ist zu $[-1, +1]\times S^1$,

Figure 40: eine dicke Kreislinie

Wir betrachten eine von e ausgehende Kante ℓ von C und die beiden Dreiecke Δ' und Δ" von K mit der gemeinsamen Kante ℓ,

$$e \in \ell = \Delta' \cap \Delta'' \subseteq |C|.$$

Wir stellen uns vor, Δ' liegt auf der linken Seite der Kurve |C| und Δ" auf der rechten. Seien

$$b' := b(\Delta') \text{ , } b'' := b(\Delta'')$$

die Baryzentren dieser Dreiecke. Weil |F| - |C| zusammenhängend ist, gibt es einen zusammenhängenden Kantenzug der baryzentrischen Unterteilung L' von F, welcher b' mit b" verbindet und ganz in |F| - |L| verläuft. Wir schließen diesen Kantenzug indem wir b' und b" verbinden und wiederholen die obige Konstruktion mit diesem neuen Kantenzug (indem wir "links" neben diesem Kantenzug entlanglaufen). Erneut erhalten wir anstelle eines Möbiusbandes einen zu $[-1, +1]\times S^1$ homöomorphen Streifen:

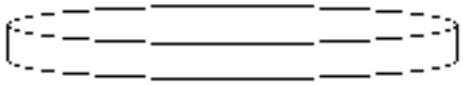

Figure 41: eine weitere dicke Kreislinie

Durch Vereinigung der beiden Streifen erhalten wir einen Unterraum der homöomorph ist zu einem Raum der folgenden Gestalt:

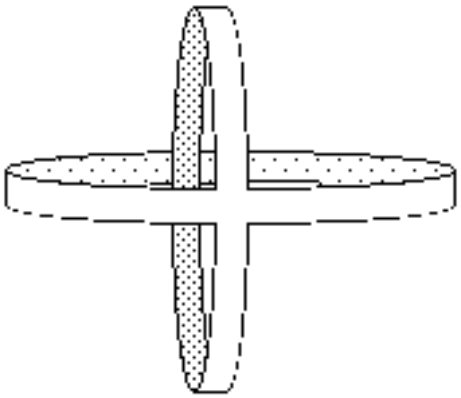

Figure 42: zwei verklebte dicke Kreislinien

Dieser Unterraum ist homöomorph zu Räumen der folgenden Gestalt:

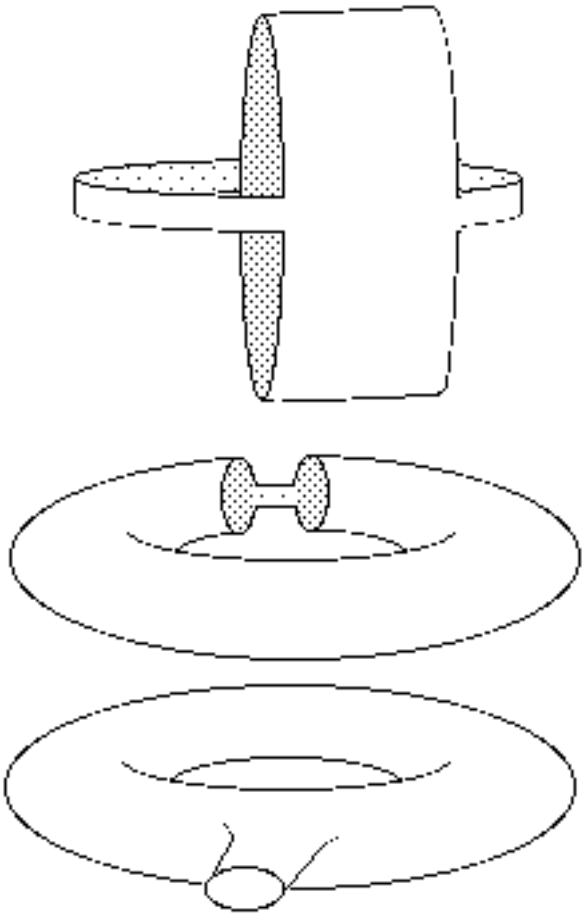

Figure 43: Deformation zweier verklebter dicker Kreislinien

d.h. er ist homöomorph zu einer Hantel

QED.

Bemerkungen

(i) Für das Möbius-Band M gilt

$$\tilde{H}_1(M) = \tilde{H}(M) = \mathbb{Z},$$

denn M enthält eine Kreislinie (in der "Mitte"), welche starker Deformationsretrakt von M ist.

(ii) Für die Handel T_* gilt

$$H_0(T_*) \cong \mathbb{Z}\ ,\ H_1(T_*) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},\ H_2(T_*) = 0$$

Beweis von (ii). Da T_* zusammenhängend ist, gilt

$$H_0(T_*) \cong \mathbb{Z},$$

und da T_* eine berandete 2-Mannigfaltigkeit ist mit nicht-leerem Rand, folgt

$$H_2(T_*) = 0.$$

Beweisen wir die mittlere Isomorphie-Aussage. Nach dem Aussschneidungssatz gilt

$$H_q(T_*, \partial T_*) = H_q(T, \Delta) =^{53} \tilde{H}_q(T),$$

wenn T eine Torusoberfläche und Δ eine darauf liegende offene Kreisscheibe bezeichnet. Insbesondere ist

$$H_2(T_*, \partial T_*) =^{54} \mathbb{Z} \text{ und } H_1(T_*, \partial T_*) =^{55} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

Die relative Homologie-Sequenz des Paares $(T_*, \partial T_*)$ hat die Gestalt

$$H_2(T_*, \partial T_*) \xrightarrow{\alpha} H_1(\partial T_*) \xrightarrow{\beta} H_1(T_*) \xrightarrow{\gamma} H_1(T_*, \partial T_*) \xrightarrow{\delta} H_0(\partial T_*) \xrightarrow{\varepsilon} H_0(T_*)$$

Dabei ist ε die identische Abbildung $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$,[56] d.h.

$$\delta = 0.$$

Der verbleibende Teil der Sequenz hat damit die Gestalt

$$(\mathbb{Z} =)\ H_2(T_*, \partial T_*) \xrightarrow{\alpha} H_1(\partial T_*) \xrightarrow{\beta} H_1(T_*) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to 0.$$

Nun ist ∂T_* homöomorph zur Kreislinie, die erste Homologie wird deshalb von der Klasse des Fundatmentalzyklus erzeugt. Dieser liegt aber im Bild von α (man betrachte die Summe der Dreiecke von T_*). Also ist α surjektiv, also β identisch Null d.h. es gilt

$$H_1(T_*) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

QED.

5.3.6 Adjunktion von Möbiusbändern und Handeln

Sei F eine simpliziale Fläche. Wir entfernen aus |F| eine offene Kreisscheibe und kleben entlang der Rand-Linie dafür ein Möbius-Band oder eine Handel ein. Von der entsttehenden simplizialen Fläche sagt man, sie sei aus F durch Adjunktion eines Mobiusbandes bzw. einer Hantel entstanden.

Bemerkungen

(i) Bei Adjunktion eines Möbiusbandes geht jede Fläche über in eine nicht-orientierbare.[57]

(ii) Bei Adjunktion einer Handel geht eine orientierbare Fläche in eine orientierbare über.[58]

(iii) Bei Adjunktion einer Handel geht eine nicht orientierbare Fläche über in eine nicht-orientierbare.[59]

---

[53] Man verwende die reduzierte Homologie-Sequenz des Paares (T, Δ) und die Kontrahierbarkeit der Kreisscheibe Δ.

[54] Der Torus ist orientierbar, bzw. es ist $T = S^1 \times S^1$ und man kann 4.2.8(iii) anwenden.

[55] Man berechne $H_1(T) = H_1(S^1 \times S^1)$ mit Hilfe von 4.2.8(iii).

[56] beide Räume sind zusammenhängend, jeder Punkt ist homolog zu jedem.

[57] Denn die neue Mannigfaltigkeit enthält ein Möbius-Band.

[58] Man betrachte die fundamentalen Zyklen der Ausgangsmannigfaltigkeit und des Torus. Sie liefern durch Verheften einen fundamentalen Zyklus der neuen Mannigfaltigkeit.

5.3.7 Klassifikation der kompakten simplizialen Flächen

Sei F eine kompakte simpliziale Fläche.

(i) |F| enststeht aus der Kugeloberfläche durch Adjuktion von endlich vielen Möbius-Bändern und endlich vielen Hanteln.

(ii) Ist F orientierbar, so entsteht |F| aus der Kugeloberfläche durch Adjunktion von endlich vielen Hanteln.

Beweis. Falls F einfach zusammenhängend ist, so ist |F| eine Kugeloberfläche und die Aussage ist trivial. Sei jetzt F nicht einfach zusammenhängend. Dann enthält |F| ein Möbius-Band oder eine Handel:

$$|M| \subset |F| \text{ oder } |T_*| \subset |F|.$$

Wir schreiben $Y := M$ bzw. $Y := T_*$ und

$$|F| = |Y| \cup |F_*|,$$

wobei $F_* \subset F$ der Teilkomplex ist, der durch das Entfernen der Dreiecke von Y entsteht.

Dies ist eine Zerlegung in zwei Teilpolyeder, mit demselben Rand (welcher homöomorph zu einer Kreislinie ist). Weiter entstehe

F'

aus F_* durch Verkleben entlang der Kreislinie mit einer Kreisscheibe. Mit anderen Worten,

F entsteht aus F' durch Adjunktion eines Möbius-Bandes bzw. einer Handel.

Wir haben noch zu zeigen, durch Wiederholung der obigen Konstruktion erhält man nach endlich vielen Schritten eine einfach zusammenhängende simpliziale Fläche, d.h. der Prozeß bricht ab. Dazu reicht es zu zeigen,

$$\dim \tilde{H}_1(F, \mathbb{F}_2) > \dim \tilde{H}_1(F', \mathbb{F}_2)$$

(da diese Dimensionen für kompakte simpliziale Flächen endlich und immer ≥ 0 sind).

Wir betrachten die reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz der polyedralen Triade (F, Y, F_*):

$$\tilde{H}_2(Y)\oplus\tilde{H}_2(F_*) \xrightarrow{\alpha} \tilde{H}_2(F) \xrightarrow{\beta} \tilde{H}_1(Y\cap F_*) \xrightarrow{\gamma} \tilde{H}_1(Y)\oplus\tilde{H}_1(F_*) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(F)$$
$$\xrightarrow{\varepsilon} \tilde{H}_0(Y\cap F_*) \xrightarrow{\zeta} \tilde{H}_0(Y)\oplus\tilde{H}_0(F_*) \xrightarrow{\eta} \tilde{H}_0(F) \to 0$$

Der untere Teil der Sequenz hat die Gestalt

$$\xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{\zeta} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z} \to 0$$

Also ist ζ ungleich Null, also injektiv, also ist ε gleich Null, also δ surjektiv. Die direkte Summe, auf welcher α definiert ist, ist Null[60], also ist α gleich Null, also β injektiv. Weiter ist $Y\cap Z$ eine Kreislinie, d.h.

$$\tilde{H}_1(Y\cap F_*) = \mathbb{Z}$$

wobei $1\in\mathbb{Z}$ gerade dem fundamentalen Zyklus entspricht.Wir erhalten die Exaktheit von

$$0\to\tilde{H}_2(F) \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\gamma} \tilde{H}_1(Y)\oplus\tilde{H}_1(F_*) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(F)\to 0. \quad (1)$$

1. Fall: F enthält kein Möbius-Band (d.h. $Y = T_*$ ist eine Hantel).

Dann ist F orientierbar, d.h.

---

[59] Man betrachte ein Möbius-Band der Ausgangsmannigfaltigkeit und benutze die Orientierbarkeit des Torus um ein Möbiusband in der neuen Mannigfaltigkeit zu konstruieren.

[60] weil Y und Z berandete Mannigfaltigkeiten sind : “es gibt keine 2-Zyklen”.

$$\tilde{H}_2(F) = \mathbb{Z}.$$

Die exakte Sequenz (1) hat die Gestalt

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\tilde{H}_1(F_*) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(F) \to 0.$$

Die beiden Komponenten des Bildes von $1\in\mathbb{Z}$ bei γ ensprechen gerade der gemeinsamen Randlinie von Y und Z. In der erstem Homlogie von T_* und F_* repräsentiert diese die Null (sie ist im wesentlichen gerade gleich ∂T_* bzw. ∂F_*). Insbesondere ist γ identisch Null und damit δ ein Isomorphismus,

$$\tilde{H}_1(F) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\tilde{H}_1(F_*).$$

Analog erhalten wir für die Homologie mit Koeffizienten aus $\mathbb{F}_2$:

$$\dim \tilde{H}_1(F, \mathbb{F}_2) \cong \dim \tilde{H}_1(F_*, \mathbb{F}_2) + 2.$$

Ersetzt man in den obigen Betrachtungen Y durch eine Kreisscheibe (und nutzt die Tatsache, daß die reduzierte Homologie letzterer trivial ist) so erhält man in analoger Weise

$$\tilde{H}_1(F_*) \cong \tilde{H}_1(F').$$

Es folgt

$$\dim \tilde{H}_1(F, \mathbb{F}_2) = \dim \tilde{H}_1(F', \mathbb{F}_2) + 2 > \dim \tilde{H}_1(F', \mathbb{F}_2).$$

2. Fall: Y = M ist ein Möbius-Band.
Die Fläche F ist nicht orientierbar, d.h.

$$\tilde{H}_2(F) = 0,$$

und die Sequenz (1) bekommt die Gestalt

(2) $$0 \xrightarrow{\beta} (\mathbb{Z} =)\ \tilde{H}_1(M\cap F_*) \xrightarrow{\gamma} \tilde{H}_1(M)\oplus\tilde{H}_1(F_*) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(F) \to 0.$$

Diese Sequenz ist weniger einfach zu analysieren als im ersten Fall. Wir gehen deshalb zur Homologie mit Koeffizienten aus $\mathbb{F}_2$ über. Es gilt

$$\tilde{H}_2(X, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2.$$

Die zu (1) analoge exakte Sequenz für die Homologie mit Koeffizienten aus $\mathbb{F}_2$ hat die Gestalt

$$0 \to \tilde{H}_2(F,\mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\gamma} \tilde{H}_1(M,\mathbb{F}_2)\oplus\tilde{H}_1(F_*,\mathbb{F}_2) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(F, \mathbb{F}_2) \to 0.$$

also die Gestalt

$$0 \to \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\beta} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{F}_2\oplus\tilde{H}_1(F_*,\mathbb{F}_2) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(F,\mathbb{F}_2) \to 0.$$

Da sie exakt ist, ist die alternierende Summe der Dimensionen der auftretenden Räume gleich Null, d.h.

$$\dim \tilde{H}_1(F,\mathbb{F}_2) = \tilde{H}_1(F_*,\mathbb{F}_2) + 1.$$

Ersetzt man in allen Betrachtungen Y durch eine Kreisscheibe (und nutzt die Tatsache, daß die reduzierte Homologie letzterer trivial ist) so erhält man in analoger Weise

$$\tilde{H}_1(F',\mathbb{F}_2) \cong \tilde{H}_1(F_*,\mathbb{F}_2)$$

zusammen also

$$\dim \tilde{H}_1(F,\mathbb{F}_2) = \tilde{H}_1(F',\mathbb{F}_2) + 1.$$

QED.

Bemerkungen

(i) Aus dem Beweis ergibt sich, für jede orientierbare kompakte simpliziale Fläche ist

$$\dim \tilde{H}_1(F, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2^{2g} \text{ und } \dim \tilde{H}_1(F) = \mathbb{Z}^{2g}.$$

Dabei ist g die Anzahl der Handeln, die man zur 2-Sphäre adjungieren muß um F zu erhalten. Diese Zahl heißt Geschlecht von F.

(ii) Für jede nicht-orientierbare kompakte simpliziale Fläche gilt

$$H_1(F) \neq 0.$$

Beweis von (ii). Im Fall einer nicht-orientierten Fläche F haben wir wie im obigen Beweis eine exakte Sequenz (2),

$$0 \xrightarrow{\beta} (\mathbb{Z} =)\ \tilde{H}_1(M \cap F_*) \xrightarrow{\gamma} \tilde{H}_1(M) \oplus \tilde{H}_1(F_*) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(F) \to 0$$

mit

$$F = M \cup F_* \text{ und } S^1 = M \cap F_* .$$

Es reicht zu zeigen, $\delta \neq 0$. Dazu reicht es zu zeigen,

γ ist nicht surjektiv.

Zum Beweis schreiben wir

$$\gamma(1) = (u, v)$$

für das Bild des Fundamentalzyklus von $M \cap F_*$ bei γ. Nun ist $M \bigcap F_*$ gerade der gemeinsame Rand von M und F_*. Das Bild des Fundamentalzyklus bei γ in den beiden direkten Summanden wird also jeweils durch den Rand von M und F_* repräsentiert. Das bedeutet jedoch nicht, daß die zugehörige Homologie-Klasse Null ist: es gibt keine $\mathbb{Z}$-Linearkombination der Dreiecke von M derart, daß je zwei Dreiecke mit gemeinsamer Kante kohärent orientiert sind.

Um die Situation besser zu verstehen, zerlegen wir das Möbius-Band

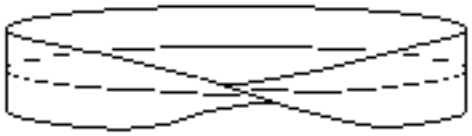

Figure 44: Möbius-Band

entlang der Mittellinie g und erhalten eine berandete Mannigfaltigkeit M', deren Rand aus zwei Kreislinien besteht.

Figure 45: geteiltes Möbius-Band

Diese Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu einem Zylinder

$$S^1 \times [0, 1]$$

über einer Kreislinie, wobei die eine Randkomponente gerade dem Rand von M und die andere der Mittellinie von M entspricht. Genauer entspricht diese zweite

Randkomponente dem Doppelten der Mittellinie. Die obere und die untere Kreislinie des Zylinders sind aber homolog: ihre Differenz ist gerade der Rand des Zylinders. Für das Möbiusband bedeutes dies: der Rand des Möbiusbandes ist homolog zum doppelten der Mittellinie:

$$u = [\partial M] = 2[g] \text{ in } \tilde{H}_1(M) \cong \mathbb{Z}$$

Die Mittellinie des Möbius-Bands repräsentiert aber gerade den einen Erzeuger der ersten Homologie. Identifiziert man letztere mit $\mathbb{Z}$, so bekommt $\gamma(1)$ die Gestalt

$$\gamma(1) = (2, v).$$

Es folgt

$$\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq 2\mathbb{Z} \oplus \tilde{H}_1(F_*)$$

Das Bild von γ ist eine echte Teilmenge von $\tilde{H}_1(M) \oplus \tilde{H}_1(F_*)$, d.h. γ ist nicht surjektiv.

QED.

5.3.8 Homologische Charakterisierung der einfach zusammenhängenden Flächen

Seien F ein kompakte simpliziale Fläche. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) F ist einfach zusammenhängend.

(ii) $H_1(F) = 0$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Nach 5.3.3 ist $|F|$ homöomorph zu S^2. Also gilt

$$H_1(F) = H_1(|F|) = H_1(S^2) = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Angenommen F ist nicht einfach zusammenhängend. Nach Bemerkung 5.3.8(ii) ist F zumindest orientierbar. Deshalb gibt es eine iterierte baryzentrische Unterteilung F' von F und einen Teilkomplex

$$L' \subseteq F'$$

mit der Eigenschaft, daß $|L'|$ homomorph ist zu einer Handel,

$$|L'| \cong T_* .$$

Sei

$$L'' \subseteq K'$$

der Teilkomplex, dessen Dreiecke gerade die Dreiecke von F' sind, die nicht zu L' gehören. Dann gilt

$$F' = L' \cup L''$$

und wir haben eine Mayer-Vietoris-Sequenz

$$H_2(F') \xrightarrow{\alpha} H_1(L' \cap L'') \xrightarrow{\beta} H_1(L') \oplus H_1(L'') \xrightarrow{\gamma} H_1(F') \ (= 0).$$

Da die Realisierung von $L' \cap L''$ gerade S^1 ist, gilt $H_1(L' \cap L'') = \mathbb{Z}$. Nach Konstruktion ist $|L' \cap L''|$ die Kreislinie. Die erste Homologie wird also vom Fundamentalzyklus erzeugt.

Nach 3.8.5 ist α gerade die Zusammensetzung

(1) $$H_2(F') \to H_2(F', L'') \cong H_2(L', L' \cap L'') \to H_1(L' \cap L'')$$

Dabei kommt der Isomorphismus in der Mitte vom Ausschneidungssatz, d.h. von der Inklusion

$$(L', L' \cap L'') \to (F', L'').$$

Verfolgen wir das Bild des Fundamentalzyklus von F'. In H_2 (F', L") wird dieses Bild repräsentiert von einer Summe orientierter Simplexe von L'. dasselbe gilt für das Bild in H_1(L',L'∩L").

Der rechte Homomorphismus von (1) ist der Zusammenhangshomomorphismus zum Paar (L', L'∩L"). Das Bild eines Erzeugenden Elements von H_2(F') bei α wird deshalb repräsentiert durch den Fundamentalzyklus des Randes L'∩L" von L', ist also ein erzeugendes Element von H_1(L'∩L"), Wir haben damit gezeigt, α ist surjektiv. Dann ist β aber gleich Null.

Wir erhalten die Exaktheit von

$$0 \to H_1(L') \oplus H_1(L'') \xrightarrow{\gamma} 0.$$

Damit ist

$$H_1(L') = H_1(L'') = 0.$$

Das steht aber im Widerspruch zu

$$|L'| \cong T_* .$$

QED.

Anhang

1. Untergruppen freier abelscher Gruppen

1.1 Wohlgeordnete Mengen

Eine geordnete Menge heißt wohlgeordnet, wenn jede ihrer Teilmengen ein kleinstes Element m hat (d.h. m ist vergleichbar mit allen anderen Elementen und = mit diesen).

1.2 Satz von Zermelo

Jede Menge kann wohlgeordnet werden.
Die Aussage ist zum Zornschen Lemma und zum Auswahlaxiom der Mengenlehre äquivalent. Einen Beweis kann man finden auf den Seiten 13-16 des Buches von A.G.Kurosˇ: Vorlesungen über allgemeine Algebra, Teubner, Leipzig 1964.

1.3 Satz über die Untergruppen freier abelscher Gruppen

Jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist frei.
Beweis. Sei

$$F := \oplus_{i \in I} \mathbb{Z}_i$$

(mit $\mathbb{Z}_i = \mathbb{Z}$ für jedes i) eine freie abelsche Gruppe und sei

$$U \subseteq F$$

ein Untergruppe. Wir haben zu zeigen, U ist frei. Zum Beweis können wir annehmen, daß I eine wohlgeordnete Menge ist. Wir setzen

$$U_i := U \cap \oplus_{j<i} \mathbb{Z}_j = \{(z_j)_{j \in I} \in U \mid z_j = 0 \text{ für alle j mit } i=j\}$$

$$V_i := U \cap \oplus_{j=i} \mathbb{Z}_j = \{(z_j)_{j \in I} \in U \mid z_j = 0 \text{ für alle j mit } i<j\}$$

Sei weiter

$$\mathbf{p}_i : F = \oplus_{i\in I} \mathbb{Z}_i \to \mathbb{Z}, (z_j)_{j\in I} \mapsto z_i ,$$

die Projektion auf den i-ten Faktor. Dann ist $p_i(V_i)$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$, also von der Gestalt

(1) $$\mathbf{p}_i(V_i) = p_i\mathbb{Z}$$

mit einer ganzen Zahl p_i. Wir wählen ein $v_i \in V_i$ mit $p_i(v_i) = p_i$. Im Fall $p_i=0$ wollen wir für v_i das Nullelement von F wählen.

Behauptung 1: $V_i = \mathbb{Z}\cdot v_i + U_i$

Die Inklusion "$\supseteq$" ist trivial. Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Für $x = (x_j)_{j\in I} \in V_i$ ist wegen (1) die Koordinate x_i ein Vielfaches von p_i und wir können schreiben

$$x = \frac{x_i}{p_i} v_i + (x - \frac{x_i}{p_i} v_i)$$

mit $\frac{x_i}{p_i} \in \mathbb{Z}$. Wegen $x, v_i \in V_i$ ist der zweite Summand rechts ein Element von V_i, dessen i-te Koordinate Null ist:

$$p_i(x - \frac{x_i}{p_i} v_i) = x_i - \frac{x_i}{p_i} p_i = 0.$$

Mit anderen Worten, dieser zweite Summand liegt in U_i ($\subseteq V_i$). Also gilt $x \in \mathbb{Z}\cdot v_i + U_i$.

Behauptung 2: Die von Null verschiedenen Elemente unter den v_i sind linear unabhängig (über $\mathbb{Z}$).

Angenommen es gilt

$$a_{i_1} v_{i_1} + ... + a_{i_s} v_{i_s} = 0$$

für gewisse $a_{i_\nu} \in \mathbb{Z}$, wobei sämtliche a_{i_ν} und v_{i_ν} ungleich Null seien. Wir müssen zeigen, dies ist unmöglich. Dazu können wir annehmen,

$$i_1 > i_2 > ... > i_s$$

bezüglich der Wohlordnung von I. Dann ist $v_{i_1} \in F$ das einzige Element in dieser Linearkombination, dessen i_1-te Koordinate ungleich Null ist. Da a_{i_1} ungleich Null sein soll, muß die i_1-te Koordinate von v_{i_1} ebenfalls Null sein. Diese i_1-te Koordinate ist aber gerade p_{i_1}, d.h. es gilt $p_{i_1}=0$. Dann ist aber $v_{i_1}=0$ im Widerspruch zu Wahl der v_{i_ν}.

Behauptung 3: Die die Elemente v_j mit $j=i$ erzeugen die Untergruppe V_i:

Sei J die Menge aller i, für die diese Aussage falsch ist.

$$J := \{i\in I \mid V_i \text{ wird nicht erzeugt von den } v_j \text{ mit } j=i\}$$

Wir haben zu zeigen, diese Menge ist leer. Angenommen, sie ist nicht leer. Dann besitzt sie als Teilmenge von I ein kleinstes Element i_0. Für alle $i<i_0$ ist die Behauptung also

richtig. Es reicht zu zeigen, jedes Element $x \in V_{i_0}$ ist ganzzahlige Linearkombination von gewissen v_j mit $j=i_0$. Nach der bewiesenen Behauptung 1 gilt zumindest

(2) $$x = a \cdot v_{i_0} + u \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } u \in U_{i_0} .$$

Nach Definition von U_{i_0} sind die i_0-te Koordinate und alle späteren Koordinaten gleich Null. Als Element einer direkten Summe hat u nur endlich viele von Null verschiedene Koordinaten. Sei die j-te die letzte von Null verschiedene Koordinate. Dann gilt $j<i_0$ und

$$u \in V_j .$$

Wegen $j<i_0$ ist u Linearkombination von gewissen $v_{j'}$, mit $j'=j$. Nach (2) ist dann aber x Linearkombinatiion von gewissen v_j mit $j=i_0$. Da x beliebig gewählt war steht dies im Widerspruch zu Wahl von i_0. Dieser Widerspruch beweist die dritte Behauptung.

Behauptung 4: Die gegeben Untergruppe H wird von den Elementen v_j erzeugt.

(da wir bereits wissen, die v_j sind linear unabhängig, beweist dies die Behauptung des Satzes). Sei $x \in H$. Als Element der direkten Summe F hat x nur endlich viele von Null verschiedene Koordinaten. Dann liegt aber x in einer der Mengen V_i (wenn die i-te die letzte von Null verschiedene Koordinate ist). Als Element von V_i ist x aber Linearkombination von gewisser v_i. Wir haben gezeigt, jedes Element von H ist Linearkombination gewissen v_i, d.h. die v_i erzeugen H.

QED.

A2. Lebesque-Zahlen

Existenz von Lebesque-Zahlen

Seien X ein kompakter metrischer Raum und **U** eine offene Überdeckung von X. Dann existiert ein $\varepsilon>0$ derart, daß für jede Menge von Durchmesser $< \varepsilon$ ganz in einer Menge der Überdeckung **U** liegt.

Beweis. Zu jedem $x \in X$ gibt es $d(x)>0$ derart, daß die Vollkugel vom Radius 2d(x) ganz in einer Menge von **U** liegt. Endlich viele der zugehörigen Vollkugeln von Radius d(x) überdecken X, sagen wir

$$X = U_{d(x_1)} \cup ... \cup U_{d(x_r)}$$

Sei $\varepsilon := \min(d(x_1),...,d(x_r))$. Ist $Y \subseteq X$ eine Teilmenge vom Durchmesser $<\varepsilon$, so liegt jeder Punkt $y \in Y$ in einer der Mengen $U_{d(x_i)}$ und hat damit von x_i einen Abstand $<d(x_i)$.

Jeder weitere Punkt von Y hat von y einen Abstand $<\varepsilon \leq d(x_i)$, also von x_i einen Abstand $< 2d(x_i)$. Wir haben gezeigt

$$Y \subseteq U_{2d(x_i)}.$$

Mit $U_{2d(x_i)}$ liegt aber auch Y ganz in einer der Mengen von **U**.

QED.

Zeichnungen

FIGURE 1: NULLDIMENSIONALES STANDARD-SIMPLEX 30
FIGURE 2: ZWEIDIMENSIONALES STANDARD-SIMPLEX 30

FIGURE 3: EINDIMENSIONALES STANDARD-SIMPLEX 31
FIGURE 4: SEITENABBILDUNG EINES STANDARD-SIMPLEX 32
FIGURE 5: DER KEGEL ÜBER EINEMSIMPLEX 41
FIGURE 6: WEGE UND 1-SIMPLEXE 44
FIGURE 7: EIN RETRAKT 46
FIGURE 8: HOMOTOPIE-ÄQUIVALENZ VON RÄUMEN UND TOPOLOGISCHEN PAAREN 49
FIGURE 9: PALLELEINBETTUNG EINES RAUMS IN SEINEN ZYLINDER 52
FIGURE 10: EIN STARKER DEFORMATIONSRETRAKT 53
FIGURE 11: DIE SPHÄRE ALS STARKER DEFORMATIONSRETRAKT DES PUNKTIERTEN RAUMS 54
FIGURE 12: KEGEL MIT DER SPITZE IM BARYZENTRUM 55
FIGURE 13: LINEARES BILD EINES KEGELS 58
FIGURE 14: EINBETTUNG IN DEN ZYLINDER UND PROJEKTION 59
FIGURE 15: ZWEI RÄUME UND IHR BUKETT 64
FIGURE 16: EINE DICKE SPHÄRE 71
FIGURE 17: SUSPENSION EINES RAUMES X 72
FIGURE 18: PUNKTIERTE SUSPENSIONEN 73
FIGURE 19: KONTRAHIERBARKEIT DER PUNKTIERTEN SUSPENSIONEN 73
FIGURE 20: EIN INNERER PUNKT EINER KONVEXEN MENGE 77
FIGURE 21: EINBETTUNG DES N-STANDARD-SIMPLEX IN DEN N-DIMENSIONALEN RAUM79
FIGURE 22: DER RAUM Λ_2 80
FIGURE 23: DER RAUM Λ_3 80
FIGURE 24: EINE KONTRAKTION DES PAARS (D_N,Λ_N) 80
FIGURE 25 EINBETTUNG DES RANDS $\dot{\mathbb{D}}_{N-1}$ IN DEN RAUM Λ_N-$\{E^0\}$ 81
FIGURE 26: EINE KONTRAKTION DES RAUMS Λ_N-$\{E^0\}$ 81
FIGURE 27: EINE KONTRAKTION DES HALBRAUMS IN EINEN INNEREN PUNKT 90
FIGURE 28: EINE SPIEGELUNG AN EINER HYPEREBENE 93
FIGURE 29: PROJEKTION DES SIMPLEX-RANDS AUF DIE SPHÄRE 94
FIGURE 30: IGEL, UNGEKÄMMT 96
FIGURE 31: IGEL, GEKÄMMT 96
FIGURE 32: LOKALE TRIVIALITÄT DES TANGENTIALBÜNDELS 97
FIGURE 33: EIN KOMPLEX, DER KEINE MANNIGFALTIGKEIT IST 112
FIGURE 34: KOHÄRENTE ORIENTIERUNG DER SIMPLEXE MAXIMALER DIMENSION 115
FIGURE 35: EINE FLÄCHE OHNE FUNDAMENTALEN ZYKLUS 117
FIGURE 36: DAS MÖBIUS-BAND 117
FIGURE 37: ZERFALLEN DES KANTENZUGS IN ZWEI KOMPONENTEN 121
FIGURE 38: DAS MÖBIUS-BAND 122
FIGURE 39: EINE HANTEL 122
FIGURE 40: EINE DICKE KREISLINIE 123
FIGURE 41: EINE WEITERE DICKE KREISLINIE 123
FIGURE 42: ZWEI VERKLEBTE DICKE KREISLINIEN 124
FIGURE 43: DEFORMATION ZWEIER VERKLEBTER DICKER KREISLINIEN 124
FIGURE 44: MÖBIUS-BAND 128
FIGURE 45: GETEILTES MÖBIUS-BAND 128

Index

—A—

Abbildung
  natürliche, auf einen Faktorkomplex, 19
Abbildung von Paaren, 13
absoluten Homologiegruppen, 36
abstandstreuen Abbildungen, 4
Adjunktion von Hanteln oder Möbius-Bändern, 125
Augmentation, 38; 40

—B—

Basispunkt, 63
berandete simpliziale Mannigfaltigkeit, 112
Bifunktor, 5
Bigrad, 98
Bild, 19
Bukett zweier punktierter topologisher Räume, 63

—D—

darstellbar, 9
darstellendes Objekt, 9
Deformation, 10; 11
Deformationsretrakt, 53
dicke Sphäre, 71
Differentiale, 14

—E—

Ecke
  eines Nicht-Standard-Simplex, 57
Eckenmenge, 101
einfach zusammenhängende Fläche, 118
einfacher Kantenzug, 117
Epimorphismus, 5
exakt, 14
Exaktheit
  an einer Stelle, 19
  einer Sequenz von Komplexen, 19

—F—

Faktorraum, 63
Faktor-Topologie, 63
Fläche
  einfach zusammenhängende, 118
Fläche
  simpliziale, 112
fundamentaler Zyklus, 116
Funktor, 5
  Hom-Funktor, 6
  kontravarianter Hom-Funktor, 6
  kovarianter Hom-Funktor, 6
funktorieller Isomorphismus, 7
funktorieller Morphismus, 7

—G—

Grade, 91
Grundpunkt, 63

—H—

Hantel, 122
Hom-Funktor
  kontravarianter, 6
  kovarianter, 6
Hom-Funktor, 6
homogener Bestandteil, 16
homolog, 14
Homologie, 14
Homologiegruppe
  singuläre, eines topologischen Paares, 36
  singuläre, eines topologischen Raums, 36
Homologieklassen, 14
Homologiesequenz des Paares (X,A), 37
Homologiesequenz des Tripels (X,A,B), 37
Homöomorphismus, 5
homotop, 11; 26
Homotopie, 10; 25
homotopieäquivalent, 12; 26
Homotopieäquivalenz, 26
Homotopiefunktor, 12
Homotopiekategorie, 3; 12
Homotopieklassen, 11; 26

—I—

identische Funktor, 6
identischen Morphismus, 3
im wesentlichen in der Dimension n konzentriert, 29
isomorph, 5
Isomorphimus
  Quasi-Isomorphismus von Komplexen, 23
Isomorphismus, 5
  funktorieller, 7

—K—

Kantenzug
  einfach, 117
Kategorie der Funktoren, 7
Kategorie der geordnete simplizialen Paare, 101
Kategorie der geordneten Simplizialkomplexe, 101
Kategorie der Kategorien, 6
Kategorie der Komplexe abelscher Gruppen, 15
Kategorie der Paare abstrakter Simplizialkomplexen, 101
Kategorie der simplizialen Paare, 101
Kategorie der Simplizialkomplexe, 101
Kategorie der topologischen Räume, 3
Kegel, 17
Kegel über einem singulären Simplex, 41
Kegelkonstruktion, 41
Keim, 88
Kern, 19
Ketten, 14
Kettenabbildung, 14
Kofunktor, 5
kohärent orientierte Simplexe maximaler Dimension, 115
Komplex
  kontrahierbarer, 26
Komplexabbildung, 14
Komplexkategorie, 15
Komplexmorphismus, 14
Komponenten, 43
konstante Homotopie, 11
kontrahierbarer Komplex, 26
kontrahierbarer topologische Raum, 11
kontravarianter Funktor, 5
konvex, 31
kovarianter Funktor, 5
kovarianter Hom-Funktor, 6

Kurve
simpliziale, 112

—L—

Lemma von Yoneda, 8
linear, 32
linear zusammenhängend, 43
lineare Komponenten, 43
linksinvers, 5
lokal trivial, 96
lokale Homologie, 87

—M—

Mannigfaltigkeit
berandete, simpliziale, 112
simpliziale, 112
simpliziale, orientierbare, 114
topologische, 111
Mayer-Vietories-Sequenz, 68; 74
Morphismen, 2
Morphismenkomposition, 3
Morphismus
funktorieller, 7

—N—

natürliche Abbildung auf einen Faktorkomplex, 19
natürliche Äquivalenz, 7
natürliche Transformation, 7
nullhomotop, 11
Nullhomotopie, 11

—O—

Objekten, 2
offener Simplex-Stern, 107
orientierbare simpliziale Mannigfaltigkeit, 114
Orientierung
kohärente, 115

—P—

Paar
geordnetes, simpliziales, Kategorie der, 101
simpliziales, Kategorie der, 101
topologisches, 13
topologisches, singulärer Komplex eines, 35
p-Abbildung, 88
p-äquivalent, 88
Produkt von Kategorien, 4
punktierter topologischer Raum, 63

—Q—

quasigeordnete Menge, 3
Quasi-Isomorphimus von Komplexen, 23
Quelle, 3

—R—

Rand, 32
Rand modulo eines Unterraums, 36
Randabbildungen, 14
Ränder, 14
Raum
kontrahierbarer topologischer, 11
topologischer, singulärer Komplex eines, 34
Raum, topologischer, singuläres Simplex eines, 33
rechtsinvers, 5
reduzierte Homologiesequenz eines topologischen Paares, 39
relative Homologiegruppen, 36
relative Homotopie, 11
Retrakt, 46
Retraktion, 46

—S—

Satz
von Jordan, 70
Seite, 32
Simplex-Stern
offener, 107
simpliziale Fläche, 112
simpliziale Kurve, 112
simpliziale Mannigfaltigkeit mit Rand, 112
singuläre Homologiegruppe eines topologischen Paares, 36
singuläre Homologiegruppe eines topologischen Raums, 36
singuläre Kette, 33
singulärer Komplex eines topologischen Paares, 35
singulärer Komplex eines topologischen Raums, 34
singuläres Simplex eines topologischen Raums, 33
Skelett, 71
Standardabbildung, 75
Standardsimplex, 30
starker Deformationsretrakt, 54
Stern
offener Simplex-Stern, 107
stetigen Familie, 10
Suspension, 17; 72
Symmetrie, 11

—T—

Tangentialbündel, 96
Tangentialvektorfeld, 96
Teilkategorie, 4
Teilkomplex, 18
Topologie
Faktor-Topologie, 63
topologische d-Mannigfaltigkeit, 111
topologische Triade, 13
topologischer Raum
singulärer Komplex eines, 34
singuläres Simplex eines, 33
topologisches Paar, 13
singulärer Komplex eines, 35
topologisches Tripel, 13

Triade topologischer Räume, 13
Tripel
    topologisches, 13

—U—

Umgebungsretrakt,, 46
universell, 9

—V—

volle Teilkategorie, 4

—W—

wegeweise zusammenhängend, 43

—Z—

zerfallend, 24
Ziel, 3
Zusammenhangshomomorphismus des Paares
    (X,A), 37
Zyklen, 14
Zyklus
    fundamentaler, 116
Zyklus modulo eines Unterraumes, 36

Inhalt

VORLESUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE 1

BEZEICHNUNGEN 1

1. VORBEREITUNGEN 2

1.1 Kategorien und Funktoren 2
1.1.1 Vorbemerkung 2
1.1.2 Der Begriff der Kategorie 2
1.1.3 Bemerkungen zur Definition 3
1.1.4 Beispiele für Kategorien 3
1.1.5 Die duale Kategorie 4
1.1.6 Das Produkt von Kategorien 4
1.1.7 Teilkategorien 4
1.1.8 Spezielle Morphismen 5
1.1.9 Funktoren 5
1.1.10 Beispiele für Funktoren 6
1.1.11 Komposition von Funktoren 6
1.1.12 Natürliche Transformationen 7
1.1.13 Beispiele natürlicher Transformationen 7
1.1.14 Lemma von Yoneda 8
1.1.15 Darstellbare Funktoren 9
1.1.15 Eindeutigkeit des darstellenden Paares 9
1.1.16 Algebraische Konstruktionen in beliebigen Kategorien 9

1.2 Homotopie 10
1.2.1 Vorbemerkungen 10
1.2.2 Der Begriff der Homotopie 10
1.2.3 Homotope Abbildungen 11
1.2.4 Homotopieklassen 11
1.2.5 Verträglichkeit mit Kompositionen 11
1.2.6 Die Homotopiekategorie 12
1.2.7 Topologische Paare 13
1.2.8 Die direkte Summe von topologischen Paaren 13
1.2.9 Ein Produkt von topologischen Paaren 13
1.2.10 Homotopie von Paaren 13
1.2.11 Topologische Tripel von topologischen Räumen 13

2. HOMOLOGIE VON KOMPLEXEN 14

2.1 Komplexe 14
2.1.1 Die Homologie eines Komplexes 14
2.1.2 Komplexabbildungen 14
2.1.3 Der Homologiefunktor 15
Bemerkung 15
Vereinbarungen 16
2.1.4 Graduierte Gruppen 16
2.1.5 Direkte Summen von Komplexen 17
2.1.6 Der Kegel einer Komplexabbildung 17
2.1.7 Die kurze exakte Sequenz zum Abbildungskegel 18

2.2 Die lange exakte Homologiesequenz **18**
2.2.1 Teilkomplexe und Faktorkomplexe 18
2.2.2 Beispiele für Teil- und Faktorkomplexe 19
2.2.3 Die Halbexaktheit des Homologiefunktors 19
2.2.4 Konstruktion des Zusammenhangshomomorphismus 20
2.2.5 Funktorialität des Zusammenhangshomomorphismus 22
2.2.6 Die Exaktheit der langen Homologiesequenz 23
2.2.7 Quasi-Isomorphismen 23
2.2.8 Zerfallende Sequenzen 24
2.2.8 Komplexsequenzen die in jeder Dimension zerfallen 24
2.2.9 Zusammenhangshomomorphismus eines Abbildungskegels 25
2.2.10 Kriterium für Quasi-Isomorphie 25

2.3 Kettenhomotopie **25**
2.3.1 Homotope Kettenabbildungen 25
2.3.2 Verträglichkeit mit der Komposition 26
2.3.3 Die Homotopiekategorie über cAb 26
2.3.4 Homotope Abbildungen induzierten auf der Homologie dieselben Abbildungen 26
2.3.5 Homotopieäquivalenzen induzieren Isomorphismen 27
2.3.6 Kriterium für Kontrahierbarkeit 27
2.3.7 Kontrahierbarkeit des Kegels und Homotopieäquivalenz 28

2.4 Freie Komplexe **29**
2.4.1 Definition 29
2.4.2 Die Untergruppe der Zyklen ist ein direkter Summand 29
2.4.3 Quasi-Isomorphie und Homotopieäquivalenz 29
2.4.4 Kurze und elementare Komplexe 29
2.4.4 Zerlegung in kurze bzw. elementare Komplexe 29

3. DIE SINGULÄRE HOMOLOGIE 29

3.1 Standardsimplexe und ihre linearen Abbildungen **29**
3.1.1 Vorbemerkung 29
3.1.2 Die Standardsimplexe 30
3.1.3 Lineare Abbildungen auf den Standardsimplexen 32
3.1.4 Randabbildungen und Seiten der Standardsimplexe 32
3.1.5 Relationen zwischen den Randabbildungen 33

3.2 Der singuläre Komplex **33**
3.2.1 Vorbemerkung 33
3.2.2 Definition des singulären Komplexes 33
3.2.3 Die Komplexeigenschaft von S(X) 34
3.2.4 Die Abbildungen der singulären Ketten zu einer stetigen Abbildung 34
3.2.4 Der Komplex-Morphismus zu einer stetigen Abbildung 35
3.2.5 Die Funktorialität von S 35
3.2.6 Verallgemeinerung auf den Fall von Paaren 35

3.3 Die singuläre Homologie **36**
3.3.1 Die singulären Homologiegruppen eines topologischen Raumes 36
3.3.2 Funktorialität 36
3.3.3 Homologiesequenz eines topologischen Paares bzw. eines Tripels 36

3.4 Spezialfälle **37**
3.4.1 Homologie des einpunktigen Raumes 37
3.4.2 Reduzierte Homologie 38
3.4.3 Reduzierte Homologiesequenz eines Paares 39
3.4.4 Die Augmentation auf den Niveau der Kettenabbildungen 40

3.4.5 Die Homologie der konvexen Teilmenge des affinen Raumes 41
3.4.6 Der Zusammenhangshomomorphismus einer Teilmenge des affinen Raumes 43
3.4.7 Linear zusammenhängende Räume 43
3.4.8 Die Homologie linear zusammenhängender Räume 43
3.4.9 Die 0-te Homologie und lineare Komponenten 44
3.4.10 Die 0-te Homologie des diskreten Raumes 45
3.4.11 Umgebungsretrakte 46
3.4.12 Die Zerlegung der Homologie mit Hilfe von Retraktionen 46
3.4.13 Die Homologiesequenz eines Retrakts 47

3.5 Homotopieinvarianz 47
3.5.1 Wiederholung 47
3.5.2 Formulierung des Satzes über die Homotopieinvarianz 47
3.5.3 Folgerung: die Homologie homotoper Abbildungen 47
3.5.4 Folgerung: die Homologie homotoper Räume 47
3.5.5 Folgerung: die reduzierte Homologie kontrahierbarer Räume 48
3.5.6 Vorbemerkungen 48
3.5.7 Ein vorbereitender Satz 49
3.5.8 Beweis der Homotopieinvarianz (Satz 3.5.2) 51
3.5.9 Deformationsretrakte und starke Deformationsretrakte 53

3.6 Baryzentrische Unterteilung 55
3.6.1 Der Unterteilungshomomorphismus 55
3.6.2 Der Durchmesser mehrfacher baryzentrischer Unterteilungen 56
3.6.3 Kettenabbildungen die in der Dimension 0 übereinstimmen 59

3.7 Kleine Simplexe und Ausschneidung 60
3.7.1 Vorbemerkung 60
3.7.2 Der singuläre Komplex eines Systems von Teilmengen 60
3.7.3 Vergleich der Homologien von S(X,A) und S(U,U∩A) 60
3.7.4 Folgerung: Ausschneidungssatz I 61
3.7.5 Folgerung: Ausschneidungssatz II 61
3.7.6 Beweis von 3.7.3. 61
3.7.6 Das Bukett punktierter topologischer Räume, Faktor-Topologie 63
3.7.7 Die Homologie eines Buketts 64

3.8 Die Mayer-Vietoris-Sequenz 66
3.8.1 Bezeichnungen 66
3.8.2 Ausschneidungstriaden 66
3.8.3 Die absolute Version der Mayer-Vietories-Sequenz 68
3.8.4 Die relative Version der Mayer-Vietories-Sequenz 68
3.8.5 Der Zusammenhangshomomorphismus der absoluten Mayer-Vietories-Sequenz 68
3.8.6 Der Zusammenhangshomomorphismus der relativen Mayer-Vietories-Sequenz 69
3.8.7 Funktorialität der Mayer-Vietories-Sequenz 70
3.8.8 Reduzierte Mayer-Vietories-Sequenz 70
3.8.9 Beispiel: Homologie eines Buketts 70
3.8.10 Beispiel: Satz von Jordan 70
3.8.11 Beispiel: Homologie einer Suspension 71
3.8.12 Die Mayer-Vietories-Sequenz eines Paars von Ausschneidungstriaden 74

4. ANWENDUNGEN AUF DEN EUKLIDISCHEN RAUM 74

4.1 Standardabbildungen zwischen Zellen und Sphären 74
4.1.1 Bezeichnungen 74
4.1.2 Die Standardabbildungen der Vollkugel 75
4.1.3 Eigenschaften der Standardabbildung π 75
4.1.4 Eigenschaften der Standardabbildung π' 76

4.1.5 Kompakte konvexe Teilmengen des euklidischen Raumes 76
4.1.6 Folgerungen 78

4.2 Die Homologie von Zellen und Sphären 79
4.2.1 Lemma 79
4.2.2 Die Homologie von Zellen und Sphären 82
4.2.3 Sphären und euklidische Räume mit unterschiedlicher Dimension 83
4.2.4 Sphären und Vollkugeln 83
4.2.5 Einbettungen von Vollkugeln in den Euklidischen Raum 84
4.2.6 Fixpunktsatz von Brouwer 85
4.2.7 Fundamentale Zyklen 85
4.2.8 Produkte mit Sphären 86
4.2.9 Ein Beispiel für die Künneth-Formeln (weglassen ?) 86

4.3 Lokale Homologie 87
4.3.1 Vorbemerkung 87
4.3.2 Definition der lokalen Homologie 87
4.3.3 Lokalität der lokalen Homologie 87
4.3.4 p-Abbildungen und Abbildungskeime 88
4.3.5 p-Abbildungen mit demselben Keim 88
4.3.6 Die Kategorie der Keime von p-Abbildungen 89
4.3.7 Die lokale Homologie lokal homöomorpher Räume 89
4.3.8 Invarianz der Dimension 89
4.3.9 Invarianz der Randeigenschaft 89
4.3.10 Lokale und reduzierte Homologie 90

4.4 Der Grad einer Abbildung 91
4.4.1 Vorbemerkung 91
4.4.2 Der Gradbegriff 91
4.4.3 Eigenschaften des Grades 91
4.4.4 Der Grad einiger linearer Abbildungen 92
4.4.5 Stetige Abbildungen der n-Sphäre in sich. 95
4.4.6 Der Satz vom Igel 95
4.4.7 Der Bigrad eine Abbildung 98
4.4.8 Eine Eigenschaft des Bigrades 98
4.4.9 Der Grad der Potenzabbildung 99
4.4.10 Fundamentalsatz der Algebra 100

5 DIE HOMOLOGIE DER POLYEDER 101

5.1 Vergleich von simplizialer und singulärer Homologie 101
5.1.1 Einige Kategorien von (abstrakten) Simplizialkomplexen 101
5.1.2 Einige Funktoren 102
5.1.3 Kompakte Teilmengen von Polyedern 103
5.1.4 Endlichkeit und Kompaktheit von Polyedern 104
5.1.5 Teilpolyeder sind Umgebungsretrakte 104
5.1.6 Die Ausschneidungseigenschaft der polyedralen Triaden 108
5.1.7 Der Vergleichsatz 109
5.1.8 Vergleichssatz für geordnete simpliziale Paare 111

5.2 Simpliziale Mannigfaltigkeiten 111
5.2.1 Vorbemerkungen 111
5.2.2 Simpliziale Mannigfaltigkeiten 112
5.2.3 Lemma 113
5.2.4 Die d-te Homologie kompakter d-Mannigfaltigkeiten 114

5.3 Kompakte simpliziale Flächen 117

5.3.1 Einfach zusammenhängende simpliziale Flächen 117
5.3.2 Der Satz von Jordan 118
5.3.3 Die Komplemente eines einfachen Kantenzugs 120
5.3.4 Die Struktur der einfach zusammenhängenden Flächen 122
5.3.5 Kompakte Flächen die nicht einfach zusammenhängend sind 122
5.3.6 Adjunktion von Möbiusbändern und Handeln 125
5.3.7 Klassifikation der kompakten simplizialen Flächen 126
5.3.8 Homologische Charakterisierung der einfach zusammenhängenden Flächen 129

ANHANG 130

1. Untergruppen freier abelscher Gruppen 130
1.1 Wohlgeordnete Mengen 130
1.2 Satz von Zermelo 130
1.3 Satz über die Untergruppen freier abelscher Gruppen 130

A2. Lebesque-Zahlen 132

ZEICHNUNGEN 132

INDEX 133

INHALT 137