Algebraische Geometrie und Zahlentheorie

Eine Einführung in die Weilsche Vermutung zu den Nullstellen der Zeta-Funktion

Ort und Zeit der Vorlesung:
Mo 13.15-14.45 Hs 15
Mi 09.15-10.45 Hs 15

1. Vorbemerkungen

Gegenstand dieser Vorlesung ist die Anwendung der algebraischen Geometrie auf Probleme der Zahlentheorie.

Genauer: wir wollen ein Prolblem der Zahlentheorie beschreiben, welches in der Mathematik des vergangenen Jahrhunderts eine zentrale Rollen gespielt hat, und angeben, wie es mit Hilfe von Begriffen und Konstruktionen der modernen algebraischen Geometrie gelöst wurde.

Mehr noch, wir wollen dieses Problem als Motivation für die Einführung dieser Begriffe verwenden.

1.1 Diophantische Gleichungen

Das Problem, welches wir zu diesem Zweck ausgewählt haben, sind die sogenannten Weilschen Vermutungen. Es geht dabei um ein Problem der Theorie diophantischen Gleichungssysteme, d.h. um Eigenschaften von polynomialen Gleichungssystemen

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, \ldots , x_n) = 0 \\ &\ldots \\ &f_m(x_1, \ldots , x_n) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten

$$f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots , x_n]$$

und deren Lösungen in ganzen oder rationalen Zahlen.

Die Theorie der diophantischen Gleichungen ist insofern eine schwierige Diszilplin, als daß selbst einfachste allgemeine Fragen nicht beantwortet werden können.

Zum Beispiel forderte Hilbert 1900 in seinem Milleniumsvortrag die mathematische Gemeinde auf, ein Verfahren zu entwickeln, mit welchen man in endlich vielen Schritten entscheiden kan eine diophantische Gleichung eine Lösung besitzt. Es gab dazu viele vergebliche Versuche einen Algorithmus zu finden. In den sechziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts konnte schließlich gezeigt werden, daß dieses <u>zehnte Hilbertsche Problem</u> keine Lösung besitzt: für jeden endlichen Automaten (Tjurin-Maschine) gibt es eine diophantische Gleichung, für welche der Automat nicht entscheiden kann, ob diese Gleichung lösbar ist.

Es gibt inzwischen Theorien und Sätze, die darauf hinweisen, daß sich möglicherweise jedes mathematische Problem in die Gestalt eines diophantischen Gleichungssystems bringen läßt.[1]

[1] Mit anderen Worten, Hilbert hatte ein völlig falsche Vorstellung von der Natur der diophantischen Gleichungen.

Bei der Formulierung von Vermutungen im Kontext der Theorie der diophantischen Gleichungen ist deshalb eine gewissen Vorsicht und auch eine gewisse Bescheidenheit angebracht.

Bei den Weilschen Vermutungen geht es um die Tatsache, daß jede ganzzahlige Lösung des System (1) auch eine Lösung dieses System modulo einer ganzen Zahl liefert. Insbesondere erhält man für jede ganzzahlige Lösung von (1) eine Lösung mit Koordinaten in jedem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$.

Für Lösungen von (1) im $\mathbb{F}_q$-Vektorraum $\mathbb{F}_q^n$ ist die Situation völlig anders: da dieser Vektorraum nur endlich viele Punkte besitzt, kann man einfach durch Probieren in endlich vielen Schritten sämtliche Lösungen finden. Insbesondere weiß man dann, ob es überhaupt eine Lösung gibt und wieviele es sind.

Bei den Weilschen Vermutungen geht es um die Anzahl der Lösungen von (1) über den Körpern

$$\mathbb{F}_{q^r}$$

für die verschiedenen Werte von r,

$$r = 1, 2, 3, ...$$

Eine Konsequenz dieser Vermutungen ist es, daß man die Lösungszahl für sämtliche r kennt, wenn man sie nur für endlich aber hinreichend viele r findet.

1.2 Zur Geschichte der Weilschen Vermutungen

Eine eine erste Formulierung der Weilschen Vermutungen im Fall algebraischer Kurven d.h. im Fall, daß die Lösungsmenge des Systems (1) im $\mathbb{C}^n$ (komplex) eindimensional ist, wurde 1924 von Emil Artin gegeben.

Die Vermutungen für algebraische Kurven über endlichen Körpern wurden 1949 von Weil bewiesen. Dieser Beweis basiert bereits auf der entscheidenden Idee, welche letztlich zum Beweis der Vermutungen im allgemeinen Fall führten.

Die Idee besteht darin, eine Theorie zu entwickeln, die es gestattet, Analoga bekannter Sätze der algebraischen Topologie für die Objekte der algebraischen Geometrie zu formulieren und zu beweisen.

Von besonderen Interesse ist dabei der Fixpunkt-Satz von Lefschetz, der die Anzahl der Fixpunkte einer stetigen Abbildung

$$f: X \longrightarrow X$$

mit Hilfe der linearen Abbildungen $H_i(f): H_i(X, \mathbb{R}) \longrightarrow H_i(X, \mathbb{R})$ berechnet, die f auf den singulären Homologie-Gruppen von X induziert.

Eine frühe Formulierung des Fixpunktsatzes ist die folgende (vgl. Spanier: Algebraic topology). Ist X ein kompaktes Polyeder der Dimension n und ist

$$\lambda(f) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^n \operatorname{Tr} H_i(f)$$

von Null verschieden, so besitzt f einen Fixpunkt. Eine genauere Untersuchung gestatet es, $\lambda(f)$ als Anzahl der Fixpunkte von f zu interpretieren (wobei manche Fixpunkte mit Vielfachheiten zu zählen sind).

Im Beweis von Weil wurden Kohomologie-Gruppen für algebraische Kurven definiert und für diese Kohomologie-Gruppen der Fixpunktsatz von Lefschetz bewiesen. Die Vermutungen von Artin ergaben sich daraus als eine Folgerung.

Weil formulierte daraufhin seine Vermutungen für beliebige Dimensionen und schlug vor, zu deren Beweis eine Kohomologie-Theorie für algebraische Varietäten beliebiger Dimension zu entwickeln.

Die Entwicklung einer solchen Theorie hat Jahrzehnte des vergangenen Jahrhunderts in Anspruch genommen und geschah unter Beteiligung sehr vieler Mathematiker. Die klassische algebraische Geometrie wurde in eine neue Sprache übersetzt und dadurch sehr weitgehend verallgemeinert.

Die Weil-Vermutungen wurden 1980 durch Pierre Deligne bewiesen. Eine Konsequenz der Weil-Vermutungen war der Beweis von Uralt-Vermutungen von Gauß über Exponential-Summen.

Ohne die neu geschaffene Sprache der algebraischen Geometrie, wäre der Beweis anderer wichtiger Vermutungen in der Vergangenheit undenkbar gewesen. Das gilt insbesonder für

- den Satz von Hironaka über die Auflösbarkeit von Singularitäten in der Charakteristik 0.
- die Mordell-Vermutung über die Menge der rationalen Punkte einer algebraischen Gruppe,
- die Existenz der Moduli-Varietäten algebraischer Kurven und schließlich
- den großen Fermatschen Satz.

Außerdem hat die Entwicklung dieser Theorie viele andere Dispziplinen beeinflußt, die ebenfalls versuchten die Sätze der algebraischen Topologie in eine für die Disziplin passende Sprache zu übersetzen. Dies gilt insbesondere für die Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten, die globale Theorie der elliptischen Differentialgleichungen (Index-Satz von Atiyah-Singer) aber auch für die mathematische Logik. Es entstand schließlich die Topos-Theorie, die es gestattet Homologie- und Kohomologie-Theorien in beliebigen mathematischen Disziplinen zu konstruieren.

In dieser Vorlesung wollen wir versuchen, die Entwicklung der algebraischen Geometrie im vergangenen Jahrhundert zu beschreiben, wie sie durch den Versuch die Weil-Vermutungen zu beweisen, motiviert wurde.

1.3 Eine erste Formuliertung der Weil-Vermutungen

1.3.1 Affine algebraische Schemata

Definition

Zur Formulierung der Weil-Vermutungen müssen wir zunächst den Begriff der diophantischen Gleichung verallgemeinern.

Zunächst ersetzen wir $\mathbb{Z}$ durch einen beliebigen kommutativen Ring A mit 1 und betrachten ein polynomiales Gleichungssystem

$$f_1(x_1, \dots , x_n) = 0$$

$$\begin{array}{l} \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \qquad (1)$$

mit Koeffizienten aus A,

$$f_1, ..., f_m \in A[x_1, \dots, x_n]$$

Für jede kommutative A-Algebra B (d.h. für jeden Homomorphismus h: A $\longrightarrow$ B von kommutativen Ringen mit 1) betrachten wir die Menge

$$X(B) := \{ b := (b_1, \dots, b_n) \in B^n \mid f_1(b) = \dots = f_m(b) = 0\}$$

Dabei bezeichne $f_i(b)$ das Element von B, welches man erhält, indem man zunächst h auf die Koeffizienten von f_i anwendet und so ein Polynomb f_i^h mit Koeffizienten aus B gewinnt und dann in dieses Polynom die Koordinaten von b einsetzt,

$$f_i(b) := f_i^h(b).$$

Die Menge X(B) heißt Menge der B-rationalen Lösungen des Gleichungssystem (1). Es ist leicht zu sehen, daß so ein Funktor

$$X: A\text{-Alg} \longrightarrow \text{Ens}, B \mapsto X(B),$$

von der Kategorie der kommutativen A-Algebren in die Kategorie der Mengen definiert ist. Einen Funktor, der zu einem Funkter dieser Gestalt isomorph ist, heißt affine algebraische Menge oder auch affines Schema. Speziell den Funktor X nennt man auch das durch das Gleichungssystem (1) definierte Schema und bezeichnet ihn mit

$$Sp(A).$$

Diese Bezeichnung soll an Spec(A) erinnern - das später zu definierende Spektrum des Rings A. Wir werden sehen, daß man Sp(A) und Spec (A) auseinander berechnen kann, sodaß es egal ist, ob man X = Sp(A) oder Spec(A) betrachtet. Die Elemente von X(B) heißen dann B-rationale Punkte von X.

Um die Abhängigkeit von X von den Gleichungen f_i auszudrücken, schreibt man auch

$$X = V(f_1, ..., f_m).$$

Mit den gerade eingeführten Bezeichnungen bedeutet die Lösung des diophantischen Gleichungssystem (1) über $A = \mathbb{Z}$ gerade die Bestimmung der Menge $X(\mathbb{Z})$ der $\mathbb{Z}$-rationalen Punkte von X bzw. der Menge $X(\mathbb{Q})$ der rationalen Punkte bzw. $\mathbb{Q}$-rationalen Punkte von X.

Darstellbarkeit der affinen Schemata

Ist die Menge der Gleichungen (1) leer, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} X(B) = B^n & = & \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[x_1, \dots, x_n], B). \\ (h(x_1), \dots, h(x_n)) & \leftarrow\!\shortmid & h \end{array}$$

Man beachte, eine A-Algbra-Homomorphismus $A[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow B$ ist bereits eindeutig festgelegt, wenn man die Bilder der Unbestimmten x_i kennt. Umgekehrt kann man die Bilder der x_i in B beliebig vorgeben und erhält so einen A-Algebra-Homomorphismus. Die Hom-Menge rechts kann man also mit der Menge der n-Tupel mit Koordinaten aus B identifizieren.

Die Menge der Punkte des B^n, die den Gleichungen (1) genügen, entspricht dabei gerade den Homomorphismen h mit

$$0 = f_i^h(h(x_1), \dots , h(x_n)) = h(f_i(x_1, \dots , x_n)),$$

d.h. X(B) kann man gerade mit der Menge der Homomorphismen identifizieren, die alle f_i in die Null abbilden.

$$X(B) = \{h \in \mathrm{Hom}_{A\text{-}Alg}(A[x_1, \dots , x_n], B) \mid h(f_i) = 0 \text{ für alle } i \}$$

Mit den f_i wird aber auch jede Linarekombination der f_i mit Koeffizienten aus dem Polynomring $A[x_1, \dots , x_n]$ in die Null abgebildet, d.h. das gesamte von den f_i erzeugte Ideal

$$(f_1, \dots , f_m) := \{p_1f_1+\dots+p_mf_m \mid p_1,\dots,p_m \in A[x_1, \dots , x_n]\}$$

wird in die Null geschickt. Nach dem Homomorphiesatz sind die Homomorphismen mit dieser Eigenschaft gerade diejenigen, die sich über den natürlichen Homomorphismus

$$A[x_1, \dots , x_n] \longrightarrow A[x_1, \dots , x_n]/(f_1, \dots , f_m)$$

faktorisieren. Wir können deshalb X(B) mit der Menge der auf dem Faktorring definierten Homomorphismen identifizieren,

$$X(B) = \mathrm{Hom}_{A\text{-}Alg} (A[x_1, \dots , x_n]/(f_1, \dots , f_m), B).$$

Im allgemeinen Fall ist das affine Schema X gerade der Hom-Funktor

$$X = \mathrm{Hom}_{A\text{-}Alg} (A[x_1, \dots , x_n]/(f_1, \dots , f_m), \ ?),$$

der durch den Faktorring

$$A[x_1, \dots , x_n]/(f_1, \dots , f_m) \tag{2}$$

dargestellt wird. Da das darstellende Objekt bis auf natürliche Isomorphie durch den Funktor eindeutig bestimmt ist, haben wir so eine Identifikation der affinen Schemata mit den Faktorringen der Gestalt (2). Diese heißen auch <u>Koordinatenringe</u> des Schemas.

Läßt man jetzt noch beliebig viele Unbestimmte im Gleichungssystem (1) zu (also auch unendlich viele) und auch beliebig viele Gleichungen, d.h. in (2) tritt anstelle der x_i eine beliebige Familie von Unbestimmten und anstelle der f_i ein beliebige Familie von Polynomen auf, so sieht man daß jede beliebige A-Algebra in der (2) entsprechenden Gestalt auftreten kann.

Die Kategorie der affinen Schemata über A wird so mit der Kategorie der A-Algebren identifiziert, und die Theorie der diophantischen Gleichungen wird zur Theorie der Algebren über einem kommutativen Ring mit 1, d.h. zur kommutativen Algebra.

Topologie

Die eben eingeführte Verallgemeinerung reicht immer noch nicht aus zur Formulierung der Weil-Vermutungen. Wir müssen noch eine weitere Art von algebraischen Schemata einführen: die projektiven Schemata.

Das hängt damit zusammen, daß man in der Mathemaktik tiefliegende Aussagen meist nur dann formulieren kann, wenn in irgendeiner Weise Endlichkeitsbedingungen oder Kompaktheitsbedingungen erfüllt sind, und damit, daß die Teilmengen

$$X(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ oder } X(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^n$$

(im Fall $A = \mathbb{Z}$) eher selten kompakt sind (nämlich nur, wenn sie endlich sind). Wir brauchen deshalb irgendeine Art Kompaktifizierung dieser Mengen, die deren algebraische Natur erhält.

Um von Kompaktheit zu reden, benötigt man eine Topologie. Für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ist das kein Problem. Wir wollen anstelle von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ aber beliebige kommutative Ringe mit 1 zulassen und brauchen deshalb einen Ersatz für die gewöhnliche Topologie der reellen oder komplexen Vektorräume. Eine erste Wahl für eine solche Topologie ist die sogenannte <u>Zariski-Topololgie</u>. Man erhält sie, indem man für jede A-Algebra B die abgeschlossenen Mengen von

$$X(B)$$

angibt. Jedenfalls ist klar, daß sich die Menge X(B) verkleinert, wenn man zu den Gleichungen (1) weitere polynomiale Gleichungen hinzufügt (eventuell auch unendlich viele). Die so entstehenden Teilmengen von X(B) sind nach Definition gerade die abgeschlossenen Mengen der Zariski-Topologie von X(B). Es ist leicht zu sehen, daß auf diese Weise tatsächlich eine Topolgie auf X(B) definiert ist.

1.3.4 Der projektive Raum

Die Idee für die Kompaktifizierung besteht darin, den affinen Raum in einen Raum einzubetten, der kompakt ist, und dann die affinen Mengen in diesem Raum abzuschließen. Auf diese Weise erhält man Mengen, die kompakt sind, und für die man dann die Weil-Vermutungen formulieren und beweisen kann.

Über dem Körper der komplexen Zahlen kann man den $\mathbb{C}^n$ in den n-dimensionalen projektiven Raum einbetten,

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} := \{[x_0,...,x_n] \mid (x_0,...,x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - 0\}$$

Dabei sei

$$[x_0,...,x_n] := (x_0,...,x_n)\cdot\mathbb{C}$$

die Gerade durch den Ursprung und den Punkt $(x_0,...,x_n)$. Die x_i heißen <u>projektive Koordinaten</u> des Punktes $[x_0,...,x_n]$ von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Zwei (n+1)-Tupel beschreiben genau dann denselben Punkt, wenn sie proportional zueinander sind:

$$[x_0,...,x_n] = [y_0,...,y_n] \Leftrightarrow (x_0,...,x_n) = \lambda\cdot(y_0,...,y_n) \text{ für eine } \lambda\in\mathbb{C}-0.$$

Nach Definition gibt es eine Abbildung

$$\mathbb{C}^{n+1} - 0 \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}},\ (x_0,...,x_n) \mapsto [x_0,...,x_n],$$

deren Fasern gerade die Geraden durch den Ursprung sind, aus denen man den Ursprung entfernt hat. Man kann diese Abbildung zur Definitoin einer Topologie auf dem projektiven Raum verwenden: eine Teilmenge des $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ wird als offen definiert, wenn deren Urbild offen ist.

Der projektive Raum ist als stetiges Bild der (2n+2)-Sphäre kompakt:

$$S^{2n+2} := \{(x_0,...,x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |x_0|^2+...+|x_n|^2 = 1\}$$

ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, und die Abbildung

$$S^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}},\ (x_0,...,x_n) \mapsto [x_0,...,x_n],$$

ist stetig und surjektiv, denn jeder Vektor von $\mathbb{C}^{n+1}$-0 = $\mathbb{R}^{2n+2}$-0 ist proportional zu einem Vektor der Länge 1.

Den affinen Raum $\mathbb{C}^n$ kann man auf viele verschiedene Arten in den projektiven Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ einbetten. Eine Einbettung ist die folgende.

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}},\ (x_1,...,x_n) \mapsto [1, x_1,...,x_n].$$

Man sieht sofort, diese Abbildung ist injektiv (und stetig), denn zwei proportionale Tupel mit der 0-ten Koordinate 1 sind gleich. Das Bild dieser Abbildung besteht gerade aus allen Punkten, deren 0-te Koordinate ungleich Null ist,

$$U_0 := \{[x_0,...,x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid x_0 \ne 0\}.$$

Der $\mathbb{C}^n$ wird so mit einer offenen Teilmenge des projektiven Raums identifiziert. Die Umkehrung der Einbettung hat die Gestalt

$$U_0 \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}},\ [x_0,...,x_n] \mapsto (\frac{x_1}{x_0}, ... , \frac{x_n}{x_0}).$$

Wir haben uns jetzt mit der Frage zu befassen, welche Mengen man erhält, wenn man durch Polynome definierte Teilmengen des $\mathbb{C}^n$ im projektiven Raum abschließt. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall von affinen Schemata, die durch ein Polynom definiert sind. Der Fall einer beliebigen Menge von Polynomen wird analog behandelt. Sei also

$$X = V(f) \text{ mit } f \in \mathbb{C}[x_1,...,x_n],$$

d.h.

$$X(\mathbb{C}) = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{C}^n \mid f(x_1,...,x_n) = 0\}$$

Als Teilmenge des projektiven Raums hat $X(\mathbb{C})$ die Gestalt

$$\begin{aligned} X(\mathbb{C}) &= \{[x_0,...,x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid x_0 \ne 0,\ f(\frac{x_1}{x_0}, ... , \frac{x_n}{x_0}) = 0 \} \\ &= \{[x_0,...,x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid x_0 \ne 0,\ x_0^d \cdot f(\frac{x_1}{x_0}, ... , \frac{x_n}{x_0}) = 0 \} \end{aligned}$$

Weil x_0 in allen Punkten von Null verschieden ist, können wir den Exponenten in der zweiten Darstellung beliebig wählen. Insbesondere können wir

$$d = \deg f$$

setzen. Dann ist die definierende Gleichung

$$x_0^d \cdot f(\frac{x_1}{x_0}, ... , \frac{x_n}{x_0}) = 0 \qquad (3)$$

ein Polynom des Grades d, in welchen alle auftretenden Potenzprodukte denselben Grad d besitzen, also ein <u>homogenes Polynom</u> vom Grad d. Dieses Polynom ist dabei kein Vielfaches von x_0 (dann hätte f einen Grad < d), d.h. die Hyperebene

$$x_0 = 0$$

ist in der Nullstellenmenge von (3) nicht enthalten und schneidet diese Nullstellenmenge in einer echten (und damit nirgends dichten) Teilmenge. Das bedeutet aber, die Abschließung von $X(\mathbb{C})$ im projektiven Raum ist gerade durch die Nullstellen von (3) gegeben.

$$\overline{X(\mathbb{C})} = \{[x_0,...,x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid x_0^d \cdot f(\frac{x_1}{x_0}, ... , \frac{x_n}{x_0}) = 0 \}$$

Die projektive Abschließung von $X(\mathbb{C})$, d.h. die Abschließung von $X(\mathbb{C})$ im projektiven Raum erhält man, indem man die definierende Gleichung von $X(\mathbb{C})$ homogenisiert. Setzt man x_0 erhält man die alte definierende Gleichung $f = 0$ zurück (wie es der Fall sein sollte):

$$\overline{X(\mathbb{C})} \cap \mathbb{C}^n = X(\mathbb{C}).$$

Die analogen Aussagen sind auch richtig für Mengen $X(\mathbb{C})$, die durch beliebig viele Gleichungen definiert sind: die Abschließungen der Mengen $X(\mathbb{C})$ im projektiven Raum sind durch homogene Polynome definiert.

Die Umkehrung ist auch richtig: durch homogene Gleichungen definierte Mengen im projektiven Raum sind Abschließungen von polynomial definierten Mengen des affinen Raums (wobei man eine geeignete Einbettung von $\mathbb{C}^n$ in den projektiven Raum wählen muß).

Wir haben jetzt den projektiven Raum in derselben Weise als Funktor zu definieren, wie wir das im affinen Fall getan haben, d.h. für jeden kommutativen Ring A mit 1 und jeden Homomorphismus $h: A \longrightarrow B$ von Ring mit haber wir die Menge

$$\mathbb{P}^n_A(B)$$

zu definieren. Ist $B = K$ ein Körper, so sollte

$$\mathbb{P}^n_A(K) = \text{Menge der 1-dimensionalen Unterräume von } K^{n+1}$$

sein. Das Problem bei der Verallgemeinerung auf den Fall von Ringen ist die Tatsache, daß der Begriff der Dimension eines Vektorraums auf den Fall von Moduln über Ringen verschiedene Verallgemeinerungen besitzt, nämlich den Begriff der Länge eines Moduls, den Begriff der Dimension im Sinne der kommutativen Algebra (der durch die maximale Länge von aufsteigenden Ketten irreduzibler Unterräume definiert ist) und den Begriff des Rangs.

Der Begriff der Länge kommt hier nicht in Frage, weil im Fall beliebiger Ringe die Länge von Moduln so gut wie immer unendlich ist.

Der Begriff der Dimension in Sinne der kommutativen Algebra fällt aus denselben Gründen: im Fall beliebiger Ringe sind die auftretenden Dimension unendlich.

Bleibt der Begriff des Rangs. Man könnte also definieren

$$\mathbb{P}^n_A(B) = \text{Menge der Teilmoduln des Rangs 1 von } B^{n+1}$$

Zur Erinnerung: der Rang eines Moduls über dem Ring B ist definiert als die Maximalzahl B-linear unabhängiger Elemente des Moduls.

Diese Definition ignoriert jedoch eine wichtige Eigenschaft des projektiven Raums. Erinnert wir uns an die Entstehung des projektiven Raums in der Renaissance:
a) Die wichtigste Invariante der euklidischen Geometrie ist der Abstand. Die Automorphismen, des euklidischen Raums sind diejenigen,die den Abstand zweier Punkte invariant lassen, d.h. die Bewegungen. In der euklidischen Geometrie betrachtet man zwei Objekte als im wesentlichen gleich, wenn sie sich durch eine Bewegung ineiander überführen lassen.
b) In der affinen Geometrie ist der Abstand keine wohldefinierte Invariante mehr, weil in der Ähnlichkeitsgeometrie Objekte, die durch Streckungen und Stauchungen ineinander übergehen, als im wesentlichen gleich angesehen werden. Invariant bleiben aber alle Winkel.
c) In der projektiven Geometrie ist der Winkel (zum Beispiel zwischen zwei Geraden) kein wohldefinierte Invariante mehr. Bei projektiven Transformationen kann sich der

Winkel ändern. Die zentrale Invarianten der projektiven Geometrie ist das Doppelverhältnis. Eine Konsequenz der Invarianz des Doppelverhältnisses ist es, daß auch die Eigenschaft zweier Vektoren, senkrecht aufeinander zu stehen, erhalten bleibt. Diese Eigenschaft ist im wesentlichen sogar äquivalent zur Invarianz des Doppelverhältnisses.

Die Erhaltung der Orthogonalität hat zur Folge, daß es im projektiven Raum zu jedem linearen Unterraum ein orthogonales Komplement gibt, und die Eigenschaft zweier linearer Unterräume orthogonale Komplemente voneinander zu sein, bei projektiven Transformationen erhalten bleibt. Die Eigenschaft, orthogonale Komplemente voneinander zur sein, entspricht im affinen gerade der Bedingung, daß der Gesamtraum direkte Summe der beiden betrachteten Unterräume ist.

Die obige Definition ist insofern problematisch, als daß beliebige Teilmoduln des Rangs 1 keine direkten Summanden sein müssen. Es liegt deshalb nahe, dies als Bedingung zu fordern. Wir erhalten so die folgende Defintion, die sich später auch als die ‘richtige’ erweisen wird:

$$\mathbb{P}^n_A(B) = \text{Menge der direkten Summanden des Rangs 1 von } B^{n+1}$$

Auf diese Weise ist ein Funktor

$$\mathbb{P}^n_A\colon \text{A-Alg} \longrightarrow \text{Ens},\ B \mapsto \mathbb{P}^n_A(B),$$

definiert, der auch projektiver n-Raum genannt wird. Für jeden Homomorphismus $h{:}B \longrightarrow B'$ von Ringen mit 1 ist die zugehörige Abbildung durch das Tensorprodukt definiert:

$$\mathbb{P}^n_A(B) \longrightarrow \mathbb{P}^n_A(B'),\ M \mapsto M\otimes_B B'.$$

Eine leichte Variation dieser Definition führt übrigens zu einer weiter Reihe von Funktoren, die ebenfalls eine große Bedeutung in der algebraische Geometrie besitzen. Für je zwei natürliche Zahlen n und r kann man setzen

$$G^{n,r}_A(B) := \text{Menge der direkten Summanden des Rangs r von } B^{n+r}.$$

Der so definierte Funktor

$$G^{n,r}_A\colon \text{A-Alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

heißt Graßmann-Schema oder auch Graßmann-Varietät. Wie im Fall der projektiven Räume wird die Funktorialität durch das Tensorprodukt realisiert.

Offensichtlich ist

$$\mathbb{P}^n_A = G^{n,1}_A.$$

$G^{n,r}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit (die sich in einen komplexen projektiven Raum einbetten läßt), deren Punkte gerade den r-dimensionalen komplex-linearen Unterräumen des $\mathbb{C}^{n+r}$ entsprechen.

1.3.5 Projektive algebraische Schemata

Wir haben noch den Funktor zu definieren, der den Teilmengen des projektiven Raums entspricht, die Nullstellen von Familien homogener Polynome sind. Dabei kann man im projektiven Raum eine Topologie so einführen, daß diese Teilmengen gerade den abgeschlossenen Teilmengen des projektiven Raums entsprechen.

Wir werden so vorgehen, daß wir zunächst den Begriff des offenen Teilfunktors eines projektiven Schemas definieren, wobei die Definition so gewählt wird, daß diese Teilfunktoren gerade den offenen Teilmengen des projektiven Raums entsprechen.

Die Komplemente dieser offenen Teilfunktoren (d.h. die abgeschlossenen Teilfunktoren) sind dann gerade die uns interessierenden Objekte, die wir projektive Schemata nennen werden.

Bei der Definition der offenen Teilfunktoren beachten wir zunächst, daß der gewöhnliche projektive Raum eine offene Überdeckung durch affine Mengen besitzt:

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = U_0 \cup \ldots \cup U_n$$

mit

$$U_i = \{[x_0,\ldots,x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid x_i \neq 0\}.$$

Jedes der U_i kann man mit $\mathbb{C}^n$ identifizieren. Jedes der U_i ist eine offene Teilmenge des projektiven Raums. Eine Teilmenge von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ ist deshalb genau dann offen, wenn ihr Durchschnitt mit allen U_i offen ist. Für jeden Morphismus algebraischer Varietäten über den komplexen Zahlen,

$$\varphi: X \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

und jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ ist trivialerweise $\varphi^{-1}(U)$ offen in X. Die gerade durchgeführten Betrachtungen zeigen, daß in gewissem Sinne auch die Umkehrung gilt:

$U \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ ist offen

$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(U)$ ist offen in X für jeden Morphismus $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ mit X affin.

Wir haben jetzt diese Tatsache in die Sprache der Funktoren zu übersetzen. Dazu benötigen wir den Begriff des affinen Spektrums.

Das Spektrum eines kommatativen Rings mit 1

Sei A ein kommativer Ring mit 1. Das Spekturm von A ist ein topologischer Raum, der mit

Spec A

bezeichnet wird, auf welchen der Begriff der <u>regulären Funktion</u> definiert ist (das Analogon der holomorphen Funktion auf einer komplexen Mannigfaltigkeit). Diese Funktionen bilden einen kommutativen Ring mit 1, der sich mit A identifizieren läßt.

Wir werden uns hier zunächst darauf beschränkten, das Spektrum als Menge und als topologischen Raum zu definieren.

<u>Spec als Menge</u>

Die Definition von Spec A als Menge ist einfach:

Spec A = Menge der Primideale von A.

<u>Die Elemente von A als Funktionen auf</u> Spec A.

Jedem Element von A läßt sich auch in recht einfacher Weise eine Abbildung zuordnen:

Für $p \in \operatorname{Spec} A$ und $f \in A$ setzen wir

$$
\begin{aligned}
f(p) &:= f \bmod p \\
&= \text{Bild von } f \text{ beim natürlichen Homomorphismus} \\
&\quad A \longrightarrow A/p \subseteq Q(A/p) =: \kappa(p).
\end{aligned}
$$

Der Körper $\kappa(p)$ heißt Restekörper des Punktes p. Durch diese Definition wird dem Element f die ebenfalls mit f bezeichnete Funktion

$$f: \operatorname{Spec}(A) \longrightarrow \bigcup \kappa(p),\ p \mapsto f(p), \qquad (1)$$

zugeordnet, die ihre Werte in der disjunkten Vereinigung der Restekörper annimmt.

Diese Definition mag exotisch aussehen. Immerhin lassen sich die so definierten Funktionen addieren und multiplizieren, indem man ihre Werte addiert bzw. multipliziert. Wir erhalten so einen kommutativen Ring mit 1, dessen Elemente solche Funktionen sind.

Kommen wir zur Topologie. Für jede Teilmenge $M \subseteq A$ definieren wir die Menge der gemeinsamen Nullstellen der als Funktionen aufgefaßten Elemente von M:

$$V(M) := \{p \in \operatorname{Spec} A \mid f(p) = 0 \text{ für jedes } f \in M\} = \{p \in \operatorname{Spec} A \mid M \subseteq p\}$$

Eigenschaften der Mengen V(M).

(i) Für jede Teilmenge $M \subseteq A$ des Rings A gilt

$$V(M) = V(M \bullet A)$$

wobei $M \bullet A$ das von M in A erzeugte Ideal bezeichne.

(ii) Für Ideale J', J'', J_i von A gilt

$$V(J') \cap V(J'') = V(J' \bullet J'') = V(J' \cap J'')$$

$$\bigcap_{i \in I} V(J_i) = V(\sum_{i \in I} J_i)$$

$$V(A) = \varnothing$$
$$V(\{0\}) = \operatorname{Spec} A.$$

Die Mengen der Gestalt V(M) sind also gerade die abgeschlossenen Mengen einer Topologie von Spec A, die wir Zariski-Topolgie von Spec A nennen wollen. Wir werden Spec A stets als topologischen Raum, der mit der Zariski-Topologie versehen ist, betrachten. Die zu den V(M) gehörigen offenen Mengen werden mit

$$D(M) = \operatorname{Spec} A - V(I) = \{p \in \operatorname{Spec} A \mid M \not\subseteq p\}$$

bezeichnet. Falls M aus nur einem Element f besteht, nennt man D(f) offene Hauptmenge,

$$D(f) = \{p \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin p\} = \{p \in \operatorname{Spec} A \mid f(p) \neq 0\}.$$

Das Besondere an diesen Mengen ist, daß sie eine Topologie-Basis der Zariski-Topologie bilden:

Jede offene Menge von Spec A ist Vereinigung offener Hauptmengen.

<u>Beweis</u>. Es reicht zu zeigen, für jedes Ideal I von A gilt

$$D(I) = \bigcup_{f\in I} D(f).$$

Für jedes $p \in \mathrm{Spec}\, A$ gilt:

$$\begin{aligned} p \in D(I) &\Leftrightarrow I \not\subseteq p \\ &\Leftrightarrow \text{es gibt ein } f \in I \text{ mit } f \notin p \\ &\Leftrightarrow \text{es gibt ein } f \in I \text{ mit } p \in D(f). \end{aligned}$$

<u>QED</u>.

Mit Hilfe der offenen Hauptmengen sieht man leicht, daß Spec A quasi-kompakt ist:

<u>Jede offene Überdeckung von Spec A enthält eine endliche Teilfamilie, die Spec A überdeckt</u>.

<u>Beweis</u>. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Spec A. Wir haben zu zeigen, endlich viele der U_i überdecken Spec A. Wir schreiben jedes U_i als Vereinigung offener Hauptmengen und erhalten so eine Überdeckung von Spec A durch offene Hauptmengen. Es reicht zu zeigen, diese letztere Überdeckung besitzt eine endliche Teilfamilie, die bereits Spec A überdeckt.

Wir können also annehmen, die U_i sind offene Hauptmengen, sagen wir

$$U_i = D(f_i),\ f_i \in A.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}\, A &= \bigcup_{i\in I} D(f_i) \\ &= \bigcup_{i\in I} \mathrm{Spec}\, A - V(f_iA) \\ &= \mathrm{Spec}\, A - \bigcap_{i\in I} V(f_iA) \\ &= \mathrm{Spec}\, A - V(\sum_i f_iA) \end{aligned}$$

d.h. es ist

$$V(\sum_i f_iA) = \emptyset.$$

Mit anderen Worten, kein Primideal von A enthält das Ideal $\sum_i f_iA$. Es muß also

$$\sum_i f_iA = A$$

gelten. Insbesondere liegt 1 in diesem Ideal, sagen wir

$$1 = a_1f_{i_1} +\ldots+a_rf_{i_r}.$$

Es folgt

$$\sum_{j=1}^{r} f_{i_j} A = A.$$

Wir führen die obige Rechnung rückwärts aus mit der endlichen Summe $\sum_{j=1}^{r}$ anstelle der Summe $\sum_{i}$ und erhalten

$$\text{Spec } A = \bigcup_{j=1}^{r} D(f_{i_j}).$$

Dies ist die gesuchte endliche Überdeckung.

QED.

Als nächstes wollen wir uns von der funktoriellen Natur der gerade durchgeführten Konstruktion überzeugen.

Spec als Funktor

Für jeden Homomorphismus $h: A \longrightarrow A'$ von Ringen mit 1 ist durch

$$h^{\#}: \text{Spec } A' \longrightarrow \text{Spec } A,\ p' \mapsto h^{-1}(p'),$$

eine stetige Abbildung definiert: für Ideale I von A gilt nämlich

$$p \in (h^{\#})^{-1}V(I) \Leftrightarrow h^{\#}(p) \in V(I) \Leftrightarrow I \subseteq h^{\#}(p) = h^{-1}(p') \Leftrightarrow h(I) \subseteq p'$$
$$\Leftrightarrow p' \in V(h(I)),$$

d.h.

$$(h^{\#})^{-1}V(I) = V(h(I)).$$

Mit anderen Worten, das Urbild einer abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen, d.h. $h^{\#}$ ist eine stetige Abbildung.

Die Abbildung, die jedem Ring dessen Spektrum zuordnet, wird auf diese Weise zum kontravarianten Funktor,

$$\text{Spec: (kommutative Ringe mit 1)}^{0} \longrightarrow \text{Top},\ A \mapsto \text{Spec } A,\ h \mapsto h^{\#}.$$

Ein Mangel der Konstruktion

Die hier eingeführten Funktionen der Gestalt (1) sind zwar recht nützlich. Es sind aber nicht die Sorte von Funktionen, die es uns gestatten werden, A als Ring von Funktionen zu betrachten, die auf Spec(A) definiert sind.

Für die Abbildungen der Gestalt (1) besteht zum Beispiel die Implikation

$$f^2 = 0 \Rightarrow f = 0,$$

weil ihre Werte in einem Körper liegen. Der Ring

$$A = \mathbb{C}[x]/(x^2)$$

besitzt aber Elemente, die dieser Implikation nicht genügen. A kann also niemals als ein Ring von Funktionen der Gestalt (1) aufgefaßt werden. Um unser Ziel trotzdem zu erreichen, werden wir den Funktionen-Begriff verallgemeinern müssen, was uns zum Begriff der Garbe führen wird.

Spektren und klassische algebraische Geometrie

Seien k ein Körper,

$$A = k[x]/J \text{ mit } x = x_1,...,x_n \text{ und } J = (f_1,...,f_m).$$

Weiter sei $p = (p_1,...,p_n) \in k^n$ eine gemeinsame Nullstelle der f_i,

$$f_1(p) = ... = f_m(p) = 0.$$

Dann liegen die f_i im Kern der Auswertungsabbildung

$$\varphi_p: k[x] \longrightarrow k,\ f(x) \mapsto f(p),$$

die Abbildung faktorisiert sich also über die natürliche Abbildung $k[x] \longrightarrow A$ und definiert so einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\overline{\varphi}_p : A \longrightarrow k.$$

Als k-Algebra-Homomorphismus ist $\overline{\varphi}_p$ surjektiv, induziert also einen Isomorphismus

$$A/\ker(\overline{\varphi}_p) \cong k.$$

Insbesondere ist

$$\ker(\overline{\varphi}_p) = (x_1-p_1, ... , x_n - p_n)/J$$

ein maximales Ideal, also insbesondere ein Primideal. Wir haben damit eine Abbildung

$$\{p \in k^n \mid f_1(p) = ... = f_m(p) = 0\} \longrightarrow \text{Spec } k[x]/J$$

$$p = (p_1,...,p_n) \qquad \mapsto (x_1-p_1, ... , x_n - p_n) \bmod J$$

Diese Abbildung ist injektiv. Ist k algebraisch abgeschlossen, so besteht ihr Bild nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gerade aus den maximalen Idealen von $A = k[x]/J$.

Ersetzt man also in der obigen Konstruktion die Primideale durch die maximalen Ideale, d.h. betrachtet man anstelle von Spec A das <u>maximale Spektrum</u>,

$$\text{Specm } A := \text{Menge der maximalen Ideale von } A,$$

so erhält man gerade die Situation der klassischen algebraischen Geometrie.

Insbesondere entsprechen die oben definierten zu $f \in A = k[x]/J$ gehörigen Funktionen

$$\text{Specm } A \longrightarrow \kappa(p),\ f \mapsto f(p)$$

gerade der gewöhnlichen Auswertung an der Stelle p:

Für $p = (x_1-p_1, ... , x_n - p_n)/J$ gilt nach Definition

$$f(p) = \text{Bild von } f \in A = k[x]/J \text{ bei der natürlichen Abb. } A \longrightarrow A/p \subseteq k(A/p).$$

Wird f durch das Polynom $\tilde{f} \in k[x]$ repräsentiert, so erhalten wir

$$f(p) \quad = f \bmod p$$

$=^2 \tilde{f}(x_1, ..., x_n) \bmod (x_1 - p_1, ..., x_n - p_n)$

$= \tilde{f}(p_1, ..., p_n) \bmod (x_1 - p_1, ..., x_n - p_n)$

$=^3 \tilde{f}(p_1, ..., p_n) \in k$

<u>Probleme</u>:
1) Wir wollen nicht annehmen, daß k algebraisch abgeschlosen ist.
2) Ersetzt man Spec durch Specm, so ist die Konstuktion nicht mehr funktoriell. Sei zum Beispiel

   $h: k[x] \longrightarrow k(x)$

   die natürliche Einbettung des Polynomrings in seinen Quotientenkörper. Das einzige maximale Ideal von k(x) ist das Nullideal 0. Sein vollständiges Urbild bei h ist das Nullideal des Polynomrings. Letzteres ist nicht maximal in k[x] (wenn die Anzahl der Unbestimmten $\neq 0$ ist). Also induziert h keine Abbildung der maximalen Spektren.

Ändern wir jetzt die Situation etwas ab und betrachten die Nullstellen der f_i mit Koordinaten in einer Körpererweiterung K von k:

$p = (p_1,...,p_n) \in K^n$ mit

$f_1(p) = ... = f_m(p) = 0.$

Die Auswertung in p definiert dann k-Algebra-Homomorphismen

$\varphi_p: k[x] \longrightarrow K, f(x) \mapsto f(p),$

$\overline{\varphi}_p : A \longrightarrow K, A := k[x]/J, J := (f_1,...,f_m).$

Da $\overline{\varphi}_p$ nicht mehr surjektiv sein muß, erhalten wir nur noch eine injektive (und nicht mehr notwendig surjektive) Abbildung

$A/\ker(\overline{\varphi}_p) \hookrightarrow K.$

Insbesondere können wir nur noch sagen, daß $\ker(\overline{\varphi}_p)$ ein Primideal ist. Das Bild der Abbildung

$$\{p \in K^n \mid f_1(p) = ... = f_m(p) = 0\} \longrightarrow \text{Spec } k[x]/J$$
$$p \mapsto \ker(\overline{\varphi}_p)$$

muß nicht mehr in der Menge der maximalen Ideal von A = k[x]/J liegen. Es ist sogar leicht zu sehen, daß es für jedes Primideal von Spec A eine Körpererweiterung K von k und eine Nullstelle p der f_i mit Koordinaten in K gibt, die in dieses Primideal abgebildet wird. Man kann also Spec A als die Menge der gemeinsamen Nullstellen der f_i in allen Körpererweiterungen von k auffassen.[4]

Sei nämlich $\wp \in$ Spec A. Dann ist $A/\wp$ eine nullteilerfreie k-Algebra, der Quotientenkörper

---

[2] Wir verwenden $A/p = (k[x]/J)/(x_1-p_1, ..., x_n - p_n)/J = k[x]/x_1-p_1, ..., x_n - p_n)$

[3] Wir verwenden $A/p = k[x]/x_1-p_1, ..., x_n - p_n) = k$

[4] Über k konjugierte Nullstellen gehören dabei allerdings zum selben Primideal.

$$K := Q(A/\wp)$$

also eine Körpererweiterung von k. Sei $\alpha_i \in K$ das Bild von x_i bei der Zusammensetzung natürlicher Abbildungen

$$\varphi: k[x] \xrightarrow{\rho} k[x]/J = A \xrightarrow{\sigma} A/\wp \hookrightarrow Q(A/\wp) = K.$$

Dann gilt

$$\alpha = (\alpha_1,..., \alpha_n) \in K^n$$

und

$$\begin{aligned} f_i(\alpha) &= f_i(\varphi(x)) && \text{(nach Definition von } \alpha) \\ &= \varphi(f_i(x)) && \text{(weil } \varphi \text{ ein k-Algebra-Homomorphismus ist)} \\ &= \sigma(\rho(f_i)) \\ &= \sigma(0) && \text{(wegen } f_i \in J) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, α ist eine gemeinsame Nullstelle der f_i mit Koordinaten aus K.

Behauptung: das zu α gehörige Primideal von A ist gerade $\wp$., d.h.

$$\ker(\overline{\varphi}_\alpha) = \wp.$$

Das Bild von x_i bei φ ist nach Defintion gerade α_i. Das Bild eines Polynoms $F \in k[x]$ ist deshalb gerade

$$\varphi(F)) = \varphi(F(x_1,...,x_n)) = F(\varphi(x_1),...,\varphi(x_n)) = F(\alpha_1,...,\alpha_n) = F(\alpha).$$

Die Auswertung an der Stelle α,

$$\varphi_\alpha: k[x] \longrightarrow \kappa(\alpha) = K, F \mapsto F(\alpha) = \varphi(F),$$

ist damit gerade φ. Durch Faktorisierung über die natürliche Abbildung ρ: $A \longrightarrow A/J$ erhalten wir gerade

$$\overline{\varphi}_\alpha = \sigma,$$

d.h. es ist $\ker(\overline{\varphi}_\alpha) = \ker(\sigma) = \wp$.

<u>Beispiel</u>

$$A = k[x,y]/(y^2-x^3) = k[t^2,t^3], x \mapsto t^2, y \mapsto t^3.$$

Spec (A) enthält außer den gewöhnlichen Punkten der semikubischen Parabel noch den weitern Punkt

$$(t^2, t^3) \in k(t), \text{ t ein Unsbestimmte.}$$

Das zugehörige Primideal ist gerade das Nullideal des Intergritätsbereichts A. Ein Punkt wie der Punkt (t^2, t^3), der zum Null-Ideal eines Integritätsbereichs gehört, heißt auch <u>allgemeiner Punkt</u>.

Einen weiteren allgemeinen Punkt der Kurve $y^2 = x^3$ erhält man, indem man die Unbestimmte t durch eine andere, sagen wir s, ersetzt. Die Punkte (t^2, t^3) und (s^2, s^3) sind konjugiert, wie dies für Punkte zum selben Primideal der Fall sein sollte: der k-Automorphismus der rationalen Funktionenkörper

$$k(s) \longrightarrow k(t), s \mapsto t,$$

überführt (s^2, s^3) in (t^2, t^3).

Teilfunktoren

Sei P: A-Alg $\longrightarrow$ Ens ein Funktor . Ein <u>Teilfunktor</u> von P, ist ein Funktor

$$F: \text{A-Alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

mit

$$F(B) \subseteq P(B)$$

für jede A-Algebra B, wobei diese Einbettungen einen funktoriellen Morphismus definieren, d.h. für jeden Homomorphismus h: B $\longrightarrow$ B' von A-Algebren ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(B) & \subseteq & P(B) \\ F(h)\downarrow & & \downarrow P(h) \\ F(B') & \subseteq & P(B') \end{array}$$

kommutativ.

Wir werden oft

$$F \subseteq P$$

schreiben, um auszudrücken, daß F ein Teilfunktor von P ist.

<u>Bemerkungen</u>

(i) Unser nächstes Ziel ist es jetzt, unter Verwendung der offenen Teilmengen D(I) $\subseteq$ Spec A den Begriff des offenen Teilfunktors zu definieren.

(ii) Wir werden diese Definition zunächst für affine Schemata angeben.

(iii) In einem weitern Schritt verallgemeinern wir diese Definition auf beliebige Funktoren

$$\text{A-Alg} \longrightarrow \text{Ens}.$$

(iv) Insbesondere können wir dann von den offenen Teilfunktoren von

$$\mathbb{P}^n_A: \text{A-Alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

sprechen. Die zugehörigen komplementären abgeschlossenen Teilfunktoren sind dann die von uns benötigten projektiven Schemata.

Offene Teilfunktoren affiner Schemata

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und I $\subseteq$ A ein Ideal von A.
Wir haben jetzt für jede A-Algebra B diejenigen Elemente von

$$\text{Sp(A) (B)} = \text{Hom}_{\text{A-Alg}}(A, B)$$

zu bestimmen, die der durch I definierten offenen Menge D(I) entspricht.
Sei

$$h: A \longrightarrow B$$

ein Homorphismus von Ringen mit 1, d.h. ein Element von Sp(A)(B). Wir betrachten die durch h definierte stetige Abbildung

$$h^{\#}: \text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } A,\ p \mapsto h^{-1}(p),$$

und werden h als zur offenen Menge D(I) gehörig betrachten, wenn das Bild von $h^{\#}$ ganz in D(I) liegt, d.h. wenn gilt

$$h \text{ gehört zur offenen Menge } D(I) \Leftrightarrow h^{\#}(\text{Spec } B) \subseteq D(I).$$

Diese Bedingung ist äquivalent zur Bedingung

$$\text{Spec } B = (h^{\#})^{-1}(D(I)) = D(h(I)) = D(h(I)B).$$

d.h. zu

$$V(h(I)B) = \emptyset.$$

Mit anderen Worten, kein Primideal von B enthält das Ideal h(I)B, d.h. es gilt

$$h(I)\bullet B = B.$$

<u>Definition</u>
Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Ein <u>offener Teilfunktor</u> von

$$Sp(A)\colon A\text{-Alg} \longrightarrow Ens$$

ist ein Teilfunktor $F \subseteq Sp(A)$ mit der Eigenschaft, daß es ein Ideal $I \subseteq A$ gibt mit

$$F(B) = \{h \in Sp(A)(B) \mid h(I)B = B\}$$

für jede A-Algebra B. Bezeichnung:

$$Sp(A)_I := F.$$

<u>Beispiel</u>
Seien A ein kommutativer Ring mit 1, $s \in A$ ein Element und

$$h\colon A \longrightarrow A_s = \{\frac{a}{s^n} \mid a \in A,\ n = 0, 1,2, \ldots\}$$

der natürliche Homomorphismus in den Quotientenring bezüglich der Potenzen von s. Für jede A-Algebra B induziert h eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} Sp(A)_s(B) & \longrightarrow & Sp(A)(B) \\ \| & & \| \\ Hom_{A\text{-Alg}}(A_s,B) & \longrightarrow & Hom_{A\text{-Alg}}(A,B) \\ \varphi & \mapsto & \varphi\circ h \end{array}$$

Diese Abbildungen setzen sich zusammen zu einem funktoriellen Morphismus

$$Sp(A)_s \longrightarrow Sp(A)$$

von Funktoren auf A-Alg mit Werten in Ens. Auf Grund der Universalitätseigenschaft der Quotientenringe sind die natürlichen Homomorphismen

$$Sp_s(A)(B) \longrightarrow Sp(A)(B)$$

injektiv (d.h. $Sp(A)_s$ sich als Teilfunktor von Sp(A) auffassen) und das Bild besteht gerade aus denjenigen Homomorphismen, welche $s \in A$ in eine Einheit von B abbilden, d.h.

$$Sp(A)_s(B) = \{f \in Sp(A)(B) \mid h(s)B = B\}$$

Mit anderen Worten, $Sp(A)_s$ ist der offene Teilfunktor von Sp(A) zum Ideal $I = sA$.

Spezialfall

$A = k[x]$

$s = x \in A$

Es gilt

$$A_s = k[x, \frac{1}{x}] = k[x,y](xy - 1).$$

Dann beschreibt Spec(A) die affine Gerade und Spec A_s die Hyperbel $xy - 1 = 0$ in der affinen Ebene.

Das Bild von Spec(A_s) in Spec(A) kann man sich als das Bild der Hyperbel $xy - 1 = 0$ bei der Projektion der Ebene auf die x-Achse vorstellen, d.h. Spec(A_s) läßt sich mit der punktierten affinen Geraden ohne den Ursprung identifizieren.

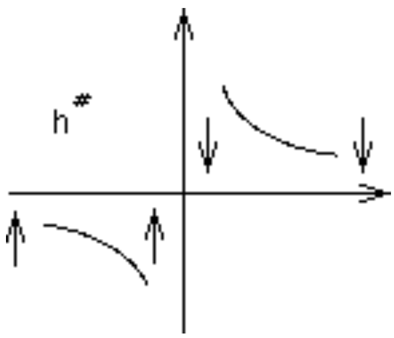
Die natürliche Einbettung

$$A = k[x] \overset{h}{\hookrightarrow} k[x, 1/x] = k[x,y]/(xy - 1) = A_s$$

Induziert auf den Spektren gerade die Projektion parallel zu y-Achse der Hyperbel

$$xy = 1$$

auf die x-Achse, d.h. $h^{\#}$ identifiziert die Hyperbel mit der affinen Geraden, aus welcher der Ursprung entfernt wurde.



Offene Teilfunktoren

Seien P: A-Alg $\longrightarrow$ Ens ein Funktor und F: A-Alg $\longrightarrow$ Ens ein Teilfunktor von P.

Der Teilfunktor F von P heißt <u>offen</u>, wenn für jede A-Algebra B und jeden Morphismus

$$f: Sp(B) \longrightarrow P|_{B\text{-Alg}}$$

von Funktoren auf der Kategorie B-Alg das vollständige Urbild bei f des Teilfunktors $F|_{B\text{-Alg}}$ in Sp(B) ein offener Teilfunktor von Sp(B) ist.

$$\begin{array}{ccc} Sp(B) & \xrightarrow{f} & P|_{B\text{-Alg}} \\ \cup & & \cup \\ f^{-1}(F) & \longrightarrow & F|_{B\text{-Alg}} \end{array}$$

Genauer, der Teilfunktor $f^{-1}(F)$ von Sp(B) mit

$$f^{-1}(F)(C) = f_C^{1}(F(C))$$

für jede B-Algebra C ist offen in Sp(B). Dabei bezeichne f_C die durch f induzierte Abbildung

$$f_C\colon Sp(B)(C) \longrightarrow P(C).$$

Die Funktoren der Gestalt

$$A\text{-}Alg \longrightarrow Ens,\ B \mapsto P(B)\text{-}F(B),$$

mit F offen heißen dann <u>abgeschlossene Teilfunktoren</u> von P.

Ein Funktor P: A-Alg $\longrightarrow$ Ens heißt <u>lokal</u>[5], wenn für jede A-Algebra B und jede Familie $\{b_i\}_{i\in I}$ von Elementen aus B mit

$$\sum_{i\in I} b_i B = B \tag{1}$$

die folgende Sequenz exakt ist in dem Sinne, daß α gerade der Differenzkern der .

$$P(B) \xrightarrow{\alpha} \prod_{i\in I} P(B_{b_i}) \overset{\beta}{\underset{\gamma}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} P(B_{b_i b_j})$$

Abbildungen β und γ ist. Genauer: α ist injektiv und hat als Bild die Menge der Elemente des Proodukts in der Mitte, in denen β und γ denselben Wert haben.

Dabei sei α die Abbildung, deren i-te Koordinaten-Funktion

---

[5] vgl. Demazure & Gabriel: Introduction to algebraic geometry and algebraic groups, Chapter I, §1.3.11. Später werden wir die Elemente der Menge P(B) mit Funktionen auf der Menge Spec(B) identifizieren. Den Funktor P kann man dann als Funktor auffassen, der den offenen Mengen gewisser topologischer Räume Mengen zuordnet. Die Forderung der Lokalität entspricht dann gerade der Bedingung, daß der in dieser Weise betrachtete Funktor eine Garbe ist.
Bedingung (1) bedeutet nämlich gerade, es gilt

$$\text{Spec } B = \bigcup_{i\in I} D(b_i),$$

wobei die natürliche Abbildung auf den Quotientenring $B \longrightarrow B_{b_i}$ die Menge $D(b_i)$ mit Spec B_{b_i} identifiziert,

$$D(b_i) = \text{Spce } B_{b_i}\ .$$

Analog hat man

$$D(b_i) \cap D(b_j) = D(b_i b_j) = \text{Spec } B_{b_i b_j}\ .$$

Die Injektivität von α übersetzt sich dann in die Aussage, daß zwei Funktionen auf Spec(B), deren Einschränkungen auf jedes der $D(b_i)$ gleich sind, selbst schon gleich sind. Die obige Beschreibung des Bildes von α bedeutet, daß jede Familie $\{f_i\}_{i\in I}$ von Funktionen mit der Eigenschaft, daß f_i auf $D(b_i)$ definiert ist und f_i und f_j auf $D(b_i) \cap D(b_j)$ übereinstimmen, durch Einschränken einer auf Spec(B) definierten Funktion entsteht. Dies sind gerade die Garben-Axiome.

$$P(B) \longrightarrow P(B_{b_i})$$

gerade durch Anwenden von P auf die natürliche Abbildung $B \longrightarrow B_{b_i}$, $b \mapsto b/1$ in den Quotienten-Ring ist. Weiter sei β die Abbildung, deren Koordinatenfunktion zum Paar (i,j) die folgende Komposition ist

$$\prod_{i\in I} P(B_{b_i}) \longrightarrow P(B_{b_i}) \longrightarrow P(B_{b_i b_j}).$$

Dabei sei die erste Abbildung links die Projektion auf den i-ten direkten Faktor und die zweite Abbildung rechts entstehe durch Anwenden von P auf die natürliche Abbildung in den Quotienenring $B_{b_i} \longrightarrow B_{b_i b_j} = (B_{b_i})_{b_j}$. Abbildung γ sei in derselben Weise wie β definiert, nur daß die Rollen von i und j zu vertauschen sind (d.h. die Koordinaten-Funktion von γ zum Paar (i,j) ist gerade die Koordinatenfunktion von β zum Paar (j,i)).

<u>Beispiel</u>: der Funktor $\mathbb{P}^n_A$

Der Funktor $\mathbb{P}^n_A$: A-Alg $\longrightarrow$ Ens ist ein Beispiel für einen lokalen Funktor. Der Beweis ist technisch etwas zu aufwendig für diese Vorlesung. Wir verweisen deshal auf das Buch von Demazure & Gabriel: Introduction to algebraic geometry and algebraic groups (Chapter I, §1.3.13).

Ein (algebraisches) <u>Schema</u> über dem Ring A ist ein lokaler Funktor

$$X: \text{A-Alg} \longrightarrow \text{Ens},$$

der eine Überdeckung durch offene Teilfunktoren besitzt, welche affine Schemata sind, d.h. es gibt eine Familie $\{U_i\}_{i\in I}$ von offenen Teilfunktoren von X, welche affine Schemata sind mit

$$X(B) = \bigcup_{i\in I} U_i(B) \tag{2}$$

für jede A-Algebra B, welche ein Körper ist.

<u>Bemerkungen</u>

(i) Es stellt sich hier die Frage, warum man sich bei der letzten Bedingung auf Körper beschränkt. Zur Motivierung stellen wir uns die Elemente von X(B) wieder als auf Spec B definierte Funktionen vor. Ist B ein Körper, so besteht

Spec B

aus genau einem Punkt. Bedingung (2) bedeutet dann gerade, daß das Bild dieses Punktes genau dann in X liegt, wenn es in einem der U_i liegt.

(ii) Schon im Fall, daß B das direkte Produkt eines Körpers mit sich selbst ist, Spec B also aus zwei Punkten besteht, kann man leicht einen Morphismus auf Spec B finden, bei welchem die beiden Bildpunkte nicht im selben U_i liegen.

<u>Offenheitskriterium</u>

Seien X: A-Alg $\longrightarrow$ Ens ein Funktor und $U \subseteq X$ ein Teilfunktor. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) $U \subseteq X$ ist offen.

(ii) Für jede A-Algebra B und jedes Element $\beta \in X(B)$ gibt es ein Ideal $J \subseteq B$, sodaß für jeden Homomorphismus ℓ: $B \longrightarrow C$ von Ringen mit 1 gilt.

$$X(\ell)\beta \in U(C) \Leftrightarrow \ell(J)C = C.$$

Beweis. Nach Definition ist die Offenheit von U in X äquivalent zu der Bedingung, daß es für jede A-Algebra B und jeden funktoriellen Morphismus f: $Sp(B) \longrightarrow X|_{B\text{-Alg}}$ ein Ideal J von B gibt mit

$$f^{-1}(U(C)) = \{\ell \in Sp(B)(C) \mid \ell(J)C = C\}$$

d.h. für jeden Homomorphismus ℓ: $B \longrightarrow C$ von Ringen mit 1 gilt

$$\ell \in f^{-1}(U(C)) \Leftrightarrow \ell(J)C = C.$$

Nun ist

$$f^{-1}(U(C)) = \{ \ell \in Sp(B)(C) \mid f(\ell) \in U(C)\}$$

Weil f ein funktorieller Morphismus ist, besteht ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Sp(B)(C) & \xrightarrow{f} & X(C) \\ Sp(\ell)\uparrow & & \uparrow X(\ell) \\ Sp(B)(B) & \xrightarrow{f} & X(B) \end{array}$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} f^{-1}(U(C)) &= \{\ell: B \longrightarrow C \mid f(\ell) \in U(C)\} \\ &= \{\ell: B \longrightarrow C \mid X(\ell)f(Id_B) \in U(C)\} \end{aligned}$$

Die Offenheitsbedingung bekommt damit die Gestalt

$$X(\ell)f(Id_B) \in U(C) \Leftrightarrow \ell(J)C = C.$$

Dies ist gerade Bedingung (ii) für $\beta = f(Id_B)$. Bedingung (ii) ist damit hinreichend.

Umgekehrt gibt es für jedes $\beta \in X(B)$ einen funktoriellen Morphismus

$$f: Sp(B) \longrightarrow X|_{B\text{-Alg}} \text{ mit } f(Id_B) = \beta.$$

Für Homomorphismen h: $B \longrightarrow C$ von Ringen mit 1 definiert man f durch

$$f_C: Sp(B)(C) \longrightarrow X(C),\ B \xrightarrow{x} C \mapsto X(x)(\beta).$$

Wir haben gezeigt, jedes Element $\beta \in X(B)$ hat die Gestalt $f(Id_B)$ mit einem geeigneten funktoriellen Morphismus. Bedingung (ii) ist damit notwendig.
QED.

Der Funktor $\mathbb{P}^n_A$ als algebraisches Schema

Die Tatsache, daß sich der n-dimensionale projektive Raum durch die offenen Teilmengen $U_0, \dots, U_n$ überdecken läßt, übersetzt sich gerade in die Aussage, daß der Funktor $\mathbb{P}^n_A$ ein algebraisches Schema ist.

Genauer:

Sei $i:Q \hookrightarrow A^{n+1}$ ein direkter Summand vom Rang n von A^{n+1}. Für jede A-Algebra B identifizieren wir $Q\otimes_A B$ mit seinem Bild bei

$$i\otimes B: Q\otimes_A B \longrightarrow A^{n+1}\otimes_A B = B^{n+1}$$

Wir betrachten die natürliche Abbildung

$$\pi_B: B^{n+1} \longrightarrow B^{n+1}/Q\otimes_A B.$$

Weiter sei

$$U_Q: \text{A-Alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

der Teilfunktor von $\mathbb{P}^n_A$ mit

$$\begin{aligned} U_Q(B) &:= \text{Menge der zu } Q\otimes_A B \text{ komplementären Teilmoduln}^{6} \text{ von } B^{n+1} \\ &= \{M \in \mathbb{P}^n_A(B) \mid \pi_B|_M \text{ ist ein Isomorphismus }\} \end{aligned}$$

Behauptung:

(i) U_Q ist für jedes Q ein offener Teilfunktor von $\mathbb{P}^n_A$.

(ii) Die U_Q bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{P}^n_A$ wenn Q die Teilmoduln der Gestalt

$$Q_i = A\bullet e_0+...+Ae_{i-1}+Ae_{i+1}+...+A\bullet e_n$$

durchläuft.

(iii) U_{Q_i} ist für jedes i isomorph zum affinen Raum $\mathbb{A}^n_A = Sp(A[x_1,...,x_n])$.

<u>Beweis</u>. <u>Zu (iii)</u>. Wir beschränken uns auf den Fall i = 0. Die anderen Fälle werden analog behandelt. Für $Q = Q_0 = A\bullet e_1+...+A\bullet e_n$ ist

$$\mathbb{A}^n_A(B) = B^n \longrightarrow U_Q(B),\ (b_1,...,b_n) \mapsto (1,b_1,...,b_n)\bullet B \qquad (1)$$

wohldefiniert.

Für jedes $M\in U_Q(B)$ enthält M ein Element m, welches bei

$$\pi_B: B^{n+1} \longrightarrow B^{n+1}/Q_0\otimes_A B = Be_0$$

in e_0 übergeht, d.h. ein Element von der Gestalt

$$m = (1,b_1,...,b_n).$$

Da das Bild von π_B von e_0 erzeugt wird und die Einschränkung von π_B auf M ein Isomorphismus ist, wird M von m erzeugt. Mit anderen Worten, M liegt im Bild von (1). Die Abbildung (1) ist damit bijektiv, d.h.

$$U_Q \cong \mathbb{A}^n_A$$

ist das affine Schema zum Polynomring in n Unbestimmten.

---

[6] Man beachte, als direkte Summanden von B^{n+1} sind diese komplementären Moduln M endlich erzeugt: es gibt eine B-lineare Surjektion $B^{n+1} \longrightarrow M$.

Zu (ii). Sei B ein Körper. Die Elemente $M \subseteq \mathbb{P}^n_A(B)$ sind dann gerade die Teilvektorräume der Dimension 1 von B^{n+1}. Die Vektoren aus Q_i haben als i-te Koordinate die Null. Für die Vektoren aus dem Durchschnitt gilt dies für alle i, d.h. der Durchschnitt der Q_i ist der Null-Vektorraum. Deshalb liegt M nicht im Durchschnitt der Q_i. Sei jetzt i so gewählt, daß M nicht in Q_i liegt. Dann ist M komplementär zu Q_i, d.h.

$$M \in U_{Q_i}(B).$$

Wir haben gezeigt, die U_{Q_i} überdecken $\mathbb{P}^n_A$.

Zu (i). Wir haben zu zeigen, für jede A-Algebra B, jedes $\beta \in \mathbb{P}^n_A(B)$ gibt es ein Ideal $J \subseteq B$, sodaß für jeden Homomorphismus $h: B \longrightarrow C$ von Ringen 1 gilt

$$\mathbb{P}^n_A(h)\beta \in U_Q(C) \Leftrightarrow h(J)C = C.$$

Sei also $\beta \in \mathbb{P}^n_A(B)$ ein direkter Summand von B^{n+1} vom Rang 1. Der Modul

$$\mathbb{P}^n_A(h)\beta = \beta \otimes_B C$$

ist genau dann komplementär zu $Q \otimes_A C$, wenn die Einschränkung von π_C auf $\beta \otimes_B C$ ein Isomorphismus ist:

$$\mathbb{P}^n_A(h)\beta \in U_Q(C) \Leftrightarrow \nu_C := \pi_C|\beta\otimes_B C : \beta\otimes_B C \longrightarrow C^{n+1}/Q\otimes_A C \text{ bijektiv.}$$

Da ν_C eine C-lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten projektiven C-Moduln desselben Rangs ist, ist die Bijektivität äquivalent zur Surjektivität,[7] d.h. äquivalent zu

$$0 = \operatorname{coker} \nu_C = (\operatorname{coker} \nu_B)\otimes_B C$$

Sei J der Annullator von $\operatorname{coker} \nu_B$. Dann ist die letzte Bedingung genau dann erfüllt, wenn gilt[8]

$$h(J)C = C.$$

QED.

Projektive Schemata

Ein projektives Schema über dem Ring A ist ein abgeschlossener Teilfunktor des Funktors $\mathbb{P}^n_A$.

Wir sind jetzt soweit, den wichtigsten Gegenstand der Weil-Vermutungen zu definieren.

1.3.6 Die Zeta-Funktion eines projektive Schemas

Seien k ein endlicher Körper und

[7] siehe den Anhang 'Kommutative Algebra', Abschnitt 'projektive Moduln'.
[8] siehe den Anhang 'Kommutative Algebra', Abschnitt 'Träger und Annullatoren'.

$$X: k\text{-Alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

ein projektives Schema über k. Weiter bezeichne k_r die Erweiterung vom Grad r des Körpers k und

$$N_r := N_r(X) := \# X(k_r)$$

die Anzahl der k^r-rationalen Punkte von X. Dann heißt die formale Potenzreihe mit rationalen Koeffizienten

$$Z(t) = Z(X, t) := \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} N_i(X)\cdot\frac{t^i}{i}\right)$$

Zeta-Funktion von X.

Beispiel

Seien $k = \mathbb{F}_q$ der Körper mit $q = p^f$ Elementen $X = \mathbb{P}^1_k$ die projektive Gerade. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^1_k(k_r) &= \{[x,y] \mid (x,y) \in (k_r)^2 - \{0\}\} \\
&= U_0 \cup \{[0,y] \mid (x,y) \in (k_r)^2 - \{0\}\} \\
&= U_0 \cup \{[0,1]\}
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
N_r &= \# U_0 + 1 \\
&= \# k_r + 1 \\
&= q^r + 1
\end{aligned}$$

denn k_r ist ein r-dimensionaler Vektorraum über dem q-elementigen Körper k. Damit ist

$$Z(\mathbb{P}^1_k, t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} (q^i + 1)\cdot\frac{t^i}{i}\right)$$

Wegen $\log(1-t) = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i}$ erhalten wir

$$Z(\mathbb{P}^1_k, t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)}$$

Man beachte, es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-t)(1-qt)} &= \exp\left(\log\left(\frac{1}{(1-t)(1-qt)}\right)\right) \\
&= \exp(-\log(1-t) - \log(1-qt)) \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(qt)^i}{i}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}(q^i+1)\cdot\frac{t^i}{i}\right) \\
&= Z(t).
\end{aligned}$$

Die Zeta-Funktion der projektiven Geraden ist also eine rationale Funktion.

Bemerkungen

(i) Uns fehlt noch ein Begriff zur Formulierung der Weil-Vermutungen, nämlich der Begriff des glatten Schemas. Glatte Schemata sind solche ohne Singularitäten, zum Beispiel Kurven ohne Selbstschnitte oder Spitzen. Über den komplexen

Zahlen bedeutet die Bedingung der Glattheit, daß die Schemata komplexe Mannigfaltigkeiten sind.

(ii) Leider ist eine formale Defintion des glatten Schemas komplexer und technischer als die bisher eingeführten Begriffe. Wir werden die Definition deshalbt auf später verschieben und Weil-Vermutugen formulieren ohne diese Definition vorher anzugeben. Sie sollten deshalb im Auge behalten, daß die betrachteten Schemata noch eine weitere Bedingung erfüllen müssen, die erst später präzise angegeben wird.

(iii) Der unten verwendete Begriff der Irreduzibilität ist einfacher Natur: ein Schema heißt reduzibel, wenn es Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilvarietäten ist, und andernfalls irreduzibel.

1.3.7 Die Weil-Vermutungen

Seien k ein endlicher Körper,

$$X: k\text{-Alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

ein glattes irreduzibles projektives Schema der Dimension n und Z(t) dessen Zeta-Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen.

Rationalität

Z(t) ist eine rationale Funktion in t, d.h. ein Quotient von zwei Polynomen, mit rationalen Koeffizienten.

Funktionalgleichung

Es gibt eine ganze Zahl E mit[9]

$$Z\left(\frac{1}{q^n t}\right) = \pm\, q^{nE/2}\, t^E \bullet Z(t).$$

Analogon der Riemann-Vermutung

$$Z(t) = \frac{P_1(t)\bullet P_3(t)\bullet\ldots\bullet P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\bullet P_2(t)\bullet\ldots\bullet P_{2n}(t)}$$

Dabei sind die P_i ganzzahlige Polynome mit

$$P_0(t) = 1 - t$$

$$P_{2n}(t) = 1 - q^n t$$

$$P_i(t) = \prod_j (1 - \alpha_{ij} t) \quad \text{für } i = 1,\ldots,2n-1$$

wobei die α_{ij} algebraische ganze Zahlen sind mit $|\alpha_{ij}| = q^{i/2}$.[10]

Betti-Zahlen

Sei $B_i = B_i(X)$ der Grad des Polynoms $P_i(t)$. Dann gilt

---

[9] Die Zahl E wird genau beschrieben: es ist die Selbstschnittzahl der Diagonalen von X×X und äquivalent die höchst Chern-Klasse des Tangentialbündels von X.

[10] Man kann zeigen, diese Bedingungen bestimmen die Polynome P_i eindeutig, falls sie existieren.

Die Bedingungen $|\alpha_{ij}| = q^{i/2}$ implizieren, die Nullstellen von P_i liegen auf der Geraden mit dem Realteil i/2.

$$E = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i B_i$$

Seien

$$Y: \text{R-Alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

ein projektives irreduzibles Schema über dem Ring R der ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlenkörpers, p ein Primideal von R und

$$R \longrightarrow R/p \subseteq Q(R/p) = k$$

der natürliche Homomorphismus auf den Restklassenkörper modulo p. Dann ist jede k-Algebra auch eine R-Algebra und (weil R ganze in $\mathbb{R}$ liegt) auch jede $\mathbb{C}$-Algebra auch eine R-Algebra.

Es gelte

$$X = Y|_{k\text{-Alg}}$$
$$Z = Y|_{\mathbb{C}\text{-Alg}}$$

Dann ist für i = 0,...,2n

$$B_i = \dim_{\mathbb{R}} H^i(Z, \mathbb{R})$$

Dabei bezeichne $H^i(Z, \mathbb{R})$ die i-te singuläre Kohomologie der komplexen Mannigfaltigkeit Z.

Zur Definition der singulären Kohomologie eines topologischen Raumes

<u>Definition</u>

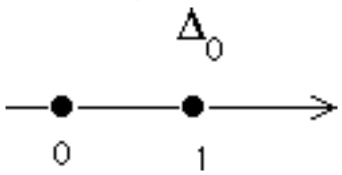
Für jede nicht-negative ganze Zahl n ist das n-dimensionale <u>Standard-Simplex</u> definiert als der folgende topologische Unterraum des $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\Delta_n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0 \text{ für jedes } i\}$$

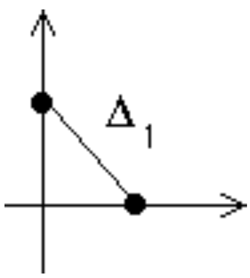
<u>Beispiele</u>

Für n = 0 besteht Δ_n offensichtlich aus nur einem Punkt auf der reellen Geraden,

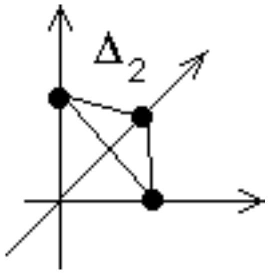
$$\Delta_0 = \{1\}.$$



Für n = 1 ist Δ_n die Strecke der reellen Ebene, welche die Punkte (1,0) und (0,1) verbindet.



Für n = 2 ist Δ_n das Dreieck im Raum mit den Ecken (1,0,0), (0,1,0) und (0,0,1).



Für n = 3 ist Δ_n ein Tetraeder im 4-dimensionalen Raum.

Definition

Sei X ein topologischer Raum. Ein singuläres n-Simplex oder auch n-dimensionales singuläres Simplex von X ist eine stetige Abbildung

$$\sigma\colon \Delta_n \longrightarrow X.$$

Bemerkungen

(i) Im Fall n = 0 ist σ im wesentlichen dasselbe wie ein Punkt. Im Fall n = 1 verbindet man mit σ die Vorstellung einer Kurve in X, im Fall n = 2 die eines gekrümmten Dreiecks, im Fall n = 3 die eines gekrümmten Tetraeders, usw.

(ii) Das Wort singulär soll darauf hinweisen, daß diese geometrischen Objekte entarten können, im Extremfall zu einem Punkt, wenn σ eine konstante Abbildung ist. Wir müssen das Entarten zulassen, weil andernfalls die zu konstruierenden Homologie- und Kohomologie-Gruppe keine Funktoren wären.

Definition

Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie[11]. Ein Komplex K über $\mathcal{C}$ besteht aus einer Folge von Morphismen aus $\mathcal{C}$ der Gestalt

$$K\colon \ldots \longrightarrow K_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} K_i \xrightarrow{d_i} K_{i-1} \longrightarrow \ldots$$

mit $d_i \circ d_{i+1} = 0$[12] für jedes i. Das Objekt K_i heißt dann der Bestandteil des Grades i von K oder auch die Komponente des Grades i von K. Manchmal sagt man auch Dimension anstelle von Grad. Der Morphismus d_i heißt i-ter Randoperator von K oder auch i-tes Differential.

Seien K und L zwei Komplexe über $\mathcal{C}$. Ein Morphismus

$$f\colon K \longrightarrow L$$

von Komplexen über $\mathcal{C}$ ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & K_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"'] & K_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"'] & K_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"'] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & L_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] & L_i \arrow[r, "d_i"] & L_{i-1} \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd},$$

dessen obere Zeile gerade der Komplex K und dessen untere Zeile der Komplex L ist.

Das Objekt

$$H_i(K) := \mathrm{Ker}(d_i)/\mathrm{Im}(d_{i+1})$$

---

[11] Es sollen Kerne, Kokerne (also auch Bilder) und ein Nullobjekt existieren. Weiter sollen die Hom-Funktoren Werte in der Kategorie der abelscen Gruppen annehmen, d.h. für jedes Objekt X von $\mathcal{C}$ erhält man Funktoren

$$h^X\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, ?) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ab} \text{ und } h_X\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, X)\colon \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ab}.$$

[12] Jede Hom-Menge einer additiven Kategorie enthält als abelsche Gruppe genau ein 0-Element. Es ist gerade der eindeutig bestimmte Morphismus, der sich über ein Null-Objekt faktorisiert.

heißt i-tes Homologie-Objekt oder auch i-te Homologie von K.

Bemerkungen

(i) Die Komplexe über $\mathcal{C}$ bilden zusammen mit den so definierten Morphismen (und der offensichtlichen Morphismen-Komposition) eine Kategorie
$$\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$$
welche wieder additiv ist.

(ii) Für jedes i definiert die i-te Homologie einen Funktor
$$H_i: \mathcal{C}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{C},\ K \mapsto H_i(K).$$
Dieser Funktor ist additiv, d.h. für je zwei Komplexe K und L ist die Abbildung
$$Hom(K,L) \longrightarrow Hom(H_i(K), H_i(L)),\ K \xrightarrow{f} L \mapsto H_i(K) \xrightarrow{H_i(f)} H_i(L),$$
ein Gruppen-Homomorphismus.

Bezeichnungen
$$K^i := K_{-i},\ d^i := d_{-i},\ H^i := H_{-i}$$

Beispiel

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}$:= Ab die Kategorie der abelschen Gruppen. Für jede nicht-negative ganze Zahl n sei
$$S_n(X)$$
die von den singulären n-Simplexen von X erzeugte freie abelsche Gruppe. Die so definierten abelschen Gruppen bilden einen Komplex
$$S(X)$$
mit den wie folgt definierten Randoperatoren
$$d_n: S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X),$$
welcher singulärer Komplex heißt.

Zur Definition von d_n genügt es, die Werte von d_n auf den Elementen eines freien Erzeugendensystems anzugeben, d.h. es reicht
$$d_n(\sigma)$$
zu definieren für jedes n-Simplex $\sigma: \Delta_n \longrightarrow X$. Dazu betrachten wir die i-te Randabbildung
$$\varepsilon_i: \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n,\ (x_0,\dots,x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots , x_{i-1} , 0, x_i , \dots , x_{n-1})$$
welche das (n-1)-Standardsimplex mit der der i-ten Seite des n-Standardsimplex identifiziert (d.h. mit der Seite, die der i-ten Ecke gegenüberliegt). Die Zusammensetzungen von σ mit den Abbildungen ε_i sind singuläre (n-1)-Simplexe des Raums X. Wir setzen
$$d_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma\circ\varepsilon_i.$$
Zum Beweis der Komplex-Eigenschaft.
$$d_{n-1}\circ d_n = 0.$$
Das Simplex $\sigma\circ\varepsilon_i$ entsteht aus σ durch Weglassen der i-ten Ecke. Wendet man den Randoperator zweimal an, so werden auf alle möglichen Weisen zwei Ecken weggelassen und aus den Ergebnissen eine vorzeichenbehaftete Summe gebildet. Für je zwei Indizes i, j werden die i-te und die j-te Ecke zweimal weggelassen: einmal zuerst die i-te und dann die j-te und zum anderen erst die j-te und dann die i-te. Im Fall $i < j$ ist das zugehörige Vorzeichen im ersten Fall

$$(-1)^{i+j-1}$$

und im zweiten Fall

$$(-1)^{i+j}.$$

Die Vorzeichen sind unterschiedlich, d.h. die beiden Summanden heben sich weg.

Bemerkungen

(i) Der Übergang zum singulären Komplex definiert einen Funktor

$$S: \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Ab}^{\mathbb{Z}},\ X \mapsto S(X).$$

Für jede stetige Abbildung f: $X \longrightarrow X'$ bildet der zugehörige Komplex-Morphismus

$$S(f): S(X) \longrightarrow S(X')$$

das Simplex $\sigma: \Delta_n \longrightarrow X$ von X ab in das Simplex $f\circ\sigma: \Delta_n \longrightarrow X \longrightarrow X'$ von X'. Man beachte die Simplexe σ von X bilden freien Erzeugendensysteme der $S_n(X)$.

(ii) Die Zusammensetzung des Funktors S mit dem Funktor H_i heißt i-te singuläre Homologie. Bezeichnung:

$$H_i(X) := H_i(S(X)).$$

(iii) Sei A ein abelsche Gruppe. Die Zusammensetzung der Funktoren S, $\otimes A$ und H_i heißt i-te singuläre Homologie mit Koeffizienten in A. Bezeichnung:

$$H_i(X,A) := H_i(S(X)\otimes_{\mathbb{Z}} A).$$

Man beachte, ist A ein Ring, so liegen die Werte dieses Funktors in der Kategorie der Moduln Mod-A über diesem Ring. Ist A ein Körper, so erhält man insbesondere Vektorräume.

(iv) Sei A eine abelsche Gruppe. Die Zusammensetzung der Funktoren S, h_A und H^i heißt i-te singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in A. Bezeichnung:

$$H^i(X,A) := H^i(\mathrm{Hom}_{Ab}(S(X), A)).$$

Man beachte, der singuläre Komplex S(X) hat die Gestalt

$$\ldots \longrightarrow S_2(X) \longrightarrow S_1(X) \longrightarrow S_0(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots,$$

sodaß man nach Anwenden des kontravarianten Hom-Funktors einen Komplex der Gestalt

$$.. \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(S_0(X), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S_1(X), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S_2(X), A) \longrightarrow ..$$

erhält.

Der Fall der projektiven Geraden

Für $X = \mathbb{P}^1_k$ mit einem Körper aus $q = p^f$ Elementen haben wir bereits gesehen,

$$Z(\mathbb{P}^1_k, t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)}$$

ist eine rationale Funktion. Durch direktes Nachrechnen sieht man, es besteht die Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} Z(\tfrac{1}{qt}) &= \frac{1}{(1-1/(qt))(1-q/(qt))} \\ &= \frac{q^2t^2}{(qt-1)(qt-q)} \\ &= \frac{qt^2}{(1-qt)(1-t)} \end{aligned}$$

$$= qt^2 Z(t)$$

mit E = 2.

Dies soll gerade die <u>Selbstschnittzahl</u> der Diagonalen

$$\Delta \subset \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$$

sein. Die Diagonale ist durch die Gleichung

$$ad - bc = 0$$

gegeben. Identifiziert man $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ vermittels der Einbettung

$$\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \hookrightarrow \mathbb{P}^3_k, \quad ([a,b],[c,d]) \mapsto [ac,ad,bc,bd],$$

mit der Quadrik

$$Q := V(xw - yz) \subseteq \mathbb{P}^3_k$$

so wird die Diagonale gerade zu der Kurve mit der Gleichung

$$y = z.$$

Da das Schnittverhalten von Flächen im $\mathbb{P}^3_k$ nur von deren Grad abhängt, können wir statt Δ mit sich selbst auch Δ mit einer beliebigen anderen Hyperebene schneiden, sagen wir mit x = z. Wir erhalten für die Schnittmenge die Gleichungen

$$\begin{aligned} X &:= x - z &&= 0 \\ Y &:= y - z &&= 0 \\ (X+z)w &- (Y+z)z &&= 0 \end{aligned}$$

d.h.

$$X = 0,\ Y = 0,\ zw - z^2 = 0.$$

d.h.

$$X = 0,\ Y = 0,\ z(w - z) = 0.$$

In den neuen Koordinaten X, Y, z, w erhalten wir die Punkte [0,0,0,1] und [0,0,1,1] als Schnittmenge, d.h.

$$\Delta \bullet \Delta = 2.$$

Das Analog der Riemannschen Vermutung gilt trivialerweise mit

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 - t \\ P_1(t) &= 1 \\ P_2(t) &= 1 - qt \end{aligned}$$

Die Polynome haben die Grade $B_0 = 1$, $B_1 = 0$, $B_2 = 1$. Nun ist k eine $\mathbb{Z}$-Algebra bezüglich der Algebra

$$\mathbb{Z} \longrightarrow k,\ n \mapsto n\bullet 1_k,$$

und es gilt

$$\mathbb{P}^1_k = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}|_{k\text{-Alg}}$$

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}|_{\mathbb{C}\text{-Alg}}$$

Nach den Weilschen Vermutungen über die Betti-Zahlen, müssen die Betti-Zahlen der komplexen projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ gerade 1, 0 und 1 sein.

$$B_i = \dim_{\mathbb{R}} H^i(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}) \text{ für } i = 0, 1, 2.$$

Nun ist $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ aber gerade die Riemannsche Zahlenkugel. Die angegebenen Betti-Zahlen bedeuten gerade folgendes:

$B_0 = 1$: Je zwei Punkte im $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ unterscheiden sich um einen Rand, d.h. sie lassen sich durch eine Kurve verbinden.

$B_1 = 0$: Jede geschlossene Kurve im $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ist Rand eines Flächenstücks.

$B_2 = 1$: Jede randlose Fläche im $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ bildet zusammen mit einem Vielfachen von $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ einen Rand.

<u>Bemerkungen</u>

(i) Zum Vergleich, die Betti-Zahlen eines Torus sind 1, 2, 1.

(ii) Allgemein kann man zeigen, B_0 ist die Dimension der $\mathbb{R}$-Vektorraums, der von den linearen Zusammenhängskomponenten erzeugt wird. Die obigen Betti-Zalen B_0 drücken also nur aus, daß die 2-Sphäre und der Torus linear zusammenhängend sind.

(iii) Allgemein kann man zeigen, eine kompakte n-Mannigfaltigkeit hat die Betti-Zahl B_n wenn sie orientierbar ist und andernfalls die Betti-Zahl $B_n = 0$. Die obigen Betti-Zahlen B_2 drücken also nur aus, daß die Sphäre und der Torus orientierbar sind.

(iv) Die Berechnung der (Ko-) Homologie-Gruppen ist Gegenstand der algebraischen Topologie aber auch der Differentialtopologie. Klassische Lehrbücher in diesem Kontext sind zum Beispiel die folgenden.
Milnor: Morse theory, Princeton University Press 1963
Hirsch: Differential topology, Springer, New York 1994
De Rham: Varieties differentiables, Paris 1954.

1.3.8 Zum weiteren Verlauf

Unser Ziel im weiteren ist eine genauere und weniger formale Beschreibung der oben auftretenden Begriffe und eine formal korrekte Einführung der Begriffe, die noch nicht definiert wurden.

Insbesondere wollen wir für die ‘Schemata’ genannten Funktoren X eine geometrischere Beschreibung finden: wir wollen X(B) interpretieren als Menge von Funktionen Spec(B) $\longrightarrow$ X mit einem geeignet gewählten Raum X. Dies zwingt uns, den Funktionenbegriff zu axiomatisieren durch die Einführung des Begriffs der Garbe. Das klassische Lehrbuch zur Garben-Theorie ist das von Godement,

Godement, R.: Topologie algebrique et theorie des faisceaux, Hermann, Paris.

Die von uns benötigten Teile der Garben-Theorie (zusammen mit den für uns wichtigen Beispielen) findet man im Buch von Hartshorn zur algebraischen Geometrie.

Danach wollen wir eine Kohomologie-Theorie entwickeln, die Garbenkohomologie der algebraischen Schemata.

Diese ist leider nicht die Kohomologie-Theorie, die wir für den Beweis der Weil-Vermutungen brauchen und die sich Etal-Kohomologie nennt. Wir werden aber die Eigenschaften der Etal-Kohomologie beschreiben und angeben, wie sich daraus die Weil-Vermutungen ableiten.

2. Garben

2.1 Topologische Räume als Kategorien

Sei X ein topologischer Raum. Wir identifizieren X mit der wie folgt definierten Kategorie, welche ebenfalls mit X bezeichnet wird.

Die Objekte der Kategorie X sind gerade die offenen Mengen von X,

$$\mathrm{Ob}(X) = |\mathfrak{X}| := \{U \subseteq X \mid U \text{ offen in } X\}.$$

Die Morphismen von X sind die natürlichen Einbettungen offener Mengen ineinander, d.h. für je zwei offenen Mengen U', U" von X besteht

$$\mathrm{Hom}_X(U', U")$$

nur aus der natürlichen Einbettung $U' \hookrightarrow U"$ von U' in U", falls U' eine Teilmenge von U" ist, und andernfalls ist diese Hom-Menge leer. Die Morphismenkomposition in dieser Kategorie ist die gewöhnliche Zusammensetzung von Abbildungen.

2.2 Prägarben

Seien X ein topologisdcher Raum und $\mathcal{C}$ eine Katorie. Eine Prägarbe auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ ist ein kontravarianter Funktor auf X mit Werten in $\mathcal{C}$, d.h. ein Funktor

$$F: X^{op} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Dabei bezeichne $\mathcal{D}^{op}$ für jede Kategorie $\mathcal{D}$ die zu $\mathcal{D}$ duale Kategorie.
Jeder offenen Menge U von X wird also ein Objekt

$$F(U) \in \mathcal{C}$$

zu geordnet. Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Mengen sind, so heißen die Elemente von F(U) auch Schnitte von F über U. Für

$$s \in F(U)$$

sagt man auch, s ist ein auf U definierter Schnitt von F.

Für je zwei offene Mengen $U',U" \in X$ mit $U' \subseteq U"$ hat man einen Morphismus von $\mathcal{C}$, der Restriktion von F heißt und wie folgt bezeichnet wird.

$$\rho^{U'}_{U"}:F(U") \longrightarrow F(U').$$

Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Mengen sind, und ist $s \in F(U")$ ein Schnitt von F über ", schreibt man auch

$$s|_{U'} := \rho^{U'}_{U"}(s)$$

und nennt s die Einschränkung von s auf U'. Für jeden Punkt $x \in X$ bilden die offenen Mengen von X, welche den Punkt x enthalten ein (kofiltriertes) inverses System der Kategorie X, also ein (filtrieres) direktes System im Dual von X. Der direkte Limes

$$F_x := \varinjlim_{x \in U} F(U)$$

heißt Halm von F im Punkt x.

Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Mengen[13] sind, so heißen die Elemente der Menge F_x Keime. Einen Keim kann man als Äquivalenzklasse auf der Menge der Paare

---

[13] Genauer: die Mengen sollen mit gewissen Operationen

$$(U, s)$$

auffassen mit

$U \subseteq X$ offene Umgebung von x und $s \in F(U)$.

Dabei werden zwei Paare (U', s') und (U'', s'') als äquivalent angesehen, wenn es eine offene Menge $W \subseteq X$ gibt mit

$$x \in W \subseteq U' \cap U'' \text{ und } s'|_W = s''|_W.$$

Die durch den Schnitt $s \in F(U)$ definierte Äquivalenzklasse wird mit

$$s_x$$

bezeichnet und heißt Keim von s im Punkt $x \in U$.
Die Menge der Äquivalenzklassen ist dann wieder ein Objekt der Kategorie $\mathcal{C}$.[14]
Ein Morphismus $F \longrightarrow G$ von Prägarben $F, G: X^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$ ist eine natürliche Transformation (oder auch funktorieller Morphismus).

Beispiel 1
Seien X und Y zwei topologische Räume. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ sei

$$C_X(U) := \mathrm{Hom}_{Top}(U, Y)$$

die Menge der stetien Abbildungen $U \longrightarrow Y$. Dann ist C_X eine Prägarbe auf X mit Werten in der Kategorie **Ens** der Mengen. Ist Y ein topologischer Ring, zum Beispiel

$$Y = \mathbb{R},$$

so ist C_X sogar eine Prägarbe mit Werten in der Kategorie der Ringe, d.h. eine Garbe von Ringen.

Beispiel 2
Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ sei

$$\Gamma_f(U) := \{s: U \longrightarrow Y \mid s \text{ stetig und } f \circ s = Id_U\}$$

die Menge der auf U definierten Schnitte von f. Dann ist Γ_f eine Prägarbe von Mengen.

Sind die Fasern von f Mengen, die mit gewissen Operationen ω versehen sind, so definieren diese Abbildungen auf den Faserproddukten[15]

$$X \times_Y \ldots \times_Y X \longrightarrow X, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \omega(x_1, \ldots, x_n).$$

$$(s_1, \ldots, s_n) \mapsto \omega(s_1, \ldots, s_n)$$

versehen sein, wobei die Restriktionen der Prägarbe F mit diesen Operationen kommutieren,

$$\rho(\omega(s_1, \ldots, s_n)) = \omega(\rho(s_1), \ldots, \rho(s_n)).$$

[14] Die Operationen auf F_x werden repräsentantenweise definiert:

$$\omega((s_1)_x, \ldots, (s_n)_x) := \omega(s_1, \ldots, s_n)_x.$$

Diese Definition ist korrekt, weil die Restriktionen von F mit ω kommutieren.

[15] Ein Punkt von $X \times_Y \ldots \times_Y X$ ist ein n-Tupel von Punkten aus X, dessen sämtliche Koordinaten in derselben Faser von f liegen.

Ist letztere Abbildung stetig, so läßt sich die Operation ω auf die Mengen der Schnitte von Γ_f fortsetzen, d.h. Γ_f ist eine Prägarbe mit Werten in einer entsprechenden Kategorie.

Beispiel 3
Sei $X = \mathbb{R}^n$. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ sei

$$C^r_X(U) := \{f\colon U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist r-mal stetig differenzierbar}\}$$

Dann ist C^r_X eine Prägarbe von Ringen für $r = 0, 1, \ldots, \infty$)
Bezeichnet

$$C^\omega_X(U)$$

die Menge der Funktionen $U \longrightarrow \mathbb{R}$, die sich in jedem Punkt von U lokal in eine Potenzreihe entwickeln lassen (d.h. die Taylor-Entwicklung konvergiert), so ist

$$C^\omega_X$$

eine Prägarbe von Ringen. Für $x \in X$ ist der Halm

$$C^\omega_{X,x}$$

gerade der Ring der in x konvergenten Potenzreihen mit reellen Koeffizienten.

Beispiel 4
Sei $X = \mathbb{C}^n$. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ sei

$$\mathcal{O}_X(U)$$

die Menge der holomorphen[16] Funktionen $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann ist $\mathcal{O}_X$ eine Prägarbe von Ringen. Für $x \in X$ ist der Halm

$$\mathcal{O}_{X,x}$$

gerade der Ring der in x konvergenten Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten.

Beispiel 5
Sei Spec A das Spektrum eines kommutativen Rings A mit 1, versehen mit der Zariski-Topologie[17]. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ sei

---

[16] d.h. $f=f(z_1,\ldots,z_n)$ ist stetig differenzierbar als Funktion der Real- und Imaginärteile der z_i und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0$$

für jedes i (d.h. f ist Lösung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen). Äquivalent: f läßt sich lokal in jedem Punkt $a = (a_1,\ldots,a_n) \in U$ in eine konvergente Potenzreihe

$$\sum_{v_1,\ldots,v_n} a_{v_1,\ldots,v_n} (z_1-a_1)^{v_1} \bullet \ldots \bullet (z_n-a_n)^{v_n}$$

entwickeln.

[17] d.h. die abgeschlossenene Mengen sind geraden die Mengen der Gestalt

$$V(M) := \{x \in \text{Spec } A \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } f \in M\} \text{ mit } M \subseteq A.$$

$$\mathcal{O}_X(U)$$

die Menge der auf U definierten regulären Funktionen, d.h. der Funktionen, die sich lokal als Quotienten von Elementen aus A schreiben lassen. Genauer, die Schnitte von $\mathcal{O}_X$ über U sind die Abbildungen

$$f: U \longrightarrow \vee_{x\in \mathrm{Spec}\, A} A_x\ ,$$

welche auf U definiert sind, welche Werte in der disjunkten Vereinigung der Lokalisierungen A_x von A in den Primidealen x von A annehmen und welche die folgendne Bedingungen erfüllen.

1. $f(x) \in A_x$ für jedes $x \in U$.
2. Für jedes $x \in U$ gibt es eine offene Menge W und Elemente $u, v \in A$ mit
   (a) $x \in W \subseteq U$.
   (b) v liegt in keinem Primideal von W.
   (c) $f(w) = \frac{u}{v} \in A_w$ für jedes $w \in W$.

Dann ist $\mathcal{O}_X$ eine Garbe von kommutativen Ringen mit 1 auf X mit

(i) $\mathcal{O}_{X,x} = A_x$ für jedes $x \in X$.

(ii) $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$ für jedes $f \in A$.

(iii) $\mathcal{O}_X(X) = A$.[18]

<u>Beweis</u> Siehe Hartshorne: Algebraic geometry, Proposition II.2.2. An dieser Stelle wird sogar gezeigt, daß $\mathcal{O}_X$ eine Garbe ist. Der Beweis ist vergleichsweise technisch. Einen einfachereren Beweis in einem Spezialfall, bei welchem die Beweisidee etwas besser erkennbar ist, findet man im Buch von Schafarevic:

Scharfarevic: Basic algebraic geometry, Part II, Chapter V, § 2.3.

<u>QED</u>.

Vereinbarung

Im folgenden sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Mengen mit gewissen Operationen und deren Morphismen Abbildungen sind, die diese Operationen respektieren.

2.3 Garben

Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine <u>Garbe</u> auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ ist eine Prägarbe

$$F: X^{op} \longrightarrow \mathcal{C},$$

mit der Eigenschaft, daß für jede offene Menge $U \subseteq X$ und jede offene Überdeckung

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i$$

die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Zwei Schnitte s', s" von F über U sind genau dann gleich, wenn ihre Einschränkungen auf alle U_i gleich sind:

$$s' = s" \Leftrightarrow s'|_{U_i} = s"|_{U_i} \text{ für jedes } i \ni I.$$

Dabei sei f(x) gerade das Bild von f bei der natürlichen Abbildung $A \longrightarrow A/x$.

[18] Das ist gerade die Aussage von (ii) im Fall f = 1.

(ii) Für jede Familie $(s_i)_{i\in I}$ von Schnitten $s_i\in F(U_i)$ mit

$$s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j} \text{ für je zwei } i, j \in I$$

gibt es einen Schnitt $s \in F(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für jedes $i\in I$.

Bemerkungen

(i) Der Garben-Begrif axiomatisiert die Tatsache, daß sich die meisten Arten von Funktionen, die in der Mathematik eine Rolle spielen, lokal definieren lassen.

(ii) Die beiden Axiome drückt man oft auch dadurch aus, daß man sagt, die folgende Sequenz ist exakt.

$$F(U) \xrightarrow{\beta} \prod_{i\in I} F(U_i) \underset{\alpha''}{\overset{\alpha'}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} F(U_i\cap U_j)$$

Dabei sei β der Morphismus,

$$s \mapsto (s|_{U_i})_{i\in I},$$

α' der Morphismus

$$(s_i)_{i\in I} \mapsto (s_i|_{U_i\cap U_j})_{i,j\in I},$$

und α'' der Morphismus

$$(s_i)_{i\in I} \mapsto (s_j|_{U_i\cap U_j})_{i,j\in I}.$$

Die Forderung der Exaktheit soll dabei bedeuten, daß β injektiv sein soll und ein Element x des direkten Produkts in der Mitte genau dann im Bild von β liegt, wenn es bei α' und α'' dasselbe Bild hat:

$$x \in \mathrm{Im}(\beta) \Leftrightarrow \alpha'(x) = \alpha''(x).$$

(iii) Die in 2.2 angegebenen Beispiele für Prägarben sind sogar Garben.

(iv) Der Etal-Raum. Jede Garbe $F: X \longrightarrow Ens$ mit Werten in der Kategorie der Mengen ist isomorph zur Garbe der Schnitte einer stetigen Abbildung

$$\pi: Y \longrightarrow X.$$

Den topologischen Raum kann man wie folgt konstruktieren. Als Menge ist

$$Y := \vee_{x\in X} F_x$$

die disjunkte Vereinigung der Halme von F. Die stetige Abbildung π bildet alle Elemente von F_x in x ab,

$$\pi(F_x) = \{x\},$$

und als Topologie von Y nimmt man die stärkste Topologie (die mit den meisten offenen Mengen) mit der Eigenschaft, daß für jeden Schnitt $s \in F(U)$ von F die Abbildung

$$U \longrightarrow Y,\ x \mapsto s_x \text{ (:= Halm von s in x)},$$

stetig ist. Man kann dann zeigen, die Fasern von π sind diskret und π ist ein lokaler Homöomorphismus. Der Raum Y zusammen mit dieser Abbildung π heißt Etal-Raum der Garbe F.

(vii) Die Garben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ bilden eine Kategorie, die mit

$$Sh_X(\mathcal{C})$$

bezeichnet wird. Ist $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie, so gilt dasselbe für $Sh_X(\mathcal{C})$. Eine Garbe mit Werten in Ab heißt abelsche Garbe.

2.4 Lokale Definition von Garben

Seien X ein topologischer Raumd mit der Topologie-Basis $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit unendlichen direkten Produkten und Differenzkernen Es gelte:

(i) Für jedes $U \in \mathcal{B}$ sei ein $F(U) \in \mathcal{C}$ gegeben.

(ii) Für je zwei $U, V \in \mathcal{B}$ mit $U \subseteq V$ sei ein Morphismus

$$F(V) \longrightarrow F(U),\ s \mapsto s|_U ,$$

von $\mathcal{C}$ gegeben, der für $U = V$ gerade der identische Morphismus sei.

(iii) Für je drei $U, V, W \in \mathcal{B}$ mit $U \subseteq V \subseteq W$ sei das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{tikzcd} F(W) \arrow[rr] & & F(V) \\ & F(U) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(iv) Für jedes $U \in \mathcal{B}$, jede Überdeckung

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i$$

von U durch offene Mengen $U_i \in \mathcal{B}$ und jede Familie $(s_i)_{i\in I}$ von Elementen

$$s_i \in F(U_i)$$

mit

$$s_i|_U = s_j|_U \text{ für je zwei } i, j \in I \text{ und jedes } U \in \mathcal{B} \text{ mit } U \subseteq U_i \cap U_j$$

existiere genau ein Schnitt $s \in F(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für jedes $i \in I$.

Dann gibt es bis auf Isomophie genau eine Garbe $\widetilde{F}$ auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ mit

$$\widetilde{F}(U) = F(U)$$

für jedes $U \in \mathcal{B}$, deren Restriktionen zwischen den Mengen aus $\mathcal{B}$ mit den oben angegebenen Morphismen übereinstimmen.

Beweis. Für $U \subseteq$ offen überdecke man U durch die offenen Mengen von $\mathcal{B}$, die ganz in U enthalten sind, d.h. man schreibe

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i ,$$

wobei $\{U_i\}_{i\in I}$ die Familie der offenen Teilmengen von U sei, die Elemente von $\mathcal{B}$ sind. Dann kann man

$$F(U) := \text{Differenzkern von } \alpha' \text{ und } \alpha''$$

setzen, wobei α' und α" die Morphismen von Bemerkung 2.3. (ii) seien.
QED.

Beispiel 1
Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Dann bilden die offenen Hauptmenge

$$D(f) := \{x \in \text{Spec } A \mid f(x) \neq 0\} = \{x \in \text{Spec } A \mid f \notin x\}$$

eine Topologie-Basis für die Zariski-Topologie von Spec A. Wir setzen

$$F(D(f)) = A_f$$

und für $D(f) \subseteq D(g)$ sei

$$F(D(g)) \longrightarrow F(D(f))$$

die natürliche Abbildung $A_g \longrightarrow A_f$.[19] Die so definierten Abbildung genügen den obigen Bedingungen an F, und liefern eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Garbe F mit

$F(D(f)) = A_f$. Dies ist gerade die oben definierte Strukturgarbe des Spectrums von A,

$$F = \mathcal{O}_X \text{ , } X = \text{Spec } A.$$

Beispiel 2
Sei

$$R = \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$$

ein <u>graduierter kommutativer Ring</u> mit 1.[20] Wir schreiben

$$R_+ := \oplus_{n=1}^{\infty} R_n$$

für das irrelevante Ideal von R und setzen

$$X := \text{Proj } R := \{p \subseteq R \mid p \text{ homogenes Primideal mit } R_+ \not\subseteq p\}.$$

Für jede Menge $M \subseteq R$ von homogenen Elementen von R setzen wir

---

[19] $D(f) \subseteq D(g)$ bedeutet, für jedes Primideal x von A mit $f \notin x$ gilt $g \notin x$. Mit anderen Worten, es besteht die Implikation

$$xA_f \text{ echt} \Rightarrow xA_g \text{ echt.}$$

Weil jedes echte Ideal in einem Primideal liegt, ergibt sich damit für jedes Ideal I von A:

$$IA_f \text{ echt} \Rightarrow IA_g \text{ echt.}$$

Speziell für I = gA sehen wir so, daß gA_f nicht echt ist, also g eine Einheit in A_f, Die natürliche Abbildung $A \longrightarrow A_f$ faktorisiert sich also über A_g und induziert so die Abbildung $A_g \longrightarrow A_f$.

[20] Mit anderen Worten, die additive Gruppe des Rings R zerfalle in der angegebenen Weise in eine dirrekte Summe von Untergruppen R_n, wobei

$$R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$$

gelte für beliebige nicht-negative ganze Zahlen i und j.
Sei zum Beispiel R der Polynomring $R := k[X_0,...,X_N]$ über dem Körper k und

$$R_n := \sum_{i_0+...+i_N=n} X_0^{i_0} \cdot ... \cdot X_N^{i_N}$$

bestehe aus den homogenen Polynomen des Grades n.

$$V(M) := \{p \in \mathrm{Proj}\, R \mid M \subseteq p\}.$$

Die Mengen der Gestalt V(M) bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie von Proj R, welche Zariski-Topologie von Proj R heißt. Für jedes homogene Element F von R ist die Menge

$$D_+(F) := \mathrm{Proj}\, R - V(\{F\}) = \{ p \in \mathrm{Proj}\, R \mid F \notin p\}$$

offen in der Zariski-Topologie und heißt offene Hauptmenge zu F. Die offenen Hauptmengen bilden eine Topologie-Basis für die Zariski-Topologie. Man kann sich dabei sogar auf offene Hauptmengen zu homogenen Elementen positiven Grades beschränken.[21]

Wir setzen[22]

$$\mathcal{O}_X(D_+(F)) := R_{(F)} := \{\frac{U}{F^n} \in R_F \mid U \in R \text{ homogen vom Grad } n\text{•}\deg F\} \qquad (1)$$

für jedes homogene $F \in R_+$

Für je zwei homogene Elemente F und G von R mit $D_+(F) \subseteq D_+(G)$ führen wir die Abbildung

$$\mathcal{O}_X(D_+(G)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_+(F)) \qquad (2)$$

ein, die gerade die natürliche Abbildung

$$R_{(G)} \longrightarrow R_{(F)}$$

sei (d.h. die natürliche Abbildung $R_G \longrightarrow R_F$ eingeschränkt auf die Elemente Null-ten Grades). Die Ringe (1) genügen zusammen mit den Homomorphismen (2) den Bedingungen der obigen Aussage und definieren so eine Garbe $\mathcal{O}_X$ von Ringen mit 1, deren Halme gerade die Ringe

$$\mathcal{O}_{X,\, p} = R_{(P)} := \{\frac{U}{V} \in R_p \mid U, V \text{ homogen vom gleiche Grad}, V \notin p\}$$

---

[21] Für $f \in R_0$ gilt

$$V(fF \mid F \in R_+ \text{ homogen}) = \{P \in \mathrm{Proj}\, R \mid fF \in P \text{ für alle } F \in R_+ \text{ homogen}\}$$

Weil es für jedes P∈Proj R ein homogenes $F \in R_+$ gibt, welches nicht in P liegt, und weil P ein Primideal ist, folgt

$$V(fF \mid F \in R_+ \text{ homogen}) = \{P \in \mathrm{Proj}\, R \mid f \in P\} = V(f),$$

also

$$V(f) = \bigcap_{F \in R_+ \text{ homogen}} D(fF).$$

Wir gehen zu den Komplementen in Proj R über und erhalten

$$D_+(f) = \bigcup_{F \in R_+ \text{ homogen}} D_+(fF).$$

Man kann also die $D_+(f)$ mit $f \in R_0$ weglassen, ohne daß die Eigenschaft, Topologiebasis zu sein, verloren geht.

[22] Dies ist gerade die Menge der homogenen Elemente des Grades 0 von R_F bezüglich der natürlichen $\mathbb{Z}$-Graduierung von R_F.

und welche Strukturgarbe von X := Proj R heißt. Der Raum X zusammen mit dieser Garbe heißt projektives Spektrum von R.

2.5 Die Garbe zu einer Prägarbe

Seien X ein topologischer Raum und F eine Prägarbe. Dann kann man in derselben Weise wie für Garben, den Etal-Raum

$$\pi\colon Y \longrightarrow X$$

von F konstruieren. Die Garbe der Schnitte von π wird mit

$$\widetilde{F}$$

bezeichnet und heißt die zu F gehörige (oder assoziierte) Garbe. Nach Konstruktion definiert jeder Schnitt $s \in F(U)$ von F einen Schnitt $\widetilde{s} \in \widetilde{F}(U)$. Wir erhalten so Morphismen

$$F(U) \longrightarrow \widetilde{F}(U)$$

für beliebige offene Mengen U von X. Diese setzen sich zu einem Prägarben-Morphismus

$$\varphi{:}F \longrightarrow \widetilde{F} \qquad (1)$$

fort. Dieser ist in dem Sinne universell, daß sich jeder Prägarben-Morphismus

$$F \longrightarrow G$$

mit Werten in einer Garbe G auf genau eine Weise über (1) faktorisiert. Man erhält so eine bijektive Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_X(\mathcal{C})}(\widetilde{F}, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Prägarben}_X(\mathcal{C})}(F, G),\ \xi \mapsto \xi\circ\varphi,$$

für jede Garbe $G \in \mathrm{Sh}_X(\mathcal{C})$. Diese Abbildungen setzen sich fort zu einem Isomorphimus von Hom-Funkotren. Die Zuordnung

$$F \mapsto \widetilde{F}$$

wird damit zu einem Funktor

$$\mathrm{Prägarben}_X(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Sh}_X(\mathcal{C}),$$

der linksadjungiert ist zur natürlichen Einbettung

$$\mathrm{Sh}_X(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathrm{Prägarben}_X(\mathcal{C}).$$

Bemerkungen

(i) Der Übergang zur assoziierten Garbe kommutiert mit direkten Limites.[23]

---

[23] Weil der kontravariante Hom-Funkor direkte Limites in inverse überführt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}}((\varinjlim_i F_i)^{\sim}, G) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}}(\varinjlim_i F_i, G)\\
&= \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}}(F_i, G)\\
&= \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}}(\widetilde{F}_i, G)\\
&= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}}(\varinjlim_i \widetilde{F}_i, G)
\end{aligned}$$

(ii) Der natürliche Morphismus $F \longrightarrow \widetilde{F}$ induziert für jeden Punkt x des topologischen Raums einen Isomorphismus $F_x \longrightarrow \widetilde{F}_x$.[24]

(iii) Für jede Garbe F ist der natürliche Morphismus $F \longrightarrow \widetilde{F}$ ein Isomorphismus.

2.6 Direkte Bilder von Garben

Seien $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung und F eine Garbe auf X. Für jede offene Menge $V \subseteq Y$ setzen wir

$$(f_*F)(V) := F(f^{-1}(V)).$$

Für je zwei offenen Mengen V', V" von Y mit $V' \subseteq V''$, sei

$$\rho^{V'}_{V''}: f_*F(V'') \longrightarrow f_*F(V')$$

gerade der Restriktionsmoprhismus

$$F(f^{-1}(V'')) \longrightarrow F(f^{-1}(V')).$$

Auf diese Weise ist eine Garbe f_*F auf Y definiert, die <u>direktes Bild</u> von F entlang f heißt. Für jede stetige Abbildung f definiert f_* einen Funktor

$$f_*. Sh_X(\mathcal{C}) \longrightarrow Sh_Y(\mathcal{C}),$$

welcher <u>direktes Bild</u> entlang f heißt. Außerdem ist der Übergang zum direkten Bild funktoriell:

(i) $g_*f_* = (gf)_*$ für je zwei stetige Abbildungen $f:X\longrightarrow Y$ und $g:Y\longrightarrow Z$.

(ii) $id_* = id$.

Bemerkung

---

[24] Bezeichne $\pi: E\longrightarrow X$ den Etalraum von F. Sind s_x und t_x zwei Keime von F_x, deren Bilder in $\widetilde{F}_x$ gleich sind. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x, so daß die Keime von Schnitten $s,t \in F(U)$ kommen und die zugehörigen Abbildungen

$$U \longrightarrow E,\ u \mapsto s_u \text{ und } u \mapsto t_u,$$

gleich sind. Insbesondere sind dann s_x und t_x gleich. Die Abbildung $F_x \longrightarrow \widetilde{F}_x$ ist somit injektiv.

Sei jetzt $\alpha \in \widetilde{F}_x$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x und einen Schnitt $a: U \longrightarrow E$ des Etaltraums welcher den Keim α repräsentiert. Sei

$$s_x = a(x) \in F_x \subseteq E.$$

Wir können U so klein wählen, daß der Keim s_x von einem Schnitt $s \in F(U)$ kommt. Dann sind die Abbildungen

$$a: U \longrightarrow E \text{ und } \tilde{s}: U \longrightarrow E$$

Schnitte von $\pi: E \longrightarrow X$, die im Punkt x denselben Wert s_x haben. Nun $\pi: E \longrightarrow X$ ein lokaler Homöomorphismus. Diese Schnitte stimmen also lokal in einer Umgebung von x mit der Umkehrung von π überein, sind dort also gleich. Die Keime von a und $\tilde{s}$ in x sind deshalb gleich, d.h. $\alpha = a_x$ ist das Bild von s_x bei der Abbildung $F_x \longrightarrow \widetilde{F}_x$.

Der Funktor ist leicht zu definieren und schwer zu berechnen. Wir werden später einen Funktor f* kennenlernen, von dem man das Gegenteil sagen könnte: er ist schwer zu definieren und leicht zu berechnen. Dabei hängen die beiden Funktoren eng miteinander zusammen. Ein erster Schritt hin zu diesem Funktor stellt der nächste Abschnitt dar.

2.7 Topologische inverse Bilder von Garben

Seien f: $X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung und G eine Garabe auf Y. Für jede offene Mengen $U \subseteq X$ betrachten wir das projektive System der offenen Mengen von Y, welche die Menge f(U) enthalten, und setzen[25]

$$\tilde{f}G(U) := \varinjlim_{f(U)\subseteq V} G(V).$$

Für je zwei offene Mengen U', U" von X mit $U' \subseteq U''$ definiert die Universalitätseigenschaft des direkten Limes einen Morphismus

$$\rho^{V'}_{V''}: \tilde{f}G(U'') \longrightarrow \tilde{f}G(U').$$

Auf diese Weise ist eine Prägarbe auf X definiert. Die zugehörige Garbe wird mit $f^{-1}G$ bezeichnet und heißt <u>topologisches inverses Bild</u> von F entlang f. Für jede stetige Abbildung f definiert f^{-1} einen Funktor

$$f^{-1}:Sh_Y(\mathcal{C}) \longrightarrow Sh_X(\mathcal{C}),$$

welcher <u>topologisches inverses Bild</u> heißt.

Beispiel 1

Seien X ein topologischer Raum, F eine Garbe auf X, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und

$$i: U \hookrightarrow X$$

die natürlichen Einbettung. Jede offene Teilmenge U' von U ist auch offen in X. Deshalb gilt

$$\tilde{i}F(U') := \varinjlim_{U'\subseteq V} F(V) = F(U').$$

Insbesondere ist $\tilde{i}F$ bereits eine Garbe und

$$i^{-1}F(U') = F(U')$$

für jede offene Teilmenge U' von U. Die Garben $i^{-1}F$ und F stimmen für alle Teilmengen $U' \subseteq U$ überein, d.h. $i^{-1}F$ ist gerade die Einschränkung des Funktors F auf die Teilkategorie U. Man schreibt deshalb auch

$$i^{-1}F = F|_U$$

Beispiel 2

Seien X ein topologischer Raum, F eine Garbe auf X, $x \in X$ und

$$i: \{x\} \hookrightarrow X$$

die natürliche Einbettung. Da der einpunktige topologische Raum nur eine einzige nicht-leere Menge besitzt, kann man jede Garbe mit ihrem Wert auf dieser Menge identifizieren, d.h. man hat eine Isomorphie von Kategorien

---

[25] Wie im Fall des Halms einer Garbe in einem Punkt kann man die Schnitte von $\tilde{f}G(U)$ beschreiben als Äquivalenzklassen von Schnitten von G, die auf einer Umgebung von f(U) definiert sind, wobei zwei solche Schnitt als äquivalent anzusehen sind, wenn deren Einschränkungen auf eine Umgebung von f(U) gleich sind.

$$Sh_{\{x\}}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{S},\ G \mapsto G(\{x\}).$$

Für die einzige nicht-leere offene Menge $\{x\}$ des Unterraums $\{x\}$ gilt

$$\tilde{i}F(\{x\}) := \varinjlim_{x'\subseteq V} F(V) = F_x.$$

d.h. das inverse Bild entlang i ist gerade der Übergang zum Halm in s,

$$i^{-1}F = F_x\ .$$

Bemerkungen

(i) Der Übergang zum topologischen inversen Bild ist (ko-)funktoriell:
  (a) $f^{-1}g^{-1} = (gf)^{-1}$ für je zwei stetige Abbildungen $f{:}X\longrightarrow Y$ und $g{:}Y\longrightarrow Z$.
  (b) $id^{-1} = id$.

(ii) Es gibt für jede stetige Abbildung $f{:}X\longrightarrow Y$, jede Garbe F auf X und jede Garbe G auf Y eine Bijektion[26]

$$Hom_{Sh_X(\mathcal{C})}(f^{-1}G, F) \xrightarrow{\cong} Hom_{Sh_Y(\mathcal{C})}(G, f_*F),$$

welche sich funktoriell bezüglich F und G verhält. Mit anderen Worten, f^{-1} ist linksadjungiert zu f_* und f_* ist rechtsadjungiert zu f^{-1}. Insbesondere sind die beiden Funktoren durcheinander bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

(iii) Wir schreiben hier f^{-1} und nicht f^*, weil wir die Bezeichung f^* für die später zu definierenden inversen Bilder in der Kategorie der algebraischen Schemata reservieren wollen.

2.8 Exaktheit

Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ist $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie, so gilt dasselbe auch für die Kategorien

$$Sh_X(\mathcal{C}) \text{ und } Presh_X(\mathcal{C})$$

der Garben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ und analog für die Kategorie der Prägarben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$.

2.8.1 Kerne und Kokerne von Prägarben

Sei

---

[26] Für jeden funktoriellen Morphismus ξ: $G \longrightarrow f_*F$, jede offene Menge $U \subseteq X$ und jede offene Menge $V \subseteq Y$ mit $f(U) \subseteq V$ hat man einen Morphismus

$$G(V) \xrightarrow{\xi} F(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\rho} F(U).$$

Die Universalitätseigenschaft des direkten Limes führt zu einem Morphismus

$$\tilde{f}G(U) := \varinjlim_{f(U)\subseteq V} G(V) \longrightarrow F(U)$$

für jedes offene $U \subseteq X$ und damit zu einem Prägarben-Morphismus $\tilde{f}G\longrightarrow F$. Weil F eine Garbe ist, induziert letzterer einen Garben-Morpshismus $f^{-1}G \longrightarrow F$.

$$F \xrightarrow{\varphi} G$$

ein Morphismus von Prägarben auf dem topologischen Raum X mit Werten in der abelschen Kategorie $\mathcal{C}$. Dann hat man für jede offene Menge U von X das Teilobjekt

$$K(U) := \mathrm{Ker}(F(U) \xrightarrow{\varphi_U} G(U))$$

Diese Teilobjekte setzen sich zusammen zu einer Teilgarbe K von F, welche die Universalitätseigenschaft eines Kerns von $F \longrightarrow G$ besitzt.
Analog hat man für jedes U ein Faktorobjekt

$$C(U) := \mathrm{Koker}(F(U) \xrightarrow{\varphi_U} G(U)).$$

Diese Faktorobjekte setzen sich zusammen zu einer Faktorgarbe C von G, welche die Universalitätseigenschaft eines Kokerns von $F \longrightarrow G$.

Diese Aussagen gelten auch analog für Bilder und Kobilder von Prägarben Morphismen. Insbesondere ist die Prägarbe

$$U \mapsto \mathrm{Im}(\varphi_U)$$

gerade das Bild von φ,

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Koker}(\varphi)) = \mathrm{Im}(\varphi).$$

Eine Sequenz von Prägarben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$, sagen wir

$$\ldots \longrightarrow F_{i+1} \longrightarrow F_i \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow \ldots$$

ist genau dann exakt, wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$ die zugehörige Sequenz der Schnitte

$$\ldots \longrightarrow F_{i+1}(U) \longrightarrow F_i(U) \longrightarrow F_{i-1}(U) \longrightarrow \ldots$$

exakt ist.

Bemerkungen

(i) Ist $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie und x ein Punkt des topologischen Raumes, so ist der Übergang zu den Halmen ein exakter Funktor.[27]

---

[27] Seien

$$F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F''$$

eine exakte Sequenz von Prägarben auf X und $x \in X$. Weil der Übergang zum Halm in x ein additiver Funktor ist, gilt mit $\beta \circ \alpha = 0$ auch $\beta_x \circ \alpha_x = 0$, also

$$\mathrm{Im}\ \alpha_x \subseteq \mathrm{Ker}\ \beta_x.$$

Sei jetzt s_x im Kern von β_x. Wir wählen eine offene Umgebung U von x derart, daß s_x von einem Schnitt $s \in F(U)$ kommt. Dann ist der Keim von $\beta(s)$ in x gleich Null. Wir können deshalb U so klein wählen, daß gilt

$$\beta(s) = 0.$$

Dann gibt es aber einen Schnitt $t \in F'(U)$ mit $\alpha(t) = s$. Es folgt

$$\alpha_x(t_x) = \alpha(t)_x = s_x.$$

(ii) Ist $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie, so ist der Übergang zur assoziierten Garbe ein exakter Funktor.[28]

2.8.2 Kerne und Kokerne von Garben

Sei

$$F \longrightarrow G$$

ein Morphismus von Garben auf dem topologischen Raum X mit Werten in der abelschen Kategorie $\mathcal{C}$. Dann kann man diesen als Morphismus in der Kategorie der Prägarben auffassen und dort den Kern bilden. Die so definierte Prägarbe ist automatisch eine Garbe und hat die Universalitätseigenschaft eines Kerns auch in der Kategorie der Garben.

Der Kokern dieses Morphismus in der Prägarben-Kategorie ist im allgemeinen keine Garbe. Man kann jedoch zur assoziierten Garbe übergehen. Die so gewonnene Garbe hat dann die Universalitätseigenschaft eine Kokerns.

In analoger Weise erhält man das Bild eines Garben-Morphismus, indem man zunächst das Bild in der Prägarben-Kategorie bildet und dann zur assoziierten Garbe übergeht.[29]

Wir haben gezeigt, es gilt sogar

$$\mathrm{Im}\ \alpha_x = \mathrm{Ker}\ \beta_x.$$

[28] Alle Hom-Funktoren mit Werten in einer abelschen Kategorien sind linksexakt, insbesondere ist also

$$F \mapsto \mathrm{Hom}_{Presh}(F, G) = \mathrm{Hom}_{Sh}(\widetilde{F}, G)$$

linksexakt. Für jede exakte Sequenz von Prägarben

$$0 \longrightarrow F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'' \longrightarrow 0$$

und jede Garbe G erhält man also eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\widetilde{F}'', G) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}(\widetilde{F}, G) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(\widetilde{F}',G) \qquad (1)$$

Betrachten wir die zugehörige Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{F}' \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} \widetilde{F} \xrightarrow{\widetilde{\beta}} \widetilde{F}'' \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

Weil (1) exakt ist in der Mitte, hat jeder auf $\widetilde{F}$ definierte Morphismus, dessen Zusammensetzung mit $\widetilde{\alpha}$ gleich 0 ist, die Eigenschaft, daß er sich über $\widetilde{\beta}$ faktorisiert. Weil (1) an der linken Stelle exakt ist, ist die Faktorisierung eindeutig. Mit anderen Worten, $\widetilde{\beta}$ ist der Kokern von $\widetilde{\alpha}$, d.h. die Sequenz (2) ist in der Mitte exakt. Die Exaktheit von (1) an der linken Stelle übersetzt sich gerade in die Aussage, daß $\widetilde{\beta}$ ein Epimorphismus ist, d.h. (2) ist an der rechten Stelle exakt.
Die Exaktheit von (2) an der linken Stelle ergibt sich aus der Tatsache, daß der Übergang zu den Halmen ein exakter Funktor ist zusammen mit den Garben-Axiomen.

[29] Sei f: F $\longrightarrow$ G ein Garben-Morphismus. Wir bezeichnen hier mit Ker, Koker und Im die Konstruktionen in der Prägarben-Kategorie und kennzeichnen die entsprechenden Konstruktionen in der Garben-Kategorie durch ein $\sim$. Aus Bemerkung 2.7.1(ii) ergibt sich dann:

$\mathrm{Im}(f)^\sim$	$= (\mathrm{Ker}(\mathrm{Koker}(f))^\sim$	(nach Definition des Bildes)
	$= \mathrm{Ker}(\ \mathrm{Koker}(f)^\sim\ )$	(weil exakte Funktoren mit Kernen kommutieren)
	$= \mathrm{Ker}(\ \mathrm{Koker}^\sim\ (f))$	(nach Definition des Kokerns von Garben)
	$= \mathrm{Ker}^\sim\ (\mathrm{Koker}^\sim(f))$	(Weil Prägarbenkern auch Garbenkerne sind)

Bemerkungen

(i) Die Garben-Kategorie $Sh_X(\mathcal{C})$ besitzt Kerne, Kokerne und Bilder, und der Begriff der Exaktheit von Garben-Sequenzen ist wohldefiniert.

(ii) Sind

$$F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F''$$

zwei Morphismen von Garben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$, deren Zusammensetzung gleich Null ist, so gilt

$$\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Im}(\beta). \qquad (1)$$

Für jeden Punkt $x \in X$ erhalten wir somit einen injektiven Morphismus

$$\mathrm{Im}(\alpha)_x \hookrightarrow \mathrm{Im}(\beta)_x \qquad (2)$$

von $\mathcal{C}$. Dies ist trivialerweise ein Isomorphismus, falls in (1) das Gleichheitszeichen gilt. Auf Grund der Garben-Axiome gilt aber auch die Umkehrung: sind die Morphismen (2) für jeden Punkt x von X Isomorphismen, so gilt in (1) das Gleichheitszeichen.[30]

(iii) Seien

$$F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'' \qquad (3)$$

zwei Morphismen von Garben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$. Diese bilden genau dann eine exakte Sequenz, wenn für jeden Punkt x von X die zugehörige Sequenz der Halme

$$F'_x \xrightarrow{\alpha_x} F_x \xrightarrow{\beta_x} F''_x \qquad (4)$$

exakt ist.[31]

Mit andern Worten, $\mathrm{Im}(f)^{\sim}$ ist tatsächlich das Bild von f in der Garben-Kategorie.

[30] Seien F eine Garbe auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ und

$$G \subseteq F$$

eine Teilgabe mit $G_x = F_x$ für jeden Punkt x. Wir haben zu zeigen, dann gilt G = F.

Sei $s \in F(U)$ ein Schnitt von F über der offenen Menge U. Für jedes $x \in U$ ist dann $s_x \in F_x$ Keim eines Schnitts von G, d.h. es gibt eine offene Menge U_x mit $x \in U_x \subseteq U$ und einen Schnitt

$$t(x) \in G(U_x) \text{ mit } t(x)_x = s_x.$$

Nach Definition des Keim-Begriffs sind dann die Einschränkungen von t(x) und s auf eine geeignete Umgebung von x gleich (als Schnitte von F). Wir können deshalb U_x so wählen, daß gilt

$$t(x) = s|_{U_x}$$

Dann genügt aber die Familie der Paare $(U_x, t(x))$ den Bedingungen des zweiten Garben-Axioms, d.h. es gibt einen Schnitt $t \in G(U)$ mit $t|_{U_x} = t(x) = s|_{U_x}$ für alle x. Auf Grund des ersten Garben-Axioms erhalten wir

$$s = t \in G(U).$$

[31] Nach Bemerkung 2.7.1(i) folgt aus der Exaktheit von (3) die der Sequenzen (4). Seien umgekehrt die Sequenzen (4) exakt. Dann gilt für jedes $x \in X$

$$(\beta\circ\alpha)_x = \beta_x \circ \alpha_x = 0.$$

2.8.3 Beispiel

Wir geben hier ein Beispiel an, welches zeigen soll, daß sich die Konstruktion des Kokerns in der Garben-Kategorie von der in der Prägarben-Kategorie unterscheidet. Da das Bild eines Morphismus definiert ist als der Kern des Kokerns, reicht es einen Garben-Morphismus anzugeben, dessen Bild in der Kategorie der Garben verschieden ist von dessen Bild in der Kategorie der Prägarben.
Es reicht also, einen Morphismus von Garben anzugeben, der in der Kategorie der Garben surjektiv ist, diese Eigenschaft also Prägarben-Morphismus jedoch nicht besitzt.

Seien X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe. Bezeichne

$$G_X$$

die Garbe der lokal konstanten Abbildungen auf X mit Werten in G, d.h. für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist

$$G_X(U)$$

die abelsche Gruppe der lokal konstanten Abbildungen $s:U \longrightarrow G$. Mit anderen Worten, für jeden Punkt von U gebe es eine Umgebung, auf welcher s konstant ist. Versieht man G mit der diskreten Topologie, so ist dies gerade die Garbe der stetigen Abbildungen auf X mit Werten in G. Sei jetzt Y ein Unterraum und

$$i: Y \hookrightarrow X$$

die natürliche Einbettung. Durch Einschränken von Abbildungen auf Y ist ein Garben-Morphismus

$$\varphi: G_X \longrightarrow i_*G_Y$$

definiert. Genauer: für jede offene Menge U von X erhält man eine Abbildung

$$G_X(U) \longrightarrow (i_*G_Y)(U) = G_Y(U\cap Y),\ s \mapsto s|_{U\cap Y},$$

und diese Abbildungen setzen sich zu einem Garben-Morphismus zusammen.

Betrachten wir jetzt den Spezialfall

$$X = \mathbb{R},\ Y = \{0, 1\},$$

Dann ist der Garben-Morphismus φ surjektiv: Die Halme von i_*G_Y in den Punkten $x \in \mathbb{R}$ sind Null für $x \notin \{0, 1\}$ und werden für $x \in \{0, 1\}$ durch Funktion gegeben, die in einer Umgebung von x konstant ist und dort genau einen Wert aus G annimmt. Diese Funktion repräsentiert aber auch ein Element von $G_{X,x}$, und dieses ist ein Urbild des gegebenen Elements von $(i_*G_Y)_x$.

Damit ist gezeigt, φ ist als Garben-Morphismus surjektv.

Für jeden Punkt x gibt es somit eine Umgebung, auf welcher $\beta\circ\alpha$ identisch Null ist. Auf Grund des ersten Garben-Axioms ist dann aber $\beta\circ\alpha = 0$, d.h. es gilt

$$\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta).$$

Zum Beweis des Gleichheitszeichens reicht es zu zeigen,

$$\mathrm{Im}(\alpha)_x = \mathrm{Ker}(\beta)_x \text{ für jedes } x \in X.$$

Weil der Übergang zum Halm in x ein exakter Funktor ist, kommutiert dieser Funktor mit dem Übergang zum Kern, mit dem Übergang zum Korkern und mit dem Übergang zum Bild. Es reicht also zu zeigen,

$$\mathrm{Im}(\alpha_x) = \mathrm{Ker}(\beta_x) \text{ für jedes } x \in X.$$

Das ist aber der Fall, weil die Sequenzen (4) exakt sein sollen.

Als Prägarben-Morphismus kann φ jedoch nicht surjektiv sein, dann dann wäre

$$G_X(X) \longrightarrow (i_* G_Y)(X) = G_Y(Y)$$

surjektiv. Dem ist aber nicht so: weil $X = \mathbb{R}$ zusammenhängend ist, sind alle Elemente von $G_X(X)$ konstante Funktionen. In $G_Y(Y)$ liegt jedoch zum Beispiel die Funktion, welche in 0 den Wert 0 und in 1 den Wert 1 hat (also nicht konstant ist).

3. Geometrische Räume

3.1 Definition

Ein geometrischer Raum[32] $(X, \mathcal{O}_X)$ besteht aus einem topologischen Raum X und einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von kommutativen Ringen mit 1 auf X, deren Halme

$$\mathcal{O}_{X,x}$$

$(x \in X)$ lokale Ringe sind. Das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ wird mit

$$m_{X,x}$$

bezeichnet.

Bemerkung

Die Schnitte von $\mathcal{O}_X$ einer offenen Menge $U \subseteq X$ sind in den meisten Fällen gewisse auf U definierte Funktionen, die die Struktur des topologischen Raums X bestimmen. Die Elemente von $m_{X,x}$ sind dabei meist Keime von Funktionen, die in x den Wert 0 annehmen.

Beispiel 1

Seien X ein topologischer Raum und

$$\mathcal{O}_X = C_X$$

die Garbe der stetigen Funktionen mit Werten in den reellen Zahlen. Ist $x \in X$ ein Punkt und

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die auf einer offenen Umgebung $U \subseteq X$ von x definiert ist und in x einen von Null verschiedenen Wert annimmt,

$$f(x) \neq 0,$$

so ist die Funktion $y \mapsto 1/f(y)$ auf einer Umgebung von x definiert und dort stetig. Mit anderen Worten, der Keim von f in x ist eine Einheit von $\mathcal{O}_{X,x}$. Die Keime der Funktionen, die in x eine Nullstelle haben, bilden ein Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$, und zwar das einzige maximale Ideal. Insbesondere ist $\mathcal{O}_{X,x}$ für jedes x ein lokaler Ring.

Damit sist $(X\ \mathcal{O}_X)$ ein geometrischer Raum.

Beispiel 2

Seien X eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{O}_X = C^r_X$ die Garbe der r-mal stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen (mit $r = 0, 1, \ldots, \infty, \omega$). Dieselben

---

[32] Englisch: locally ringed space.

Argumente wie im vorangehenden Beispiel zeigen, daß dann $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geometrischer Raum ist.

Im Fall $r = \omega$ ist $\mathcal{O}_{X,x}$ gerade der Ring der Potenzreihen mit reellen Koeffizienten, die in einer Umgebung von x konvergieren.

Beispiel 3

Seien X eine offene Menge des $\mathbb{C}^n$ und $\mathcal{O}_X$ die Garbe der holomorphen Funktionen. Dann ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geometrischer Raum, dessen lokale Ringe gerade Ringe von konvergenten Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten sind.

Beispiel 4

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, X = Spec A und $\mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe von X. Dann ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geometrischer Raun, dessen lokale Ring gerade die Lokalisierungen von A in den Primidealen von A sind,

$$\mathcal{O}_{X,x} = A_x \text{ für } x \in X = \text{Spec } A.$$

3.2 Morphismen geometrischer Räume, Schemata

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ geometrische Räume. Ein Morphismus

$$(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

geometrischer Räume besteht aus einer stetigen Abbildung

$$f: X \longrightarrow Y$$

und einem Morphismus

$$f^\#: \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$$

von Garben von Ringen mit 1, wobei die folgende zusätzliche Bedingung erfüllt sei.

Für jeden Punkt $x \in X$ und jede offene Umgebung V des Punktes $y = f(x)$ betrachten wir den Morphismus

$$\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X(Y) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}\,.$$

Aus der Universalitätseigenschaft des direkten Limes $\mathcal{O}_{X,x}$ erhalten wir einen Homomorphismus von Ringen mit 1,

$$f_x: \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}\,,\ y = f(x). \tag{1}$$

Als zusätzliche Bedingung wird gefordert, daß dieser Homomorphismus lokal sein sein soll für jeden Punkt $x \in X$, d.h. er soll die maximalen Ideale dieser lokalen Ringe ineinander abbilden:

$$f_x(m_{Y,y}) \subseteq m_{X,x} \text{ für jedes } x \in X.$$

Bemerkungen

(i) In vielen Fällen ist der Morphismus $f^\#$ gerade die Verpflanzung entlang f, d.h. für jede offene Menge $V \subseteq Y$ überführt die Abbildung

$$f^\#: \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)),\ s \mapsto s \circ f,$$

die auf V definierte Funktion s in die Zusammensetzung $s \circ f$ (welches eine auf f^{-1} (V) definierte Funktion ist). Hat dabei s im Punkt $y = f(x)$ eine Nullstelle, so hat die Zusammensetzung $s \circ f$ in x eine Nullstellen. Die Verpflanzung entlang f bildet also die Keime aus $m_{Y,y}$ in solche von $m_{X,x}$ ab.

(ii) Wir werden später sehen, daß in einem gewissen Sinne durch den Garbenmorphismus $f^{\#}$ auf Grund der Lokalität der Homomorphismen (1) auch umgekehrt die stetige Abbildund f festgelegt ist.

(iii) Die geometrischen Räume bilden zusammen mit den gerade definierten Morphismen eine Kategorie.

(iv) Die wichtigsten Klassen von geometrischen Räumen sind dadurch definiert, daß deren Struktur lokal festgelegt wird.

Beispiel 1

Eine <u>topologische n-Mannigfaltigkeit</u> ist ein geometrischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ mit der Eigschaft, daß X ein Hausdorff-Raum ist und es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x gibt derart, daß der geometrische Raum $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ isomorph ist zum $\mathbb{R}^n$ mit der Garbe der stetigen Funktionen,

$$(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong (\mathbb{R}^n, C_{\mathbb{R}^n}).$$

Beispiel 2

Für r = 0, 1, 2, ... , ∞, ω ist eine n-<u>Mannigfaltigkeit der Classe C^r</u> oder auch r-mal <u>stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit</u> ein geometrischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ mit der Eigenschaft, daß X ein Hausdorff-Raum ist und es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x gibt derart, daß der geometrische Raum $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ isomorph ist zu einer offenen Mengen V des $\mathbb{R}^n$ mit der Garbe der stetig r-mal differenzierbaren Funktionen,

$$(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong (V, C^r_V).$$

Im Fall $r = \infty$ heißt $(X, \mathcal{O}_X)$ auch <u>glatte Mannigfaltigkeit</u> und im Fall $r = \omega$ auch <u>analytische Mannigfaltigkeit</u>.

Beispiel 3

Eine <u>komplexe n-Mannigfaltigkeit</u> ist ein geometrischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ mit der Eigschaft, daß es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x gibt derart, daß der geometrische Raum $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ isomorph ist zu einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{C}^n$ mit der Garbe der holomorphen Funktionen,

$$(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong (V, \mathcal{O}_V).$$

Beispiel 4

Ein <u>algebrarisches Schema</u> ist ein geometrischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ mit der Eigschaft, daß es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x gibt und einen kommutativen Ring A mit 1 derart, daß der geometrische Raum $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ isomorph ist zum affinen Spektrum von A mit der Garbe der regulären Funktionen, d.h. der Strukturgarbe,

$$(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong (\mathrm{Spec}\ A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}).$$

3.3 Projektive Spektren

Seien

$$R := \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$$

eine graduierter Ring (kommutativ mit 1) und

$$X := \mathrm{Proj}\, R$$

die Menge der homogenen Primideale, welche das irrelevante Ideal R_+ nicht enthalten, versehen mit der Zariski-Topologie und

$$\mathcal{O}_X$$

die in Beispiel 2 von 2.4 konstruierte Strukturgarbe von X. Dann ist

$$(X, \mathcal{O}_X)$$

ein algebraisches Schema.

Beweis. Seien $F \in R$ ein homogenes Element von R_+ und

$$U := D_+(F) := \{P \in \mathrm{Spec}\, R \mid P \text{ homogen}, F \notin P\}$$

die durch F definierte offene Hauptmenge. Wie wir wissen, bilden diese offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis von X, also insbesondere eine offene Überdeckung. Es reicht also zu zeigen,

$$(U, \mathcal{O}_X|_U)$$

ist isomorph zu einem affinen Spektrum (für jedes F). Für $P \in U$, d.h. $F \notin P$, ist

$$PR_F$$

ein Primideal des Quotienten-Rings R_F. Weil F homogen ist, hat R_F die Struktur eines (ganzzahlig) graduierten Rings. Bezeichne

$$R_{(F)} := \{\frac{U}{F^n} \in R_F \mid U \in R \text{ homogen vom Grad } n\cdot\deg F\}$$

den homogenen Bestandteil des Grade 0 von R_F. Dies ist ein Teilring von R_F, welcher das Einselement enthält. Insbesondere ist

$$p := PR_F \cap R_{(F)}$$

ein Primideal von $R_{(F)}$. Wir haben damit eine Abbildung

$$\varphi\colon D_+(F) \longrightarrow \mathrm{Spec}\, R_{(F)},\ P \mapsto p := PR_F \cap R_{(F)}. \qquad (1)$$

konstruiert.

<u>1. Schritt</u>. φ ist injektiv.

Seien P', P'' $\in D_+(F)$ Punkte mit $P'R_F \cap R_{(F)} = P''R_F \cap R_{(F)}$. Für jedes homogene $U \in P'$ gilt dann

$$\frac{U^{\deg F}}{F^{\deg U}} \in P'R_F \cap R_{(F)} = P''R_F \cap R_{(F)} \subseteq P''R_F.$$

Es gibt somit eine natürliche Zahl n mit

$$F^n \cdot U^{\deg F} \in P''.$$

Weil P'' ein Primideal ist und F nicht in P'' liegt folgt, $U \in P''$. Wir haben gezeigt, $P' \subseteq P''$. Die umgekehrte Inklusion ergibt sich aus Symmeterie-Gründen.

<u>2. Schritt</u>. φ ist surjektiv.[33]

---

[33] vgl. EGA II, 2.3.6 und 2.1.9.

Sei $p \in \operatorname{Spec} R_{(F)}$ ein vorgegebens Primideal. Für jede nicht-negative ganze Zahl n setzen wir

$$p_n := \{ x \in R_n \mid \frac{x^{\deg F}}{F^n} \in p \}.$$

Die Menge p_n ist offensichtlich eine additive Untergruppe von S_n , und es gilt

$$p_0 = p.$$

Für $x \in R_m$ und $y \in p_n$ gilt

$$\frac{(xy)^{\deg F}}{F^{m+n}} = \frac{x^{\deg F}}{F^m} \cdot \frac{y^{\deg F}}{F^n} .$$

Der erste Faktor rechts ist ein Element von $R_{(F)}$ und der zweite Faktor liegt nach Definition von p_n in p. Also liegt auch das Produkt in p, d.h. es ist $xy \in p_{m+n}$. Wir haben gezeigt,

$$R_m \cdot p_n \subseteq p_{m+n} .$$

Insbesondere ist damit

$$P := \oplus_0^\infty p_n$$

ein Ideal von R. Weil p ein echtes Ideal von $R_{(F)}$ ist, gilt

$$F \notin P.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} PR_F \cap R_{(F)} &= \{\frac{U}{F^n} \mid U \in P \text{ homogen vom Grad } n \cdot \deg F\} \\ &= \{\frac{U}{F^n} \mid U \in R_{n \cdot \deg F} , \frac{U^{\deg F}}{F^{n \cdot \deg F}} \in p\} \\ &= p \qquad \text{(weil p ein Primideal ist).} \end{aligned}$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es somit zu zeigen,

P ist ein Primideal von R.

Seien $x, y \in R$ zwei Elemente, mit $xy \in P$ liegen. Wir haben zu zeigen, einer der beiden Faktoren liegt in P.
Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Anzahl der von Null verschiedenen homogenen Bestandteile von x plus der Anzahl der von Null verschiedenen homogenen Bestandteile von y.
Falls einer der beiden Faktoren x bzw. y Null ist, d.h. die Anzahl der homogenen Summanden ist 0, ist die Behauptung trivial. Die Induktion beginnt damit mit der Anzahl 2, d.h. der Induktionsanfang entspricht der gerade der Situation, daß x und y homogen sind.

<u>Induktionsanfang</u>: x und y sind homogen.
Sei $x \in R_a$ und $y \in R_b$. Wegen $xy \in P$, d.h. $xy \in p_{a+b}$ gilt dann

$$\frac{(xy)^{\deg F}}{F^{a+b}} \in p,$$

d.h. $\frac{x^{\deg F}}{F^a} \bullet \frac{x^{\deg F}}{F^b} \in p$. Weil p ein Primideal ist, folgt

$$\frac{x^{\deg F}}{F^a} \in p \text{ oder } \frac{x^{\deg F}}{F^b} \in p,$$

also $x \in p_a \subseteq p$ oder $y \in p_b \subseteq P$.

Induktionsschritt.
Bezeichne $x_a \in R_a$ den homogenen Bestandteil niedrigsten Grades, der ungleich Null ist, und analog sei $y_b \in R_b$ definiert. Dann ist $x_a y_b$ der homogenen Bestandteil niedrigsten Grades von xy, der ungleich Null ist. Mit $xy \in P$ gilt also auch $x_a y_b \in P$, also $x_a \in P$ oder $y_b \in P$, also

$$(x - x_a)y \in P \text{ bzw. } x(y-y_b) \in P.$$

Im ersten Fall gilt auf Grund der Induktionsvoraussetzung

$$x - x_a \in P \text{ oder } y \in P,$$

und wegen $x_a \in P$ folgt die Behauptung. Im zweiten Fall gilt auf Grund der Induktionsvoraussetzung

$$x \in P \text{ oder } y-y_b \in P,$$

und wegen $y_b \in P$ folgt die Behauptung.

3. Schritt. Die Unterraum-Topologie von $D_+(F) \subseteq \operatorname{Proj} R$ entspricht bei (1) der Zariski-Topologie von $\operatorname{Spec} R_{(F)}$.

Sei $G \in R$ ein weiteres homogenes Element. Für $P \in D_+(F)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} P \in D_+(F) \cap D_+(G) &\Leftrightarrow G \notin P \\ &\Leftrightarrow^{34} G \notin PR_F \\ &\Leftrightarrow g := \frac{G^{\deg F}}{F^{\deg G}} \notin PR_F \cap R_{(F)} \\ &\Leftrightarrow g \notin \varphi(P) \qquad (\varphi \text{ bezeichnet die Abbildung (1)}) \\ &\Leftrightarrow \varphi(P) \in D(g) \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt,

$$\varphi(D_+(F) \cap D_+(G)) = D(g),$$

d.h. die Durchschnitte von $D_+(F)$ mit offenen Hauptmengen entsprechen bei φ gewissen offenen Hauptmengen von $\operatorname{Spec} R_{(F)}$. Insbesondere ist φ eine offene Abbildung.

---

[34] Wegen $PR_F \cap R = P$ für jedes Primideal P mit $F \notin P$.

Sei umgekehrt $g \in R_{(F)}$ vorgegeben, d.h.

$$g = \frac{U}{F^n} \text{ mit } U \in R \text{ homogen vom Grad } n\bullet\deg F.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(P) \in D(g) \quad &\Leftrightarrow g \notin \varphi(P) = PR_F \cap R_{(F)} \\ &\Leftrightarrow U \notin PR_F \\ &\Leftrightarrow U \notin P \\ &\Leftrightarrow P \in D_+(U). \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, das Urbild einer offenen Hauptmenge von Spec $R_{(F)}$ bei φ ist offen. Mit anderen Worten, φ ist stetig, also insgesamt ein Homöomorphismus.

Wir können deshalb bei Bedarf im folgenden, den topologiischen Raum $D_+(F)$ mit dem topologischen Raum Spec $R_{(F)}$ identifizieren. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß die folgende Aussage gilt:

<u>4. Schritt.</u> $\mathcal{O}_X|_{D_+(F)} \cong \mathcal{O}_{\text{Spec } R_{(F)}}$.

Zum Beweis reicht es zu zeigen, die beiden Garben haben auf einer Topologie-Basis dieselben Schnitte und dieselben Restriktionen (vgl. 2.4). Dazu reicht es zu zeigen, für jedes homogene Element $G \in R$ gilt

$$\mathcal{O}_X(D_+(F) \cap D_+(G)) = \mathcal{O}_{\text{Spec } R_{(F)}}(\varphi(D_+(F) \cap D_+(G)))$$

Beim Beweis des dritten Schrittes haben wir gesehen

$$\varphi(D_+(F) \cap D_+(G)) = D(g) \text{ mit } g := \frac{G^{\deg F}}{F^{\deg G}}$$

Es reicht also zu zeigen,

$$\mathcal{O}_X(D_+(FG)) = \mathcal{O}_{\text{Spec } R_{(F)}}(D(g)).$$

Nach Definition der beiden Garben reicht es zu zeigen,

$$R_{(FG)} = (R_{(F)})_g \tag{2}$$

Der Ring auf der linken Seite besteht aus den homogenen Elementen des Grades 0 von

$$\begin{aligned} R_{FG} &= (R_F)_G = R_F[1/G] && \text{in } (R_F)_G \\ &= R_F[1/G^{\deg F}] && \left(\text{wegen } \frac{1}{G} = \frac{G^{\deg F - 1}}{G^{\deg F}}\right) \\ &= R_F[1/g] && (\text{weil } F \text{ eine Einheit in } R_F \text{ ist}) \\ &=^{35} (R_F)_g \end{aligned}$$

---

[35] Die Universalitätseigenschaft des Quotientenrings liefert eine Abbildung

$$(R_F)_g \longrightarrow R_F[1/g],\ \frac{a}{g^n} \mapsto a\bullet(1/g)^n,$$

welche surjektiv ist (man bringe die Polynome in 1/g auf den Hauptnenner). Wegen

$$R_F[1/g] = R_F[1/G] = (R_F)_G$$

Weil g homogen vom Grad 0 ist, folgt die Behauptung (2).

QED.

3.4 Eine affine Überdeckung von Proj R

Seien R ein graduierter Ring, X = Proj R und $\{F_i\}_{i\in I}$ eine Familie von homogenen Elementen, die das irrelevente Ideal von R erzeugen. Dann gilt

$$X = \bigcup_{i\in I} D_+(F_i).$$

Beweis. Sei $P \in X$. Weil das irrelevante Ideal von R nicht vollständig in P liegt, gibt es ein homogenes Element F mit

$$F \notin P.$$

Weil F im irrelevanten Ideal liegt, läßt es sich als Linearkombination der F_i schreiben, sagen wir

$$F = \sum_{i\in I} G_i F_i .$$

Wegen $F\notin P$ können somit nicht alle F_i in P liegen, sagen wir $F_{i_o} \notin P$. Dann gilt aber

$$P \in D_+(F_{i_o})$$

QED.

Beispiel: der projektive Raum

Seien k ein Körper und

$$R := k[X_0, ... , X_N]$$

der Polynomring über k mit der üblichen Graduierung (vgl. die erste Fußnote zu Beispiel 2 von 2.4). Dann gilt

$$\text{Proj } R = D_+(X_0)\cup D_+(X_1)\cup ...\cup D_+(X_N).$$

Dabei ist

$$D_+(X_i) = \text{Spec } R_{(X_i)} = \text{Spec } k[\frac{X_0}{X_i} , ... , \frac{X_N}{X_i}] \cong \mathbb{A}^N_k$$

gerade der N-dimensionale affine Raum über k. Das projektive Spektrum von R wird also von N+1 Exemplaren des N-dimensionalen affinen Raums überdeckt. Der abgeschlossene Punkt

$$(\alpha_0, ... , \alpha_{i-1},\alpha_{i+1}, ..., \alpha_N)$$

des affinen Raum ist durch das Primideal

$$p := (\frac{X_0}{X_i} - \alpha_0, ... , \frac{X_{i-1}}{X_i} - \alpha_{i-1}, \frac{X_{i+1}}{X_i} - \alpha_{i+1}, ..., \frac{X_N}{X_i} - \alpha_N) \text{ von Spec } R_{(X_i)}$$

gegeben. Mit $\alpha_i := 1$ erhalten wir

---

besteht der Kern aus den Quotienten $\frac{a}{g^n}$, deren Zähler $a \in R_F$ von einer G-Potenz annulliert wird. Das ist aber genau dann der Fall, wenn er von einer Potenz von g annulliert wird. Mit anderen Worten, der Kern ist trivial.

$$pR_{X_i} = (\frac{X_0}{X_i} - \alpha_0, ..., \frac{X_N}{X_i} - \alpha_N)R_{X_i}$$
$$= (X_0 - \alpha_0 X_i, ... , X_N - \alpha_N X_i)R_{X_i},$$

also

$$pR_{X_i} \cap R = (X_0 - \alpha_0 X_i, ... , X_N - \alpha_N X_i)R$$
$$= (\alpha_i X_0 - \alpha_0 X_i, ... , \alpha_i X_N - \alpha_N X_i)R$$
$$= (\alpha_u X_v - \alpha_v X_v \mid u, v = 0, ... , N)R$$

Man beachte, das letzte Ideal bleibt unverändert, wenn man alle α_j mit demselben Element aus k* multipliziert.
Ist der Körper k algebraisch abgeschlossen, so entsprechen die abgeschlossenen Punkte von

$$D_+(X_i)$$

also gerade den (N+1)-Tupeln mit Koordinaten aus k, deren i-te Koordinate von Null verschieden ist.
Zusammen ergibt sich, daß die abgeschlossenen Punkte von Proj R gerade den (N+1)-Tupeln mit Koordinaten aus k entsprechen mit mindestens einer von Null verschiedenen Koordinate, wobei proportianale Tupel denselben Punkt beschreiben.

Die abgeschlossenen Punkte von Proj R enstprechen also gerade den Punkten des N-dimensionalen projektiven Raums über k. Deshalb wird auch das Schema Proj R mit

$$\mathbb{P}_k^N := \text{Proj } k[X_0, ... , X_N]$$

bezeichnet und heißt (für beliebige Körper k) ebenfalls projektiver Raum über k.

3.5 Die globalen Schnitte der Strukturgarbe des $\mathbb{P}_k^N$

Seien k ein Körper und

$$X := \mathbb{P}_k^N = \text{Proj } k[X_0, ... , X_N]$$

der N-dimensionale projektive Raum über k. Dann gilt

$$\Gamma(\mathcal{O}_X) := \mathcal{O}_X(X) = k,$$

d.h. jede auf ganz X definierte reguläre Funktion ist konstanat.
Bemerkung
Für N = 1 und k = $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{P}_k^N$ gerade die Riemannsche Zahlenkugel. Jede reguläre Funktion auf der Riemannschen Zahlenkugel ist somit konstant. Der Satz kann als algebraisches Analogon zum Satz von Liouville angesehen werden.
Beweis. Wir schreiben

$$X = U_0 \cup ... \cup U_N \text{ mit } U_i := D(X_i) = \text{Spec } k[\frac{X_0}{X_i}, ... , \frac{X_N}{X_i}].$$

Weite sei $\xi := (0) \in X$ der durch das Null-Ideal gegebene “allgemeine Punkt” von X. Er liegt in jedem der U_i und ist dort durch das Null-Ideal von $k[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_N}{X_i}]$ gegeben. Insbesondere gilt

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = k[\frac{X_0}{X_0}, \dots, \frac{X_N}{X_0}]_{(0)} = k(\frac{X_0}{X_0}, \dots, \frac{X_N}{X_0}).$$

Die Garben-Restriktionen definieren einen injektiven Homomorphismus

$$\Gamma(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_0)\times\dots\times\mathcal{O}_X(U_0),\ s \mapsto (s|_{U_0},\dots,s|_{U_N})$$

(auf Grund es ersten Garben-Axioms). Wir können $\Gamma(\mathcal{O}_X)$ somit als Teiring des direkten Produkts auf der rechten Seite ansehen, d.h. als Teilring des direkten Produkts der Polynomringe

$$k[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_N}{X_i}]$$

Die natürliche Abbildung $\mathcal{O}_X(U_i) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$ in den Halm ist gerade die natürliche Einbettung

$$k[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_N}{X_i}] \hookrightarrow k(\frac{X_0}{X_0}, \dots, \frac{X_N}{X_0}).$$

Die Menge $\Gamma(\mathcal{O}_X)$ besteht somit aus (N+1)-Tupeln

$$(F_0, \dots, F_N) \text{ mit } F_i \in k[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_N}{X_i}],$$

mit der Eigenschaft, daß die Koordinaten dieser Tupel im Halm $\mathcal{O}_{X,\xi}$, dasselbe Bild haben, d.h.

$$F_0 = \dots = F_N \text{ in } k(\frac{X_0}{X_0}, \dots, \frac{X_N}{X_0}) \subseteq k(X_0, \dots, X_N)$$

Wir schreiben

$$F_i = \frac{U_i}{X_i^{n(i)}} \text{ mit } U_i \in k[X_0,\dots,X_N] \text{ homogen vom Grad } n(i).$$

Dabei können wir annehmen, daß F_i teilerfremd zu X_i ist. Für je zwei verschiedene Indizes i,j gilt dann

$$U_i \cdot X_j^{n(j)} = U_j \cdot X_i^{n(i)}$$

Nach Wahl der U_i folgt $X_i^{n(i)} \mid X_j^{n(j)}$, also n(i) = 0 für alle i. Insbesondere sind die F_i die Polynome vom Grad 0, d.h. Elemente von k. Wir haben gezeigt, $\Gamma(\mathcal{O}_X)$ läßt sich identifizieren mit einer Teilmenge von

$$\{(c, ..., c) \mid c \in k\} \cong k$$

Da sich jedes Element von k als global definierte reguläre Funktion ansehen läßt, folgt

$$\Gamma(\mathcal{O}_X) = k.$$

QED.

3.6 Projektive Varietäten

Seien k ein Körper,

$$R := k[X_0, ... , X_N]$$

der Polynomring über k mit der üblichen Graduierung und

$$I \subseteq R$$

ein homogenes Ideal. Die Punkte von

$$\text{Proj } R/I$$

entsprechen dann gerade den Punkten P ∈ Proj R mit $I \subseteq P$, d.h. als Punkt-Menge kann man Proj R/I identifizieren mit der abgeschlossenen Teilmenge

$$\text{Proj } R/I = V(I) = \{ P \in \text{Proj } R \mid I \subseteq P \}$$

Sei jetzt

$$P = [\alpha_0, ... , \alpha_N] = [\frac{\alpha_0}{\alpha_i}, ... , 1 , ... , \frac{\alpha_N}{\alpha_i}]$$

ein k-rationaler Punkt, dessen i-te Koordinate von Null verschieden ist, d.h. ein Punkt der Gestalt

$$P = (X_0 - \alpha_0, ... ,X_N - \alpha_N) = (X_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_i}, ... , X_i - 1 , ... , X_N - \frac{\alpha_N}{\alpha_i}).$$

Liegt P in V(I), d.h. gilt $I \subseteq P$, so ist jedes homogene Polynom F aus I eine Linearkombination der Polynome $X_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_i}, ... , X_i - 1 , ... , X_N - \frac{\alpha_N}{\alpha_i}$. Insbesondere ist

$$0 = F(\frac{\alpha_0}{\alpha_i}, ... , 1 , ... , \frac{\alpha_N}{\alpha_i}) = (1/\alpha_i)^{\deg F} \cdot F(\alpha_0, ... , \alpha_N).$$

also

$$F(\alpha_0, ... , \alpha_N) = 0.$$

Umgekehrt ist jedes homogene Polynom mit der Nullstelle $(\alpha_0, ... , \alpha_N)$ eine Linearekombination der der $X_i - \alpha_i$.[36] Ist also $(\alpha_0, ... , \alpha_N)$ eine gemeinsame Nullstelle der homogenen Polynome aus I, so gilt $I \subseteq P$, d.h. P ∈ V(I).

---

[36] Man betrachte die Taylorentwicklung des Polynoms F im Punkt $(\alpha_0, ... , \alpha_N)$.

Wir haben gezeigt, die k-rationalen Punkte von V(I) entsprechen gerade den gemeinsamen Nullstellen der homogenen Polynome aus I.

Die analoge Aussage gilt auch[37] für die nicht-notwendig k-rationalen Punkte von Proj P, d.h.die Punkte von

$$V(I) = \mathrm{Proj}\, R/I$$

entsprechen gerade den gemeinsamen Nullstellen der homogenen Polynome aus I. Man erhält dann

$$\mathrm{Proj}\, R/I = \{[\alpha_0,....\alpha_N] \mid \alpha_i \in \bar{k} \text{ , } F(\alpha_0,....\alpha_N) = 0 \text{ für } F{\in}I \text{ homogen}\}/\sim$$

Dabei bezeichne $\bar{k}$ die algebraische Abschließung und die Äquivalenz-Relation $\sim$ identifiziere konjugierte Punkte, d.h. Punkte im selben Orbit der Automorphismen-Gruppe von $\bar{k}/k$ liegen.

3.7. Der projektive Raum über Spec A

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und

$$R = A[X_0, \dots , X_N]$$

der graduierte Ring mit

[37] Ist $P \in \mathrm{Proj}\, R$ ein Punkt, dessen i-te Koordinate ungleich Null ist, d.h. $X_i \notin P$, so bedeutet $P{\in}V(I)$, daß der P entsprechende Punkt von Spec $R_{(X_i)}$ Nullstelle der inhomogenen Polynome $F/X_i^{\deg F}$ mit $F{\in}I$ ist. Allgemeiner:

Für $P \in V(I)$ und homogenes $F \notin P$ gilt:

$$I \subseteq P$$

$$IR_F \subseteq PR_F$$

$$IR_F \cap R_{(F)} \subseteq p := PR_F \cap R_{(F)} ,$$

d.h. jedes $f \in IR_F \cap R_{(F)}$ hat im P entsprechenden Punkt $p \in \mathrm{Spec}\, R_{(F)}$ eine Nullstelle. Man beachte, die Elemente der Gestalt f sind Quotitenten aus homogenen Elementen von I und einer Potenz von F.

Sei umgekehrt $f(p) = 0$ für jedes $f \in IR_F \cap R_{(F)}$, d.h. es gelte

$$IR_F \cap R_{(F)} \subseteq PR_F \cap R_{(F)}.$$

Für jedes homogene $U \in I$ gilt dann auch

$$\frac{U^a}{F^b} \in IR_F \cap R_{(F)} \subseteq PR_F \cap R_{(F)} \subseteq PR_F,$$

wenn man a und b so wählt, daß im Zähler und Nenner homogene Polynome desselben Grades stehen. Es folgt $U^a \cdot F^c \in P$ (mit c geeignet). Weil F nicht in P liegt und P ein Primideal ist, erhalten wir $U \in P$. Wir haben gezeigt $I \subseteq P$, d.h. $P \in V(I)$.

Die homogenen Polynome von R lassen sich als globale Schnitte eines Vektorraumbündels auf Proj R betrachten. Die Punkte von $P \in V(I)$ sind dann gerade die gemeinsamen Nullstellen der Schnitte, die in I liegen.

$$R_n = \sum_{i_0+\ldots+i_N=n} A\cdot X_0^{i_0}\cdot\ldots\cdot X_N^{i_N}$$

Für jedes $P\in\mathrm{Proj}\ R$ ist

$$p := A\cap P$$

ein Primideal von A, d.h. man hat eine Abbildung

$$\varphi:\mathrm{Proj}\ R \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A,\ P \mapsto A\cap P.$$

Für $f \in A \subseteq R$ gilt

$$\varphi(P) \in D(f) \Leftrightarrow f \notin A\cap P \Leftrightarrow f \notin P \Leftrightarrow P\in D_+(f),$$

d.h.

$$\varphi^{-1}(D(f)) = D_+(f).$$

Das Urbild einer offenen Hauptmenge von Spec A bei φ ist eine offene Hauptmenge von Proj R. Insbesondere ist die Abbildung φ stetig.

Außerdem ist

$$D_+(f) = D_+(fX_0) \cup \ldots \cup D_+(fX_n)$$

also auf Grund der Garben-Axiome

$$\mathcal{O}_X(D_+(f)) \subseteq \mathcal{O}_X(D_+(fX_0)) \times \ldots \times \mathcal{O}_X(D_+(fX_N))$$

mit

$$\mathcal{O}_X(D_+(fX_i)) = R_{(fX_i)} = (R_f)_{(X_i)} = A_f[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_N}{X_i}]$$

Dieselben Betrachtungen wie in A1/4.2.5 mit $A_f[X_0, \ldots, X_N]$ anstelle des Polynomrings $k[X_0, \ldots, X_N]$ zeigen[38]

$$\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(D(f))) = \mathcal{O}_X(D_+(f)) = A_f = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(D(f)) \text{ für jedes } f \in A.$$

Nach 2.4 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\varphi^{\#}:\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A} \xrightarrow{\cong} \varphi_*\mathcal{O}_X$$

und damit einen Morphismus von geometrischen Räumen

$$(\varphi, \varphi^{\#}): (\mathrm{Proj}\ R, \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\ R}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}\ A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}).$$

Für jeden abgeschlossen Punkt $p \in \mathrm{Spec}\ A$ ist

$$\varphi^{-1}(V(p)) = \varphi^{-1}(\mathrm{Spec}\ A/p)$$

eine abgeschlossene Teilmenge von Proj R. Man kann zeigen, diese ist gerade durch das homogene Ideal

---

[38] Anstelle des rationalen Funktionenkörpers $k(X_0, \ldots, X_N)$ muß man dabei den Quotientenring

$$A(X_0, \ldots, X_N)$$

von $A[X_0, \ldots, X_N]$ bezüglich der multiplikativen Menge $S \subseteq A[X_0, \ldots, X_N]$ der Nicht-Nullteiler betrachten. Ein Polynom $f \in A[X_0, \ldots, X_N] - \{0\}$ dabei genau dann ein Nullteiler, wenn alle seine Koeffizienten von ein und demselben Element aus $A - \{0\}$ annulliert werden, vgl. Nagata, Local Rings,das Kapitel über Quotientenringe.

$$p\bullet R = p\bullet A[X_0, \ldots X_n]$$

definiert und läßt sich damit mit dem Schema

$$\mathrm{Proj}\ R/pR = \mathrm{Proj}\ (A/p)[X_0, \ldots X_n] = \mathbb{P}^N_{A/p}\ .$$

Die Fasern der Abbildung φ sind also projektive Räume über den Körpern A/p. Wir schreiben

$$\mathbb{P}^N_A := \mathrm{Proj}\ A[X_0, \ldots X_n]$$

und nennen dieses Schema auch <u>N-dimensionalen projektiven Raum</u> über A bzw. über Spec A.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Proj}\ R & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Spec}\ A \\
\cup & & \cup \\
\mathrm{Proj}\ R/pR & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\ A/p \\
\| & & \| \\
\mathbb{P}^N_{A/p} & & \mathrm{Spec}\ A/p
\end{array}$$

Man beachte, für $A = \mathbb{Z}$ sind Fasern von φ projektive Räume über den Körpern der Gestalt $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p$ (und die Faser über dem allgemeinen Punkt der Raum $\mathbb{P}^N_{\mathbb{Q}}$).

3.8 Abgeschlossen Einbettungen

Ein Morphismus von Schemata

$$f: X \longrightarrow Y$$

heißt abgeschlossene Einbettung, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

1. f(X) ist eine abgeschlossene Teilmenge von Y.
2. f induziert einen Homöomorphismus $X \longrightarrow f(X)$.
3. Für jeden Punkt $x \in X$ ist die induziete Abbildung $f_x: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ surjektiv.

Bemerkungen

(i) Seien Y eine komplexe Mannigfaltigkeit, $X \subseteq Y$ eine Teilmannigfaltigkeit und

$$f \in \mathcal{O}_{X,x}$$

eine Potenzreihe, die auf X in einer Umgebung des Punktes $x \in X$ konvergiert. Aus der Formel für den Konvergenzradius von f ergibt sich, daß dann f auch im umgebenden Raum Y in der Nähe von x konvergiert. Mit anderen Worten, die Einschränkung auf X der holomorphen Funktionen von Y definiert zusammen mit der natürlichen Einbettung $X \hookrightarrow Y$ eine Morphismus geometrischer Räume

$$(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y),$$

für welchen obige Bedingung 3 erfüllt ist.

(ii) Ein Morphismus affiner Schemata

$$f: \mathrm{Spec}\ A \longrightarrow \mathrm{Spec}\ B$$

ist genau dann eine abgeschlossene Einbettung, wenn $A \cong B/J$ mit einem Ideal J gilt und f der Morphismus zum Ring-Homomorphismus

$$B \longrightarrow B/J \cong A$$

ist.

Zum Beweis von (ii).
Im Fall A = B/J ist erhält man die Abbildungen

$$f_x: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

aus der natürlichen Surjektion

$$B \twoheadrightarrow B/J = A$$

durch Übergang zu den Lokalisierungen bezüglich der Primideale

$$x \in \operatorname{Spec} B/J = V(J) \subseteq \operatorname{Spec} B.$$

Diese sind somit von der Gestalt

$$B_x \longrightarrow (B/J)_x = B_x/JB_x,$$

also insbesondere surjektiv.

Ist f eine abgeschlossene Einbettung, so ist der Garben-Morphismus

$$f^{\#}: \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$$

surjektiv, d.h. man hat eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}$-Moduln

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B} \xrightarrow{f^{\#}} f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \longrightarrow 0.$$

Übergang zu den globalen Schnitten liefert

$$0 \longrightarrow I(\operatorname{Spec} B) \longrightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(\operatorname{Spec} B) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} B)) \longrightarrow H^1(\operatorname{Spec} B, I)$$

d.h.

$$0 \longrightarrow \Gamma(I) \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow H^1(\operatorname{Spec} B, I).$$

Die Behauptung folgt jetzt mit J := Γ(I) aus dem Satz von Serre, nach welchem die Kohomologie kohärenter Garben für affine Schemata trivial ist.
QED.

3.9 Eine abgeschlossene Einbettung projektiver Spektren

Seien R ein graduierter Ring, $I \subseteq R$ ein homogenes Ideal und

$$\rho: R \longrightarrow R/I$$

die natürliche Abbildung auf den Faktorring. Letztere induziert eine Abbildung

$$\rho^*: \operatorname{Proj} R/I \xrightarrow{\cong} V(I) \subseteq \operatorname{Proj} R,\ P \mapsto \rho^{-1}(P),$$

welche das projektive Spektrum Proj R/I als Menge mit V(I) identifiziert. Für $F \in R$ homogen und $P \in \operatorname{Proj} R/I$ gilt

$$\begin{aligned} P \in (\rho^*)^{-1}(D_+(F)) &\Leftrightarrow \rho^*(P) \in D_+(F) \\ &\Leftrightarrow F \notin \rho^{-1}(P) \\ &\Leftrightarrow \rho(F) \notin P \\ &\Leftrightarrow P \in D_+(\rho(F)), \end{aligned}$$

d.h.

$$(\rho^*)^{-1}(D_+(F)) = D_+(\rho(F)).$$

Insbesondere ist ρ^* eine stetige Abbildung. Weiter induziert ρ für jedes homogene F eine Surjektion

$$R_F \twoheadrightarrow (R/I)_F = (R/I)_{\overline{F}} \text{ mit } \overline{F} := \rho(F)$$

die den Grad homogener Elemente unverändert läßt,
also eine Surjektion

$$R_{(F)} \twoheadrightarrow (R/I)_{(F)} = R_{(\overline{F})}$$

auf den Elementen des Grades 0, d.h.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\text{Proj } R}(D_+(F)) \twoheadrightarrow\ & \mathcal{O}_{\text{Proj } R/I}(D_+(\overline{F})) \\ &= \mathcal{O}_{\text{Proj } R/I}((\rho^*)^{-1}(D_+(F))) \qquad (1) \\ &= (\rho^*)_*\mathcal{O}_{\text{Proj } R/I}(\mathcal{O}_{\text{Proj } R/I}). \end{aligned}$$

Diese Homomorphismen setzen sich zusammen zu einen Homomorphismus von Ring-Garben

$$(\rho^*)^{\#}:\mathcal{O}_{\text{Proj } R} \longrightarrow (\rho^*)_*\mathcal{O}_{\text{Proj } R/I}\,.$$

Zusammen erhalten wir einen Morphismus geometrischer Räume

$$(\rho^*, (\rho^*)^{\#}): (\text{Proj } R/I, \mathcal{O}_{\text{Proj } R/I}) \longrightarrow (\text{Proj } R, \mathcal{O}_{\text{Proj } R}),$$

Welcher die abgeschlossene Teilmenge $V(I) \subseteq \text{Proj } R$ mit dem Schema Proj R/I identifiziert. Wegen der Surjektivität der Homomorphismen (1) handelt es sich um eine abgeschlossene Einbettung.

3.10 Kategorien von Schemata

Die Schemata bilden zusammen mit den Morphismen von geometrischen Räumen eine Kategorie, die mit

$$\text{Sch}$$

bezeichnet wird.
Die Schemata, welche zu einem Schema der Gestalt Spec A isomorph sind, bilden eine volle Teilkategorie von Sch, welche <u>Kategorie der affinen Schemata</u> heißt und isomorph ist zum Dual der Kategorie der kommutativen Ringe mit 1.

Sei S ein Schema. Eine <u>Schema über S</u> oder auch <u>S-Schema</u> ist ein Morphismus von Schemata

$$\varphi: X \longrightarrow S.$$

Der Morphismus φ heißt dann auch <u>Struktur-Morphismus</u> des S-Schemas X. Im Fall

$$S = \text{Spec } A$$

sagt man auch, X ist eine <u>Schema über A</u> oder auch <u>ein A-Schema</u>.
Ein <u>Morphismus von S-Schemata</u> oder auch <u>S-Morphismus</u> ist ein Schema-Morphismus

$$f: X \longrightarrow Y,$$

wobei X und Y Schemata über S sind und das folgende Diagramm kommutativ ist,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Dabei seien φ und ψ die Struktur-Morphismen von X bzw. Y.

Die S-Schemata bilden zusammen mit den S-Morphismen für jedes Schema S eine Kategorie, welche mit

$$Sch/S$$

bezeichnet wird.

Beispiel 1

Für jeden Homomorphismus h: $A \longrightarrow B$ von kommutativen Ringen mit 1 gibt des zugehörigen Schema-Morphismus

$$\mathrm{Spec}\ B \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A,$$

dem Schema Spec B die Struktur eines A-Schemas. Da es für jeden kommutativen Ring A mit 1 genau einen Homomorphismus

$$\mathbb{Z} \longrightarrow A$$

gibt, besitzt jedes affine Schema Spec A die Struktur eines $\mathbb{Z}$-Schemas. Dies gilt insbesondere für die affinen Schemata, die ein vorgegebenes Schema überdecken. Weil die Morphismen

$$\mathrm{Spec}\ A \longrightarrow \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$$

eindeutig bestimmt sind, setzen sie sich zu einem auf dem ganzen Schema definierten Morphismus mit Werten in Spec $\mathbb{Z}$ zusammen. Jedes Schema besitzt somit auf genau eine Weise die Struktur eines $\mathbb{Z}$-Schemas,

$$Sch = Sch/\mathbb{Z}.$$

Beispiel 2

Nach 3.7 besitzt $\mathbb{P}^N_A = \mathrm{Proj}\ A[X_0,...,X_N]$ für jeden kommutativen Ring mit 1 die Struktur eines Schemas über A.

Nach 3.9 definiert jedes homogene Ideal $I \subseteq A[X_0,...,X_N]$ ein abgeschlossenes Teilschema von $\mathbb{P}^N_A$. Dieses bekommt so ebenfalls die Struktur eines A-Schemas:

$$V(I) \hookrightarrow \mathbb{P}^N_A \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A.$$

3.11 Faserprodukte

Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und

$$f: X \longrightarrow Z \text{ und } g: Y \longrightarrow Z$$

zwei Morphismen von $\mathcal{C}$ mit demselben Ziel Z. Das Faserprodukt von f und g ist ein Objekt

$$W := X\times_Z Y$$

von $\mathcal{C}$ zusamme mit zwei Morphismen

$$f':W \longrightarrow X \text{ und } g':W \longrightarrow Y,$$

für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f'} & X \\ g'\downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

kommutativ ist und welche im folgenden Sinne universell sind bezüglich der angegebenen Eigenschaft: für je zwei Morphismen

$$f'': W'' \longrightarrow X \text{ und } g'': W'' \longrightarrow Y,$$

für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W'' & \xrightarrow{f''} & X \\ g''\downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

kommutiv ist, gibt es genau eine Morphismus φ:W” $\longrightarrow$ W mit f” = f’$\circ\varphi$ und g” = g’$\circ\varphi$.

Bemerkungen

(i) In der Kategorie Ens hat die Menge

$$X\times_Z Y = \{(x, y) \in X\times Y \mid f(x) = g(y) \}$$

zusammen mit den natürlichen Projektionen

$$X\times_Z Y \longrightarrow X, (x,y) \mapsto x,$$

$$X\times_Z Y \longrightarrow Y, (x,y) \mapsto y,$$

gerade die Universalitätseigenschaft des Faserprodukts.

(ii) Durch die obige Beschreibung des Faserprodukts in Ens kann die allgemeine Universalitätseigenschaft des Faserprodukts in die Gestalt einer Bijektion bringen: die Universalitätseigenschaft in der Kategorie $\mathcal{C}$ besagt gerade, daß die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W'', X\times_Z Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W'',X) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W'',Z)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W'',Y),$$

$$W'' \xrightarrow{\varphi} X\times_Z Y \quad \mapsto \quad (W'' \xrightarrow{f'\circ\varphi} X, \quad W'' \xrightarrow{g'\circ\varphi} Y)$$

bijektiv ist für jedes Objekt W” von $\mathcal{C}$.

(iii) Ist Z ein terminales Objekt (zum Beispiel eine einelementige Menge in Ens), so fällt das Faserprodukt über Z gerade mit dem gewöhnlichen Produkt zusammen,

$$X\times_Z Y = X \times Y \text{ für Z terminal.}$$

(iii) Nach (ii) überführt der kovariante Hom-Funktor $h^{W''}(?)$ = Hom(W”, ?) Faserprodukte in Faserprodukte.

(iv) Je zwei Morphismen von affinen Schemata

$$\mathrm{Spec}\ A \longrightarrow \mathrm{Spec}\ C \text{ und } \mathrm{Spec}\ B \longrightarrow \mathrm{Spec}\ C$$

werden definiert durch die zugehöriben Ring-Homomorphismen

$$\varphi: C \longrightarrow A \text{ und } \psi: C \longrightarrow B.$$

Diese wiederum definieren Ring-Homomorphismen

$$A \longrightarrow A\otimes_C B,\ a \mapsto a\otimes 1, \text{ und } B \longrightarrow A\otimes_C B,\ b \mapsto 1\otimes b,$$

und damit Morphismen affiner Schemata

$$\mathrm{Spec}\ A\otimes_C B \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A \text{ und } \mathrm{Spec}\ A\otimes_C B \longrightarrow \mathrm{Spec}\ B.$$

Aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \psi\downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & A\otimes_C B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} c & \mapsto & \varphi(c) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi(c) & \mapsto & \varphi(c)\otimes 1 = 1\otimes\psi(c) \end{array}$$

ergibt sich die Kommutativität des zugehörigen Diagramms affiner Schemata

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} A\otimes_C B & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} B & \longrightarrow & \operatorname{Spec} C \end{array}$$

Die Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts übersetzt sich dabei gerade in die Aussage, daß Spec $A\otimes_C B$ gerade das Faserprodukt

$$\operatorname{Spec} A \times_{\operatorname{Spec} C} \operatorname{Spec} B$$

ist:

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})}(\operatorname{Spec} R, \operatorname{Spec} A\otimes_C B) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-Alg}}(A\otimes_C B, R)$$
$$= \{ \varphi: A\times B \longrightarrow R \mid \varphi \text{ bilinear über } C \}$$
$$=^{39} \{ (A\xrightarrow{f}R, B\xrightarrow{g}R) \mid f, g\in \operatorname{Mor}(\mathbb{Z}\text{-Alg}), f(c\cdot 1_A) = g(c\cdot 1_B) \}$$
$$= \operatorname{Hom}(A, R) \times_{\operatorname{Hom}(C,R)} \operatorname{Hom}(B, R)$$
$$= \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})}(\operatorname{Spec} R, \operatorname{Spec} A) \times_{\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})}(\operatorname{Spec} R, \operatorname{Spec} C)} \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})}(\operatorname{Spec} R, \operatorname{Spec} B)$$

Mit anderen Worten, Spec $A\otimes_C B$ hat in der Kategorie der affinen Spektren die Universalitätseigenschaft des Faserprodukts Spec $A\times_{\operatorname{Spec} C}$ Spec B.

(v) Aus der vorhergehende Aussage kann man die Existenz der Faserprodukte beliebiger Paare von Schema-Morphismen

$$X \longrightarrow Z \text{ und } Y \longrightarrow Z \tag{1}$$

ableiten: man überdecke Z durch affine Schemata und mache dasselbe für deren Urbilder in X und Y. Danach bilde man die zugehörigen Faserprodukte affiner Schemata und klebe die Ergebnisse in geeigneter Weise zusammen. Vom Ergebnis kann man zeigen, daß es die Universalitätseigenschaft des Faserprodukts der Morphismen (1) hat.

Beispiel 1

$$\mathbb{P}^N_A\otimes_C B := \mathbb{P}^N_{\operatorname{Spec} A}\times_{\operatorname{Spec} C} \operatorname{Spec} B = \mathbb{P}^N_{A\otimes_C B}$$

Sei $R := A[X]$ mit $X = X_0,\dots,X_N$. Betrachten wir das projektive Schema links und dessen offene Hauptmengen. Diese sind gerade die affinen Spektren der Ringe der folgenden Gestalt

$$R_{(F)}\otimes_C B = (R_F\otimes_C B)_0 = (\bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F^n} A[X] \otimes_C B)_0$$
$$= (\bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F^n} (A\otimes_C B)[X])_0$$
$$= (A\otimes_C B)[X]_{(F\otimes 1)},$$

d.h. die offenen Hauptmengen den projektiven Raums über $A\otimes_C B$.

Beispiel 2

---

39 Für gegebenes φ setze man $f(a) := \varphi(a,1)$ und $g(b) = \varphi(1,b)$. Wegen $\varphi(c\cdot a, b) = \varphi(a, c\cdot b)$ besteht dann die angegebene Identität für f und g.
Für gegebenes f und g setze man $\varphi(a,b) = f(a)g(b)$. Weil f und g der angegebenen Identiät genügen, gilt dann $\varphi(c\cdot a, b) = \varphi(a, c\cdot b)$.

Für jeden Morphismus f: $X \longrightarrow Y$ von Schemata und jede Einbettung i: $V \hookrightarrow Y$ einer offenen Teilmenge V in Y läßt sich die Projektion des Faserprodukts

$$X\times_Y V \longrightarrow V$$

in natürlicher Weise identifizieren mit der Einschränkung

$$f^{-1}(V) \longrightarrow V$$

von f auf V: es ist nicht schwer zu sehen, daß der letztere Morphismus zusammen mit der der natürlichen Einbettung $f^{-1}(V) \hookrightarrow X$ die Universalitätseigenschaft des Faserprodjukts $X\times_Y V$ besitzt. Offensichtlich ist

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \cup & & \cup \\ f^{-1}(U) & \longrightarrow & U \end{array}$$

kommutativ, und jeder Morphismus g: $W \longrightarrow X$, für welchen sich $f\circ g$ sich über die natürliche Einbettung $U \hookrightarrow Y$ faktorisiert, faktorisiert sich über $f^{-1}(U)$.

Dies kann man als Motivation für die Bezeichnung Faserprodukt ansehen: das Faserprodukt mit U ist gerade die “Faser” $f^{-1}(U)$ über U.
Analog kann man das Faserprodukt von f: $X \longrightarrow Y$ mit einer abgeschlossenen Einbettung $Z \hookrightarrow Y$ als Einschränkung $f^{-1}(Z) \longrightarrow Z$ von f auf die Faser über Z interpretieren, das Schema

$$f^{-1}(Z) := X\times_Y Z$$

heißt <u>schematheoretischen vollständiges Urbild</u> von Z bei f.

3.12 Projektive Morphismen

Ein Morphismus von Schemata

$$f: X \longrightarrow Y$$

heißt <u>projektiv</u>, wenn er lokal von der Gestalt

$$Z \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N_B \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec} B \tag{1}$$

ist. Dabei seien B ein kommutativer Ring mit 1, φ der Morphismus von 3.7 und i eine abgeschlossene Einbettung. Genauer: für jedes Punkt $y \in Y$ gebe es eine affine Umgebung

$$\operatorname{Spec} B = V \subseteq Y\ ,\ y \in V$$

derart, daß der durch f induzierte Schema-Morphismus

$$f^{-1}(V) \longrightarrow V$$

in der angebenen Weise zerfällt in eine abgeschlossene Einbettung in einen projektiven Raum über einem affinen Spektrum und den natürlichen Morphismus auf das Basis-Spektrum.

Man sagt in der beschriebenen Situation auch, X ist <u>projektiv</u> über Y bezüglich f und spricht vom <u>Struktur-Morphismus</u> f des projektiven Schemas X über Y. Ein Schema X heißt <u>projektiv</u> (über dem Körper k), wenn es projektiv über Spec k ist.

Bemerkungen

(i) Projektive Morphismen sind abgeschlossen, d.h. sie bilden abgeschlossen Teilmengen in abgeschlossene Teilmengen ab.

(ii) Die Eigenschaft eines Morphismus projektiv zu sein, bleibt bei Basiswechsel erhalten, d.h. für jeden projektiven Morphismus

$$f: X \longrightarrow Y$$

und jeden beliebigen Morphismus $g: Y' \longrightarrow Y$ von Schemata ist der induzierte Morphismus

$$X' := X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$$

projektiv.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y & \supseteq U \\ X' \arrow[u] \arrow[r] & Y' \arrow[u, "g"'] & \supseteq V \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Seien

$$U := \operatorname{Spec} B \subseteq Y$$

derart, daß $f^{-1}(U) \longrightarrow U$ die Gestalt (1) hat und

$$V := \operatorname{Spec} C \subseteq g^{-1}(U)$$

eine affine Umgebung, so ist die Einschränkung

$$X \times_Y V \longrightarrow V$$

von $X' \longrightarrow Y'$ auf V von der Gestalt

$$Z \otimes_B C \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N_B \otimes_B C \overset{\varphi}{\longrightarrow} (\operatorname{Spec} B) \otimes_B C$$

$$\begin{array}{ccccc} Z \otimes_B C & \overset{i \otimes C}{\hookrightarrow} & \mathbb{P}^N_B \otimes_B C & \overset{\varphi \otimes C}{\longrightarrow} & (\operatorname{Spec} B) \otimes_B C \\ & & \| & & \| \\ & & \mathbb{P}^N_C & \longrightarrow & \operatorname{Spec} C \end{array}$$

Man beachte, das Faserprodukt überführt abgeschlossene Einbettungen in abgeschlossene Einbettungen: ein Morphismus der Gestalt

$$\operatorname{Spec} R/J \longrightarrow \operatorname{Spec} R$$

wird durch tensorieren mit einer einer R-Algebra S zu einem Morphismus der Gestalt

$$\operatorname{Spec} (R/J) \otimes_R S \longrightarrow \operatorname{Spec} R \otimes_R S$$

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} (R/J) \otimes_R S & \longrightarrow & \operatorname{Spec} R \otimes_R S \\ \| & & \| \\ \operatorname{Spec} S/JS & \longrightarrow & \operatorname{Spec} S \end{array}$$

Das Gleichheitszeichen rechts ergibt sich aus der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts.

(iii) Wegen (i) und (ii) sind projektibve Morphismen universell abgeschlossen, d.h. sie bilden abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen ab, und diese Eigenschafte bleibt bei Basiswechsel erhalten. (Separierte) Morphismen (endlichen Typs) mit dieser Eigenschaft heißen auch <u>eigentlich</u>. Projektive Morphismen sind eigentlich. Es gibt eigentliche Morphismen, die nicht projektiv sind.[40] Die projektiven Morphismen bilden den Kontext, in welchem sich die

[40] vgl. Anhang B des Buches von Hartshorne: Algebraic geometry.

meisten zentralen Sätze der algebraischen Geometrie in natürlicher Wesie formulieren lassen.

(iii) Sind

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

Morphismen von Schemata mit der Eigenschaft, daß die Zusammensetzung $g\circ f$ projektiv ist, so ist auch f projektiv.

3.13 Beschreibung von Morphismen

3.13.1 Affiner Fall

Betrachten wir die folgenden Morphismen:

$$\operatorname{Spec} B \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec} A \hookrightarrow \mathbb{A}^N_k = \operatorname{Spec} k[x_1,...,x_N]$$

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} B \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec} A \hookrightarrow & \mathbb{A}^N_k & = \operatorname{Spec} k[x_1,...,x_N] \\ & \downarrow x_i & \downarrow \\ & \mathbb{A}^1_k & \operatorname{Spec} k[x_i] \end{array}$$

mit einem Körper k, welche von k-Algebra-Homomorphismen induziert werden:

$$\begin{array}{c} B \longleftarrow A \overset{\rho}{\twoheadleftarrow} k[x_1,...,x_N] \\ \cup \\ k[x_i] \end{array}$$

Der Homomorphismus $k[x_i] \longrightarrow B$ ist als k-Algebra-Homomorphismus durch ein Element $f_i \in B$ festgelegt, nämlich durch das Bild von x_i. Dabei kann man f_i als die Verpflanzung entlang φ der i-ten Koordinatenfunktion

$$x_i: \mathbb{A}^N_k \longrightarrow \mathbb{A}^1_k,\ p \mapsto x_i(p),$$

betrachten, d.h. $x_i\circ\varphi$ entspricht gerade der Abbildung

$$x_i\circ\varphi: \operatorname{Spec} B \longrightarrow \mathbb{A}^1_k,\ p \mapsto f_i(p).$$

Der Morphismus φ ist durch die Bilder der x_i in B gegeben:

$$\varphi: \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A \hookrightarrow \mathbb{A}^N_k,\ p \mapsto (f_1(p), \dots , f_N(p)).$$

Als zugehörigen Morphismus der (globalen Schnitte der) Strukturgarben erhalten wir

$$B \longleftarrow k[x_1,\dots,x_N]$$

$$P(f_1, \dots , f_N) \leftarrow\!\shortmid P(x_1,\dots,x_N).$$

Dieser faktorisiert sich über den natürlichen Homomorphismus

$$\rho\colon k[x_1,\dots,x_N] \twoheadrightarrow A = k[x_1,\dots,x_N]/I,$$

d.h. die definierenden Gleichungen $\alpha\in I$ von Spec A in $\mathbb{A}_k^N$ werden in die Null abgebildet:

$$\alpha(f_1, \dots , f_N) = 0 \text{ für } \alpha\in I.$$

Umgekehrt definiert jedes N-Tupel von Elementen aus B, welches dieser Bedingung genügt, einen Morphismus

$$\operatorname{Spec} B \longrightarrow \mathbb{A}_k^N,$$

der sich über die natürliche Einbettung $\operatorname{Spec} A \hookrightarrow \mathbb{A}_k^N$ faktorisiert.

3.13.2 Projektiver Fall

Betrachten wir die folgenden Morphismen von algebraischen Schemata.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\varphi} Y & \hookrightarrow & \mathbb{P}_k^N & = D_+(Y_0)\cup\dots\cup D_+(Y_N) \\ \cap & & & \parallel & \\ \mathbb{P}_k^M & & & \operatorname{Proj} k[Y_0 \dots Y_N] & \end{array}.$$

Lokal über $U := D_+(Y_i)$ erhalten wir einen Morphismus der Gestalt

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Spec} B & \subseteq \varphi^{-1}(U) \longrightarrow U = \operatorname{Spec} k[Y_0,\dots,Y_N]_{(Y_i)} \\ \cap & \\ \operatorname{Spec} k[X_0,\dots,X_M]_{(F)} & \end{array}$$

welcher von Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{c} B \xleftarrow{h} k[\frac{Y_0}{Y_i},\dots,\frac{Y_n}{Y_i}] \\ \Uparrow\rho \\ k[X_0 \ \dots \ X_M]_{(F)} \end{array}$$

kommt. Die Bilder f_j der $\frac{Y_j}{Y_i}$ lassen sich repräsentieren durch homogene Quotienten $\frac{F_j}{F^n}$ mit $\deg F_j = n\bullet\deg F$. O.B.d.A. können wir annehmen $n = 1$ (da sich F durch F^n ersetzen läßt). Damit ist h die Zusammensetzung des k-Algebra-Homomorphismus

$$k[\frac{Y_0}{Y_i}, ..., \frac{Y_N}{Y_i}] \longrightarrow k[X_0,...,X_M]_{(F)}, \frac{Y_j}{Y_i} \mapsto \frac{F_j}{F},$$

mit dem natürlichen Homomorphismus ρ auf den Faktorring. Diesen Homomorphismus kann man sich entstanden denken aus dem k-Algebra-Homomorphismus (der homogen vom Grad deg F ist)

$$k[Y_0,...,Y_N] \longrightarrow k[X_0,...,X_M], Y_j \mapsto F_j ,$$

(mit F_i := F). Auf Spec B $\subseteq \mathbb{P}_k^M$ ist damit φ gegeben durch

$$\varphi|_{\mathrm{Spec}\ B} : \mathrm{Spec}\ B \hookrightarrow \mathbb{P}_k^M \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{P}_k^N, p \mapsto [F_0(p),...,F_N(p)].$$

Wegen φ(Spec B) $\subseteq$ X gilt

$$\alpha(F_0,...,F_N) \in I := \text{Ideal von } X \text{ in } \mathbb{P}_k^M$$

für alle $\alpha \in J$:= Ideal von Y in $\mathbb{P}_k^N$.

Zusammenfassung

(i) Seien k ein Körper,

$$X = V(I) \subseteq \mathbb{P}_k^M \text{ und } Y = V(J) \subseteq \mathbb{P}_k^N$$

abgeschlossene Teilschemata mit den homogenen Idealen[41]

$$I \subseteq k[X_0, ... , X_M] , J \subseteq k[Y_0, ... ,Y_N]$$

und

$$f: X \longrightarrow Y$$

ein Morphismus (welcher wegen der Projektivität von X über k automatisch projektiv ist). Dann gibt es für jeden Punkt $x \in X$ homogene Polynome

$$F_0, ... , F_N \in k[X_0, ... ,X_M],$$

mit

$$G(F_0, ... , F_N) \in I \text{ für jedes } G \in J$$

die nicht alle in x gleich Null sind[42], und eine offene Umgebung

$$U \subseteq X$$

von x derart daß die Einschränkung von f auf U durch die Abbildungsvorschrift

$$U \longrightarrow \mathbb{P}_k^N , u = [u_0 , ... , u_M] \mapsto [F_0(u), ... , F_N(u)]$$

gegeben ist.[43]

---

[41] d.h. X = Proj $k[X_0, ... , X_M]/I$ und Y = Proj $k[Y_0, ... ,Y_N]/J$

[42] d.h. für mindestens ein i liegt die Restklasse von F_i im projektiven Koordinatenring von X,

$$F_i|_X \in R := k[X_0, ... , X_M]/I ,$$

nicht im Primideal $x \in$ Proj R. Dabei bezeichne I das homogene Ideal, welches X definiert,

$$X = V(I).$$

[43] Die homogenen Polynome F_i des Grades d definieren einen Homomorphismus graduierter Ringe

---

$$k[Y_0, \dots , Y_N] \longrightarrow k[X_0, \dots , X_M] \text{ , } Y_i \mapsto F_i \text{ ,}$$

(des Grades d). Nach Wahl der F_i wird dabei das Ideal J in das Ideal I abgebildet, d.h. die Abbildung induziert eine Homomorphismus graduierter Ringe

$$S:= k[Y_0, \dots , Y_N]/J \longrightarrow R:=k[X_0, \dots , X_M]/I.$$

O.B.d.A. liege die Restklasse $\overline{F}_i$ von F_i nicht in x. Weil diese das Bild der Restklasse von Y_i bei dieser Abbildung ist, erhalten wir einen Homomorphismus

$$S_{Y_i} \longrightarrow R_{F_i}$$

und damit einen Homomorphismus

$$\mathcal{O}_Y(D_+(Y_i)) = S_{(Y_i)} \longrightarrow R_{(F_i)} = \mathcal{O}_X(D_+(F_i)),$$

also einen Morphismus affiner Spektren

$$x \in D_+(F_i) = \operatorname{Spec} R_{(F_i)} \longrightarrow \operatorname{Spec} S_{(Y_i)} = D_+(Y_i).$$

Die obige Aussage soll bedeuten, daß dieser Morphismus mit dem Morphismus f in einer Umgebung von x übereinstimmt.

Anschaulich gesprochen ist ein Morphismus eine Abbildung, die lokal von der Gestalt

$$x \mapsto f(x) = (\frac{r_1(x)}{s(x)} , \dots , \frac{r_N(x)}{s(x)})$$

ist mit Polynomen $r_1, \dots , r_N$ und s, wobei s in einer Umgebung des betrachteten Punktes $x = x^0$ ungleich Null ist. O.B.d.A. liege x^0 in $D_+(X_0)$ und das Bild von x^0 in $D_+(Y_0)$. Dann können wir schreiben $x = (\frac{X_1}{U_0} , \dots , \frac{X_N}{X_0}) = \frac{X}{X_0}$ und das Bild von x hat in projektiven Koordinaten die Gestalt

$$\begin{aligned}
f(x) &= [1, \frac{r_1(x)}{s(x)} , \dots , \frac{r_N(x)}{s(x)}] = [s(x), r_1(x), \dots , r_N(x)] \\
&= [s(\frac{X}{X_0}), r_1(\frac{X}{X_0}), \dots , r_N(\frac{X}{X_0})] \\
&= [X_0^m \bullet s(\frac{X}{X_0}), X_0^m \bullet r_1(\frac{X}{X_0}), \dots , X_0^m \bullet r_N(\frac{X}{X_0})]
\end{aligned}$$

Für m hinreichend groß sind die projektiven Koordinaten von f(x) in der letzten Darstellung homogen vom selben Grad m, und die erste Koordinate ist in einer

(ii) Seien k ein Körper,

$$X = V(I) \subseteq \mathbb{P}_k^M \text{ und } Y = V(J) \subseteq \mathbb{P}_k^N$$

abgeschlossene Teilschemata mit den homogenen Idealen[44]

$$I \subseteq k[X_0, \dots , X_M] , J \subseteq k[Y_0, \dots ,Y_N].$$

Weiter seien eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup U_\alpha$$

von X gegeben und für jedes U_α homogene Polynome

$$F_0^\alpha, \dots , F_N^\alpha \in k[X_0, \dots ,X_M],$$

gleichen Grades mit

$$G(F_0^\alpha, \dots , F_N^\alpha) \in I \text{ für jedes } G \in J,$$

die in keinem Punkt von U_α gleichzeitig Null sind. Diese definieren für jedes α einen Morphismus von Schemata

$$f_\alpha:U_\alpha \longrightarrow Y \;(\subseteq \mathbb{P}_k^N) , u = [u_0 , \dots , u_M] \mapsto [F_0^\alpha(u), \dots , F_N^\alpha(u)].$$

Gilt außerdem für je zwei Indizes α', α''

$$F_i^{\alpha'}F_j^{\alpha''} - F_j^{\alpha'}F_i^{\alpha''} \in I \text{ für } i, j = 0, \dots , N,$$

so stimmen die Morphismen $f_{\alpha'}$ und $f_{\alpha''}$ auf $U_{\alpha'} \cap U_{\alpha''}$ überein (für je zwei Indizes α', α'') und definieren so einen Morphismus

$f: X \longrightarrow Y$ mit $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$ für jedes α.

3.13.3 Beispiel: Die Veronese-Einbettung

Seien k ein Körper, $X_0, \dots , X_N$ Unbestimmte und $\mu_0, \dots , \mu_M$ die Potenzprodukte des Grades d in den X_i . Dann ist der Morphismus

$$\mathbb{P}_k^N \longrightarrow \mathbb{P}_k^M , x = [x_0, \dots , x_N] \mapsto [\mu_0(x), \dots , \mu_M(x)],$$

eine abgeschlossene Einbettung.

Beispiel 1

Die Abbildung

Umgebung von x^0 ungleich Null (weil x^0 in $D_+(X_0)$ liegt, d.h. $U_0(x^0) \neq 0$, und $f(x^0)$ wohldefiniert ist, d.h. $s(\frac{X}{X_0}(x^0)) = s(x^0) \neq 0$.

[44] d.h. $X = \operatorname{Proj} k[X_0, \dots , X_M]/I$ und $Y = \operatorname{Proj} k[Y_0, \dots ,Y_N]/J$

$$\mathbb{P}^1_k \longrightarrow \mathbb{P}^2_k,\ [s,t] \mapsto [s^2, st, t^2],$$

identifiziert die projektive Gerade mit der durch die Gleichung

$$XZ - Y^2 = 0.$$

gegebenen Quadrik der projektiven Ebene. Dies ist eine Parabel $x - y^2 = 0$, wenn man $V(Z)$ als Fernhyperebene auffaßt, und eine Hyperbel $xz - 1 = 0$, wenn man $V(Y)$ als Fernhyperebene ansieht.

Beispiel 2

Die Abbildung

$$\mathbb{P}^1_k \longrightarrow \mathbb{P}^3_k,\ [s,t] \mapsto [s^3, s^2t, st^2, t^3],$$

identifiziert die projektive Gerade mit der durch die Gleichungenn

$$XW - YZ = 0,\ Y^2 - XZ = 0,\ Z^2 - YW = 0$$

gegebenen projektiven Raumkurve dritten Grades.

3.13.4: Die Segre-Einbettung

Die Abbildung

$$\mathbb{P}^M_k \times \mathbb{P}^N_k \longrightarrow \mathbb{P}^{(M+1)(N+1)-1},\ ([x_0, \dots, x_M], [y_0, \dots, y_N]) \mapsto [\dots, x_i y_j, \dots],$$

ist eine abgeschlossene Einbettung, welche das direkte Produkt links mit der abgeschlossenen Teilvarietät mit den folgenden Gleichungen identifiziert.

$$X_{ij}X_{k\ell} - X_{i'j'}X_{k'\ell'} = 0$$

Dabei sollen die Indizes $i, j, k, \ell, i', j', k', \ell'$ alle Werte durchlaufen mit

$$i + k = i'+k' \text{ und } j'+\ell = j + \ell'.$$

Beispiel

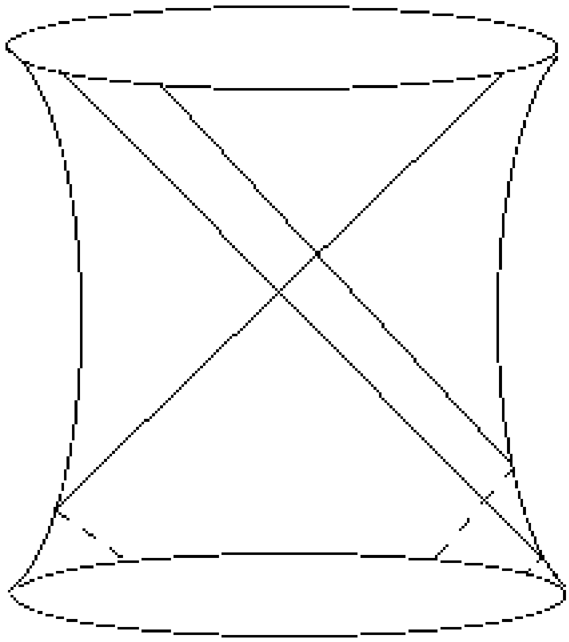
Die Segre-Einbettung identifiziert $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ mit der Quadrik des $\mathbb{P}^3_k$, welche durch die Gleichung

$$Q{:}X_{01}X_{10} - X_{00}X_{11} = 0$$

gegeben ist. Die Projektionen des Produkts $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ auf die beiden Faktoren definieren Morphismen

$$Q \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$$

deren Fasern über den rationalen Punkten sämtlich isomorph sind zur projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_k$.[45]



3.13.4 Beispiel: Aufblasung des Ursprungs im $\mathbb{A}^N_k$

Wir beginnen mit einer Betrachtung der klassischen algebraischen Geometrie. Seien

$$X := \mathbb{A}^N_k$$

der affine Raum über k der Dimension N und $\tilde{X}$ das Teilschema von $\mathbb{A}^N_k \times \mathbb{P}^{N-1}_k$,

$$\tilde{X} \subseteq \mathbb{A}^N_k \times \mathbb{P}^{N-1}_k,$$

mit den Gleichungen

$$x_i Y_j - x_j Y_i = 0 \text{ (i, j = 1, ... , N)} \tag{1}$$

Dabei seien $x_1, \ldots, x_N$ die affinen Koordinaten des $\mathbb{A}^N_k$ und $Y_1, \ldots, Y_N$ die projektiven Koordinaten des $\mathbb{P}^{N-1}_k$. Weiter sei

$$\pi: \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{A}^N_k$$

[45] Die Faserprodukte dieser Morphismen mit den natürlichen Einbettungen $\{x\} \hookrightarrow \mathbb{P}^1_k$ der abgeschlossenen Punkte von $\mathbb{P}^1_k$ sind isomorph zu projektiven Geraden über den Restekörpern $\kappa(x)$ dieser Punkte.

die Einschränkung auf $\widetilde{X}$ der Projektion $p_1:\mathbb{A}_k^N\times\mathbb{P}_k^{N-1} \longrightarrow \mathbb{A}_k^N$ auf den ersten Faktor. Für jeden rationalen Punkt

$$a = (a_1, \dots , a_N) \in \mathbb{A}_k^N , a_1, \dots , a_N \in k,$$

der vom Ursprung verschieden ist, sagen wir $a_i \neq 0$, besteht

$$\pi^{-1}(a)$$

aus den Punkten der Gestalt $(a,[y_1, \dots , y_N])$ mit

$$a_i y_j - a_j y_i = 0,$$

d.h. mit $y_j = \frac{a_j}{a_i} y_i$ für alle j, d.h. es ist

$$[y_1, \dots , y_N] = [\frac{a_1}{a_i} y_i, \dots , \frac{a_N}{a_i} y_i] = [a_1, \dots , a_N] =: [a].$$

Die Faser über a besteht also aus nur einem Punkt,

$$\pi^{-1}(a) = \{(a, [a])\} \text{ für } a \neq 0. \tag{2}$$

Die zweite Koordinate ist also durch die erste eindeutig festgelegt. Dagegen kann für a = 0 die zweite Koordinate beliebig sein: sind in (1) die “kleinen” Koordinaten gleich Null, so können die “großen” beliebig sein, d.h.

$$\pi^{-1}(0) = \{0\}\times\mathbb{P}_k^{N-1} \tag{3}$$

Die Identitäten (2) und (3) sprechen dafür, daß man X und $\widetilde{X}$ identifizieren kann, wenn man aus X den Punkt 0 und aus $\widetilde{X}$ den Ausnahme-Divisor[46] $\{0\}\times\mathbb{P}_k^{N-1}$ entfernt. Genauer: die Abbildung

$$\mathbb{A}_k^N - \{0\} \longrightarrow \widetilde{X} - \pi^{-1}(0) , a \mapsto (a, [a]),$$

ist in allen Punkten regulär und ist invers zu π, also ein Isomorphismus von Schemata.

Zusammengefaßt kann man sagen, daß $\widetilde{X}$ aus X dadurch entsteht, daß aus X der Punkt 0 entfernt und der Divisor $\mathbb{P}_k^{N-1}$ hinzugefügt wird. Die Abbildung π heißt Aufblasung,

---

[46] Ein (Weil-) Divisor eines Schemas $\widetilde{X}$ ist eine formale ganzzahlige Linearkombination von irreduziblen abgeschlossenen Teilschemata von $\widetilde{X}$, deren Dimension um 1 kleiner ist als die von $\widetilde{X}$. Der Begriff kommt aus der Theorie der Riemannschen Flächen, wo es sich als nützlich erwiesen hat, formale Linearkombinationen von Punkten zu betrachten, um das Polstellen-Nullstellen-Verhalten von meromorphen Funktionen zu untersuchen.

von X im Punkt 0. Analog definiert man die Aufblasung von X in einem beliebigen anderen rationalen Punkt von X.

Bemerkung zum Ausnahme Divisor.

Nach (1) und (2) ist für jede Gerade

$$g = ka$$

durch den Ursprung das V das vollständige Urbild

$$\pi^{-1}(g) = E \bigcup \tilde{g}$$

die Vereinigung des Ausnahme-Divisors $E := \{0\}\times\mathbb{P}_k^{N-1}$ mit einer abgeschlossenen Teilvarietät

$$\tilde{g} \subseteq \tilde{X}$$

die bei π isomorph auf g abgebildet wird. Die Kurve $\tilde{g}$ heißt strikte Transformierte von g bei π. Sie schneidet sich mit dem Ausnahme-Divisor in genau einem Punkt,

$$\tilde{g} \bigcap E = \{ (a, [a])\}.$$

Umgekehrt gibt es zu jeden (rationalen) Punkt $p = (a, [a]) \in E$ des Ausnahme-Divisors genau eine Gerade $g = ka$ durch den Ursprung, so daß sich die strikte Transformierte mit E in p schneidet.

Die (rationalen) Punkte von E entsprechen also gerade den Geraden von X durch den Urspung (oder den möglichen Richtungen in 0, die es auf X gibt).

Formale Beschreibung der Aufblasung.

Übersetzen wir die obige Konstruktion in die Sprache der Schemata. Es gilt

$$X = \mathrm{Spec}\ A \text{ mit } A := k[x_1, \dots , x_N]$$

und

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_k^N\times\mathbb{P}_k^{N-1} &= \mathrm{Spec}\ A \times_k \mathrm{Proj}\ k[Y_1, \dots , Y_N]\\ &= \mathrm{Proj}\ A\otimes_k k[Y_1, \dots , Y_N]\\ &= \mathrm{Proj}\ A[Y_1, \dots , Y_N]\\ &= \mathrm{Proj}\ A[Y]\end{aligned}$$

Der Ursprung $0 \in X$ entspricht gerade dem maximalen Ideal

$$m := (x_1, \dots , x_N).$$

Die abgeschlossene Teilvarietät $\tilde{X}$ wird durch das Ideal I von $A[Y_1, \dots , Y_N]$ definiert,

$$I := (x_iY_j - x_jY_i \mid i,j = 1,...,N \} \subseteq A[Y]$$

welches von den linken Seiten von (1) erzeugt wird. Betrachten wir den Homomorphismus graduierter Ringe

$$h: A[Y] \longrightarrow \oplus_{n=0}^{\infty} m^n$$

mit $h(p(Y)) = p(x) \in m^n$ für jedes homogene Polynom $p \in A[Y]$ des Grades n. Für

$$p = x_iY_j - x_jY_i$$

gilt $h(p) = x_ix_j - x_jx_i = 0$. Die Erzeuger des Ideals I liegen also im Kern von h, d.h. es gilt

$$I \subseteq \text{Ker }(h).$$

Durch direktes Nachrechnen sieht man, daß sogar das Gleichheitszeichen gilt, d.h. es ist

$$A[Y]/I = \oplus_{n=0}^{\infty} m^n ,$$

also

$$\tilde{X} = \text{Proj } \oplus_{n=0}^{\infty} m^n$$

3.13.5 Aufblasung eines affinen Schemas entlang eines abgeschlossenen Teilschemas.

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und $I \subseteq A$ ein Ideal und R die graduierte A-Algebra

$$R := \oplus_{n=0}^{\infty} R_n \text{ mit } R_n := I^n$$

Dann induziert die natürliche Einbettung

$$A = R_0 \hookrightarrow R$$

einen Morphismus von Schemata

$$\pi: \tilde{X} := \text{Proj } R \longrightarrow \text{Spec } A = X,\ p \mapsto A \cap p,$$

welcher Aufblasung von X entlang des abgeschlossenen Teilschemas

$$Y := V(I) \subseteq \text{Spec } A = X$$

heißt. Dieser Morphismus induziert einen Isomorphismus (offener Teilschemata)

$$\tilde{X} - \pi^{-1}(Y) \longrightarrow X - Y. \tag{1}$$

Das Teilschema

$$\pi^{-1}(Y) \tag{2}$$

ist ein effektiver (Cartier-) Divisor [47] von $\widetilde{X}$ und als Schema isomorph zu

$$\pi^{-1}(Y) \cong \mathrm{Proj} \oplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}. \qquad (3)$$

Es heißt Ausnahme-Divisor der Aufblasung π.

Beispiel

In der Situation des vorangehenden Abschnitts kann man

$$m^n/m^{n+1}$$

identifizieren mit dem k-Vektorraum, der von den Potenzprodukten des Grades n in x_1, ... , x_N erzeugt wird. Der graduierte Ring

$$\oplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1} \cong k[x_1, \dots , x_N]$$

ist somit isomorph zum Polynomring in n Unbestimmten. Der Ausnahme-Divisor

$$\mathrm{Proj} \oplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1} \cong \mathbb{P}_k^{N-1}$$

ist der projektive Raum der Dimension N-1 über k.

Beweis. 1. Schritt. Der Morphismus (1) ist ein Isomorphismus.

Die offenen Hauptmengen $D(f) \subseteq \mathrm{Spec}\, A$ mit $f \in I$ liegen im Komplent des Zentrums $Y = V(I)$ und bilden eine offene Überdeckung dieses Komplements. Es reicht also zu zeigen, die Einschränkungen

$$\widetilde{X} - \pi^{-1}(D(f)) \longrightarrow D(f) \qquad (4)$$

von (1) sind Isomorphismen. Die Morphismen

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} = \mathrm{Proj}\, R & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\, A \\ & & \cup \\ & & D(f) \end{array}$$

kommen von den Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} R \hookleftarrow R_0 = & A \\ & \downarrow \\ & A_f \end{array}$$

---

[47] Ein (effektiver) Cartier-Divisor D eines Schemas $\widetilde{X}$ ist ein abgeschlossenes Teilschema von $\widetilde{X}$, welches sich lokal durch nur eine Gleichung definieren läßt, wobei diese Gleichung kein Nullteiler von $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ ist. Genauer: für jeden Punkt $x \in \widetilde{X}$ gibt es eine affine Umgebung $U = \mathrm{Spec}\, A \subseteq \widetilde{X}$ von x und einen Nicht-Nullteiler $f \in A$ mit

$$D \cap U = V(f) \qquad \text{(in } U = \mathrm{Spec}\, A\text{).}$$

Die Nicht-Nullteiler-Bedingung sorgt gerade dafür, daß die Dimension von D in jedem Punkt um 1 kleiner ist als die von $\widetilde{X}$.

Also wird (4) induziert durch den natürlichen Homomorphismus von Ringen mit 1,

$$A_f \longrightarrow R\otimes_A A_f = \oplus_{n=0}^{\infty} (I^n\otimes_A A_f) = \oplus_{n=0}^{\infty} I^n A_f$$

Wegen $f^n \in I^n$ enthält $I^n A_f$ eine Einheit des Rings A_f, d.h. es ist $I^n A_f = A_f$, d.h. es ist

$$R\otimes_A A_f = \oplus_{n=0}^{\infty} A_f = A_f[T]$$

mit einer Unbestimmten T. Damit bekommt (4) die Gestalt

$$\text{Proj } B[T] \longrightarrow \text{Spec } B,\ p \mapsto p\cap B,$$

mit $B = A_f$. Da das irrelevante Ideal von B[T] vom Element T erzeugt wird, gilt

$$\text{Proj } B[T] = D_+(T) = \text{Spec } B[T]_{(T)}$$

und

$$B[T]_{(T)} = \{\frac{bT^n}{T^n} \mid b \in B\} = B.$$

Mit anderen Worten, (4) hat bis auf Isomorphie die Gestalt

$$\text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } B$$

und wird von der identischen Abbildung $B \longrightarrow B$ induziert.

<u>2. Schritt</u>. Das abgeschlossene Teilschema (2) ist ein effektiver Cartier-Divisor.

Die Elemente $f \in I$, aufgefaßt als homogene Elemente des Grades 1 von

$$R = \oplus_{n=0}^{\infty} I$$

erzeugen das irrelevante Ideal von R (weil für jedes n die Potenz I^n von Potenzprodukten des Grades n solcher Elemente erzeugt wird). Deshalb bilden die affinene offenen Teilschemata der Gestalt

$$D_+(f) := \text{Spec } R_{(f)}$$

eine offene Überdeckung von $\widetilde{X}$, und π ist lokal von der Gestalt

$$\text{Spec } R_{(f)} \longrightarrow \text{Spec } A,$$

d.h. wird lokal induziert von den natürlichen Abbildungen

$$h: A \longrightarrow R_{(f)} = \{\frac{a}{f^n} \mid a \in I^n\} \ (\subseteq R_f)$$

$$= \bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{I^n}{f^n}$$

$$= A[\tfrac{I}{f}] \qquad\qquad (\subseteq A_t).$$

Die Aufblasung π ist somit lokal von der Gestalt

$$\pi_f : D_+(f) = \mathrm{Spec}\, A[\tfrac{I}{f}] \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A,\ f \in I.$$

Betrachten wir jetzt die Faser des Zentrums $Y = V(I)$. Die Morphismen

$$\begin{array}{ccc} D_+(f) = \mathrm{Spec}\, A[\tfrac{I}{f}] & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\, A \\ & & \cup \\ & & V(I) \end{array}$$

kommen von den Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} A[\tfrac{I}{f}] & \longleftarrow & A \\ & & \downarrow \\ & & A/I \end{array}$$

Das abgeschlossene Teilschema $\pi^{-1}(Y)$ ist also auf $D_+(f)$ isomorph zu

$$\mathrm{Spec}\, A[\tfrac{I}{f}] \otimes_A A/I = \mathrm{Spec}\, A[\tfrac{I}{f}]/IA[\tfrac{I}{f}]$$

wird also auf $D_+(f)$ durch das Ideal

$$IA[\tfrac{I}{f}]$$

von $A[\tfrac{I}{f}]$ $(\subseteq A_t)$ definiert. Wegen

$$fA[\tfrac{I}{f}] \subseteq IA[\tfrac{I}{f}] = f \cdot \tfrac{I}{f} A[\tfrac{I}{f}] \subseteq fA[\tfrac{I}{f}]$$

gilt $IA[\tfrac{I}{f}] = fA[\tfrac{I}{f}]$, d.h. das Ideal wird vom Element f erzeugt. Dieser Erzeuger f ist außerdem ein Nicht-Nullteiler von $A[\tfrac{I}{f}]$ $(\subseteq A_t)$.

<u>3. Schritt</u>. Der Ausnahme-Divisor ist als abgeschlossenes Teilschema von $\widetilde{X}$ isomorph zur rechten Seite von (3).

Durch die natürliche Surjektion

$$R := \oplus_{n=0}^{\infty} I^n \longrightarrow \oplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1} =: S$$

wird die rechte Seite von (3) ein abgeschlossenes Teilschema von $\widetilde{X}$. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß es lokal durch dasselbe Ideal definiert wird wie der Ausnahme-Divisor. Die natürliche Einbettung $\mathrm{Proj}\, S \hookrightarrow \mathrm{Proj}\, R$ ist auf $D_+(f)$, $f \in I$, von der Gestalt Spec $S_{(\overline{f})} \hookrightarrow R_{(f)}$, wenn $\overline{f} \in I/I^2$ das Bild von f beim natürlichen Homomorphismus $R \longrightarrow S$ bezeichnet. Lokal wird die natürliche Einbettung also von der natürlichen Surjektion

$$R_{(f)} \twoheadrightarrow S_{(\overline{f})} \tag{5}$$

induziert. Das Ideal der rechten Seite von (3) in $D_+(f)$ ist somit gerade der Kern des Homomorphismus (5).

Den Ring links haben wir oben bereits beschrieben,

$$R_{(f)} = A[\frac{I}{f}].$$

Wegen $S = R/IR$ folgt $S_f = (RIR)_f = R_f/IR_f$. Der Kern von (5) ist somit die Einschränkung des Kerns von

$$R_f \longrightarrow R_f/IR_f$$

auf die Elemente des Grades 0. Das gesuchte Ideal ist somit gleich $IR_f \cap R_{(f)}$. Zum Beweis der Behauptung, reicht es zu zeigen,

$$IR_f \cap R_{(f)} = fR_{(f)}.$$

Wegen $f \in I$ gilt trivialerweise "$\supseteq$". Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Ein Element des Grades 0 von IR_f ist eine Linearkombination mit Koeffizienten aus I von Elementen des Grades 0 aus R_f. Es kann also in der Gestalt

$$\alpha = \frac{a}{f^n} \text{ mit } a \in I^{n+1}$$

geschrieben werden. Dann gilt aber

$$\alpha = f \bullet \frac{a}{f^{n+1}} \in fR_{(f)}$$

QED.

Bemerkungen

(i) Sei k ein Körper. In der klassischen algebraischen Geometrie hat man einen Morphismus

$$\mathbb{A}_k^{N+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_k^N,\ a \mapsto [a],$$

der jeden vom Ursprung verschiedenen Punkt a abbildet auf die Gerade durch a und den Ursprung. Für jedes homogene Ideal $J \subseteq k[X_0,\ldots,X_N]$ induziert diese Abbildung außerhalb des Ursprungs 0 einen Morphismus

$$\pi: X' - \{0\} \longrightarrow X$$

der durch J definierten affinen algebraischen Menge

$$X' := V(J) \subseteq \mathbb{A}_k^{N+1}$$

auf die durch J definierte projektive algebraische Menge

$$X := V(J) \subseteq \mathbb{P}_k^{N}.$$

Für jeden Punkt $[a] = ka \in X$ ist

$$\pi^{-1}([a]) = [a] - \{0\}$$

die Gerade durch a und den Ursprung, wobei der Ursprung entfernt wurde.

Die affine Menge $V(J) \subseteq \mathbb{A}_k^{N+1}$ ist für homogene Ideal J ein <u>Kegel</u> mit der Spitze 0, d.h. eine algebraische Menge mit der Eigenschaft, daß mit jedem Punkt die Verbindungsgerade mit dem Ursprung ganz in der Menge liegt. Für jeden (kommutativen) graduierten Ring R (mit 1) nennt man deshalb

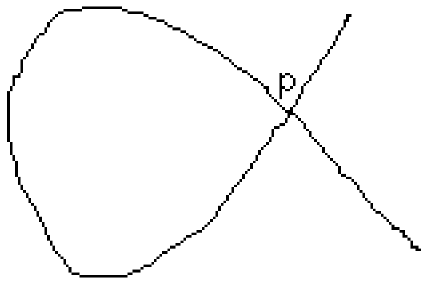
Spec R

den <u>affinen Kegel</u> über dem projektiven Schema Proj R.

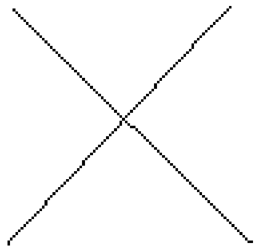
(ii) Den affinen Kegel über dem Ausnahme-Divisor,

$$\text{Spec } \oplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}, \qquad (1)$$

kann man im klassichen Kontext identifizieren mit der Menge der Tangenten an X in den Punkten von V(I). Die Punkte des Ausnahme-Divisors entsprechen also wieder den möglichen Richtungen in den Punkten von V(I). Das Schema (1) heißt deshalb auch <u>Tangentialkegel</u> von X entlang V(I).



X



Tangentialkegel
von X im Punkt p

(ii) Die Ideal-Garbe eines abgeschlossenen Teilschemas. Um den Begriff der Aufblasung auf den Fall nicht notwendig affiner Schemata zu verallgemeinern, brauchen wir eine Beschreibung der abgeschlossenen Teilschemata mit Hilfe von Garben. Zu jeder abgeschlossenen Einbettung

$$i:Y \hookrightarrow X$$

von Schemata gehört eine Surjektion von Ring-Garben

$$i^{\#}: \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y$$

also eine exakte Sequenz von Garben

$$0 \longrightarrow I_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow 0,$$

wobe I_Y eine Garbe von Idealen von $\mathcal{O}_X$ ist. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ besteht

$$I_Y(U)$$

aus den regulären Funktionen auf U, welche auf $U \cap Y$ gleich Null sind. Umgekehrt ist durch die Ideal-Garbe I_Y das abgeschlossene Teilschema Y von X festgelegt. Für affine offene Teilmengen U = Spec A von X ist $I_Y(U)$ gerade das Ideal von $\mathcal{O}_X(U) = A$, welches das Teilschema $Y \cap U$ von U definiert. Für jede affine offene Teilmenge $U \subseteq X$ kann man dann die Aufblasung

$$\pi_U:\text{Proj } \oplus_{n=0}^{\infty} I_Y(U)^n \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_X(U) = U \qquad (2)$$

betrachten. Für je zwei solche affine offene Mengen U' und U" und beliebige offene Mengen $U \subseteq U' \cap U"$ sind dann die vollständigen Urbilder von U bezüglich der Aufblasungen von U' und U" isomorph zur Aufblasung von U.

Man kann deshalb die Aufblasungen (2) entlang dieser gemeinsamen Urbilder identifizieren und erhält so einen über ganz X definierten Morphismus

$$\pi\colon \mathrm{Proj}\ \oplus_{n=0}^{\infty} I_Y^n \longrightarrow X$$

der die Konstruktion der Aufblsung im affinen Fall verallgemeinert. So ist π außerhalb der Punkte über dem Zentrum Y ein Isomorphismus, die Faser über dem Zentrum ist ein Cartier-Divisoer, den man mit

$$\mathrm{Proj}\ \oplus_{n=0}^{\infty} I_Y^n/I_Y^{n+1}$$

identifizieren kann. Für jede affine offene Teilmenge $U \subseteq X$ erhält man durch Einschränken auf U eine Aufblasung der Gestalt (2).

(iii) Nicht jede Ideal-Garbe von $\mathcal{O}_X$ ist die Garbe eines abgeschlossenen Teilschemas von X. Um Ideal-Garben zu abgeschlossenen Teilschemata zu erhalten, muß man eine Zusatzforderung stellen: man muß von fordern, daß es sich um sogenannte kohärente Garben handelt. Um die Bedingung der Kohärenz zu verstehen, ist es sinnvoll sie im Zusammenhang mit dem Begriff des Vektorraumbündels zu betrachten, den wir demnächst behandeln werden.

(iv) Aufblasungen lassen sich durch eine Universalitätseigenschaft beschreiben: jeder Morphismus

$$f\colon X' \longrightarrow X,$$

für welchen $f^{-1}(Y)$ ein effektiver Cartier-Divisor ist, faktoriseirt sich eindeutig über die Aufblasing von X mit dem Zentrum Y.

(v) Jeder Morphismus $f\colon X' \longrightarrow X$ von projektiven Schemata, der auf irgendwelchen offenen Teilmengen $U' \subseteq X$ und $U \subseteq X$ einen Isomorphismus $U \longrightarrow U'$ induziert läßt sich mit einer Aufblasung identifizieren.

3.14 Dimension

3.14.1 Vorbetrachtungen

(i) In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff der Dimension eines Schemas X einführen. Dies ist eine nicht-negative genze Zahl oder ∞, die wir mit

$$\dim X$$

bezeichnen werden. Gleichzeitig werden wir den Begriff der Dimension eines kommutativen Rings A mit Eins einführen,

$$\dim A.$$

Die Definitionen sind so gewählt, daß gilt

$$\dim \mathrm{Spec}\ A = \dim A.$$

Diese Definitionen sind spezifisch für die Theorie der Schemata bzw. die kommutative Algebra. Um sie von anderen Dimensionsbegriffen zu unterscheiden, nennt die hier betrachtete Dimension auch Krull-Dimension. Wir beginnen damit, Eigenschaften zu sammeln, die ein vernüftiger Dimensionsbegriff haben sollte.

(ii) Die Definition sollte natürlich so beschaffen sein, daß

$$\dim \mathbb{A}_k^N = \dim k[x_1,...,x_n] = n$$

gilt.

(iii) Falls ein surjektiver Morphismus f: X $\twoheadrightarrow$ Y existiert, sollte

$$\dim X \ge \dim Y$$

gelten, denn man kann sich Y aus X entstanden denken durch Identifikation der Punkte von X, die in derselben Faser von liegen. Falls die Fasern von f endlich sind, sollte sogar

$$\dim X = \dim Y$$

gelten.

(iv) Falls X ein abgeschlossenes oder offenes Teilschema von Y ist, so sollte

$$\dim X \subseteq \dim Y$$

gelten.

(v) Die Vereinigung von zwei Kurven sollte als eindimensional, die Vereinigung von zwei Flächen als zweidimensional angesehen werden. Aber welche Dimension sollte die Vereinigung einer Kurve mit einer Fläche haben ? Wegen (iv) führt dies zu folgender Antwort.

$$\dim X = \max \{\dim X', \dim X''\}$$

falls X' und X" abgeschlossene Teilschemata des Schemas X sind mit

$$X = X' \cup X''.$$

Die Frage legt aber außerdem nahe, daß es einen <u>lokalen Dimensionsbegriff</u> geben sollte, der nur von einer beliebig kleinen Umgebung eines vorgegebenen Pumktes abhängt.

(vi) Wie sich herausstellt, ist durch die obigen Bedingungen die Dimension bereits festgelegt. Wir beginnen mit dem Fall spezieller affiner Schemata

$$X = \text{Spec } A.$$

3.14.2 Die Dimension eines reduzierten, irreduziblen affinen Schemas endlichen Typs (Dimension und Transzendenzgrad)

Seien k ein Körper und

$$X = \text{Spec } A$$

ein reduziertes irreduzibles affines Schema endlichen Types über k. Dann ist die Dimension von X gerade der Transzendenzgrad des Quotientenkörpers von A,

$$\dim X = \text{tr-deg } Q(A).$$

Bemerkungen

(i) Die Bedingung <u>reduziert</u> zu sein, bedeutet, daß die Werte der Strukturgarbe von X Ringe ohne nilpotente Elemente (außer der Null selbst) sind.

(ii) Die Bedingung irreduzibel zu sein, bedeutet, daß der topologische Raum X nicht Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Unterräumen ist.

(iii) Die Bedingung, <u>endlichen Typs</u> über k zu sein, bedeutet hier, daß A als k-Algebra endlich erzeugt ist,

$$A = k[\alpha_1,...,\alpha_n].$$

Allgemeiner, ein Morphismus von Schemata φ: X $\longrightarrow$ Y heißt <u>lokal vom endlichen Typ</u>, wenn es für jedes y $\in$ Y ein affine offene Umgebung V = Spec B von y gibt, sodaß jeder Punkt

$$x \in \varphi^{-1}(V)$$

eine affine Umgebung U = Spec A besitzt, so daß durch die Einschränkung

$$\varphi_U\colon \text{Spec } A = U \longrightarrow V = \text{Spec } B$$

der Ring A zu einer endlich erzeugten B-Algebra wird. Kann man V sogar derart wählen, daß sich $\varphi^{-1}(V)$ durch endlich viele offenen Mengen U der beschriebenen Art überdecken läßt, so sagt man φ ist ein Morphismus endlichen Typs. Im Spezialfall Y = Spec A, sagt man auch, X ist vom endlichen Typ über A (bzw. lokal vom endlichen Typ).

(iv) Zusammen bedeuten die Bedingungen, daß X affines Spektrum einer endlich erzeugten nullteilerfreien k-Algebra ist[48] .

Beweisskitze.
Der Quotientenkörper

$$Q(A) = k(\alpha_1,...,\alpha_n)$$

besitzt einen Transzendenzgrad $\le n$, sagen wir

$$m := \text{tr-deg}_k\, Q(A) \le n.$$

Sei $\beta_1, \ldots \beta_m$ eine Transzendenzbasis von Q(A) über k, d.h. Q(A) sei algebraisch über $k(\beta_1, \ldots \beta_m)$. Zeigen wir, die β_i kann man bereits in A finden. Dazu schreiben wir

$$\beta_i = a_i/a \text{ mit } a_1,...,a_m,a \in A.$$

[48] Weil X affin ist, gilt

$$X = \text{Spec } A.$$

Weil X vom endlichen Typ ist über k, ist $A = k[\alpha_1,...,\alpha_n]$ und insbesondere ein Noetherscher Ring. Die Menge der minimalen Primideale ist insbesondere endlich, sagen wir gleich

$$\{p_1,...,p_m\}.$$

Dann ist aber

$$X = \text{Spec } A = V(p_1) \cup \ldots \cup V(p_m).$$

Weil X irreduzibel ist, folgt m = 1. Sei p das einzige minimale Primideal. Ein von Null verschiedenes Element $f \in p$ liegt dann in jedem Primideal von A, d.h. A_f besitzt kein Primideal, d.h. A_f ist der Null-Ring. Die $1 \in A$ wird somit von einer Potenz von f annulliert, d.h. f ist nilpotent. Weil X reduziert ist, besitzt $A = \mathcal{O}_X(X)$ keine solchen Elemente f. Wir haben gezeigt, p ist das Null-Ideal, d.h. A ist ein Integritätbereich.

Sind die a_i algebraisch unabhängig, so ist nichts zu beweisen. Sind sie algebraisch abhängig, so gilt für ein i,

$$\begin{aligned} m-1 &\geq \text{tr-deg}_k\, k(a_1,...,a_{i-1},a_{i+1}...,a_m) \\ &= \text{tr-deg}_k\, k(a_1,...,a_m) \\ &\geq \text{tr-deg}\, k(a_1,...,a_m,a) - 1 \\ &= \text{tr-deg}\, Q(A) \\ &= m-1 \end{aligned}$$

d.h. a ist algebraisch unabhängig von $a_1,...,a_m$ also auch von $a_1,...,a_{i-1},a_{i+1}...,a_m$. In jedem Fall gibt es m Elemente in A, welche algebraisch unabhängig über k sind. Wir können annehmen,

$$\beta_1, ... \beta_m \in A.$$

Nach Konstruktion ist jedes Element von A algebraisch über $k(\beta_1, ... \beta_m)$. Der Normalisierungssatz der kommutativen Algebra[49] sagt aus, daß man die β_i sogar so wählen kann, daß

$$A \text{ ganz über } R := k[\beta_1, ... \beta_m]$$

ist. Weil A endlich erzeugt ist über über k, also erst recht über $k[\beta_1, ... \beta_m]$, bedeutet dies,

A ist ein endlich erzeugter R-Modul,

sagen wir

$$A = R\bullet u_1+...+R\bullet u_\ell \qquad (1)$$

Die natürliche Inklusion $R = k[\beta_1, ... \beta_m] \hookrightarrow A$ induziert einem Morphismus affiner Schemata

$$f: \text{Spec } A \longrightarrow \text{Spec } R = \text{Spec } k[\beta_1, ... \beta_m] = \mathbb{A}^m_k$$

Für jeden Punkt $x \in \text{Spec } R$ gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \text{Spec } A \times_R \text{Spec } \kappa(x) \\ &= \text{Spec } A\otimes_R\kappa(x) \end{aligned}$$

Wegen (1) ist $A\otimes_R\kappa(x)$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\kappa(x)$. Für jedes Primideal ist p von $A\otimes_R\kappa(x)$ ist der Faktorring

$$A\otimes_R\kappa(x)/p$$

---

[49] von E. Noether, siehe den Anhang Kommutative Algebra, Endliche Erweiterungen.

eine endlich-dimensionale $\kappa(x)$-Algebra ohne Nullteiler, d.h. ein Körper. Jedes Primideal von $A\otimes_R\kappa(x)$ ist somit maximal und damit auch minimal. Weil der Ring $A\otimes_R\kappa(x)$ als endlich erzeugte $\kappa(x)$-Algebra noethersch ist, ist die Anzahl dieser Primideale endlich, d.h.

$$\mathrm{Spec}\ A\otimes_R\kappa(x)$$

ist endlich. Der Morphismus f hat somit endliche Fasern. Nach (iii) erhalten wir

$$\dim \mathrm{Spec}\ A = \dim \mathbb{A}_k^m = m = \text{tr-deg}\ Q(A).$$

Wir haben damit eine erste Dimensionsformel bewiesen.

3.14.3 Der Fall noetherscher affiner Schemata (Dimension und Primidealketten)

Seien jetzt k ein Körper, A eine beliebige noethersche k-Algebra und

$$X = \mathrm{Spec}\ A.$$

Dann besitzt A nur endlich viele minimale Primideale, sagen wir $p_1, \dots , p_n$, und es gilt

$$X = V(p_1) \cup \dots \cup V(p_n).$$

Nach unseren Bedingungen an den Dimensionsbegriff ist dann

$$\dim X = \max \{ \dim \mathrm{Spec}\ A/p_i \mid i = 1, \dots , n \}. \qquad (1)$$

Da A/p_i eine nullteilerfreie k-Algebra ist, sollte

$$\dim \mathrm{Spec}\ A/p_i = \text{tr.-deg.}_k\ Q(A/p_i)$$

Sei jetzt p irgendein Primideal von A. Dann gibt es ein i und ein maximales Ideal m von A mit

$$m \supseteq p \supseteq p_i .$$

Nach dem Nullstellensatz von Hilbert gilt außerdem (wenn A endlich erzeugte k-Algebra ist)

p maximal in A $\Leftrightarrow$ Q(A/p) ist algebraisch über k.

Mit anderen Worten, wenn p von m verschieden, also nicht maximal ist, gilt

$$\text{tr.-deg}_k\ Q(A/p) \ge 1,$$

d.h. A enthält mindestens ein über k transzendentes Element. Im Fall endlich erzeugter k-Algebren A kann man zeigen,

$\text{tr.-deg}_k\ Q(A/p) = 1 \Leftrightarrow$ p ist maximal unter allen echten Primidealen in m.

Treibt man diese Betrachtungen noch etwas weiter, ergibt sich

$$\text{tr-deg}_k Q(A/p_i) = \sup\{\ell \mid \text{es gibt eine Kette von Primidealen } p_i = p^0 \subset p^1 \subset \dots \subset p^\ell\}$$

Eine echt aufsteigende Kette

$$p^0 \subset p^1 \subset \dots \subset p^\ell$$

von Primidealen p^j von A heißt auch Primidealkette der <u>Länge</u> ℓ in A, welche mit p^0 beginnt und mit p^ℓ endet. Zusammen mit (1) erhalten wir damit

$$\dim X = \sup \{\ell \mid \text{es gibt eine Primidealkette der Länge } \ell \text{ in A}\}$$

Da die Primideale von A gerade den irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von Spec A entsprechen, kann man anstelle der Primidealketten auch echt absteigende Ketten

$$X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_\ell$$

von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen betrachten (die mit X_0 beginnen und X_ℓ enden). Die Zahl ℓ heißt dann ebenfalls Länge einer solchen Kette. Das legt die nachfolgenden Dimensionsdefinitionen nahe.

3.14.4 Definitionen

Sei X ein algebraisches Schema. Dann ist die Dimension

$$\dim X$$

von X definiert als das Supremum über alle nicht-negativen ganzen Zahlen ℓ mit der Eigenschaft, daß es eine echt absteigende Kette

$$X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_\ell$$

von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen X_i gibt.

Beschränkt man sich auf Ketten mit der Eigenschaft, daß X_ℓ einen vorgegebenen nicht notwendig abgeschlossenen Punkt $x \in X$ enthält, so wird die zugehörige Zahl mit

$$\dim_x X$$

bezeichnet und heißt (lokale) Dimension von X in x.

Seien X ein Schema und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Teilschema. Dann heißt

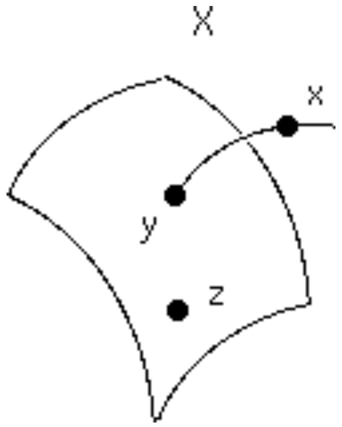
$$\operatorname{codim}_X Y := \dim X - \dim Y$$

Kodimension von Y in X. Ist außerdem $y \in Y$ ein Punkt, so heißt

$$\operatorname{codim}_{X,y} Y := \dim_y X - \dim_y Y$$

(lokale) Kodimension von Y in X im Punkt y.

Das Schema X heißt equidimensional, wenn $\dim_x X$ für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X$ denselben Wert hat.



$\dim_x X = 1$ (die Kurve liegt auf keiner Fläche)

$\dim_y X = 2$

$\dim_z X = 2$

Bemerkungen

(i) Unmittelbar aus den Definitionen folgt

$$\dim X = \sup \{\dim_x X \mid x \in X\}.$$

Da sich jede Kette von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen verlängert werden kann, wenn sie mit einem Teilschema endet, das einen nicht-abgeschlossenen Punkt enthält (jedes Primideal liegt in einem maximalen Ideal), gilt sogar

$$\dim X = \sup \{\dim_x X \mid x \in X, x \text{ abgeschlossen}\}.$$

(ii) Sei $Y \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Teilschema. Wir nehmen an, X und Y sind equidimensional (und exzellent). Dann kann man

$$\operatorname{codim}_X Y$$

beschreiben als die Anzahl der Gleichungen, die man braucht um Y als Teilmenge von X (nicht als Teilschema!) zu definieren, zumindest gilt dies lokal in einer Umgebung der Punkte einer dicht liegenden offenen Teilmenge von X. Aus dieser Beschreibung ergibt sich

$$\operatorname{codim}_X Y' \cap Y'' \le \operatorname{codim}_X Y' + \operatorname{codim}_X Y''$$

für je zwei equidimensionale abgeschlossene Teilschemata Y', Y'' von X. Denn zur lokalen Definition des Durchschnitts kann man die lokalen Gleichungen von Y' zusammen mit denen von Y'' verwenden (wobei eventuel manche dieser Gleichungen nicht benötigt werden).

(iii) In der Abschätzung von (ii) braucht nicht das Gleichheitszeichen zu gelten. Zum Beispiel ist das nicht der Fall für Y' = Y'' (und positiver Kodimension). Gilt das Gleichheitszeichen aber doch, so sagt man, Y' und Y'' schneiden sich <u>regulär</u>.

(iv) Irreduzible Schemata endlichen Typs sind equidimensional. Im Fall von Schemata endlichen Typs bedeutet Equidimensionalität gerade, daß alle irreduziblen Komponenten dieselbe Dimension besitzen.

(v) Wir werden gleich sehen, die Dimension eines Schemata hängt nicht von dessen infinitesimaler Struktur ab in dem Sinne, daß die doppelt gezählte y-Achse der x-y-Ebene mit der Gleichung

$$y^2 = 0$$

(genauer das Schema Spec $k[x,y]/(y^2)$) dieselbe Dimension hat wie die einfach gezählte y-Achse mit der Gleichung

$$y = 0$$

(d.h. das Schema Spec $k[x,y]/(y^2)$). Allgemeiner, für jeden kommutativen Ring A mit 1 haben

$$\operatorname{Spec} A \text{ und } \operatorname{Spec} A/\sqrt{0}$$

dieselbe Dimension. Das liegt einfach daran, daß $\sqrt{0}$ in jedem Primideal von A liegt. Unser Ziel im nächsten Abschnitt ist es, diese Aussage auf den Fall beliebiger Schemata zu verallgemeinern.

3.15.5 Das zu einem Schema gehörige reduzierte Schema

Ein kommutativer Ring A mit 1 heißt <u>reduziert</u>, wenn 0 das einzige nilpotente Element ist. Zum Beispiel ist für jeden kommutativen Ring A der Ring

$$A_{red} := A/\sqrt{0}\ .$$

reduziert. Ein Schema X mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ heißt <u>reduziert</u>, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert ist.

Kriterium

Ein Schema X ist genau dann reduziert, wenn sämtliche lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ reduziert sind.

Beweis. <u>Die Bedingung ist notwendig</u>. Sei X reduziert. Ist $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ ein nilpotentes Element, sagen wir $f^n = 0$, so läßt sich f durch einen Schnitt $s \in \mathcal{O}_X(U)$ über einer offenen Umgebung U von x repräsentieren mit $s^n = 0$. Da X reduziert ist, folgt $s = 0$, also f = 0. Wir haben gezeigt, die lokalen Ringe eines reduzierten Schemas sind reduziert.

<u>Die Bedingung ist hinreichend</u>. Seien die Halme von $\mathcal{O}_X$ reduziert, und sei $s \in \mathcal{O}_X(U)$ ein nilpotenter Schnitt von $\mathcal{O}_X$, sagen wir $s^n = 0$. Die Keime von s in den Punkten von U haben dann eine n-te Potenz, die ebenfalls 0 ist. Da die Halme von $\mathcal{O}_X$ reduziert sind, sind damit die Keime von s in allen Punkten von U gleich Null. Dann besitzt aber U eine offene Überdeckung, auf deren Mengen s gleich Null ist. Damit muß aber s selbst gleich Null sein.

QED.

Beispiel 1

Spec A_{red} ist reduziertes Schema für jeden kommutativen Ring A mit 1. Nach dem Kriterium reicht es zu zeigen, für jedes Primideal p von A ist

$$(A_{red})_p = A_p/\sqrt{0\cdot A}A_p$$

reduziert. Dazu wiederum reicht es zu zeigen,

$$\sqrt{0\cdot A}\cdot A_p = \sqrt{0\cdot A_p}.$$

Jedes Element der linken Seite ist eine A_p-Linearkombination von nilpotenten Elementen von A, also selbst nilpotent, also ein Element der rechten Seite.

Sei umgekehrt $\alpha \in A_p$ ein Element der rechten Seite. Wir schreiben α in der Gestalt

$$\alpha = \frac{a}{s} \text{ mit } a \in A \text{ und } s \in A - p.$$

Weil α nilpotent ist, wird eine Potenz von a, sagen wir a^n von einem Element $t \in A\text{-}p$ annulliert. Dann gilt $(at)^n = 0$, d.h. $at \in \sqrt{0\cdot A}$. Also ist

$$\alpha = \frac{a}{s} = at\cdot\frac{1}{st} \in \sqrt{0\cdot A}\cdot A_p$$

ein Element der linken Seite.

Bemerkungen

(i) Auf Grund der obigen Argumentation gilt für jeden kommutativen Ring A mit 1 und jedes Primideal p von A,

$$(A_{red})_p = (A_p)_{red}$$

(genauer, die natürlichen Surjektion $A \longrightarrow A_{red}$ induziert einen natürlichen Isomorphismus zwischen diesen beiden Ringen).

(ii) Dieselbe Argumentation zeigt

$$(A_{red})_{\bar{f}} = (A_f)_{red}$$

für jedes Element $f \in A$ und dessen Bild $\bar{f}$ beim natürlichen Homomorphismus $A \longrightarrow A_{red}$, d.h. es gilt

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{red})}(D(\bar{f})) = (\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A}(D(f)))_{red}$$

(iii) Seien X = Spec A, Y = Spec(A_{red}). Als topologische Räume kann man X und Y identifizieren. Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_Y$ ist dann gerade die assoziierte Garben zur Prägarbe

$$F: U \mapsto (\mathcal{O}_X(U))_{red}$$

Beweis von (iii).

Sei

$$U = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$$

eine Überdeckung durch offene Hauptmengen. Betrachten wir Abbildungen

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(D(f_i)) \longrightarrow \prod_{i,j\in I} F(D(f_i f_j))$$

$$s \mapsto (s|_{D(f_i)})_{i\in I} \quad (s_i)_{i\in I} \mapsto (s_i - s_j)_{i,j\in I}.$$

Weil F ein Funktor ist, liegt das Bild der ersten Abbildung im Kern der zweiten. Nach (ii) gilt aber

$$F(D(f_i)) = (A_{f_i})_{red} = (A_{red})_{\overline{f}_i} = \mathcal{O}_Y(D(f_i))$$

und analog

$$F(D(f_i f_j)) = \mathcal{O}_Y(D(f_i f_j)).$$

Auf Grund der Garbenaxiome ist der Kern der zweiten Abbildung gerade $\mathcal{O}_Y(U)$. Wir erhalten so für jedes offene U eine natürliche Abbildung $F(U) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(U)$. Diese Abbildungen setzen sich zu einem Prägarben-Morphismus

$$F \longrightarrow \mathcal{O}_Y,$$

zusammen, wobei wir über den offenen Hauptmengen nach (ii) Isomorphismen erhalten. Da die offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis bilden, induziert dieser Morphismus Isomorphismen der Halme. Weil $\mathcal{O}_Y$ eine Garbe ist, induziert der Morphismus außerden einen Morphismus

$$\widetilde{F} \longrightarrow \mathcal{O}_Y$$

der assoziierten Garbe $\widetilde{F}$ mit Werten in $\mathcal{O}_Y$. Da sich beim Übergang zur assoziierten Garbe die Halme nicht ändern, induziert der letzte Morphismus auf den Halmen ebensfalls Isomorphismen. Als Morphismus von Garben ist es somit selbst ein Isomorphismus.

QED.

Beispiel 2

Sei X ein Schema. Dann ist durch

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)_{red}$$

eine Prägarbe von kommutativen Ringen mit 1 definiert. Die assoziierte Garbe wird mit $\mathcal{O}_{X_{red}}$ bezeichnet. Der topologische Raum X zusammen mit Ring-Garbe $\mathcal{O}_{X_{red}}$ ist ein reduziertes Schema und wird mit X_{red} bezeichnet,

$$X_{red} = X \text{ mit der Strukturgarbe } \mathcal{O}_{X_{red}}.$$

Es heißt das zu X gehörige <u>reduzierte Schema</u> oder auch <u>Reduktion des Schemas</u> X.

Es ist ein abgeschlossenes Teilschema von X,

$$X_{red} \hookrightarrow X \tag{1}$$

und besitzt dieselben offenen und damit dieselben abgeschlossenen Teilmengen wie X. Insbesondere hat es dieselbe Dimension und dieselben lokalen Dimensionen wie X.

Das reduzierte Teilschema X_{red} läßt sich durch folgende Universalitätseigenschaft charakterisieren:

> Jeder Morphismus von Schemata $Y \longrightarrow X$ mit Y reduziert faktorisiert sich auf genau eine Weise über die natürliche Einbettung (1).

Beweis. 1. Schritt. $(X, \mathcal{O}_{X_{red}})$ ist ein Schema.
Es reicht zu zeigen, für jede affine offene Teilmenge U = Spec A von X ist

$$(U, \mathcal{O}_{X_{red}}|_U)$$

ein affines Schema.

Weil $\mathcal{O}_{X_{red}}$ eine Garbe ist, ist $\mathcal{O}_{X_{red}}$ bis auf Isomorphie die Garbe der Schnitte des Etal-Raums

$$\pi\colon E := \bigvee_{x\in X} \mathcal{O}_{X_{red},x} \longrightarrow X.$$

Indem wir X durch U = Spec A und E durch $\pi^{-1}(U)$ ersetzen, erhalten wir gerade den Etalraum von $\mathcal{O}_{U_{red}} = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{red})}$.[50] Es gilt also

$$\mathcal{O}_{X_{red}}|_U = \mathcal{O}_{U_{red}},$$

d.h. es reicht zu zeigen,

$$(U, \mathcal{O}_{U_{red}}) \text{ mit } U = \mathrm{Spec}\, A$$

ist ein affines Schema.
Zum Beweis betrachten wir die natürliche Einbettung

$$i\colon \mathrm{Spec}\, A_{red} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\, A.$$

Die zugrunde liegende Abbildung topologischer Räume ist ein Homöomorphismus (und kann als die identische Abbildung angesehen werden)[51]. Der Garben-Morphismus

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{red})}$$

---

[50] Die Halme der Garbe $\mathcal{O}_{X_{red}}$ in den Punkten von U ändern sich nicht, wenn man X durch U ersetzt. Nach Beispiel 1 gilt deshalb

$$\mathcal{O}_{X_{red},x} = \mathcal{O}_{U_{red},x} = \mathcal{O}_{(\mathrm{Spec}\, A)_{red},x} = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{red}),x},$$

d.h. über U = Spec A ist E gerade der Etal-Raum der Strukturgarbe von $\mathrm{Spec}(A_{red})$.

[51] Sei $\rho\colon A \longrightarrow A_{red}$ die natürliche Abbildung auf den Faktorring. Da das Radikal von A in jedem Primideal von A liegt, ist die Abbildung

$\mathrm{Spec}\, A_{red} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A,\ p \mapsto \rho^{-1}(p)$,

bijektiv, d.h. wir können die beiden Mengen mit Hilfe dieser Abbildung identifizieren, und ρ wird so zur identischen Abbildung. Beide Mengen haben dieselben abgeschlossenen Teilmengen (wegen $\sqrt{0} \subseteq \sqrt{I}$ für jedes Ideal I von A).

definiert für jede offene Menge U einen Ring-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{red})}(U).$$

Weil $\mathrm{Spec}(A_{red})$ ein reduziertes Schema ist, induziert dieser einen Ring-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(U)/\sqrt{0} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{red})}(U)$$

Zusammen definieren diese Ringhomomorphismen einen Homomorphismus von Prägarben auf Spec A. Da $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{red})}$ eine Garbe ist, induziert dieser einen Homomorphismus von Garben

$$\mathcal{O}_{(\mathrm{Spec}\ A)_{red}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A_{red}}.$$

Es reicht zu zeigen, dies ist ein Isomorphismus. Dazu reicht es zu zeigen, daß auf den Halmen Isomorphismen induziert werden.

Weil die Halme der assoziierten Garbe gleich denen der Prägarbe sind, erhalten wir für $p \in \mathrm{Spec}\ A$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{(\mathrm{Spec}\ A)_{red},p} &= \text{Halm in } p \text{ von } U \mapsto \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(U)/\sqrt{0} \\
&= \varinjlim_{p\in U} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(U)/\sqrt{0} \\
&=^{52} \varinjlim_{p\in D(f)} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(D(f))/\sqrt{0} \\
&= \varinjlim_{p\in D(f)} A_f/\sqrt{0} \\
&=^{53} \varinjlim_{p\in D(f)} (A/\sqrt{0})_f \\
&= \varinjlim_{p\in U} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\sqrt{0})}(U) \\
&= \varinjlim_{p\in U} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{red})}(U)
\end{aligned}$$

<u>2. Schritt</u>: $\mathrm{Spec}(A_{red}) \cong (\mathrm{Spec}\ A)_{red}$

Im ersten Schritt haben wir gerade gezeigt, der Homomorphismus der Strukturgarben zur natürliche Einbettung $\mathrm{Spec}\ A_{red} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\ A$ definiert einen solche Isomorphismus.

<u>3. Schritt</u>: X_{red} ist ein reduziertes Schema.

Nach dem 1. und 2. Schritt ist X_{red} lokal von der Gestalt $\mathrm{Spec}(A_{red})$. Insbesondere sind die Halme von X_{red} reduzierte Ringe, d.h. X_{red} ist ein reduziertes Schema.

<u>4. Schritt</u>. X_{red} besitzt dieselben offenen und abgeschlossenen Teilmengen.

Nach Definition von X_{red} entsteht X_{red} aus X, indem man lediglich die Strukturgarbe abändert, jedoch nicht den zugrundeliegenden topologischen Raum.

---

[52] die offenen Hauptmengen bilden eine Topologie-Basis und bilden damit ein finales System.

[53] Die Operation des Reduzierens kommutiert mit der Quotientenbildung, vgl. Beispiel 1.

<u>5. Schritt</u>: X_{red} ist abgeschlossenes Teilschema von X.

Nach Definition sind $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_{X_{red}}$ Garben auf demselben topologischen Raum X.

Die Garbe $\mathcal{O}_{X_{red}}$ ist die assoziierte Garbe zur Prägarbe

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)/\sqrt{0}$$

Die natürliche Abbildung auf den Faktorring definiert deshalb einen Prägarben-Homomorphismus auf $\mathcal{O}_X$ mit Werten in dieser Prägarbe. Durch Zusammensetzung mit dem Morphismus der Prägarbe in die assoziierte Garbe erhalten wir einen Garben-Morphismus

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{red}} \tag{2}$$

von Garben auf X.

Wie wir im ersten Schritt gesehen haben, hat dieser lokal über den affinen offenen Teilmengen U = Spec A von X die Gestalt

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A_{red}}$$

des Morphismus, der von der natürlichen Einbettung Spec $A_{red} \hookrightarrow$ Spec A kommt, d.h. von der natürlichen Abbildung $A \longrightarrow A_{red}$ auf den Faktorraum. Insbesondere sind die Ringhomorphismen, die auf den lokalen Ringen induziert werden, surjektiv. Der durch (2) gegebene Morphismus von Schemata

$$X_{red} \longrightarrow X$$

(der auf den zugrundeliegenden topologischen Räumen die identische Abbildun ist) ist damit eine abgeschlossene Einbettung.

<u>6. Schritt</u>: Universalitätseigenschaft von X_{red}.

Sei f: $Y \longrightarrow X$ eine Morphismus von Schemata mit Y reduziert. Der zugehörige Garben-Morphismus

$$f^{\#}: \mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y$$

definiert für jedes offene Menge $U \subseteq X$ einen Homomorphismus von Ringen mit 1^,

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)).$$

Weil Y reduziert ist, liegt das Ideal $\sqrt{0}$ von $\mathcal{O}_X(U)$ im Kern dieser Abbildung, d.h. wir erhalten Homomorphismen

$$\mathcal{O}_X(U)/\sqrt{0} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)),$$

die sich zu einem Prägarben-Morphismus zusammensetzen. Da rechts eine Garbe steht, induziert dieser Prägarben-Morphismus einen Garben-Morphismus

$$\mathcal{O}_{X_{red}} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y.$$

Fassen wir die stetige Abbildung f: $Y \longrightarrow X$ als eine Abbildung mit Werten im topologischen Raum X_{red} auf, so erhalten wir auf diese Weise einen Morphismus von Schemata

$$f_{red}: Y \longrightarrow X_{red}.$$

Dessen Zusammensetzung mit der natürlichen Einbettung $X_{red} \hookrightarrow X$ ist nach Konstruktion gerade der gegebene Morphismus f. Es ist nicht schwer, einzusehen, daß f_{red} durch f eindeutig festgelegt ist.

QED.

Bemerkungen

(i) Wie wir wissen, reicht es zur Bestimmung der Dimension eines Schemas, die lokalen Dimensionen in den abgeschlossenen Punkten eines Schemas zu kennen. Wir wollen uns deahalb an dieser Stelle mit den Berechnungsmöglichkeiten der lokalen Dimension beschäftigen.

(ii) Wie sich herausstellen wird, reicht zur Bestimmung von $\dim_x X$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ von X im Punkt x. Man kann diese Dimension an ganz unterschiedlichen Daten des Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ ablesen. Die wichtigsten davon sind die folgenden.

a) Die Primidealketten in $\mathcal{O}_{X,x}$.

b) Der Grad des Hilbert-Polynoms von $\mathcal{O}_{X,x}$.

c) An der Minimalzahl der Erzeuger von Definitionsidealen.

Wir wollen diesen Zusammen mit der lokalen Dimension im folgenden etwas genauer beschreiben. Dabei beschränken wir uns auf den Fall der noetherschen Schemata X, d.h. der Schemata, für welche jede aufsteigende Kette von offenen Teilschemata stationär ist.

3.14.5 Lokale Dimension und Primidealketten in $\mathcal{O}_{X,x}$

Seien X ein noethersches Schema und $x \in X$ ein Punkt. Dann gilt

$$\dim_x X = \dim \mathcal{O}_{X,x}.$$

Beweis. Wir fixieren ein offenes affines Teilschema

$$U = \operatorname{Spec} A \subseteq X \text{ mit } x \in U.$$

Sei

$$X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_\ell \tag{1}$$

eine echt absteigende Kette von irreduziblen abgeschlossenen Teilschemata von X mit

$$x \in X_\ell.$$

Die Durchschnitt $X_i \cap U$ dieser Teilschemata mit U sind nicht leer, da x in diesen Durchschnitten liegt. Außerdem liegt, die Abschließung von $X_i \cap U$ ganz in X_i,

$$\overline{(X_i \cap U)} \subseteq X_i.$$

Weil X_i irreduzibel ist, liegt jede nicht-leere offene Teilmenge dicht[54] in X_i, d.h. es gilt sogar

[54] Sei Y irreduzibel und $U \subseteq Y$ offen und nicht dicht in Y. Dann gilt

$$Y = (Y\text{-}U) \cup \bar{U}$$

$$(X_i \cap U)^- = X_i.$$

Für unterschiedliche i sind damit die Durchschnitte $X_i \cap U$ verschieden. Wir erhalten eine echt absteigende Kette

$$X_0 \cap U \supset X_1 \cap U \supset ... \supset X_\ell \cap U$$

von abgeschlossenen irreduziblen[55] Teilmengen von U = Spec A. Wir wählen Primideale p_i mit $V(p_i) = X_i \cap U$ und erhalten so eine echt aufsteigende Kette

$$p_0 \subset p_1 \subset ... \subset p_\ell \tag{2}$$

Wegen $x \in X_\ell \cap U = V(p_\ell)$ gilt außerdem $p_\ell \subseteq x$. Wir lokalisierung nach x und erhalten[56]

$$p_0 A_x \subset p_1 A_x \subset ... \subset p_\ell A_x$$

Wir haben gezeigt, also $\ell \le \dim_x X$ folgt $\ell \le \dim A_x$. Nun ist aber $A_x = \mathcal{O}_{X,x}$, d.h. es gilt

$$\dim_x X \le \dim \mathcal{O}_{X,x}. \tag{3}$$

Umgekehrt erhält man aus einer echt aufsteigenden Primidealkette in A_x durch Übergang zu den vollständigen Urbildern in A eine echt aufsteigende Primidealkette (2), also eine echt absteigende Kette von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von U = Spec A. Durch Übergang zu den Abschließungen in X entsteht eine echt absteigende Kette (1) in X. Es gilt deshalb sogar das Gleichheitszeichen in (3).
QED.

3.14.6 Die Hilbert-Funktion eines noetherschen lokalen Rings

Sei (A, m) ein noetherscher lokaler Ring A mit dem einzigen maximalen Ideal m. Dann werden die Potenzen des maximalen Ideals m wie alle Ideale von A von jeweils endlich vielen Elementen erzeugt. Die Faktoren

$$m^n/m^{n+1}$$

sind endlich erzeugte A-Moduln, welche von m annulliert werden, d.h. es sind endlich-dimensionale Vektorräume über dem Körper A/m,

$$H^0_A(n) := \dim_{A/m} m^n/m^{n+1} < \infty$$

für jede nicht-negative ganze Zahl n (die 0-te Potenz von m soll gleich A sein). Für negatives n setzen wir

---

mit echten offenen Teilmengen Y - U und $\overline{U}$ von Y. Das steht aber im Widerspruch zu Irreduzibilität von Y.

[55] Offene Teilmengen U von irreduziblen Mengen Y sind irreduzibel: sei $U = F' \cup F''$ mit F', F'' abgeschlossen in U und von U verschieden. Dann gibt es Punkte

$$x \in U - F'' \text{ und } y \in U - F'$$

mit einer zu F'' bzw. F' disjunkten offene Umgebung. Insbesondere liegt x nicht in der Abschließung von F'' und y nicht in der von F'. Wegen $U = F' \cup F''$ folgt durch Übergang zu den Abschließungen

$$Y = \overline{U} = \overline{F'} \cup \overline{F''}.$$

Weil x nicht in $\overline{F''}$ und y nicht in $\overline{F'}$ liegt, stehen rechts echte abgeschlossene Teilmengen von Y. Das ist aber nicht möglich, da Y irreduzibel sein soll.

[56] Die Inklusionen bleiben echt, weil für multiplikativ abgeschlossene Teilmengen $S \subseteq A$ und Primideale p von A mit $S \cap p = \emptyset$ gilt

$$pA_S \cap A = p.$$

$$H_A^0(n) = 0 \text{ für } n < 0.$$

Auf diese Weise ist dann eine Funktion

$$H_A^0 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

definiert, welche Hilbert-Funktion des lokalen Rings A heißt. Induktiv definiert man

$$H_A^{i+1}(n) = H_A^i(n) + H_A^i(n-1) + ... + H_A^i(0)$$

und nennt H_A^i i-te Summen-Transformierte der Hilbert-Funktion. Die erste Summen-Transformiert H_A^1 heißt auch Hilbert-Samuel-Funktion von A. Es gilt

$$H_A^1(n) := \text{length}_A(A/m^{n+1}).$$

Dabei ist die Länge $\text{length}_A(M)$ eines A-Moduls M definiert als das Supremum über alle nicht-negativen ganzen Zahlen ℓ für die es eine echt aufsteigende Kette

$$M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_\ell \tag{1}$$

von Teilmoduln von M gibt.

Mit denselben Symbol wie die Funktionen bezeichnet man auch die zugehörigen Potenzreihen

$$H_A^i = H_A^i(0) + H_A^i(1)\bullet T^1 + H_A^i(2)\bullet T^2 + H_A^i(3)\bullet T^3 + ...$$

Man spricht dann auch von der Hilbert-Reihe (i = 0), der Hilbert-Samuel-Ringe (i = 1) bzw. der i-ten Summentransformierten der Hilbert-Reihe. Nach Definition gilt

$$H_A^{i+1} = \frac{1}{1-T} \bullet H_A^i ,$$

also

$$H_A^i = \frac{H_A^0}{(1-T)^i}$$

Seien jetzt $R = \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$ ein graduierter Ring und M ein graduierter R-Modul, d.h. M zerfalle in eine direkte Summe von additiven Untergruppen

$$M = \oplus_{n=k}^{\infty} M_n$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ und $R_a \bullet M_b \subseteq M_{a+b}$. Falls jedes M_n als R_0-Modul eine endliche Länge hat, so setzt man

$$H_{R,M}^0(n) := \text{length}_{R_0}(M_n)$$

und spricht von der Hilbert-Funktion des graduierten R-Moduls M bzw. von dessen Hilbert-Reihe. Im Fall M = R schreibt man auch

$$H_R^0 = H_{R,R}^0$$

Beispiel 1

Sei (A, m) ein noetherscher lokaler Ring und

$$gr_m(A) := \oplus_{n=0}^{\infty} m^n/m^{n+1}$$

der zugehörige graduierte Ring (bezüglich der Potenzen des maximalen Ideals). Dann gilt

$$H_A^0 = H_{gr_m(A)}^0$$

Beispiel 2
Seien R ein graduierter Ring, dessen homogene Bestandteile R_n von Moduln endlicher Länge über R_0 sind, und x eine Unbestimmte. Dann besitzt der Polynom-Ring

$$R[x]$$

die Struktur eines graduierten Rings mit

$$R[x]_n = R_0 \bullet x^n + R_1 \bullet x^{n-1} + \ldots + R_n.$$

Die homogenen Bestandteile von R[x] sind ebenfalls Moduln endlicher Länge über $R[x]_0 = R_0$, und des gilt

$$H^0_{R[x]}(n) = H^0_R(n) + H^0_R(n-1) + \ldots + H^0_R(0),$$

d.h. für die Reihen gilt

$$H^0_{R[x]} = \frac{1}{1-T} \bullet H^0_R$$

Beispiel 3
Seien k ein Körper und $R = k[x_1,...,x_N]$ der Polynomring mit der üblichen Graduierung. Wir fassen k als graduierten Ring auf, dessen sämtliche homogene Bestandteile positiven Grades gleich Null sind. Durch wiederholtes anwenden von Beispiel 2 erhalten wir für die Hilbert-Reihen

$$H^0_k = 1$$

$$H^0_R = \frac{1}{(1-T)^N}$$

und für die Hilbert-Funktionen

$$H^0_{k[x_1]}(n) = 1 \qquad \text{für } n \geq 0.$$

$$H^0_{k[x_1,x_2]}(n) = n+1 \qquad \text{für } n \geq 0.$$

$$H^0_{k[x_1,x_2,x_3]}(n) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \binom{n+2}{2} \text{für } n \geq 0.$$

$$H^0_R(n) = \binom{N+n-1}{N-1} \qquad \text{für } n \geq 0.$$ [57]

Insbesondere ist die Hilbert-Funktion eines Polynom-Rings in N Unbestimmten für Argumente ≥ 0 ein Polynom des Grades N-1.
Der Potenzreihenring

$$A = k[[x_1,...,x_d]]$$

ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $m = (x_1,...,x_d)$ der zugehörige graduierte Ring ist isomorph zum Polynomring in d Unbestimmten,

$$gr_m(A) \cong k[x_1,...,x_d].$$

Insbesondere ist

$$H^0_A(n) = H^0_{gr_m(A)}(n)$$

für $n \geq 0$ ein Polynom des Grades d-1 in n und entsprechend die Hilbert-Samuel-Funktion

$$H^1_A(n)$$

ein Polynom des Grades d.

---

[57] Für N = 1 und N = 2 ist dies offensichtlich richtig. Die übrigen Fälle ergeben sich durch Induktion mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks.

Beispiel 4
Sei (A, m) ein noetherscher lokaler Ring der Dimension 0. Dann ist m das einzige Primideal von A, und insbesondere ist

$$\sqrt{0} = \text{Durchschnitt aller Primideale} = m.$$

Das Ideal m ist wird von endlich vielen Elementen erzeugt, die sämtlich nilpotent sind. Deshalb ist m selbst nilpotent, es gibt ein n_0 mit

$$m^n = 0 \text{ für } n \geq n_0.$$

Damit ist

$$H_A^0(n) = 0 \text{ für } n \geq n_0$$

also ist

$$H_A^1(n)$$

unabhängig von n für $n \geq n_0$, also ein Polynom des Grades 0.

3.14.7 Lokale Dimension, Hilbert-Funktionen und Definitionsideale

Sei X ein noethersches Schema und $x \in X$ ein Punkt. Dann stimmt die lokale Dimension von X in x überein

$$\dim_x X = \dim \mathcal{O}_{X,x} = \deg H^1_{\mathcal{O}_{X,x}}$$

mit dem Grad des Hilbert-Polynoms zur Hilbert-Funktion von $\mathcal{O}_{X,x}$ und gleichermaßen mit der minimalen Anzahl der Erzeuger eines Definitionsideals von $\mathcal{O}_{X,x}$.
(siehe Anhang Kommutative Algebra).

3.14.8 Die Dimension des $\mathbb{P}_k^N$

Sei k ein Körper. Dann gilt

$$\dim \mathbb{P}_k^N = N.$$

Beweis.Jeder Punkt des $\mathbb{P}_k^N$ besitzt eine offene Umgebung, die isomorph ist zum $\mathbb{A}_k^N$. Jede lokale Dimension von $\mathbb{P}_k^N$ ist deshalb gleich der lokalen Dimension des entsprechenden Punktes des $\mathbb{A}_k^N$. Es folgt

$$\dim \mathbb{P}_k^N = \dim \mathbb{A}_k^N = N.$$

QED.

3.14.9 Satz von der Dimension der Faser

Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein dominanter Morphismus[58] von integren[59] Schemata vom endlichen Typs[60] über einem Körper k.

---

[58] d.h. f(X) liege dicht in Y.
[59] (englich 'integral'), d.h. die Schnitte der Strukturgarbe sind keine Nullteiler (bilden Integritätsbereiche). Das ist äquivalent zur Forderung, daß das Schema irreduzibel ist und die Strukturgarbe keine nilpotenten Elemente besitzt. Für jede affine Umgebung U = Spec A des Schemas ist dann das Nullideal 0 ein Punkt η von U mit der Eigenschaft daß die Abschließung von $\{\eta\}$ in U

(i) Seien $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ irreduzible Teilmengen mit

(a) $f(X') \subseteq Y'$.

(b) $f|_{X'}: X' \longrightarrow Y'$ dominant.[61]

(c) X' ist irreduzible Komponente von $f^{-1}(Y')$.

Dann gilt $\mathrm{codim}_X X' \le \mathrm{codim}_Y Y'$.

(ii) Sei $e = \dim X - \dim Y$ die <u>relative Dimension</u> von f. Für $y \in f(X)$ hat dann jede Komponente von $f^{-1}(y)$ eine Dimension $\ge e$.

(iii) Es gibt eine dichte offene Teilmenge $U \subseteq X$ derart, daß für $y \in f(U)$ jede Komponente von $f^{-1}(y) \cap U$ die Dimension e hat.

(iv) Für jede ganze Zahl h sei

$$E_h := \{x \in X \mid \begin{array}{c}\text{Es gibt eine irreduzible Komponente}\\ Z \text{ von } f^{-1}(f(x)) \text{ mit } x\in Z \text{ und } \dim Z \ge h\end{array}\}$$

Dann gilt:

(a) E_h ist abgeschlossen in X.

(b) E_h ist für $h > e$ nirgends dicht in X.

(c) $E_h = X$ für $h = e$.

Beweis. Siehe Hartshorne: Algebraic geometry, Ex. II.3.22, oder Shafarevich: Basis algebraic geometry, Part I, Chapter 1, §6, Section 3.
QED.

Folgerung

---

gleich U ist. Weil U dicht liegt im Schema, ist die Abschließung von $\{\eta\}$ im Schema das ganze Schema. Ein solcher Punkt heißt <u>generischer Punkt</u> oder auch <u>allgemeiner Punkt</u> des Schemas. Weil $\{\eta\}$ als einelementige Menge irreduzibel ist, gilt dasselbe für deren Abschließung, d.h. die irreduziblen Schemata sind gerade die Schemata, die einen generischen Punkt besitzen. Jedes irreduzible Schema besitzt dabei genau einen generische Punkt: seien U und V nicht-leere affine offene Teilschemata, $u \in U$ und $v \in V$ deren generische Punkte. Weil $U \cap V$ nicht leer ist, können wir ein weiteres nicht-leeres offenes affines Teilschema $W \subseteq U\cap V$ wählen und einen weiteren generische Punkt $w \in W$. Wegen

$w \in W \subseteq U\cap V \subseteq U$

ist w eines der Primideale von U. Insbesondere liegt w in der Abschließung von {u} in U, d.h. es gilt

$$u \subseteq w.$$

Weil die Abschließung von {w} im Schema das ganze Schema ist, ist die Abschließung von {w} in U gleich U. Insbesondere liegt u in der Abschließung von {w}, d.h. es gilt

$$w \subseteq u.$$

Wir haben gezeigt, w = u. Aus Symmetrie-Gründen gilt auc w = v, also u = v. Wir haben gezeigt, je zwei generische Punkte sind gleich.

Beispiel: Seien $X = \mathrm{Spec}\ k[x, y]/(x^2-y^3)$ die semi-kubische Parabel und t eine Unbestimmte. Dann ist der Punkt (t^3,t^2) mit Koordinaten in der Erweiterung k(t) von k ein allgemeiner Punkt von X.

[60] Ein Schema X über einem Ring A heißt vom endlichen Typ über A, wenn X Vereinigung von endlich vielen affinen Schemata Spec B ist mit B endlich erzeugte Algebra über A.

[61] Damit liegt eine offene Teilmenge von Y' in f(X'), d.h. das Bild enthält also den generischen Punkt von Y'. Liegt umgekehrt der allgemeine Punkt von Y' in f(X'), so liegt die Abschließung des allgemeinen Punkt (d.h. Y') ganz in der Abschließung von f(X'), d.h. es gilt (b).

Sei f: X $\longrightarrow$ Y ein eigentlicher surjektiver Morphismus von reduzierten Schemata endlichen Typs über einem Körper k. Weiter seien die folgenden Bedingungen erfüllt.

(i) Y ist irreduzibel.
(ii) Die Fasern $f^{-1}(y)$ sind irreduzibel für alle $y \in Y$.
(iii) Die Dimension der Fasern $f^{-1}(y)$ ist unabhängig von y.

Dann ist X irreduzibel.

Beweis. Sei n die gemeinsame Dimension der Fasern,

$$n := \dim f^{-1}(y) \text{ für } y \in Y.$$

Angenommen, X ist reduzibel. Wir betrachten die Zerlegung in irreduzible Komponenten, sagen wir

$$X = X_1 \cup ... \cup X_r.$$

Weil f surjektiv ist, folgt

$$Y = f(X) = f(X_1) \cup ... \cup f(X_r).$$

Weil f eigentlich ist, sind die $f(X_i)$ abgeschlossene Teilschemata. Weil Y irreduzibel ist, muß $f(X_i) = Y$ gelten für mindestens ein i. Wir können annehmen, dies ist der Fall für genau die ersten s Indizes i,

$$f(X_i) = Y \Leftrightarrow i \in \{1,...,s\}.$$

Wir entfernen die Bilder, für das nicht der Fall ist aus Y und setzen

$$Y' := Y - (f(X_{s+1}) \cup ... \cup f(X_r)).$$

Dies ist eine offene Teilmenge von Y. Wir schreiben

$$X' := f^{-1}(Y') = X'_1 \cup ... \cup X'_r ,$$

mit X'_i offen in X_i und nicht leer. Insbesondere ist mit X_i auch X'_i irreduzibel. Wir versehen X'_i mit der Struktur eines reduzierten Teilschemas von X und betrachten die durch f induzierten Morphismen

$$f_i: X'_i \longrightarrow Y', i = 1, ... , s.$$

Der Morphismus f_i ist gerade die Einschränkung von $f|_{X_i}$ auf X'_i.

Sei

$$m_i := \min \{\dim f_i^{-1}(y) \mid y \in Y'\}.$$

Nach dem Satz von der Dimension der Faser gibt es eine nicht-leere (also dichte) offene Menge

$$U \subseteq Y'$$

mit

$$m_i := \dim f_i^{-1}(y) \text{ für } y \in U.$$

Nach Wahl der Mengen X'_i und der Abbildungen f_i liegt für $y \in U$ jeder Punkt der Faser $f^{-1}(y)$ in einem der X'_i und damit in einer der Fasern $f_i^{-1}(y)$, d.h. es ist

$$f^{-1}(y) = f_1^{-1}(y) \cup ... \cup f_s^{-1}(y).$$

Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(y)$ irreduzibel von der Dimension n. Die m_i sind Dimensionen abgeschlossener Teilmengen und damit höchstens gleich n. Wegen der Irreduzibilität von $f^{-1}(y)$ muß diese Faser gleich einem der $f_i^{-1}(y)$ sein, sagen wir für ein $y \in U$ und $i = 1$. Dann gilt aber, weil die Dimension der Fasern über U konstant ist,

$$m_1 = \dim f_1^{-1}(y) = n \text{ für alle } y \in U.$$

Nun besteht U gerade aus Punkten von Y, in denen die Dimension der Fasern von $f|_{X_1}$ minimal ist. Wegen $f|_{X_1} = f_1$ über den Punkten von U hat die Dimension der Fasern dort aber auch den maximalen Wert n. Es folgt

$$\dim f|_{X_1}^{-1}(y) = \dim f^{-1}(y) \text{ für alle } y \in Y.$$

Dann kann aber $f|_{X_1}^{-1}(y)$ keine echte abgeschlossene Teilmenge der irreduziblen Menge $f^{-1}(y)$ sein (denn dann hätte sie eine kleinere Dimension). Es gilt also

$$f|_{X_1}^{-1}(y) = f^{-1}(y) \text{ für alle } y \in Y.$$

Jeder Punkt von X liegt in einer der Fasern von f, also auch in einer der Fasern von $f|_{X_1}$ und damit in X_1. Wir haben gezeigt X liegt ganz in der Teilmenge X_1, d.h. es ist

$$X = X_1.$$

Insbesondere ist X irreduzibel.
QED.
Beispiel
Seien k ein Körper und $x_0, \ldots, x_N$ Unbestimmte. Wir betrachten den Morphismus

$$f: \mathbb{A}_k^N - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_k^N,\ (x_0, \ldots, x_N) \mapsto [x_0, \ldots, x_N]$$

Auf der offenen Hauptmenge $D(x_i)$ hat der Morphismus die Gestalt

$$D(x_i) \longrightarrow D_+(x_i) = \mathbb{A}_k^N,\ (x_0, \ldots, x_N) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_N}{x_i}\right). \qquad (1)$$

Etwas verkürzend können wir auch sagen, der Morphismus ist lokal auf $D(x_i)$ durch die Vorschrift[62]

$$x \mapsto \left(\frac{1}{x_i} x\right)'$$

gegeben und analog auf $D(x_j)$ durch

$$x \mapsto \left(\frac{1}{x_j} x\right)'$$

Dies ist verträglich mit den Isomorphismen, welche den $\mathbb{A}_k^N$ mit $D_+(x_i)$ bzw. $D_+(x_j)$ identifizieren:

$$\mathbb{A}_k^N \longrightarrow D_+(x_i),\ \left(\frac{1}{x_i} x\right)' \mapsto \left[\frac{1}{x_i} x\right] = [x]$$

---

[62] Der Strich soll bedeuten, daß die i-te Koordinate des (N+1)-Tupel gestrichen wurde.

$$\mathbb{A}_k^N \longrightarrow D_+(x_j),\ (\frac{1}{x_j}x)' \mapsto [\frac{1}{x_j}x] = [x]$$

Die lokal definierten Morphismen (1) verheften sich deshalb zu einem global definierten Morphismus. Für jedes projektive Teilschema

$$X \subseteq \mathbb{P}_k^N$$

induziert f einen Morphismus

$$f^{-1}(X) \longrightarrow X. \tag{2}$$

Dabei ist

$$C_X := f^{-1}(X) \cup \{0\} \tag{3}$$

gerade das affine Teilschema des $\mathbb{A}_k^N$ welches dort durch dieselben Gleichungen definiert wird wie X im $\mathbb{P}_k^N$ (nur aufgefaßt als affine Gleichungen). Das Schema (3) heißt affiner Kegel über X. Die Fasern von (2) sind affine Geraden, aus denen der Urspung entfernt wurde. Insbesondere sind alle Fasern irreduzibel und von der Dimension 1. Auf Grund der obigen Folgerung ist mit X auch der affine Kegel über X irreduzibel und hat die Dimension

$$\dim C_X = \dim X + 1. \tag{4}$$

Für nicht notwendig irreduzibles X kann man X in irreduzble Komponenten zerlegen, sagen wir

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$$

Versieht man alle Schemate mit ihrer reduzierten Struktur, so erhält man

$$C_X = C_{X_1} \cup \ldots \cup C_{X_r}\ .$$

Deshalb ist (4) auch für reduzible (nicht notwendig reduzierte) Teilschemata des projektiven Raums richtig.

3.14.10 Die Hilbert-Funktion eines projektiven Schemas

Seien $R = k[x_0, \ldots , x_N]$, $I \subseteq R$ ein homogenes Ideal und

$$A := R/I$$

Weiter bezeichne

$$m = (x_0, \ldots , x_N)$$

das Ideal des Ursprungs im affinen Raum und

$$gr_m(A) := \oplus_{n=0}^{\infty} m^n{\bullet}A/m^{n+1}A$$

den zugehörigen graduierten Ring.[63] Die Länge der graduierten Bestandteile von $gr_m(A)$ über $gr_m^0(A) = R/m = k$ ist dann endlich und die Hilbert-Funktion

$$H_{gr_m(A)}$$

von $gr_m(A)$ als Modul über sich selbst ist wohldefiniert. Der Grad des zugehörigen Hilbert-Polynom ist gerade die Dimension des durch I definierten projektiven Schemas.

---

[63] Weil I homogen ist, ist $gr_m(A)$ isomorph zu R/I: $\dim_k gr_m^n(A)$ ist die Maximalzahl von Potenzprodukte des Grades n in den Unbestimmten $x_0, \ldots , x_N$, welche modulo der homogenen Polynome des Grades n aus I linear unabhängig sind.

$$\dim \operatorname{Proj} R/I = \deg H_{gr_m(A)}.$$

Beweis. Weil die Dimension des affinen Kegels über Proj R/I um 1 größer ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Proj} R/I &= \dim \operatorname{Spec} R/I - 1 \\ &=^{64} \dim \operatorname{Spec} (R/I)_m - 1 \\ &= \dim (R/I)_m - 1\end{aligned}$$

Als einziges maximales Ideal von $(R/I)_m$ ist $m\bullet(R/I)_m$ ein Definitionsideal. Damit ist

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Proj} R/I &= \deg \chi((R/I)_m, m(R/I)_m, T) - 1 \\ &= \deg H^1_{gr_m}(R/I) - 1\end{aligned}$$

Zur Gültigkeit des letzten Gleichheitszeichens beachte man, das Ideal $m\bullet(R/I)$ liegt im Annullator des R/I-Moduls $gr^n_m(R/I) = m^n\bullet(R/I)/m^{n+1}\bullet(R/I)$. Die Primideale zur Primärzerlegung des Annullators enthalten deshalb dieses Ideal, und weil letzteres maximal ist, ist es das einzige Primideal zur Primärzerlegung des Annullators. Auf Grund von Eigenschaft (iii) der Längen-Funktion (siehe Anhang) ändert sich die Länge

$$\operatorname{length}_{R/I} (m^n\bullet(R/I)/m^{n+1}\bullet(R/I))$$

nicht, wenn man Ring und Modul bezüglich des Primideals $m\bullet(R/I)$ lokalisiert. Mit anderen Worten, die Hilbert-Funktion ändert sich nicht, wenn man

$$gr_{m\bullet(R/I)_m}((R/I)_m) \text{ durch } gr_m(R/I)$$

ersetzt.[65] Damit erhalten wir

$$\dim \operatorname{Proj} R/I = \deg H^0_{gr_m}(R/I)$$

QED.

Bemerkung

Die Dimension des n-ten graduierten Bestandteils von R/I über dem Grundkörper ändert sich nicht, wenn man k durch einen größeren Körper ersetzt. Insbesondere ist für jede Körpererweiterung K/k

$$\dim \operatorname{Proj} R/I = \dim \operatorname{Proj} (R/I)\otimes_k K.$$

Beispiel

Die Hilbert-Reihe des N-dimensionalen projektiven Raums

$$\mathbb{P}^N_k = \operatorname{Proj} k[x_0,\ldots,x_N]$$

ist gleich

$$H^0_{k[x_0,\ldots,x_N]} = \frac{1}{(1-T)^N}.$$

Insbesondere ist

$$\dim \mathbb{P}^N_k = d(k[x_0,\ldots,x_N]) = N.$$

---

[64] Wir nutzen hier, daß endlich erzeugte k-Algebren wie der Ring R/I katenär sind, d.h. jede Primidealkette, die sich nicht verlängern läßt hat dieselbe Länge.

[65] Man zeigen, die beiden graduierten Ringe sind isomorph.

3.14.11 Durchschnitte mit Hyperebenen im projektiven Raum

Seien k ein Körper, $X \subseteq \mathbb{P}_k^N$ eine equidimensionale abgeschlossene Teilmenge und

$$H = V(F) \subset \mathbb{P}_k^N$$

eine Hyperfläche. Wir setzen

$$d := \dim X.$$

Dann besitzt jede irreduzible Komponente von $X \cap H$ die Dimension d-1 oder d. Der zweite Fall tritt nur für Komponenten von $X \cap H$ ein, die auch Komponenten von X sind.

Beweis. 1. Schritt. der Fall k algebraisch abgeschlossen.

Sei $Z \subseteq X \cap H$ eine irreduzible Komponente. Wir fixieren einen Punkt

$$z \in Z$$

und wählen eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{P}_k^N$ dieses Punktes z, welche isomorph ist zum affinen Raum,

$$U \cong \mathbb{A}_k^N.$$

Es gilt

$$z \in Z \cap U \subseteq (X \cap (H \cap U)$$

Dann ist $Z \cap U$ eine irreduzible Komponente des Durchschnitts von $X \cap U$ mit der Hyperfläche $H \cap U$.[66] Es folgt

$$\dim X \cap U - 1 \le \dim Z \cap U \le \dim X \cap U \le \dim X = d$$

Wir lassen U eine Überdeckung des projektiven Raums durchlaufen und erhalten

$$\dim Z \le d.$$

Weil dim X gleich dem Supremum über alle lokalen Dimensionen ist (und dieses endlich ist) gibt es einen Punkt $x \in X$ mit $\dim X = \dim_x X$. Wir könen U so wählen, daß U außer z auch den Punkt x enthält.[67] Es folgt

$$d - 1 = \dim X - 1 = \dim_x X - 1 \le \dim X \cap U - 1 \le \dim Z \cap U \le \dim Z.$$

2. Schritt. k beliebig.

Wir schreiben

$$X = V(I), H = V(F)$$

mit einem homogenen Ideal $I \subseteq R := k[x_0,...,x_n]$ und einem homogenen Polynom F. Die Hilbert-Funktion der projektiven Koordinatenringe

$$R/I, R/FR, R/(I+FR)$$

von X, H und $X \cap H$ ändern sich nicht, wenn man k durch die algebraische Abschließung von k ersetzt. Die Behauptung ist damit auf die Aussage des ersten Schritts reduziert.

---

[66] $Z \cap U$ ist irreduzibel, weil jede nicht-leere offene Teilmenge von $Z \cap U$ dicht liegt in der irreduziblen Menge Z, also erst recht in $Z \cap U$.

Durchläuft Z die Komponenten von $X \cap H$ die U schneiden, so erhält man eine Darstellung von $X \cap H \cap U$ als Vereinigung der irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen $Z \cap U$. Kein dieser Teilmengen $Z \cap U$ kann man weglassen, weil man sonst Z in der Darstellung von $X \cap H$ weglassen könnte.

[67] Wegen k algebraisch abgeschlossen, also k unendlich, können wir eine Hyperebene so wählen, daß sie die beiden Punkte z und x. Deren Komplement ist ein geeignetes U.

QED.

3.24.12 Durchschnitte abgeschlossener Teilschemata im $\mathbb{P}_k^N$

Seien k ein Körper und X, Y zwei equidimensionale abgeschlossene Teilmengen im N-dimensionalen projektiven N-Raum $\mathbb{P}_k^N$. Dann besitzt jede irreduzible Komponente von

$$X \cap Y$$

eine Dimension ≥ dim X + dim Y - N. Insbesondere gilt

$$\mathrm{codim}_X\, X\cap Y \le \mathrm{codim}_{\mathbb{P}_k^N}\, Y.$$

Falls für eine Komponente C des Durchschnitts sogar das Gleichheitszeichen gilt, sagt man, X und Y schneiden sich <u>eigentlich</u> in C. Falls dies für jede Komponente gilt, so sagt man X und Y schneiden sich <u>eigentlich</u>.

Beweis. Wir schreiben

$$\mathbb{P}_k^N = \mathrm{Proj}\ R \text{ mit } R := k[x_0,...,x_N]$$
$$X := \mathrm{Proj}\ R//I$$
$$Y := \mathrm{Proj}\ R/J$$

mit homogenen Idealen I und J von $k[x_0,...,x_n]$. Für den Durchschnitt erhalten wir[68]

$$X\cap Y = \mathrm{Proj}\ k[x_0,...,x_N]/(I+J).$$

Dabei ist

$$k[x_0,...,x_N]/(I+J) = k[x_0,...,x_N,y_0,...,y_N]/(I,J',x_0\text{-}y_0,...,x_N\text{-}y_N).$$

wobei J' das Ideal von $k[y_0,...,y_N]$ bezeichne, das aus J ensteht, wenn man jede Unbestimme x_i durch y_i ersetzt. Wir erhalten so

$$k[x_0,...,x_N]/(I+J) = (k[x_0,...,x_N]/I \otimes_k k[y_0,...,y_N]/J) / (x_0\text{-}y_0,...,x_N\text{-}y_N)$$
$$= (R/I \otimes_k R/J)/(x_0\text{-}y_0,...,x_N\text{-}y_N)$$

d.h.

$$X\cap Y = (X \times Y)' \cap \Delta$$

Dabei betrachten wir (X×Y)' als abgeschlossenes Teilschema von

$$\mathbb{P}_k^{2N+1} = \mathrm{Proj}\ k[x_0,...,x_N,y_0,...,y_N]$$

welches durch das durch I und J erzeugte homogene Ideal gegegen ist. Mit anderen Worten (X×Y)' ist das projektive Teilschema mit dem affinen Kegel $C_X \times C_Y$.

Mit

$$\Delta := V(x_0\text{-}y_0,...,x_N\text{-}y_N)$$

bezeichnen wir die Diagonale des Projektiven Raums $\mathbb{P}_k^{2N+1}$ mit dem definierenden Ideal

$$(x_0\text{-}y_0,...,x_N\text{-}y_N)$$

Wir wenden den Satz von der Dimension der Faser auf die natürliche Projektion

$$C_X \times C_Y \longrightarrow C_X,\ (x,y) \longrightarrow x$$

[68] Genauer: rechts steht ein abgeschlossenes Teilschema des projektiven Raums, dessen zugrundeliegender topologischer Raum gerade X⋂Y ist. Man kann die Identität als Definition (für Teilschemate eines gegebenen projektiven Raums) ansehen.

(genauer, auf die analogen Abbildungen, die man erhält, wenn man die Mengen X und Y durch deren irreduzible Komponenten ersetzt), und erhalten

$$\dim C_X \times C_Y = \dim C_X + \dim C_Y = \dim X + \dim Y + 2,$$

also

$$\dim (X\times Y)' = \dim X + \dim Y + 1$$

Weil Δ der Durchschnitt von N+1 Hyperflächen ist, erhalten wir für jede Komponent C von $X\cap Y$ die Abschätzung

$$\dim C \ge \dim X + \dim Y + 1 - N - 1.$$

QED.

3.15 Bemerkungen zur Schnitt-Theorie

3.15.1 Der Grad eines projektiven Schemas

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und X eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{P}_k^N$. Dann kann man eine Hyperebene H wählen, die keine der Komponenten von X enthält,[69] also X eigentlich schneidet. Durch Wiederholen dieser Konstruktion findet man

$$d := \dim X$$

Hyperebenen $H_1,...,H_n$ derart, daß

$$\dim X \cap H_1 \cap ... \cap H_d = 0$$

ist, d.h. der Durchschnitt besteht aus endlich vielen Punkten. Man kann zeigen, die Anzahl der Punkte aus diesem Durchschnitts ist nach oben beschränkt und für fast alle solcher Hyperebenen-n-Tupel gleich. Man nennt diese Anzahl <u>Grad</u> von X und bezeichnet sie mit

$$\deg X := \max \{\# X \cap L \mid L \subseteq \mathbb{P}_k^N \text{ linearer Unterraum mit } \dim X\cap L = 0 \}$$

Indem man die Punkte aus $X\cap L$ mit geeigneter Weise mehrfach zählt (zum Beispiel, wenn L aus Tangenten in diesem Punkt besteht), kann man sogar erreichen, daß die Anhzahl der Punkte für jedes L mit codim L = d dieselbe ist.

3.15.2 Der ebene Fall

Sei $F \in k[x_0,x_1,x_2]$ homogen vom Grad d und

$$X := D(F) \subseteq \mathbb{P}_k^2$$

Weiter sei H eine Hyperfläche, welche X eigentlich schneidet. Durch eine geeignete Wahl der Koordinaten erreicht man,

$$H = D(x_0).$$

Weil der Schnitt eigentlich ist, ist x_0 kein Teiler von F. Insbesondere ist $F(0,x_1,x_2)$ homogen vom Grad d. Der Durchschnitt $X \cap H$ ist auf der projektiven Geraden H durch die Gleichung

$$F(0,x_1,x_2) = 0$$

[69] Man wähle auf jeder Komponente einen Punkt mit Koordinaten aus k und zu diesen endlich vielen Punkten eine Hyperebene, die keinen dieser Punkte enthält.

gegeben. Als homogenes Polynom in zwei Unbestimmten ist aber $F(0,x_1,x_2)$ von der Gestalt[70]

$$F(0,x_1,x_2) = c(a_1x_1-b_1x_2)^{n_1}\bullet\ldots\bullet(a_rx_1-b_rx_2)^{n_r}$$

wobei wir annehmen können, daß keine zwei der Paare (a_i,b_i) proportional sind, d.h. keine zwei der Punkte Punkte $[a_i,b_i]$ sind gleich. Zählt man $[a_i,b_i]$ mit der Vielfachheit n_i so erhält man als Anzahl der Schnittpunkte von X und H gerade

$$\sum_{i=1}^{r} n_i = \deg F = d.$$

Für die Hilbert-Reihe $H = H_X = H_{k[x_0,x_1,x_2]/F}$ des Schemas $X = V(F) = \operatorname{Proj} k[x_0,x_1,x_2]/(F)$ gilt auf Grund der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow k[x_0,x_1,x_2] \xrightarrow{F} k[x_0,x_1,x_2] \longrightarrow k[x_0,x_1,x_2]/(F) \longrightarrow 0$$

$$0 \quad = T^d H_{k[x_0,x_1,x_2]} - H_{k[x_0,x_1,x_2]} + H_{k[x_0,x_1,x_2]/F'}$$

d.h. es ist

$$\begin{aligned} H &= (1-T^d)\bullet H_{k[x_0,x_1,x_2]} \\ &= (1-T^d)/(1-T)^3 \\ &= \frac{1+T+..+T^{d-1}}{(1-T)^2} \\ &= (1+T+\ldots+T^d)\bullet \sum_{i=0}^{n} \binom{N+n-1}{N-1}\bullet T^n \qquad \text{mit } N = 2 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} H(n) &= \binom{n+1}{1} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-d+1}{1} \qquad \text{(d Summanden)} \\ &= d\bullet n + \text{const.} \end{aligned}$$

Der Grad von X ist also gerade der höchts Koeffizient des Hilbert-Polynoms. Allgemein kann man zeigen

$$H_X(n) = \frac{\deg X}{d!}\bullet n^n + \text{Glieder kleineren Grades}$$

für beliebige reduzierte projektive Schemata der Dimension Dimension d. Diese Identität gestattet eine Definition des Grades für nicht notwendig reduzierte projektive Schemate über einem nicht notwendig allgebraisch abgeschlossenen Körper k.

3.14.3 Die Schnitt-Vielfachheit projektiver Teilschemata und der Satz von Bezout

Seien X und Y abgeschlossene Teilschemata des projektiven Raums $\mathbb{P}_k^N$ über einem Körper k. Wir nehmen an, daß sich X und Y eigentlich schneiden und komplementäre Dimensionen besitzen, d.h. es gelte

---

[70] Man betrachte das Polynom $F(0,1,x_2/x_1)$ bzw. $F(0,x_1/x_2,1)$ und nutze die Tatsache, daß jedes Polynom in einer Unbestimmten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper in Linearfaktoren zerfällt.

$$\dim X \cap Y = 0.$$

Für jeden Punkt p von $X \cap Y$ kann man dann eine natürliche Zahl

$$i(p, X, Y)$$

definieren mit der Eigenschaft, daß der Satz von Bezout gilt:

$$\deg X \cdot \deg Y = \sum_p i(p, X, Y) \cdot \deg C$$

wobei die Summe rechts über alle Punkte von $X \cap Y$ erstreckt wird.

Bemerkungen

Der ebene Fall (N = 2) wurde bereits von Newton und Bezout behandelt. Die Definition der Schnitt-Multiplizität im allgemeinen Fall ist erst in der Mitte des vergangenen Jahrhunderts gelungen. Man braucht dazu Methoden der homologischen Algebra, die erst dann zur Verfügung standen.
Den ersten Existenzbeweis für diese Zahl durch A. Weil findet man in der Monographie

> Weil, A.: Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc., Coll. Publ. 29, Providence 1962.

Die erste kompakte Formel für diese Zahl findet man in

> Serre, J.-P.: Algèbre locale - Multiplicités, Lecture Notes in Math. 11 (1965), Springer Verlag.

Das Standard-Lehrbuch zur Schnitt-Theorie von Schemata ist das Buch von

> Fulton, W.: Intersection theory, Springer, Berlin 1984

Wir beschränken uns hier auf die Beschreibung des von Newton und Bezout behandelten ebenen Falls.

3.14.4 Der ebene Fall

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F,G \in k[x,y,z]$ homogene Polynome der Grade d bzw. e und

$$X := D(F)$$
$$Y := D(G)$$

die zugehörigen Kurven in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2_k$. Wir nehmen an, die beiden Kurven schneiden sich eigentlich (d.h. sie haben keine gemeinsamen Komponenten, d.h. F und G sind teilerfremd). Dann ist die Menge

$$X \cap Y$$

endlich. O.B.d.A. sei

$$e \le d.$$

O.B.d.A. enthalte die Hyperebene V(x) keinen der Punkte von $X \cap Y$, d.h.

$$X \cap Y \subseteq \mathbb{P}^2_k - H = \mathbb{A}^2_k$$

Wenn wir x = 1 setzen, können wir y und z als Koordinaten im $\mathbb{A}^2_k$ ansehen. Durch eine Drehung des y-z-Koordinatensystems können wir noch erreichen, daß daß die z-Koordinaten der verschiedenen Punkte von $X \cap Y$ verschieden sind.

Wir schreiben

$$F(x, y,z) = F_0(x,y)\cdot z^d+F_1(x,y)\cdot z^{d-1}+...+F_d(x,y)$$
$$G(x, y,z) = G_0(x,y)\cdot z^e+G_1(x,y)\cdot z^{e-1}+...+G_e(x,y)$$
mit homogenen Polynomen F_i und G_j in x und y der Grade i und j

Betrachten wir das Polynom

$$D(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} F_0z^d & F_1z^{d-1} & \dots & F_dz^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_0z^d & .. & F_{d-1}z^1 & F_dz^0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_0z^d & G_1z^{d-1} & \dots & G_ez^{d-e} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_0z^d & \dots & G_{e-1}z^{d-e+1} & G_ez^{d-e} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & & \end{pmatrix}$$

Jeder Eintrag der Matrix ist ein homogenes Polynom des Grades d. Deshalb ist D(x,y,z) homogen vom Grade $d(d+e) = d^2+de$. Entwickelt man die Determinante d-mal nach der ersten Spalte, so sieht man, D(x,y,z) ist durch $z^d\cdot...\cdot z^d = z^{d^2}$ teilbar, und der Quotient ist ein Polynom in x und y:

$$D(x,y,z) = E(x,y)\cdot z^{d^2},\ E(x,y) \text{ homogen vom Grad de.}$$

Damit ist

$$\mathrm{Res}_z(F,G) = E(x,y) \quad = \det \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & \dots & F_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_0 & .. & F_{d-1} & F_d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_0 & G_1 & \dots & G_e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_0 & \dots & G_{e-1} & G_e & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & & \end{pmatrix}$$

homogen vom Grad de. Dies ist aber gerade die Resultante von F und G bezüglich z, d.h. dieses Polynom ist genau gleich Null in einem Punkt (x,y) = (a,b), wenn

F(a,b,z) und G(a,b,z)

eine gemeinsame Nullstelle besitzen.

Weil die Hyperebene H = V(x) keine gemeinsame Nullstelle von F und G enthält, ist E(0,y) nicht identisch 0, d.h. E(x,y) ist nicht durch x teilbar. Insbesonder ist

E(1,y) ein Polynom des Grades de in y.

Für x = 1, d.h. in den Punkten von

$$\mathbb{P}^2_k - H = \mathbb{A}^2_k$$

bekommen aber die Gleichungen von X und Y die Gestalt

X: f(y,z) := F(1,y,z) = 0
Y: g(y,z) := G(1,y,z) = 0

Aus den obigen Entwicklungen von F und G nach den Potenzen von z erhalten wir Entwicklungen

$$f(y, z) = f_0(y)\cdot z^d + f_1(y)\cdot z^{d-1} + \ldots + f_d(y)$$
$$g(y,z) = g_0(y)\cdot z^e + g_1(y)\cdot z^{e-1} + \ldots + g_e(y)$$

mit

$$f_i(y) = F_i(1,y) \text{ und } g_j(y) := F_j(1,y)$$

Es folgt

$$\mathrm{Res}_z(f,g) = E(1,y) = \det \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \ldots & f_d & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f_0 & \ldots & f_{d-1} & f_d & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_0 & g_1 & \ldots & g_e & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & g_0 & \ldots & g_{e-1} & g_e & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & \end{pmatrix}$$

ist ein Polynom des Grades de, hat also de Nullstellen, wenn man diese mit ihren Vielfachheiten zählt. Nun ist aber $y = c \in k$ genau dann eine Nullstelle der Resultante, wenn es ein $z = d \in k$ gilbt mit $f(c,d) = g(c,d) = 0$. Mit anderen Worten, die Nullstellen der Resultante entsprechen gerade den Punkten von $X \cap Y$. Die Anzahl der Punkte von $X \cap Y$ ist somit gleich $d\cdot e$ (wenn man diese mit ihren Vielfachheiten zählt).

3.15.5 Lineare und rationale Äquivalenz

Seien X und Y abgeschlossene Teilschemata des projektiven Raums $\mathbb{P}_k^N$ über einem Körper k, die sich eigentlich schneiden und komplementäre Dimension besitzen. Dann ist die Zahl

$$(X\cdot Y) := \sum_p i(p, X, Y)\cdot \deg C,$$

wobei über die Punkte des Durchschnitts $X\cap Y$ summiert wird, wohldefiniert und heißt <u>Schnitt-Zahl</u> oder <u>Schnitt-Index</u> oder <u>Schnitt-Multiplizität</u> von X und Y.

Nach dem Satz von Bezout hängt diese Zahl nur von den Graden von X und Y ab. Es liegt deshalb nahe, Äquivalenzklassen von Teilschemata des projektiven Raums zu betrachten, die so beschaffen sind, daß die Schnitt-Zahl nur von den Äquivalenz-Klassen statt von deren Repräsentanten abhängt.

Genau dies ist Gegenstand der Schnitt-Theorie algebraischer Schemata. Statt Teilschemata betrachtet man formale ganzzahlige Linearkombinationen

$$n_1X_1 + \ldots + n_rX_r, \; n_i \in \mathbb{Z},$$

von reduzierten und irreduziblen Teilschemata X_i von vorgegebener Kodimension c und nennt diese c-<u>Zyklen</u>. Man kann solche Linearkombinationen als eine vergröberte Variante der Primärzerlegung eines equidimensionalen Schemas ansehen und setzt die Definition der Schnitt-Zahl linear fort,

$$\left(\sum_{i=1}^r n_iX_i \cdot \sum_{j=1}^s m_jY_j\right) := \sum_{i=1}^r \cdot \sum_{i=1}^r n_im_j\,(X_i\cdot Y_j)$$

und geht dann zu den Äquivalenzklassen über. Die Äquivalenz-Klassen wählt man so, daß gilt:

1. Die Schnitt-Zahl hängt nur von den Äquivalenz-Klassen der Zyklen ab.
2. Je zwei Zyklen lassen sich äquivalent so abändern, daß sich jedes X_i mit jedem Y_j eigentliche scheidet (die Schnitt-Zahl also wohldefiniert ist).

Man erreicht so, daß die Schnitt-Zahl für je zwei beliebige Klassen definiert ist. Man kann die Definition der Schnitt-Zahl außerdem noch auf den Fall erweitern, daß man auf die Forderung der komplementären Dimension verzichtet. Das Schnitt-Produkt von zwei Zyklen der Kodimensionen a und b ist dann ein Zyklus der Kodimension der Kodimension a+b, dessen Äquivalenzklasse nur von den Äquivalenzklassen der beiden Faktoren abhängt. Bezeichne

$$Ch^a$$

die abelsche Gruppe der Äquivalenzklassen der Kodimension a (für a = 0 erhält man $\mathbb{Z}$) Das Schnitt-Produkt definiert dann Abbildungen

$$Ch^a \times Ch^b \longrightarrow Ch^{a+b}$$

Die direkte Summe

$$Ch := \oplus_{n=0}^{\infty} Ch^n$$

bekommt so die Struktur eines graduierten Rings, welcher <u>Chow-Ring</u> des $\mathbb{P}_k^N$ heißt. Die Konstruktionen funktionieren auch, wenn man den projektiven Raum durch eine beliebiges eigentliches reduziertes und irreduzibles Schema über einem Körper ersetzt, daß keine singulären Punkte besitzt.

Die zu definierende Äquivalenz-Relation hei0t im Fall der Kodimension 1 <u>lineare Äquivalenz</u> und im allgemeinen Fall <u>rationale Äquivalenz</u>.

Ein Zylus der Kodimension 1 (im Z := $\mathbb{P}_k^N$ eigentlichen, reduzierten , irreduziblen und simgularitätenfreien Schema Z, auf welchem das Schnitt-Produkt eingeführt werden soll) heißt auch Divisor, genauer <u>Weil-Divisor</u>. Zwei Divisoren heißen <u>linear äquivalent</u>, wenn ihre Differenz der Nullstellen-Polstellen-Divisore einer rationalen Funktion auf Z ist.

Zur Definition des letzteren beachten wir, daß eine rationale Funktion

$$f \in k(Z)$$

lokal von der Gestalt $f = \frac{s}{t}$ ist mit lokal definierten regulären Funktionen s, t. Weil Z singularitätenfrei ist, können wir s und t so wählen, daß der größte gemeinsame Teiler gleich 1 ist. Der Nullstellen-Divisoer f ist dann lokal durch die Gleichung s = 0 und der Polstellen-Divisor durch die Gleichung t = 0 gegeben. Durch diese Gleichungen sind Hyperflächen auf Z gegeben, d.h. Teilmengen der Kodimension 1. Zur Definition des Nullstellen-Polstellen-Divisors führen wir für jeden irreduzible abgeschlossene Teilmenge

$$W \subset Z$$

der Kodimension 1 eine Abbildung

$$v_W: k(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

ein, die jeder rationalen Funktion $f \in k(Z) - \{0\}$ die natürliche Zahl n zuordnet,

$$v_W(f) = n,$$

wenn f eine n-fache Nullstelle entlang W besitzt, für welche

$$v_W(f) = -n$$

gilt, wenn f einen n-fachen Pol entlang W besitzt, und für welche

$$v_W(f) = 0$$

gilt, wenn es auf W einen Punkt gibt, in welchem f regulär ist und keine Nullstelle besitzt. Außerdem setzen wir

$$v_W(0) = \infty.$$

Beispiel 1

Sei $Z = \mathbb{P}^1_k$. Dann gilt $k(Z) = k(\mathbb{A}^1_k) = k(T)$ mit einer Unbestimmten T. Weiter sei $p \in Z$ ein Punkt mit der Koordinate $a \in k$.

Für jede rationale Funktion $f \in k(T)$ setzen wir

$$v_p(f) = n \ (\in \mathbb{Z}),$$

wenn in der Primfaktorszerlegung von f das Polynom T - a mit der n-ten Potenz vorkommt, und

$$v_\infty(f) = n,$$

wenn in der Primfaktorzerlegung von f(1/T) das Polynom T mit der n-ten Potenz vorkommt (d.h. $v_\infty(f) = -\deg(f)$).

Beispiel 2

Sei $Z = \mathbb{P}^N_k$. Dann gilt $k(Z) = k(\mathbb{A}^N_k) = k(T_1,\dots,T_N)$ mit Unbestimmten $T_1,\dots,T_N$.

Weiter seien $\varphi \in k[T_1,\dots,T_N]$ ein irreduzibles Polynom und

$p := \varphi k[T_1,\dots,T_N] \in \operatorname{Spec} k[T_1,\dots,T_N] = \mathbb{A}^N_k \subset \mathbb{P}^N_k$

das von φ erzeugte Primideal und

$$W := \overline{V(p)}$$

die Abschließung der irreduziblen Menge $V(p) \subseteq \mathbb{A}^N_k$ im projektiven Raum. Für jede rationale Funktion $f \in k(T_1,\dots,T_N)$ setzen wir

$$v_W(f) := v_p(f) := n \in \mathbb{Z},$$

wenn in der Primfaktorzerlegung von f das Polynom φ mit der Potenz n vorkommt.

Allgemeiner Fall

Im allgemeine Fall betrachtet man den generischen Punkt ξ von W und den lokalen Ring

$$\mathcal{O}_{Z,\xi}$$

von Z im Punkt ξ. Weil W die Kodimension 1 hat, ist dies ein lokaler Ring der Dimension 1. Auf Grund der Singularitätenfreiheit von Z kann man zeigen, daß das maximale Ideal dieses Rings ein Hauptideal ist, sagen wir

$$m_{Z,\xi} = \pi\mathcal{O}_{Z,\xi},$$

und damit insbesondere ein ZPE-Ring.
Für jede rationale Funktion

$$f \in k(Z) = Q(\mathcal{O}_{Z,\xi})$$

setzen wir

$$v_W(f) = n,$$

wenn in der Primfaktorzerlegung von f das Element π in der n-ten Potenz vorkommt.

Außerdem setzen wir

$$\mathrm{div}(f) := \sum_W v_W(f)\cdot W.$$

wobei rechts über alle irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen W von Z summiert wird. Weil in der Primfaktorzerlegung von f nur endlich viele Faktoren vorkommen, ist diese Summe endlich, d.h. rechts steht ein Divisor, der Nullstellen-Polstellen-Divisor der rationalen Funktion f. Zwei Divisoren heißen linear äquivalent, wenn ihre Differnz ein Divisor der Gestalt div(f) ist.

Diese Definition läßt sich auf den Fall beliebiger Z (die Singularitäten haben können) verallgemeinern, indem man anstelle der Funktionen v_W alle diskreten Bewertungen des Rangs 1 von k(Z) betrachtet, die trivial auf k sind.

Zwei Zyklen der Kodimension c heißen rational äquivalent, wenn es endlich viele irreduzible abgeschlossene Teilmengen

$$W_1, ..., W_r \subseteq Z$$

der Kodimension c-1 gibt und rationale Funktionen

$$f_1 \in k(W_1), ... , f_r \in k(W_r)$$

derart, daß die Differenz der beiden Zyklen die Gestalt

$$\mathrm{div}(f_1) + ... + \mathrm{div}(f_r)$$

besizt.

3.16 Singularitäten

3.17 Kohärente Garben

Vektorraumbündel und lokal freie Garben

In der Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten ist ein (komplexes) Vektorraumbündel eine holomorphe Abbildung

$$f: Y \longrightarrow X$$

von komplexen Mannigfaltigkeiten, die lokal von der Gestalt

$$\mathbb{C}^n\times U \longrightarrow U, (v,u) \mapsto u,$$

ist, wobei U eine geeignete offene Überdeckung von X durchlaufen soll. Ein Beispiel für ein solches Vektorraumbündel ist das Tangentialbündel, dessen Fasern

$$T_xX := f^{-1}(x)$$

gerade die Tangentialräume an die Manngfaltigkeit X sind.

Die holomorphen Schnitte des Vektorraumbündels f über den oben erwähnten Mengen U kann man identifizieren mit den n-Tupeln von holomorphen auf U definierten Funktionen. Die Garbe Γ_f der holomorphen Schnitte von f hat also die Eigenschaft, daß es für jeden Punkt von X eine offene Umgebung $U \subseteq X$ gibt mit

$$\Gamma_f|_U \cong \mathcal{O}_U^n.$$

Mit anderen Worten, die Garbe Γ_f ist lokal isomorph zu einer direkten Summe von n Exemplaren der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ der holomorphen Funktionen auf X. Solche Garben heißen lokal frei vom Rang n. Man kann zeigen, daß jede lokal freie Garbe des Rangs n von einem holomorphen Vektorraumbündel des Rangs n auf X kommt und daß zwei solche Garben genau dann isomorph sind, wenn es die zugrundeliegenden Vektorraumbündel sind. Man kann deshalb die Kategorie der holomorphen Vektorraumbündel mit der Kategorie der lokal freien Garben auf X identifizieren.

(v) Morphismen von Vektorraumbündeln. Seien

$$f\colon Y \longrightarrow X \text{ und } g\colon Z \longrightarrow X$$

zwei holomorphe Vektorraumbündel auf der komplexen Mannigfaltigkeit. Ein Morphism dieser Vektorraumbündel ist eine holomorphe Abbildung

$$\varphi\colon Y \longrightarrow Z,$$

für welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Außerdem fordert man, daß für jedes $x \in X$ die induzierte Abbildung

$$\varphi_x\colon f^{-1}(x) \longrightarrow g^{-1}(x)$$

linear sind. Man beachte die Fasern $f^{-1}(x)$ und $g^{-1}(x)$ über x sind für jeden Punkt komplexe Vektorräume. Man kann sich deshalb Morphismen von Vektorraumbündel als Familien von linearen Abbildungen φ_x vorstellen, die in holomorpher Weise vom Punkt $x \in X$ abhängen.

Die holomorphen Vektorraumbündel über X bilden zusammen mit diesen Morphismen eine Kategorie. Diese Kategorie besitzt im allgemeine weder Kerne noch Kokerne. Das hängt damit zusammen das die Dimension der linearen Räume $\mathrm{Ker}(\varphi_x)$ bzw. $\mathrm{Koker}(\varphi_x)$ im allgemeinen nicht konstant ist.

(vi) Analog sind die Kerne und Kokerne von Morphismen lokal freier Garben im allgemeinen keine lokal freie Garben. Die Kategorie der kohärenten Garben auf der komplexen Mannigfaltigkeit X ist die kleinste Kategorie, welche alle lokal freien Garben (endlichen Rangs) enthält und Kerne und Kokerne besitzt. Diese Kategorie ist eine abelsche Kategorie.

Anhang

In diesem Anhang fassen beschreiben wir einige Ergebnisse, die wir im Haupttext verwenden.

Kommutative Algebra

Alle Ringe in diesem Abschnitt sind, falls nicht ausdrücklich anders erwähnt, kommutativ und besitzen ein Einselement. Alle Ring-Homomorphismen bilden 1-Elemente in 1-Elemente ab.

Vorbereitungen (frei nach Matsumura)

Ideale, die nicht in einer Vereinigung von Primidealen liegen

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und I, $p_1,\ldots, p_r$ Ideale von A. Wir nehmen an, alle p_i mit eventueller Ausnahme von zweien sind Primideale.

Wenn dann I in keinem p_i liegt, so liegt I auch nicht in der Vereinigung der p_i.

Beweis. Wir können alle p_i weglassen, die in einem anderen p_i enthalten sind, also annehmen, daß zwischen den p_i keine Inklusionen bestehen.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach r.

<u>Der Fall</u> r = 2. Angenommen es gilt

$$I \subseteq p_1 \cup p_2. \tag{1}$$

Wir fixieren Elemente

$$x \in I - p_2 \text{ und } y \in I - p_1.$$

Wegen (1) gilt dann $x \in p_1$, also $x + y \notin p_1$. Also liegen die Elemente y und x+y beide in p_2 liegen. Dann liegt aber x in p_2 im Widerspruch zur Wahl von x.

<u>Der Fall</u> r > 2. Wir können annehmen, p_r ist ein Primideal. Auf Grund der Annahmen gilt dann

$$Ip_1\bullet\ldots\bullet p_{r-1} \notin p_r.$$

Wir fixieren ein Element

$$x \in Ip_1\bullet\ldots\bullet p_{r-1} - p_r.$$

Sei

$$S := I - (p_1\cup\ldots\cup p_{r-q}).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist S nicht leer. Angenommen, es gilt

$$I \subseteq p_1\cup \ldots \cup p_r.$$

Dann liegt S ganz in p_r. Für $s \in S$ gilt $s + x \in S$. Weil S ganz in p_r liegen damit s und s+x in p_r, d.h. auch x muß in p_r liegen, im Widerspruch zur Wahl von x.
QED.

Bemerkung
Enthält A einen unendlichen Körper, so ist die Annahme, daß p_3 ,..., p_r Primideale sind, überflüssig: denn alle Ideale von A sind dann Vektorräume, und I kann nicht Vereinigung der endliche vielen echten Unterräume $I \cap p_i$ sein.

Chinesischer Restesatz

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und $I_1, \dots, I_r \subseteq A$ Ideale mit

$$I_i + I_j = A \text{ für } i \neq j.$$

Dann gilt

$$I_1 \cap \dots \cap I_r = I_1 \cdot \dots \cdot I_r \tag{1}$$

Der natürliche Homomorphismus

$$A \longrightarrow A/I_1 \times \dots \times A/I_r \text{ , } a \mapsto (a \bmod I_1, \dots, a \bmod I_r), \tag{2}$$

ist surjektiv und hat das Ideal (1) als Kern.
Beweis: Für r = 1 ist die Aussage trivial. Wir können deshalb annehmen, es gilt

$$r > 1.$$

Sei m maximales Ideal mit

$$I_i \subseteq m.$$

Nach Voraussetzung liegt dann kein I_j mit $j \neq i$ ganz in m. Es gibt deshalb ein

$$y \in I'_i := \prod_{j \neq i} I_j \text{ ,}$$

welches nicht in m liegt, d.h.

$$I_i + I'_i$$

liegt nicht in m. Das ist richtig für jedes maximale Ideal. Das bedeutet, die obige Summe liegt in keinem maximalen Ideal, ist also gleich A. Damit kann mit $1 \in A$ in der Gestalt

$$1 = x_i + x'_i$$

schreiben, wobei der erste Summen im i-ten Ideal I_i liegt und der zweite in allen übrigen. Das Bild von x'_i bei der Abbildung (2) ist deshalb ein r-Tupel, dessen i-te Koordinate 1 und dessen übrige Koordinaten 0 sind. Folglich ist das Bild von

$$a_1 x'_1 + \dots + a_r x'_r$$

bei (2) ein r-Tupel, dessen i-te Koordinate gleich $a_i \bmod I_i$ ist (für i = 1, ..., r). Wir haben gezeigt, (2) ist surjektiv. Der Kern von (2) ist trivialerweise der Durchschnitt auf der linken Seite von (1).
Sei jetzt a aus diesem Durchschnitt. Wir schreiben

$$a = ax_i + ax'_i.$$

Der zweite Summand rechts liegt dann im Produkt auf der rechten Seite von (1). Für den ersten Summand gilt immerhin

$$ax_i \in (I_1 \cap \dots \cap I_r) \cdot I_i \subseteq (I_1 \cap \dots \cap I_{i-1} \cap I_{i+1} \cap \dots \cap I_r) \cdot I_i.$$

Nach Induktionvoraussetzung ist der erste Faktor rechts gleich dem Produkt der entsprechenden Ideale. Damit liegt aber auch der ersten Summand ax_i in der rechten Seite von (1). Wir haben gezeigt, die linke Seite von (1) liegt in der rechten. Die umgekehrte Inklusion besteht trivialerweise.
QED.

Das Radikal eines Ideals und das Nil-Radikal
Proposition
Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und $S \subseteq A$ ein multiplikative abgeschlossene Teilmenge[71], welche das 0-Element nicht enthält. Dann gibt es ein Primideal p von A mit

$$S \cap p = \emptyset.$$

Beweis.Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Ideale I von A mit $I \cap S = \emptyset$. Diese Menge ist nicht leer, denn sie enthält das Null-Ideal. Nach dem Zornschen Lemma enthält die Menge ein maximales Element p. Zeigen wir, p ist ein Primideal. Dazu fixieren wir Elemente

$$x \in A - p \text{ und } y \in A - p.$$

Dann sind die Ideale $p + xA$ und $p + yA$ echt größer als p. Auf Grund der Maximalität von p haben diese Ideale gemeinsame Elemente mit S, sagen wir

$$s \in S \text{ und } s = ax \bmod p \text{ für ein } a \in A$$

und

$$t \in S \text{ und } t = by \bmod p \text{ für ein } b \in A.$$

Es folgt

$$st = abxy \bmod p \text{ und } st \in S.$$

Weil S disjunkt ist zu p, folgt $xy \in A - p$. Wir haben gezeigt, p ist ein Primideal.
QED.
Folgerung
(i) Die Menge der nilpotenten Elemente von A,

$$\mathrm{nil}(A) = \{a \in A \mid a^n = 0 \text{ für eine natürliche Zahl } n\}$$

ist gleich dem Durchschnitt aller Primideale von A und heißt Nil-Radikal von A.
(ii) Das Radikal eines Ideals I von A,

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid a^n \in I \text{ für eine natürliche Zahl}\}$$

ist gleich dem Durchschnitt allser Primideale von A, die I enthalten.
Beweis.
Zu (i) Trivialerweise liegt nil(A) in jedem Primideal von A. Sei jetzt $s \in A - \mathrm{nil}(A)$. Dann bilden die Potenzen von s eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $S \subseteq A$, welche das Nullelement nicht enthält. Auf Grund der Proposition existiert ein Primideal p von A mit

$$S \cap p = \emptyset.$$

Das Element s liegt also nicht in p und damit nicht im Durchschnitt aller Primideale.
Zu (ii). Die Behauptung folgt aus (i), weil $\sqrt{I}$ gerade das vollständige Urbild des Nil-Radikals bei der natürlichen Abbildung

$$A \longrightarrow A/I$$

ist.
QED.

---
[71] d.h. mit $a, b \in S$ gilt auch $ab \in S$.

Das Jacobson-Radikal und das Lemma von Nakayama

Das Jacobson-Radikal

Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Der Durchschnitt aller maximalen Ideale von A wird mit

$$\mathrm{rad}(A)$$

bezeichnet und heißt Jacobson-Radikal.

Bemerkungen

(i) Jedes Element der Gestalt $1+x$ mit $x \in \mathrm{rad}(A)$ ist eine Einheit von A (weil es in keinem maximalen Ideal liegt).

(ii) Ist I ein Ideal mit der Eigenschaft, daß $1+x$ für jedes $x \in I$ eine Einheit ist, so gilt

$$I \subseteq \mathrm{rad}(A).$$

Beweis von (ii). Angenommen, die Aussage ist falsch. Dann gibt es ein maximales Ideal m von A und ein Element

$$x \in I - m.$$

Das Element x repräsentiert dann eine Einheit von A/m, d.h. es gibt ein $y \in A$ und $z \in m$ mit

$$1 = xy + z,\ y \in A,\ z \in m.$$

Wegen $-xy \in I$ und unserer Annahme über das Ideal I, ist dann

$$1 - xy = z$$

eine Einheit von A im Widerspruch zu $z \in m$.

QED.

Das Lemma von Nakayama

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein endlich erzeugter A-Modul und $I \subseteq A$ ein Ideal. Wir nehmen an, es gilt

$$IM = M.$$

Dann gilt

$$(1+x)\bullet M = 0 \text{ für ein } x \in I.$$

Im Fall $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$ gilt sogar

$$M = 0.$$

Beweis. Wir wählen endliche viele Erzeuger von M und schreiben

$$M = Am_1 + ... + Am_r .$$

Den Beweis führen wir durch Induktion nach r. Im Fall r = 0 ist nichts zu beweisen. Sei also r > 0. Wir setzen

$$M' := M/Am_r.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $x \in I$ mit

$$(1+x)\bullet M' = 0,$$

d.h. mit

$$(1+x)\bullet M \subseteq Am_r$$

(im Fall r = 1 können wir x = 0 setzen). Wegen M = IM erhalten wir

$$(1+x)M = I(1+x)M \subseteq Im_r$$

Es gibt also ein $y \in I$ mit $(1+x)m_r = ym_r$. Damit gilt

$$(1+x-y)(1+x)M \subseteq (1+x-y)Am_r = A\bullet 0 = 0.$$

Außerdem ist

$$(1+x-y)(1+x) \equiv 1 \bmod I.$$

Wir haben damit den ersten Teil der Behauptung bewiesen. Der zweite Teil folgt aus dem ersten, weil 1+x im Fall $x \in I \subseteq rad(A)$ eine Einheit ist.

QED.

Allgemeines Lemma von Nakayama

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul, N, N' $\subseteq$ M Teilmoduln und I $\subseteq$ A ein Ideal. Es gilt

$$M = N + IN'.$$

Wir nehmen außerdem an, daß eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(a) I ist nilpotent.

(b) $I \subseteq rad(A)$ und M ist endlich erzeugt.

Dann gilt

$$M = N.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$M/N = I\bullet(M/N).$$

Im Fall (a) erhalten wir

$$M/N = I^n\bullet(M/N) = 0 \text{ für hinreichend großes n},$$

also M = N.

Im Fall (b) ist (N'+N)/N endlich erzeugt und

$$I\bullet(N'+N)/N = (IN' + N)/N = M/N \supseteq (N'+N)/N$$

also

$$I\bullet(N'+N)/N = (N'+N)/N.$$

Nach dem Lemma von Nakayama gilt

$$(N'+N)/N = 0,$$

d.h. $IN' \subseteq N' \subseteq N$ und damit

$$M = N + IN' = N.$$

QED.

Filtrationen und Topologien

Definitionen

Seien A ein kommutiver Ring mit 1, I ein Ideal von A und M ein A-Modul. Eine Filtration von M ist eine absteigende Folge

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \qquad (1)$$

von Teilmoduln von M. Die Filtration heißt I-zulässig, wenn $IM_i \subseteq M_{i+1}$ für alle i gilt. Sie heißt I-adisch, wenn $IM_i = M_{i+1}$ für alle i gilt. Sie heißt im wesentlichen I-adisch, wenn sie I-zulässig ist und es ein i_0 gibt mit $IM_i = M_{i+1}$ für $i \ge i_0$.

Bemerkungen

(i) Jede Filtration (1) definiert eine Topologie auf M, für welche die Mengen

$$x + M_i$$

eine Umgebungsbasis des Punktes $x \in M$ bilden. Die durch die I-adische Filtration definierte Topologie heißt I-adische Topologie von M.

(ii) Eine im wesentlichen I-adische Filtration (1) definiert die I-adische Topolgie von M, denn es gilt

$$I^i M \subseteq M_i \subseteq I^{i-i_0} M.$$

Kriterium für im wesentlichen I-adische Topologien

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein A-Modul mit einer Filtration (1). Wir nehmen an, die folgenden Bedingungen sind erfüllt.

1. Die Filtration ist I-zulässig.
2. Die Filtrationsmoduln M_i sind endlich erzeugt über A.

Seien X eine Unbestimmte, A' der graduierte Teilring

$$A' := \sum_{i=0}^{\infty} I^n X^n$$

des Polynomrings A[X] und

$$M' := \sum_{i=0}^{\infty} M_n X^n$$

die direkte Summe der Filtrationsmoduln. Mit der offensichtlichen Multiplikation ist dann M' ein graduierter A-Modul. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(i) Die Filtration der M_i ist im wesentlichen I-adisch.

(ii) M' ist ein endlich erzeugter A'-Modul.

Beweis. A' ist ein graduierter Teilring von A[X] und M' ist eine Untergruppe von $M \otimes_A A[X]$ mit $A'M' \subseteq M'$. Deshalb ist M' ein graduierter A'-Modul.

<u>(ii) ⇒ (i)</u>. Sei

$$M' = A'\xi_1 + ... + A'\xi_r$$

mit homogenen Elementen ξ_j der Grade d_j. Für die homogenen Elemente des Grades n erhalten wir

$$M_n X^n = \sum_{i=1}^{r} I^{n-d_i} X^{n-d_i} \bullet \xi_i ,$$

wenn wir die negativen Potenzen von I als Null definieren. Für $n > \max(d_1,...,d_r)$ können wir rechts den Faktor IX ausklammern und erhalten

$$M_n X^n = IX \bullet M_{n-1} X^{n-1} ,$$

also

$$M_n = I \bullet M_{n-1},$$

Die Filtration ist somit im wesentlichen I-adisch.

<u>(i) ⇒ (ii)</u>. Sei $M_n = IM_{n-1}$ für $n > d$. Dann gilt

$$M_n X^n = (IX)^{n-1} M_d X^d \text{ für alle } n > d.$$

Also wird M' über A' durch den A-Modul $M_d X^d + ... + M_1 X + M_0$ erzeugt. Über A wird dieser Modul von endlich vielen Elementen erzeugt. Also ist M' endlich erzeugt über A'.

QED.

Lemma von Artin-Rees

Seien A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1, $I \subseteq A$ ein Ideal, M ein endlich erzeugter A-Modul und $N \subseteq M$ ein Teilmodul.
Dann gibt es eine natürliche Zahl r mit

$$I^nM \cap N = I^{n-r}(I^rM \cap N) \text{ für jedes } n > r.$$

Mit anderen Worten, die I-adische Filtration von M induziert auf N eine im wesentlichen I-adische Filtration.
Beweis. Trivialerweise gilt

$$I^nM \cap N \supseteq I^nN,$$

d.h. die Filtration der Teilmoduln $I^nM \cap N$ ist I-zulässig. Wir setzen

$$A' := \sum_{n=0}^{\infty} I^nX^n$$

und

$$N' := \sum_{n=0}^{\infty} (I^nM \cap N)X^n.$$

Dann ist N' ein graduierter A'-Modul und ein Teilmodul von

$$M' := \sum_{n=0}^{\infty} I^nMX^n = M\bullet A'$$

Als A'-Modul wird M' erzeugt von den Erzeugern von M über A. Es ist also ein endlich erzeugter A'-Modul. Weil A noethersch ist, wird I von endlich vielen Elementen erzeugt, sagen wir

$$I = A\alpha_1 + ... + A\alpha_r.$$

Dann gilt aber

$$A' = A[a_1X,...,a_rX],$$

d.h. A' ist als A-Algebra endlich erzeugt und damit ebenfalls noethersch. Folglich ist der Teilmodul N' von M' ebenfalls endlich erzeugt. Nach dem Kriterium für im wesentlichen I-adische Filtrationen bilden die Teilmoduln $I^nM \cap N$ eine im wesentlichen I-adische Filtration.
QED.

Durchschnittssatz von Krull

Seien A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter A-Modul. Wir setzen

$$N = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^nM.$$

Dann gilt $IN = N$.
Beweis. Nach dem Lemma von Artin-Rees gibt es eine natürliche Zahl r mit
$N = I^nM \cap N = I^{n-r}\bullet(I^rM \cap N) \subseteq IN \subseteq N$
für $n > r$.
QED.

Folgerung 1
Seien A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1,

$$I \subseteq \mathrm{rad}(A)$$

ein Ideal und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M = 0.$$

Mit anderen Worten, M ist separiert bezüglich der I-adischen Topologie.
Beweis. Dies folgt aus aud Durchschnittssatz von Krull und dem Lemma von Nakayama.
QED.

Folgerung 2

Seien A ein noetherscher Integritätsbereich und $I \subseteq A$ ein echtes Ideal. Dann gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0.$$

Beweis. Mit $N := \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$ gilt nach dem Krullschen Durchschnittssatz IN = N. Nach dem Lemma von Nakayama gibt ein Element $x \in I$ mit

$$(1+x)N = 0.$$

Weil I ein echtes Ideal ist, ist das Element 1+x von Null verschieden. Weil A ein Integritätsbereich ist, folgt

$$N = 0.$$

QED.

Zariski-Topologie

Definitionen

Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Die Menge aller Primideale von A heißt (affines) Spektrum von A und wird mit

$$\text{Spec } A$$

bezeichnet. Für jedes Teilmenge $M \subseteq A$ heißt

$$V(M) := \{p \in \text{Spec } A \mid M \subseteq p\}$$

die durch M in Spec A definierte algebraische Menge. Im Fall $M = \{m_1,...,m_n\}$ schreibt man auch

$$V(m_1,...,m_n) := V(\{m_1,...,m_n\}).$$

Die nachfolgend angegebenen Eigenschaften der algebraischen Mengen, zeigen, diese sind gerade die abgeschlossenen Mengen einer Topologie von Spec A. Diese Topologie heißt Zariski-Topologie von Spec A.

Eigenschaften algebraischer Mengen

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und

$$X := \text{Spec } A.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.
(i) $V(1) = \emptyset$.
(ii) $V(0) = \text{Spec } A$
(iii) $V(M\bullet A) = V(M)$ für jede Teilmenge $M \subseteq A$. Dabei bezeichne $M\bullet A$ das von M erzeugte Ideal von A.
(iv) $V(M') \subseteq V(M'')$ für Teilmengen M', M" von A mit $M' \supseteq M''$.
(v) $V(I')\cup V(I'') = V(I'.I'') = V(I'\cap I'')$ für Ideale I', I" von A.
(vi) $\bigcap_\alpha V(I_\alpha) = V(\sum_\alpha I_\alpha)$ für jede Familie von Idealen I_α von A.

(vii) $V(I) = V(\sqrt{I})$ für jedes Ideal I von A. Dabei bezeichne $\sqrt{I}$ das Radikal von I,

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid a^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

Man beachte, $\sqrt{I}$ ist wieder ein Ideal von A.

(viii) $I \subseteq \sqrt{J}$ für Ideale I, J von A mit $V(I) \supseteq V(J)$. Insbesondere gilt

$$V(I) = V(J) \Leftrightarrow \sqrt{I} = \sqrt{J}$$

für Ideale I, J von A.

(ix) $\sqrt{I} = \bigcap_{p\in V(I)} p$ für jedes Ideal I von A.

Beweis. Zu (i) und (ii). 1 liegt in keinem Primideal und 0 in jedem.
Zu (iii). Sind $m_1,...,m_n$ Elemente aus einem Primideal von A, so gilt dasselbe für jede Linearkombination der $m_1,...,m_n$ mit Koeffizienten aus A.

Zu (iv). Ist p ein Primideal mit $M' \subseteq p$, so gilt auch $M'' \subseteq p$.
Zu (v). Wegen

$$I'\cdot I'' \subseteq I'\cap I'' \subseteq I' \text{ und } I'\cdot I'' \subseteq I'\cap I'' \subseteq I''$$

gilt nach (iv)

$$V(I'\cdot I'') \supseteq V(I'\cap I'') \supseteq V(I') \text{ und } V(I'\cdot I'') \supseteq V(I'\cap I'') \supseteq V(I''),$$

also

$$V(I'\cdot I'') \supseteq V(I'\cap I'') \supseteq V(I')\cup V(I'').$$

Sei jetzt $p \in V(I'\cdot I'')$. Es reicht zu zeigen, $p \in V(I')\cup V(I'')$. Angenommen, $p \notin V(I')$. Dann gibt es ein $a \in I' - p$. Nach Voraussetzung gilt

$$p \supseteq I'\cdot I'' \supseteq a\cdot I''.$$

Weil p ein Primideal ist, welches das Element a nicht enthält, folgt $I'' \subseteq p$, also $p \in V(I'')$.
Zu (vi). Jedes Pimideal p von A gilt

$$\begin{aligned} p \in \bigcap V(I_\alpha) &\Leftrightarrow I_\alpha \subseteq p \text{ für jedes } \alpha \\ &\Leftrightarrow \sum_\alpha I_\alpha \subseteq p \text{ (weil p ein Ideal ist)} \\ &\Leftrightarrow p \in V(\sum_\alpha I_\alpha). \end{aligned}$$

Zu (vii). Mit $I \subseteq \sqrt{I}$ gilt $V(I) \supseteq V(\sqrt{I})$ (nach (iv)). Seien $p \in V(I)$ und $a \in \sqrt{I}$. Dann gibt es eine natürliche Zahl n mit $a^n \in I \subseteq p$. Weil p ein Primideal ist, folgt $a \in p$. Wir haben gezeigt, mit $p \in V(I)$ gilt $\sqrt{I} \subseteq p$, also $p \in V(\sqrt{I})$. Zusammen erhalten wir

$$V(I) = V(\sqrt{I}).$$

Zu (viii). Für $a \in I$ und $p \in V(J)$ gilt $p \in V(I)$, also $a \in I \in p$. Es gilt also

$$I \subseteq \bigcap_{p\in V(J)} p.$$

Es reicht also zu zeigen, daß (ix) gilt.
Zu (ix). Wir betrachten die natürliche Abbildung

$$\rho: A \longrightarrow \bar{A} := A/I,\ a \mapsto a + I.$$

Es reicht zu zeigen, in $\bar{A}$ gilt

$$\sqrt{0} = \bigcap \text{Spec } \bar{A},$$

denn durch Übergang zu den vollständigen Urbildern bei ρ ergibt sich daraus die Behauptung. Mit anderen Worten, wir können annehmen,

$$I = 0.$$

Für jedes $a \in \sqrt{0}$ gibt es ein n mit $a^n = 0$. Damit liegt a^n in jedem Primideal, also auch a. Es gilt also

$$\sqrt{0} \subseteq \bigcap \text{Spec } A,$$

Sei jetzt $a \in \bigcap$ Spec A, d.h. a liege in jedem Primideal von A. Dann besitzt A_a keine Primideale, ist also der Nullring, d.h. es gilt $\frac{1}{a} = \frac{0}{a}$ in A_a. Das bedeutet, a•1 - 0•a wird von einer Potenz von a annulliert, d.h. a ist nilpotent in A, d.h. $a \in \sqrt{0}$. Zusammen ergibt sich

$$\sqrt{0} = \bigcap \text{Spec } \bar{A},$$

d.h. es gilt die Behauptung.

QED.

Irreduzible algebraische Mengen

Ein topologischer Raum X heißt reduzibel, wenn es zwei echte abgeschlossene Teilmengen X', X" von X gilt mit

$$X = X' \cup X''.$$

Andernfalls heißt X irreduzibel.

Beispiel

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) V(I) ist irreduzibel (bezüglich der Zariski-Topologie).

(ii) $\sqrt{I}$ ist ein Primideal.

Beweis. <u>(ii) ⇒ (i)</u>. Sei V(I) = V(I') ∪ V(I") (= V(I'•I")). Dann gilt

$$I'\cdot I'' \subseteq \sqrt{I}.$$

Weil $\sqrt{I}$ prim ist, folgt, $I' \subseteq \sqrt{I}$ oder $I'' \subseteq \sqrt{I}$, also V(I') ⊇ V(I) oder V(I") ⊇ V(I). Da die umgekehrten Inklusionen trivialerweise bestehen, folgt

$$V(I) = V(I') \text{ oder } V(I) = V(I''),$$

d.h. V(I') und V(I") können nicht beides echte Teilmengen sein: V(I) ist irreduzibel.

<u>(i) ⇒ (ii)</u>. Angenommen, $\sqrt{I}$ ist nicht prim. Es gibt dann Elemente $f,g \in A$ mit

$$f\cdot g \in \sqrt{I} \text{ und } f \notin \sqrt{I} \text{ und } g \notin \sqrt{I}.$$

Wir setzen

$$I' := \sqrt{I} + fA \text{ und } I'' := \sqrt{I} + gA.$$

Dann sind V(I') und V(I") echte Teilmengen von V(I), denn zum Beispiel aus V(I) = V(I') würde folgen, $I' \subseteq \sqrt{I}$, also $f \in \sqrt{I}$ im Widerspruch zur Wahl von f. Es reicht zu zeigen,

$$V(I) = V(I') \cup V(I''),$$

denn dann ist V(I) reduzibel im Widerspruch zur Annahme. Die Inklusion “$\supseteq$” besteht nach Definition von I’ und I”. Sei $p \in V(I)$. Wegen $f\cdot g \subseteq \sqrt{I} \subseteq p$ gilt dann $f \in p$ oder $g \in p$, also $I' \subseteq p$ oder $I'' \subseteq p$, also $p \in V(I')$ oder $p \in V(I'')$, also

$$p \in V(I') \cup V(I'').$$

Zerlegung in irreduzible abgeschlossene Teilmengen im noetherschen Fall

Sei A ein noetherscher kommutativer Ring mit 1. Dann ist jede abgeschlossene Teilmengen X von Spec A Vereinigung von endlich vielen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen,

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_n \text{ mit } X_i \text{ irreduzibel.} \qquad (1)$$

Insbesondere ist die Anzahl der minimalen Primideale von A endlich.

Beweis. Angenommen, es gibt ein $X = X_1$, welches sich nicht in dieser Gestalt schreiben läßt. Dann muß X reduzibel sein, sagen wir

$$X = X' \cup X''$$

mit echten abgeschlossenen Teilmengen X’ und X” von X. Diese Teilmengen können nicht beide von der Gestalt (1) sein, denn dann wäre X von dieser Gestalt. Es gibt also eine echte abgeschlossene Teilmenge X_2 von X_1, die sich ebenfalls nicht in der Gestalt (1) schreiben läßt. Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine unendliche echt absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen

$$X_1 \supset X_2 \supset \dots$$

von Spec A. Wir gehen zu den Radikalen der die X_i definierenden Ideale über und erhalten eine unendliche echt aufsteigende Kette von Idealen

$$I_1 \subset I_2 \subset \dots$$

von A. Das ist aber unmöglich, weil A noethersch ist.

Wir haben damit insbesonder gezeigt, daß sich Spec A in der Gestalt

$$\text{Spec } A = V(p_1) \cup \dots \cup V(p_n) \qquad (2)$$

schreiben läßt mit endlich vielen Primidealen p_i. Jedes minimale Primideal p von A liegt in Spec A , also in einem der $V(p_1)$, ..., $V(p_n)$, sagen wir

$$p \in V(p_i).$$

Dann gilt $p_i \subseteq p$, also - weil p minimal ist - $p_i = p$. Jedes minimale p ist also gleich einem der p_i. Insbesondere ist die Anzahl der p endlich, da sie alle unter den p_i auf der rechten Seite von (2) vorkommen.

QED.

Bemerkungen

(i) Jedes Primideal eines kommativen Rings mit 1 enthält ein minimales Primideal: denn für jede durch Inklusion geordnete lineare Kette von Primidealen, ist der Durchschnitt ein Primideal. Nach dem Zornschen Lemma enthält deshalb die Menge der Primideale, die ganz in einem gegeben Primideal liegen, ein minimales Element.

(ii) Insbesondere kann man in (2) jedes p_i durch ein minimale Primideal ersetzen, d.h. (2) gilt mit

$$\{p_1, \dots, p_n\} = \text{Menge der minimalen Primideale von A.}$$

(iii) Nach dem <u>Satz von Noether</u> zur <u>Primärzerlegung</u> sich jedes Ideal I eines noetherschen Rings A als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen schreiben, sagen wir,

$$I = q_1 \cap ... \cap q_n \ . \tag{3}$$

Ein Ideal $q = q_i$ von A heißt <u>Primärideal</u>, wenn für je zwei Elemente $f,g \in A$ mit

$$f \bullet g \in q$$

und der Eigenschaft, daß keine Potenz von f in q liegt, stets gilt

$$g \in q.$$

Hört in (3) das Gleichheitszeichen auf zu gelten, sobald man eines der q_i wegläßt, so heißt (3) <u>unverkürzbare Primärzerlegung</u>, und die q_i heißen <u>Primärkomponenten</u> von I.

Ein Beispiel ist die Zerlegung einer natürlichen Zahl n in ein Produkt von paarweise teilerfremden Primzahlpotenzen, sagen wir,

$$n = p_1^{n_1} \bullet ... \bullet p_r^{n_r} \text{ , } p_i \text{ paarweise verschiedene Primzahlen.}$$

Mit $A = \mathbb{Z}$, $I = nA$ und $q_i = p_i^{n_i}A$ gilt dann (3), und die q_i sind Primärideale im Ring der ganzen Zahlen.

(iv) Aus (3) ergibt sich

$$V(I) = V(q_1) \cup ... \cup V(q_n) = V(p_1) \cup ... \cup V(p_n) \tag{4}$$

mit

$$p_i := \sqrt{q_i}.$$

Aus der Definition des Primärideals folgt, daß die p_i Primideale sind, d.h. (4) ist die Zerlegung von V(I) in irreduzible Komponenten, Man kann deshalb (3) als eine arithmetische Verfeinerung der Zerlegung in irreduzible Komponenten ansehen.

(v) Der Satz von Noether macht außerdem eine Eindeutigkeitsaussage: für jedes i, für welches p_i ein minimales Primoberideal von I ist, ist q_i durch I eindeutig bestimmt. Genauer, es ist

$$q_i = IA_{p_i} \cap A.$$

Die übrigen q_i sind im allgemeinen nicht eindeutig festgelegt. Sie heißen <u>eingebettete (Primär-)Komponenten</u> von I.
Auf diese Weise ist für jede irreduzible Komponente $V(q_i)$ von V(I) in natürlicher Weise eine Schema-Struktur Spec A/q_i definiert (falls p_i minimale Primoberideal von I ist). Sie Zerlegung (4) von V(I) in irreduzible Komponenten verfeinert sich zu einer Zerlegung des Schemas Spec A/I in abgeschlossene Teilschemata

$$\text{Spec } A/q_i.$$

Trager und Annullatoren

Definitionen

Seien A ein Ring und M ein A-Modul. Dann heißt die Menge

$$\text{Supp}(M) = \text{Supp}_A(M) := \{p \in \text{Spec } A \mid M_p \neq 0 \}$$

Träger von M über A.
Dabei bezeichne

$$M_p \cong M \otimes_A A_p = \{\frac{m}{s} \mid m \in M, s \in A\text{-}p\}$$

den Quotientenmodul von M bezüglich des Primideal p.
Der Annullator von M in A ist definiert als das folgende Ideal von A.

$$\mathrm{Ann}(M) = \mathrm{Ann}_A(M) := \{ a \in A \mid aM = 0 \}.$$

Beispiel

Seien A ein Ring und $I \subseteq A$ ein Ideal von A. Dann gilt

$$I = \mathrm{Ann}_A(A/I).$$

$$V(I) = \mathrm{Supp}_A(A/I).$$

Man beachte, für jedes Primideal p von A gilt

$$(A/I)_p \cong A_p/IA_p.$$

Eigenschaften

Satz 1

Seien A ein Ring und M ein A-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $M \neq 0$.

(ii) $\mathrm{Supp}_A(M) \neq \emptyset$.

(iii) $\mathrm{Ann}_A(M) \neq A$.

Beweis. Die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iii) und die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) bestehen trivialerweise. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ergibt sich aus Corollar 2 von Theorem 1 in Kapitel II, §3.3 von N. Bourbaki, Algèbre commutative. Dort wird gezeigt, daß die natürliche Abbildung

$$M \longrightarrow \prod_{p \in \mathrm{Specm}\, A} M_p$$

injektiv ist. Ist M vom Nullmodul verschieden, so gibt es also mindestens ein maximales Ideal p von A mit $M_p \neq 0$.

QED.

Satz 2

Seien A ein Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt

$$\mathrm{Supp}_A(M) = V(\mathrm{Ann}_A(M)).$$

Beweis. siehe Bourbaki, Algèbre commutative, Kapitel II, §4.4 Propositin 17.
QED.

Satz 3

Seien A ein Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und $h: A \longrightarrow B$ ein Ring-Homomorphismus. Weiter bezeichne

$$h^{\#}: \mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A,\ p \mapsto h^{-1}(p),$$

die induzierte Abbildung auf den Spektren.

Dann gilt

$$\mathrm{Supp}_B(M \otimes_A B) = (h^{\#})^{-1}(\mathrm{Supp}_A(M)).$$

Beweis. siehe Bourbaki, Algèbre commutative, Kapitel II, §4.4, Proposition 19.
QED.

Folgerung

Seien A ein Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und $h: A \longrightarrow B$ ein Ring-Homomorphismus. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $M\otimes_A B = 0$.

(ii) $\mathrm{Ann}_A(M)B = B$.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Sei $M\otimes B = 0$. Nach Satz 1 gilt dann $\mathrm{Supp}(M\otimes B) = \varnothing$, also

$$\begin{aligned}\varnothing &= \mathrm{Supp}_A(M) \quad \text{(nach Satz 3)}\\ &= V(\mathrm{Ann}_A(M)).\end{aligned}$$

Da jedes echte Ideal ganz in einem maximalen Ideal lieft, kann Ann(M) kein echtes Ideal sind. Es folgt Ann(M) = A. Dann gilt aber auch (ii).

(ii) ⇒ (i). Nach Voraussetzung (ii) liegt das 1-Element in Ann(M)B, d.h. es gilt

$$1 = a_1b_1 + ... + a_rb_r \text{ mit } a_i\in\mathrm{Ann}(M) \text{ und } b_i\in B \text{ für alle i.}$$

Für $m \in M$ und $b \in B$ erhalten wir dann in $M\otimes B$:

$$\begin{aligned} m\otimes b &= m\otimes(\sum_{i=1}^{r} a_ib_i)b\\ &= \sum_{i=1}^{r} m\otimes a_ib_ib\\ &= \sum_{i=1}^{r} ma_i\otimes b_ib \quad \text{(weil das Tensorprodukt über A genommen wurde)}\\ &= \sum_{i=1}^{r} 0\otimes b_ib \quad \text{(weil } a_i \text{ im Annullator von M liegt)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Da die Elemente der Gestalt $m\otimes b$ den Modul $M\otimes B$ erzeugen, folgt $M\otimes B = 0$.
QED.

Assoziierte Primideale

Definition

Seien A eine noetherscher Ring und M ein A-Modul. Ein Primideal $p \in \mathrm{Spec}\, A$ ist ein zu M assoziiertes Primideal, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind.[72]

---

[72] Ist m ein Element wie in der ersten Bedingung, so hat die Abbildung

$A \longrightarrow M, a \mapsto am,$

den Kern Ann(m) = p, d.h. das Bild ist ein zu A/p isomorpher Teilmodul. Ist umgekehrt $N \subseteq M$ ein zu A/p isomorpher Teilmodul und

$$f: A/p \longrightarrow N$$

ein Isomorphismus, so hat das Bild $m \in M$ des 1-Elements von A/p bei f den Annullator p.

(i) Es gibt ein $m \in M$ mit $\mathrm{Ann}(m) = p$.
(ii) M enthält einen zu A/p isomorphen Teilmodul.
Die Menge der zu M assoziierten Primideale von A mit mit

$$\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}_A(M)$$

bezeichnet.

Maximale Annullatoren von Modul-Elementen
Seien A ein noetherscher Ring und M ein A-Modul. Dann liegt jedes Ideal der Menge

$$\{\mathrm{Ann}(m) \mid m \in M - \{0\}\} \qquad (1)$$

in einem maximalen Element dieser Menge. Jedes dieser maximalen Elemente liegt in

$$\mathrm{Ass}(M)$$

Beweis. Die Aussage, daß jedes Ass(m) in einem Ass(m) liegt, das maximal in (1) ist, gilt weil A noethersch ist.
Sei jetzt

$$p := \mathrm{Ass}(m)$$

maximal in der Menge (1). Wir haben zu zeigen, daß p ein Primideal ist. Seien $a,b \in A$ zwei Elemente mit

$$ab \in p \text{ und } b \notin p.$$

Dann gilt

$$bm \neq 0 \text{ und } abm = 0.$$

Damit ist Ann(bm) ein Element von (1), und trivialerweise gilt

$$\mathrm{Ann}(bm) \supseteq \mathrm{Ann}(m).$$

Weil der rechte Annullator maximal in (1) sein soll, folgt

$$a \in \mathrm{Ann}(bm) = \mathrm{Ann}(m) = p.$$

Wir haben gezeigt, p ist ein Primideal.
QED.

Moduln ohne assoziierte Primideale
Seien A ein noetherscher Ring und M ein A-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) $\mathrm{Ass}(M) = \emptyset$.
(ii) $M = 0$.

Beweis. <u>(i) ⇒ (ii)</u>. Angenommen $M \neq 0$. Dann gibt ein Element $m \in M - \{0\}$, und Ass(m) ist ein Element der Menge (1), liegt also in einem maximalen Element dieser Menge. Dieses ein assoziiertes Primideal von M. Dies steht im Widerspruch zur Annahme (i).

<u>(ii) ⇒ (i)</u>. Angenommen Ass(M) ist nicht leer. Sei p ein solches Element. Dann gibt es ein Element $m \in M$ mit

$$\mathrm{Ann}(m) = p \neq A.$$

Das Element $m \in M$ kann nicht Null sein. Dies steht im Widerspruch zur Annahme $M = 0$.
QED.

Assoziierte Primideale und Nullteiler
Seien A ein noetherscher Ring und M ein A-Modul. Dann ist

$$\bigcup \mathrm{Ass}(M) \qquad (1)$$

gerade die Menge der Nullteiler für M (d.h. die Menge der Elemente von A, die ein Element von M - {0} annullieren.

Beweis. Sei $a \in A$ ein Element von (1). Dann liegt a in einem Primideal der Gestalt

$$p = \mathrm{Ann}(m) \text{ mit } m \in M - \{0\}.$$

Insbesondere gilt am = 0, d.h. a annulliert ein von 0 verschiedenes Element von M.

Sei umgekehrt $a \in A$ ein Element, welches ein $m \in M - \{0\}$ anulliert, d.h.

$$a \in \mathrm{Ann}(m).$$

Nun liegt Ann(m) in einem maximalen Annullator eines Element von M. Ein solcher Annullator p ist ein assoziiertes Primideal von M.

$$a \in \mathrm{Ann}(m) \subseteq p \in \mathrm{Ass}(M).$$

Damit liegt a in der Menge (1).
QED.

Assoziierte Primideale und Quotienten

Seien A ein noetherscher Ring, M ein A-Modul und $S \subseteq A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Dann gilt

$$\mathrm{Ass}_A(S^{-1}M) = f(\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)) = \mathrm{Ass}_A(M) \cap \{p \in \mathrm{Spec}\, A \mid p \cap S = \varnothing\} \quad (1)$$

Dabei sei f: Spec $S^{-1}A \longrightarrow A$ induziert durch die natürliche Abbildung $A \longrightarrow S^{-1}A$.

Beweis. Sei p aus der linken Menge von (1). Dann gibt es Elemente $m \in M$ und $s\in S$ mit

$$\begin{aligned} p &= \{a \in A \mid a\bullet\frac{m}{s} = 0\} \\ &= \{a \in A \mid \frac{as}{s} \bullet \frac{m}{s} = 0\} \\ &= f(q) \end{aligned}$$

mit

$$q = \{b \in S^{-1}A \mid b\bullet\frac{m}{s}\} = \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(\frac{m}{s}). \quad (2)$$

Ein Element von q ist ein Element der Gestalt $\frac{c}{s'}$ mit $c\in A$, $s'\in S$ und $\frac{c}{s'}\bullet\frac{m}{s} = 0$. Letzteres bedeutet, daß $cm \in A$ von einem Element $s'' \in S$ annulliert wird. Weil s" in $S^{-1}A$ eine Einheit ist, folgt $\frac{cs}{s} \in p$. Damit ist

$$q = p\bullet S^{-1}A$$

Insbesondere ist q in Primideal, d.h. p = f(q) liegt in der mittleren Menge von (1). Wir haben gezeigt, die linke Menge von (1) liegt in der mittleren.
Sei jetzt p ein Element der mittleren Menge. Dann gilt

$$p = f(q)$$

mit einem Primideal q von $S^{-1}A$ der Gestalt (2). Läge p nicht in der rechten Menge von (1), so gäbe es ein $s \in S$ mit $s \in p$. Dann würde aber $\frac{ss}{s} \in q$ gelten. Weil $\frac{ss}{s}$ eine Einheit in $S^{-1}A$ ist, wäre dann $q = S^{-1}A$. Dieser Widerspruch zeigt, daß die mittlere Menge von (1) in der rechten liegt.

Sei jetzt p eine Element der linken Menge von (1). Dann gibt es ein $m \in M$ mit

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{Ann}(m) \\ &= \{a \in A \mid am = 0\} \\ &= \{a \in A \mid a\bullet\frac{m}{s} = 0 \text{ in } S^{-1}M\} \end{aligned}$$

Man beachte, aus $a\bullet\frac{m}{s} = 0$ in $S^{-1}M$ folgt $s'am = 0$ in M für ein Element $s'\in S$, also

$$s'a \in \mathrm{Ann}(m) = p.$$

Wegen $s' \in S$ und $p \cap S = \emptyset$ folgt $s' \notin p$, also $a \in p$. Damit ist gezeigt, die rechte Menge von (1) liegt in der linken.
QED.

Assozierte Primideale und der Träger eines Moduls
Seien A ein noetherscher Ring und M ein A-Modul. Dann gilt:

(i) $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$.

(ii) Die minimalen Elemente von Supp(M) liegen in Ass(M).

Insbesondere haben Ass(M) und Supp(M) dieselben minimalen Elemente.

Beweis. Zu (i). Sei $p \in \mathrm{Ass}(M)$. Dann existiert eine exakte Sequenz von A-Moduln

$$0 \longrightarrow A/p \longrightarrow M.$$

Weil A_p flach ist über A, erhalten wir durch Anwenden des Funktors $\otimes_A A_p$ eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A_p/pA_p \longrightarrow M_p ,$$

d.h. es gilt $p \in \mathrm{Supp}(M)$.

Zu (ii). Sei p ein minimales Element von Supp(M). Auf Grund der Identitäten, welche das Verhalten von Ass(M) beim Übergang zu Quotientenringen $S^{-1}A$ beschreiben (mit $S = A\text{-}p$) gilt

$$f(\mathrm{Ass}_{A_p}(M_p)) = \mathrm{Ass}_A(M) \cap \{q \in \mathrm{Spec}\, A \mid q \subseteq p\},$$

wenn f die Abbildung

$$f\colon \mathrm{Spes}\, A_p \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A,\ x \mapsto x\cap A,$$

bezeichnet, welche durch die natürliche Abbildung $A \longrightarrow A_p$ induziert wird. Die Abbildung

$$\{q \in \mathrm{Spec}\, A \mid q \subseteq p\} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A_p,\ y \mapsto yA_p,$$

ist ein Schnitt von f. Wir sehen so, daß die folgende Äquivalenz besteht.

$$p \in \mathrm{Ass}(M) \Leftrightarrow pA_p \in \mathrm{Ass}_{A_p}(M_p).$$

Es reicht also, zu zeigen, es gilt

$$pA_p \in \mathrm{Ass}_{A_p}(M_p).$$

Wegen $pA_p \in \mathrm{Supp}_{A_p}(M_p) = f^{-1}(\mathrm{Supp}_A(M))$ ist pA_p ein minimales Element des Trägers von M_p über A_p.[i] Es reicht also, die Behauptung für A_p und M_p anstelle von A und M zu beweisen, d.h. wir können annehmen p ist nicht nur minimal, sondern auch maximal in Supp(M), d.h.

$$\mathrm{Supp}(M) = \{p\}.$$

Wegen $M \neq \emptyset$ ist Ass(M) nicht leer, und nach (i) liegt Ass(M) ganz in Supp(M). Damit gilt

$$\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Supp}(M) = \{p\}.$$

Insbesondere liegt p in Ass(M), wie behauptet.

QED.

Die minimalen Primideale von Ass(A/I) und V(I)

Seien A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1 und $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann sind die Mengen der minimalen Elemente von

$$\mathrm{Ass}(A/I) \text{ und } V(I)\ (= \mathrm{Supp}(A/I))$$

dieselben, d.h. die minimalen Elemente von Ass(A/I) sind gerade die minimalen Primoberideale von I.

Beweis. Für jedes Primoberideal p von I hat man eine Surjektion

$$A/I \twoheadrightarrow A/p$$

Durch Lokalisieren nach p sieht man, es gilt $p \in \mathrm{Supp}(A/I)$. Ist $p \in \mathrm{Spec}(A)$ kein Primoberideal von I, so enthält IA_p eine Einheit, ist also gleich A_p, d.h.

$(A/I)_p = A_p/IA_p$

ist der Nullmodul. Wir haben gezeigt

$$\mathrm{Supp}(A/I) = V(I)$$

Die Behauptung folgt damit aus der vorhergehenden Aussage.

QED.

Teilmodulketten mit Faktoren der Gestalt A/p

Sei A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1 und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gibt es endliche aufsteigende Kette von Teilmoduln, sagen wir

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M$$

sodaß für i = 1,...,r gilt

$$M_i/M_{i-1} \cong A/p_i \text{ mit } p_i \in \mathrm{Spec}(A) \qquad (1)$$

Beweis. Weil A noethersch ist und M endlich erzeugt ist über A, ist M ein noetherscher Modul.

Wegen $M \neq 0$ ist Ass(M) nicht leer, d.h. es gibt ein $p_1 \in \mathrm{Ass}(M)$ und damit einen Teilmodul $M_1 \subseteq M$ mit $M \cong A/p_1$. Falls M_1 ein echter Teilmodul von M ist, wiederholen wir diese Argumentation mit M/M_1 anstelle von M. Wir erhalten so eine echt aufsteigende Folge von Teilmoduln M_i von M, für welche (1) gilt.

Weil M noethersch ist, muß diese Folge endlich sein, d.h. das Verfahren muß abbrechen. Das bedeutet aber, es gibt einen Index r mit $M_r = M$.

QED.

Verhalten von Ass(M) bei exakten Sequenzen

Seien A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1 und

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

von A-Moduln. Dann gilt

$$\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'').$$

Beweis. Sei $p \in \mathrm{Ass}(M)$. Wir wählen einen Teilmodul

$$N \subseteq M \text{ mit } N \cong A/p.$$

Jedes von Null verschiedene Element $n \in N - \{0\}$ hat dann den Annullator p,

$$\mathrm{Ann}(n) = p.\text{[ii]}$$

Falls $N \cap M' \neq 0$ ist, gibt es ein solches Element n in diesem Durchschnitt, d.h. es gilt

$$p \in \mathrm{Ass}(M').$$

Falls $N \cap M' = 0$ ist, wird N bei der Abbildung $M \longrightarrow M''$ isomorph auf einen Teilmodul von M'' abgebildet, d.h. M'' enthält einen zu N isomorphen Teilmodul. Es gilt also

$$p \in \mathrm{Ass}(M'').$$

QED.

Die Endlichkeit der Menge Ass(M)

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann ist die Menge Ass(M) endlich.

Beweis. Auf Grund der Voraussetzungen gibt es eine echt aufsteigende Folge

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M$$

sodaß für i = 1,...,r gilt

$$M_i/M_{i-1} = A/p_i \text{ mit } p_i \in \mathrm{Spec}(A).$$

Im Fall r = 0 gilt M = 0 und Ass(M) ist leer, also endlich. Im Fall r = 1 gilt

$$\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(A/p_1) = \{p_r\}.$$

Also ist auch in diesem Fall Ass(M) endlich. Sei jetzt r > 1. Dann gilt

$$\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(M_1) \cup \mathrm{Ass}(M/M_1).$$

Die Menge $\mathrm{Ass}(M_1)$ besteht, wie eben gesehen, aus einem Element, ist also endlich. Die Menge $\mathrm{Ass}(M/M_1)$ besteht nach Induktionsvoraussetzung bezüglich r aus nur endlich vielen Elementen. Also ist auch Ass(M) endlich.

QED.

Projektive Moduln

Definitionen

Seien A ein Ring. Ein A-Modul heißt projektiv, falls er ein direkter Summand eines freien Moduls ist.

Satz 1

Seien A ein lokaler Ring[73] und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) M ist projektiv.
(ii) M ist flach[74].
(iii) M ist frei.

Beweis. siehe Bourbaki, Algèbre commutative, Kapitel II, §3.2, Corollar 2 zu Proposition 5.

QED.

Satz 2

Seien $h: A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und M ein projektiver A-Modul. Dann ist $M \otimes_A B$ ein projektiver B-Modul.

---

[73] d.h. A besitze genau ein maximales Ideal.

[74] d.h. der Funktor $\otimes_A M$ überführt exakte Sequenzen von A-Moduln in exakte Sequenzen.

Beweis. Das Tensorprodukt einer direkten Summe ist isomorph zur direkten Summe der Tensorprodukte der Summanden.
QED.

Folgerung

Seien A ein Ring und f: $M \longrightarrow N$ eine A-lineare Abbildung von endlich erzeugten projektiven A-Moduln desselben Rangs. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) f ist bijektiv.
(ii) f ist surjektiv.

Beweis. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial. Es reicht (ii) $\Rightarrow$ (i) zu beweise.
1. Fall. M und N sind freie A-Moduln.
Bezeichne r den gemeinsame Rang der beiden Moduln. Wir können annehmen,

$$M = N = A^r.$$

Weil f surjektiv ist, gilt dasselbe für die durch f auf der höchsten äußeren Potenz induzierte Abbildung

$$\wedge^r f: \wedge^r M \longrightarrow \wedge^r N,\ m_1\wedge...\wedge m_r \mapsto f(m_1)\wedge...\wedge f(m_r).$$

Identifiziert man $\wedge^r M$ und $\wedge^r N$ mit A, so wird diese Abbildung gerade die Multiplikation mit der Determinante von f. Es gibt deshalb ein $a \in A$ mit

$$a\cdot\det(f) = 1.$$

Insbesondere ist det(f) eine Einheit von A. Dann ist aber f umkehrbar, also bijektiv.
2. Fall. M und N beliebig.
Nach Voraussetzung ist f surjektiv. Es gibt also eine exakte Sequenz von A-linearen Abbildungen

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

(wobei K den Kern von f bezeichne). Wir haben zu zeigen K = 0. Dazu reicht es zu zeigen,

$$\mathrm{Supp}(K) = \emptyset,$$

d.h. es reicht zu zeigen,

$$K_p = 0 \text{ für jedes } p \in \mathrm{Spec}\, A.$$

Zum Beweis der letzteren Ausage tensorieren wir die kurze exakte Sequenz mit A_p über A und erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K_p \longrightarrow M_p \xrightarrow{f_p} N_p \longrightarrow 0$$

Weil M und N projektiv und endlich erzeugt und vom selben Rang sind über A, gilt dasselbe für M_p und N_p über A_p. Weil A_p ein lokaler Ring ist, sind M_p und N_p sogar freie Moduln. Nach dem ersten Fall folgt aus der Surjektivität von f_p sogar die Bijektivität. Dann ist aber

$$K_p = 0.$$

QED.

Diskrete Bewertungsringe

1. Definition

Ein diskreter Bewertungsring ist ein Integritätsbereich A mit genau einem maximalen Ideal $m \neq 0$, das von einem Element erzeugt wird, $m = pA$.

Beispiel

Seien $a \in U$ ein Punkt der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ und A der Ring der in einer Umgebung von a konvergenten Potenzreihen. Wir betrachten die Menge

$$m := (z-a)A$$

der konvergenten Potenzreihen mit dem Absolutglied 0. Diese bilden ein Ideal von A. Jede konvergente Potenzreihe, welche nicht in m liegt, also ein von 0 verschiedenes Absolutglied hat, ist eine Einheit in A. Deshalb ist m das einzige maximale Ideal von A. Es wird vom Element z-a erzeugt.

2. Die Ideale eines diskreten Bewertungsrings

Jedes Ideal eines diskreten Bewerungsrings A ist ein Hauptideal. Insbesondere sind diskrete Bewertungsring noethersch.
Genauer:

(i) Die einzigen Ideale von A sind 0, A und die Potenzen von $m = \pi A$.

(ii) Jedes Element von $A - \{0\}$ hat die Gestalt $a\pi^n$ mit einer Einheit a von A.

Beweis. Sei

$$m = \pi A$$

das maximale Ideal von A.
1. Schritt: Krullscher Durchschnittssatz.
Wir setzen

$$I := \bigcap_{n=0}^{\infty} m^n.$$

Für $x \in I - \{a\}$ und jede natürliche Zahl n gilt dann $x \in m^n$ also,

$$x = y_n \pi^n \text{ mit } y_n \in A-\{0\}.$$

Wegen

$$(y_{n+1}\pi - y_n)\pi^n = x - x = 0$$

folgt, weil A ein Integritätsbereich ist,

$$y_n = y_{n+1}\pi = y_{n+2}\pi^2 = \ldots$$

also $y_n \in I$, also auch $x = y_n\pi^n \in mI$. Wir haben gezeigt, $I = mI$. Nach dem Lemma von Nakayama folgt $I = 0$ (wegen $I \subseteq m = \mathrm{rad}(A)$).
2. Schritt. Jedes Ideal ist Hauptideal.
Sei I ein echtes Ideal von A. Im Fall $I = 0$ ist nichts zu beweisen. Sei also $I \neq 0$. Nach dem 1. Schritt gibt es ein n mit

$$I \subseteq m^n \text{ und } I \not\subseteq m^{n+1}.$$

Sei $x \in I - m^{n+1}$. Wegen $I \subseteq m^n$ gilt

$$x = y\pi^n \text{ mit } y \in A.$$

Wegen $x \in I - m^{n+1}$ kann y nicht m liegen, d.h. y ist eine Einheit. Es folgt

$$I \supseteq xA = y\pi^n A = \pi^n A = m^n \supseteq I,$$

also

$$I = m^n = \pi^n A.$$

Man beachte, für jedes von Null verschiedene Element x gibt es eine nicht-negative ganze Zahl n mit $x \in m^n - m^{n+1}$. Die obige Rechung mit $I = m^n$ zeigt, x hat die Gestalt

$$x = y\pi^n$$

mit einer Einheit y von A.
QED.

3. Diskrete Bewertungen

Sei K ein Körper. Eine <u>diskrete Bewertung</u>[75] auf k ist eine surjektive Abbildung

$$v: k - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

mit

1. $v(ab) = v(a) + v(b)$ für $a, b \in k - \{0\}$.
2. $v(a + b) \geq \min \{v(a), v(b)\}$

Wir setzen dann v auf k fort, indem wir setzen

$$v(0) = \infty.$$

Beispiel 1

Sei p ein Primzahl. Für jede rationale Zahl $c \in \mathbb{Q} - \{0\}$ setzen wir

$$v_p(c) = r$$

falls p in der Primfaktorzerlegung von c mit dem Exponenten $r \in \mathbb{Z}$ vorkommt.
Auf diese Weise ist eine diskrete Bewertung von $\mathbb{Q}$ definiert.

Beispiel 2

Seien k ein Körper und $K = k(X)$ der rationale Funktionenkörper in einer Unbestimmten. Weiter sei $p \in k[X]$ ein irreduzibles Polynom. Wir setzen

$$v_p(c) = r$$

falls p in der Primfaktorzerlegung von c mit dem Exponenten $r \in \mathbb{Z}$ vorkommt.
Auf diese Weise ist eine diskrete Bewertung von K definiert.

Beispiel 3

Seien k ein Körper und $K = k(X)$ der rationale Funktionenkörper in einer Unbestimmten. Jedes Element von $K - \{0\}$ hat die Gestalt

$c = a/b$ mit Polynome $a, b \in k[X]$.

Wir setzen

$$v_\infty(c) := - \deg(c) := \deg(b) - \deg(a).$$

Auf diese Weise ist eine diskrete Bewertung von K definiert.

Bemerkung

Die Konstruktion von Beispiel 2 mit $\frac{1}{X}$ anstelle von p liefert gerade die Konstruktion von Beispiel 3.

4. Der diskrete Bewertungsring zu einer diskreten Bewertung

5. Die diskrete Bewertung zu einem diskreten Bewertungsring

Endliche Erweiterungen

Normatisierungssatz (von E. Noether)

Seien k ein Körper und $A = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann gibt es Elemente $y_1, \dots, y_r \in A$, welche algebraisch unabhängig über k sind mit der Eigenschaft, daß A ganz ist über $k[y_1, \dots, y_r]$.

[75] von Rang 1

Beweis. Siehe H. Matsumura: Commutative Algebra, Benjamin, New York 1970, (14.G) Corollary 1.
QED.

Hilbert-Funktionen (frei nach Atiyah-MacDonald)

Moduln endlicher Länge

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Ein A-Modul endlicher Länge ℓ ist ein A-Modul M mit der Eigenschaft, daß es eine echt aufsteigende Kette

$$M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_\ell$$

von A-Teilmoduln der Länge ℓ in M gibt und keine solche Kette größerer Länge. Man schreibt dann

$$\mathrm{length}_A(M) = \ell.$$

Falls es keine solche Zahl ℓ gibt, so setzt man

$$\mathrm{length}_A(M) = \infty.$$

Eigenschaften der Längen-Funktion

Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Die Längen-Funktion ist additiv, d.h. für jede exakte Sequenz von A-Moduln

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

gilt

$$\mathrm{length}_A(M) = \mathrm{length}_A(M') + \mathrm{length}_A(M'').$$

(ii) Folgende Bedingungen sind äquivalent.
  (a) $\mathrm{length}_A(A) < \infty$.
  (b) A ist artinsch.
  (c) A ist noethersch und dim A = 0.
  Das Jacobson-Radikal rad(A) von A ist dann nilpotent.

(iii) Sei M ein A-Modul endlicher Länge. Dann besitzt das Ideal

$$\mathrm{Ann}_A(M) := \{a \in A \mid aM = 0\}$$

eine endliche Primärzerlegung, sagen wir

$$\mathrm{Ann}_A(M) = q_1 \cap \ldots \cap q_r ,$$

deren zugehörige Primideale $m_i = \sqrt{q_i}$ maximale Ideale von A sind. Außerdem gilt

$$\mathrm{length}_A(M) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{length}_{A_{m_i}}(M_{m_i})$$

Beweis. Zu (i). Jede Kette in M' liefert durch Anwenden von f eine solche in M. Deshalb gilt

$$\mathrm{length}_A M' \le \mathrm{length}_A M.$$

Für jede Kette in M" erhält man durch Übergang zu den vollständigen Urbildern bei g eine Kette in M. Deshalb gilt

$$\mathrm{length}_A M'' \le \mathrm{length}_A M.$$

Aus den letzten beiden Abschätzungen ergibt sich die Behauptung im Fall, daß die Länge von M' oder M" unendlich ist. Wir können deshalb annehmen,

$$\mathrm{length}_A M' < \infty \text{ und } \mathrm{length}_A M'' < \infty.$$

Seien Ketten

$$M'_0 \subset M'_1 \subset \ldots \subset M'_{\ell'}$$

und

$$M''_0 \subset M''_1 \subset \ldots \subset M''_{\ell''}$$

in M' bzw. M'' gegeben mit

$$\ell' = \text{length}_A M' \text{ und } \ell'' = \text{length}_A M''.$$

Wir wenden auf die Moduln der ersten Kette die Abbildung f an und ersetzen die Moduln der zweiten durch die vollständigen Urbilder bei g. Die entstehenden Ketten in M lassen sich zu einer Kette zusammensetzen, deren Länge mindestens $\ell'+\ell''$ ist (man beachte, es kann $f(M'_{\ell'}) = g^{-1}(M''_0)$ sein). Damit gilt

$$\text{length}_A(M') + \text{length}_A(M'') = \ell'+\ell'' \le \text{length}_A(M).$$

Sei jetzt eine Kette

$$M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_\ell \tag{1}$$

in M gegeben. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

$$\ell \le \ell'+\ell''.$$

Wir können annehmen,

$$M_0 = 0 \text{ und } M_\ell = M,$$

denn andernfalls können wir die Kette verlängern, indem wir links den 0-Modul bzw. rechts den Modul M hinzufügen. Wir betrachten die nicht notwendig echt aufsteigenden Ketten

$$f^{-1}(M_0) \subseteq f^{-1}(M_1) \subseteq \ldots \subseteq f^{-1}(M_\ell) \text{ in } M' \tag{2}$$

und

$$g(M_0) \subseteq g(M_1) \subseteq \ldots \subseteq g(M_\ell) \text{ in } M'' \tag{3}$$

Wir können hier den Modul M' mit dessen Bild in M identifizieren und f mit der natürlichen Einbettung von M' in M. Angenommen, es gibt einen Index i mit

$$g(M_i) = g(M_{i+1}).$$

Jedes Element von M_{i+1} läßt sich dann modulo Ker(g) = M' so abändern, daß man ein Element von M_i erhält, d.h. $M_{i+1} \subseteq M_i + M'$, also

$$M_{i+1} = (M_i + M')\cap M_{i+1} = M_i + M'\cap M_{i+1} \tag{4}$$

Dann müssen aber

$$f^{-1}(M_{i+1}) = M'\cap M_{i+1} \text{ und } f^{-1}(M_i) = M'\cap M_i$$

verschieden sein (denn andernfalls wäre weigen (4) auch $M_{i+1} = M_i$). Wir haben gezeigt, jedesmal, wenn in (3) das Gleichheitszeichen gilt, ist die entsprechende Inklusion in (2) echt. Die Anzahl der echten Inklusionen in (2) und (3) zusammen ist somit mindestens so groß wie deren Anzahl in (1). Mit anderen Worten, es gilt

$$\ell \le \ell' + \ell''.$$

Zu (ii). (a) $\Rightarrow$ (b).Wäre A nicht nicht artinsch, so könnte man eine beliebig lange echt aufsteigende Kette von Idealen von A angeben.

Zu (ii). (b) $\Rightarrow$ (c).[76]

---

[76] Wir verwenden hier die Existenz der Primärzerlegung in noetherschen Ringen A: Jedes Ideal I von A hat die Gestalt

$$I = q_1\cap\ldots\cap q_r$$

1. Schritt. Jedes Primideal von A ist maximal (also auch minimal, d.h. dim A = 0).
Sei p ein Primideal von A. Dann ist $\bar{A} := A/p$ ein artinscher Integritätsbereich. Sei x ein von Null verschiedenes Element von $\bar{A}$. Die Potenzen des von x erzeugten Ideals bilden eine absteigende Kette von Idealen. Diese Kette muß stationär sein, d.h. es gibt ein n mit

$$x^n\bar{A} = x^{n+1}\bar{A},$$

d.h. $x^n = x^{n+1}\cdot a$ für ein $a \in \bar{A}$. Weil $\bar{A}$ ein Integritätsbereich ist, folgt $1 = x\cdot a$, d.h. x ist eine Einheit. Wir haben gezeigt, $\bar{A}$ ist ein Körper, d.h. p ist maximales Ideal.
2. Schritt. Die Anzahl der maximalen Ideale von A ist endlich.
Andernfalls gäbe es eine unendliche Folge von paarweise verschiedenen maximalen Idealen

$$m_1, m_2, m_3, \ldots$$

Die zugehörigen Folge der Durchschnitte

$$m_1, m_1\cap m_2, m_1\cap m_2\cap m_3, \ldots$$

muß, weil A artinsch ist, stationär sein, d.h. es gibt ein n mit

$$m_{n+1} \supseteq m_1\cap\ldots\cap m_{n+1} = m_1\cap\ldots\cap m_n \supseteq m_1\cdot\ldots\cdot m_n$$

Weil m_{n+1} ein Primideal ist, muß einer der Faktoren rechts in m_{n+1} liegen, also gleich m_{n+1} sein. Das steht im Widerspruch dazu, daß die m_i paarweise verschieden sein sollen.
3. Schritt. Das Jacobson-Ideal rad(A) ist nilpotent.
Sei N := rad(A). Man beachte, weil jedes Primideal von A maximal ist, ist N gleichzeitig das Nil-Radikal von A,
$N = \mathrm{rad}(A) = \sqrt{0}$,
d.h. jedes Element von N ist nilpotent.
Weil A artinsch ist, ist die Folge der Potenzen von N stationär, sagen wir

$$I := N^n = N^{n+1} = N^{n+2} = \ldots$$

Angenommen, I ist nicht das Nullideal. Wir betrachten die Menge

$$M := \{J \mid J \text{ ist Ideal von A mit } IJ \neq 0\}.$$

Diese Mengen ist nicht leer, weil I in M liegt. Weil A Artinsch ist, besitzt diese Menge ein minimales Element, sagen wir

$$L \in M.$$

Wegen $LI \neq 0$ gibt es ein $x \in L$ mit $xI \neq 0$. Wegen $xA \subseteq L$ und der Minimalität von L folgt

$$L = xA.$$

Wegen $(xI)I = xI^2 = xI \neq 0$ und $xI \subseteq xA = L$ und der Minimalität von L folgt

$$xI = L = xA.$$

Deshalb gibt es ein $y \in I$ mit

$$x = xy = xy^2 = \ldots = xy^j = \ldots$$

Wegen $y \in I = N^n \subseteq N = \sqrt{0}$ ist y nilpotent, also x = 0. Das steht aber im Widerspruch zur Wahl von x. Die Annahme, daß I von Nullideal verschieden ist, muß falsch sein, d.h. $N = \sqrt{0}$ ist nilpotent.

---

mit q_i primär: $a\cdot b \in q$ impliziert $b\in q$, wenn keine Potenz von a in q liegt. Die Radikale $p_i := \sqrt{q_i}$ der q_i sind dann Primideale. Die minimalen Primoberideale von I kommen unter den p_i vor. Insbesondere ist die Anzahl ersterer endlich.

Zum Beweis der Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) bleibt noch die folgende Aussage zu beweisen.
<u>4. Schritt:</u> A ist noethersch.
Es reicht zu zeigen, daß A als Modul über sich selbst von endlicher Länge ist,

$$\text{length}_A(A) < \infty.$$

Seien

$$m_1,\dots,m_r$$

die maximalen Ideale von A (deren Anzahl nach dem 2.Schritt endlich ist). Nach dem 3.Schritt gibt es eine Folge von Idealen in A, sagen wir

$$A = I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_s = 0$$

mit $I_{j+1} = m_{i(j)} I_j$. Wegen der Additivität der Längenfunktion reicht es zu zeigen

$$\text{length}_A(I_j/m_{i(j)}I_j) < \infty.$$

Weil A artinsch ist, ist jedes I_j ein artinscher A-Modul. Also ist auch $I_j/m_{i(j)}I_j$ als A-Modul artinsch. Letzterer Modul ist aber ein Vektorraum über $A/m_{i(j)}$ und als solcher artinsch, also von endlicher Länge.
Man beachte, wir haben hier auch die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) bewiesen. Zum Beweis von (ii) reicht es deshalb, noch die folgende Implikation zu beweise.
<u>Zu (ii). (c) $\Rightarrow$ (a)</u>.
Betrachtem wir die Primärzerlegung des Nilradikals von A,

$$N := \sqrt{0} = m_1 \cap \dots \cap m_r.$$

Die m_i sind dann gerade die minimalen Primideale von A. Insbesondere ist deren Anzahl endlich. Wegen dim A = 0, sind die m_i gleichzeitig die maximalen Ideale von A.

Das Ideal N besteht aus nilpotenten Elementen und ist - weil A noethersch ist - endlich erzeugt. Damit ist N nilpotent, sagen wir

$$N^n = 0.$$

Wie im Beweis des 4. Schritt erhalten wir eine absteigende Kette von Idealen I_j von A, wobei die A-Moduln I_j diesmal noethersch sind. Das hat aber ebenfalls zur Folge, daß die Vektorräume $I_j/m_{i(j)}I_j$ endlich-dimensional sind, und wie im 4. Schritt folgt, daß A als Modul über sich selbst von endlicher Länge ist.

<u>Zu (iii)</u>. Als Modul endlicher Länge ist M über A endlich erzeugt, sagen wir

$$M = Ax_1 + \dots + Ax_s$$

Ein Element von a annulliert M genau, dann wenn es alle Erzeuger x_i annuliert. Die A-lineare Abbildung

$$A \longrightarrow M\oplus\dots\oplus M,\ a \mapsto (ax_1,\dots,ax_s),$$

besitzt den Kern $\text{Ann}_A(M)$, d.h. $A/\text{Ann}_A(M)$ läßt sich mit einem Teilmodul der direkten Summe rechts identifizieren und besitzt deshalb enliche Länge,

$$\text{length}_A(A/\text{Ann}_A(M)) < \infty.$$

Insbesondere ist der Ring $A/\text{Ann}_A(M)$ noethersch und das Nullideal besitzt eine endliche Primärzerlegung. Durch Übergang zu den inversen Bildern beim natürlichen Homomorphismus

$$A \longrightarrow A/\mathrm{Ann}_A(M)$$

erhalten wir die Primärzerlegung von $\mathrm{Ann}_A(M)$ in A. Weil $A/\mathrm{Ann}_A(M)$ von endlicher Länge ist, sind alle seine Primideale maximal. Die Primideale zur Primärzerlegung von $\mathrm{Ann}_A(M)$ sind somit maximal in A. Berechnen wir die Länge

$$\ell = \mathrm{length}_A(M)$$

und wählen dazu eine echt aufsteigende Kette der Länge ℓ,

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_\ell = M$$

von Teilmoduln von A. Nach Wahl dieser Kette, gibt es keinen Teilmodul von M, der echt zwischen zwei benachbarten M_i liegt. Insbesondere gilt

$$\mathrm{length}_A(M_i/M_{i+1}) = 1 \text{ für jedes i.}$$

Insbesondere wird M_i/M_{i+1} von jedem seiner von 0 verschiedenen Elemente erzeugt, d.h. es gibt eine A-lineare Surjektion

$$A \longrightarrow M_i/M_{i+1}.$$

Weil die Länge des Faktormoduls gleich 1 ist, muß der Kern dieser Surjektion ein maximales Ideal sein, sagen wir

$$M_i/M_{i+1} \cong A/m_{i(j)} . \qquad (5)$$

Wegen der Additivität der Längenfunktion gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{length}_A(M) &= \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{length}_A(M_i/M_{i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \# \{j \mid i(j) = i\} \end{aligned}$$

Der i-te Summand der letzten Summe ist dabei gerade die Anzahl der Summanden der ersten Summe (die alle gleich 1 sind) mit $i(j) = i$. Damit gilt,

$$\begin{aligned} i(j) = i &\Leftrightarrow m_i = m_{i(j)} \\ &\Leftrightarrow m_i A_{m_i} = m_{i(j)} A_{m_i} \\ &\Leftrightarrow m_{i(j)} A_{m_i} \text{ echtes Ideal von } A_{m_i} \\ &\Leftrightarrow (A/m_{i(j)})_{m_i} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (M_i/M_{i+1})_{m_i} \neq 0 \qquad \text{(wegen (5))} \\ &\Leftrightarrow (M_i)_{m_i} \neq (M_{i+1})_{m_i} \end{aligned}$$

Die Anzahl der j mit $i(j) = i$ ist damit gleich der Länge vom M_{m_i} über A_{m_i}, d.h. es gilt die behauptete Formel.

QED.

Die Hilbert-Funktion eines graduierten Moduls[77]

Seien $R = \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$ ein graduierter Ring mit R_0 noethersch, welcher als Algebra über R_0 endlich erzeugt ist,

$$R = R_0[x_1,...,x_s], \quad (\deg x_i = d_i)$$

mit endlich vielen homogenen Elementen x_i. Weiter sei M ein graduierter R-Modul, d.h. die additive Gruppe von M zerfalle in eine direkte Summe

$$M = \oplus_{n=n_0}^{\infty} M_n \text{ mit } n_0 \in \mathbb{Z}$$

und es gelte

$$R_m M_n \subseteq M_{m+n} .$$

Wir nehmen, hier an, daß M als R-Modul endlich erzeugt ist. Dann kann man M als R-Modul sogar durch endlich viele homogene Elemente über R erzeugen,

$$m_1,...,m_t \qquad (\deg m_j = e_j \in \mathbb{Z}).$$

Jedes Element von M_n kann man dann in der Gestalt

$$\sum_{j=1}^{t} r_j m_j$$

schreiben, mit homogenen Polynomen r_j des Grades $n - e_j$ in den x_i. Insbesondere wird M_n als R_0-Modul endlich erzeugt (wobei man als Erzeuger die Elemente der Gestalt $\mu_j m_j$ verwenden kann. Dabei durchlaufe μ_j die Potenzprodukte in den x_i des Grades $n - e_j$).

Schließlich nehmen wir an, daß die R_0-Moduln M_n sogar von enlicher Länge sind. In dieser Situation betrachten wir die formale Potenzreihe,

$$H_M := \sum_{n=0}^{\infty} \text{length}_{R_0}(M_n) \in \mathbb{Q}[[T]]$$

welche wir Hilbert-Reihe des Moduls M nennen wollen. Die Zugehörige Funktion

$$H_M: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto H_M(n) := \text{length}_{R_0}(M_n),$$

bezeichnen wir mit demselben Symbol und sprechen in diesem Kontext von der Hilbert-Funktion von M.

Rationalität der Hilbert-Reihe

Die Hilbert-Reihe ist eine rationale Funktion in T der Gestalt

$$H_M = \frac{p(T)}{\prod_{i=1}^{s} (1-T^{d_i})}$$

mit einem ganzzahligen Polynom $p(T) \in \mathbb{Z}[T]$. Die Polstellenordnung dieses Polynoms an der Stelle T = 1 wird mit

$$d(M)$$

[77] Die hier gewählte Definition der Hilbert-Funktion ist sehr viel allgemeiner gewählt als die von uns im Haupttext benötigte. Der nachfolgende Beweis der Polynomialität der Hilbert-Funktion ist sehr viel einfacher mit dieser komplizierteren Definition als er es mit der uns eigentlich interessierenden Hilbert-Funktion wäre.

bezeichnet.
Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Anzahl der s der Erzeuger x_i von R über R_0.
Der Fall s = 0. Es gilt dann $R_n = 0$ für alle positiven n, d.h. es ist $R = R_0$. Weil M endlich erzeugt ist über R, gilt damit $M_n = 0$ für alle hinreichend großen n (genau, wenn n größer ist als alle Grade der endlich vielen Erzeuger). Dann ist aber H_M ein Polynom, wie behauptet.
Der Fall s > 0. Die Multiplikation mit x_s definiert eine R-lineare Abbildung, deren Kokern wir mit C und deren Kern wir mit K bezeichnen. Wir erhalten so eine exakte Sequenz von R-linearen Abbildungen

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M[-d_i] \xrightarrow{x_s} M \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

Dabei sollen die eckigen Klammern eine Gradverschiebung im Modul M bezeichnen, die sicherstellt, das die betrachteten Abbildungen homogene Elemente in homogene Elemente desselben Grades abbilden. Im Grad n erhalten wir eine exakte Sequenz von R_0-linearen Abbildungen

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M_{n-d_i} \xrightarrow{x_s} M_n \longrightarrow L_n \longrightarrow 0.$$

Wegen der Additivität der Längen-Funktion erhalten wir

$$\text{length}_{R_0}(K_n) - \text{length}_{R_0}(M_{n-d_i}) + \text{length}_{R_0}(M_n) - \text{length}_{R_0}(L_n) = 0,$$

also

$$(1-T^{d_i})H_M = H_L - H_K$$

Nach Konstruktion werden die R-Moduln L und K von x_s annulliert, sind also sogar Moduln über $R/x_sR = R_0[\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_{s-1}]$, wenn $\overline{x}_i$ die Restklasse von x_i in R/x_sR bezeichnet. Nach Induktionsvoraussetzung haben H_L und H_K die behauptete Gestalt (mit s-1 ansgtelle von s). Dann hat aber auch H_M die behauptete Gestalt.
QED.

Existenz des Hilbert-Polynoms im Fall von Erzeugern des Grades 1
Sind die Erzeuger x_i des graduierten Rings R sämtlich vom Grad 1, so gibt es ein Polynom

$$P_M(T) \in \mathbb{Q}[T]$$

des Grade d(M) - 1 mit rationalen Koeffizienten und eine ganze Zahl n_0 mit

$$H_M(n) = P_M(n) \text{ für jedes } n \geq n_0.$$

Dieses Polynom heißt Hilbert-Polynom von M.
Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$H_M = \frac{p(T)}{(1-T)^s}$$

Sei $p(T) = \sum_{i=0}^{N} a_i T^i$. Wir können annehmen, p(T) ist teilerfremd to 1-T. Dann gilt

$$d(M) = s \text{ und } \sum_{i=0}^{N} a_i \neq 0. \qquad (6)$$

Wegen

$$\frac{1}{(1-T)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n-1}{s-1} \cdot T^n$$

erhalten wir

$$H_M(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot \binom{s+n-i-1}{s-1}.$$

Der i-te Summand ist ein Polynom des Grades s-1 mit dem höchsten Koeffizienten

$$a_i \cdot \frac{1}{(s-1)!}$$

Wegen der zweiten Bedinung (6) erhalten wir ein Polynom des Grades s-1 = d(M)-1.
QED.

Dimension (frei nach Matsumura)

1. Definitionen

Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Eine endliche echt absteigende Folge von n+1 Primidealen von A,

$$p_0 \supset \dots \supset p_n$$

heißt Primidealkette der Länge n.

Für $p \in \text{Spec } A$ heißt das Supremum über alle Längen aller solcher Ketten mit $p_0 = p$ Höhe von p und wird mit

$$ht(p)$$

bezeichnet. Für jedes echte Ideal $I \subsetneq A$ definieren wir die Höhe von I als das Infimum über alle Höhen aller Primoberideale von I,

$$ht(I) := \inf \{ht(p) \mid I \subseteq p \in \text{Spec } A\}.$$

Die Dimension von A oder auch Krull-Dimension ist definiert als das Supremum über alle Höhen aller Primideale von A,

$$\dim A := \sup \{ht(p) \mid p \in \text{Spec } A\}.$$

Für A-Moduln M definieren wir die Dimension von M als

$$\dim M := \dim A/\text{Ann}(M).$$

Beispiele

(i) Die Bedingung ht(p) = 0 an ein Primideal p gleichbedeutend damit, daß p ein minimales Primideal ist.
(ii) Ist dim A endlich, so ist diese Zahl der Länge der längsten Primidealkette von A.
(iii) $ht(p) = \dim A_p$ für Primideale p von A.
(iv) $\dim (A/I) + ht(I) \le \dim A$.
(v) Die Dimension eines Körpers ist gleich 0.
(vi) Die Dimension eines Hauptidealrings (welcher kein Körper ist) ist 1.

Beweis von (iv). Ist einer der Summanden links unendlich, so ist die Behauptung trivial. Sei also

$$a := \dim(A/I) < \infty \text{ und } b := ht(I) < \infty.$$

Wir wählen eine Primidealkette der Länge a in A/I und gehen zu den Urbildern der Primideal in A über. Wir erhalten eine Kette

$$p_0 \supset \dots \supset p_a$$

von Primidealen in A der Länge a mit $p_a \supseteq I$. Nach Definition von ht(I) gibt es eine Kette der Länge b in A, die mit p_a beginnt. Zusammen erhalten wir eine Kette der Länge a+b, d.h. es gilt $a+b \le \dim A$.
QED.

Beweis von (vi). Seien A ein Hauptidealring und $p \subsetneq q$ zwei echt ineinander liegende Primideale. Beide sind nach Voraussetzung Hauptideale, sagen wir

$$p = xA \text{ und } q = yA.$$

Wegen $p \subsetneq q$ liegt x in q, ist also ein Vielfaches von y, sagen wir

$$x = ya.$$

Das Element a kann keine Einheit sein, denn dann wäre p = q. Aus denselben Gründen kann y nicht in p liegen. Weil p ein Primideal ist, muß dann a in p liegen, sagen wir

$$a = xb.$$

Es folgt

$$0 = x - ya = x - yxb = x(1-yb).$$

Weil q = yA als Primideal ein echtes Ideal ist, kann y keine Einheit sein, d.h. der zweite Faktor rechts ist nicht Null. Weil A als Hauptidealring keine Nullteiler besitzt, folgt x = 0, d.h. p = 0. Wir haben gezeigt:

Das einzige Primideal von A, welches nicht maximal ist, ist das Nullideal.

Insbesondere ist die Dimension von A höchstens gleich 1,

$$\dim A \le 1.$$

Wäre die Dimension kleiner als 1, so wäre das Nullideal von A maximal, d.h. A wäre ein Körper, im Widerspruch zur Annahme.

QED.

2. Charakterisierung der 0-dimensionalen Moduln

Seien A ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) dim M = 0.
(ii) A/Ann(M) ist artinsch.
(iii) $\text{length}(A/\text{Ann}(M)) < \infty$.
(iv) $\text{length}_A(M) < \infty$.

Beweis. Die Aussagen ergeben sich aus den Eigenschaften (ii) der Längen-Funktion:. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \dim M = 0 &\Leftrightarrow \dim A/\text{Ann}(M) = 0 && \text{(nach Defintion von dim M)} \\ &\Leftrightarrow \text{length}(A/\text{Ann}(M)) < \infty && \text{(weil A noethersch ist)} \\ &\Leftrightarrow A/\text{Ann}(M) \text{ artinsch.} \end{aligned}$$

Es gilt also

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Weil M endlich erzeugt ist, sagen wir $M = Am_1+...+Am_r$, hat man eine Surjektion

$$A\oplus...\oplus A \twoheadrightarrow M,\ (a_1,...,a_r) \mapsto \sum_{i=1}^{r} a_i m_i.$$

Ändert man eines der a_i um ein Element von Ann(M) ab, so bleibt die Summen rechts unverändert. Die Abbildung induziert somit eine Surjektion

$$(A/\text{Ann}(M)) \oplus ... \oplus (A/\text{Ann}(M)) \twoheadrightarrow M.$$

Es folgt

$$\text{length}(M) \le r\bullet\text{length}(A/\text{Ann}(M)).$$

Also gilt

$$(iii) \Rightarrow (iv).$$

Weiter hat man eine Abbildung

$$A \longrightarrow M\oplus...\oplus M,\ a \mapsto (am_1,...,am_r),$$

deren Kern gerade der Annullator von M ist, also eine Injektion

$$A/Ann(M) \hookrightarrow M\oplus...\oplus M.$$

Deshalb gilt

$$\text{length}(A/Ann(M)) \le r\bullet\text{length}(M).$$

Insbesondere erhalten wir

$$(iv) \Rightarrow (iii).$$

Zusammen ergibt sich die Behauptung.
QED.

3. Definitionsideale semi-lokaler Ringe, Hilbert-Polynome und die Zahl d(M)

Seien A ein noetherscher semi-lokaler Ring, d.h. die Anzahl der maximalen Ideale von A sei endlich, und

$$m = rad(A)$$

dessen Jacobson-Radikal, d.h. der Durchschnitt der endlich vielen maximalen Ideale.

Ein Definitionsideal von A ist ein Ideal $I \subseteq A$, welches zwischen zwei Potenzenb von m liegt, sagen wir

$$m^{\nu} \subseteq I \subseteq m$$

für eine natürliche Zahl ν.

Bemerkungen

(i) Ein Ideal $I \subseteq m$ ist genau dann ein Definitionsideal, wenn $\text{length}(A/I) < \infty$ gilt.

(ii) Seien I ein Definitionsideal von A und M ein endlich erzeugter A-Modul. Wir betrachten die direkten Summen

$$gr(A) := gr_I(A) := \oplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^n$$

und

$$gr(M) := gr_I(M) := \oplus_{n=0}^{\infty} I^nM/I^nM.$$

Die Multiplikation der Elemente von A mit Elementen von M definiert A-bilineare Abbildungen

$$I^a \times I^b M \longrightarrow I^{a+b}M$$

und damit A-bilineare Abbildungen

$$I^a/I^{a+1} \times I^b/I^{b+1}M \longrightarrow I^{a+b}M/I^{a+b+1}M.$$

Für M = A ergibt sich, daß gr(A) auf diese Weise die Struktur eines graduierten Rings bekommt. Für allgemeines M sehen wir, gr(M) hat so die Struktur eines graduierten Moduls über gr(A).

Nach Wahl von I ist der homogene Bestandteil $gr^0(A) = A/I$ des Grades 0 von gr(A) artinsch, also auch noethersch. Außerdem wird gr(A) von Elementen des Grades 1, welche I/I^2 über A/I erzeugen, als A/I-Algebra erzeugt. Der Ring ist somit über A/I endlich erzugt.

Analog wird gr(M) von Elementen des Grades 1, welche IM/I^2M über A/I erzeugen, als Modul über gr(A) erzeugt und ist damit über gr(A) endlich erzeugt. Das hat zur Folge, daß jeder homogene Bestandteil von gr(M) ein endlich erzeugter Modul über A/I ist. Mit A/I haben damit diese homogenene Bestandteile von gr(M) eine endliche Länge über A. Die Hilbert-Funktion

$$H_{gr(M)}(n) = \mathrm{length}_A(I^nM/I^{n+1}M)$$

des graduierten gr(A)-Moduls gr(M) ist damit wohldefiniert. Wir betrachten die Summen-Transformierte

$$H^1_{gr(M)}(n) = \mathrm{length}_A(M/I^{n+1}M).$$

Weil gr(M) von Elementen des Grades 1 über gr(A) erzeugt wird, gibt es eine Polynom

$$\chi(M, I; T) \in \mathbb{Q}[T]$$

mit rationalen Koeffizienten und eine natürliche Zahle n_0 mit

$$H^1_{gr(M)}(n) = \chi(M, I; n) \text{ für jedes n mit } n \geq n_0.$$

Dieses Polynom heißt Hilbert-Polynom des Moduls M bezüglich I.

(iii) Der Grad des Hilbert-Polynoms $\chi(M, I; n)$ hängt nicht von der speziellen Wahl des Definitionsideals I ab und wird mit

$$d(M)$$

bezeichnet. Unser nächstes Ziel besteht darin, diese Zahl mit der Dimension von M zu vergleichen.

(iv) Falls A ein Definitionsideal mit r Erzeugenden besitzt, so gilt

$$d(M) \leq r.$$

(v) Man beachte, die Anzahl der Erzeuger eines Defintionsideals steht in Beziehung zu unseren heuristischen Vorstellungen von der Dimension. Seien

$$A = k[x_1,...,x_n]/J,\ x \in \mathrm{Spec}\ A$$

und

$$\dim A_x = \dim_x A = r,$$

d.h. $V(J) \subseteq \mathbb{A}^n_k$ soll r-dimensional im Punkt x sein. Dann sollte es eine Hyperfläche $f_1 = 0$ durch den Punkt x geben mit

$$\dim_x V(J) \cap V(f_1) = r-1.$$

Indem wir diesen Vorgang wiederholen, erhalten wir eine Folge von Polynomen

$$f_1, \ldots, f_r \in k[x_1,...,x_n]$$

mit

$$\begin{aligned} 0 &= \dim_x V(J) \cap V(f_1) \cap \ldots \cap V(f_r) \\ &= \dim_x V(J + (f_1,...,f_r)) \\ &= \dim_x k[x_1,...,x_n]/(J + (f_1,...,f_r)) \\ &= \dim_x A/((\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_r)) \text{ mit } \bar{f}_i = f_i \bmod J. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, es in A_x ein von r Elementen erzeugtes Definitionsdeal I.

Beweis von (i). Seien $m_1,..., m_r$ die maximalen Ideale von A. Für jede natürliche Zahl ν gibt es dann eine Kette von Idealen

$$A = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \ldots \supseteq I_r$$

mit

1. $I_r \subseteq (m_1 \cdot \ldots \cdot m_r)^\nu$ $\qquad (\subseteq (m_1 \cap \ldots \cap m_r)^\nu = m^\nu)$
2. $I_{i+1} = m_{j(i)} \cdot I_i$ für jedes i.

Insbesondere ist I_i/I_{i+1} ein endlich-dimensionaler $A/m_{j(i)}$-Vektorraum, also als A-Modul von endlicher Länge. Dann ist aber A/I_r von endlicher Länge. Wegen Bedingung von 1 folgt

$$\text{length}(A/m^\nu) < \infty \text{ für jedes } \nu.$$

Ist I ein Definitionsideal, so ist A/I ein Faktorring eines A/m^ν also ebenfalls von endlicher Länge.

Sei umgekehrt A/I von endlicher Länge. Wegen $I \subseteq m$ ist dann $m\bullet A/I$ der Durchschnitt der maximalen Ideale von A/I, d.h.

$$m\bullet A/I = \text{rad } A/I.$$

Wie wir oben gesehen haben, ist das Radikal für Ringe endlicher Länge nilpotent (vgl. Schritt 3 im Beweis der Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) der Eigenschaften (ii) der Längen-Funktion). Also liegt eine Potenz von m in I.

QED.

Beweis von (iii). Seien I und J zwei Definitionsideale von A. Dann gibt es eine natürliche Zahl s mit

$$J^s \subseteq I.$$

Also gilt für jedes n

$$\chi(M, I, n) = \text{length}(M/I^{n+1}M) \le \text{length}(M/I^{s(n+1)}) = \chi(M, J, ns + s -1).$$

Insbesondere kann der Grad bezüglich I nicht größer sein als der bezüglich J. Aus Symmetrie-Gründen müssen die beiden Grade gleich sein, d.h. d(M) hängt nicht von der speziellen Wahl des Definitionsideals ab.

QED.

Beweis von (iv). Sei I ein Definitionsideal von A, welches von r Elementen erzeugt wird,

$$I = (\alpha_1,..., \alpha_r)A.$$

Dann wird gr(A) von den r-Anfangsformen

$$\alpha_i \text{ mod } I^2 \in \text{gr}(A)$$

über A/I erzeugt. Da diese Anfangsformen den Grad 1 haben, bekommt die Formel für die Hilbert-Reihe von gr(M) die Gestalt

$$H_{\text{gr}(M)} = \frac{p(T)}{(1-T)^r}$$

Für die Polstellenordung erhalten wir also

$$d(\text{gr}(M)) \le r.$$

Das zugehörige Hilberpolynom $P_{\text{gr}(M)}$ hat somit einen Grad $d(\text{gr}(M)) - 1 \le r-1$. Durch Übergang zur Summentransformierten erhalten wir ein Polynom $\chi(M, I, n)$ vom Grad $\le r$, wie behauptet.

QED.

4. Verhalten des Hilbert-Polynoms bei exakten Sequenzen

Seien A ein noetherscher semi-lokaler Ring, I ein Definitionsideal von A und

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von endlich erzeugten A-Moduln. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) $d(M) = \max(d(M'), d(M''))$.

(ii) $\chi(M, I, T) - \chi(M', I, T) - \chi(M'', I, T)$ ist ein Polynom in T eines Grades $< d(M)$.

Beweis. Wir identifizieren M' mit einem Teilmodul von M. Wegen $M'' \cong M/M'$ gilt

$$\chi(M'', I, n) \quad = \text{length}(M''/I^{n+1}IM'')$$

$$= \text{length}(M/I^{n+1}M + M')$$
$$\le \text{length}(M/I^{n+1}M)$$
$$= \chi(M, I; n)$$

also

$$d(M'') \le d(M).$$

Weiter ist

$$\chi(M, I, n) - \chi(M'', I, n) = \text{length}(M/I^{n+1}M) - \text{length}(M/I^{n+1}M + M')$$
$$= \text{length}((I^{n+1}M + M') / I^{n+1}M)$$
$$= \text{length}(M'/M' \cap I^{n+1}M)$$

Nach dem Satz von Artin-Rees gibt es ein r mit $M' \cap I^{n+1}M \subseteq I^{n-r+1}M$ für $n > r$.
Trivialerweise gilt $I^{n+1}M' \subseteq M' \cap I^{n+1}M$. Zusammen erhalten wir

$$\chi(M', I, n) \ge \chi(M, I, n) - \chi(M'', I, n) \ge \chi(M', I, n-r)$$

Das Polynom $\chi(M', I, n)$ hat also denselben Grad wie $\chi(M, I, n) - \chi(M'', I, n)$ und denselben höchsten Koeffizienten. Insbesondere gilt (ii).

Gehört zu M und M" derselbe Grad, so ist der Grad zu M' kleiner oder gleich, d.h. es gilt (i).
Gehören zu M und M" unterschiedliche Grad, dann ist der Grad zu M" kleiner und die Grade zu M' und M sind gleich, d.h. (i) gilt ebenfalls.
QED.

5. Eigenschaften von d(M)

Sei A ein noetherscher semi-lokaler Ring. Es gilt

(i) $d(A) \ge \dim(A)$.

(ii) Für jeden endlich erzeugten A-Modul $M \ne 0$ und jedes Element $x \in \text{rad } A$ gilt $d(M) \ge d(M/xM) \ge d(M) - 1$.

(iii) Für jeden endlich erzeugten A-Modul $M \ne 0$ mit $\dim(M) = r$ gibt es Elemente $x_1,...,x_r \in \text{rad } A$ mit $\text{length}(M/(x_1,...,x_r)M) < \infty$.

Beweis. Zu (i). Bezeichne m das Jacobson-Radikal von A. Wir führen den Beweis durch Induktion nach d(A). Im Fall $d(A) = 0$ ist $\chi(A, m, n) = \text{length}(A/m^n)$ für große n konstant, d.h. es gibt ein r mit

$$m^r = m^{r+1} = ...$$

Nach dem Durchschnittsatz von Krull gilt damit $m^r = 0$. Insbesondere ist

$$\text{length}(A) = \text{length}(A/m^r) = \chi(A, m, r-1)$$

endlich, also $\dim(A) = 0$.
Sei jetzt $d(A) > 0$. Im Fall $\dim A = 0$ gilt die Behauptung trivialerweise. Nehmen wir also an,

$$\dim A > 0.$$

Wir betrachten eine Primidealkette der Länge $e > 0$, sagen wir

$$p_0 \supset p_1 \supset .. \supset p_{e-1} \supset p_e =: p.$$

Sei $x \in p_{e-1} - p$. Dann gilt

$$\dim A/(xA+p) \ge e-1.$$

Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow A/p \xrightarrow{x} A/p \longrightarrow A/(xA + p) \longrightarrow 0$$

lesen wir ab, daß $\chi(A/p, I, T) - \chi(A/p, I, T) - \chi(A/(xA+p), I, T)$ einen Grad < d(A/p) hat, d.h. es gilt

$$d(A/(xA+p)) < d(A/p) \le d(A).$$

Zusammen erhalten wir $e \le d(A)$. Damit gilt (i).

Insbesondere ist damit gezeigt, daß die Dimension noetherscher semi-lokaler Ring A endlich ist.

Zu (ii). Die ersten Ungleichung gilt trivialerweise. Sei I ein Definitionsideal,welches das Element x enthält. Dann gilt

$$\begin{aligned}\chi(M/xM, I, n) &= \text{length}(M/xM + I^{n+1}M)\\ &= \text{length}(M/I^{n+1}M) - \text{length}((xM + I^{n+1}M)/I^{n+1}M).\end{aligned}$$

Wegen

$$(xM + I^{n+1}M)/I^{n+1}M \cong xM/xM\cap I^{n+1}M \cong^{78} M/I^{n+1}M{:}x$$

und $I^nM \subseteq I^{n+1}M{:}x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\chi(M/xM, I, n) &\le \text{length}(M/I^{n+1}M) - \text{length}(M/I^nM)\\ &= \chi(M, I, n) - \chi(M,I, n-1).\end{aligned}$$

Also gilt $d(M/xM) \ge d(M) - 1$.

Zu (iii). Sei I ein Definitionsideal von A. Im Fall r = dim(M) = 0 hat auf Grund der Charakterisierung der 0-dimensionalen Moduln, M eine endliche Länge,

$$\text{lengt}(M) < \infty.$$

Die Behauptung ist somit richtig.

Sei jetzt r > 0. Wegen r = dim M = dim A/Ann(M) sind die Primoberideale p von Ann(M) mit

$$\dim(A/p) = r$$

minimale Primoberideale von Ann(M). Deren Anzahl ist somit endlich. Bezeichnen wir diese mit

$$p_1, \dots , p_t.$$

Wegen r > 0 liegt kein maximales Ideal von A ganz in einem der p_i. Weil A semi-lokal ist, d.h. die Anzahl der maximalen Ideale ist endlich, liegt auch das Produkt der maximalen Ideale in keinem p_i. Erst recht gilt

$$\text{rad}(A) \not\subseteq p_i \text{ für } i = 1,...,t.$$

Deshalb gibt es ein $x_1 \in \text{rad}(A)$, welches in keinem p_i liegt. Der Annullator von M/x_1M enthält $\text{Ann}(M) + x_1A$, also keines der p_i. Es gilt also

$$\dim (M/x_1M) \le \dim(M) - 1.$$

Die Behauptung folgt jetzt auf Grund der Induktionsvoraussetzung (bzgl. dim (M)). **QED**.

6. Beschreibung der Dimension eines Moduls

Seien A ein noetherscher semi-lokaler Ring und

$$M \ne 0$$

ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt

$$\dim (M) = d(M) = \inf \{r \mid \text{es gibt } x_1,...,x_r \in \sqrt{0} \text{ mit length}(M/(_1,...,x_r)M) < \infty\}$$

---

[78] Die Multiplikation mit x definiert eine Surjektion $M \longrightarrow xM/xM\cap I^{n+1}M$ mit deren Kern gerade $I^{n+1}M{:}x$ ist.

Beweis. Wir wählen Elemente $x_1,...,x_r \in rad(A)$ mit

$$length(M/(x_1,...,x_r)M) < \infty.$$

Da sich d(M) beim Faktorisierung nach einem Element von rad(A) höchstens um 1 sinkt (vgl. Eigenschaften von d(M)), folgt

$$d(M) \le r.$$

Da es auf jeden Fall dim(M) Elemente x_i mit der angegebenen Eigenschaft gibt, gilt für das kleinstmögliche r

$$r \le dim(M).$$

Zusammen erhalten wir

$$d(M) \le dim(M).$$

Für M = A gilt damit auf Grund der oben bewiesenen Eigenschaften von d sogar

$$d(A) = dim(A) \qquad (1)$$

Auf Grund der Eigenschaften assoziierter Primideale[79] gibt es eine Folge von Teilmoduln von M, sagen wir

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset ... \subset M_s = M$$

derart[80], daß für i = 1,...,s gilt

$$M_i/M_{i-1} \cong A/p_i \text{ mit } p_i \in \text{Spec } A.$$

Offensichtlich gilt

$$p_i \supseteq Ann(M), \qquad (2)$$

und auf Grund des Verhaltens von Ass(M) bezüglich exakter Sequenzen

$$Ass(M) \subseteq \{p_1, ... , p_s\}.$$

Wegen Supp(M) = V(Ann(M)) sind alle minimalen Primoberideale von Ann(M) auch solche von Supp(M) und liegen damit in Ass(M), und damit in der Menge der p_i. Damit gilt

$$\begin{aligned} d(M) &= \max \{d(A/p_i) \mid i = 1,...,s\} && \text{(Verh. von } \chi(M,I;n) \text{ bei ex. Sequenzen)} \\ &= \max \{\dim A/p_i \mid i=1,...,s\} && \text{(wegen (1))} \\ &= \dim A/Ann(M) && \text{(wegen (2))} \\ &= \dim (M) && \text{(Definition von dim(M))} \end{aligned}$$

Damit gilt d(M) = r = dim(M), wenn man r minimal wählt.
QED.

---

[79] Für den weiteren Beweis benötigen wir die folgenden Eigenschaften der Menge assoziierten Primideale eines A-Moduls M, welche mit

$$Ass_A(M) := \{p \in Spec(A) \mid M \text{ besitzt einen zu } A/p \text{ isomorphen Teilmodul}\}$$

bezeichnet wird:

(i) $Ass(M) = \emptyset \Leftrightarrow M = 0$.

(ii) Die minimalen Elemente von Ass(M) und Supp(M) sind dieselben.

(ii) Für exakte Sequenzen $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ von A-Moduln gilt

$$Ass(M) \subseteq Ass(M') \cup Ass(M'').$$

(iii) Ass(A/p) = {p} für Primideale A.

[80] Wegen $M \neq 0$ gibt es einen Teilmodul M_1, der isomorph ist zu A/p_1 mit $p_1 \in$ Spec A. Durch Wiederholen der Konstruktin mit M/M_1 anstelle von M erhält man die übrigen Teilmoduln. Weil M noethersch ist, muß die Folge der M_i, die man so erhält, endlich sein.

7. Durchschnitte mit Hyperflächen

Seien A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1, $I \subseteq A$ ein echtes Ideal und $f \in A$ eine nicht-Einheit. Wir setzen

$$X = V(I) \text{ und } H = V(f).$$

Wir nehmen an, X ist equidimensional[81] von der endlichen Dimension $d < \infty$. Dann hat jede irreduzible Komponente von

$$X \cap H$$

die Dimensin d-1 oder d. Der zweite Fall tritt nur dann ein, wenn die Komponente zugleich Komponente von X ist.
Beweis. 1. Schritt. Der Fall X irreduzibel.
Wir können dann annehmen,

$$I = p \in \text{Spec } A$$

ist ein Primideal. Im Fall $f \in p$ gilt $X \subseteq H$, also $X \cap H = X$ ist irreduzibel von der Dimension d. Betrachten wir den Fall

$$f \notin p.$$

Jede irreduzible Komponente von $X \cap H = V(p+fA)$ hat dann die Gestalt V(q) mit einem Primideal mit

$$p + fA \subseteq q.$$

Die aufsteigenden Primidealketten, welche mit q anfangen sind somit echt kürzer als die mit p anfangenden, d.h. es gilt

$$\dim V(q) < \dim V(p) = \dim X = d.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es, zu zeigen die Zahl links $\geq$ d-1, d.h. es reicht zu zeigen

$$d - 1 \leq \dim X \cap H \qquad (= \dim V(p+fA)) = \dim A/(p+fA))$$

Mit $M := A/p$ gilt $M/fM = (A/p)/f\bullet(A/p) = (A/p) / (fA + p)/p = A/(p + fA)$. Also gilt

$$\begin{aligned} \dim X \cap H &= \dim M/fM \\ &= d(M/fM) \\ &\geq d(M) - 1 \\ &= \dim A/p - 1 \\ &= \dim X - 1 \\ &= d-1. \end{aligned}$$

2. Schritt: X beliebig.
Es gilt

$$X \cap H = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$$

mit Y_i irreduzibel und abgeschlossen mit $\dim Y_i = d$ oder $= d-1$, denn dies ist richtig wenn man X durch eine Komponente von X ersetzt (nach dem ersten Schritt) und X ist die Vereinigung seiner Komponenten. Läßt man auf der rechten Seite alle überflüssigen Y_i weg, so erhält man gerade die Zerlegung von $X \cap H$ in irreduzible Komponenten und die Aussage gilt in gleicher Weise für die verbleibenden Y_i.

QED.

8. Die Dimension des $\mathbb{A}_k^N$

Sei k ein Körper. Dann gilt $\dim \mathbb{A}_k^N = N$.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach N.

---

[81] d.h. alle irreduziblen Komponenten von X haben dieselbe Dimension.

<u>Der Fall</u> N = 0.
Es gilt

$$\dim \mathbb{A}_k^0 = \dim k = 0,$$

weil k ein Körper ist.
<u>Der Fall</u> N = 1.
Es gilt

$$\dim \mathbb{A}_k^1 = \dim k[x] = 1,$$

weil k[x] ein Hauptidealring ist.
<u>Der Fall</u> N > 1.
Wir setzen $A := k[x_1,...,x_N]$, $I := (0)$ und $f := x_N$. Dann ist

$$X := V(I) = \mathrm{Spec}\ k[x_1,...,x_N] = \mathbb{A}_k^N$$

und

$$H := V(f) = \mathrm{Spec}\ k[x_1,...,x_N]/(x_N) = \mathrm{Spec}\ kk[x_1,...,x_{N-1}] = \mathbb{A}_k^{N-1}$$

Insbesondere ist

$$X \cap H = H$$

irreduzibel, und die einzige Komponente des Durchschnitts ist keine Komponente von X (weil die einzige Komponente von X gleich X ist). Damit gilt

$$\dim H = \dim X - 1.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt außerdem

$$\dim H = N - 1.$$

Damit ist

$$\dim \mathbb{A}_k^N = \dim X = \dim H + 1 = (n-1) + 1 = n.$$

QED.

Kategorien und Funktoren

1 Der Begriff der Kategorie

Eine <u>Kategorie</u> C besteht
(i) aus einer Klasse

$$|C| = \mathrm{ob}(C),$$

welche <u>Objekte</u> der Kategorie heißen,
(ii) aus einer Menge

$$\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathrm{Hom}_C(X, Y)$$

für je zwei Objekte X, Y der Kategorie, deren Elemente <u>Morphismen</u> mit der Quelle X und dem Ziel Y heißen. Für jedes Element f aus Hom(X, Y) schreibt man

$$\mathrm{source}(f) = X \text{ und } \mathrm{target}(f) = Y$$

und nennt X <u>Quelle</u> von f und Y <u>Ziel</u> von f. Man verwendet dann auch die Bezeichnung

$$f: X \to Y \text{ oder } X \xrightarrow{f} X .$$

und sagt, f ist ein Morphismus von X nach Y.
(iii) aus einer Abbildung

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z),\ (f, g) \mapsto g\circ f ,$$

für je drei Objekte X, Y, Z der Kategorie, welche Morphismen-Komposition heißt.

Dabei wird gefordert, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(a) Die Morphismen Komposition ist assozialtiv, d.h. es gilt

$$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$$

für je drie Morphismen f, g, h mit

$$\text{target}(h) = \text{source}(g) \text{ und } \text{target}(g) = \text{source}(f).$$

(b) Existenz der identischen Morphismen. Für jedes Objekt $X \in |C|$ gibt es einen Morphimus

$$id_X \in \text{Hom}(X, X)$$

mit

$$f\circ id_X = f$$

für jeden Morphismus mit der Quelle X und

$$id_X\circ f = f$$

für jeden Morphismus mit dem Ziel X.

(c) Die Hom-Mengen sind paarweis disjunkt[82]

$$\text{Hom}(X, Y) \cap \text{Hom}(X', Y') = \emptyset \text{ für } (X, Y) \neq (X', Y').$$

2 Beispiele

Ens die Kategorie der Mengen
Vect$_K$ die Kategorie der Vektorräume über einem Körper K
Groups die Kategorie der Gruppen
Rings die Kategorie der Ringe
Ab die Kategorie der abelschen Gruppen
Top die Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen
Filt$_{K,I}$ die Kategorie der filtrierten K-Vektorräume über der linear geordneten Menge I[83]
A-**Mod** die Kategorie der linken A-Moduln
Mod-A die Kategorie der rechten A-Moduln
Cat die Kategorie der Kategorien
C^{op} die zur Kategorie C duale Kategorie
C/X die Kategorie der Objekte der Kategorie C über dem Objekt X.

Die Kategorie der metrischen Räume und kontrahierenden Abbildungen
Interpretation der Gruppen als Kategorie

---

[82] Diese Bedingung reflektiert die Ansicht, daß Abbildungen, die zwischen verschiedenen Mengen abbilden, als verschieden angesehen werden sollten, auch wenn deren Abbildungsvorschriefen dieselben sind.

[83] Die Objekte sind die Familien $\{V_i\}_{i\in I}$ von K-Vektorräumen mit der Eigenschaft, daß im Fall $i \le j$ der Vektorraum V_i ein K-linearer Unterraum von V_j ist. Die Morphismen

$$f: \{V_i\}_{i\in I} \longrightarrow \{V'_i\}_{i\in I}$$

sind die Famlien $\{f_i\}_{i\in I}$ von K-linearen Abbildung $f_i: V_i \longrightarrow V'_i$ mit der Eigenschaft, daß im Fall $i \le j$ gilt $f_j|_{V_i} = f_i$. Die Morphismen-Komposition wird durch die Zusammensetzung von Abbildugnen definiert.

Interpretation der halbgeordneten Mengen als Kategorie
Interpretation der topologischen Räume als Kategorien

3 Spezielle Objekte

Ein Objekt I der Kategorie C heißt initiales Objekt oder auch Anfangsobjekt, wenn es für jedes Objekt X von C genau einen Morphismus

$$I \longrightarrow X$$

gibt. Ein Objekt T der Kategorie C heißt terminales Objekt oder auch Endobjekt, wenn es für jedes Objekt X von C genau einen Morphismus

$$X \longrightarrow T$$

gibt. Ein Null-Objekt der Kategorie C ist ein Objekt, welches gleichzeitig initial und terminal ist.

Bemerkung

Ist C eine Kategorie mit Nullobjekt 0, so gibt es für je zwei Objekte X und Y von C einen Morphismus $X \longrightarrow Y$, der sich über das Nullobjekt 0 faktorisiert, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \\ & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Dieser Morphismus heißt Null-Morphismus von Hom(X, Y) und wird meist mit 0 bezeichnet.

Beispiele

Die leere Menge ist ein initiales Objekt von **Ens**. Die Mengen mit genau einem Element sind die terminalen Objekte von **Ens**. Die Kategorie **Ens** besitzt keine Null-Objekte.

Der Null-Vektorraum ist ein Null-Objekt von Vect_K für jeden Körper K. Die triviale Gruppe (mit nur einem Element) ist ein Null-Objekt von **Ab** und **Groups**.

4 Spezielle Morphismen: Monomorphismen, Epimorphismen, Isomorphismen, Automorphismen

Ein Endomorphismus einer Kategorie C ist ein Morphismus $f: X \to Y$ mit $X = Y$.

Ein Morphismus $f: X \to Y$ der Kategorie C heißt Monomorphismus, wenn für je zwei unterschiedliche Morphismen g', g'' mit dem Ziel X auch die Kompositionen $f\circ g'$ und $f\circ g''$ verschieden sind, d.h. die die folgende Implikation besteht

$$f\circ g' = f\circ g'' \Rightarrow g' = g''.$$

Ein Morphismus $f: X \to Y$ der Kategorie C heißt Epimorphismus, wenn für je zwei unterschiedliche Morphismen g', g'' mit der Quelle Y auch die Kompositionen $g'\circ f$ und $g''\circ f$ verschieden sind, d.h. die die folgende Implikation besteht

$$g'\circ f = g''\circ f \Rightarrow g' = g''.$$

Ein Morphismus $f: X \to Y$ der Kategorie C heißt Isomorphismus, wenn es in C einen Morphismus $g: Y \to X$ gibt mit

$$g\circ f = id_X \text{ und } f\circ g = id_Y.$$

Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus $f: X \to Y$ mit $X = Y$.

5 Beipiele: Epimorphie und Surjektivität, Bijektvität und Isomorphie

Sei X eine Kategorie, deren Morphismen Abbildungen sind und deren Morphismen-Komposition die gewöhnliche Zusammensetzung von Abbildungen ist. Dann sind surjektive Abbildungen Epimorphismen und injektive Abbildungen Monomorphismen.

Beispiel:
In der Kategorie der topologischen Räume (oder der Kategorie der metrischen Räume) ist die natürliche Einbettung

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x,$$

der rationalen in die reellen Zahlen ein Epimorphismus (welcher nicht surjektiv ist).

Beispiel:
Sei C die Kategorie, deren einziges Objekt die Menge der reellen Zahlen ist,

$$|C| = \{\mathbb{R}\}.$$

Die Menge

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

bestehe aus den Abbildungen

$$f{:}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

mit

$$f(x) = f(-x) \ge 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Man beachte, die Abbildung

$$id{:}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto |x|,$$

hat die Eigenschaften des identischen Morphismus: für jeden Morphismus f und jedes reelle x gilt:

$id(f(x)) = |f(x)| = f(x)$ (da die Werte von f nicht-negativ sind.
$f(id(x)) = f(|x|) = f(x)$ (wegen $f(x) = f(-x)$).

Kein Morphismus f dieser Kategorie ist injektiv (wegen $f(x) = f(-x)$).
Die Abbildung

$$f{:}\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow x^2,$$

ist ein Morphismus dieser Kategorie. Für zwei Morphismen

$$g', g'': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$fg' = fg''$$

gilt $g'(x)^2 = g''(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $|g'(x)| = |g''(x)|$. Da die Werte von g' und g'' nicht-negativ sind, folgt $g'((x) = g''(x)$ für alle x, also $g' = g''$. Mit anderen Worten, f ist ein Monomorphismus.

Beispiel:
Wir betrachten die Kategorie $\mathrm{Filt}_{K,I}$ mit $I = \{0,1\}$ (versehen mit der natürlichen Ordnung). Bezeichne X den Vektorraum K mit der Filtration

$$0 \subseteq K$$

und Y den Vektorraum K mit der Filtration

$$K \subseteq K.$$

Die identischen Abbildung definiert dann einen Morphismus

$$f{:}\ X \to Y.$$

Dieser ist kein Isomorphismus.

6 Funktoren

Seien C und D zwei Kategorien. Ein <u>Funktor</u> oder auch <u>kovarianter Funktor</u>

$$F{:}\ C \longrightarrow D$$

besteht aus einer Abbildung

$$F\colon |C| \longrightarrow |D|,\ X \mapsto F(X),$$

und für je zwei Objekte X und Y von C aus einer Abbildung

$$F\colon \mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X), F(Y)),\ X \xrightarrow{\alpha} Y \ \mapsto F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y).$$

Dabei gilt

1. $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ für jedes Objekt X von C.
2. $F(f\circ g) = F(f)\circ F(g)$ für je zwei Morphismen $X \xrightarrow{g} Y$ und $Y \xrightarrow{f} Z$ von C.

Ein Kofunktor oder auch kontravarianter Funktor $C \longrightarrow D$ ist ein Funktor $C^{op} \longrightarrow D$.

7 Beispiele für Funktoren

(i) Der kovariante Hom-Funktor. Für jede Kategorie C und jedes Objekt X von C ist durch

$$h_X\colon C \longrightarrow \mathrm{Ens},\ Z \mapsto \mathrm{Hom}(X, Z),\ Z \xrightarrow{f} Z' \mapsto (X \xrightarrow{\alpha} Z \mapsto X \xrightarrow{f\alpha} Z')$$

ein Funktor definiert, der kovariante Hom-Funktor.

(ii) Der kontravariante Hom-Funktor. Für jede Kategorie C und jedes Objekt X von C ist durch

$$h^X\colon C^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens},\ Z \mapsto \mathrm{Hom}(Z, X),\ Z \xrightarrow{f} Z' \mapsto (Z' \xrightarrow{\alpha} X \mapsto Z \xrightarrow{\alpha f} X)$$

ein Kounktor definiert, der kontrvariante Hom-Funktor.

(iii) Der duale Vektorraum. Der Übergang zum dualen Vektorraum und zur dualen Abbildung definiert einen kontravarianten Funktor

$$\mathrm{Vect}_K \longrightarrow \mathrm{Vekt}_K,\ V \mapsto V^*,\ f \mapsto f^*.$$

(iv) Direkte Summen von Vektorräumen. Für jeden K-Vektorraum V definiert die direkte Summe mit V einen Funktor

$$V\oplus\colon \mathrm{Vect}_K \longrightarrow \mathrm{Vect}_K,\ W \mapsto V\oplus W,\ f \mapsto \mathrm{Id}_V\oplus f.$$

(v) Tensorprodukte. Für jeden K-Vektorraum V definiert das Tensorprodukt mit V einen Funktor

$$\otimes_K V\colon \mathrm{Vect}_K \longrightarrow \mathrm{Vect}_K,\ W \mapsto W\otimes_K V,\ f \mapsto f\otimes \mathrm{Id}_V.$$

Für jeden Körper K und jeden Teilkörper $k \subseteq K$ definiert das Tensorprodukt mit K übert k einen Funktor

$$\otimes_k K\colon \mathrm{Vect}_k \longrightarrow \mathrm{Vect}_K,\ V \mapsto V\otimes_k K,\ f \mapsto f\otimes \mathrm{Id}_K.$$

(vi) Faktorräume. Seien K ein Körper und C die Kategorie der Paare (V, W) bestehend aus einem K-Vektorraum V und einem K-linearen Unterraum $W \subseteq V$. Die Morphismen

$$(V, W) \longrightarrow (V', W')$$

der Kategorie C seien die K-linearen Abbildungen $f\colon V \longrightarrow V'$ mit $f(W) \subseteq W'$. Dann ist durch

$$F\colon C \longrightarrow \mathrm{Vect}_K,\ (V, W) \mapsto V/W,$$

ein Funktor definiert. Der zum Morphismus f: (V, W) $\longrightarrow$ (V', W') gehörige Morphismus F(f) sei dabei die lineare Abbildung

$$F(f): V/W \longrightarrow V'/W', v + W \mapsto f(v) + W'.$$

Bemerkung
Wie viele Objekte der Mathematik bilden auch aud Funktoren eine Kategorien. Die Morphismen dieser Kategorien heißen natürliche Transformationen oder auch funktorielle Morphimen.

8 Natürliche Transformationen

Seien C und D Kategorien und

$$F, G: C \longrightarrow D$$

zwei Funktoren. Eine natürliche Transformation

$$\xi: F \longrightarrow G$$

ordnet jedem Objekt X von C einen Morphismus

$$\xi_X: F(X) \longrightarrow G(X)$$

zu, wobei für jeden Morphismus α: X $\longrightarrow$ das folgenden Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\xi_X} & G(X) \\ F(\alpha)\downarrow & & \downarrow G(\alpha) \\ F(X') & \xrightarrow{\xi_{X'}} & G(X') \end{array}$$

Sind alle ξ_X Isomorphismen der Kategorie D, so besitzt die natürliche Transformation ξ eine Umkehrung

$$G \longrightarrow F$$

und ist ein Isomorphismus in der Kategorie

Funkt(C, D)

der Funktoren C $\longrightarrow$ D und natürlichen Transformationen.

Beispiel 1
Seien K ein Körper und C die oben definierte Kategorie der Paarer (V, W) aus einem K-Vektorraum V und einem K-linearen Unterraum W $\subseteq$ Weiter betrachten wir die Funktoren

$$F: C \longrightarrow Vect_K, (V, W) \mapsto V, f \mapsto f,$$

und

$$G: C \longrightarrow Vect_K, (V, W) \mapsto V/W.$$

Dann ist die Abbildung

$$(V, W) \mapsto \rho: V \longrightarrow V/W,$$

welche jedem Paar (V, W) die natürliche Abbildung auf den Faktorraum zuordnet, eine natürliche Abbildung, denn nach Definition von G ist für jeden Morphismus

$$f: (V, W) \longrightarrow (V', W')$$

von C das folgende Diagramm kommutativ.[84]

[84] G(f) ist definiert als die eindeutig bestimmte K-lineare Abbildung, für welche dieses Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} V=F(V,W) & \xrightarrow{\rho} & G(V,W)=V/W \\ {\scriptstyle F(f)=f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ V'=F(V',W') & \xrightarrow{\rho} & G(V',W')=V'/W' \end{array}$$

Beispiel 2
Seien C = D = $Vect_K$,

$$F = Id: C \longrightarrow D, V \mapsto V, f \mapsto f,$$

der identische Funktor und

$$G: C \longrightarrow D, V \mapsto V^{**}, f \mapsto f^{**},$$

der Funktor der jeden K-Vektorraum auf dessen doppeltes Dual und jede K-lineare Abbildung auf deren doppeltes Dual abbildet. Dann ist durch

$$V \longrightarrow V^{**}, v \mapsto (\ell \mapsto \ell(v)),$$

eine natürliche Transformation F $\longrightarrow$ G. Betrachtet man anstelle beliebiger K-Vektorträume nur solche endlicher Dimension, so sind alle diese linearen Abbildungen Isomorphismen. Die natürliche Transformation besitzt eine Umkehrung und ist ein Isomorphismus in der Kategorie

$$Funct(C, D)$$

der Funktoren C $\longrightarrow$ D und natürlichen Abbildungen.

Beispiel 3
Seien K ein Körper, R eine K-Algebra, C = D = $Vect_K$,

$$F = Id, C \longrightarrow D, W \mapsto W, f \mapsto f,$$

der identische Funktor und

$$G: C \longrightarrow D, W \mapsto W\otimes_K R,$$

der durch das Tensorprodukt mit R definierte Funktor. Dann ist durch

$$W \longrightarrow W\otimes_K R, w \mapsto w\otimes 1,$$

eine natürliche Transformation F $\longrightarrow$ G definiert.

Beispiel 4
Seien F: $C^{op} \longrightarrow$ Ens ein Funktor, X $\in$|C| ein Objekt und u$\in$F(X) ein Element. Für jedes Objekt Z von C betrachten wir die Abbildung

$$\xi = \xi_X:h(Z) := Hom_C(Z, X) \longrightarrow F(Z), Z \xrightarrow{\alpha} X \mapsto F(\alpha)(u). \tag{1}$$

Man beachte, weil F kontravariant ist als Funktor auf C, ist F(α) eine Abbildung

$$F(X) \longrightarrow F(Z),$$

d.h. (1) ist eine korrekt definierte Abbildung. Außerdem ist für jeden Morphismus

$$Z \xrightarrow{f} Z'$$

das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} Hom(Z',X) & \xrightarrow{\xi} & F(Z') \\ {\scriptstyle h(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ Hom(Z,X) & \xrightarrow{\xi} & F(Z) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Z'\xrightarrow{\alpha'}X & \mapsto & F(\alpha)(u) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & F(f)(F(\alpha')(u)) \\ & & \| \\ Z\xrightarrow{\alpha'f}X & \mapsto & F(\alpha'f)(u) \end{array}$$

Mit anderen Worte, die Familie der ξ_X definiert eine natürliche Transformation

$$h \longrightarrow F.$$

Umgekehrt liest man aus dem kommutativen Viereck mit einer beliebigen natürlichen Transformation ξ ab, daß jede natürliche Transformation

$$h = h_X \longrightarrow F$$

auf diese Weise zustande kommt: Man setze

$$Z' := X \text{ und } u := \xi(1_X).$$

Dann ergibt sich aus der Kommativität des Vierecks für $\alpha' := 1_X$

$$\begin{aligned} \xi(Z \xrightarrow{f} X) &= \xi(h(f)(1_X)) && \text{(nach Definition von h(f))} \\ &= F(f)(\xi(1_X)) && \text{(Kommutativität des Vierecks)} \\ &= F(f)(u), \end{aligned}$$

d.h. die Abbildung ξ ist durch die Abbildungsvorschrift (1) gegeben.

9 Darstellbare Funktoren

Ein Funktor

$$F: C^{op} \longrightarrow Ens$$

heißt darstellbar, wenn es ein Objekt $X \in C$ gibt mit der Eigenschaft, daß F isomorph ist zum Funktor

$$h_X = Hom(?, X): C^{op} \longrightarrow Ens,\ Y \mapsto Hom(Y, X).$$

ist. Das Objekt X heißt dann darstellendes Objekt für F.
Sei

$$\xi: h_X \xrightarrow{\cong} F$$

die natürliche Transformation, welche die Isomorphie von h_X und F vermittelt.
Dann heißt das Bild des identischen Morphismus

$$1_X \in h_X(X) = Hom(X, X)$$

bei

$$\xi_X: h_X(X) \longrightarrow f(X)$$

darstellendes Element oder für F und wird mit

$$u_F = u_{F,X} = \xi_X(1_X) \in f(X)$$

bezeichnet. Das Paar $(X, u_{F,X})$ heißt auch darstellendes Paar.
Ein Funktor

$$f: C \longrightarrow Ens$$

heißt kodarstellbar, wenn er als Funktor

$$(C^{op})^{op} \longrightarrow Ens$$

darstellbar ist.

Beispiel

Seien C eine Kategorie mit dem Null-Objekt 0 und

$$f: X \longrightarrow Y$$

ein Morphismen. Für jedes Objekt Z sei

$$K(Z) := \{\alpha\in\mathrm{Hom}(Z, X) \mid f\circ\alpha = 0\}$$

und für jeden Morphismus $\xi: Z \longrightarrow Z'$ sei $K(\xi)$ die Abbildung

$$K(\xi): K(Z') \longrightarrow K(Z),\ Z' \xrightarrow{\alpha} X \ \mapsto\ Z \xrightarrow{\alpha\xi} X.$$

Dann ist

$$K: C^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

ein Funktor, der genau dann darstellbar ist, wenn f einen Kern besitzt, und die Kerne von f ist dann darstellende Objekte von k.

Beispiel

Seien U, V, W Vektorräum über dem Körper K und bezeichne

$$L(U, V; W)$$

die Menge der über K bilinearen Abbildungen $U\times V \longrightarrow W$. Dann ist der Funktor

$$K\text{-Mod} \longrightarrow \mathrm{Ens},\ W \mapsto L(U, V; W),$$

kodarstellbar. Das Tensorprodukt $U\otimes_K V$ ist kodarstellendes Objekt und die natürliche Abbildung

$$U \times V \longrightarrow U\otimes_K V,\ (u, v) \mapsto u\otimes v,$$

das kodarstellende Element.

10 Darstellbare Funktoren und darstellende Paare

(i) Das darsttlende Paar ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

(ii) Ein darstellbarer Funktor ist durch sein darstellbares Paar bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Zu (i). Seien

$$F: C^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

ein darstellbarer Funktor und (X, u) mit $u \in F(X)$ ein darstellendes Paar. Sei

$$\xi: h = h_X \xrightarrow{\cong} F$$

der zugehörige funktorielle Isomorphismus. Für beliebige Morphismus

$$f: Z \longrightarrow Z'$$

und

$$\alpha: Z' \longrightarrow X$$

ist dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(Z',X) & \xrightarrow{h(f)} & \mathrm{Hom}(Z,X) \\
 & h(\alpha)\nwarrow \quad \nearrow h(\alpha f) & \\
\xi\downarrow & \mathrm{Hom}(X,X) & \downarrow\xi \\
 & | & \\
F(Z') & \longrightarrow & F(Z) \\
F(\alpha)\nwarrow & \xi\downarrow F(f) & F(\alpha f)\nearrow \\
 & F(f) &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
Z' \xrightarrow{\alpha} X & \mapsto & Z \xrightarrow{\alpha f} X \\
\downarrow & \nwarrow \quad \nearrow & \downarrow \\
 & 1_X & \\
\xi(\alpha) & \mapsto & \xi(\alpha f) \\
\searrow & \downarrow & \swarrow \\
 & u &
\end{array}$$

kommutativ. Die vertikalen mit ξ gekennzeichneten Pfeile bezeichnen dabei bijektive Abbildungen. Insbesondere gibt es für jedes Element

$$x \in F(Z')$$

genau ein $\alpha \in \mathrm{Hom}(Z', X)$ mit

$$x = \xi(\alpha) = \xi(h(\alpha)(1_X)) = F(\alpha)(\xi(1_X)) = F(\alpha)(u),$$

d.h.

$$x = F(\alpha)(u) \text{ für genau ein } \alpha.$$

Sei jetzt

$$(Y, v) \text{ mit } v \in F(Y)$$

ein zweites darstellendes Paar. Weil (X, u) darstellend ist, gilt

$$v = F(\alpha)(u) \text{ für genau ein } \alpha\colon Y \longrightarrow X.$$

Weil auch (Y, v) darstellend ist, gilt auch

$$u = F(\beta)(v) \text{ für genau ein } \beta\colon X \longrightarrow Y.$$

Weil F ein Funktor ist, folgt

$$u = F(\beta)(F(\alpha)(u)) = F(\alpha\beta)(u)$$
$$v = F(\alpha)(F(\beta)(v)) = F(\beta\alpha)(v)$$

d.h.

$$u = F(\alpha\beta)(u)$$
$$v = F(\beta\alpha)(v)$$

Weil (X, u) und (Y, v) darstellend sind, sind die Morphismen $\alpha\beta$ bzw. $\beta\alpha$ durch die letzten beiden Bedingungen eindeutig bestimmt. Diese Bedingungen sind aber auch erfüllt, wenn $\alpha\beta$ bzw. $\beta\alpha$ durch die identischen Morphismen ersetzt. Deshalb muß gelten

$$\alpha\beta = 1_X \text{ und } \beta\alpha = 1_Y,$$

d.h. α und β sind zueinander inverse Isomorphismen. Insbesondere sind X und Y isomorph.

Zu (ii). Der Funktor $h = h_X$ ist durch das Objekt X vollständig festgelegt, Die zweite Koordinaten des darstellenden Paars beschreibt, wie die Isomorphie $h \longrightarrow F$ zu realisieren ist.

QED.

11 Adjungierte Funktoren

Zwei Funktoren $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ heißen adjungiert (genauer (F, G) ist ein adjungiertes Paar, bzw. F ist linksadjunkiert zu G und G ist rechtsadjungiert zu F), wenn die beiden Funktoren

$$\mathcal{C}\times\mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Ens},\ (X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X), Y),$$

und

$$\mathcal{C}\times\mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Ens},\ (X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, Y),$$

zueinander isomorph sind,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)). \tag{1}$$

Bemerkungen

(i) Insbesondere ist für jedes feste Y der Funktor auf der linken Seite von (1) ein darstellbarer Funktor mit dem darstellenden Objekt G(Y). Das Objekt G(Y) ist somit für jedes Y durch den Funktor F bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt.

(ii) Eine etwas genauere Betrachtung zeigt, daß der Funktor G, falls er existiert, durch F bis auf natürliche funktorielle Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

(iii) Durch Übergang zu den dualen Kategorien sieht man, daß auch der Funktor F, falls er existiert, durch G bis auf natürliche funktorielle Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

(iv) Setzt man in (1) für Y = F(X) ein, so erhält man auf der rechten Seite einen Morphismus

$$\xi_X: X \longrightarrow G(F(X)),$$

der dem identischen Morphismus $F(X) \longrightarrow F(X)$ auf der linken Seite entspricht. Die Morphismen ξ_X setzen sich zu einem funktoriellen Morphismus

$$\xi: Id \longrightarrow G \circ F$$

von Funktoren $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ zusammen.

(v) Analog, setzt man in (1) für X = G(Y) ein, so erhält man auf der linken Seite einen Morphismus

$$\eta_Y: F(G(Y)) \longrightarrow Y,$$

der dem identischen Morphismus $G(Y) \longrightarrow G(Y)$ auf der rechten Seite entspricht. Die Morphismen η_Y setzen sich zu einem funktoriellen Morphismus

$$\eta: F \circ G \longrightarrow Id$$

von Funktoren $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ zusammen.

(vi) Die beiden funktoriellen Morphismen ξ und η definieren den funktoriellen Morphismus (1) bzw. dessen Inverses: ist

$$\alpha: F(X) \longrightarrow Y$$

ein Element der linken Hom-Menge von (1), so kann man auf α den Funktor G anwenden und das Ergebnis mit ξ_X zusammensetzen. Man erhält so gerade das Bild von α bei der Abbilduing (1).
Umgekehrt, ist

$$\beta: X \longrightarrow G(Y)$$

ein Element aus der rechten Hom-Menge von (1), so kann man auf β den Funktor F anwenden und das Ergebnis mit η_Y zusammensetzen. Man erhält so gerade das Urbild von β bei der Abbildung (1).

(vii) Die Aussage, daß beiden gerade beschriebenen Abbildungen

$$\alpha \mapsto G(\alpha) \circ \xi_X$$

und

$$\beta \mapsto \eta_Y \circ F(\beta)$$

zueinander inverse funktorielle Morphismen definieren, bedeutet gerade, daß gilt

$$\eta_Y \circ F(G(\alpha)) \circ F(\xi_X) = \alpha$$

und

$$G(\eta_Y) \circ G(F(\beta))) \circ \xi_X = \beta$$

für alle α und alle β.

(viii) Die Aussage, daß (F, G) ein adjungiertes Paar bilden ist gerade äquivalent zur Existenz von natürlichen Transformationen

$$\xi: Id \longrightarrow G\circ F$$

und

$$\eta: F\circ G \longrightarrow Id$$

für welche die letzten beiden Bedingungen von (vii) erfüllt sind. Man kann diese Bedingungen noch abschwächen, vgl.

Schubert: Kategorien

12 Additive Kategorien (frei nach Bass)

12.1 Definition

Eine Kategorie C heißt additiv, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) C besitzt ein Null-Objekt, d.h. ein Objekt das gleichzeitig initial und terminal ist.
(ii) C besitzt endlich direkte Summen und endlich direkte Produkte.
(iii) Die Hom-Mengen von C sind abelsche Gruppen.
(iv) Die Morphismen-Komposition

$$Hom(A, B)\times Hom(B,C) \longrightarrow Hom(A, C), (f, g) \mapsto g\circ f,$$

ist bilinear.

Diese Bedingungen lassen sich etwas abschwächen und durch die folgenden Axiome ersetzen (vgl. Bass: Algebraic K-theory, Chapter I, §3).

(Add Kat. 0). C besitzt ein Null-Objekt.

(Add Kat. 1). C besitzt endliche direkte Summen und endliche direkte Produkte.

Matrizen-Schreibweise für Morphismen.

Nach Definition der direkten Summe gibt es für je zwei Morphismen

$$f_1: A_1 \longrightarrow B \text{ und } f_2: A_2 \longrightarrow B$$

genau einen Morphismus

$$\varphi: A_1 \oplus A_2 \longrightarrow B$$

dessen Zusammensetzung für j = 1,2 mit der natürlichen Einbettung von A_j in die direkte Summe gleich f_j ist,

$$f_j = \varphi\circ q_j.$$

Man schreibt dann

$$\varphi = (f_1,f_2).$$

Analog gibt es nach der Definition des direkten Produkts für je zwei Morphismen

$$g_1: A \longrightarrow B_1 \text{ und } g_2: A \longrightarrow B_2$$

genau einen Morphismus

$$\varphi: A \longrightarrow B_1 \times B_2$$

dessen Zusammensetzung für j = 1,2 mit der natürlichen Projektion des direkten Produkts auf B_j gleich g_j ist,

$$g_j = p_j \circ \varphi.$$

Man schreibt dann

$$\varphi = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

Weiter kann man für je zwei Objekte A_1 und A_2 einen Morphismus

$$\varphi: A_1 \oplus A_2 \longrightarrow A_1 \times A_2$$

konstruieren, dessen Zusammensetzung mit der j-ten natürlichen Einbettung

$$q_j: A_j \longrightarrow A_1 \oplus A_2$$

und der i-ten natürlichen Projektion

$$p_i: A_1 \times A_2 \longrightarrow A_i$$

gleich einem vorgegebenen Morphismus

$$a_{ij} = p_i \varphi q_j: A_j \longrightarrow A_i$$

ist. Man schreibt dann

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}, a_{12}) \\ (a_{21}, a_{22}) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right).$$

(Add Kat. 2). Für je zwei Objekte A und B von C ist $\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}: A \oplus B \longrightarrow A \times B$ ein Isomorphismus.
Dabei bzeichne $0: A \longrightarrow B$ den <u>Null-Morphismus</u>, d.h. den eindeutig bestimmten Morphismus $A \longrightarrow B$, der sich über das Null-Objekt faktorisiert.

Auf Grund dieses Axioms hat für je zwei Objekte A und B von C die direke Summe $A \oplus B$ die Universalitätseigenschaft von $A \times B$ und das direkte Produkt $A \times B$ hat die Universalitätseigenschaft von $A \oplus B$. Wir können also beide Konstruktionen als gleich ansehen und vereinbaren

$$A \oplus B = A \times B.$$

Der Morphismus $\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}$ wird dann zum identischen Morphismus.

<u>Definition der Addition von Morphismen</u>.
Bezeichne

$$\Delta_A := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}: A \longrightarrow A \times A = A \oplus A$$

für jedes Objekt A die <u>Diagonal-Einbettung</u>, d.h. den eindeutig bestimmen Morphismus, dessen Zusammensetzung mit den beiden Projektionen auf A der identische Morphismus ist,

$$p_i \circ \Delta_A = 1_A.$$

Weiter bezeichne

$$\Sigma_A = (1,1): A \oplus A = A \times A \longrightarrow A$$

für jedes Objekt den Summen-Morphismus, d.h. den eindeutig bestimmen Morphismus, dessen Zusammensetzung mit den beiden Einbettungen von A in die direkte Summe der identische Morphismus ist,

$$\Sigma_A \circ q_j = 1_A.$$

Für je zwei Morphismen

$$a: A \longrightarrow B \text{ und } b: A \longrightarrow B$$

setzt man dann

$$a+b = \Sigma_B \circ (a \oplus b) \circ \Delta_A : A \xrightarrow{\Delta_A} A \oplus A \xrightarrow{a \oplus b} B \oplus B \xrightarrow{\Sigma_B} B \qquad (1)$$

mit $a \oplus b = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Satz

Die eben definierte Addition von Morphismen definiert auf Hom(A, B) die Struktur einer kommutativen Halbgruppe mit neutralen Element, wobei der Null-Morphismus

$$0: A \longrightarrow B$$

die Rolle des neutralen Elements spielt.

Außerdem ist die Morphismen-Komposition bezüglich dieser Halbgruppen-Struktur bilinear.

(Add Kat. 3). Die Hom-Mengen sind bezüglich der oben definierten Addition abelsche Gruppen.

12.2 Vergleich der Axiome

Eine Kategorie C, welche den Bedingungen

(Add Kat. 0) - (Add Kat. 3)

genügt ist additiv.

Umgekehrt genügt jede additive Kategorie C diesen Bedingungen, und die Addittion von Morphismen in C ist durch die Formel (1) gegeben.

Zum Beweis.

Der erste Teil der Behauptung ergibt sich aus den gerade durchgeführten Betrachtungen. Sei umgekehrt C eine abelsche Kategorie. Dann sind trivialerweise die Bedingungen

(Add Kat. 0) und (Add Kat 1)

erfüllt.

Beweis von (Add Kat. 2). Wir haben zu zeigen, für je zwei Objekte A_1 und A_2 ist der Morphismus

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix} : A_1 \oplus A_2 \longrightarrow A_1 \times A_2$$

ein Isomorphismus. Wir setzen

$$\psi = q_1 \circ p_1 + q_2 \circ p_2 : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_1 \oplus A_2.$$

wobei für i = 1 und i = 2 der Morphismus $p_i: A_1 \times A_2 \longrightarrow A_i$ die i-te natürliche Projektion des direkten Produkts und $q_i: A_i \longrightarrow A_1 \oplus A_2$ die i-te natürliche Einbettung in die direkte Summe sei.

Es reicht zu zeigen, φ und ψ sind zueinander invers. Es gilt

$$\psi\circ\varphi\circ q_1 = q_1\circ p_1\circ\begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix}\circ q_1 + q_2\circ p_2\circ\begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix}\circ q_1$$
$$= q_1\circ 1_{A_1} + q_2\circ 0$$
$$= q_1$$

und

$$\psi\circ\varphi\circ q_2 = q_1\circ p_1\circ\begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix}\circ q_2 + q_2\circ p_2\circ\begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix}\circ q_2$$
$$= q_1\circ 0 + q_2\circ 1_{A_2}$$
$$= q_2$$

Auf Grund der Universalitätseigenschaft der direkten Summe ergibt sich

$$\psi\circ\varphi = 1_{A_1\oplus A_2}$$

Weiter gilt

$$p_1\circ\varphi\circ\psi = p_1\circ\begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix}\circ q_1\circ p_1 + p_1\circ\begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix}\circ q_2\circ p_2$$
$$= 1_{A_1}\circ p_1\circ + 0\circ p_2$$
$$= p_1$$

und

$$p_2\circ\varphi\circ\psi = p_2\circ\begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix}\circ q_1\circ p_1 + p_2\circ\begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix}\circ q_2\circ p_2$$
$$= 0\circ p_1\circ + 1_{A_2}\circ p_2$$
$$= p_2$$

Auf Grund der Universalitätseigenschaft des direkten Produkts ergibt sich

$$\varphi\circ\psi = 1_{A_1\oplus A_2}$$

Wir haben die Gültigkeit von (Add Kat. 2) für aditive Kategorien bewiesen.
Zum Beweis von (Add Kat. 3) benötigen wir die beiden nachfolgenden Kriteriem für direkte Summen und direkte Produkte.
QED.

12.3 Kriterium für direkte Summen

Sei C eine additve Kategorie. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Das Objekt A ist bezüglich der Morphismen i': A' $\longrightarrow$ A und i": A" $\longrightarrow$ A eine direkte Summe von A' und A".

(ii) Es gibt Morphismen $p': A \longrightarrow A'$ und $p'': A \longrightarrow A''$ für welche die folgenden Identitäten bestehen.
1. $p'i' = 1_{A'}$, und $p''i'' = 1_{A''}$
2. $p'i'' = 0$ und $p''i' = 0$
3. $i'p' + i''p'' = 1_A$.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Seien $A := A' \oplus A''$ und

$$p' := (1, 0): A \longrightarrow A',\ p'' := (0,1): A \longrightarrow A''.$$

Dann gilt

$$p'i' = 1,\ p'i'' = 0,\ p''i' = 0,\ p''i'' = 1$$

Zum Abschluß des Beweises berechnen wir die Matrix von

$$\varphi = i'p' + i''p''.$$

Es gilt

$$p'\varphi i' = p'i'p'i' + p'i''p''i' = 1 + 0 = 1$$
$$p'\varphi i'' = p'i'p'i'' + p'i''p''i'' = 0 + 0 = 0$$
$$p''\varphi i' = p''i'p'i' + p''i''p''i' = 0 + 0 = 1$$
$$p''\varphi i'' = p''i'p'i'' + p''i''p''i'' = 0 + 1 = 1$$

Wenn wir in der obigen Rechnung φ durch den identischem Morphismus ersetzen, erhalten wir dieselben Ergebnisse:

$$p'1i' = p'i' = 1$$
$$p'1i'' = p'i'' = 0$$
$$p''ii' = p''i' = 0$$
$$p''1i'' = p''i'' = 1.$$

Deshalb gilt $\varphi = 1$.

(ii) ⇒ (i). Seien zwei Morphismen $j': A' \longrightarrow B$ und $j'': A'' \longrightarrow B$ gegeben. Wir setzen

$$\varphi = j'p' + j''p'': A \longrightarrow B.$$

Dann gilt

$$\varphi i' = j'p'i' + j''p''i' = j' \circ 1_{A'} + j'' \circ 0 = j'$$
$$\varphi i'' = j'p'i'' + j''p''i'' = j' \circ 0 + j'' \circ 1_{A''} = j''$$

Wir haben noch zu zeigen, daß φ durch die Bedingungen

$$\varphi i' = j'$$
$$\varphi i'' = j''$$

eindeutig bestimmt ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\varphi = \varphi \circ 1_A = \varphi \circ (i'p' + i''p'') = j'p' + j''p'',$$

d.h. φ ist durch j' und j'' eindeutig festgelegt.
QED.

12.4 Kriterium für direkte Produkte

Sei C eine additve Kategorie. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Das Objekt A ist bezüglich der Morphismen $p': A \longrightarrow A'$ und $p'': A \longrightarrow A''$ eine direkte Summe von A' und A''.

(ii) Es gibt Morphismen p': A $\longrightarrow$ A' und p'': A $\longrightarrow$ A'' für welche die folgenden Identitäten bestehen.
1. $p'i' = 1_{A'}$, und $p''i'' = 1_{A''}$
2. $p'i'' = 0$ und $p''i' = 0$
3. $i'p' + i''p'' = 0$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). $A = A' \times A''$ und

$$i' := \binom{1}{0} : A' \longrightarrow A\ ,\ i'':= \binom{0}{1}: A'' \longrightarrow A.$$

Dann gilt

$p'i' = 1, p'i' = 0, p''i' = 0, p''i'' = 1.$

Zum Schluß des Beweises berechnen wir die Matrix von

$\varphi = i'p' + i''p''.$

Dieselbe Rechnung wie beim Beweis der Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) zur Charakterisierung der direkten Summen zeigt, es gilt $\varphi = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Seien zwei Morphismen q': B $\longrightarrow$ A' und q'': B $\longrightarrow$ A'' gegeben. Wir setkzen

$$\varphi := i'q' + i''q'': B \longrightarrow A.$$

Dann gilt

$p'\varphi = p'i'q' + p'i''q'' = 1_{A'}\circ q' + 0\circ q'' = q'$

$p''\varphi = p''i'q' + p''i''q'' = 0\circ q' + 1_{A''}\circ q'' = q''$

Wir haben noch zu zeigen, daß φ durch die Bedingungen

$p'\varphi = q'$

$p''\varphi = q''$

eindeutig bestimmt ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist

$\varphi = 1_A\circ\varphi = (i'p' + i''p'')\circ\varphi = i'q' + i''q''$,

d.h. φ ist durch q' und q'' eindeutig festgelegt.

QED.

12.5 Die Matrix einer Zusammensetzung von Morphismen

Auf Grund der letzten beiden Kriterien können wir im folgenden direkte Produkte mit den entsprechenden direkten Summen identifizieren. Jede direkte Summe $A_1\oplus A_2$ ist jetzt also außer mit zwei natürlichen Einbettungen q_i (i = 1,2) auch mit zwei natürlichen Projektionen p_j (j=1,2) versehen, wobei die p's durch die beiden q' eindeutig festgelegt sind und umgekehrt und die p's und q' zusammen den Bedingungen (ii) der beiden obigen Kriterien genügen.

Ein Morphismus

$$\varphi: A_1\oplus A_2 \longrightarrow B_1\oplus B_2$$

ist dann durch die Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} := p_i\varphi q_j$$

gegeben.

Die Zusammensetzung von Morphismen entspricht dabei gerade der Multiplikation der zugehörigen Matrizen.

Genauer: sei

$$\psi : B := B_1 \oplus B_2 \longrightarrow C_1 \oplus C_2$$

ein weiterer Morphismus, dessen Matrix die Einträge

$$b_{ij} := p_i \psi q_j$$

besitzt. Dann hat die Matrix der Zusammensetzung von φ und ψ die folgenden Einträge.

$$\begin{aligned} p_i \psi \varphi q_j &= p_i \psi 1_B \varphi q_j = p_i \psi (q_1 p_1 + q_2 p_2) \varphi q_j \\ &= (p_i \psi q_1)(p_1 \varphi q_j) + (p_i \psi q_2)(p_2 \varphi q_j) \\ &= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} \end{aligned}$$

12.6 Beweis der Äquivalenz der beiden Axiomen-Systeme

Wir haben noch zu zeigen, in einer additiven Kategorie ist Bedingungen

(Add Kat.3)

erfüllt, und die Addition von Morphismen ist durch die Formel (1) gegeben.

Dazu reicht es zu zeigen, die Addition der Morphismen in der Kategorie C ist dieselbe wie diejenige, auf welche sich die Bedingung (Add Kat. 3) bezieht.

Es reicht also zu zeigen, die Morphismen-Addition in C ist gerade die durch Formel (1) gegebene.

Für je zwei Morphismen

$$a_i : A \longrightarrow B\ ,\ i = 1,2$$

von C gilt auf Grund der Bilinearität der Morphismen-Komposition

$$\begin{aligned} p_i \circ (a_1 \oplus 0 + 0 \oplus a_2) \circ q_j &= p_i \circ (a_1 \oplus 0) \circ q_j + p_i \circ (0 \oplus a_2) \circ q_j \\ &=^{85} p_i \circ (a_1 \oplus a_2) \circ q_j \end{aligned}$$

also

$$a_1 \oplus 0 + 0 \oplus a_2 = a_1 \oplus a_2$$

also

$$\begin{aligned} \Sigma_B \circ (a_1 \oplus a_2) \circ \Delta_A &= \Sigma_B \circ (a_1 \oplus 0) \circ \Delta_A + \Sigma_B \circ (0 \oplus a_2) \circ \Delta_A \\ &= (1,1) \circ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1,1) \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (a_1, 0) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (0, a_2) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a_1 + a_2 \end{aligned}$$

QED.

---

[85] Für $i \neq j$ steht auf beiden Seiten Null. Für $i = j = 1$ steht auf beiden Seiten $a_1 + 0 = a_1$, und für $i = j = 2$ steht auf beiden Seiten $a_2 + 0 = a_2$

12.7 Eigenschaften von Morphismen

Seien C eine additive Kategorie,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a'} & B' \\ {\scriptstyle a''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c'} \\ B'' & \xrightarrow{c''} & C \end{array} \qquad \text{(I)}$$

ein Diagramm in C. Betrachten wir

$$A \xrightarrow{f=\begin{pmatrix} a' \\ -a'' \end{pmatrix}} B'\oplus B'' \xrightarrow{g=(c',c'')} C$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Das Diagramm (I) ist genau dann kommutativ, wenn gilt $g\circ f = 0$.

(ii) Das Diagramm (I) ist genau dann kartesisch, wenn gilt $f = \mathrm{Ker}(g)$.

(iii) Das Diagramm (I) ist genau dann kokartesisch, wenn gilt $g = \mathrm{Koker}(f)$.

Beweis. Zu (i). Es gilt

$$0 = gf \Leftrightarrow 0 = (c', c'')\begin{pmatrix} a' \\ -a'' \end{pmatrix} = c'a' - c''a'' \Leftrightarrow \text{(I) ist kommutativ.}$$

Zu (ii). Sei (I) kartesich und sei

$$\alpha: X \longrightarrow B'\oplus B''$$

ein Morphismus mit $g\circ\alpha = 0$. Wir haben zu zeigen, α faktorisiert sich auf genau eine Weise über f.

Wir schreiben α in der Gestalt $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha' \\ -\alpha'' \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$0 = g\alpha = (c', c'')\begin{pmatrix} \alpha' \\ \alpha'' \end{pmatrix} = c'\alpha' - c''\alpha''.$$

Weil (I) kartesich ist, gibt es genau einen Morphismus $\tilde{\alpha}: X \longrightarrow A$ mit

$$a''\tilde{\alpha} = \alpha'' \text{ und } a'\tilde{\alpha} = \alpha',$$

d.h. mit

$$f\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} a' \\ -a'' \end{pmatrix}\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} a'\tilde{\alpha} \\ -a''\tilde{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' \\ -\alpha'' \end{pmatrix} = \alpha.$$

Wir haben gezeigt, $f = \mathrm{Ker}(g)$.

Sei umgekehrt $f = \mathrm{Ker}(g)$ und $\alpha': X \longrightarrow B'$, $\alpha'': X \longrightarrow B''$ ein Paar von Morphismen mit $c'\alpha' = c''\alpha''$. Mit

$$\alpha := \begin{pmatrix} \alpha' \\ -\alpha'' \end{pmatrix}: X \longrightarrow B'\oplus B''$$

gilt dann

$$g\alpha = (c',c'')\begin{pmatrix} \alpha' \\ -\alpha'' \end{pmatrix} = c'\alpha' - c''\alpha'' = 0.$$

Weil f der Kern von g ist, faktorisiert sich α eindeutig über f, d.h. des gibt genau einen Morphismus

$$\tilde{\alpha}: X \longrightarrow A$$

mit $\alpha = f\tilde{\alpha}$, d.h. mit

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ -\alpha'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ -a'' \end{pmatrix}\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} a'\tilde{\alpha} \\ -a''\tilde{\alpha} \end{pmatrix},$$

d.h. mit

$$\alpha' = a'\tilde{\alpha} \text{ und } \alpha'' = a''\tilde{\alpha}.$$

Wir haben gezeigt, (I) ist kartesisch.
Zu (iii). Dies ist gerade die in der dualen Kategorie formulierte Aussage (ii).

QED.

12.8 Satz von Krull-Schmidt

Sei C eine additive Kategorie, in der jeder idempotente Morphismus[86] $e: A \longrightarrow A$ zerfällt.[87] Weiter seien

$$A_i \in C$$

von Null verschiedene Objekte, deren Endomorphismen-Ringe lokale Ringe sind und

$$A = A_1 \oplus ... \oplus A_n .$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.
(i) Jede Zerlegung A in eine direkte Summe kann verfeinert werden zu einer Zerlegung in unzerlegbare[88] direkte Summanden.
(ii) Ist $A \cong B_1 \oplus ... \oplus B_m$ mit B_i unzerlegbar für jedes i, so gilt m = n und bis auf eine Permutation der direkten Summanden ist $B_i \cong A_i$ für jedes i.

Beweis. siehe Bass: Algebraic K-theory, Chapter I, §3, Theorem 3.6.
QED.

13 Abelsche Kategorie

Definition

Ein Kategorie C heißt abelsch, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.
(i) C ist additiv.
(ii) Jeder Moprhismus besitzt einen Kern und einen Kokern.
(iii) Für jeden Morphismus $f: A \longrightarrow B$ ist der natürliche Morphismus

$$\text{Koim}(f) \longrightarrow \text{Im}(f)$$

ein Isomorphismus.

Bemerkung
Diese Bedingungen sind selbtdual, d.h. das Dual einer abelschen Kategorie ist abelsch.

---

[86] d.h. es gilt $e \circ e = e$.

[87] d.h. es gibt Morphismen $B \xrightarrow{q} A \xrightarrow{p} B$ mit $qp = e$ und $pq = 1$.

[88] Ein Objekt A heißt unzerlegbar, wenn es von Null verschieden ist und aus $A = B \oplus C$ folgt, daß $B = 0$ oder $C = 0$ ist.

Exaktheit

Sei $F: C \longrightarrow D$ ein additiver Funktor auf der abelschen Kategorie C mit Werten in der abelschen Kategorie. Der Funktor $F: C \longrightarrow D$ heißt exakt, wenn er exakte Sequenzen von C in exakte Sequenzen von D überführt. Der Funktor F heißt linksexakt, wenn für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$$

von C die Sequenz

$$0 \longrightarrow F(X') \xrightarrow{F(f)} F(X) \xrightarrow{F(g)} F(X'')$$

exakt ist in D. Fordert man stattdessen die Exaktheit der Sequenzen

$$F(X') \xrightarrow{F(f)} F(X) \xrightarrow{F(g)} F(X'') \longrightarrow 0,$$

so heißt F rechtsexakt.

Bemerkungen

(i) Exakte Funktoren sind trivialerweise links- und rechtsexakt.

(ii) Umgekehrt sind additive Funktoren, die kurze exakte Sequenzen in kurze exakte Sequenzen überführen, sogar exakte.

(iii) Linksexakte Funktoren kommutieren mit Kernen: seien $F: C \longrightarrow D$ linksexakt und

$$X \xrightarrow{f} Y$$

ein Morphismus in C. Dann hat man kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow X \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \longrightarrow X \longrightarrow \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow 0$$

also exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow F(\mathrm{Ker}(f)) \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(\mathrm{Im}(f))$$

und

$$0 \longrightarrow F(\mathrm{Im}(f)) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(\mathrm{Coker}(f))$$

Der Kern des rechten Morphismus der ersten Sequenz ändert sich nicht, wenn man ihn durch die Zusammensetzung mit dem linken Monomorphismus der rechten Sequenz ersetzt. Deshalb ist auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow F(\mathrm{Ker}(f)) \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$$

exakt, d.h. es ist $F(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Ker}\, F(f)$.

(iv) Rechtsexakte Funktoren F kommutieren mit Kokernen,

$$F(\mathrm{Koker}(f)) = \mathrm{Koker}\, F(f).$$

Das zeigt man durch dualisieren der Argumente von (iii).

14 Direkte Limites

Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und I eine halbgeordnete Menge mit der Halbordnung '≤'. Ein direktes System von $\mathcal{C}$ über der Index-Menge I ist eine Familie

$$\{\varphi_{\alpha\beta}: X_\alpha \longrightarrow X_\beta\}_{\alpha,\beta\in I, \alpha\le\beta}$$

von Morphismen aus $\mathcal{C}$ mit

1. $\varphi_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{X_\alpha}$ für jedes $\alpha\in I$.

2. $\varphi_{\beta\gamma}\circ\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\gamma}$ für beliebige $\alpha,\beta,\gamma\in I$ mit $\alpha\leq\beta\leq\gamma$.

Das direkte System heißt filtriert, wenn es außerdem für je zwei α, $\beta\in I$ ein $\gamma\in I$ gibt mit $\alpha\leq\gamma$ und $\beta\leq\gamma$.

Ein direkter Limes des obigen direkten Systems ist ein Objekt X von $\mathcal{C}$ zusammen mit einem Morphismus

$$\varphi_\alpha: X_\alpha \longrightarrow X$$

für jedes $\alpha\in I$, so daß für je zwei $\alpha,\beta\in I$ mit $\alpha\leq\beta$ gilt $\varphi_\beta\circ\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha$. Außerdem wird gefordert, daß die Familie der φ_α in dem Sinne universell ist, daß für jede weitere Familie

$$\psi_\alpha: X_\alpha \longrightarrow Y$$

von Morphismen mit $\psi_\beta\circ\varphi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha$ für je zwei $\alpha,\beta\in I$ mit $\alpha\leq\beta$ genau ein Morphismus

$$\varphi: X \longrightarrow Y$$

existiert mit $\psi_\alpha = \varphi\circ\varphi_\alpha$ für jedes α.

Bemerkungen

(i) Der direkte Limes eines direkten Systems ist, falls er existiert, bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt und wird mit

$$\varinjlim_{\alpha\in I} X_\alpha$$

bezeichnet.

(ii) Ein filterierter direkter Limes ist ein direkter Limes eines filtrierten direkten Systems.

(iii) Besteht das obige direkte System nur aus identischen Morphismen, so heißt ein zugehöriger direkter Limes direkte Summe der X_α und wird mit

$$\oplus_{\alpha\in I} X_\alpha$$

bezeichnet. Die zugehörigen Morphismen φ_α heißen natürliche Einbettungen und werden mt

$$q_\alpha: X_\alpha \longrightarrow \oplus_{\alpha\in I} X_\alpha$$

bezeichnet.

(iv) Falls die Kategorie $\mathcal{C}$ additv ist und beliebige direkte Summen und Kokerne besitzt, so besitzt sie auch beliebige direkte Limites. Der direkte Limes des obigen direkten Systems ist in natürlicher Weise isomorph zum Kokern des Morphismus

$$\oplus_{\alpha,\beta\in I,\alpha\leq\beta} X_\alpha \longrightarrow \oplus_{\alpha\in I} X_\alpha$$

dessen Einschränkung

$$X_\alpha \longrightarrow \oplus_{\alpha\in I} X_\alpha$$

auf den direkten Summanden zum Paar (α,β) gerade der Morphismus

$$q_\beta\circ\varphi_{\alpha\beta} - q_\alpha$$

ist.

(v) Sind die Objekte der Kategorie $\mathcal{C}$ Mengen (eventuell mit einer zusätzlichen Struktur) und ist das obige direkte System filtrierend, so liegt jedes Element des direkten Limes im Bild einer der Abbildungen

$$X_\alpha \longrightarrow \varinjlim_{\alpha\in I} X_\alpha .$$

(vi) Sind in der Situation von (v) Elemente $u\in X_\alpha$ und $v\in X_\beta$ gegeben, so sind die Bilder von u und v im direkten Limes genau dann gleich, wenn es ein $\gamma\in I$ gibt mit $\alpha\le\gamma$, $\beta\le\gamma$ und $\varphi_{\alpha\gamma}(u) = \varphi_{\beta\gamma}(v)$.

Literatur

Bucur, I., Deleanu, A.: Introduction to the theory of categories and functors, Wiley-Interscience 1968

Bass, H.: Algebraic K-theory, Benjamin, New York 1968

Bourbaki, N.: Algèbre commutative, Hermann Paris 1961-1965

Demazure, M., Gabriel, P.: Introduction ot algebraic geometry and algebraic groups, North Holland 1980

De Rham, G.: Varieties differentiables, Paris 1954.

Fulton, W.: Intersection theory, Springer, Berlin 1984

Godement, R.: Topologie Algebrique et theorie des faisceaux, Hermann, Paris 1960

Hirsch, M.W.: Differential topology, Springer, New York 1994

Hartshorne, R: Algebraic geometry, Springer 1977

MacLane, S.: Categories. For the working mathematician, Springer 1972

Matsumura, H.: Commutative Algebra, Benjamin, New York 1970

Matsumura, H.: Commutative ring theory, Cambridge University Press 1986

Milnor, D.: Morse theory, Princeton University Press 1963

Mitchell, B.: Theory of categories, Academic Press 1965

Serre, J.-P.: Algèbre locale - Multiplicités, Lecture Notes in Math. 11 (1965), Springer Verlag.

Weil, A.: Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc., Coll. Publ. 29, Providence 1962.

Index

—C—

—D—

—E—

—F—

—G—

—H—

—I—

—J—

—K—

—L—

—M—

—N—

—O—

—P—

—Q—

—R—

—S—

Inhalt

---

[i] Durch Anwenden des Schnitts s auf ein echt kleineres Primideal im Trager von M_p erhielten wir ein echt kleineres Primideal im Träger von M.
[ii] Weil p ein Primideal ist, hat jedes Element von A/p - {0} diese Eigenschaft.