Einführung in die algebraische Geometrie

Vereinbarungen

Alle Ringe seien, wenn nicht explizit anders festgelegt kommutativ und besitzen ein Einselement.

Ringhomomorphismen überführen das Einselement ins Einselement.

Erforderliche Vorkenntnisse

Elementare Kenntnisse zur Algebra:

Gruppen, Ringe, Homomorphiesätze für Gruppen und Ringe, Tensorprodukte über kommutativen Ringen mit 1.

Begriff der Kategorie, Begriff des Funktors.

Elementare Kenntniss zur mengentheoretischen Topologie:

Begriff des topologischen Raums, Begriff der stetigen Abbildung, Begriff der Topologiebasis.

Jeder Ring ist ein kommutativer Ring mit 1. Jeder Ringhomomorphismus ein Homomorphismus von Ringen mit 1, d.h. er überführt das Einselement ins Einselement.

Bezeichnungen

$\sqrt{I}$	Radikal des Ideals I, vgl. 1.2.5.
$\overline{X}$	Abschließung der Menge X bezüglich der Zariski-Topologie, vgl. 1.2.12.
A_p	Lokalisierung das Rings A im Primideal p, vgl. A2.8.
A_f	Quotientenring des Rings A nach den Potenzen des Elements $f\in A$, vgl. A2.8.
$\mathbb{A}^N$	affiner N-Raum über k, vgl. 1.1.2.
Z(X)	die Gruppe der Zyklen der algebraischen Varietät X, vgl. 2.2.8
D(f)	offene Hauptmenge zur regulären Funktion f, vgl. 1.1.6, bzw. zum Ring-Element f, vgl. 1.4.3
Δ	Diagonale des direkten Produkts eines affinen Raums mit sich, vgl. 1.2.11.
f^*	der durch die reguläre Abbildung f auf den Koodinatenringen induzierte Homomorphismus, vgl. 1.2.8.
F	Frobenius-Abbildung, vgl. 1.2.7.
f(p)	Wert der zum Element f des Rings A gehörigen Funktion im Punkt $p\in\mathrm{Spec}\ A$, vgl. 1.4.3.
H(f)	Homogenisierung des Polynoms f, vgl. 2.1.8.
I(X)	Menge der Polynome, welche identisch Null sind auf der Menge X, vgl. 1.1.3., Ideal einer Teilmenge eines Spektrums, vgl. 1.4.3
$I\cdot S^{-1}A$	Ideal des Quotientenrings $S^{-1}A$, welches von der Bildern der Elemente von $I\subseteq A$ bei der natürlichen Abbildung $A\to S^{-1}A$ erzeugt wird, vgl. A2.7.
$J\cap A$	vollständiges Urbild des Ideals J des Quotientenrings $S^{-1}A$ bei der natürlichen Abbildung $A\to S^{-1}A$, vgl. A2.7.
k	algebraisch abgeschlossener Körper, vgl. 1.1.1.

$k[T]$	Polynomring in den Unbestimmten $T_1,...,T_N$ mit Koeffizienten aus k, vgl. 1.1.1.
$k[X]$	Koordinatenring der algebraischen Menge X, vgl. 1.2.1.
LHS	linke Seite der betrachteten Identität
m(A)	maximales Ideal des lokalen Rings, vgl. A2.6.
$\mathcal{O}_{X,x}$	lokaler Ring der Varietät X im Punkt x, vgl. 4.1.1(a) und 4.1.1(b)
p_x	Kern der Auswertungsabbildung φ_x im Punkt x, vgl. 1.4.3.
$\mathbb{P}(V)$	Projektivierung des k-Vektorraums V, vgl. 2.27.
φ_x	Auswertungsabbildung im Punkt x, vgl. 1.4.3
Q(A)	voller Quotientenring des Rings A, vgl. A2.6.
RHS	rechte Seite der betrachteten Identität
$S^{-1}A$	Quotientenring des Rings A bezüglich der multiplikativen Menge S, vgl. A2.1.
$S^{-1}M$	Quotientenmodul des Modul bezüglich der multiplikativen Menge S, vgl. A2.1.
Spec A	Menge der Primideale des Rings A, vgl. 1.4.3.
V(M)	Menge der gemeinsamen Nullstellen der Polynome aus M, vgl. 1.1.3, Menge der Primideale eines Rings, die die Teilmenge M enthalten, vgl. 1.4.3.
$v_{m,N}$	$= \binom{m+N}{m}$, vgl. 2.2.8
$X\times Y$	direktes Produkt der algebraischen Mengen X und Y, vgl. 1.1.12.
Z(F)	der Zyklus zum homogenen Polynom F, vgl. 2.2.8

Vormerkungen

Die algebraische Geometrie kann man als die Theorie der nicht-linearen algebraischen Gleichungssysteme beschreiben, d.h. man nimmt sich beliebig viele Polynome in beliebig (aber endlich?) vielen Variabelen her, setzt diese Null und fragt nach der Lösungsmenge.

Da sich solche Gleichungssyteme selbst in den einfachsten Fällen nahezu nie lösen lassen, geht dabei (fast nie) um deren Lösung, sonder um die Beschreibung der allgemeinen Eigenschaften dieser Lösungsmengen (welche algebraische Mengen heißen).

Man kann versuchen von der Theorie der linearen Gleichungssysteme noch zu retten, was man retten kann, und die Gleichungssyteme in äquivalente Gleichungssysteme aufzuteilen versuchen. Die zugehörige Theorie heißt Klassifikationstheorie. Diese ist sehr umfangreich, weit davon entfernt vollständig zu sein und sprengt bereits den Rahmen dieser Vorlesunge (Schafarevitsch: Algebraische Flächen, Beauville: Complex algebraic surfaces (französich?), Bart, Peters, van de Ven, Ueno, Kollar, Mori).

Die Ergebnisse der algebraischen Geometrie sind sehr unterschiedlich, je nachdem, in welchem Zahlenbereich man die Lösungen sucht. Zu ihren Gegenständen gehört zum Beispiel der große Satz von Fermat, oder allgemeiner die Frage, ob ein gegebenes Gleichungssystem nur endlich viele Lösungen über den rationalen Zahlen besitzt. Auch dieser Bereich von Fragen geht weit über den Gegenstand dieser Vorlesung hinaus. Wir werden fast ausschließlich nach Lösungen mit Koordinaten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper fragen.

Ein erheblicher Teil der modernen algebraischen Geometrie besteht in der Entwicklung einer Sprache - der Sprache der Schemata - , die es gestattet solche wie die nach dem großen Fermatschen Satz zu beantworten. Die Entwicklung dieser Sprache geht auf Grothendieck (Fieldmedaille 1968) zurück und hat zur Lösung einer ganzen Reihe von Problemen geführt, wie zum Beispiel

Das Modul-Problem von Riemann (Mumford 1964)
Die Auflösung der Singularitäten (Hironaka 1968)
Die Klassifikation der algebraischen Dreifaltigkeiten (Mori 1982)
Die Mordell-Vermutung (Faltings 1983)
Die Weilschen Vermutungen (Deligne 1986)
Die Fermatsche Vermutung (Wiles 2000)
Die Milnor-Vermutung (Voevodski 2004)

Diese Sprache - die Sprache der algebraischen Schemata - ist so allgemein, daß dadurch die algebraische Zahlentheorie eine Teildisziplin der algebraischen Geometrie geworden ist. Sie gestattet eine geometrische Interpretation vieler zahlentheorischen Ergebnisse. Teile der Zahlentheore bekommen dadurch eine große Ähnlichkeit mit der Theore der kompakten Riemannschen Flächen (eine Teildisziplin der algebraischen Geometrie !!!).

Umgekehrt haben auf diese Weise gewisse zahlentheoretische Disziplinen neue geometrische Theorien hervor gebracht (zum Beipiel die Klassenkörpertheorie, vgl Serre: Algebraische Kurven und Klassenkörper).

Die Sprache der modernen algebraischen Geometrie hat inzwischen eine ganze Reihe anderer Disziplinen sehr stark beeinflußt, zum Beispiel

die Theorie der holomorphen Gleichungssysteme (komplexe Räume),
die symplektische Geometrie (Moduli, Garben, Kohomologie),
die algebraische Topologie (Etal-Kohomologie, Topoi),
die Monodromie-Theorie der linearen Differentialgleichungen (Deligne),
die Theorie der Eichfelder, Yang-Mils-Gleichungen, Supermathematik (Manin).

Das gilt zum Teil für Disziplinen, die sehr weit von der algebraischen Geometire entfernt sind: zum Beipiel gibt es einen Beweis für die Unabhängigkeit der Kontinuums-Hypothese, die die von Grothendieck und Deligne entwickelte Theorie der Topoi benutzt).

Ein Gegenstand dieser Vorlesung soll in der Einführung in diese Sprache bestehen. Unser Ziel ist es, wiederholt mit ganz klassischen Fragestellungen zu beginnen und aufzuzeigen, wie die Fragen zu Konstruktionen der Schema-Theorie führen.

Literatur

Schafarewitsch: Einführung in die algebraische Geometrie
Hodge und Pedoe: Algebraische Geometrie I - III
Hartshorne: Algebraic geometry

0. Ebene algebraische Kurven

Als Beispiele auf die späteren Abschnitte verteilen ?

0.1 Rationale Kurven

0.1.1 Die Kurve $y^2 = x^2 + x^3$

<u>Behauptung</u>
Die Koordinaten der Punkte lassen sich als rationale Funktione eines Parameters t ausdrücken:

$$x = t^2 - 1,\ y = t(t^2-1).$$

Geometrische Deutung: Schnitte mit der Geraden y = tx.

0.1.2 Begriff der ebenen algebraischen Kurve

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und f(x,y) ein Polynom in zwei Unbestimmten mit Koeffizienten aus k. Eine eine Menge der Gestalt

$V(f) := \{(x,y)\in k^2 \mid f(x,y) = 0\}$

heißt dann ebene algebraische Kurve (mit der Gleichung f(x,y) = 0).

Bemerkungen:

(i) Der Körper k sollte wirklich algebraisch abgeschlossen sein: V(f) mit $f(x,y) = x^2 + y^2+1$ hat keine Punkt über $\mathbb{R}$.

(ii) Zerfällt f in zwei Faktoren, $f = g\cdot h$, so ist $V(f) = V(g)\cup V(h)$ Vereinigung von zwei Teilkurven. Ist f irreduzibel, so nennen wir auch die Kurve V(f) irreduzible Kurve.

(iii) Jede ebene algebraische Kurve ist Vereinigung endlich vieler irreduzibler.

0.1.3 Begriff der rationalen ebenen algebraischen Kurve

Sei X: f(x,y) = 0 eine irreduzible ebene algebraische Kurve. Dann heißt X rational, wenn es zwei rationale Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ gibt, die nicht beide konstant sind, mit

$$f(\varphi(t), \psi(t)) = 0$$

identisch in t. Man nennt in dieser Situation $(\varphi(t), \psi(t))$ eine Parametrisierung der Kurve.

Bemerkungen

(i) Mit endlich vielen Ausnahmen ist $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ für jedes $t_0\in k$ ein Punkt der Kurve.

(ii) Wir werden zeigen, man erhält auf diese Weise jeden Punkt der Kurve mit eventueller Ausnahme von endlich vielen. Den Parameterwert t kann man bei geeignet gewählter Parametrisierung als rationale Funktion

$$t = \chi(x,y)$$

der Koordinaten des Kurvenpunktes schreiben.

(iii) Liegen die Koeffizienten der Parametrisierung in einem Teilkörper, so bekommt man Punke mit Koordinaten aus diesem Teilkörper, falls t dort variiert.

(iv) Parametrisierungen sind nützlich bei der Berechnung von Integralen.

0.1.4 Beispiele rationaler Kurven

V(f) ist rational, falls f linear ist.
V(f) ist rational falls f quadratisch ist.

0.1.5 Die Kurve $x^n+y^n = 1$ für n > 2

Behauptung

Die Kurve ist nicht rational für n > 2, falls n kein Vielfaches von char(k) ist.

Beweis. Angenommen, die Kurve ist rational. Dann gibt es rationale Funktionen

$$\varphi(t) = \frac{p(t)}{r(t)} \text{ und } \psi(t) = \frac{q(t)}{r(t)}$$

die die Kurve parametrisieren. Wir können dabei annehmen, die Polynome p, q und r haben keinen gemeinsamen Teiler. Nach Voraussetzung gilt

(1) $p^n + q^n - r^n = 0$

Wir differenzieren und erhalten, da n kein Vielfaches der Charakteristik von k ist,

(2) $p^{n-1}\cdot p' + q^{n-1}\cdot q' - r^{n-1}\cdot r' = 0.$

Nun interpretieren wir (1) und (2) als lineares Gleichungssystem für die p^{n-1}, q^{n-1} und $-r^{n-1}$ mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat den Rang 2 (weil sonst die beiden Zeilen proportional wären mit einer rationalen Funktion als Proportionalitätsfaktor, was der Teilerfremdheit von p, q, r widerspricht). Die Lösungen des Systems sind also proportional zum Tripel der drei 2×2-Unterdeterminanten.[1] Da p, q und r teilerfremd sind, folgt

$$p^{n-1} \mid qr' - rq'$$
$$q^{n-1} \mid pr' - rp'$$
$$r^{n-1} \mid pq' - qp'$$

Es ist leicht zu sehen das diese drei Bedingungen aus Gradgründen nicht gleichzeitig erfüllt sein können. Sind a, b und c die Grade von p, q und r und gilt zum Beispiel

$$a \ge b \ge c$$

so liefert die erste Bedingung

$$a\cdot(n-1) \le b + c - 1 \le a + a - 1$$

im Widerspruch zu $n > 2$.
QED.

0.1.6 Problem
Wie entscheidet man ob eine Kurve rational ist ?

Wir werden jetzt zeigen, dies ist in Wahrheit ein Problem der Theorie der Körper.

0.2 Verbindung mit der Theorie der Körper

0.2.1 Der rationale Funktionenkörper einer ebenen algebraischen Kurve
Sei

$$X: f(x,y) = 0$$

eine irreduzible algebraische Kurve über dem Körper k (mit dem irreduziblen Polynom f(x,y)). Wir bezeichnen mit k(X) die folgende Menge von Äquivalenzklassen aller Brüche

$$\frac{p(x,y)}{q(x,y)},$$

wobei p und q Polynome mit Koeffizienten aus k seien und q keine Vielfaches von f. Zwei solche Brüche

$$\frac{p}{q} \text{ und } \frac{r}{s}$$

sollen genau dann zur selben Äquivalenzklasse gehören, wenn gilt

$$f \mid p\cdot s - r\cdot q\ .$$

Es ist leicht zu sehen, die gewöhnliche Addition und Multiplikation rationaler Funktionen induziert auf k(X) die Struktur eines Körpers. Er heißt rationaler Funktionenkörper der Kurve X.

Von zwei rationalen Funktionen, die dasselbe Element des Körpers k(X) repräsentieren, sagen wir im folgenden, sie seien gleich auf der Kurve X.

Bemerkungen
(i) Alle Elemente von k(X) lassen sich als rationale Funktionen von x und y ausdrücken. Der Transzendenzgrad des Körpers ist also höchstens 2.
(ii) Die Elemente x und y des Körpers sind algebraisch abhängig, denn in k(X) gilt $f(x,y) = 0$. Der Transzendenzgrad des Körpers ist somit 1.
(iii) Ist X eine Gerade, die zum Beispiel durch die Gleichung $y = 0$ gegeben ist, so ist jede rationale Funktion $\varphi(x,y)$ auf X gleich $\varphi(x,0)$, d.h. k(X) ist gerade der Funktionenkörper in einer Unbestimmten,

[1] Man verdopple eine der Zeilen und entwickle die zugehörige Determinante (die Null ist) nach der hinzugefügten Zeile. Man erhält, das Tripel der Unterdeterminanten ist eine (nicht-triviale) Lösung.

$$k(X) = k(x).$$

0.2.2 Der rationale Funktionenkörper einer rationalen Kurve

Die irreduzible ebene algebraische Kurve X über k ist genau dann rational, wenn ihr Funktionenkörper isomorph zum rationalen Funktionenkörper in einer Unbestimmten ist,

$$k(X) = k(t).$$

Beweis. Sei X rational und $(\varphi(t), \psi(t))$ eine Parametrisierung. Wir betrachten die Abbildung

(1) $\quad k(X) \to k(t), \chi(x,y) \mapsto \chi(\varphi(t), \psi(t))$.

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für zwei rationale Funktionen $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$, die gleich sind auf X gilt

$$f \mid p\cdot s - r\cdot q .$$

Einsetzen der Parametrisierung überführt f in die Null und liefert damit

$$0 = p(\varphi(t), \psi(t))\cdot s(\varphi(t), \psi(t)) - r(\varphi(t), \psi(t))\cdot q(\varphi(t), \psi(t))$$

Damit ist aber $\frac{p}{q}(\varphi(t), \psi(t)) = \frac{r}{s}(\varphi(t), \psi(t))$, d.h. die Bilder der beiden Funktione bei der Abbildung (1) sind gleich.

Wir haben gezeigt, (1) is wohldefiniert. Offensichtlich handelt es sich um einen Ringhomomorphismus. Da k(X) ein Körper ist, muß der Homomorphismus injektiv sein (da Körper keine echte Ideale besitzen)[2]. Sein Bild ist ein Teilkörper von k(t). Nach dem Satz von Lüroth (siehe unten, 0.2.4) ist ein solcher Körper selbst isomorph zu k(t).

Sei jetzt umgekehrt k(X) = k(t). Dann liefert die zu x und y gehörigen rationalen Funktionen von k(t) eine Parametrisierung von X.

QED.

02.3 Eigenschaften gewisser Parametrisierungen

Seien X: f(x,y) = 0 eine rationale ebene irreduzible Kurve über k und i: $k(X) \to k(t)$ der zugehörige Isomorphismus. Weiter seien

$$\varphi(t) = i(x)$$
$$\psi(t) = j(y)$$

die den Variablen x bzw y entsprechenden rationalen Funktionen. Dann ist

$$(\varphi(t), \psi(t))$$

eine Parametrisierung der Kurve mit folgenden Eigenschaften.

(i) Jeder Punkt von X mit Ausnahme von endlich vielen hat die Gestalt

$$(\varphi(t_0),\psi(t_0)) \text{ mit } t_0\in K.$$

(ii) Der Parameter t_0 in der Darstellung (i) ist außer bei endlich vielen Punkten eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir haben bereits gesehen, $(\varphi(t), \psi(t))$ ist tatsächlich eine Parametrisierung. Sei jetzt $\chi(x,y)$ eine rationale Funktion mit

$$i(\chi) = t.$$

Anwenden von i bedeutet gerade, man ersetzt x und y durch $\varphi(t)$ und $\psi(t)$. Insbesondere ist also

(1) $\quad \chi(\varphi(t), \psi(t)) = t$ in k(t).

Anwenden von i^{-1} bedeutet gerade, man ersetzt t durch $\chi(x,y)$. Wir wenden i und danach i^{-1} auf x und y an und erhalten

(2) $\quad x = \varphi(\chi(x,y))$ in K(X).

(3) $\quad y = \psi(\chi(x,y))$ in K(X)

---

[2] Der Homomorphismus ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1, also nicht identisch Null.

Relation (1) bedeutet, verschiedene Wert des Parameters t gehen in verschiedene Punkte ($\varphi(t)$, $\psi(t)$) mit endlich vielen Ausnahmen, in denen χ nicht definiert ist. Mit anderen Worten, es gilt Aussage (ii).
Analog bedeuten die Relationen (2) und (3), jeder Punkt (x,y) der Kurve ist Bild eines Parameters mit endlich vielen Ausnahmen, in denen $\chi(x,y)$ nicht definiert bzw. die rechten Seiten von (2) oder (3) nicht definiert sind. Mit anderen Worten, es gilt (i).
QED.

0.2.4 Der Satz von Lüroth

Seien k ein Körper, x eine Unbestimmte und F ein Zwischenkörper,

$$k \subseteq F \subseteq k(x).$$

Dann ist F = k oder eine einfache transzendente Erweiterung des Körpers k.

Vorbemerkung

Der Körper k in k(x) algebraisch abgeschlossen, d.h. jedes über k algebraische Element von k(x) liegt sogar in k.

Beweis der Vorbemerkung. Sei $\alpha \in k(x)$ algebraisch über k und sei

$$f(T) = T^n + c_1 T^{n-1} + \ldots + c_n \in k[T]$$

das Minimalpolynom von α über k. Wegen $\alpha \in k(x)$ hat α die Gestalt

$$\alpha = \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit zwei Polynomen $p(x) \in k[x]$ und $q(x) \in k[x] - \{0\}$, von denen wir annehmen können, daß sie teilerfremd sind,

$$\mathrm{ggT}(p, q) = 1.$$

Wir multplizieren die Identität $f(\alpha) = 0$ mit der n-ten Potenz von q und erhalten

$$p^n + c_1 p^{n-1} q + \ldots + c_n q^n = 0.$$

Auf der linken Seite sind alle Summanden mit eventueller Ausnahme des ersten durch q tieilbar. Also ist auch der erste Summand durch q teilbar,

$$q \mid p^n .$$

Jeder Primteiler von q ist somit auch ein Primteiler von p. Weil p un q teilerfremd sein sollen, kann q keine Primteiler besitzen, d.h. $q \in k$, d.h. $\alpha = p/q$ ist ein Polynom in x. Falls x im Polynom $\alpha = p(x)$ echt vorkommt, ist
k(x) über $k(\alpha)$ (denn x ist Nullstelle des Polynoms $p(T) - \alpha$.). Dann ist aber k(x) sogar algebraisch über k (da α algebraisch über k ist) im Widerspruch zu der Annahme, daß x eine Unbestimmte sein soll. Also kommt x in p(x) nicht vor, d.h. es gilt

$$\alpha \in k.$$

algebraisch
QED (Vorbemerkung).

Beweis des Satzes von Lüroth (nach van der Waerden).Wir nehmen an, $F \neq k$. Nach der Vorbemerkung ist jedes Element von k(x) - k transzendent über k. Insbesondere ist x algebraisch über F. Wir betrachten ein über F irreduzibles Polynom mit der Nullstelle x,

$$f_0(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_n \in F[T],\ f_0(x) = 0.$$

Untersuchen wir die Struktur von f_0. Die a_i sind rationale Funktionen in x mit Koeffizienten aus k. Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhalten wir ein Polynom

$$f(x,T) = b_0(x)\cdot T^n + b_1(x)\cdot T^{n-1} + \ldots + b_n(x) \in k[x,T]$$

in x und T mit Koeffizienten aus k und dem Inhalt 1,

$$\mathrm{ggT}(b_0,\ldots,b_n) = 1.$$

Wir bezeichnen mit m den Grad dieses Polynoms bezüglich x (und mit n den bezüglich T):

$$\deg_x f = m, \deg_T f = n.$$

Die Koeffizienten $a_i = b_i/b_0$ können nicht alle von x unabhängig sein, denn dann wäre x algbraisch über k. Einer dieser Koeffizienten, sagen wir

$$\theta = a_i = \frac{b_i(x)}{b_0(x)} \in F ,$$

hängt somit echt von x ab. Schreiben wir θ als Quotient teilerfremder Polynome:

$$\theta = a_i = \frac{b_i(x)}{b_0(x)} = \frac{g(x)}{h(x)}, \text{ggT}(g,h) = 1, g,h \in k[x].$$

Die Polynome g und h haben beide einen Grad ≤ m,

$$\deg g \le m, \deg h \le n.$$

Das Polynom

$$g(T) - \theta\cdot h(T) = g(T) - \frac{g(x)}{h(x)} h(T) \in F[T]$$

ist nicht identisch Null und hat die Nullstelle T = x. Deshalb ist es in F[T] durch das Minimalpolynom $f_0(T)$ von x über F teilbar. Die Teilbarkeit besteht erst recht im Ring

$$k(x)[T].$$

Die elementare Theorie der ZPE-Ringe besagt, diese Teilbarkeitsrelation bleibt erhatlen, wenn man zu den Polynomen aus k[x,T] übergeht, es gilt

$$h(x)g(T) - g(x)h(T) = q(x,T)\cdot f(x,T) \text{ mit } q(x,T) \in k[x,T]$$

(weil f den Inhalt 1 hat). Der Grad in x auf der linken Seite ist ≤ m. Auf der rechten Seite hat bereits f den Grad m in x. Deshalb ist der Grad auf beiden Seiten gleich m und x kommt in q nicht vor.

$$h(x)g(T) - g(x)h(T) = q(T)\cdot f(x,T)$$

Da g und h teilerfremd sind (und k[x,T] ein ZPE-Ring), kann kein Polynom in T mit positiven Grad die linke Seite teilen. also ist q eine Konstante:

$$h(x)g(T) - g(x)h(T) = q\cdot f(x,T) \text{ mit } q\in k.$$

Das Polynom links ändert seinen Grad nicht, wenn man x und T vertauscht. Also hat dieses Polynom in x denselben Grad wie in T, d.h. es gilt

$$m = n.$$

Wegen $m = n = \deg f_0$ gilt

$$[k(x) : F] = m.$$

Wegen $g,h\in k[x]$ und $g(x) - \theta\cdot h(x) = 0$ (nach Definition von θ) ist x Nullstelle eines Polynoms des Grades m mit Koeffizienten aus k(θ). Also gilt

$$[k(x):k(\theta)] = [k(\theta)(x):k(\theta)] \le m.$$

Die umgekehrte Ungleichung muß aber wegen $k(\theta) \subseteq F$ ebenso gelten. Das ist aber nur möglich, wenn

$$[F:k(\theta)] = 1$$

ist, d.h. es gilt $F = k(\theta)$.

QED.

0.3 Birationale Isomorphismen von Kurven

0.3.1 Definition: rationale Abbildung

Seien

$$X: f(x,y) = 0$$
$$Y: g(x,y) = 0$$

zwei ebene irreduzible Kurven über k. Eine rationale Abbildung

$$X \longrightarrow Y, (x,y) \mapsto (\varphi(x,y), \psi(x,y)),$$

ist ein Paar rationaler Funktionen φ(x,y) und ψ(x,y) derart, daß die rationale Funktion

$$g(\varphi(x,y), \psi(x,y))$$

Null ist auf X (d.h. Punkte von X gehen in Punkte von Y über).

Zwei irreduzible Kurven X und Y heißen birational isomorph, wenn es zueinander inverse rationale Abbildungen zwischen X und Y gibt.

0.3.2 Beispiel

(1) X: $y^2 = f(x)$

Dabei sei f vom Grad 2n. Wir schreiben

$$f(x) = g(x)(x-\alpha)$$

und setzen

$$u := \frac{1}{x-\alpha}$$

$$v := \frac{y}{(x-\alpha)^n}$$

Indem wir beide Seiten von (1) durch $(x-\alpha)^{2n}$ teilen erhalten wir

(2) Y: $v^2 = h(u)$

mit einem Polynom $h(u) = \frac{g(x)}{(x-\alpha)^{2n-1}}$ des Grades 2n-1 in u.

Auf diese Weise ist eine rationale Abbildung $X \longrightarrow Y$ definiert. Eine Umkehrung ist durch

$$x = u^{-1} + \alpha$$

$$y = vu^{-n}$$

gegeben.

03.3 Birationalität und Funktionenkörper

Zwei ebene algebraische Kurven sind genau dann birational isomorph, wenn ihre Funktionenkörper (über k) isomorph sind.

Beweis: leicht

1. Affine algebraische Mengen

1.1 Algebraische Mengen im affinen Raum

Beim Beweis des Hilbertschen Basissatzes in 1.1.4 verweisen wir auf Abschnitt A1 des Anhangs.

Beim Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes in 1.1.13 benutzen wir elementare Eigenschaften endlicher Algebren (vgl. Anhang A3).

1.1.1 Vereinbarungen und Bezeichnungen

In diesem Abschnitt bezeichnet k einen algebraisch abgeschlossenen Körper und

$$k[T] \text{ mit } T = (T_1,...,T_N)$$

bezeichne den Ring der Polynome in den Unbestimmten $T_1,...,T_N$ mit Koeffizienten aus k.

1.1.2 Der affine Raum

Im folgenden heiße die Menge

$$\mathbb{A}^N := \{(a_1,...,a_N) \mid a_1,...,a_N \in k\}$$
affiner N-Raum oder auch affiner N-dimensionaler Raum.

1.1.3 Affine algebraische Mengen

Sei $M \subseteq k[T]$ eine beliebige Menge von Polynomen. Dann bezeichnet man die Menge der gemeinsamen Nullstellen der Polynome aus M mit

$$V(M) := \{x \in \mathbb{A}^N \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } f \in M\}$$

und nennt diese Menge die durch M definierte affine algebraische Menge. Die Elemente von M heißen auch "definierende Gleichungen" dieser Menge. Speziell im Fall einer endlichen Menge schreibt man

$$V(f_1, ... , f_m) := V(\{f_1, ... , f_m\}).$$

Für jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{A}^N$ heißt

$$I(X) := \{ f \in k[T] \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } x \in X \}$$

Ideal von X. Es ist offensichtlich ein Ideal im Polynomring k[T]

Bemerkungen

(i) Seien $M \subseteq k[T]$ eine Menge von Polynomen und

$$I := M\cdot k[T] = \{ f_1m_1 + ... + f_rm_r \mid f_1,...,f_r \in k[T], m_1,...,m_r \in M, r = 1,2, ... \}$$

das von M erzeugte Ideal des Polynomrings. Dann gilt

$$V(M) = V(I).$$

Als System definierender Gleichungen kann man also stets ein Ideal wählen.
Ist insbesondere $f_1, ... , f_m \in k[T]$ ein Erzeugendensystem des Ideals I, so gilt

$$V(I) = V(f_1, ... , f_m).$$

Ein System definierender Gleichungen einer algebraischen Menge X muß nicht unbedingt das Ideal I(X) erzeugen[3]. Verschiedene Ideale können durchaus dieselben Nullstellenmenge besitzen.

(ii) Für jede algebraische Menge X = V(M) gilt

$$X = V(I(X)).^{4}$

Umgekehrt ist jede Menge X mit dieser Eigenschaft algebraisch.

(iii) Seien $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n$ abgeschlossene Teilmengen. Dann gilt:

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow I(X) \supseteq I(Y).^{5}$

1.1.4 Hilbertscher Basissatz

Jedes Ideal I des Polynomrings k[T] besitzt ein endliches Erzeugendensystem.
Beweis. Folgt durch wiederholtes Anwenden aus A1.6.
QED.

1.1.5 Die Zariski-Toplogie

Es gilt:
(i) $V(J') \cup V(J'') = V(J' \cap J'') = V(J'\cdot J'')$ für je zwei Ideale J',J" von k[T].

---

[3] Zum Beispiel ist $V(T_1) = V(T_1^2)$ aber $(T_1) \neq (T_1^2)$.

[4] Da die Polynome von M auf X Null sind, gilt $M \subseteq I(X)$, also

$$X = V(M) \supseteq V(I(X)).$$

Da alle Polynome aus I(X) Null sind auf X, gilt umgekehrt auch

$$X \subseteq V(I(X)).$$

[5] Zu '⇒': Jede Funktion, die auf der größeren Menge Y Null ist, ist es auch auf X.
Zu '⇐': Wegen (ii) gilt $X = V(I(X)) \subseteq V(I(Y)) = Y$.

(ii) $\cap_{i\in I} V(J_i) = V(\sum_{i\in I} J_i)$ für jede Familie von Ideal J_i von k[T].

(iii) Die Mengen der Gestalt V(M) mit $M \subseteq k[T]$ bilden die abgeschlossenen Menge einer Topologie des $\mathbb{A}^N$. Diese heißt <u>Zariski-Toplogie</u> des $\mathbb{A}^N$.

Beweis. <u>Zu (i)</u>.Es gilt

$$\begin{aligned} p \in V(J')\cup V(J'') &\Leftrightarrow f(p) = 0 \text{ für } f\in J' \text{ oder } f(p) = 0 \text{ für } f\in J'' \\ &\Leftrightarrow f'(p)f''(p) = 0 \text{ für alle } f'\in J' \text{ und } f''\in J''. \\ &\Leftrightarrow f(p)= 0 \text{ für alle } f\in J'\cdot J''. \\ &\Leftrightarrow p \in V(J'\cdot J''). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$V(J')\cup V(J'') = V(J'\cdot J'').$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} p \in V(J')\cup V(J'') &\Leftrightarrow f(p) = 0 \text{ für jedes } f\in J' \text{ oder } f(p)=0 \text{ für jedes } f\in J''. \\ &\Rightarrow f(p) = 0 \text{ für jedes } f\in J'\cap J'' \\ &\Leftrightarrow p\in V(J'\cap J''), \end{aligned}$$

also

$$V(J')\cup V(J'') \subseteq V(J'\cap J'') \subseteq V(J'\cdot J''),$$

wobei die zweite Inklusion besteht wegen $J'\cap J'' \supseteq J'\cdot J''$.

<u>Zu (ii)</u>.Es gilt

$$\begin{aligned} p \in \cap_{i\in I} V(J_i) &\Leftrightarrow f_i(p) = 0 \text{ für jedes } i\in I \text{ und jedes } f_i\in J_i \\ &\Leftrightarrow f(p) = 0 \text{ für jedes } f\in \sum_{i\in I} J_i \\ &\Leftrightarrow p \in V(\sum_{i\in I} J_i) \end{aligned}$$

<u>Zu (iii)</u>. Folgt aus (i) und (ii).

QED.

1.1.6 Offene Hauptmengen

Die offenen Mengen der Gestalt

$$D(f) := \mathbb{A}^N - V(f) = \{x\in\mathbb{A}^N \mid f(x) \neq 0 \}$$

mit $f\in k[T]$ bilden eine Topologiebasis für die Zariski-Topologie. Sie heißen <u>offene Hauptmengen</u>.

Beweis. Sei $U \subseteq \mathbb{A}^N$ offen und $x\in U$ ein Punkt. Wir haben zu zeigen, es gibt ein Polynom f mit

$$x \in D(f) \subseteq U.$$

Nach Voraussetzung hat U die Gestalt

$$U = \mathbb{A}^N - V(f_1,...,f_r).$$

Wegen $x \in U$ gibt es ein i mit $f_i(x) \neq 0$. Mit $f = f_i$ gilt

$$x \in D(f)$$

und

$$V(f) \supseteq V(f_1,...,f_r)$$

also

$$D(f) \subseteq \mathbb{A}^N - V(f_1,...,f_r) = U.$$

QED.

1.1.7 Beispiele

Die algebraischen Mengen des $\mathbb{A}^1$

Die offenen Mengen des $\mathbb{A}^1$ sind der gesamte Raum und die Komplemente der endlichen Teilmengen.

Die algebraischen Mengen des $\mathbb{A}^2$

Die algebraischen Mengen der affinen Ebene sind gerade die Mengen der folgenden Gestalt.

1. Die leere Menge.
2. Die affine Ebenen selbt.
3. Die ebenen algebraischen Kurven.
4. Die endlichen Punktmengen.
5. Endliche Vereinigungen der Mengen vom Typ 3 und 4.

Eine solche Menge besteht genau dann aus unendlich vielen Punkten, wenn die definierenden Gleichungen einen größten gemeinsamen Teiler positiven Grades besitzen.

Beweis. Sei X ein algebraische Menge des $\mathbb{A}^2$. Dann ist X ist durch ein Gleichungssystem der Gestalt

$$f_1(T_1,T_2) = f_2(T_1,T_2) = ... = f_r(T_1,T_2) = 0$$

gegeben. Sind die Polynome f_i alle identisch Null, so ist

$$X = \mathbb{A}^2.$$

Seien jetzt die f_i nicht alle identisch Null. Wir betrachten zunächst den Fall, daß die f_i keinen gemeinsamen Teiler besitzen,

$$\text{ggT}(f_1,...,f_r) = 1.$$

Betrachten wir die f_i als Elemente von $k(T_1)[T_2]$. Auch als Elemente dieses Rings besitzen die sie keinen gemeinsamen Teiler. Mit Hilfe des euklidischen Algorithmus sehen wir, es gilt

$$1 = g_1f_1 + ... + g_rf_r \text{ mit gewissen } g_i\in k(T_1)[T_2].$$

Dies ist eine Relation zwischen rationalen Funktionen, wobei im Nenner nur Polynome in T_1 allein vorkommen. Wir multiplizieren mit dem Hauptnenner und erhalten eine Relation der Gestalt

$$h = g_1f_1 + ... + g_rf_r \text{ mit } g_i\in k[T_1, T_2] \text{ und } h\in k[T_1] - \{0\}.$$

Weil die f_i identisch Null sind auf X, gilt dies auch für h. Als Polynom in einer Variablen hat h aber nur endlich viele Nullstellen. Mit anderen Worten, für die erste Koordinate eines Punktes aus X gibt es nur endlich viele Möglichkeiten.
Wir wiederholen dieselbe Argumentation mit T_1 und T_2 vertauscht und sehen so,

$$X \subseteq \mathbb{A}^2 \text{ ist endlich (eventuell leer).}$$

Es ist noch der Fall zu betrachten, daß die f_i einen (nicht-trivialen) Teiler besitzen. Sei g der größte gemeinsame Teiler der f_i,

$$f_i = g_i\cdot g$$

Dann gilt $X = V(f_1,...,f_r) = V(g_1,...,g_r) \cup V(g)$. Da die g_i nach Konstruktion keinen gemeinsamen Teiler besitzen, ist $V(g_1,...,g_r)$ eine endliche Menge. Die Menge $V(g)$ ist eine eben Kurve:

$$X = \{\text{endliche Menge}\} \cup \{\text{Vereinigung endlich vieler irreduzibler Kurven}\}.$$

Wir haben noch zu zeigen, eine ebene Kurve

$$V(g),\ g \in k[T] - k,$$

besitzt unendlich viele Punkte. Dazu schreiben wir g als Summe homogener Polynome,

$$g = g_n + g_{n-1} + ... + g_0$$

mit g_i homogen vom Grad i,

$$g_i(T_1,T_2) = \sum_{j=0}^{i} c_i T_1^j T_2^{i-j}\ ,\ c_i \in k,$$

und g_n nicht identisch Null. Weil g_n nicht identisch Null ist, gibt es mindestens einen Punkt im $\mathbb{A}^2$, der nicht Nullstelle von g_n, sagen wir

$$g_n(\alpha, \beta) \neq 0\ ,\ \alpha,\beta \in k.$$

Weil g_n homogen ist, gilt $g_n(0,0) = 0$. Also ist $(\alpha,\beta) \neq (0, 0)$. O.B.d.A. können wir annehmen,

$$\beta \neq 0$$

(andernfalls vertauschen wir in der nachfolgenden Argumentation die Rollen von T_1 und T_2). Weil g_n homogen vom Grad n ist, gilt

$$0 = g_n(\alpha, \beta) = \beta^n g_n(\alpha/\beta, 1).$$

Wir könene also annehmen, $\beta = 1$, d.h.

$$g(\alpha, 1) \neq 0.$$

Wir führen eine lineare Transformation der Gestalt

$$\begin{aligned} T_1 &= T'_1 + \alpha\cdot T'_2 \\ T_2 &= \qquad\quad T'_2 \end{aligned} \tag{1}$$

und betrachten

$$g(T_1, T_2) = g(T'_1 + \alpha\cdot T'_2, T'_2) = g'(T'_1, T'_2)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Koeffiziente von } T'^n_2 \text{ in } g' \quad &= \text{Koeffizient von } T'^n_2 \text{ in } g'(0, T'_2) \\ &= \text{Koeffizient von } T'^n_2 \text{ in } g(\alpha\cdot T'_2, T'_2) \\ &= \text{Koeffizient von } T'^n_2 \text{ in } g_n(\alpha\cdot T'_2, T'_2) \\ &= \text{Koeffizient von } T'^n_2 \text{ in } g_n(\alpha,1) \cdot T'^n_2 \\ &= g_n(\alpha,1) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Der Koeffizient von T'^n_2 in g' ist somit ungleich Null. Durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor erreichen wir, daß dieser Koeffizient gleich 1 ist. g' ist dann von der Gestalt

$$g'(T_1, T_2) = T_2^n + a_1(T_1)\cdot T_2^{n-1} + ... + a_n(T_1) \text{ mit } a_i(T_1) \in k[T_1].$$

Setzen wir für T_1 einen beliebigen Wert aus k ein, so gibt es stets einen Wert für T_2 in k, so daß g' Null wird. Mit anderen Worten, über jeden Punkt der x-Achse liegt ein Punkt von V(g'). Also hat V(g') unendlich viele Punkte. Da V(g) und V(g') durch die lineare (umkehrbare) Transformation (1) ineinaner übergehen, gilt dasselbe auch für V(g).

QED.

Affine Hyperflächen

Eine affine Hyperfläche ist eine Menge der Gestalt

$$V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$$

d.h. eine abgeschlossene Menge mit nur einer definierenden Gleichung.

1.1.8 Direkte Produkte von affinen algebraischen Mengen

Seien

$$X = V(f_1,...f_m) \subseteq \mathbb{A}^M$$

$$Y = V(g_1,...,g_n) \subseteq \mathbb{A}^N$$

algebraische Mengen. Dabei wollen wir die f_i bzw. g_j als Polynome in disjunkten Mengen von Unbestimmten betrachten,

$$f_i = f_i(T_1,...,T_M)$$

$$g_j = g_j(T_{M+1},...,T_{M+N})$$

Das direkte Produkt dieser Mengen ist dann eine abgeschlossene Menge:

$$X\times Y = V(f_1,...f_r, g_1,...,g_s) \subseteq \mathbb{A}^{m+n}$$

1.1.9 Irreduzible Mengen

Eine abgeschlossene Menge (eines topologischen Raumes) X heißt reduzibel, wenn es echte abgeschlossene Teilmengen

$$X' \subset X, X'' \subset X$$

gibt mit $X = X' \cup X''$. Andernfalls heißt X irreduzibel.

1.1.10 Zerlegung affiner algebraischer Mengen in irreduzible

Jede affine algebraische Menge ist Vereinigung endlich vieler irreduzibler.

Beweis. Angenommen, die Aussage ist falsch für die abgeschlossene Menge X. Dann gibt es echte abgeschlossene Teilmengen X_1 und X'_1 mit

$$X = X_1 \cup X'_1.$$

Für eine dieser Teilmengen muß die Aussage des Theorems ebenfalls falsch sein, sonst wäre sie für X nicht falsch, sagen wir für X_1. Es gibt also eine echte Teilmenge X_1 von X, für die die Aussage des Satzes ebenfalls falsch ist. Wir wiederholen die Argumentation und erhalten eine echt absteigende Folge von abgeschlossenen Mengen

$$X \supset X_1 \supset X_2 \supset ...,$$

für die die Behauptung falsch ist. Für die Folge der zugehörigen Ideal besteht die umgekehrte Inklusion,

(1) $$I(X) \subset I(X_1) \subset I(X_2) \subset ...,$$

Zunächst gilt nur '$\subseteq$'. Aus den Idealen kann man aber durch Übergang zu den Nullstellenmengen, die X_i wiedergewinnen,

$$V(I(X_i)) = X_i ,$$

d.h. die Inklusionen müssen echt sein.
Eine unendliche aufsteigende Kette (1) von aufsteigenden Idealen in k[T] ist ber nicht möglich, da Polynomringe noethersch sind.
QED.

1.1.11 Charakterisierung der Irreduzibilität affiner algebraischer Mengen

Für eine algebraische Menge $X \subseteq \mathbb{A}^n$ sind äquivalent.

(i) X ist irreduzibel.
(ii) Der Durchschnitt von je zwei nicht-leeren offenen Teilmengen ist nicht-leer.
(iii) Das Ideal I(X) von X ist ein Primideal.

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Irrduzibilät von X ist äquivalent zur Implikation

$$X = X' \cup X'' \text{ und } X', X'' \text{ abgeschlossen in } X \Rightarrow X = X' \text{ oder } X=X''.$$

Durch Übergang zu den komplementären Mengen erhält man die Implikation

$$U' \cap U'' = \emptyset \text{ und } U', U'' \text{ offen in } X \Rightarrow U' = \emptyset \text{ oder } U'' = \emptyset.$$

(i) $\Rightarrow$ (iii). Angenommen I(X) ist kein Primideal. Dann gibt es Polynome $f,g \in k[X]$ mit

$$f\cdot g \in I(X) \text{ aber } f,g \notin I(X).$$

Dann sind

$$X' := \{x\in X \mid f(x)=0 \} \text{ und } X'' := \{x\in X \mid g(x) = 0 \}$$

echte algebraische Teilmengen von X,

$$X \supseteq X' \cup X''.$$

Für jeden Punkt $x\in X$ gilt $f(x)\cdot g(x) = 0$ (wegen $f\cdot g\in I(X)$), also $f(x) = 0$ oder $g(x) = 0$, d.h x liegt in X' oder X''. Damit ist

$$X = X' \cup X''$$

im Widerspruch zur angenommenen Irreduzibilität von X.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Angenommen, X ist reduzibel,

$$X = X' \cup X''.$$

Da X' und X'' durch Polynome definiert sind und keine Inklusionsrelationen zwischen X' und X'' bestehen, gibt es Polynome $f,g\in k[T]$ mit

$$f = 0 \text{ auf } X' \text{ aber nicht auf } X''$$
$$g = 0 \text{ auf } X'' \text{ aber nicht auf } X'$$

Dann gilt $f,g \notin I(X)$ aber $f\cdot g \in I(X)$ im Widerspruch zur Annahme, daß I(X) ein Primideal sein soll.
QED.

1.1.12 Direkte Produkte irreduzibler algebraischer Mengen

Das direkte Produkt irreduzibler abgeschlossener Menge ist irreduzibel.
Beweis. Seien X und Y irreduzibel. Angenommen $X\times Y$ ist es nicht,

(1) $$X\times Y = Z' \cup Z'' .$$

Dann ist für jedes $x\in X$ die Menge $\{x\}\times Y$ isomorph zu Y also irreduzibel. Wegen (1) gilt

$$\{x\}\times Y = (\{x\}\times Y\cap Z') \cup (\{x\}\times Y\cap Z'')$$

und wegen der Irreduzibilität muß $\{x\}\times Y$ ganz in einer der beiden Mengen rechts liegen, d.h. es gilt

$$\{x\}\times Y \subseteq Z' \text{ oder } \{x\}\times Y \subseteq Z''.$$

Wir setzen

$$X' := \{x\in X \mid \{x\}\times Y \subseteq Z' \}$$
$$X'' := \{x\in X \mid \{x\}\times Y \subseteq Z'' \}$$

Nach Konstruktion gilt

$$X = X' \cup X''.$$

Es reicht zu zeigen, die Mengen X' und X" sind abgeschlossen, denn dies ergibt den gewünschten Widerspruch zur Irreduzibilität von X.

Abgeschlossenheit von X'. Für jedes $y \in Y$ betrachten wir die Menge

$$X_y := \{x \in X \mid (x,y) \in Z'\}$$

Es gilt

$$X_y \times \{y\} = X \times \{y\} \cap Z'.$$

Deshalb ist $X_y \times \{y\}$ abgeschlossen, d.h. durch Polynome definiert. Dann gilt aber dasselbe für X_y, d.h. auch X_y ist abgeschlossen[6]. Wegen

$$X' = \cap_{y \in Y} X_y$$

Ist damit auch X' abgeschlossen.

Die Abgeschlossenheit von X" ergiebt sich aus Symmetriegründen.

QED.

1.1.13 Der Hilbertsche Nullstellensatz

Seien $f_1,...,f_r,g \in k[T]$ Polynome mit Koeffizienten aus dem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Das Polynom g sei Null in allen Punkten von $V(f_1,...,f_r)$. Dann ist eine Potenz von g eine Linearkombination der f_i,

$$g^s \in (f_1,...,f_r)k]T].$$

Folgerung 1

Seien $f_1,...,f_r,g \in k[T]$ Polynome mit Koeffizienten aus dem algebraisch abgeschlossenen Körper k mit

$$V(f_1,...,f_r) = \emptyset.$$

Dann ist das von den f_i erzeugte Ideal der ganze Ring,

$$(f_1,...,f_r) = k[T].$$

Beweis von Folgerung 1. Nach dem Nullstellensatz liegt eine Potenz von 1 im Ideal $(f_1,...,f_r)$.

QED.

Folgerung 2

Jedes maximale Ideal m des Polynomrings k[T] über dem algebraische abgeschlossenen Körper k hat die Gestalt

$$m = (T_1 - c_1, ..., T_N - c_N).$$

Beweis von Folgerung 2 (mit Hilfe von Folgerung 1). Sei m ein maximales Ideal von k[T]. Dann ist V(m) nicht leer, denn andernfalls wäre m = k[T], also m kein maximales Ideal.

Sei also

$$x = (c_1,...,c_N)$$

ein Punkt von V(m). Wir setzen

$$m' := (T_1 - c_1, ..., T_N - c_N).$$

Für jede Funktion $f \in m$ gilt f(x) = 0 (weil x in V(m) liegt). Die Taylor-Entwicklung von f im Punkt x hat also das Absolutglied 0, d.h. es gilt $f \in m'$. Wir haben gezeigt,

$$m \subseteq m'.$$

---

[6] Sind $(f_i(T',T''))$ definierende Gleichungen für $X_y \times \{y\}$, so bilden die $f_i(T',y)$ definierende Gleichungen für X_y.

Weil m maximal ist folgt m = m'.
QED.

Beweis des Nullstellensatzes. Wir verwenden im nachfolgenden Beweis einige elementare Eigenschaften endlicher Algebren (siehe Anhang A3).

1. Schritt. Wir zeigen, aus Folgerung 1 folgt auch umgekehrt der Hilbertsche Nullstellensatz.

Sei g wie im Nullstellensatz. Dann gilt mit einer zusätzlichen Unbestimmten T_{N+1}

$$V(f_1,...,f_r, 1 - g\cdot T_{N+1}) = \emptyset,$$

d.h. nach Folgerung 1 kann man die Zahl 1 in der Gestalt

$$1 = h_1 f_1 +...+h_r f_r + h\cdot(1 - g\cdot T_{N+1})$$

schreiben mit Polynomen $h_i = h_i(T, T_{N+1})$ und $h = h(T, T_{N+1})$ in N+1 Unbestimmten. Wir ersetzen in dieser Identität die Unbestimmte T_{N+1} durch 1/g. In der Identität

$$1 = h_1(T,1/g)f_1(T)+...+h_r(T,1/g)f_r(T)$$

treten Potenzen von g im Nenner auf. Wir multiplizieren mit dem Hauptnenner, sagen wir mit g^s und erhalten eine Darstellung von g^s als Linearkombination von $f_1,...,f_r$ wie im Nullstellensatz behauptet.

2. Schritt. Wir zeigen, aus Folgerung 2 folgt umgekehrt auch Folgerung 1.

Sei $V(f_1,...,f_r) = \emptyset$. Angenommen das von den f_i erzeugte Ideal wäre ein echtes Ideal des Polynomrings. Dann liegt es ganz in einem maximalen Ideal m, sagen wir

$$(f_1,...,f_r) \subseteq m = (T_1 - c_1, ..., T_N - c_N).$$

Dann ist aber $x = (c_1,...,c_N)$ eine gemeinsame Nullstelle der f_i, im Widerspruch zur Annahme

$$V(f_1,...,f_r) = \emptyset.$$

Wir haben damit den Beweis des Nullstellensatzes auf den Beweis von Folgerung 2 reduziert.

3. Schritt. Reduktion des Beweises auf die folgende Aussage:

Für jedes maximale Ideal $m \subseteq k[T]$ ist die Komposition natürlicher Abbildungen

(1) $$k \to k[T] \to k[T]/m$$

surjektiv.

Ist (1) surjektiv, so gibt es für jede Unbestimmte T_i ein Element $c_i \in k$ mit derselben Restklasse modulo m wie T_i, d.h. es gilt

$$T_i - c_i \in m$$

für jedes i, d.h.

$$(T_1 - c_1, ..., T_N - c_N) \subseteq m.$$

Das Ideal links ist aber ein maximales Ideal von k[T], d.h. es ist

$$(T_1 - c_1, ..., T_N - c_N) = m.$$

4. Schritt. Es reicht zu zeigen, für jedes maximale Ideal $m \subseteq k[T]$ ist der Erweiterungskörper

$$K := k[T]/m$$

algebraisch über k (O.B.d.A N > 0).

Da k algebraisch abgeschlossen ist, ist dann die algebraische Körpererweiteung

$$k \to k[T]/m$$

ein Isomorphismus.

5. Schritt. $K := k[T]/m$ ist algebraisch ist über k.

(Zum Beweis benötigen wir Aussagen des Anhangs, genauer von A3 und in elementarer Form eigentlich auch von A2)

Angenommen, K ist nicht algebraisch über k. Sei

$$r = \text{tr. deg}_k\ K > 0$$

der Transzendenzgrad von K über k. Wir schreiben

$$t_i = T_i \bmod m$$

für die Restklasse der i-ten Unbestimmten in K. Dann gilt

$$K = k[t_1,...,t_N]$$

O.B.d.A. können wir annehmen,

$$t_1,...,t_r \text{ sind algebraisch unabhängig über k.}$$

Dann ist

$$k[t_1,...,t_r]$$

isomorph zu einem Polynomring in r Unbestimmten über k. Außerdem ist $r < N$, denn im Fall $r = N$ wäre K isomorph zum Polynomring $k[T_1,...,T_N]$, also kein Körper. Jedes der Elemente t_i $(i = r+1,...,N)$ ist Nullstelle eines irreduziblen Polynoms

$$f_i(x) \in k(t_1,...,t_r)[x]$$

in einer Unbestimmten x mit dem höchsten Koeffizienten 1. Sei g der Hauptnenner aller Koeffizienten aller f_i, d.h. ein von Null verschiedenes Polynom

$$g \in k[t_1,...,t_r] \text{ mit } gf_i(x) \in k[t_1,...,t_r,x]$$

für $i = r+1, ... , N$. Der höchste Koeffizient von gf_i als Polynom in x ist g. Es gilt,

$$f_i \in A[x]$$

mit

$$A := k[t_1,...,t_r]_g = \{\frac{p}{g^n} \mid p \in k[t_1,...,t_r],\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Mit anderen Worten, K ist eine ganze Erweiterung von A (siehe Anhang A3). Da K endlich erzeugt ist über A, ist K sogar eine endliche Erweiterung über A, d.h.

K ist als A-Modul endlich erzeugt.

Es reicht zu zeigen, A ist kein Körper. Denn dann gibt es in A ein von Null verschiedenes echtes Ideal und damit auch in K. Letzters steht im Widerspruch dazu, daß K ein Körper ist.

6. Schritt. A ist kein Körper.

Sei $c = (c_1,...,c_r) \in \mathbb{A}^r$ ein Punkt mit $g(c) \ne 0$. Dann ist $t_1 - c_1$ ein irreduzibles Polynom von $k[t_1,...,t_r]$, welches g nicht teilt (weil es im Gegensatz zu g in c Null ist). Es gibt also zu g teilerfremde Polynome in $k[t_1,...,t_r]$.

Sei h ein zu g teilerfremdes Polynom. Dann ist das von h in A erzeugte Ideal

$$h\cdot A = \{\frac{hp}{g^n} \mid p \in k[t_1,...,t_r],\ n \in \mathbb{N}\}$$

nicht der gesamte Ring A: aus $1 \in h\cdot A$ würde folgen,

$$g^n = hp \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \text{ und ein } p \in k[t_1,...,t_r],$$

d.h. h wäre nicht teilerfremd zu g. Wir haben gezeigt, A besitzt ein Ideal, welches von (0) und von A verschieden ist. Also ist A kein Körper.
QED.

1.2 Reguläre Funktionen und Abbildungen

1.2.1 Der Koordinatenring einer algebraische Menge

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ ein algebraische Menge. Eine Funktion f: $X \to k$ heißt <u>regulär</u>, wenn es ein Polynom $g \in k[T]=k[T_1,...,T_n]$ gibt mit

$$f(x) = g(x)$$

für jedes $x \in X$. Die Menge aller regulären Funktionen $X \to k$ wird mit

$$k[X]$$

bezeichnet. Bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation von Abbildungen mit Werten in k ist dies ein Ring. Er heißt <u>Koordinatenring</u> von X. Er wird von den Einschränkungen der Koordinatenfunktionen

$$T_i: \mathbb{A}^n \to k, (x_1,...,x_n) \mapsto x_i,$$

auf X erzeugt.

Bemerkungen

(i) Das Polynom g ist durch f nicht eindeutig festgelegt. Man kann zum Beispiel eine definierende Gleichung von X zu g addieren.

(ii) Nach Definition gibt es eine surjektive Abbildung

$$k[T] \to k[X], g \mapsto g|_X ,$$

die jedem Polynom die zugehörige reguläre Funktion zuordnet.Diese Abbildung ist offensichlich ein Ring-Homomorphismus.

(iii) Der Kern des Homomorphismus von (ii),

$$I(X) := \mathrm{Ker}(k[T] \to k[X], g \mapsto g|_X)$$

ist gerade das Ideal der algebraischen Menge X (vgl. 1.1.3), d.h. er besteht aus denjenigen Polynomen, die auf X identisch Null sind. Insbesondere liegen auch die definierenden Gleichungen von X in diesem Kern.

(iv) Nach dem Homomorphiesatz für Ringe gilt

$$k[X] \cong k[T]/I(X).$$

Wir werden k[X] oft mit diesem Faktorring identifizieren.

1.2.2 Beispiele

Einpunktige Mengen und maximale Ideale

Sei $X = \{(a_1,...,a_n)\} \subseteq \mathbb{A}^n$ eine einpunktige Menge. Dann gilt offensichtlich

$$k[X] \xrightarrow{\cong} k , f \mapsto f(a_1,...,a_n),$$

und $(T_1\text{-}a_1,...,T_n\text{-}a_n) \subseteq I(X)$. Da $(T_1\text{-}a_1,...,T_n\text{-}a_n)$ ein maximales Ideal von k[T] ist, gilt in der letzteren Inklusion sogar das Gleichheitszeichen,

$$I(X) = (T_1\text{-}a_1,...,T_n\text{-}a_n).$$

Insbesondere ist jede einpunktige Menge

$$X = V(I(X))$$

eine affine algebraische Menge. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatzt hat jedes maximale Ideal m von k[X] die Gestalt

$$m = (T_1-a_1,...,T_n-a_n),$$

d.h.

$$V(m) = \{(a_1,...,a_n)\}$$

ist eine einpunktige Menge (vgl. 1.1.13 Folgerung 2).

Der affine Raum

Sei $X = \mathbb{A}^n$. Verschiedene Polynome definieren verschiedene Funktionen des $\mathbb{A}^n$, d.h. die Abbildung

$$k[T] \to k[\mathbb{A}^n]$$

ist nicht nur surjektiv sondern auch injektiv. Es folgt

$$k[\mathbb{A}^n] \cong k[T]$$

und

$$I(\mathbb{A}^n) = (0).$$

Die Hyperbel

Sei $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ die ebene Kurve mit der Gleichung

$$f(T_1,T_2) = T_1T_2 - 1.$$

Für jedes Polynom p, welches auf X identisch Null ist, gilt nach dem Hilbertschen Nullstellensatz

$$f \mid p^n$$

für ein $n\in\mathbb{N}$. Weil f irreduzibel[7] ist, gilt f | p. Wir erhalten damit

$$I(X) = f\cdot k[T_1,T_2]$$

und

$$k[X] = k[T_1,T_2]/(T_1T_2 - 1) \cong k[T_1, T_1^{-1}] \quad (\subseteq k(T_1)),$$

Der Ring k[X] der regulären Funktionen auf X kann also identifiziert werden mit dem Teilring von $k(T_1)$, der aus den rationalen Funktionen der Gestalt

$$\frac{p(T_1)}{T_1^n}$$

besteht mit einem Polynom $p\in k[T_1]$.

1.2.3 Der Koodinatenring eines direkten Produkts

Seien

$$X = V(f_1(T'),...f_r(T')) \subseteq \mathbb{A}^m$$

$$Y = V(g_1 (T),...,g_s(T)) \subseteq \mathbb{A}^n$$

affine algebraische Mengen. Dann gilt

$$k[X\times Y] = k[X]\otimes_k k[Y]$$

---

[7] Man kann f als lineares Polynom in T_1 mit Koeffizienten aus $k(T_2)$ auffassen. Als solches ist f trivialerweise irreduzibel. Da der Inhalt von f gleich 1 ist, ist das Polynom auch in $k[T_1,T_2]$ irreduzibel.

Beweis. Für je zwei Funktionen $f\in k[X]$, $g\in k[Y]$ und jeden Punkt $(x,y)\in X\times Y$ setzen wir

$$\varphi(f,g)(x,y) = f(x)g(y).$$

Dann ist $\varphi(f,g)$ offensichtlich eine reguläre Funktion auf $X\times Y$ und wir haben eine Abbildung

$$k[X| \times k[Y] \to k[X\times Y],\ (f,g) \mapsto \varphi(f,g),$$

definiert, die offensichtlich k-bilinear ist. Diese induziert eine Abildung

(1) $$k[X| \otimes k[Y] \to k[X\times Y],\ f\otimes g \mapsto \varphi(f,g)\ .$$

Da jede reguläre Funktion auf $X\times Y$ eine Summe von Funktionen der Gestalt $\varphi(f,g)$ ist[8], ist diese Abbildung surjektiv. Wir haben noch zu zeigen, die Abbildung ist injektiv. Seien

$$\{f_i\}$$

eine Familie k-linear unabhängiger Elemente von $k[X]$ und

$$\{g_j\}$$

eine Familie k-linear unabhängiger Elemente von $k[Y]$. Es reicht zu zeigen, die Familie der Elemente

$$\varphi(f_i, g_j)$$

von $k[X\times Y]$ ist k-linear unabhängig. Sei also

$$0 = \sum_{i,j} c_{ij}\, \varphi(f_i, g_j),\ c_{ij}\in k.$$

Dann gilt für beliebige $x\in X$, $y\in Y$,

$$0 = \sum_{i,j} c_{ij}\, f_i(x)g_j(y).$$

Für jedes fest gewählte x steht rechts eine Linearkombination der linear unabhängigen Funktionen g_j, die identisch Null ist auf Y. Also müssen die Koeffizienten Null sein:

$$0 = \sum_{i} c_{ij}f_i(x)$$

für jedes $x\in X$. Da die f_i linear unabhängig sind, müssen alle c_{ij} Null sein.

QED.

1.2.4 Hilbertscher Nullstellensatz für die Koordinatenringe

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine abgeschlossenen Teilmenge und

$$f_1,...,f_r,g \in k[X]$$

reguläre Funktionen auf X mit der Eigenschaft, daß

$$g(x) = 0$$

gilt für jeden Punkt $x\in X$ mit $f_1(x) = ... = f_r(x) = 0$. Dann ist eine Potenz von g eine Linearkombination der f_i ,

$$g^s \in (f_1,...,f_r).$$

---

[8] Offensichtlich ist (1) eine k-lineare Abbildung. Es reicht also zu zeigen, eine k-Vektorraumbasis von $k[X\times Y]$ liegt im Bild von (1). Seien $T'_1,...,T'_m$ die Koordinaten-Funktionen des $\mathbb{A}^m$ und $T_1,...,T_m$ die des $\mathbb{A}^n$. Dann bilden die Einschränkungen auf $X\times Y$ der Potenzprodukte in den T_i und T'_j eine solche k-Vektorraumbasis. Es reicht also zu zeigen, jede Einschränkung eines solchen Potenzprodukts liegt im Bild von (1). Indem wir für f ein geeignetes Potenzprodukt in den T_i einsetzen und für g ein solches in den T'_j erhalten wir aber für $\varphi(f,g)$ jedes der Potenzprodukte in den T_i und T'_j.

Beweis. Seien $F_1,...,F_r,G$ Polynome, welche die regulären Funktionen $f_1,...,f_r,g$ repräsentieren. Weiter sei

$$X = V(H_1,...,H_s).$$

Nach Voraussetzung ist dann G gleich Null in allen Punkten von

$$V(H_1,...,H_s, F_1,...,F_r).$$

Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz 1.2.1(i) gibt es einen Exponenten t mit

$$G^t = (H_1,...,H_s, F_1,...,F_r).$$

Wir schreiben G^t Linearkombination der H_i und F_j und schränken diese Relation auf X ein. Die H_i gehen dabei in die Null über, die F_j in die f_j und G in g. Wir erhalten also eine Darstellung von g^t als Linearkombination der f_j .

QED.

1.2.5 Die Ideale welche eine gegebene algebraische Menge definieren

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine algebraische Menge und $I \subseteq k[T]$ ein Ideal. Dann sind äquivalent:

(i) $X = V(I)$.

(ii) $\sqrt{I} = I(X)$.

Dabei bezeichne $\sqrt{I}$ das Ideal

$$\sqrt{I} = \{f\in k[T] \mid \text{eine Potenz von f liegt in I}\},$$

welches auch Radikal von I heißt.

Beweis.(i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $f\in\sqrt{I}$. Dann gilt $f^n\in I$, also $f^n = 0$ auf X, also $f = 0$ auf X, also $f\in I(X)$. Wir haben gezeigt:

$$\sqrt{I} \subseteq I(X).$$

Sei jetzt $f\in I(X)$. Dann gilt $f = 0$ auf X, also $f = 0$ auf V(I). Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist eine Potenz f^n Linearkombination eines Erzeugendensystems von I, d.h.

$$f^n \in I.$$

Mit anderen Worten, es gilt $f \in \sqrt{I}$. Wir haben gezeigt, aus (i) folgt (ii).

(i) $\Leftarrow$ (ii). Es gilt

$$\begin{aligned} X &= V(I(X)) \\ &= V(\sqrt{I}) \qquad \text{(nach Voraussetzung (ii))} \\ &= V(I). \end{aligned}$$

QED.

1.2.6 Reguläre Abbildungen

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^m$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ abgeschlossene Mengen. Eine Abbildung

$$f: X \to Y, x \mapsto (f_1(x), ... , f_n(x)),$$

heißt regulär, wenn ihre Koordinatenfunktionen f_i reguläre Funktionen sind,

$$f_i\in k[X].$$

Eine reguläre Funktion $X \to Y$ ist also durch ein Tupel von Elementen aus k[X] gegeben, welches den Gleichungen von Y genügt.

Eine reguläre Abbildung $f: X \to Y$ heißt Isomorphismus, wenn es eine reguläre Abbildung $g: Y \to X$ gibt, mit

$$f\circ g = id_Y \text{ und } g\circ f = id_X.$$

Falls ein solcher Isomorphismus existiert, so sagt man, die algebraischen Mengen X und Y sind isomorph.

1.2.7 Beispiele für reguläre Abbildungen

Reguläre Funktionen sind reguläre Abbildungen

Jede reguläre Funktion auf X läßt sich als reguläre Abbildung $X \to \mathbb{A}^1$ auffassen.

Lineare Abbildungen

Lineare Abbbildungen lassen sich als reguläre Abbildungen $\mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^n$ auffassen.

Offene Hauptmengen sind isomorph zu affinen algebraischen Mengen

Die Abbildung

$$V(T_1T_2-1) \subseteq \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1, (x,y) \mapsto x,$$

ist regulär. Sie identifiziert die Punkte der Hyperbel mit den Punkten der affinenen Geraden, aus der der Ursprung entfernt wurde.

Allgemeiner seien

$$X := V(f_1,...,f_m) \subseteq \mathbb{A}^n$$

abgeschlossen und $f \in k[T]$ ein beliebiges Polynom. Wir führen eine weitere Unbestimmte T_{n+1} ein und setzen

$$X' := V(f_1,...,f_m, T_{n+1}\cdot f - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}.$$

Dann ist die Abbildung

$$p:X' \subseteq \mathbb{A}^{n+1} \to X, (x_1,...,x_{n+1}) \mapsto (x_1,...,x_n),$$

wohldefiniert und regulär. Nach Konstruktion sind die Werte von f in den Bildpunkten von p ungleich Null, d.h. p läßt sich als Abbildung mit Werten in der offenen Hauptmenge

$$D(f) = \{ x \in X \mid f(x) \ne 0 \},$$

auffassen:

$$p: X' \to D(f), (x_1,...,x_{n+1}) \mapsto (x_1,...,x_n),$$

Also solche besitzt p eine Umkehrung

$$D(f) \to X', (x_1,...,x_n) \mapsto (x_1,...,x_n, f(x_1,...,x_n)^{-1})$$

Mit anderen Worten, p identifiziert X' mit der offenen Hauptmenge D(f).

Die offenen Hauptmengen lassen sich also mit Hilfe von regulären Abbildungen mit affinen algebraischen Mengen identifizieren. Um dies zu tun, muß man jedoch den Begriff der regulären Abbildung etwas verallgemeinern: man muß ihn auf die offenen Teilmengen der allgebraischen Mengen ausdehnen und dabei Polynome, die in allen betrachteten Punkten $\ne 0$ sind, im Nenner zuslassen.

Wir werden uns mit dieser Frage noch ausführlich beschäftigen.

Parametrisierung der semi-kubischen Parabel

Die Abbildung

$$\mathbb{A}^1 \to V(T_2^2-T_1^3), t \mapsto (t^2,t^3),$$

ist regulär.

Die Frobenius-Abbildung
Sei der Grundkörper k von der Charakteristik $p > 0$,
$$\mathbb{F}_p \subseteq k.$$
Weiter sei $X = V(f_1,...,f_m) \subseteq \mathbb{A}^n$ eine abgeschlossene Menge, deren definierende Gleichungen Koeffizienten aus $\mathbb{F}_p$ haben,

(1) $$f_1,...,f_m \in \mathbb{F}_p[T].$$

Dann ist die Abbildung
$$F: X \to X, (x_1,...,x_n) \mapsto (x^p_1,...,x^p_n),$$
wohldefiniert und regulär und heißt Frobenius-Abbildung.

Bemerkungen

(i) Wegen der Annahme zu den Koeffizienten der f_i gilt
$$f_i(x^p_1,...,x^p_n) = f_i(x_1,...,x_n)^p,$$
d.h. F überführt tatsächlich die Punkte von X in Punkte von X. Die Punkte von X, deren Koordinaten in $\mathbb{F}_p$ liegen, sind gerade durch die Bedingung charakterisiert, daß sie Fixpunkte des Frobenius-Morphismus F sind.

(ii) Bedingung (1) kann man durch die schwächere Forderung ersetzen, daß die Koeffizienten der Gleichungen von X in einen endlichen Körper der Charakteristik p liegen,

(2) $$f_1,...,f_m \in \mathbb{F}_{p^r}[T].$$

Dann ist die r-te Potenz der Frobenius-Abbildung immer noch eine wohldefinierte reguläre Abbildung
$$F^r: X \to X, (x_1,...,x_n) \mapsto (x^{p^r}_1,...,x^{p^r}_n).$$
Die Punkte von X, deren Koordinaten in $\mathbb{F}_{p^r}$ liegen, sind gerade durch die Bedingung charakterisiert, daß sie Fixpunkte von F^r sind.

(iii) Die Frobenius-Abbildung kann man auch definieren ohne jede Bedingung an die Gleichungen von X. Das Polynom $f^{(p)}_i$ entstehe aus f_i, indem man alle Koeffizienten durch deren p-te Wurzeln ersetzt, d.h. die p-te Potenz von $f^{(p)}_i$ sei
$$f^{(p)}_i(x_1,...,x_n)^p = f_i(x^p_1,...,x^p_n).$$
Wir setzen
$$X^{(p)} := V(f^{(p)}_1,...,f^{(p)}_m).$$
Dann ist die Abbildung
$$F: X^{(p)} \to X, (x_1,...,x_n) \mapsto (x^p_1,...,x^p_n),$$
wohldefiniert und regulär. Sie heißt Frobenius-Abbildung von X.

1.2.8 Die induzierte Abbildung auf den Koordinatenringen

Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung und $\alpha \in k[Y]$ eine reguläre Funktion auf Y. Dann ist,
$$f^*(\alpha) = \alpha \circ f: X \to Y \to k, x \mapsto f(x) \mapsto \alpha(f(x)),$$

eine reguläre Funktion auf X. Sie heißt <u>Verpflanzung</u> von α entlang f oder auch <u>inverses Bild</u> von α entlang f.

Bemerkungen

(i) Die Verpflanzungsabbildung

$$f^*: k[Y] \to k[X], \alpha \mapsto f^*(\alpha) = \alpha \circ f,$$

ist ein Ringhomomorphismus.

(ii) Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ zwei reguläre Abbildungen, so gilt

$$(g \circ f)^*(\alpha) = f^*(g^*(\alpha))$$

für jedes $\alpha \in k[Z]$, d.h. es ist

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

(iii) Trivialerweise gilt $(id)^*\alpha = \alpha$, d.h.

$$id^* = id.$$

(iv) Die Verpflanzung $f^*(\alpha)$ ist auch für nicht-notwendig reguläre Abbildungen

$$f: X \to Y$$

und nicht-notwendig reguläre Funktionen $\alpha: Y \to k$ definiert. Ist $Y \subseteq \mathbb{A}^N$ und

$$t_i := T_i \mid Y$$

die Projektion auf die i-te Koordinate, so ist $f^*(t_i)$ die i-te Koordinatenfunktion von f. Deshalb sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist eine reguläre Abbildung.
2. $f^*(t_i)$ ist regulär auf X für jedes i.
3. $f^*(k[Y]) \subseteq k[X]$.

1.2.9 Isomorphiekriterium

Zwei affine algebraische Mengen sind genau dann isomorph, wenn ihre Koordinatenringe isomorph sind über k.

Beweis. Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to X$ zueinander inverse reguläre Abbildungen. Wir betrachten die Verpflanzungsabbildungen

$$f^*: k[Y] \to k[X] \text{ und } g^*: k[X] \to k[Y].$$

Es gilt

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = id^* = id$$

$$g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = id^* = id,$$

d.h. f^* und g^* sind zueinander inverse Ringhomomorphismen (die k elementweise fest lassen).

Sei jetzt umgekehrt ein k-Isomorphismus

$$h: k[X] \to k[Y]$$

gegeben. Sei

$$X \subseteq \mathbb{A}^m \text{ und } Y \subseteq \mathbb{A}^n$$

Wir bezeichnen die Einschränkung der i-ten Koordinatenfunktion $\mathbb{A}^m \to k$ auf X mit x_i und die Einschränkung der j-ten Koordinatenfunktion $\mathbb{A}^n \to k$ auf Y mit y_j. Dann gilt

$$k[X] = k[x_1,...,x_m]$$

$$k[Y] = k[y_1,..., y_n]$$

Wir setzen

$$f_i := h(y_i) \in k[X]$$

$$g_j := h^{-1}(x_j) \in k[Y]$$

Dann sind

$$f: X \to Y, x \mapsto (f_1(x),...,f_n(x)),$$

$g: Y \to X, y \mapsto (g_1(y),...,g_n(y))$,

wohldefinierte[9] zueinander inverse reguläre Abbildungen (die auf den Koordinatenringen den gegebenen Isomorphismus h und dessen Inverses induzieren)[10].

QED.

Bemerkungen

(i) Wir haben etwas mehr bewiesen, als behauptet wurde: eine reguläre Abbildung

$$f: X \to Y$$

affiner algebraischer Mengen ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die Verpflanzungsabbildung

$$f^*: k[Y] \to k[X]$$

ein Isomorphismus von k-Algebren ist.

(ii) Dieselbe Argumentation wie oben zeigt, der kontravariante Funktor

(affine algebraische Mengen) $\to$ (kommutative k-Algebren mit 1), $X \mapsto k[X]$,

ist eine Äquivalenz der linken Kategorie mit einer Teilkategorie der rechten. Die moderne algebraischen Geometrie unterscheidet sich von der klassischen im Grunde dadurch, daß sie die linke Kategorie soweit vergrößert, daß man ein Äquivalenz mit der vollen Kategorie rechts erhält (und außerdem noch den Körper k durch einen beliebigen kommutativen Ring ersetzt).

1.2.10 Beispiele und Gegenbeispiele zum Isomorphiebegriff

Parabel und affine Gerade

Die Parabel

$$X: y - x^k = 0$$

ist isomorph zur affinen Geraden. Als zueinander inverse Isomorphismen kann man die folgenden verwenden.

$X \to \mathbb{A}^1, (x,y) \mapsto x$,

$\mathbb{A}^1 \to X, \quad x \mapsto (x,x^k)$.

Hyperbel und affine Gerade

Betrachten wir die Hyperbel

$$X: xy - 1 = 0$$

und die reguläre Abbildung

$X \to \mathbb{A}^1, (x,y) \mapsto x$.

Dies ist kein Isomorphismus, denn der Ursprung des $\mathbb{A}^1$ liegt nicht im Bild.

Semi-kubische Parabel und affine Gerade

Betrachten wir die semi-kubische Parabel

$$X: x^3 - y^2 = 0$$

und die Abbildungen

---

[9] Zum Beispiel gilt für jede definierende Gleichung α von Y:

$$\alpha(f_1,...,f_n) = \alpha(h(y_1),...,h(y_n)) = h(\alpha(y_1,...,y_1))$$
$$= h(0) \quad (\alpha \text{ liegt im Kern der nat. Abb. } k[T]\to k[Y])$$
$$= 0,$$

d.h. es gilt $f(X) \subseteq Y$.

[10] Nach Wahl der f_i und g_j gilt

$x_j = h(g_j) = h(g_j(y_1,...,y_n)) = g_j(h(y_1),...,h(y_n)) = g_j(f_1,...,f_n) = g_j(f_1(x_1,...,x_m),...,f_n(x_1,...,x_m))$,

d.h. es ist $g \circ f = Id$.

$$\mathbb{A}^1 \to X,\ t \mapsto (t^2, t^3),$$
$$X \to \mathbb{A}^1,\ (x,y) \mapsto \frac{y}{x},\ (0,0) \mapsto 0.$$
Diese Abbildungen sind zueinander invers. Es sind jedoch keine Isomorphismen, denn die zweite Abbildung ist nicht regulär.
Aufgabe: Zeigen Sie, es gibt keinen Isomorphismus, indem Sie beweisen, die Koordinatenringe sind nicht isomorph.

1.2.11 Reduktion auf die Diagonale

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ zwei affine algebraische Mengen. Betrachten wir das direkte Produkt
$$X\times Y \subseteq \mathbb{A}^{2n}.$$
Im $\mathbb{A}^{2n}$ bezeichnen wir die Koordinatenfunktionen mit $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ und betrachten noch die abgeschlossene Menge
$$\Delta := V(x_1-y_1,\dots,x_n-y_n) \subseteq \mathbb{A}^{2n}$$
welche <u>Diagonale</u> heißt.. Dann ist die Abbildung
$$X\cap Y \to (X\times Y)\cap\Delta,\ z \mapsto (z,z),$$
wohldefiniert und regulär. Es ist leicht zu sehen, daß es sich sogar um einen Isormophismus (mit der Inversen $(z,z) \mapsto z$) handelt.

Diese Abbildung gestattet es oft, Fragen der Schnitt-Theorie auf den Fall zurückzuführen, daß eine der sich schneidenden Mengen die Diagonale ist.

1.2.12 Dominante reguläre Abbildungen

Ein reguläre Abbildung $f: X \to Y$ heißt <u>dominant</u>, wenn die induzierte Abbildung
$$f^*: k[Y] \to k[X]$$
injektiv ist.
Aufgabe: Zeigen Sie, f ist genau dann dominant, wenn das Bild f(X) dicht liegt in Y, d.h. wenn $\overline{f(X)} = Y$ gilt.

1.3 Rationale Funktionen und Abbildungen

1.3.1 Rationale Funktionen auf einer irreduziblen abgeschlossenen Menge

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine irreduzible affine algebraische Menge. Dann ist I(X) ein Primideal, der Koordinatenring
$$k[X] \cong k[T]/I(X)$$
also ein Integritätsbereich.Sein Quotientenkörper heißt <u>Körper der rationalen Funktionen</u> von X und wird mit
$$k(X) := Q(k[X])$$
bezeichnet. Seine Elemente heißen <u>rationale Funktionen</u> auf X. Dies sind Quotienten
$$r = \frac{f}{g} \text{ mit } f,g\in k[X],\ g \ne 0.$$
Bemerkungen
(i) Wir schreiben im folgenden oft
$$r = \frac{f}{g} \text{ auf } X \text{ mit Polynomen } f,g\in k[T],\ g\notin I(X).$$
Dabei sind zwei solche Brüche

$$r' = \frac{f'}{g'} \text{ und } r'' = \frac{f''}{g''}$$

genau dann als gleich auf X anzusehen, wenn gilt

$$r' = r'' \text{ auf } X \Leftrightarrow f'\cdot g'' = f''\cdot g' \text{ auf } X \Leftrightarrow f'\cdot g'' - f''\cdot g' \in I(X).$$

(ii) Die letzte Beschreibung der Gleichheit rationaler Funktionen auf X bedeutet gerade, es gilt

$$k(X) \cong \mathcal{O}_X/m_X$$

mit

$$\mathcal{O}_X :=^{11} \{\frac{f}{g} \mid f,g\in k[T] \mid g \notin I(X)\} = k[X]_{I(X)}$$

$$m_X := \{\frac{f}{g}\in \mathcal{O}_X \mid f|_X = 0\} = \{\frac{f}{g}\in \mathcal{O}_X \mid f \in I(X)\} = I(X)\cdot\mathcal{O}_X$$

(iii) Die Äquivalenzrelation von (i) ist gerade die Äquivalenzrelation, die wir für die Beschreibung des Funktionenkörpers in 0.2.1 bereits verwendet haben.

1.3.2 Reguläre Punkte rationaler Funktionen

Eine rationale Funktion $r\in k(X)$ heißt regulär im Punkt $x\in X$, wenn man sie in der folgenden Gestalt schreiben kann.

$$r = \frac{f}{g} \text{ mit } f,g\in k[X] \text{ und } g(x) \neq 0.$$

Man sagt auch, die rationale Funktion r ist in diesem Punkt definiert. In dieser Situation schreibt man auch

$$r(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \ (\in k)$$

und nennt dieses Element Wert von r im Punkt x.

1.3.3 Polynomialität überall regulärer Funktionen

Eine rationale Funktion $\varphi\in k(X)$, die in allen Punkten von X regulär ist, ist eine reguläre Funktion, d.h. $\varphi\in k[X]$.

Beweis. Für jedes $x\in X$ wählen wir Funktionen $f_x,g_x\in k[X]$ mit

$$\varphi = \frac{f_x}{g_x} \text{ auf } X \text{ und } g_x(x) \neq 0.$$

Sei I das von allen g_x erzeugte Ideal,

$$I := (g_x \mid x\in X)k[X].$$

Als Faktorring des Noetherschen Rings k[T] ist auch k[X] Noethersch, d.h. I besitzt ein endliches Erzeugendensystem,

$$I = (g_{x_1}, \dots ,g_{x_N}).$$

Die Funktionen g_{x_i} können keine gemeinsame Nullstelle (auf X) haben, denn wäre x eine solche, so müßte $g_x\in I = (g_{x_1}, \dots ,g_{x_N})$ als Linearkombination der g_{x_i} in x Null sein. Die gemeinsame Nullstellenmenge der g_{x_i} ist somit leer. Nach dem Nullstellensatz für k[X] ist damit

$$1\in I,$$

d.h. es gilt

---

[11] Genauer müßte man $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,X}$ schreiben für den lokalen Ring des $\mathbb{A}^n$ im Punkt X.

$$1 = u_1 g_{x_1} + ... + u_N g_{x_N}$$

mit gewissen $u_i \in k[X]$. Durch Multiplikation der Identität mit φ erhalten wir wegen $\varphi = \frac{f_{x_i}}{g_{x_i}}$, d.h. wegen $\varphi \cdot g_{x_i} = f_{x_i}$:

$$\varphi = u_1 f_{x_1} + ... + u_N f_{x_N} \in k[X]$$

Mit anderen Worten, φ ist regulär.
QED.

1.3.4 Bemerkungen zum Definitionsbereich rationaler Funktionen

(i) Der Definitionsbereich einer rationalen Funktion $r = \frac{f}{g} \in k(X)$ ist eine nicht-leere offene Menge.[12]

(ii) Der gemeinsame Definitionsbereich von endlich vielen rationalen Funktionen ist ebenfalls offen und nicht leer. Das liegt einfach daran, daß der Durchschnitt von endlich vielen nicht-leeren offenen Teilmengen einer irreduziblen algebraischen Menge nicht leer ist (vgl. 1.1.13).

(iii) Zwei rationale Funktionen $r' = \frac{f'}{g'}$ und $r'' = \frac{f''}{g''}$, die auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge ihres gemeinsamen Definitionsbereichs übereinstimmen, sind gleich als Elemente von k(X) und damit gleich in allen Punkten ihres gemeinsamen Definitionsbereiches.

Sei nämlich U eine nicht-leere offene Teilmenge im gemeinsamen Definitionsbereich von r' und r". Dann gilt

(1) $$f'(x)g''(x) - f''(x)g'(x) = 0 \text{ für alle } x \in U.$$

O.B.d.A. sei U eine offene Hauptmenge,

$$U = D(h).$$

Dann ist h in allen Punkten Null, in denen die linke Seiten von (1) eventuell nicht Null ist, d.h. es gilt

$$f'g''h^2 - f''g'h^2 = 0 \text{ auf } X,$$

also

$$\frac{f'}{g'} = \frac{f'h}{g'h} = \frac{f''h}{g''h} = \frac{f''}{g''} \text{ in } k(X).$$

Seien jetzt f',g',f",g" Polynome mit

$$\frac{f'}{g'} = \frac{f''}{g''} \text{ in } k(X)$$

und sei $x \in X$ ein Punkt, in welchem der Wert beider rationaler Funktionen definiert ist, d.h. es gelte

$$g'(x) \neq 0 \text{ und } g''(x) \neq 0.$$

Nach Definition von k(X) bedeutet die Gleichheit in k(X),

$$f' \cdot g'' - f'' \cdot g' \in I(X).$$

Wegen $x \in X$ folgt,

$$f'(x) \cdot g''(x) - f''(x) \cdot g'(x) = 0,$$

also

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

---

[12] Sie ist nicht-leer, weil g nicht identisch Null ist auf X, also $D(g) = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$ im Definitionsbereicht liegt. Sie ist offen, weil mit $g(x) \neq 0$ die analoge Ungleichung auch in einer ganzen Umgebung von x besteht.

1.3.5 Rationale Abbildungen

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^m$ eine irreduzible affine algebraische Menge. Eine rationale Abbildung[13] mit Werten im $\mathbb{A}^n$,

$$X \dashrightarrow \mathbb{A}^n,\ x \mapsto (\varphi_1(x),...,\varphi(x)_n),$$

ist durch ein n-Tupel rationaler Funktionen auf X gegeben,

$$\varphi_i \in k(X).$$

Seien jetzt X, Y irrreduzible affine algebraische Mengen mit $Y \subseteq \mathbb{A}^n$. Eine <u>rationale Abbildung</u>

$$\varphi: X \dashrightarrow Y,\ x \mapsto (\varphi_1(x),...,\varphi(x)_n),$$

ist durch ein n-Tupel rationaler Funktionen φ_i auf X gegeben mit der Eigenschaft, daß für jeden Punkt x des gemeinsamen Definitionsbereiches gilt

(1) $$\varphi(x) := (\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)) \in Y.$$

Liegt x im gemeinsamen Definitionsbereich der φ_i , so sagt man, die Abbildung φ sei <u>regulär</u> im Punkt x.

Die Menge

$$\mathrm{Im}(\varphi) := \{\varphi(x) \mid \varphi \text{ regulär in } x \in X\}$$

heißt <u>Bild</u> von φ. Eine rationale Abbildung

$$\varphi: X \to Y$$

von irreduziblen abgeschlossenen Mengen heißt <u>birationaler Isomorphismus</u>, wenn es eine Inverse gibt, d.h. eine rationale Abbildung

$$\psi: Y \to X$$

mit

(2) $$\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Y \text{ und } \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_X.$$

Zwei irreduzible abgeschlossene Mengen X und Y heißen <u>birational isomorph</u>, wenn es einen birationalen Isomorphismus $\varphi: X \to Y$ gibt.

Eine irreduzible abgeschlossene Menge X heißt <u>rational</u>, wenn sie birational isomorph zu einem $\mathbb{A}^n$ ist.

Bemerkungen

(i) Eine rationale Abbildung auf X ist eine Abildung, die auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge von X definiert ist.

(ii) Die Betrachtung von Abbildungen und Funktionen, die nicht in allen Punkten definiert sind ist charakteristisch für die algebraische Geometrie[14].

(iii) Bedingung (1) bedeutet gerade[15], die Koordinatenfunktionen φ_i genügen als Elemente des Körpers k(X) den definierenden Gleichungen von Y.

---

[13] <u>Genauer</u>: eine rationale Abbildung ist eine Abbildung, deren Definitionsbereich eine offene Teilmenge von X enthält und deren Koordinatenfunktionen rationale Funktione auf X sind.

[14] Es werden Funktionenringe (genauer: -körper) betrachtet, für welche der gemeinsame Definitionsbereich aller Funktionen des Rings <u>leer</u> ist.

[15] Bedingung (1) bedeutet, für jede definierende Gleichung f von Y ist die rationale Funktion

$$f(\varphi_1,...,\varphi_n)$$

Null auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge U von X (die von f abhängen kann). Nach 1.3.2(e)(v) gilt dann aber

(iv) Für zwei rationale Abbildunen

$$\varphi\ \varphi': X \dashrightarrow Y$$

sind folgende Bedingungen äquivalent.

(a) $\varphi = \varphi'$ als Tupel von Elementen aus k(X).

(b) $\varphi(x) = \varphi'(x)$ für jeden Punkt x, in welchem φ und φ' definiert sind.

(c) $\varphi(x) = \varphi'(x)$ für jeden Punkt x einer offenen Teilmenge von X (in denen φ und φ' definiert sind).

1.3.6 Die induzierte Abbildung auf den Funktionenkörpern

Sei

$$f: X \dashrightarrow Y,\ x \mapsto (f_1(x),...,f_n(x))$$

eine dominante rationale Abbildung irreduzibler affiner algebraischer Mengen.
Für jede reguläre Funktion $\alpha \in k[Y]$ ist dann

$$\alpha \circ f: X \dashrightarrow k,\ x \mapsto \alpha(f_1(x),...,f_n(x)),$$

eine rationale Funktion[16] auf X. Die so definierte Abbildung

$$f^*: k[Y] \to k(X),\ \alpha \mapsto \alpha(f_1,...,f_n),$$

ist offensichtlich ein Homomorphismus von k-Algebren. Wir zeigen zunächst:

Behauptung: Der Homormorphismus f* ist injektiv.

Aus $f^*(\alpha) = 0$ folgt, die reguläre Funktion α ist Null auf Im(f). Sei $\alpha = p|_X$ mit einem Polynom p. Dann ist auch p Null auf Im(f), d.h.

$$\mathrm{Im}(f) \subseteq V(p).$$

Weil V(p) abgeschlossen ist, folgt, $\overline{\mathrm{Im}(f)} \subseteq V(p)$, d.h. p ist Null auf $\overline{\mathrm{Im}(f)}$, d.h. α ist Null auf $\overline{\mathrm{Im}(f)}$. Wegen $\overline{\mathrm{Im}(f)} = Y$, folgt $\alpha=0$ in k[Y].

Die Abbildung f* identifiziert also k[Y] mit einem Teilring des Körpers k(X). Dann läßt sich aber auch der Quotientenkörper von k[Y] mit einem Teilkörper von k(X) identifizieren. Anders ausgedrückt, f* induziert einen k-Homomorphismus

$$f^*: k(Y) \to k(X),\ \alpha \mapsto \alpha(f_1,...,f_n),$$

der ebenfalls mit f* bezeichnet wird. Diese Abbildund heißt wie im Fall der regulären Abbildungen Verpflanzung entlang f oder auch inverses Bild entlang f. Wie im Fall regulärer Abbildungen gilt

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

für je zwei rationale dominante Abbildungen $f:X \to Y$ und $g:Y \to Z$. Trivialerweise gilt

$$\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}.$$

1.3.7 Kriterium für birationale Isomorphie

Zwei irreduzible affine algebraische Mengen sind genau dann birational isomorph, wenn ihre rationalen Funktionenkörper isomorph sind über k.

Der **Beweis** ist formal derselbe wie der für die Aussage, daß algebraische Mengen genau dann isomorph sind, wenn sie k-isomorphe Koordinatenringe besitzen (vgl. 1.2.9).

$$f(\varphi_1,...,\varphi_n) = 0 \text{ in } k(X).$$

Umgekehrt folgt aus letzterem, daß Bedingung (1) erfüllt ist.

[16] Die auftretenden Nenner sind Potenzprodukte der Nenner der f_i, also Funktionen, die nicht identisch Null sind auf X.

1.3.8 Beispiele

Rationalität der Hyperflächen zweiten Grades

Eine irreduzible Hyperfläche

$$X: f(T_1,...,T_n) = 0$$

zweiten Grades im $\mathbb{A}^n$ ist rational. Der Beweis ist derselbe wie im Fall zweier Variabler. Man projeziert die Hyperfläche aus einem Punkt $x\in X$ auf eine Hyperebene, die nicht durch x geht.

Wichtig: damit die Projektionsstrahlen durch x die Hyperfläche ein zweites Mal schneiden, darf x kein singulärer Punkt von X sein (z.B. nicht die Spitze eines Kegels), d.h. es muß gelten

$$\frac{\partial f(x)}{\partial T_i} \ne 0 \text{ für mindestens ein i.}$$

Eine rationale Fläche 3.Grades

Wir betrachten die folgende Fläche im $\mathbb{A}^3$

$$X: x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

Auf dieser liegen verschiedene Geraden, zum Beispiel

$g_1 := V(x+y, z-1)$

$g_2 := V(x+\rho y, z-\rho)$

Dabei bezeichne ρ ein dritte Einheitswurzel. Diese Gerade liegen auf keiner gemeinsamen Ebene[17]. Wir beschreiben jetzt die Konstruktion eines birationalen Isomorphismus

$$X \to \mathbb{A}^2$$

in geometrischer Weise und ersparen uns die rechnerischen Details.

Wir fixieren eine Ebene $E \subseteq \mathbb{A}^3$ mit

$$g_1 \nsubseteq E \text{ und } g_2 \nsubseteq E$$

Für jeden Punkt

$$x \in X - (g_1 \cup g_2)$$

gibt es genau eine Gerade ℓ durch x, welche die Geraden g_1 und g_2 schneidet[18]. Den Schnittpunkt von ℓ mit der Ebene E bezeichnen wir mit f(x). Die Abbildung

---

[17] Für die Gleichung f einer solchen Ebene müßte nach dem Nullstellensatz gelten

$f \in (x+y, z-1)$ und $(x+\rho y, z-\rho)$,

denn die beiden Ideale sind Primideale (Geraden sind irreduzibel, k[T] ist nullteilerfrei). Es folgt

$$f = \alpha\cdot(x+y) + \beta\cdot(z-1) = \gamma\cdot(x+\rho y) + \delta\cdot(z-\rho)$$

mit Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Das zweite Gleichheitszeichen liefert ein lineares homogenes Gleichungssystem(Koeffizienten-Vergleich für x, y, z und 1 liefert 4 Gleichungen in den 4 Unbestimmten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\rho \\ 0 & -1 & 0 & -\rho \end{pmatrix}$$

Nach Vertauschen der beiden mittleren Spalten zerfällt die Matrix in 2×2-Blöcke mit von Null verschiedener Determinante. Es gibt also nur die triviale Lösung und damit keine Ebene, die die Geraden enthält.

[18] x und g_i definieren eine Ebene. Die Schnittgerade der beiden Ebenen ist die gesuchte Gerade ℓ.

$$X \longrightarrow E,\ x \mapsto f(x),$$
ist der gesuchte birationale Isomorphismus[19].

1.3.9 Charakterisierung der Ringe k[X] bzw. Körper k(X)

(i) Eine k-Algebra A ist genau dann von der Gestalt k[X] mit einer irreduziblen affinen algebraischen Menge X, wenn sie endlich erzeugt und nullteilerfrei ist.

(ii) Ein Oberkörper K von k ist genau dann von der Gestalt k(X), wenn er endlich erzeugt ist.

Beweis. Zu (i). Sei A endlich erzeugt über k und nullteilerfrei,
$$A = k[x_1,...,x_n].$$
Wir betrachten den natürlichen Homomorphismus von k-Algebren
$$\varphi: k[T] \to k[x_1,...,x_n],\ T_i \mapsto x_i,$$
und bezeichnen dessen Kern mit
$$I := \mathrm{Ker}\,(\varphi).$$
Da Polynomringe Noethersch sind, gilt
$$I = (f_1,...,f_m) \text{ mit } f_i.$$
Wir setzen
$$X := V(f_1,...,f_m).$$
Dann gilt
$$I(X) = \sqrt{I} = I$$
Das zweite Gleichheitszeichen besteht, weil I ein Primideal ist, denn nach Konstruktion gilt
$$k[T]/I = A$$
und A ist nullteilerfrei. Damit ist
$$k[X] = k[T]/I(X) = k[T]/I = A.$$
Die umgekehrte Implikation ist trivial.
Zu (ii). Die eine Richtung ist trivial, die andere folgt aus (i).
QED.

1.3.10 Birationale Isomorphie zu den Hyperflächen

Jede irreduzible affine algebraische Menge ist birational isomorph zu einer Hyperfläche.
Beweis. Sei X irreduzible abgeschlossene Menge. Dann ist k(X) endlich erzeugt, sagen wir
$$k(X) = k(t_1,...,t_n)$$
Sei d die maximale Anzahl algebraisch unabhängiger Elemente unter den t_i (über k). Wir können dann annehmen
$$t_1,...,t_d \text{ sind algebraisch unabhängig über k.}$$
Jedes Element $y \in k(X)$ ist dann algebraisch über $k(t_1,...,t_d)$, d.h. es genügt einer algbraischen Gleichung mit Koeffizienten aus $k(t_1,...,t_d)$, d.h. es gibt ein irreduzibles Polynom
$$f(T_1,...,T_d,T_{d+1}) \in k[T_1,...,T_d,T_{d+1}] - \{0\}$$
mit
$$f(t_1,...,t_d,y) = 0.$$
Sei jetzt speziell $y = t_{d+1}$.

---

[19] Zur Umkehrabbildung. Für $y \in E-(g_1 \cup g_2)$ gibt es genau eine Gerade l durch y, die beide g_i schneidet. Da die g_i ganz auf X liegen, sind die Schnittpunkte von l mit den g_i Punkte von X. Der dritte weitere Schnittpunkt ist dann $f^{-1}(y)$.

Behauptung:

(1) $$\frac{\partial f}{\partial T_i}(T_1,...,T_d,T_{d+1}) \ne 0 \text{ für mindestens ein } i.$$

Andernfalls würde jedes T_i in f nur mit Expontenten vorkommen, die Vielfache der Charakteristik p ($\ne 0$) von k sind. In diesem Fall wäre aber f eine p-te Potenz also nicht irreduzibel.

Sei jetzt i so gewählt, daß (1) gilt. Dann kommt T_i in f wirklich vor und t_i ist algebraisch über $k(t_1,...,t_{i-1},t_{i+1},...,t_{d+1})$. Letzterer Körper hat also denselben Transzendenzgrad wie $k(t_1,...,t_{d+1})$ und damit wie $k(t_1,...,t_d)$. Mit anderen Worten, die Elemente

$$t_1,...,t_{i-1},t_{i+1},...,t_{d+1}$$

bilden eine Transzendenzbasis von k(X) über k.
Mit anderen Worten, wir können durch umnummerieren der t_i immer erreichen, daß t_{d+1} algebraisch und separabel über $k(t_1,...,t_d)$. Die algebraische Erweiterung

$$k(t_1,...,t_{d+2})$$

entsteht also aus $k(t_1,...,t_d)$ durch hinzufügen eines separabel algebraischen Elements und anschließend eines algebraischen Elements. Nach dem Satz vom primitiven Element ist die Erweiterung einfach, d.h.

$$k(t_1,...,t_d,t_{d+1},t_{d+2}) = k(t_1,...,t_d,y) \text{ mit } y\in k(X).$$

Wir haben damit gezeigt, wir können die Anzahl der Erzeugenden des Körpers k(X) verkleinern, solange diese > d+1 ist. Mit anderen Worten, k(X) wird von d+1 Elementen erzeugt,

$$k(X) = k(t_1,...,t_d,t_{d+1}) \text{ mit } t_1,...,t_d \text{ algebraisch unabhängig.}$$

Letzteres bedeutet,

$$k(X) \cong k(T_1,...,T_d)[T_{d+1}]/(F)$$

mit einem irreduziblen Polynom $F\in k(T_1,...,T_d)[T_{d+1}]$. Indem wir mit einer Einheit von $k(T_1,...,T_d)$ multiplizieren, erreichen wir,

$$F\in k[T_1,...,T_d,T_{d+1}].$$

Da F irreduzibel ist, ist (F) ein Primideal von $k[T_1,...,T_d,T_{d+1}]$ und für die Hyperfläche

$$H = V(F) \subseteq \mathbb{A}^{d+1}$$

gilt

$$I(H) = \sqrt{(F)} = (F)$$

Nach Konstruktion gilt damit

$$k[H] = k[T_1,...,T_d,T_{d+1}]/(F)$$

also

$$k(H) = Q(k[H]) =^{20} k(T_1,...,T_d)[T_{d+1}]/(F) = k(X).$$

Mit anderen Worten, X ist birational isomorph zur Hyperfläche H.
QED.

Bemerkungen zum Beweis von 1.3.10

(i) Der Beweis zeigt, daß

$$k(X) = k(t_1,...,t_d,t_{d+1})$$

---

[20] Trivialerweise gilt "$\supseteq$". Die umgekehrte Inklusion ergibt sich aus der Tatsache, daß rechts ein Körper steht.

stets eine einfache separabel algebraische Erweiterung des Körpers

$$k(t_1,...,t_d)$$

der rationalen Funktionen in d algebraisch unabhängigen Elementen t_i ist.

(ii) Nach dem Satz vom primitiven Element kann man die im Beweis konstruierten erzeugenden t_i als Linearkombination mit Koeffizienten aus k von den ursprünglichen Erzeugenden schreiben[21],

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \text{ mit } c_{ij} \in k$$

Die durch diese Formel gegebene lineare Transformation

$$\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{d+1}$$

ist eine Projektion des $\mathbb{A}^n$ parallel zum linearen Unterraum mit den Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = 0 \ (i=1,...,d+1).$$

Dies liefert eine geometrische Beschreibung der rationalen Transformation, deren Existenz das Theorem behauptet: man projezierte die gegebene Varietät auf einen linearen Unterraum der Dimension d+1 in “allgemeiner Lage”. Die projezierte Varietät ist dann eine Hyperfläche, die birational äquivalent ist zur Ausgangsvarietät.

1.4 Das affine Spektrum eines Rings

Wir benötigen elementare Eigenschaften von Quotientenring (vgl. Anhang A2) und einige Grundbegriffe der Garbentheorie (vgl. A4).

1.4.1 Allgemeine Punkte

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ eine affine algebraische Menge und K/k eine Körpererweiterung. Wir bezeichnen mit

$$X(K) := \{x \in K^n \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } f \in I(X) \}$$

die Menge der Punkte von X mit Koordinaten in K. Die Punkte von X(K) heißen auch <u>K-rationale Punkte</u> von X oder <u>Punkte mit Koordinaten in K</u>. Für jedes Punkt

$$x = (x_1,...,x_n)$$

von X mit Koordinaten in einem Erweiterungskörper von k heißt der von den Koordinaten von x erzeugte Körper

$$k(x) := k(x_1,...,x_n)$$

auch <u>Restekörper</u> von x. Zwei solche Punkte

$$x = (x_1,...,x_n) \text{ und } y = (y_1,...,y_n)$$

(mit Koordinaten in möglicherweise verschiedenen Körpern) heißen <u>konjugiert</u> (über k), wenn es einen k-Isomorphismus

$$\varphi: k(x) \to k(y)$$

gibt mit

$$\varphi(x_i) = y_i \text{ für } i = 1,...,n.$$

Bemerkung

---

[21] tatsächlich kann man die Koeffizienten c_{ij} beliebig aus einer Zarieki-offenen (also dichten) Teilmenge des $\mathbb{A}^{dn}$ wählen.

Falls K algebraisch abgeschlossen ist, gelten sämtliche Aussagen, die wir für X bewiesen haben analog auch für X(K).

Ein Punkt $\eta\in X(K)$ heißt <u>allgemeiner Punkt</u> von X, falls jedes Polynom, welches in η Null ist, auf ganz X Null ist, d.h. falls gilt

$$f\in k[T],\ f(\eta) = 0 \Rightarrow f\in I(X).$$

Beispiel

$$X := V(T_1^2 - T_2^3) \subseteq \mathbb{A}_k^n,\ K = k(t),\ \eta = (t^3, t^2) \in X(K).$$

Wie man leicht einsieht[22], gilt für $f\in k[T_1,T_2]$:

$$f(t^3,t^2) = 0 \Leftrightarrow T_1^2 - T_2^3 \text{ teilt } f,$$

d.h. $\eta=(t^3, t^2)$ ist ein allgemeiner Punkt der semikubischen Parabel. Ist s eine weitere Unbstimmte, so ist

$$\xi = (s^3, s^2)$$

ein weiterer allgemeiner Punkt von X. Die Punkte η und ξ sind jedoch konjugiert: der k-Isomorphismus

$$k(t) \to k(s),\ f(t) \mapsto f(s),$$

der jede rationale Funktion in t in die entsprechende rationale Funktion in s abbildet, ist ein Isomorphismus

$$k(\eta) \to k(\xi),\ t \mapsto s,$$

der für jedes i die i-te Koordinate von η in die i-te Koordinate von ξ überführt.

Bemerkung

(i) Zwei k-rationale Punkte von X sind genau dann konjugiert, wenn sie gleich sind.

(ii) Es ist naheliegend, konjugierte Punkte als nicht wesentlich verschieden anzusehen.

1.4.2 Existenz allgemeiner Punkte

Sei $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ eine affine algebraische Menge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) X besitzt einen allgemeinen Punkt.

(ii) X ist irreduzibel.

Beweis. <u>(i) ⇒ (ii)</u>. Sei $x\in X(K)$ ein allgemeiner Punkt. Dann ist die Abbildung

$$k[T] \to K,\ f \mapsto f(x),$$

ein Ringhomomorphismus mit dem Kern I(X). Es gibt also eine Einbettung

$$k[T]/I(X) \subseteq K$$

in einen Körper, d.h. der Faktorring ist nullteilerfrei, d.h. I(X) ist ein Primideal, d.h. X ist irreduzibel.

<u>(ii) ⇒ (i)</u>. Nach Voraussetzung ist I(X) ein Primideal. Sei

$$K := Q(k[X]) = k(X)$$

---

[22] Die Implikation '⇐' ist trivial. Die umgekehrte Implikation beweist man durch Koeffizientenvergleich. Sei $f(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^iy^j$ und $f(t^3,t^2) = 0$. Indem wir f modulo x^2-y^3 abändern, erreichen wir, daß f in x linear ist,

$$f(x,y) = f'(y) + f''(y)x \text{ mit } f',f''\in k[y].$$

Es folgt

$$0 = f(t^3,t^2) = f'(t^2) + f''(t^2)\, t^3$$

Im ersten Summanden rechts kommt t nur in gerader Potenz vor, im zweiten nur in ungerader. Also gilt

$$f'(t^2) = f''(t^3) = 0.$$

Da t eine Unbestimmte ist, ist dies nur möglich, wenn f' = f'' = 0 gilt in k[y], d.h. es ist f = 0.

der Quotientenkörper des Koordinatenrings von X. Es gilt für jedes i

$$t_i := T_i \mid_X \in k[T]/I(X) \subseteq K.$$

Sei $t = (t_1,...,t_n)$. Für $f \in k[T]$ gilt dann

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow 0 = f(T_1 \mid_X , \ldots , T_n \mid_X) = f(T)|_X \Leftrightarrow f \in I(X).$$

Mit anderen Worten, $t \in K^n$ ist ein allgemeiner Punkt von X.
QED.

1.4.3 Konjugationsklassen von Punkten und Primideale

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^N_k$ eine algebraische Menge. Für jeden Punkt x von X mit Koordinaten in einem Erweiterungskörper von k bezeichne

$$\varphi_x: k[X] \to k(x), f \mapsto f(x),$$

die Auswertungsabbildung im Punkt x und

$$p_x := \mathrm{Ker}(\varphi_x) \ (= I(\{x\}))$$

deren Kern. Dann ist durch

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Konjugationsklassen von} \\ \text{Punkten von X mit Koordinaten} \\ \text{in einem Oberkörper von k}\end{array}\right\} \to \{\text{Primideale von } k[X]\}, x \mapsto p_x ,$$

eine bijektive Abbildung definiert.

Beweis. Für jeden Punkt x von X mit Koordinaten in einem Erweiterungskörper gilt nach dem Homomorphiesatz

$$k[X]/p_x \cong \mathrm{Im}(\varphi_x) \subseteq k(x).$$

Als Teilring des Körpers k(x) ist $k[X]/p_x$ nullteilerfrei, d.h. p_x ist ein Primideal. Sind x und y konjugiert Punkte, so gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[X] \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "\varphi_y"'] & k(x) \arrow[dl, "\varphi"] \\ k(y) & \end{tikzcd}$$

mit einem k-Isomorphismus φ. Insbesondere gilt damit

$$p_y = \mathrm{Ker}(\varphi_y) = \mathrm{Ker}(\varphi_x) = p_x.$$

Wir haben gezeigt, konjugierte Punkte werden in dasselbe Primideal abgebildet. Die oben beschriebene Abbildung ist somit wohldefiniert.

Die Abbildung ist injektiv. Seien x und y Punkte mit $p_x = p_y$. Wir haben zu zeigen, x und y sind konjugiert. Nach Voraussetzung gilt

$$k[x] = \mathrm{Im}(\varphi_x) \cong k[X]/p_x \cong \mathrm{Im}(\varphi_y) = k[y] , x_i \mapsto T_i|_X \mapsto y_i$$

d.h. die Koordinaten von x und y erzeugen k-isomorphe k-Algebren. Wir gehen zu den Quotientenkörpern über und erhalten einen k-Isomorphismus

$k(x) \to k(y)$

der für jedes i die i-te Koordinate von x in die i-te Koordinaten von y abbildet. Mit andern Worten, x und y sind konjugiert.

Die Abbildung ist surjektiv. Sei p ein Primideal von k[X]. Wir haben zu zeigen, p hat die Gestalt

$$p = p_x .$$

Sei

$$K := Q(k[X]/p)$$

und für jedes i bezeichne

$$t_i := T_i|_X \in k[X]$$

die Einschränkung der i-ten Koordinaten-Funktion des affinen Raumes auf X und

$$x_i := t_i \bmod p \in k[X]/p \subseteq K$$

deren Restklasse modulo p. Für jedes Polynom $f \in I(X)$ ist das Bild von f bei der natürlichen Abbildung

$$k[T] \to k[X],\ h \mapsto h|_X\ ,$$

gleich Null,

$$0 = f(T_1,...,T_N)|_X = f(T_1|_X ,..., T_N|_X) = f(t_1,...,t_N).$$

Erst recht gilt damit

$$0 = f|_X \bmod p = = f(t_1,...,t_N) \bmod p = f(t_1 \bmod p,...,t_N \bmod p) = f(x_1,...,x_N).$$

Da dies für jedes $f \in I(X)$ gilt, ist

$$x = (x_1,...,x_N)$$

ein Punkt von X(K). Es reicht zu zeigen,

$$p = \mathrm{Ker}(\varphi_x)$$

ist Kern der Auswertungsabbildung

$$\varphi_x: k[X] \to k[x] =^{23} k[X]/p \subseteq k(x),\ h \mapsto h(x_1,...,x_N) = h(t_1 \bmod p,...,t_N \bmod p) = h \bmod p$$

Diese Auswertungsabbildung ist aber gerade die Zusammensetzung der natürlichen Abbildug

$$k[X] \to K[X]/p = k[x]$$

auf den Faktorring modulo p mit der natürlichen Inklusion

$$k[x] \subseteq k(x)$$

in den Quotientenkörper. Der Kern dieser Abbildung ist somit gleich p.
QED.

1.4.4 Das Spektrum eines Rings

Sei A ein Ring. Wir setzen

$$\mathrm{Spec}\ A = \text{Menge der Primideale von } A$$

Die Elemente von A lassen sich dann als Funktionen auf Spec A deuten. Wir setzen für jedes $f \in A$ und jedes $p \in \mathrm{Spec}\ A$:

$$f(p) := \text{Bild von f bei der natürliche Abbildung } A \to A/p \subseteq Q(A/p) =: k(p).$$

Jedes Element $f \in A$ definiert also eine Funktion $f \mapsto f(p)$ auf dem Spektrum von A.Für jede Teilmenge $M \subseteq A$ setzt man

$$\begin{aligned} V(M) &:= \{ p \in \mathrm{Spec}\ A \mid f(p) = 0 \text{ für alle } f \in M \} \\ &= \{ p \in \mathrm{Spec}\ A \mid M \subseteq p \} \end{aligned}$$

Für $f \in A$ heißt

$$\begin{aligned} D(f) &:= \mathrm{Spec}\ A - V(f) \\ &= \{ p \in \mathrm{Spec}\ A \mid f(p) \neq 0 \} \\ &= \{ p \in \mathrm{Spec}\ A \mid f \notin p \} \end{aligned}$$

durch f definierte <u>offene Hauptmenge</u> von Spec A. Für jede Teilmenge $Y \subseteq \mathrm{Spec}\ A$ bezeichnen wir mit

$$I(Y) := \{ f \in A \mid f(y) = 0 \text{ für jedes } y \in Y \}$$

das <u>Ideal</u> von Y der $f \in A$, die in allen Punkten von Y Null sind.

---

[23] Die $x_i = t_i$ mod p liegen in k[X]/p. Sie erzeugen diese k-Algebra, weil die t_i die k-Algebra k[X] erzeugen.

Bemerkungen

(i) Im Fall A = k[X] und p = maximales Ideal zu $x \in X$ kann man A/p mit k und $A \to A/p$ mit der Auswertungsabbildung $\varphi_x k[X] \to k$, $f \mapsto f(x)$, identifizieren. Man beachte, als maximales Ideal hat p die Gestalt

$$p = (x_1 - c_1, ..., x_N - c_N) \text{ mit } c_i \in k$$

und des gilt

$$f(x_1, ..., x_N) \equiv f(c_1, ..., c_N) \bmod p.$$

(ii) $f(p) = 0 \Leftrightarrow f \in p$.

(iii) Warnung: Verschiedene $f \in A$ können denselben Werteverlauf haben. Zum Beispiel ist die Restklasse t von T_1 in

$$A = k[T_1]/(T_1^2)$$

ein von Null verschiedenes Elemente von A. Wegen $t^2 = 0$ hat t jedoch in jedem Punkt von Spec A den Wert 0. Obwohl $t \neq t^2$ gilt, haben die beiden Funktionen denselben Werteverlauf.

(iv) $V(M) = V(M \cdot A)$, d.h. die Menge V(M) ändert sich nicht, wenn man M durch das von M erzeugte Ideal ersetzt.

(v) In der klassischen algebraischen Geometrie steht man oft vor dem Problem, allgemeine Punkte zu spezialisieren, d.h. allgemeine Koordinaten aus K durch konkrete aus k zu ersetzen. Das führt zu der nicht-trivialen Frage, ob allgemeine Lösungen von Gleichungssystemen Lösungen bleiben, wenn man für gewisse Variable spezielle Werte aus k einsetzt. Die moderne algebraische Geometrie hat dafür einen eleganten Ersatz: die Zariski-Topologie auf dem Spektrum eines Rings. Fragestellungen der erwähnten Art werden in der Sprache dieser Zariski-Topologie oftmals trivial.

Beispiel

Die Menge Spec $\mathbb{Z}$ kann man mit der Menge aller Primzahlen identifizieren (zuzüglich dem Nullideal {0}). Eine "Funktion" $f \in \mathbb{Z}$ ist genau dann gleich Null in der Primzahl p, wenn die ganze Zahl f durch p teilbar ist:

$$f(p) = 0 \Leftrightarrow p \mid f.$$

1.4.5 Die Zariski-Topologie von Spec A

Sei A ein Ring. Dann gilt:

(i) Die die Mengen der Gestalt

$$V(M) \text{ mit } M \subseteq A$$

bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf Spec A, welche Zariski-Topologie von Spec A heißt.

(ii) Die offenen Hauptmengen von Spec A bilden eine Umgebungsbasis der Zariski-Topologie. Spec A ist quasi-kompakt, d.h. jede offene Überdeckung von Spec A besitzt bereits eine endliche Teilüberdeckung.

(iii) $V(J') \cup V(J'') = V(J' \cap J'') = V(J' \cdot J'')$ für je zwei Ideale J', J" von A.

(iv) $\bigcap_{i \in I} V(J_i) = V(\sum_{i \in I} J_i)$ für jede Familie von Idealen J_i von A.

(v) $V(0) = \text{Spec } A$, $V(1) = \emptyset$.

(vi) Für je zwei Ideale J', J" von A sind äquivalent:
1. $V(J') \subseteq V(J'')$
2. $\sqrt{J'} \supseteq \sqrt{J''}$

(vii) Für je zwei Ideale J', J" von A sind äquivalent:
1. $V(J') = V(J'')$

2. $\sqrt{J'} = \sqrt{J''}$

(viii) Nullstellensatz. Seien J ein Ideal von A und f∈A ein Element mit f(p) = 0 für jedes p∈V(J). Dann liegt eine Potenz von f in J.

(ix) Seien J ein Ideal von A und M ⊆ A eine Teilmenge. Dann ist die Abschließung der Differenzmenge V(J) - V(M) gleich

$$\overline{V(J)\text{-}V(M)} := V(\sqrt{J}:M).$$

Dabei bezeichne J:M für jedes Ideal J von A das Ideal

$$J:M = \{f\in A \mid f\cdot M \subseteq J\}$$

Ist der Ring A noethersch, so gilt auch

$$\overline{V(J)\text{-}V(M)} := V(J:M^{\infty})$$

mit

$$J:M^{\infty} = \{ f\in A \mid \text{für jedes } m\in M \text{ gibt es ein } n\in\mathbb{N} \text{ mit } m^n f \in J \}$$

(x) Für jedes p ∈ Spec A ist die Abschließung der einpunktigen Menge {p} gleich

$$\overline{\{p\}} = V(p) = \{ q\in \mathrm{Spec}\, A \mid p \subseteq q \}.$$

Diese Menge ist somit genau dann abgeschlossen, wenn p ein maximales Ideal ist. Die maximalen Ideale von Spec A sind also gerade die abgeschlossenen Punkte der Zariski-Topologie, d.h. die Punkte p∈Spec A mit

$$\overline{\{p\}} = \{p\}.$$

(xi) Die Punkte

$$q \in \overline{\{p\}}$$

heißen Spezialisierungen von p. Umgekehrt sagt man auch in dieser Situation, p ist ein Generalisierung von q.

Beweis. Zu (v). Trivial.

Zu (iv). Es gilt

$$\begin{aligned} p \in \cap_{i\in I} V(J_i) &\Leftrightarrow J_i \subseteq p \text{ für jedes } i \\ &\Leftrightarrow \sum_{i\in I} J_i \subseteq p \\ &\Leftrightarrow p \in V(\sum_{i\in I} J_i) \end{aligned}$$

Zu (iii). Es gilt

$$\begin{aligned} p \in V(J')\cup V(J'') &\Leftrightarrow J' \subseteq p \text{ oder } J'' \subseteq p \\ &\Leftrightarrow J'\cdot J'' \subseteq p \qquad \text{(weil p ein Primideal ist).} \\ &\Leftrightarrow p \in V(J'\cdot J''). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$V(J')\cup V(J'') = V(J'\cdot J'').$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} p \in V(J')\cup V(J'') &\Leftrightarrow J' \subseteq p \text{ oder } J'' \subseteq p \\ &\Rightarrow J'\cap J'' \subseteq p \\ &\Leftrightarrow p\in V(J'\cap J''), \end{aligned}$$

also

$$V(J')\cup V(J'') \subseteq V(J'\cap J'') \subseteq V(J'\cdot J''),$$

wobei die zweite Inklusion besteht wegen J'∩J'' ⊇ J'·J''.

Zu (i). Folgt aus (iii) - (v).

Zu (ii). Seien I ein Ideal und p ∈ Spec A - V(I). Wir haben zu zeigen, es gibt ein f∈A mit

$$p \in D(f) \subseteq \mathrm{Spec}\, A - V(I).$$

Nach Wahl von p gibt es ein f∈I mit f(p) ≠ 0. Damit ist aber

$$p \in D(f).$$

Wegen f∈I gilt weiter V(I) ⊆ V(f), also

$$D(f) = \mathrm{Spec}\, A - V(f) \subseteq \mathrm{Spec}\, A - V(I).$$

Sei jetzt

$$\mathrm{Spec}\, A = \cup_{i\in I} U_i$$

eine offene Überdeckung. Wir haben zu zeigen, bereits endlich viele U_i überdecken bereits den ganzen Raum Spec A. Dazu können wir annehmen, die U_i sind offene Hauptmengen,

$$U_i = D(f_i) \text{ mit } f_i \in A.$$

Aus

$$\mathrm{Spec}\, A = \cup_{i\in I} D(f_i)$$

folgt, in jedem Punkt $p\in$Spec A ist ein f_i ungleich Null, d.h. $f_i \notin p$ für ein i. Das von den f_i erzeugte Ideal liegt in keinem Primideal von A, ist also gleich dem ganzen Ring A. Damit ist $1\in A$ eine Linearkombination der f_i , und zwar bereit endlich vieler f_i, sagen wir

$$1 = a_1 f_{i_1} + ... + a_r f_{i_r} .$$

Dann kann aber kein Primideal von A alle f_{i_ν} enthalten, d.h.

$$\mathrm{Spec}\, A = D(f_{i_1}) \cup ... \cup D(f_{i_r}).$$

Zu (vi). 2. ⇒ 1.: Sei $p \in V(J')$. Dann gilt $J' \subseteq p$, also auch $\sqrt{J'} \subseteq p$, also nach Voraussetzung 2.,

$$\sqrt{J''} \subseteq p,$$

also $J'' \subseteq p$, also $p \in V(J'')$.

1. ⇒ 2.: Zum Beweis dieser Implikation benötigen wir einige einfache Sätze aus der Theorie der Quotientenringe (vgl. Anhang A2). Sei $f \in \sqrt{J''}$. Dann gibt es ein $n\in\mathbb{N}$ mit $f^n \in J''$, d.h. es gilt

$$f^n(p) = 0 \text{ für jedes } p\in V(J'').$$

Nach Voraussetzung 1. gilt damit auch

$$f^n(p) = 0 \text{ für jedes } p\in V(J'),$$

d.h. $f^n \in p$, d.h. $f \in p$. Wir haben gezeigt,

f liegt in jedem Primoberideal p von J'.

Die Restklasse $\bar f$ von f in A/J' liegt daher in jedem Primideal von A/J'. Deshalb gibt es im Quotientenring $(A/J')_{\bar f}$ kein Primideal, also auch kein maximales Ideal, d.h. es muß gelten

$$(A/J')_{\bar f} = 0.$$

Insbesondere ist der Quotient $1/\bar f$ das Nullelement dieses Rings, d.h. es gibt ein $n\in\mathbb{N}$ mit

$$1\cdot\bar f^n = 0 \text{ in } A/J'.$$

Mit anderen Worten, eine Potenz f^n von f liegt in J'. Damit gilt $f \in \sqrt{J'}$.

Zu (vii). Folgt unmittelbar aus (vi).

Zu (viii). Nach Voraussetzung gilt $V(J) \subseteq V(f) = V(fA)$. Nach (vi) folgt $\sqrt{J} \supseteq \sqrt{fA}$, also

$$f \in \sqrt{fA} \subseteq \sqrt{J} .$$

Eine Potenz von f liegt also in J.

Zu (ix). Es gilt

$$\overline{V(J)-V(M)} = \cap \{V(f) \mid f \text{ ist Null auf } V(J) - V(M) \}$$

$$= \cap \{ V(f) \mid V(J) - V(M) \subseteq V(f) \}$$
$$= V(f \mid V(J) \subseteq V(f) \cup V(M\cdot A) = V(fMA) \}$$
$$= V(f \mid \sqrt{J} \supseteq \sqrt{fMA})$$
$$= V(f \mid fMA \subseteq \sqrt{J})$$
$$= V(f \mid fM \subseteq \sqrt{J})$$
$$= V(N)$$

mit

$$N := \sqrt{J}:M = \{f\in A \mid \text{Für jedes } m\in M \text{ gibt es ein } n\in\mathbb{N} \text{ mit } f^n m^n \in J \}.$$

Sei jetzt A ein noetherscher Ring. Dann hat das von M erzeugte Ideal die Gestalt

$$M\cdot A = (m_1,...,m_r)A \text{ mit } m_1,...,m_r\in A$$

Wir setzen

$$N' := \{f\in A \mid \text{Für jedes } m\in M \text{ gibt es ein } n\in\mathbb{N} \text{ mit } fm^n \subseteq J \} = J:M^\infty.$$

Dann gilt $N' \subseteq N$, also

$$V(N) \subseteq V(N').$$

Wir haben die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei $p\in V(N')$, d.h.

$$N' \subseteq p.$$

Wir haben zu zeigen, es gilt

$$N \subseteq p.$$

Sie $f \in N$. Dann gibt es für jedes $m\in M$ ein $n\in\mathbb{N}$ mit

$$f^n m^n \in J.$$

Insbesondere gilt dies für $m = m_i$, $i = 1,...,r$. Für diese endlich vielen Elemente können wir sogar ein gemeinsames n finden:

$$f^n m_i^n \in J \text{ für } i = 1,...,r.$$

Dann gilt aber[24]

$$f^n m^{rn} \in J \text{ für jedes } m\in M.$$

Es folgt

$$f^n \in N \subseteq p,$$

also

$$f \in p.$$

Letzteres gilt für jedes $f\in N$, d.h. es gilt $N \subseteq p$

Zu (x). Es gilt

$$V(p) = \{q \mid f(q) = 0 \text{ für } f\in p \} = \{q \mid p \subseteq q \}.$$

Insbesondere gilt $p\in V(p)$, also

$$\overline{\{p\}} \subseteq V(p).$$

Sei jetzt $q\in V(p)$. Dann gilt $p \subseteq q$, d.h. jedes Ideal I, das ganz in p liegt, liegt auch ganz in q :

$$p\in V(I) \Rightarrow q\in V(I).$$

Damit ist $q \in \cap_{p\in V(I)} V(I) = \overline{\{p\}}$.

Zu (xi). Es ist nichts zu beweisen.

QED.

Bemerkungen

---

[24] m ist A-Linearkombination der m_i. Also ist m^{rn} eine A-Linearkombination von Potenzprodukten des Grades rn in den m_i. In jedem solchen Potenzprodukt kommt aber mindestens ein m_i mit einem Exponenten $\geq$ n vor.

(i) Im Fall A = k[X] kann man X mit der Teilmenge der maximalen Ideale des Spektrums Spec k[X] identifizieren (nach dem Nullstellensatz),

$$X \subseteq \text{Spec } k[X],\ x \mapsto I(\{x\}) = \{f\in k[X] \mid f(x) = 0\}.$$

Die Unterraum-Toplogie von X ist gerade die früher definierte Zariski-Topologie von X

(ii) Die Punkte von X sind gerade die abgeschlossenen Punkte von Spec k[X].

(iii) Ist X irreduzibel, so entspricht der allgemeine Punkt von X gerade dem Nullideal von k[X]. Alle Punkte von X sind also Spezialisierungen des allgemeinen Punktes.

Beispiel zum Begriff der Spezialisierung

Sei A = k[X] mit $X = V(T_1^3 - T_2^2) \subseteq \mathbb{A}_k^2$. Der allgemeine Punkt

$$(t^2, t^3) \text{ mit einer Unbestimmten } t$$

entspricht dann dem Nullideal von k[X]. Die Punkte der Gestalt

$$(\alpha^2, \alpha^3) \text{ mit } \alpha\in k$$

entsprechen den maximalen Idealen von k[X]. Letztere sind also Spezialisierungen des allgemeinen Punktes

1.4.6 Morphismen affiner Spektren

Sei h: A → A' ein Ringhomomorphismus. Dann heißt die Abbildung

$$\text{Spec } h: \text{Spec } A' \to \text{Spec } A,\ p' \mapsto h^{-1}(p'),$$

die jedem Primideal von A' dessen vollständiges Urbild bei h zuordnet, der durch h <u>induzierte Morphismus der affinen Spektren</u>.

Bemerkungen

(i) Für maximale Ideale funktioniert die obige Konstruktion nicht: ist A ein Integritätsbereich, p ∈ Spec A ein nicht-maximales Primideal von A und

$$A' = A_p$$

die Lokalisierung von A in p, so ist die Einschränkung des einzigen maximalen Ideals von A' gleich p, also kein maximales Ideal. Die zum natürlichen Homomorphismus

$$A \to A_p$$

gehörige Abbildung der Spektren überführt also die maximalen Ideale nicht in maximale Ideale.

(ii) Seien X und X' algebraische Mengen. Dann entsprechen, wie wir gesehen haben, die regulären Abbildungen

$$X \to X' \qquad (1)$$

gerade den k-Algebra-Homomorphismen k[X'] → k[X]. Mit anderen Worten, die gewöhnlichen regulären Abbildungen (1) entsprechen gerade den Morphismen

$$\text{Spec } k[X] \to \text{Spec } k[X'],$$

welche zu den k-Algebra-Homomorphismen gehören.

Beispiel

Seien A ein Ring, f∈Spec A ein Element und

$$\varphi: \text{Spec } A_f \to \text{Spec } A,\ p' \mapsto p'\cap A,$$

der durch die natürliche Abbildung $A \to A_f$, $a \mapsto \frac{a}{1}$, induzierte Morphismus. Diese Abbildung ist injektiv, offfen und identifiziert Spec A_f mit der offenen Hauptmenge D(f),

$$\text{Spec } A_f = D(f) \subseteq \text{Spec } A.$$

Die Umkehrungabbildung von φ ist die folgende.

$$\psi: D(f) \to \mathrm{Spec}\, A_f\,,\ p \mapsto pA_f\,.$$

Beweis. Die Abbildung φ ist injektiv, denn nach A2.7(ii) gilt

$$p' = (p'\cap A)\cdot A_f$$

d.h. p' ist durch sein Bild in Spec A eindeutig festgelegt. Außerdem gilt

$$\mathrm{Im}\,(\varphi) \subseteq D(f),$$

denn aus $\varphi(p') \notin D(f)$ würde folgen $f\in p'\cap A$, also $\frac{f}{1} \in p'$, also $p' = A_f$ im Widerspruch zu $p'\in \mathrm{Spec}\, A_f$.

Betrachten wir jetzt die Abbildung ψ. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn pA_f ist ein echtes Ideal von A_f (nach A2.7 (i)) mit dem Faktorring

$$A_f/pA_f \cong (A/p)_f\,,$$

d.h. der Faktorring zu pA_f ist ein Quotientenring des Integritätsbereichs A/p und damit selbst ein Integritätsbereich, d.h. pA_f ist ein Primideal. Außerdem ist die natürliche Abbildung

$$A/p \to A_f/pA_f,$$

in den Quotientenring injektiv[25], d.h. es gilt

$$pA_f \cap A = p.$$

Mit anderen Worten, die Abbildung ψ ist linksinvers zu φ,

$$\varphi\circ\psi = \mathrm{Id}.$$

Insbesondere ist

$$\mathrm{Im}(\varphi) = D(f).$$

Mit anderen Worten, φ induziert eine Bijektion

$$\mathrm{Spec}\, A_f \to D(f)$$

mit der Umkehrung ψ. Wir haben noch zu zeigen, die Abbildung

$$\varphi:\mathrm{Spec}\, A_f \to \mathrm{Spec}\, A,\ p' \mapsto p'\cap A,$$

ist offen, d.h. sie überführt offene Mengen in offene Mengen. Da die offenen Hauptmengen eine Topologiebasis von Spec A_f bilden, reicht es zu zeigen, φ überführt offene Hauptmengen in offfene Mengen. Sei also

$$\alpha = \frac{g}{f^n} \in A_f$$

und betrachten wir die zugehörige offene Hauptmenge $D(\alpha)$. Weil ψ: $D(f) \to \mathrm{Spec}\, A_f$ bijektiv ist, gilt

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= \{\psi(p) \mid p\in D(f) \text{ und } \alpha\notin\psi(p)\ \} \\ &= \{\ pA_f \mid p\in D(f) \text{ und } \alpha\notin pA_f\ \} \\ &= \{\ pA_f \mid p\in D(f) \text{ und } g\notin p\ \} \\ &= \{\ pA_f \mid p\in D(fg)\ \} \end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi(D(\alpha)) = \varphi(\psi(D(fg)) = D(fg).$$

Insbesondere ist φ offen.

QED.

---

[25] weil A/p nullteilerfrei ist.

1.4.7 Stetigkeit bezüglich der Zariski-Topologie

Seien h: A → A' ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:

(i) Der durch h induzierte Morphismus

$$\text{Spec } h : \text{Spec } A' \to \text{Spec } A,\ p' \mapsto h^{-1}(p'),$$

ist stetig bezüglich der Zariski-Topologien von Spec A und Spec A'.

(ii) Für jedes $f \in A$ gilt

$$(\text{Spec } h)^{-1}(D(f)) = D(h(f)).$$

Beweis. Wir haben zu zeigen, das Urbild jeder offenen Menge $U \subseteq$ Spec A ist offen. Da die offenen Hauptmengen eine Topologiebasis bilden, können wir annehmen, U ist eine offene Hauptmenge, U = D(f). Mit anderen Worten, es reicht Aussage (ii) zu beweisen.

Für Primideale p' von A' gilt

$$\begin{aligned} p' \in (\text{Spec } h)^{-1}(D(f)) &\Leftrightarrow (\text{Spec } h)(p') \in D(f) \\ &\Leftrightarrow h^{-1}(p') \in D(f) \\ &\Leftrightarrow f \notin h^{-1}(p') \\ &\Leftrightarrow h(f) \notin p' \\ &\Leftrightarrow p' \in D(h(f)). \end{aligned}$$

QED.

Beispiel

Seien A ein Ring und $f \in A$ ein Element. Dann induziert die natürliche Abbildung

$$A \to A_f$$

einen Homöomorphismus

$$\text{Spec } A_f \to D(f).$$

Beweis. Nach dem Beispiel von 1.4.5 ist die Abbildung wohldefiniert, bijektiv und offen. Nach der eben bewiesenen Aussage ist sie stetig.

QED.

Bemerkungen

(i) Unser nächstes Ziel besteht darin, reguläre Funktionen auf den offenen Teilmengen eines Spektrums Spec A einzuführen. Dabei soll eine Funktion regulär sein, wenn sie lokal von der Gestalt

$$\frac{a}{s}$$

ist mit $a,s \in A$ und $s \neq 0$ im betrachteten Punkt. In Analogie zur Situation in Abschnitt 1.2 sollten dabei die in allen Punkten regulären Funktionen einen Ring bilden, der mit A zusammenfällt. Wie wir sehen werden, ist durch die letztere Bedinung der Begriff der regulären Funktion bereits vollständig charakterisiert.

(ii) Der Standpunkt, der die Elemente eines beliebigen Rings A als Funktionen auf Spec A ansieht, zwingt uns jedoch, den Funktionenbegriff zu verallgemeinern: in A kann es durchaus von Null verschiedene Elemente $a \in A - \{0\}$ geben die nilpotent sind,

$$a^n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N},$$

während gewöhnliche Funktionen mit dieser Eigenschaft, deren Werte in einem Körper liegen, selbst schon Null sind. Wir greifen uns deshalb die Eigenschaften, die wir für unseren verallgemeinerten Funktionenbegriff erhalten wollen, heraus und fassen sie in einem Axiomensystem zusammen.

(iii) Genauer sollen unsere verallgemeinerten Funktionen so beschaffen sein, daß die beiden folgenden Aussage, die wir von gewöhnlichen Funktionen kennen, nach wie vor gelten.

(a) Zwei Funktionen, deren Einschränkungen auf jede Menge einer offenen Überdeckung des Definitionsbereiches gleich sind, sind selbst schon gleich.

(b) Ist auf jeder Menge einer offenen Überdeckung eine Funktion definiert, wobei auf dem Durchschnitt von je zwei dieser Mengen, diese Funktionen übereinstimmen sollen, so setzen sich diese Funktionen zu einer auf dem ganzen Raum definierten Funktion zusammen.

(iv) Die beiden Bedingungen von (iii) führen zum Begriff der Garbe. Die Ergebnisse in diesem Kontext werden wir deshalb in der Sprache der Garbentheorie formulieren (vgl. den Anhang A4).

1.4.8 Die Garbe der regulären Funktionen

Seien A ein Ring. Für jede offene Teilmenge

$$U \subseteq \mathrm{Spec}\, A$$

setzen wir

$$\begin{aligned} S(U) &:= \{ s\in A \mid s(u) \neq 0 \text{ für jedes } u\in U \} \\ &= \cap_{u\in U} A - u\,. \end{aligned}$$

Dies ist eine multiplikative Teilmenge von A. Seien jetzt U und V zwei offene Teilmengen von Spec A mit

$$V \subseteq U.$$

Dann gilt $S(U) \subseteq S(V)$, d.h. die natürliche Abbildung[26] $A \to S(V)^{-1}A$ bildet alle Elemente von S(U) in Einheiten ab. Sie induziert daher einen Ringhomomorphismus

$$S(U)^{-1}A \to S(V)^{-1}A,\ \frac{a}{s} \mapsto \frac{a}{s}\,.$$

Diese Abbildungen sind gerade die Restriktionen einer Prägarbe

$$\mathcal{O}'\colon \mathrm{Spec}\, A \to \mathbf{Rings},\ U \mapsto S(U)^{-1}A$$

mit Werten in der Kategorie der Ringe. Die zugehörige Garbe wird mit

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} = \mathcal{O}\colon \mathrm{Spec}\, A \to \mathbf{Rings}$$

bezeichnet und heißt <u>Strukturgarbe des affinen Spektrums</u> Spec A oder auch <u>Garbe der regulären Funktionen</u> auf Spec A. Für jedes offfene $U \subseteq$ Spec A heißen die Elemente von

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$$

reguläre Funktionen auf U.

Bemerkung

$\mathcal{O}'$ ist tatsächlich eine Prägarbe: für je zwei offene Teilmengen U, V von X mit $V \subseteq U$ gilt $S(U) \subseteq S(V)$, d.h. die natüliche Abbildung

$$\rho_V\colon A \to S(V)^{-1}A,\ a \mapsto \frac{a}{1}$$

überführt jedes Element von S(U) in eine Einheit, faktorisiert sich also über $S(U)^{-1}A$. Genauer: es gibt genau einen Ringhomomorphismus (von Ringen mit 1)

$$\rho_{U,V}\colon \mathcal{O}'(U) = S(U)^{-1}A \to S(V)^{-1}A = \mathcal{O}'(V),\ \frac{a}{s} \mapsto \frac{a}{s},$$

für welchen das folgende Diagramm kommutativ ist:

[26] Die Menge S(V) enthält das Einselement von A, ist also niemals leer.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\rho_U"'] \arrow[dr, "\rho_V"] & \\ \mathcal{O}'(U) \arrow[rr, "\rho_{U,V}"] & & \mathcal{O}'(V) \end{tikzcd}$$

Da $\rho_{U,V}$ durch die Kommutativität dieses Diagramms eindeutig bestimmt ist, besteht für je drei offenen Mengen U, V, W von X mit

$$W \subseteq V \subseteq U$$

die Identität

$$\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}\,.$$

Mit anderen Worten, $\mathcal{O}'$ ist eine Prägarbe mit den Restriktionen $\rho_{U,V}$.

1.4.9 Eigenschaften der Strukturgarbe

Seien A ein Ring und X = Spec A. Dann gilt

(i) Für jeden Punkt $p\in X$ ist die natürliche Abbildung[27]

$$\mathcal{O}'_{X,p} \to A_p,\ [\frac{a}{s}, U] \mapsto \frac{a}{s},$$

ein Isomorphismus und induziert damit einen Isomorphismus $\mathcal{O}_{X,p} \to A_p$.

(ii) Für jedes $f\in A$ ist die natürliche Abbildung

$$A_f = \mathcal{O}'_X(D(f)) \to \mathcal{O}_X(D(f)),\ s \mapsto \tilde{s},$$

ein Isomorphismus. Insbesondere kann man die globalen Schnitte von $\mathcal{O}_X$ mit A identifizieren,

$$\mathcal{O}_X(X) = A.$$

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Es reicht zu zeigen (vgl. A4.7(ii)), die Abbildung

$$\mathcal{O}'_{X,p} \to A_p,\ [\frac{a}{s}, U] \mapsto \frac{a}{s},$$

ist wohldefiniert und bijektiv. Es handelt sich offensichtlich um einen Ringhomomorphismus.

<u>Die Abbildung ist wohldefiniert</u>. Für offenes Umgebung $U \subseteq X$ mit $p\in U$ gilt

$$f(p) \ne 0 \text{ für jedes } f\in S(U)$$

(nach Definition von S(U)), d.h. es ist

$$S(U) \subseteq A - p.$$

Die natürliche Abbildung

$$A \to A_p$$

überführt somit jedes Element von S(U) in eine Einheit und faktorisiert sich damit über

$$S(U)^{-1}A.$$

Insbesondere gibt es einen wohldefinierten Homomorphismus (von Ringen mit 1)

$$\varphi_U: \mathcal{O}'(U) = S(U)^{-1}A \to A_p,\ \frac{a}{s} \mapsto \frac{a}{s}.$$

Wir haben zu zeigen, das Bild von $\frac{a}{s}$ bei dieser Abbildung hängt nur vom Keim von $\frac{a}{s}$ im Punkt p ab. Seien

$$\frac{a}{s}\in \mathcal{O}'(U) \text{ und } \frac{a'}{s'}\in \mathcal{O}'(U')$$

[27] $[\frac{a}{s}, U]$ bezeichne hier den Keim des Schnitts $\frac{a}{s}\in \mathcal{O}'(U)$ im Punkt p.

zwei Schnitte mit demselben Keim im Punkt p. Wir haben zu zeigen,

$$\varphi_U(\frac{a}{s}) = \varphi_{U'}(\frac{a'}{s'}).$$

Weil $\frac{a}{s}$ und $\frac{a'}{s'}$ denselben Schnitt im Punkt p haben, gibt es eine offene Menge $V \subseteq X$ mit

$$p \in V \subseteq U \cap U' \text{ und } \frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \text{ in } \mathcal{O}'(V)..$$

Es folgt

$$\varphi_U(\frac{a}{s}) = \frac{a}{s} = \varphi_V(\frac{a}{s}) = \varphi_V(\frac{a'}{s'}) = \frac{a'}{s'} = \varphi_{U'}(\frac{a'}{s'})$$

<u>Die Abbildung ist injektiv</u>. Sei α_p der Keim im Punkt p eines Schnitts

$$\alpha = \frac{a}{s} \in \mathcal{O}'(U) = S(U)^{-1}A,$$

dessen Bild in A_p gleich Null ist,

$$\frac{a}{s} = 0 \text{ in } A_p .$$

Dann gibt es ein $s' \in A - p$ mit

$$s'a = 0 \text{ in } A.$$

Die Menge $U' = U \cap D(s')$ ist eine offene Umgebung von p mit $s, s' \in S(U')$ also

$$[\frac{a}{s}, U] = [\frac{a}{s}, U'] = [\frac{as'}{ss'}, U'] = [0, U'] = 0.$$

<u>Die Abbildung ist surjektiv</u>. Jedes Element von A_p hat die Gestalt $\frac{a}{s}$ mit $s \in A - p$. Dann ist aber

$$U := D(s)$$

eine offene Umgebung von p und $[\frac{a}{s}, U]$ ein Element von $\mathcal{O}'_{X,p}$ mit dem Bild $\frac{a}{s}$ in A_p.

<u>Zu (ii)</u>. Für jedes $f \in A$ ist D(f) eine offene Menge und es gilt

$$\begin{aligned} S(D(f)) &= \{a \in A \mid a(p) \neq 0 \text{ für } p \in D(f)\} \\ &= \{ a \in A \mid f \text{ ist Null in allen Punkten von } V(a) \} \\ &= \{ a \in A \mid a \text{ teilt eine Potenz von } f \} \end{aligned}$$

Ein Ringhomomorphismus

$$A \to A'$$

überführt die Elemente von S(D(f)) genau dann in Einheiten, wenn er f in eine Einheit überführt. Er faktorisiert sich also genau dann (eindeutig) über $S(D(f))^{-1}A$, wenn er sich (eindeutig) über A_f faktorisiert. Die beiden Ringe

$$S(D(f))^{-1}A \text{ und } A_f$$

besitzen dieselbe Universalitätseigenschaft, d.h. die natürliche Abbildung

$$A_f \to S(D(f))^{-1}A, \frac{a}{f^n} \mapsto \frac{a}{f^n}.$$

ist ein Isomorphismus. Es gilt also tatsächlich

$$A_f = \mathcal{O}'_X(D(f)).$$

Beweisen wir die Bijektivität der Abbildung

(1) $$A_f = \mathcal{O}'_X(D(f)) \to \mathcal{O}_X(D(f)), s \mapsto \tilde{s},$$

<u>Die Abbildung (1) ist injektiv</u>. Sei $s = \frac{a}{f^n}$ mit $a \in A$ und $n \in \mathbb{N}$ und sei $\tilde{s} = 0$. Für jedes $p \in D(f)$ ist dann

$$0 = \tilde{s}(p) = s_p \quad (\in \mathcal{O}'_{X,p} = A_p),$$

d.h. der Keim von s im Punkt p ist Null. Es gibt also[28] ein s'∈A - p mit

$$s'a = 0 \text{ in } A.$$

Mit anderen Worten, der Annullator

$$\text{Ann } a = \{x \in A \mid ax = 0\}$$

liegt in keinem Primideal p∈D(f). Nach A2.7(iii) gilt $pA_f \cap A = p$. Das von Ann a in A_f erzeugte Ideal liegt also auch nicht in pA_f. Nach dem Beispiel von 1.4.6 haben aber alle Primideale von A_f die Gestalt pA_f mit p∈D(f). Deshalb liegt

$$(\text{Ann } a)A_f$$

in keinem Primideal von A_f, d.h.

$$(\text{Ann } a)A_f = A_f,$$

d.h. das Einselement liegt in $(\text{Ann } a)A_f$. Es gibt also ein x∈Ann a mit

$$\frac{x}{f^l} = \frac{1}{1}.$$

Bei geeigneter Wahl von l ergibt sich $x = f^l$. Eine Potenz vonf liegt also in Annullator von a, d.h. eine Potenz von f annulliert a, d.h.

$$\frac{a}{1} = 0 \text{ in } A_f.$$

Dann ist aber auch $s = \frac{a}{f^n}$ gleich Null in A_f.

<u>Die Abbildung (1) ist surjektiv</u>. Sei $\alpha \in \mathcal{O}_X(D(f))$. Dann ist α lokal von der Gestalt $\tilde{s}$, d.h. es gibt eine offene Überdeckung

(2) $$D(f) = \cup_{i \in I} U_i$$

und für jedes $i \in I$ einen Schnitt $s_i \in \mathcal{O}'_X(U_i)$ mit $\alpha|_{U_i} = \tilde{s}_i$. Wir können dabei annehmen, die U_i sind offene Hauptmengen,

$$U_i = D(f_i) \text{ mit } f_i \in A.$$

Und wir können annehmen, s_i hat die Gestalt

$$s_i = \frac{a_i}{f_i^{n_i}} \in A_{f_i}$$

Weil D(f) homöomorph ist zu Spec A_f (Beispiel von 1.4.6) und affine Spektren quasi-projektiv sind (1.4.4(ii)), können wir annehmen die Überdeckung ist endlich,

$$I = \{1,...,r\}.$$

Indem wir die Quotienten s_i passend mit f_i-Potenzen erweitern, errreichen wir

$$n_i = n \text{ für alle } i \in I.$$

---

[28] Genauer, a ist Null in einer Umgebung von p. Dabei können wir annehmen, diese Umgebung ist eine offene Hauptmenge: $\frac{a}{f^n}|_{D(s')} = 0$ für ein s'∈A mit p∈D(s'), d.h. mit s'∈A-p. Dann wird aber a von einer s'-Potenz annulliert. Indem wir s' durch eine geeignete Potenz ersetzen, erreichen wir s'·a = 0.

Für beliebige $i,j\in I$ gilt

$$\tilde{s}_i|_{U_i\cap U_j} = \alpha|_{U_i\cap U_j} = \tilde{s}_j|_{U_i\cap U_j},$$

d.h. für jedes $p\in U_i\cap U_j$ gilt

$$(s_i)_p = \tilde{s}_i(p) = \tilde{s}_j(p) = (s_j)_p \text{ in } A_p,$$

d.h. es gibt ein $t_p \in A - p$ mit

$$t_p\cdot(a_i\cdot f_j^n - a_j f_i^n) = 0 \text{ in } A.$$

Der Annullator von $a_i\cdot f_j^n - a_j f_i^n$ liegt also in keinem Primideal von $U_i\cap U_j = D(f_i f_j)$, erzeugt also in $A_{f_1 f_j}$ den ganzen Ring, d.h. das Element wird von einer $f_i f_j$ - Potenz annulliert, sagen wir der ℓ-ten: in A gilt

$$\begin{aligned} 0 &= (f_i f_j)^\ell (a_i\cdot f_j^n - a_j f_i^n) \\ &= (a_i f_i^\ell)\cdot f_j^{n+\ell} - (a_j f_j^\ell) f_i^{n+\ell}. \end{aligned}$$

Indem wir die Brüche s_i mit geeigneten f_i-Potenzen erweitern, erreichen wir, daß diese Aussage bereits mit $\ell = 1$ gilt,

(3) $\quad 0 = a_i\cdot f_j^n - a_j f_i^n$ in A für beliebige $i,j\in I$.

Wegen (2) gilt $D(f_i) = U_i \subseteq D(f)$, d.h. $V(f)\subseteq V(f_i)$, d.h. f_i ist Null in allen Punkten von $V(f)$. Nach dem Nulltstellensatz ist eine Potenz von f_i durch f teilbar. Das Bild von f bei der natürlichen Abbildung $A \to A_{f_i}$ ist eine Einheit. Mit anderen Worten,

(4) $\quad$ Die natürliche Abbildung $A \to A_{f_i}$ faktorisiert sich über A_f

Wegen (2) enthält kein Primideal von A_f alle $f_i/1$, d.h. das von den f_i erzeugte Ideal in A_f ist gleich A_f. Dasselbe gilt für die n-ten Potenzen der f_i. In A bedeutet das, eine Potenz von f ist Linearkombination der f_i^n, sagen wir

(5) $$f^m = \sum_{i=1}^{r} a'_i f_i^n \text{ mit } a'_i\in A$$

Sei jetzt

$$s := \sum_{i=1}^{r} a'_i a_i /f^m \in A_f = \mathcal{O}'_X(D(f)).$$

Es reicht zu zeigen, das Bild von s bei der Abbildung (1) ist gerade der vorgegebene Schnitt α. In A_f gilt

$$\begin{aligned} a_j/1 &= (a_j \sum_{i=1}^{r} a'_i f_i^n)/f^m \qquad \text{(wegen (5))} \\ &= (\sum_{i=1}^{r} a_j a'_i f_i^n)/f^m \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{r} a_i a'_i f_j^n\right)/f^m \qquad \text{(wegen (3))}$$
$$= s\cdot(f_j^n/1) \qquad \text{(nach Definition von s)}$$
Wegen (4) besteht diese Relation auch in A_{f_j}, d.h. es ist

$$s_j = \frac{a_j}{f_j^n} = s/1 \text{ in } A_{f_j} = \mathcal{O}'(D(f_j)).$$

Damit gilt

$$\tilde{s}|_{D(f_j)} = \tilde{s}_j = \alpha|_{D(f_j)}$$

für jedes j, also $\tilde{s} = \alpha$.
QED.

1.4.10 Eine Beziehung zum klassischen Fall

Seien k ein Körper und

$$A$$

eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann bilden die abgeschlossenen Punkte von

$$\text{Spec } A$$

eine dicht liegnde Teilmenge.
Bemerkungen
Manchmal ist es sinnvoll, in Kontext von Problemen der klassischen algebraischen Geometrie die Sprache der Spektren zu verwenden. Die obige Aussage bietet eine Möglichkeit zwischen beiden Sprachen zu wechseln.
Beweis. Wir haben zu zeigen, jede nicht-leere offene Teilmenge U von Spec A enthält einen abgeschlossenen Punkt. Dazu können wir annehmen, U hat die Gestalt

$$U = D(f) \text{ mit } f\in A.$$

Die Bedingung $U \neq \emptyset$ ist dabei äquivalent zu den folgenden Bedingungen.

$$A_f \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{f} \neq \frac{0}{f} \Leftrightarrow f^n \neq 0 \text{ für } n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow f \text{ ist nicht nilpotent.}$$

Damit reicht es zu zeigen:

(1) Für jedes $f\in A$, welches nicht nilpotent ist, und jedes maximale Ideal m von A_f ist das Primideal $p = m\cap A_f$ von A maximal.

Indem wir A durch A/p ersetzen, also A_f durch

$$(A/p)_f = A_f/pA_f = A_f/m,$$

reduzieren wir den Beweis der Behauptung auf den Fall p = 0, d.h. auf die folgende Aussage.

(2) Jede nullteilerfreie endlich erzeugte k-Algebra A mit der Eigenschaft, daß A_f ein Körper ist für ein $f\in A - \{0\}$, ist selbst schon ein Körper.

Zum Beweis von (2) schreiben wir

$$A = k[\alpha_1,...,\alpha_n]$$

und wählen die Numerierung der

$$\alpha_i \in A \subseteq Q(A)$$

derart, daß gilt
(3) $\alpha_1,...,\alpha_d$ sind algebraisch unabhängig über k (im Körper Q(A)).

(4) $\alpha_{d+1},\ldots, \alpha_n$ sind algebraisch über $k(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$.

Wir betrachten die Minimalpolynome der Elemente (4) über $k(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$ und die Nenner der in diesen Polynomen auftretenden Koeffizienten. Wir finden so ein Element

$$a\in k[\alpha_1,\ldots,\alpha_d]$$

mit der Eigenschaft, daß alle Koeffizienten aller Minimalpolynome im Quotientenring

$$k[\alpha_1,\ldots,\alpha_d]_a$$

liegen. Mit anderen Worten, die Elemente

$$\alpha_{d+1},\ldots, \alpha_n \text{ sind ganz über } k[\alpha_1,\ldots,\alpha_d]_a.$$

Insbesondere ist damit das Element

$$f\in k[\alpha_1,\ldots,\alpha_n] \subseteq k[\alpha_1,\ldots,\alpha_d]_a[\alpha_{d+1},\ldots, \alpha_n]$$

ganz über $k[\alpha_1,\ldots,\alpha_d]_a$. Wir betrachten eine Ganzheitsgleichung von f, sagen wir

$$f^m + b_1 f^{m-1} + \ldots + b_m = 0$$

mit

$$b_1,\ldots,b_m \in k[\alpha_1,\ldots,\alpha_d]_a.$$

Weil die hier betrachteten Ringe im Körper Q(A) liegen, also nullteilerfrei sind, können wir annehmen,

$$b_m \ne 0.$$

Indem wir a mit dem Zähler von b_m multiplizieren, erreichen wir,

$$b_m \text{ ist Einheit in } k[\alpha_1,\ldots,\alpha_d]_a \text{, also in } k[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]_a = A_a.$$

Auf Grund der obigen Ganzheitsgleichung für f gilt aber

$$f(-f^{m-1}-b_1f^{m-2}- \ldots - b_2) = b_m ,$$

also ist auch

$$f \text{ Einheit in } A_a.$$

Auf Grund der Universalitätseigenschaft der Quotientenringe faktorisiert sich somit die natürliche Einbettung $A \subseteq A_a$ über A_f, d.h.

$$A \subseteq A_f \subseteq A_a \subseteq Q(A).$$

Nach Voraussetzung ist A_f ein Körper. Also gilt

$$A_f = A_a = Q(A).$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} A_a &= k[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]_a = k[\alpha_1,\ldots,\alpha_n, \tfrac{1}{a}] = k[\alpha_1,\ldots,\alpha_d, \tfrac{1}{a}][\alpha_{d+1},\ldots, \alpha_n] \\ &= k[\alpha_1,\ldots,\alpha_d]_a [\alpha_{d+1},\ldots, \alpha_n] \end{aligned}$$

und $\alpha_{d+1},\ldots, \alpha_n$ sind ganz über $k[\alpha_1,\ldots,\alpha_d]_a$. Also ist A_a ganz über $k[\alpha_1,\ldots,\alpha_d]_a$. Weil A_a ein Körper ist, muß auch

$$k[\alpha_1,\ldots,\alpha_d]_a \text{ Körper}$$

sein (nach A3.4). Wir zeigen jetzt, daß dies nur im Fall

$$d = 0$$

der Fall sein kann, indem wir die Tatsache verwenden, daß jeder Polynomring ein ZPE-Ring ist.[29] Sei d > 0 und

$$a = p_1\cdot\ldots\cdot p_r$$

---

[29] mit einem Argument wie wir es bereits so ähnlich beim Beweis des Hilbertschen Nullstellensatz verwendet haben.

die Primfaktorzerlegung von a in $k[\alpha_1,...,\alpha_d]$. Dann kommt in der Primfaktorzerlegung von

$$a+1$$

keines der p_i vor. Sei p ein Primfaktor von a+1. Dann ist p teilerfremd zu jedem der p_i und

$$p \text{ ist keine Einheit in } k[\alpha_1,...,\alpha_d]_a ,$$

denn andernfalls würden ein $g\in k[\alpha_1,...,\alpha_d]$ und ein $l\in\mathbb{N}$ existieren mit

$$p\cdot g/a^l = 1 \text{ in } k[\alpha_1,...,\alpha_d]_a$$

d.h.

$$p\cdot g = a^l \text{ in } k[\alpha_1,...,\alpha_d]_a$$

also $p \mid a = p_1\cdot...\cdot p_r$, was unmöglich ist. Damit gilt d = 0, d.h.

$$A = k[\alpha_{d+1},..., \alpha_n]$$

ist eine algebraische Erweiterung von k, d.h. A ist ein Körper.
QED.

1.4.11 Folgerung
Jede endlich erzeugte lokale Algebra (A, m) über einem Körper besteht nur aus Einheiten und nilpotenten Elementen.

Ist A außerdem nullteilerfrei, so ist A ein Körper.

Beweis. Elemente von A - m sind Einheiten. Es reicht zu zeigen, die Elemente des maximalen Ideals sind nilpotent. Sei

$$f \in m.$$

Dann liegt das einzige maximale Ideal m von A nicht in der offenen Teilmenge

$$D(f) = \{ p\in\text{Spec } A \mid f \notin p \},$$

von Spec A. Nach 1.4.9 muß D(f) leer sein. Wie wir im Beweis von 1.4.9 gesehen haben, ist dann aber

$$f \text{ nilpotent.}$$

Ist A nullteilerfrei, so muß m = {0} sein, d.h. jedes von Null verschiedene Element von A ist eine Einheit. Also ist A ein Körper.
QED.

2. Quasi-projektive algebraische Mengen

2.1 Algebraische Mengen im projektiven Raum

2.1.1 Vereinbarungen und Bezeichnungen
In diesem Abschnitt bezeichnet k einen algebraisch abgeschlossenen Körper und

$$k[S] \text{ mit } S = (S_0,...,S_N)$$

bezeichne den Ring der Polynome in den Unbestimmten $S_0,...,S_N$ mit Koeffizienten aus k.

2.1.2 Der projektive Raum
Im folgende Menge heißt projektiver N-Raum oder auch projektiver N-dimensionaler Raum.

$$\mathbb{P}^n := \{[x_0,...,x_n] \mid (x_0,...,x_n)\in k^{n+1} - \{0\}\}$$

Dabei bezeichne

$$[x_0,...,x_n]$$

die Gerade im k^{n+1} durch den Ursprung und den Punkt $(x_0,...,x_n)$, d.h. den vom Vektor $(x_0,...,x_n)$ erzeugten 1-dimensional k-linearen Unterraum. Abkürzend schreiben wir auch

$$[x] := [x_0,...,x_n] \text{ für } x = (x_0,...,x_n)$$

Es gilt dann

$$[x] = [y] \quad \Leftrightarrow \quad x = \lambda\cdot y \text{ für ein } \lambda\in k - \{0\}$$

Die Koordinaten von x heißen dann auch <u>projektive Koordinaten</u> des Punktes $[x]\in\mathbb{P}^n$.

Sei $f\in k[S] := k[S_0,...,S_n]$ ein Polynom. Eine <u>Nullstelle</u> von f im $\mathbb{P}^n$ ist ein Punkt $p\in\mathbb{P}^n$ derart, daß gilt

$$f(x) = 0 \text{ für alle } x \text{ mit } [x] = p.$$

Wir schreiben dann auch $f(p) = 0$.

Bemerkung

Sei $f\in k[S]$ und

$$f = f_0+f_1+ ... + f_r \text{ mit } f_i \text{ homogen vom Grad i.}$$

Dann heißt f_i <u>homogene Komponente</u> des Grades i von f. Es gilt

$$\begin{aligned} f([x]) = 0 \quad &\Leftrightarrow 0 = f_0(x)+ \lambda\cdot f_1(x)+ ... + \lambda^r\cdot f_r(x) \text{ für alle } \lambda\in k \\ &\Leftrightarrow f_i(x) = 0 \text{ für alle i} \end{aligned}$$

d.h. f ist genau dann Null in [x], wenn alle homogenen Komponenten von f in x Null sind.

2.1.3 Projektive algebraische Mengen

Sei $M \subseteq k[S]$ eine beliebige Menge von Polynomen. Dann bezeichnet man die Menge der gemeinsamen Nullstellen der Polynome aus M mit

$$V(M) := \{x \in \mathbb{P}^N \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } f\in M \}$$

und nennt diese Menge die durch M definierte <u>projektive algebraische Menge</u>. Die Elemente von M heißen auch “definierende Gleichungen” dieser Menge. Speziell im Fall einer endlichen Menge schreibt man

$$V(f_1, ... , f_m) := V(\{f_1, ... , f_m\}).$$

Für jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{P}^N$ heißt

$$I(X) := \{ f\in k[T] \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } x\in X \}$$

<u>Ideal</u> von X. Es ist offensichtlich ein Ideal im Polynomring k[S]

<u>Bemerkungen</u>

(i) Wir können die Polynome von M stets ersetzen durch die Menge der homogenen Komponenten der Elemente von M, ohne daß sich V(M) ändert, d.h. wir können annehmen, M ist eine Menge von homogenen Polynomen.

(ii) Sei

$$\begin{aligned} I &:= M\cdot k[S] \\ &= \{ f_1m_1 + ... + f_rm_r \mid f_1,...,f_r\in k[S], m_1,...,m_r \in M, r = 1,2, ... \} \end{aligned}$$

das von M erzeugte Ideal des Polynomrings. Dann gilt

$$V(M) = V(I).$$

Als System definierender Gleichungen kann man also stets ein von homogenen Polynomen erzeugtes Ideal wählen. Ein solches Ideal heißt homogenes Ideal von k[S]. Die homogenen Ideale J von k[S] kann man durch die folgende Eigenschaft charakterisieren:

(*) Mit f liegen auch alle homogenen Komponenten von f in J.

(iii) Da k[S] Noethersch ist, können wir außerdem annehmen, das Ideal von (ii) wird von endlich vielen homogenen Polynomen erzeugt, d.h. eine projektive algebraische Menge von $\mathbb{P}^N$ hat stets die Gestalt

$$V(F_1,...,F_m) \text{ mit } F_i \text{ homogen.}$$

(iv) Ein System definierender Gleichungen einer algebraischen Menge X muß nicht unbedingt das Ideal I(X) erzeugen. Verschiedene Ideale können durchaus dieselben Nullstellenmenge besitzen.

(v) Für jede projektive algebraische Menge X = V(M) ist das Ideal I(X) homogen und es gilt

$$X = V(I(X)).$$ [30]

Umgekehrt ist jede Menge $X \subseteq \mathbb{P}^N$ mit dieser Eigenschaft algebraisch.

(vi) Seien X, $Y \subseteq \mathbb{P}^N$ projektive algebraische Mengen. Dann gilt:

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow I(X) \supseteq I(Y).$$ [31]

(vii) Für affine abgeschlossene Mengen X = V(I) gilt, wie wir wissen,

$$V(I) = \emptyset \Leftrightarrow 1 \in I.$$

Die analoge Aussage im projektiven Fall ist etwas komplexer. Bezeichne I_s das Ideal

$$I_s := \{f \in k[S] \mid \text{alle homogenen Komponenten des Grades} <s \text{ von f sind Null}\}.$$

der Polynome, deren Taylorentwicklung im Ursprung erst mit einem Grad ≥ s beginnt.

2.1.4 Der Nullstellensatz im projektiven Fall

Sei $I \subseteq k[S]$ ein homoges Ideal. Dann sind äquivalent:

(i) $V(I) = \emptyset$

(ii) $I_s \subseteq I$ für ein s

Beweis. (ii) ⇒ (i). Es gilt

$$V(I) \subseteq V(I_s) \subseteq V(S_0^s,...,S_N^s) = \emptyset.$$

(i) ⇒ (ii). Sei $V(I) = \emptyset$. Wir fixieren ein endliches homogenes Erzeugendensystem von I,

$$I = (F_1,...,F_m),\ F_i \text{ homogen.}$$

Dann haben die F_i keine gemeinsame Nullstelle im afffinen Raum $\mathbb{A}^{N+1}$, ausgenommen die triviale Nullstelle (0,...,0), also haben sie auch keine gemeinsame Nullstelle mit der ersten Koordinate 1. Mit anderen Worten, die affine abgeschlossene Menge

$$V(f_1,...,f_m) \subseteq \mathbb{A}^n \text{ mit } f_i(T_1,...,T_n) = F_i(1,T_1,...,T_n) = F_i(1,T)$$

---

[30] Da die Polynome von M auf X Null sind, gilt $M \subseteq I(X)$, also

$$X = V(M) \supseteq V(I(X)).$$

Da alle Polynome aus I(X) Null sind auf X, gilt umgekehrt auch

$$X \subseteq V(I(X)).$$

[31] Zu '⇒': Jede Funktion, die auf der größeren Menge Y Null ist, ist es auch auf X.
Zu '⇐': Wegen (ii) gilt $X = V(I(X)) \subseteq V(I(Y)) = Y$.

ist leer.Nach dem Nullstellensatz folgt

$$1 = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i = \sum_{i=1}^{m} u_i(T)F_i(1,T)$$

mit gewissen Polynomen $u_i \in k[T]$. Wir setzen $T_i = S_i/S_0$ und multiplizieren mit dem Hauptnenner (d.h. einer Potenz von S_0) und erhalten, eine Potenz von S_0 ist Linearkombination der F_i, sagen wir,

$$S_0^m \in I.$$

In analoger Weise erhält man, daß auch Potenzen der anderen Unbestimmten in I liegen. Wir können durch erhöhen der Exponenten einen gemeinsamen Exponenten für alle Unbestimmten finden. O.B.d.A. sei also

$$S_i^m \in I \text{ für } i = 0,...,n.$$

Ein Potenzprodukt der S_i des Grades $\geq m(n+1)$ ist dann mindestens durch eines der S_i^m teilbar und liegt damit in I. Also gilt

$$I_{m(n+1)} \subseteq I.$$

QED.

2.1.5 Zariski-Topologie

Es gilt:

(i) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(I \cdot J)$ für je zwei homogene Ideale I,J von k[S].

(ii) $\cap_{i\in I} V(I_i) = V(\sum_{i\in I} I_i)$ für jede Familie von homogenen Idealen I_i von k[S].

(iii) Die projektiven algebraischen Mengen V(M) mit $M \subseteq k[S]$ bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie des $\mathbb{P}^N$. Diese heißt <u>Zariski-Toplogie</u> des $\mathbb{A}^N$.

Beweis. Die Argumentation ist dieselbe wie beim Beweis von 1.1.5
QED.

2.1.6 Offene Hauptmengen

Die offenen Mengen der Gestalt

$$D(F) := \mathbb{P}^N - V(f) = \{x \in \mathbb{P}^N \mid F(x) \neq 0 \}$$

mit $F \in k[S]$ homogen bilden eine Topologiebasis für die Zariski-Topologie des $\mathbb{P}^N$. Sie heißen <u>offene Hauptmengen</u>.

Beweis. Sei $U \subseteq \mathbb{P}^N$ offen und $x \in U$ ein Punkt. Wir haben zu zeigen, es gibt ein homogenes Polynom F mit

$$x \in D(F) \subseteq U.$$

Nach Voraussetzung hat U die Gestalt

$$U = \mathbb{P}^N - V(F_1,...,F_r)$$

mit homogenen Polynomen $F_i \in k[S]$. Wegen $x \in U$ gibt es ein i mit $F_i(x) \neq 0$. Mit $F := F_i$ gilt also

$x \in D(F)$

und

$V(F) \supseteq V(F_1,...,F_r)$

also

$D(F) \subseteq \mathbb{P}^N - V(F_1,...,F_r) = U.$

QED.

Bemerkungen

(i) Für jeden Punkt $[x]\in\mathbb{P}^n$ ist mindestens eine projektive Koordinate ungleich Null, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}^n = D(S_0)\cup D(S_1)\cup...\cup D(S_n).$$

Jede der offenen Mengen $D(S_i)$ kann man wie folgt mit dem $\mathbb{A}^n$ identifizieren.

$$D(S_i) \to \mathbb{A}^n,\ [x_0,...,x_n] \to (\frac{x_0}{x_i},..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ... , \frac{x_n}{x_i})$$

Als Umkehrabbildung erhält man

$$\mathbb{A}^n \to D(S_i),\ (x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n) \mapsto (x_0,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n).$$

Die Mengen $D(S_i)$ betrachtet man deshalb auch als <u>affine</u> offene Untermengen des $\mathbb{P}^n$.

(ii) Allgemeiner, sei $L\in k[S] - \{0\}$ eine Linearform, d.h. L sei homogen vom Grad 1 und nicht identisch Null,

$$L = c_0S_0 + ... + c_NS_N.$$

Bezeichne c den Spaltenvektor mit den Koordinaten c_i. Wegen $c \neq 0$ kann man c zu einer umkehrbaren $(N+1)\times(N+1)$-Matrix (c,A) ergänzen. Dann sind die Abbildungen

$$\varphi:D(L) \to \mathbb{A}^n,\ [x] \to \frac{1}{L(x)} \cdot xA$$

$$\psi:\mathbb{A}^n \to D(L),\ x \mapsto [(1,x)(c,A)^{-1}]$$

wohldefiniert und zueinander invers. Sie identifizieren die offene Teilmenge D(L) des projektiven Raumes mit dem $\mathbb{A}^n$.

Beweis der Aussagen von (ii). Die Abbildung φ ist wohldefiniert auf Grund der Definition von D(L). Die Abbildung ψ ist wohldefiniert wegen

(1) $$L((1,x)(c,A)^{-1}) = (1,x)(c,A)^{-1}\cdot c = (1,x)\cdot e_1 = 1.$$

Das vorletzte Gleichheitszeichen gilt, weil $(c,A)^{-1}\cdot(c,A)$ die Einheitsmatrix ist, d.h. $(c,A)^{-1}\cdot c = e_1$ ist die erste Spalte der Einheitsmatrix.

Weiter gilt

$$\varphi(\psi(x)) = \varphi([(1,x)(c,A)^{-1}]) = \frac{1}{L(y)} \cdot (1,x)(c,A)^{-1}A$$

mit $y = (1,x)(c,A)^{-1}$. Wegen (1) ist $L(y) = 1$. Damit ist

$$\varphi(\psi(x)) = (1,x)(c,A)^{-1}A = (1,x)(e_2,...,e_N) = x$$

Das vorletzte Gleichheitszeichen gilt, weil $(c,A)^{-1}\cdot(c,A)$ die Einheitsmatrix ist, d.h. $(c,A)^{-1}A$ ist die Einheitmatrix ohne die erste Spalte.

Schließlich ist

$$\psi(\varphi([x])) = \psi(\frac{1}{L(x)} \cdot xA) = [(1,\frac{1}{L(x)} \cdot xA)(c,A)^{-1}] = [(L(x),xA)(c,A)^{-1}]$$
$$= [(x\cdot c,x\cdot A)(c,A)^{-1}] = [x\cdot(c,A)(c,A)^{-1}] = [x]$$

QED.

2.1.7 Überdeckung projektiver algebraischer Mengen durch affine

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine projektive algebraische Menge. Dann ist

$$U_i := X \cap D(S_i)$$

für jedes i eine offene Teilmenge von X und es gilt

$$X = U_0 \cup \ldots \cup U_N .$$

<u>Behauptung</u>: U_i ist für jedes i abgeschlossene Teilmengen des affines Raums $D(S_i)$.

Beweis. Sei

$$X = V(F_1,...,F_m).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} U_i &= \{[x] \mid F_j(x) = 0 \text{ für alle } j, x_i \neq 0\} \\ &= \{[x] \mid F_j(\frac{x}{x_i}) = 0 \text{ für alle } j, x_i \neq 0\}. \end{aligned}$$

Wie in 2.1.6 Bemerkung (i) identifizieren wir $D(S_i)$ mit dem $\mathbb{A}^n$. Mit

$$f_j(T) := F_j(T_1,...,T_{i-1},1,T_{i+1},...,T_n)$$

gilt dann

$$U_i = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f_j(x) = 0 \text{ für alle } j\} = V(f_1,...,f_m)$$

QED.

2.1.8 Die projektive Abschließung affiner algebraischer Mengen

Sei $X = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ ein affine algebraische Menge und $I \subseteq k[T]$ ein Ideal. Wir identifizieren den $\mathbb{A}^n$ mit der offenen Teilmenge

$$\mathbb{A}^n = D(S_0) \subseteq \mathbb{P}^n, x \mapsto [1,x],$$

des projektiven Raums und damit X mit einer Teilmenge des $\mathbb{P}^n$. Sei

$$\overline{X}$$ [32]

die Abschließung von X im $\mathbb{P}^n$. Für $f(T_1,..,T_n) \in I$ ist dann

$$H(f) := F(S_0,...,S_n) := f(\frac{S_1}{S_0},..., \frac{S_n}{S_0}) \cdot S_0^{\deg f}$$

ein homogenes Polynom, welches in allen Punkten von $X \subseteq \mathbb{P}^n$ Null ist. Dieses Polynom heißt <u>Homogenisierung</u> von f. Es gilt

$$X \subseteq V(F \mid f \in I)$$

und damit für die Abschließung $\overline{X}$ von X:

$$\overline{X} \subseteq V(F \mid f \in I).$$

Nach Konstruktion gilt

$$X = V(F \mid f \in I) \cap \mathbb{A}^n$$

Insbesondere ist X eine offene Teilmenge der abgeschlossenen Teilmenge

$$V(F \mid f \in I) \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Es gilt sogar

---

[32] d.h. der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen des projektiven Raums, die X enthalten.

$\overline{X} = V(F \mid f \in I)$.

Beweis.Da auf beiden Seiten der Identität abgeschlossene Mengen stehen, reicht es zu zeigen, jedes homogene Polynom, das auf der linken Seite identisch Null ist, ist es auch auf der rechten Seite. Sei also F homogen vom Grad d und identisch Null auf $\overline{X}$. Dann ist f(T) = F(1,T) identisch Null auf X, d.h. eine Potenz von f liegt im Ideal I, sagen wir

$$f^r \in I.$$

Das Polynom f hat einen Grad ≤d, d.h. die Homogenisierung von f^r,

$$H(f^r) = f^r(\frac{S_1}{S_0},\ldots,\frac{S_n}{S_0})\cdot S_0^{r\cdot\deg f}$$

unterscheidet sich von F^r nur um eine S_0-Potenz,

$$F^r = S_0^{r\cdot d}\, F^r(1,\frac{S_1}{S_0},\ldots,\frac{S_n}{S_0}) = S_0^{r(d-\deg f)}\, H(f)$$

Die Homogenisierung ist aber identisch Null auf V(F | f∈I), d.h. F^r ist es ebenfalls (als Vielfaches der Homogenisierung). Dann ist aber auch F identisch Null auf der rechten Seite.

QED.

Bemerkung

Bisher haben wir zwei Arten von Objekten betrachtet, affine und projektive abgeschlossene Menge. Im folgenden wollen wir eine gemeinsame Verallgemeinerung dieser Objekte betrachten.

2.1.9 Quasi-proktive algebraische Mengen

Eine quasi-projektive algebraische Menge ist eine offene Teilmenge einer projektiven abgeschlossenen Menge.

Beispiele:
1. Projektive abgeschlossene Mengen sind quasi-projektiv.
2. Affine abgeschlossene Mengen sind quasi-projektiv (nach 2.1.8).

Bemerkungen

(i) Den Begriff der irreduziblen Menge definiert man für quasi-projektive Mengen wie im affinen Fall[33].

(ii) Wie im affinen Fall zeigt man, jede quasi-projektive Menge ist Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen[34].

2.2 Reguläre Funktionen und Abbildungen

2.2.1 Reguläre Funktionen auf quasi-projektiven algebraischen Mengen

Vorbemerkung

Wir begegenen hier einem wichtigen Unterschied zwischen den Funktionen von homogenen und inhomogenen Koordinaten: eine rationale Funktion von den homogenen Koordinaten S_i ,

[33] irreduzibel = nicht Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen

[34] Andernfalls gäbe es eine quasi-projektive Menge X und eine unendliche echt absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen. Diese Teilmengen kommen von abgeschlossenen Teilmengen des projektiven Raums und liefern eine echt absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen im $\mathbb{P}^n$. Durch Übergang zu den Idealen erhält man wie im affinen Fall einen Widerspruch.

$$f(S_0,...,S_n) = \frac{P(S_0,...,S_n)}{Q(S_0,...,S_n)}$$

kann nicht automatisch als Funktion eines Punktes $[x]\in \mathbb{P}^n$ angesehen werden, auch wenn $Q(x) \ne 0$ ist. Der Wert von f(x) kann sich ändern, wenn man die Koordinaten von [x] mit einem von Null verschiedenen Faktor $\lambda\in k$ multipliziert,

$$f(\lambda x) = \frac{P(\lambda x)}{Q(\lambda x)} = \frac{\lambda^{\deg P} P(x)}{\lambda^{\deg Q} Q(x)} = \lambda^{\deg P - \deg Q}\, f(x) = \lambda^{\deg f} \cdot f(x).$$

Eine Ausnahme bilden jedoch die homogenen Funktionen des Grades 0, d.h.

$$f = \frac{P}{Q} \text{ mit P,Q homogen vom selben Grad}$$

kann als Funktion auf $\mathbb{P}^n$ angesehen werden.

Reguläre Funktionen auf quasi-projektiven algebraischen Mengen

Seien $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine quasi-projektive algebraische Menge, $x\in X$ ein Punkt und

$$f := \frac{P}{Q}$$

mit homogenen Polynomen P,Q vom selben Grad und $Q(x) \ne 0$.Dann definiert f in einer Umgebung von x, zum Beispiel in der Umgebung

$$U = D(Q) = \{ [u] \in X \mid Q(u) \ne 0 \},$$

eine Funktion mit Werten in k,

$$f: U \to k , [u] \mapsto \frac{P(u)}{Q(u)},$$

Eine solche Funktion heißt <u>regulär</u> in $x\in X$. Eine Funktion $f: X \to k$, die regulär in allen Punkten von X ist, heißt <u>reguläre Funktion</u> von X. Die Menge aller regulären Funktionen auf X wird mit

$$k[X]$$

bezeichnet.

Bemerkungen

(i) Eine in $x\in X$ reguläre Funktion ist regulär in allen Punkten einer Umgebung des Punktes x.

(ii) Wie bisher ist k[X] mit den üblichen Operationen eine k-Algebra.

(iii) Wir haben uns dafür zu interessieren, ob dieser Begriff der regulären Funktion im Fall, daß X eine affine abgeschlossene Menge ist, mit dem bisher verwendeten übereinstimmt.

Vergleich der beiden Regularitätsbegriffe im affinen Fall

Bei der nachfolgenden Argumentation bedeute 'regulär' regulär im alten Sinne. Seien

$$X \subseteq \mathbb{A}^n \ (= D(S_0) \subseteq \mathbb{P}^n)$$

eine affine abgeschlossene Menge und f eine reguläre Funktion auf X, d.h.

$$f(x) = p(x) \text{ für alle } x\in X$$

mit einem Polynom $p\in k[T]$. Fassen wir X als Teilmenge von $D(S_0)$ auf, so bekommt diese Formel für die Werte von f die Gestalt

$$f([x]) = p(1, \frac{x_1}{x_0}, ... , \frac{x_n}{x_0}) = P(x)/x_0^d$$

mit einem homogenen Polynom P des Grades d. Damit ist aber f eine reguläre Funktion im eben definierten Sinne.

Sei jetzt umgekehrt f eine Funktion auf $X \subseteq D(S_0)$, welche lokal die Gestalt

$$f([x]) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$
hat für $[x]\in X$ mit homogenen Polynomen P,Q des Grades
$$d := \deg P = \deg Q,$$
wobei es zu jedem Punkt $[x]\in X$ eine Darstellung gebe mit $Q(x) \ne 0$. Es gilt
$$f([x]) = \frac{x_0^d \cdot P(x)}{x_0^d \cdot Q(x)} = \frac{P(\frac{x}{x_0})}{Q(\frac{x}{x_0})}$$
und wenn wir den Punkt als Punkt im affinen Raum auffassen
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ mit } p(x) = P(1,x) \text{ und } q(x) = Q(1,x).$$
Mit anderen Worten, f läßt sich lokal in der Gestalt
$$f = \frac{p}{q} \text{ mit } p,q\in k[X]$$
schreiben, wobei es zu jedem Punkt $x\in X$ ($\subseteq \mathbb{A}^N$) eine Darstellung mit $q(x)\ne 0$ gibt. Deshalb definiert f einen globalen Schnitt der Strukturgarbe (vgl. 1.4.7) des affinen Spektrums
$$Y := \operatorname{Spec} k[X].$$
Wegen
$$\mathcal{O}_Y(Y) = k[X]$$
(vgl. 1.4.8(ii)) gibt es damit aber ein Element $\alpha\in k[X]$ mit $f(x) = \alpha(x)$ für alle $x\in X$, d.h. f ist eine reguläre Funktion im Sinne der alten Definition.

Bemerkungen

(i) Im Gegensatz zur affinen Situation kann es jetzt vorkommen, daß der Ring k[X] der regulären Funktionen ausschließlich aus Konstanten besteht,
$$k[X] = k.$$
Im nachfolgenden Abschnitt 1.5 werden wir zeigen, daß dies für projektive abgeschlossene Mengen der Fall ist.

(ii) Unmittelbar kann man dies im Fall $X = \mathbb{P}^n$ sehen. Sei
$$f = \frac{P}{Q}$$
mit homogenen Polynomen desselben Grades $d = \deg P = \deg Q$. Wir können annehmen, daß P und Q teilerfremd sind. Dann ist f in allen Punkten $x\in\mathbb{P}^n$ mit $Q(x) = 0$ nicht regulär[35].

(iv) In anderen Fällen kann sich der Ring k[X] als unerwartet groß erweisen. Wir wissen, für affine abgeschlossene Mengen X ist k[X] endlich erzeugt über k. Rees und Nagata haben quasi-projektive Varietäten konstruiert, bei denen das nicht so ist.

2.2.2 Reguläre Abbildungen

Reguläre Abbildungen mit Werten im $\mathbb{A}^n$

Eine Abbildung einer quasi-projektiven Varietät X mit Werten im $\mathbb{A}^n$,

[35] Weil das Ideal des $\mathbb{P}^n$ das Null-Ideal ist, erhält man alle anderen Darstellungen für f durch Erweitern des Bruches $\frac{P}{Q}$ mit homogenen Polynomen, d.h. auch in den anderen Darstellungen ist der Nenner im Punkt x gleich Null.

$$f: X \to \mathbb{A}^n,\ x \mapsto (f_1(x),...,f_n(x)),$$
heißt <u>regulär</u>, wenn ihre Koordinatenfunktionen f_i reguläre Funktionen auf X sind.

Reguläre Abbildungen von quasi-projektiven Varietäten

Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung von quasi-projektiven Varietäten mit,

$$Y \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Diese Abbildung heißt <u>regulär im Punkt</u> $x\in X$, wenn es für jede (bzw. für eine) affine offene Menge $D(S_i)\subseteq\mathbb{P}^n$ mit $f(x)\in D(S_i)$ eine offene Umgebung U des Punktes x gibt mit $f(U)\subseteq D(S_i)$ und der Eigenschaft, daß die Einschränkung

(1) $$f|_U : U \to D(S_i) = \mathbb{A}^n$$

regulär ist. Die Abbildung heißt <u>regulär</u> schlechhin, wenn sie regulär in allen Punken von X ist.

Bemerkungen

(i) Die obige Bedingung gilt, wenn sie für ein $D(S_i)$ mit $f(x)\in D(S_i)$ erfüllt ist, für alle solchen $D(S_i)$. Sei nämlich die Einschränkung (1) wohldefiniert und regulär, d.h. von der Gestalt

$$f|_U : U \to D(S_i),\ y \mapsto [f_1(y),...,f_{i-1}(y),1,f_{i+1}(y),...,f_n(y)],$$

mit regulären Funktionen $f_i\in k[U]$. Liegt f(x) außerdem noch in $D(S_j)$, so ist die j-te Koordinatenfunktion f_j in x von Null verschieden und dies gilt für eine ganze offene Umgebung $V\subseteq U$ von x. Auf V können wir f wie folgt beschreiben.

$$f|_V : V \to D(S_j),\ y \mapsto [\frac{f_1(y)}{f_j(y)},...,\frac{f_{i-1}(y)}{f_j(y)},\frac{1}{f_j(y)},\frac{f_{i+1}(x)}{f_j(x)},...,\frac{f_n(x)}{f_j(x)}].$$

Dies ist eine reguläre Abbildung.

(ii) Wie im Fall regulärer Abbildungen von affinen abgeschlossenen Mengen, induziert eine reguläre Abbildung

$$f: X \to Y$$

von quasi-projektiven Varietäten einen Homomorphismus

$$f^*: k[Y] \to k[X]$$

von k-Algebren und es gelten die üblichen Formeln

$$(g\circ f)^* = f^*\circ g^* \text{ und } Id^* = Id.$$

Isomorphie

Eine reguläre Abbildung quasi-projektiver Varietäten heißt <u>Isomorphismus</u>, wenn es eine Umkehrabbildung gibt und diese regulär ist. Quasi-projektive Varietäten heißen <u>isomorph</u>, wenn es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

Eine <u>affine Varietät</u> ist eine quasi-projektive Varietät, die isomorph ist zu einer affinen algebraischen Menge. Eine <u>projektive Varietät</u> ist eine quasi-projektive Varietät, die isomorph zu einer projektiven algebraischen Menge ist.

Beispiel

$X = \mathbb{A}^1 - \{0\}$ ist zwar nicht abgeschlossen im $\mathbb{A}^1$ aber isomorph zur Hyperbel

$$Y = V(xy-1) \subseteq \mathbb{A}^2,$$

also eine affine Varietät. Der Begriff der affinen algebraischen Menge ist somit nicht invariant bei Isomorphismen, während es der Begriff der affinen Varietät nach Definition ist.

Bemerkungen

(i) Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, daß $X \subseteq \mathbb{P}^n$ abgeschlossen ist, wenn X eine projektive Varietät ist. Der Begriff der projektiven algebraischen Menge ist somit invariant bei Isomorphismen und fällt mit dem Begriff der projektiven Varietät zusammen.

(ii) Es gibt quasi-projektive Varietäten, die weder affin noch projektiv sind.

2.2.3 Beschreibung regulärer Abbildungen in homogenen Koordinaten

Eine reguläre Abbildung

$$f: X \to \mathbb{P}^n$$

(mit X quasi-projektiv) ist gegeben durch ein Familie von (n+1)-Tupeln

$$(F_0,...,F_n) \tag{1}$$

von homogenen Polynomen F_i gleichen Grades, wobei für je zwei (n+1)-Tupel

$$(F_0,...,F_n) \text{ und } (G_0,...,G_n)$$

der Familie gilt

$$F_iG_j - F_jG_i = 0 \text{ auf } X. \tag{2}$$

Außerdem muß es für jeden Punkt $x \in X$ ein Tupel $(F_0,...,F_n)$ geben mit

$$F_i(x) \neq 0$$

für mindestens ein i. Der Punkt

$$f(x) = [F_0(x),...,F_n(x)] \in \mathbb{P}^n \tag{3}$$

ist dann gerade das Bild von x bei f.

Beweis. Ist $(F_0,...,F_n)$ ein (n+1)-Tupel homogener Polynome gleichen Grades mit

$$F_i(x) \neq 0$$

für ein i, so ist in einer Umgebung von $x \in X$ durch

$$f(y) = [F_0(y),...,F_n(y)] = [\frac{F_0(y)}{F_i(y)}, ... , \frac{F_n(y)}{F_i(y)}].$$

eine reguläre Abbildung definiert. Im letzten Ausdruck sind die Koordinaten gerade Quotienten homogener Polynome gleichen Grades, wobei der Nenner nicht Null ist und die i-te Koordinate gleich 1. Mit anderen Worten, f ist in einer Umgebung von x eine reguläre Funktion mit Werten in $D(S_i)$.

Bedingung (2) bedeutet gerade, die durch die G's definierten Bildpunkte haben Koordinaten, die proportional sind zu denen, die durch die F's gegeben sind. Mit anderen Worten, die durch die F's und die G's beschriebenen Abbildungen stimmen in den Punkten, in denen beide definiert sind, überein.

Sei umgekehrt $f: X \to \mathbb{P}^n$ regulär und x ein Punkt mit $f(x) \in D(S_i)$. Dann hat f auf einer offenen Umgebung U von x die Gestalt

$$f(y) = [f_0(y),...,f_n(y)]$$

mit regulären Funktionen $f_j =$[36] $\frac{P_j}{Q_j}$ und homogenen Polynomen P_j, Q_j mit

$$\deg P_j = \deg Q_j \text{ und } Q_j(y) \neq 0 \text{ für } y \in U.$$

Wir bringen alle Brüche auf den Hauptnenner und können so annehmen,

---

[36] Für j=i können wir $f_j = 1$ annehmen.

$$Q_j = Q \text{ für alle } j$$

und damit

$$\deg P_j \text{ unabhängig von } j.$$

Damit können wir f in einer Umgebung von x in der folgenden Gestalt schreiben.

$$f(y) = [P_0(y),...,P_n(y)]$$

wobei die i-te Koordinate in allen Punkten dieser Umgebung ungleich Null ist.

Hat man eine weitere solche Darstellung, sagen wir

$$f(y) = [R_0(y),...,R_n(y)]$$

und sind beide Darstellungen auf der offenen Teilmenge $U \subseteq X$ definiert, so gilt

$$P_i R_j - P_j R_i = 0 \text{ auf } U.$$

für alle i und j. O.B.d.A. können wir annehmen, U ist eine offene Hauptmenge, sagen wir

$$U = D(H).$$

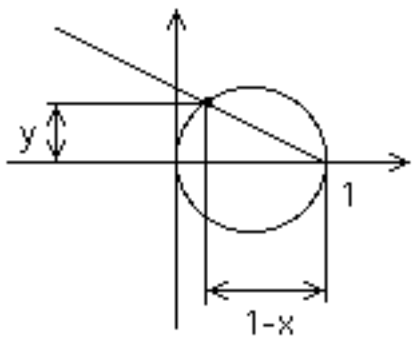
Dann gilt

$$P_i R_j H - P_j R_i H = 0 \text{ auf } X$$

Mit anderen Worten, indem wir die aus den lokalen Beschreibungen gewonnenen Tupel mit geeigneten homogenen Polynomen multiplizieren, erhalten wir Tulpel, für welche die Relationen (2) bestehen[37]
QED.

Beispiel für eine reguläre Abbildung

Seien $X := V(x^2+y^2-1) \subseteq \mathbb{A}^2$ der Einheitskreis und



$$f: X \to \mathbb{A}^1, (x,y) \mapsto \frac{y}{1-x},$$

die Projektion auf die y-Achse mit dem Zentrum (1,0).[38] Führen wir projektive Koordinaten ein:

$$x = \frac{v}{u}, y = \frac{w}{u}.$$

Dann bekommt die Abbildung die Gestalt

$$f([1, \frac{v}{u}, \frac{w}{u}]) = [1, \frac{y}{1-x}] = [1-x, y] = [1-\frac{v}{u}, \frac{w}{u}] = [u-v, w],$$

d.h.

$$f[u,v,w] = [u-v,w].$$

Die beiden homogenen Polynome u-v und w sind Null im Punkt [1,1,0] (und nur dort). Aber auf dem Einheitskreit gilt

[37] d.h. das Tupel $(P_0H,...,P_nH)$ beschreibt die Funktion f in allen Punkten von X, in denen es überhaupt eine Funktion beschreibt, und für zwei Tupel mit dieser Eigenschaft bestehen die Relationen (2).

[38] Dies ist nur eine rationale Abbildung, welche in $(1,0) \in X$ nicht regulär ist.

$$v^2 + w^2 - u^2 = 0$$
$$w^2 = u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$$

also

$$f[u,v,w] = [(u-v)w, w^2] = [(u-v)w, (u+v)(u-v)] = [w, u+v]$$

Die Formen w und u+v sind in [1,1,0] nicht beide Null, d.h. die Abbildung ist regulär. Wir haben damit zwei Paare

$$(u-v, w) \text{ und } (w, u+v)$$

gefunden, die auf der projektiven Abschließung $\bar{X}$ von X eine reguläre Abbildung

$$\bar{X} \to \mathbb{P}^1$$

definieren, welche auf X mit der gegebenen Abbildung übereinstimmt. Man beachte, die beiden lokalen Definitionen dieser Abbildung sind verträglich:

$$(u-v)(u+v) = u^2 - v^2 = w^2.$$

2.2.4 Die Topologiebasis der affinen Varietäten

Lokalen Eigenschaften

Sei X eine Varietät. Eine Eigenschaft von X heißt lokal, wenn X diese Eigenschaft besitzt, sobald die Mengen U_α einer offenen Überdeckung von X sie besitzen.

Die Abgeschlossenheit als lokale Eigenschaft

Die Eigenschaft einer Teilmenge $Y \subseteq X$, abgeschlossen zu sein in einer quasi-projektiven Varietät X, ist eine lokale Eigenschaft.

Beweis. Sei $X = \cup U_\alpha$ eine offene Überdeckung mit

$$Y \cap U_\alpha \text{ abgeschlossen in } U_\alpha$$

für jedes α. Wir haben zu zeigen, dann ist Y abgeschlossen in X.

Nach Voraussetzung gilt

$$U_\alpha = X - Z_\alpha \text{ mit } Z_\alpha \text{ abgeschlossen in X.}$$

und

$$Y \cap U_\alpha = U_\alpha \cap T_\alpha \text{ mit } T_\alpha \text{ abgeschlossen in X.}$$

Es reicht zu zeigen,

(1) $$Y = \cap (Z_\alpha \cup T_\alpha).$$

Sei $y \in Y$. Für $y \in U_\alpha$ gilt

$$y \in Y \cap U_\alpha \subseteq T_\alpha$$

und für $y \notin U_\alpha$ gilt

$$y \in Y - U_\alpha = Z_\alpha$$

In beiden Fällen gilt $y \in T_\alpha \cup Z_\alpha$. Damit gilt in (1) wenigstens "$\subseteq$".

Sei jetzt umgekehrt $y \in T_\alpha \cup Z_\alpha$ für alle α. Wegen $X = \cup U_\alpha$ gilt

$$y \in U_\alpha$$

für mindestens ein α. Dann gilt $y \notin Z_\alpha$, also $y \in T_\alpha$, also $y \in T_\alpha \cap U_\alpha \subseteq Y$.

QED.

Existenz einer Überdeckung durch affine offene Mengen

Sei X eine quasi-projektive Varietät. Dann hat jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung, die isomorph zu einer affinen Varietät ist.

Bemerkung
Da offene Teilmengen quasi-projektiver Varietäten wieder quasi-projektiv Varietäten sind, bilden die offenen Umgebungen von X, welche isomorph zu affinen Varietäten sind, eine Topologiebasis von X. Man nennt sie affine offene Teilmengen von X.

Beweis. Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$. Wir können annehmen, $x \in X$ liegt in $D(S_0)$,

$$x \in D(S_0) = \mathbb{A}^n,$$

d.h. die 0-the Koordinate von x ist nicht Null. Nach Definition der quasi-projektiven Varietät gilt

$$X \cap D(S_0) = Y - Y'$$

mit abgeschlossenen Mengen $Y, Y' \subseteq \mathbb{A}^n$.[39] O.B.d.A. sei $Y' \subseteq Y$. Wegen $x \in Y$ gibt es ein Polynom $f \in k[T]$ mit

$$f = 0 \text{ auf } Y' \text{ und } f(x) \neq 0.$$

Dann gilt

$$x \in D(f) \cap Y \subseteq Y - Y'$$

und es reicht zu zeigen, daß

$$D(f) \cap Y$$

isomorph ist zu einer affinen Varietät.
Sei

$$Y = V(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{A}^n$$

Seien Z die affine Varietät

$$Z := V(f_1, \ldots, f_m, T_{n+1} \cdot f - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$$

und φ die reguläre Abbildung

$$\varphi: Z \to \mathbb{A}^n, (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n).$$

Das Bild von φ liegt offensichtlich in Y und in allen Bildpunkten x gilt $f(x) \neq 0$, d.h. φ ist eine Abildung

$$\varphi: Z \to D(f) \cap Y.$$

Weiter ist die Abbildung

$$\psi: D(f) \cap Z \to Z, x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f(x)})$$

wohldefiniert und regulär. Es ist leicht zu sehen, daß φ und ψ invers zueinander sind.
QED.

Bemerkung (weglassen ?)
Mit den Bezeichnungen des Beweises gilt

$$k[D(f)] = k[T, T_{d+1}]/(I(I), T_{n+1} \cdot f(T) - 1) = k[Y, \frac{1}{f}] = k[Y]_f$$

Im Buch von Schafarewich wird behauptet, es gilt

$$k[D(f)] = k[X]_f,$$

was im allgemeinen falsch ist (die rechte Seite braucht nicht definiert zu sein, weil zum Beispiel $k[X] = k$ sein kann und f nicht in $k[X]$ zu liegen braucht).

2.2.5 Stetigkeit der regulären Abbildungen in der Zariski-Topologie
Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung quasi-projektiver Varietäten. Dann ist das vollständige Urbild $f^{-1}(Z)$ einer abgeschlossenen Menge $Z \subseteq Y$ abgeschlossen.

---

[39] Zunächst gilt dies mit Y, Y' abgeschlossen im $\mathbb{P}^n$. Weil die linke Seite aber in $\mathbb{A}^n$ liegt, dann man Y und Y' durch den Durchschnitt mit $\mathbb{A}^n$ ersetzen.

Beweis. Sei $x\in X$. Dann gibt es offene Umgebungen

$U \subseteq X$ von x

und

$V \subseteq Y$ von $y = f(x)$

mit

$U\subseteq\mathbb{A}^m$, $V\subseteq \mathbb{A}^n$, $f(U) \subseteq V$

derart, daß die Einschränkung

$g: U \to V$

von f regulär ist. Nach (2.2.4, Teil 3) können wir annehmen, U ist affine Varietät. Nach (2.2.4, Teil 2) reicht es zu zeigen,

$$f^{-1}(Z)\cap U = g^{-1}(Z\cap V)$$

ist abgeschlossen in U. Wegen $Z\cap V$ abgeschlossen in V gilt

$Z\cap V =$[40] $\{y\in V \mid \varphi_1(y) = ... = \varphi_r(y) = 0\}$

mit gewissen regulären Funktionen g_i auf V. Dann gilt aber

$$f^{-1}(Z)\cap U = \{ x\in U \mid \varphi_1(g(x)) = ... = \varphi_r(g(x)) = 0\}.$$

Da die $\varphi_j\circ g$ reguläre Funktionen auf U sind, ist diese Menge aber abgeschlossen in U.

QED.

2.2.6 Reguläre Abbildungen und Verpflanzung regulärer Funktionen

Eine reguläre Abbildung $f: X\to Y$ ist eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, daß bei Verpflanzung entlang f reguläre Funktionen in reguläre Funktionen übergehen.

2.2.7 Beispiel: die Automorphismen des $\mathbb{P}^N$

Sei $A\in k^{(N+1)\times(N+1)}$ eine umkehrbare Matrix. Dann ist

$$[A]:\mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N, [x] \mapsto [Ax],$$

eine reguläre Abbildung. Die zur inversen Matrix A^{-1} gehörige Abbildung $[A^{-1}]$ ist ebenfalls regulär und invers zu $[A]$. Insbesondere sind die Abbildungen der Gestalt $[A]$ Automorphismen des $\mathbb{P}^N$. Man kann zeigen, jeder Automorphismus des $\mathbb{P}^N$ ist von dieser Gestalt (man betrachte die aus dem $k[S]$ induzierten k-Algebra-Automorphismen).

<u>Anwendung</u>: für jeden endlich-dimensionalen k-Vektorraum V setzen wir

$\mathbb{P}(V)$:= Menge aller 1-dimensionalen k-linearen Unterräume von V

Äquivalent, kann man $\mathbb{P}(V)$ als Menge der Orbits bezüglich der natürlichen Operation

$$k^*\times(V-\{0\}) \to V - \{0\}, (c, v) \mapsto cv,$$

von k^* auf $V-\{0\}$ definieren, d.h.

$$\mathbb{P}(V) = (V - \{0\})/k^*.$$

Für $V = k^N$ erhält man

$$\mathbb{P}(k^N) = \mathbb{P}^N.$$

Benutzt man eine Basis von V um V mit dem k^N zu identifizieren, so erhält man eine Identifikation von $\mathbb{P}(V)$ mit dem $\mathbb{P}^N$. Die Menge

$$\mathbb{P}(V)$$

bekommt dadurch die Struktur einer projektiven Varietät.[41]

---

[40] $Z\cap V$ ist Durchschnitt von V mit einer abgeschlossenen Menge des $\mathbb{A}^n$. Letztere ist durch endlich viele Gleichungen definiert.

Für je zwei Basen von V unterscheiden sich die Identifikationen von $\mathbb{P}(V)$ mit dem $\mathbb{P}^N$ gerade um einen Automorphismus der Gestalt [A]. Die Struktur von $\mathbb{P}(V)$ als algebraischen Varietät hängt damit nicht von der Wahl der speziellen Basis von V ab.

Die algebraische Varietät $\mathbb{P}(V)$ heißt Projektivierung von V.

2.2.8 Beispiel: die Veronese-Abbildung

Algebraische Zyklen

Sei X eine quasi-projektive Varietät. Eine irreduzible abgeschlossene Teilvarietät von X heißt auch Primzyklus von X. Die von der Menge der Primzyklen von X erzeugte freie abelsche Gruppe wird mit

$$Z(X)$$

bezeichnet und heißt Zyklen-Gruppe von X. Die Elemente dieser Gruppe, d.h. die formalen $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen

$$n_1 \cdot Z_1 + ... + n_l Z_l \text{ mit } n_i \in \mathbb{Z} \text{ und } Z_i \subseteq X \text{ Primzyklus,}$$

heißen (algebraische) Zyklen von X.

Der Raum der Hyperflächen vom Grad m

Für jede nicht-negative ganze Zahl m bezeichne

$$k[S]_m$$

den k-Vektorraum der homogenen Polynome des Grades m von k[S] (einschließlich des Nullpolynoms). Eine Hyperfläche des Grades m im projektiven Raum $\mathbb{P}^N$ ist eine projektive Varietät der Gestalt

$$X = V(F) \text{ mit } F \in k[S]_m - \{0\}.$$

Der projektive Raum

$$\mathbb{P}(k[S]_m)$$

heißt Raum der Hyperflächen des Grades m im $\mathbb{P}^N$.

Bemerkungen

(i) Zwei homogene Polynome F', F" des Grades m definieren dieselbe Hyperfläche,

$$V(F') = V(F''),$$

falls sie proportional sind, d.h. $F' = c \cdot F''$ für ein $c \in k^*$, d.h. wenn sie dasselbe Element von $\mathbb{P}(k[S]_m)$ repräsentieren.

(ii) Die Umkehrung von (i) gilt wenigstens für irreduzible Polynome: sind F' und F" irrduzible Polynome des Grades d mit

$$V(F') = V(F''),$$

so sind auch die affinen Teile dieser Hyperflächen gleich, d.h. mit

$f'(T) := F'(T_1,...,T_{i-1}, 1, T_i, ..., T_N$

$f''(T) := F''(T_1,...,T_{i-1}, 1, T_i, ..., T_N$

gilt

$V(f') = V(f'')$ im $\mathbb{A}^N$.

Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$f'' \mid f'^r$

also

---

[41] d.h. eines topologischen Raumes, auf dessen offenen Teilmengen der Begriff der regulären Funktion definiert ist.

$F''(\frac{S_0}{S_i}, ... , \frac{S_N}{S_i}) \mid F'^r (\frac{S_0}{S_i}, ... , \frac{S_N}{S_i})$

also

$F'' \mid S_i^s F'^r$ für ein $s\in\mathbb{N}$ (und jedes $i = 0,...,N$).

Da F" als irreduzibles Polynom nicht Teiler von zwei verschiedenen S_i sein kann, folgt

$F'' \mid F'$.

Weil F' und F" denselben Grad besitzen, folgt

$F'' = c F'$ für ein $c\in k^*$,

d.h. F' und F" repräsentieren denselben Punkt von $\mathbb{P}(k[S]_m)$.

(iii) Für reduzible Polynome ist die Umkehrung der Aussage (i) im allgemeinen falsch: sind zum Beispiel F' und F" lineare homogene Polynome, welche nicht proportional sind, so gilt

$$V(F'^2F'') = V(F'F''^2), \deg F'^2F'' = 3 = \deg F'F''^2.$$

(iv) Durch Einführung einer geeigneten Terminologie kann man jedoch erzwingen, daß die Umkehrung von Aussage (i) gilt: statt gewöhnlicher Hyperflächen betrachte man Zyklen aus irreduziblen Hyperflächen. Für jedes homogene Polynom

$$F \in k[S]_m - \{0\}$$

mit der Primfaktorzerlegung

$$F = F_1^{n_1}\cdot...\cdot F_r^{n_r}$$

bezeichnen wir mit Z(F) den Zyklus

$$Z(F) := n_1\cdot V(F_1) + ... + n_r\cdot V(F_r).$$

Zyklen dieser Gestalt heißen Divisoren des $\mathbb{P}^N$. Sie bilden eine Untergruppe

$$\mathrm{Div}(\mathbb{P}^N) \subseteq Z(\mathbb{P}^N).$$

Ist

$$Z(G) := m_1\cdot V(G_1) + ... + m_r\cdot V(G_r)$$

ein weiterer solcher Zyklus, so gilt

$Z(F) = Z(G) \quad \Leftrightarrow V(F_i) = V(G_i)$ und $n_i = m_i$ für $i = 1,...,r$.

$\Leftrightarrow F_i = c_iG_i$, $n_i = m_i$, $c_i\in k^*$ für $i = 1,...,r$

$\Leftrightarrow F_1^{n_1}\cdot...\cdot F_r^{n_r} = c\cdot G_1^{m_1}\cdot...\cdot G_r^{m_r}$ für ein $c\in k^*$

$\Leftrightarrow F = c\cdot G$ für ein $c\in k^*$

$\Leftrightarrow$ F und G definieren denselben Punkt von $\mathbb{P}(k[S]_m)$.

Mit anderen Worten,

$$\mathbb{P}(k[S]_m)$$

ist tatsächlich die Menge aller projektiven Hyperflächen des Grades m, wobei man jedoch die Vielfachheiten, mit denen eventuelle irreduzible Komponenten auftreten, berücksichtigen muß.

(v) $\mathbb{P}(k[S]_m)$ ist ein projektiver Raum der Dimensions $v_{m,N} = \binom{m+N}{m} - 1$.

(vi) Wählt man die Potenzprodukte des Grades m als Basis von $k[S]_m$, um $\mathbb{P}(k[S]_m$ mit dem projektiven Raum

$$\mathbb{P}(k[S]_m) = \mathbb{P}^{v_{m,N}}$$

zu identifizieren, so sind die Koeffizienen des homogenen Polynoms $F\in k[S]_m - \{0\}$ gerade die projektiven Koordinaten des durch F gegebenen Punktes von $\mathbb{P}(k[S]_m)$.

Beweis von (v). Wir haben zu zeigen,

$$\dim_k k[S]_m = \binom{m+N}{m}$$

Wir führen den Beweis durch Induktion nach N. Der Fall N = 0 ist trivial: es gibt nur ein Potenzprodukt des Grades m in einer Unbestimmten.

Bezeichne

$$S' = (S_0,...,S_{N+1})$$

das Tupel mit einer zusätzlichen Unbestimmten S_{N+1}. Jedes Element von k[S'] läßt sich auf genau eine Weise als Polynom in S_{N+1} mit Koeffizienten aus k[S] schreiben. Deshalb gilt

$$\dim_k k[S']_m = \dim_k k[S]_m + \dim_k k[S]_{m-1} + ... + \dim_k k[S]_0,$$

also nach Indukionsvoraussetzung

$$\dim_k k[S']_m = \binom{m+N}{m} + \binom{m-1+N}{m-1} + ... + \binom{0+N}{0}.$$

Es reicht also zu zeigen

$$\binom{m+N+1}{m} = \binom{m+N}{m} + \binom{m-1+N}{m-1} + ... + \binom{0+N}{0}.$$

Für m = 0 ist das trivial, da dann auf beiden Seiten 1 steht. Für m > 0 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \binom{m+N}{m} + \binom{m-1+N}{m-1} + ... + \binom{0+N}{0}. \\
&= \binom{m+N}{m} + \binom{m+N}{m-1} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung bezüglich m)} \\
&= \binom{m+N}{N} + \binom{m+N}{N+1} && \text{(Symmetrie des Pascalschen Dreiecks)} \\
&= \binom{m+N+1}{N+1} && \text{(man verwende das Pascalsche Dreieck)} \\
&= \binom{m+N+1}{m} && \text{(Symmetrie des Pascalschen Dreiecks)} \\
&= \text{LHS}
\end{aligned}$$

QED.

Definition der Veronese-Abbildung

Bezeichne

$$\mathbb{Z}^N_{\geq 0} = \{(i_0,...,i_n) \in \mathbb{Z}^N \mid i_v \geq 0 \text{ für } v = 0,...,N \}$$

die Menge aller N-Tupel mit nicht-negativen ganzen Koordinaten. Für

$$i = (i_0,...,i_N)\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}$$

bezeichne

$$|i| = i_0+...+i_n$$

die Summe der Koordinaten von i, und für $x = (x_0,...,x_N)$ sei

$$x^i = x_0^{i_0}\cdot\ldots\cdot x_N^{i_N}$$

das zugehörige Potenzprodukt. Ein Element i der Menge $\mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ heiße m-zulässig, wenn gilt

$$|\,i\,| = m.$$

Dann ist die Abbildung

$$v: \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^{\nu_{m,N}},\ [x] \mapsto [x^i \mid i \text{ ist m-zulässig }]$$

eine regulären Abbildung und heißt m-Veronese-Abbildung. Das Bild dieser Abbildung heißt m-Veronese-Varietät. Wir bezeichnen die projektiven Koordinaten eines Punktes $q = [y] \in \mathbb{P}^{\nu_{m,N}}$ mit

$$v_i(y),$$

Dabei durchlaufe i die m-zulässigen (N+1)-Tupel. Die i-te Koordinate des Bildes von p $= [x] \in \mathbb{P}^N$ bei der Veronese-Abbildung ist also gerade[42]

$$v_i(v(x)) = x^i.$$

Bemerkung

Ist $X = X(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche des Grades m,

$$F(S) = \sum_{i_0+\ldots+i_n=m} a_{i_0,\ldots,i_n} S_0^{i_0}\cdot\ldots\cdot S_n^{i_n},$$

so ist das Bild $v(X) \subseteq \mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$ von X bei der Veronese-Abbildung gerade der Durchschnitt

$$\mathrm{Im}(v) \cap H$$

des Bildes von v mit der Hyperebene

$$H: \sum_{i_0+\ldots+i_n=m} a_{i_0,\ldots,i_n} v_{i_0,\ldots,i_n} = 0 \text{ im } \mathbb{P}^{\nu_{n,m}}.$$

Diese Tatsache gestattet es, manche Fragen, die im Zusammenhang mit Hyperflächen auftreten, auf Fragen zu reduzieren, die sich auf Hyperebenen beziehen.

Die Gleichungen der Veronese-Varietät

(i) Die m-Veronese-Varietät ist eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{P}^{\nu_{m,N}}$.

(ii) Die m-Veronese-Abbildung ist ein Isomorphismus

$$v: \mathbb{P}^N \to v(\mathbb{P}^N).$$

(iii) Das Ideal $I(v(\mathbb{P}^N))$ der m-Veronese-Varietät wird von den Polynomen der Gestalt

$$v_{i_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot v_{i_r}^{\alpha_r} - v_{j_1}^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot v_{j_s}^{\beta_r} \text{ mit } \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu i_\nu = \sum_{\nu=1}^{r} \beta_\nu j_\nu \qquad (1)$$

erzeugt.

---

[42] Wir bezeichnen die affine Abbildung $\mathbb{A}^N \to \mathbb{A}^{\nu_{m,N}}$, $x \mapsto (x^i \mid i \text{ ist m-zulässig})$, ebenfalls mit v.

Beweis. Zu (i). Bezeichne $\mathfrak{a}$ das von den Gleichungen der Gestalt (1) erzeugte Ideal,

$$\mathfrak{a} := (v_{i_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot v_{i_r}^{\alpha_r} - v_{j_1}^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot v_{j_s}^{\beta_r} \mid \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu i_\nu = \sum_{\nu=1}^{r} \beta_\nu j_\nu) \subseteq k[S].$$

Jedes der Polynome (1) ist homogen:

$$(\sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu)\cdot m = \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu\cdot| i_\nu| = | \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu i_\nu | = | \sum_{\nu=1}^{r} \beta_\nu j_\nu| = \sum_{\nu=1}^{r} \beta_\nu\cdot|j_\nu| = (\sum_{\nu=1}^{r} \beta_\nu)\cdot m$$

d.h. $\mathfrak{a}$ ist ein homogenes Ideal von k[S]. Außerdem gilt

$$v(\mathbb{P}^N) \subseteq V(\mathfrak{a}),$$

denn für jeden Punkt $p=[x] \in \mathbb{P}^N$ gilt

$$v_{i_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot v_{i_r}^{\alpha_r}(v(x)) = v_{i_1}^{\alpha_1}(x)\cdot\ldots\cdot v_{i_r}^{\alpha_r}(x) = (x^{i_1})^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x^{i_r})^{\alpha_r} = x^{\sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu i_\nu}$$

und analog

$$v_{j_1}^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot v_{j_s}^{\beta_r}(v(x)) = x^{\sum_{\nu=1}^{s} \beta_\nu j_\nu} = x^{\sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu i_\nu} = v_{i_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot v_{i_r}^{\alpha_r}(x).$$

Sei jetzt umgekehrt

$$q = [y] \in \mathbb{P}^{v_{m,N}}$$

eine gemeinsame Nullstelle der Gleichungen (1). Es reicht zu zeigen, q liegt im Bild der m-Veronese-Abbildung. Nach Voraussetzung ist q für jedes m-zulässige

$$i = (i_0,\ldots,i_N)$$

Nullstelle der Gleichung[43]

$$v_i^m = (v_{me_0})^{i_0}\cdot\ldots\cdot(v_{me_N})^{i_N}.$$

Da mindestens eine projektive Koordinate von q ungleich Null ist, gibt es ein me_α mit

$$v_{me_\alpha}(y) \neq 0.$$

Wir betrachten den Punkt

$$p = [x] := [v_{(m-1)e_\alpha+e_0}(y) , \ldots , v_{(m-1)e_\alpha+e_N}(y)].$$

Es reicht zu zeigen,

$$v(p) = q.$$

Nach Definition von v und p hat v(p) die projektiven Koordinaten

$$\begin{aligned} v_i(v(x)) &= (v_{(m-1)e_\alpha+e_0}(y))^{i_0}\cdot\ldots\cdot(v_{(m-1)e_\alpha+e_N}(y))^{i_N} \\ &= (v_{me_\alpha}(y))^{m-1}\cdot v_i(y) \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil q nach Voraussetzung Nullstelle der Polynome (1) ist und weil gilt

---

[43] denn es gilt $m\cdot i = (mi_0,\ldots,mi_N) = i_0\cdot me_0 + \ldots + i_N\cdot me_N$.

$$i_0\cdot((m-1)e_\alpha+e_0)+\ldots+i_N\cdot((m-1)e_\alpha+e_N) = \sum_{\nu=0}^{N} i_\nu(m-1)e_\alpha + \sum_{\nu=0}^{N} i_\nu e_\nu$$
$$= (m-1)\cdot me_\alpha + i.$$

Mit anderen Worten, die projektiven Koordinaten von v(p) sind proportional zu denen von q, d.h. es gilt

$$v(p) = q.$$

<u>Zu (ii)</u>. Für je zwei Punkte

$$p' = [x'] \text{ und } p'' = [x'']$$

von $\mathbb{P}^N$ mit

$$v(p') = v(p'')$$

gibt es ein $c\in k^*$ mit

(2) $$x''^i = c\cdot x'^i \text{ für jedes m-zulässige } i.$$

Wir fixieren eine projektive Koordinate von p', welche ungleich Null ist, sage wir die α-te,

$$x'_\alpha \ne 0.$$

Wegen (2) ist dann auch die α-te Koordinate von p" ungleich Null,

$$x''_\alpha \ne 0.$$

Für jede beliebige Koordinate x''_β von p" gilt dann aber

$$x''_\beta\cdot(x''_\alpha)^{m-1} = c\cdot x'_\beta\cdot(x'_\alpha)^{m-1},$$

d.h. die projektiven Koordinaten von p' und p" sind proportional, d.h. es gilt p' = p". Wir haben damit gezeigt, die Abbildung

$$v: \mathbb{P}^N \to v(\mathbb{P}^N) \text{ ist bijektiv.}$$

Nach Definition ist sie regulär. Wir haben noch die Regularität der Umkehrabbildung zu zeigen. Wie wir im Beweis von (i) gesehen haben, ist in jedem Punkt von $v(\mathbb{P}^N)$ mindestens eine der Koordinaten v_{me_α} ungleich Null, d.h.

$$v(\mathbb{P}^N) \subseteq V(v_{me_0}) \cup \ldots \cup V(v_{me_N}).$$

Es reicht also zu zeigen, die Umkehrabbildung ist auf jeder der offenen Teilmengen

(3) $$v(\mathbb{P}^N)\cap V(v_{me_\alpha})$$

regulär. Auf (3) kennen wir aber auf Grund des Beweises von (i) die Umkehrabbildung. Es ist gerade die Abbildung

$$v(\mathbb{P}^N)\cap V(v_{me_\alpha}) \to \mathbb{P}^N,\ [y_i \mid i \text{ zulässig}] \mapsto [y_{(m-1)e_\alpha+e_0}, \ldots, y_{(m-1)e_\alpha+e_N}].$$

Dies ist eine reguläre Abbildung, denn die α-te Koordinatenfunktion

$$y_{(m-1)e_\alpha+e_\alpha} = v_{me_\alpha}$$

ist im Definitionsbereich von Null verschieden.

<u>Zu (iii)</u>. Wir haben bereits gesehen, das von den Polynomen der Gestalt (1) erzeugte Ideal

$$\mathfrak{a} := (v_{i_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot v_{i_r}^{\alpha_r} - v_{j_1}^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot v_{j_s}^{\beta_r} \mid \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu i_\nu = \sum_{\nu=1}^{r} \beta_\nu j_\nu) \subseteq k[S].$$

definiert das Bild der Veronese-Abbildung. Wir haben noch zu zeigen, jedes homogene Polynom

$$F(y) = \sum_{\iota_1,\dots,\iota_t \text{ zulässig}} c_{\gamma_{\iota_1},\dots,\gamma_{\iota_t}} \cdot y_{\iota_1}^{\gamma_{\iota_1}} \cdot \dots \cdot y_{\iota_t}^{\gamma_{\iota_t}} = \sum_{\gamma_{\underline{\iota}}} c_{\gamma_{\underline{\iota}}}\, y_{\underline{\iota}}^{\gamma_{\underline{\iota}}}$$

welches auf der Veronese-Varietät identisch Null ist, ist eine Linearkombination dieser Polynome. Sei F ein solches Polynom des Grades d, d.h. für jeden Summanden gilt

$$d = \sum \gamma_{\iota_\nu}.$$

Dann ist das homogene Polynom

$$F(v(x)) = \sum c_{\gamma_{\iota_1},\dots,\gamma_{\iota_t}} \cdot (x^{\iota_1})^{\gamma_{\iota_1}} \cdot \dots \cdot (x^{\iota_t})^{\gamma_{\iota_t}} = \sum c_{\gamma_{\iota_1},\dots,\gamma_{\iota_t}}\, x^{\sum_{\nu=1}^{t} \gamma_{\iota_\nu} \iota_\nu}$$

des Grades $m \cdot d$ identisch Null in x. Dann müssen aber alle Koeffizienten dieses Polynoms Null sein: für jedes $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{N}$ mit $|i| = md$ gilt

(*) $$\sum c_{\gamma_{\iota_1},\dots,\gamma_{\iota_t}} = 0$$

wobei die Summe über alle $\gamma_{\underline{\iota}} = (\gamma_{\iota_1},\dots,\gamma_{\iota_t})$ erstreckt werde mit

$$<\gamma_{\underline{\iota}}, \underline{\iota}> := \sum_{\nu=1}^{t} \gamma_{\iota_\nu} \iota_\nu = i.$$

Diese Bedingung zerlegt die Menge der Exponenten-Tupel $\gamma_{\iota_1},\dots,\gamma_{\iota_t}$ in paarweise disjunkte Klassen. Wir wählen jetzt aus jeder dieser Klassen ein Tupel, d.h. für jedes i bezeichne $\gamma(i) = (\gamma_{\iota_1}(i),\dots,\gamma_{\iota_t}(i))$ eines der Tupel $\gamma_{\underline{\iota}}$, welche dieser Bedingung genügen:

(4) $$\sum_{\nu=1}^{t} \gamma_{\iota_\nu} \iota_\nu = i = \sum_{\nu=1}^{t} \gamma_{\iota_\nu}(i) \cdot \iota_\nu.$$

Nach (*) ist die Summe der Koeffizienten Null, wenn man über eine Klasse summiert. Es gilt also

$$F(y) = \sum_{\gamma_{\underline{\iota}}} c_{\gamma_{\underline{\iota}}} \left(y_{\underline{\iota}}^{\gamma_{\underline{\iota}}} - y_{\underline{\iota}}^{\gamma(<\gamma_{\underline{\iota}}, \underline{\iota}>)}\right)$$

(die Summe der Koeffizienten $c_{\gamma_{\underline{\iota}}}$ mit ein und demselben $\gamma(<\gamma_{\underline{\iota}}, \underline{\iota}>)$ ist Null). Nun ist aber

$$y_{\underline{\iota}}^{\gamma_{\underline{\iota}}} - y_{\underline{\iota}}^{\gamma(<\gamma_{\underline{\iota}}, \underline{\iota}>)}$$

ein Polynom der Gestalt (1)[44], d.h. F ist eine Linearkombination von Polynomen der Gestalt (1).

QED.

---

[44] wegen (4).

Bemerkung

Das von den Polynomen der Gestalt (1) erzeugte Ideal $\mathfrak{a}$ wird sogar von den Polynomen der Gestalt

(5) $$v_i v_j - v_k v_\ell \text{ für alle } i,j,k,\ell \text{ mit } i+j = k+\ell.$$

erzeugt.

Zum **Beweis** bezeichnen wir das von den Polynomen der Gestalt (5) erzeugte Ideal mit

$$\mathfrak{b}.$$

Dann gilt

$$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}.$$

Wir haben zu zeigen, es gilt sogar das Gleicheitszeichen. Zum Beweis benötigen wir zunächst zwei Lemmata.

Lemma 1

Seien i und j zwei m-zulässige (N+1)-Tupel der Gestalt

$i = (i_0,..., i_s, i_{s+1}, ... , i_N)$ mit $i_s < m - i_0 - ... - i_{s-1}$

$j = (j_0,...,j_s, j_{s+1}, ... , j_N)$ mit $0 < j_s$

(d.h. i_s ist nicht maximal und j_s ist nicht minimal). Dann gibt es ein Polynom

$$v_i v_j - v_\ell v_p$$

der Gestalt (5) mit

$\ell = (i_0,...,i_{s-1},i_s+1,*,...,*)$

$p = (j_0,...,j_{s-1}, j_s-1, *,...,*)$.

Beweis. Weil i_s nicht maximal is, gibt es ein t mit s < t und

$0 < i_t$.

Weil j_s nicht minimal ist, gilt

$j_t \le m - j_s < m$.

Damit sind die beiden folgenden Tupel zulässig:

$\ell =$[45] $i + e_s - e_t$

$p =$[46] $j - e_s + e_t$

Dann ist aber $v_i v_j - v_\ell v_p$ von der Gestalt (1).

QED.

Lemma 2

Seien $i_1,...,i_n$ m-zulässige Tupel. Wir bezeichnen die Koordinaten von deren Summe mit $I_0,...,I_N$:

$$(I_0,...,I_N) = i_1+...+i_n.$$

Sei r so gewählt, daß gilt

$$I_0+...+I_{r-1} < m \text{ und } m \le I_0+...+I_r$$

---

[45] i_s kann vergößert werden wegen $i_s < m$ nach Voraussetzung. Nach Wahl von t kann i_t verkleinert werden.

[46] j_s kann verkleinert werden wegen $0 < j_s$ nach Voraussetzung. Nach Wahl von t kann j_t vergrößert werden.

(wir lassen den Fall $r = 0$ zu, in welchem die Summe links gleich 0 sei). Weiter definieren wir

$$
\begin{aligned}
j_0 &:= I_0 \\
&\ldots \\
j_{r-1} &:= I_{r-1} \\
j_r &:= m - I_0 - \ldots - I_{r-1}
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$j := (j_0, \ldots, j_r, 0, \ldots, 0)$$

ein m-zulässiges Tupel und es gibt m-zulässige Tupel $\iota_2,\ldots,\iota_n$ mit

(6) $\quad v_{i_1}\cdot\ldots\cdot v_{i_n} - v_j\cdot v_{\iota_2}\cdot\ldots\cdot v_{\iota_n} \in \mathfrak{b}.$

Beweis. Sei

$$s \le r$$

die größte ganze Zahl mit der Eigenschaft, daß es ein i_ν gibt, dessen s+1 erste Koordinaten mit denen von j übereinstimmen:

$$i_\nu = (j_0, \ldots, j_s, *, \ldots, *).$$

Wir lassen dabei den Fall $s = -1$ zu, in welchem sämtliche erste Koordinaten sämtlicher i von j_0 verschieden sind. Wir führen den Beweis durch absteigende Induktion nach s.

Induktionsanfang $s = r$. In diesem Fall ist die Summe der ersten s+1 Koordinaten von i_ν gleich m, d.h. die übrigen Koordinaten sind Null. Es gilt also

$$i_\nu = j,$$

d.h. j kommt unter den Tupeln i vor. Wir können als Polynom (6) das Nullpolynom wählen.

Induktionsschritt $s < r$. Auf Grund der Gestalt von i_ν haben alle übrigen i_μ die Gestalt

$i_\mu = (0,\ldots,0, *, \ldots, *)$ (die ersten s+1 Koordinaten sind Null).

Wir bezeichnen die (s+2)-te Koordinate von i_ν mit α,

$$i_\nu = (j_0, \ldots, j_s, \alpha, *, \ldots, *).$$

Dann gilt

$\alpha \le$[47] I_{s+1} und $\alpha \le$[48] $m - j_0 - \ldots - j_s$.

also

$$\alpha \le \min(I_{s+1}, m - j_0 - \ldots - j_s).$$

Wir nehmen zunächst an, diese Ungleichung ist echt,

(7) $\quad \alpha < \min(I_{s+1}, m - j_0 - \ldots - j_s).$

Nach Definition von I_{s+1} gibt es dann ein i_μ ($\mu\ne\nu$), dessen (s+1)-te Koordinate β positiv ist,

$$i_\mu = (0, \ldots, 0, \beta, *, \ldots, *) \text{ mit } 0 < \beta.$$

Wegen (7) gilt $\alpha < m - j_0 - \ldots - j_s \le m$, d.h. die Tupel i_ν und i_μ genügen den Bedingungen von Lemma 1:

$$\alpha < m - j_0 - \ldots - j_s \text{ und } 0 < \beta.$$

---

[47] das gilt nach Definiton von I_{s+1}.

[48] das gilt wegen der Zulässigkeit von i_ν.

Deshalb gibt es zulässige Tupel $\mathfrak{l}$ und p der Gestalt

$$\mathfrak{l} = (j_0, \dots , j_s ,\alpha+1 , * , \dots , *)$$

$$p = (0, \dots , 0 ,\beta-1 , * , \dots , *)$$

derart, daß das Polynom

$$v_{i_\nu} v_{i_\mu} - v_{\mathfrak{l}} v_p$$

von der Gestalt (5) ist, also im Ideal $\mathfrak{b}$ liegt. Wir können das uns interessierende Produkt

$$v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_n}$$

modulo $\mathfrak{b}$ abändern indem wir v_{i_ν} und v_{i_μ} durch $v_{\mathfrak{l}}$ und v_p ersetzen. Mit anderen Worten, wir können die (s+2)-te Koordinate α von i_ν vergrößern. Das können wir solange tun, solange Bedingung (7) erfüllt ist. Das bedeutet aber, der Beweis der Behauptung ist damit auf den Fall mit

(8) $\quad \alpha = \min(I_{s+1} , m - j_0 - \dots - j_s).$

reduziert. Genauer: es reicht zu zeigen, bei der oben beschriebenen Reduktion auf den Fall (8) kommt es stets zu einer Vergrößerung der Zahl s, d.h wir erreichen eine Situation, in welcher die Behauptung auf Grund der Induktionsvoraussetzung folgt.

Im weiteren Beweis unterscheiden wir zwei Spezialfälle.

<u>1. Fall</u>: $\alpha = m - j_0 - \dots - j_s$ $\quad$ (also $\alpha \le I_{s+1}$).

In dieser Situation sind alle Koordinaten von i_ν , die auf die Koordinate α folgen, gleich Null,

$$i_\nu = (j_0, \dots , j_s ,\alpha , 0 , \dots , 0)$$

und es ist

$$I_0+\dots+I_{s+1} = j_0+\dots+j_s+I_{s+1} \ge j_0+\dots+j_s + \alpha = m$$

Nach Definition von r gilt damit $r \le s$. Da s stets $\le$ r sein sollte, haben wir damit den Beweis der Behauptung auf den Induktionsanfang s = r zurückgeführt.

<u>2. Fall</u>: $\alpha = I_{s+1} < m - j_0 - \dots - j_s$.

Wir können außerdem annehmen, s < r (da der Fall s = r bereits behandelt wurde).Es gilt dann

$$I_0 - \dots - I_{s+1} < m$$

also nach Definition von r,

$$s < s+1 \le r-1,$$

also

$$j_{s+1} = I_{s+1} = \alpha,$$

d.h. wir haben den Beweis der Behauptung auf den Fall mit

$$i_\nu = (j_0, \dots , j_s , j_{s+1} , * , \dots , *)$$

zurückgeführt, d.h. auf den Fall mit einem um 1 vergrößerten s. Die Behauptung gilt somit nach Induktionsvoraussetzung.

QED.

Beweis der Bemerkung.

Wir haben zu zeigen, jedes Polynom der Gestalt

$$v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_n} - v_{\mathfrak{l}_1} \cdot v_{\mathfrak{l}_2} \cdot \dots \cdot v_{\mathfrak{l}_n} \quad \text{mit} \sum_{\gamma=1}^{n} i_\gamma = \sum_{\gamma=1}^{n} \mathfrak{l}_\gamma$$

liegt im Ideal $\mathfrak{b}$. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Der Fall n = 1 ist trivial, denn dann gilt $i_1 = \iota_1$ und das betrachtete Polynom ist das Nullpolynom. Sei jetzt n > 1. Nach Lemma 2 kann man die beiden Produkte

$$v_{i_1}\cdot\ldots\cdot v_{i_n} \text{ und } v_{\iota_1}\cdot v_{\iota_2}\cdot\ldots\cdot v_{\iota_n}$$

modulo $\mathfrak{b}$ so abändern, das beide den im Lemma beschriebenen gemeinsamen Faktor v_j besitzen. O.B.d.A. sei

$$i_n = \iota_n = j.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es dann aber, wenn wir zeigen

$$v_{i_1}\cdot\ldots\cdot v_{i_{n-1}} - v_{\iota_1}\cdot v_{\iota_2}\cdot\ldots\cdot v_{\iota_{n-1}} \in \mathfrak{b}.$$

Das ist aber der Fall nach Induktionsvoraussetzung.
QED.

2.3 Rationale Funktionen und Abbildungen

2.3.1 Rationale Funktionen

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine irreduzible quasi-projektive Varieät.
Bezeichnungen:

$\mathcal{O}_X$:=[49] $\{\frac{P}{Q} \mid P,Q\in k[S]$ homogen vom selben Grad, $Q\notin I(X)\}$

$M_X := \{\frac{P}{Q}\in\mathcal{O}_X \mid P\in I(X)\}$.

Es ist leicht zu sehen, daß $\mathcal{O}_X$ ein Ring ist. Nach Konstruktion ist jedes Element von $\mathcal{O}_X$, das nicht in M_X liegt, eine Einheit, d.h. M_X ist maximales Ideal von $\mathcal{O}_X$ (das einzige), und

k(X) :=[50] $\mathcal{O}_X/M_X$

ein Körper. Er heißt Körper der rationalen Funktionen von X.

Bemerkungen

(i) Da X irreduzibel ist, haben je zwei nicht-leere offene Mengen von X einen nicht-leeren Durchschnitt. Das hat zur Folge, daß zwei rationale Funktionen auf X genau dann gleich sind, wenn sie auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge gleich sind. Deshalb gilt

$$k(X) = k(U) \text{ für } U \subseteq X \text{ nicht-leer und offen.}$$[51]

(ii) Aus (i) ergibt sich,

$$k(X) = k(\bar{X}),$$

wenn $\bar{X}$ die Abschließung von X im projektiven Raum bezeichnet.

---

[49] Dies ist der lokale Ring des $\mathbb{P}^N$ im allgemeinen Punkt X. Er besteht aus den rationalen Funktionen $\frac{P}{Q}$ auf dem $\mathbb{P}^N$, deren Nenner Q nicht identisch Null ist auf X.

[50] Zwei Quotienten $\frac{P}{Q}$ werden als gleich angesehen, wenn sie sich um einen Quotienen unterscheiden, deren Nenner auf X identisch Null ist.

[51] formales Argument: es gilt $I(X) = I(\bar{X})$, also $I(X) = I(U)$ falls $\bar{X} = \bar{U}$, also $k(X) = k(U)$ falls $\bar{X} = \bar{U}$.

(iii) Für affine Varietäten stimmt die hier gegebene Defintion mit der ursprünglichen überein.

(iv) Eine rationale Funktion $f \in k(X)$ heißt <u>regulär</u> im Punkt $x \in X$, wenn es homogene Polynome P,Q desselben Grades gibt mit

$$f = \frac{P}{Q} \text{ in } k(X) \text{ und } Q(x) \neq 0.$$

In dieser Situation heißt $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ Wert von f in x. Die Menge der Punkte, in denen f regulär ist, wird mit

$$\mathrm{Def}(f)$$

bezeichnet und heißt Definitionsbereich von f.

(v) Eine rationale Funktion auf X kann man auch definieren als eine Funktion, die regulär auf einer offen Teilmenge von X ist.

2.3.2 Rationale Abbildungen mit Werten im $\mathbb{P}^N$

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^M$ eine irreduzible quasi-projektive Varietät. Eine rationale Abbildung

$$f: X \to \mathbb{P}^N$$

ist gegeben durch ein (n+1)-Tupel

$$(F_0,\ldots,F_n)$$

von homogenen Polynomen gleichen Grades, wobei wenigstens ein F_i nicht identisch Null ist auf X. Zwei solche (n+1)-Tupel $(F_0,\ldots,F_n)$ und $(F'_0,\ldots,F'_n)$ definieren dabei dieselbe rationale Abbildung, wenn

$$F_iF'_j - F_jF'_i = 0 \text{ auf } X$$

gilt für alle i und j.

Indem man durch eines der F_i teilt, welches nicht identisch Null ist, kann man eine rationale Abbildung auch durch Angabe von n+1 rationalen Funktionen auf X definieren. Sind diese Koordinatenfunktionen sämtlich in einem Punkt regulär, so sagt man die rationale Abbildung sei <u>regulär</u> in diesem Punkt.

Die Menge der Punkte, in denen eine rationale Abbildung f regulär ist, ist nicht-leer und offen. Sie wird mit

$$\mathrm{Def}(f)$$

bezeichnet. Weiter heißt

$$\mathrm{Im}\, f := f(\mathrm{Def}(f))$$

<u>Bild</u> von f.

Bemerkung

Man kann eine rationale Abbildung auch definieren als reguläre Abbildung auf einer offenen Teilmenge.

2.3.3 Allgemeine rationale Abbildungen

Seien X und $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ irreduzible quasi-projektive Varietäten. Eine rationale Abbildung

$$f: X \to Y$$

ist dann eine rationale Abbildung $f: X \to \mathbb{P}^n$ mit $\mathrm{Im}(f) \subseteq Y$. Die Komposition rationaler Abbildungen wird in der naheliegenden Weise definiert.

Bemerkungen

(i) Jede <u>dominante</u> rationale Abbildung $f: X \to Y$ (d.h. $\overline{f(X)} = Y$) induziert einen k-Homomorphismus

$$f^*: k(Y) \to k(X)$$

mit den üblichen Eigenschaften, d.h. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ und $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$.

(ii) Eine rationale Abbildung mit einer (rationalen) Inversen, heißt birationaler Isomorphismus. Falls ein solcher existiert, so heißen die beteiligten Varietäten birational isomorph.

(iii) Zwei quasi-projektive Varietäten X und Y sind genau dann birational isomorph, wenn $k(X) \cong k(Y)$ über k gilt.

2.3.4 Isomorphie und birationale Isomorphie

Zwei irreduzible quasi-projektive Varietäten X,Y sind genau dann birational isomorph, wenn es isomorphe nicht-leere offene Teilmengen

$$U \subseteq X , V \subseteq Y$$

gibt.

Beweis.Falls isomorphe offene Teilmengen $U\subseteq X$ und $V\subseteq Y$ existieren, so gilt

$$k(X) = k(U) \cong k(V) = k(Y),$$

d.h. X und Y sind birational isomorph. Existiere jetzt umgekehrt ein birationaler Isomorphismus

$$f: X \dashrightarrow Y$$

und sei

$$g: Y \dashrightarrow X$$

dessen Umkehrung. Weiter seien

$U' := Def(f)$
$V' := Def(g)$

die Definitionsbereiche von f bzw. g. Nach Voraussetzung ist die Verpflanzungsabbildung $g^*\circ f^*$ die identische Abbildung, d.h.

$$f^*: k[Y] \to k(X)$$

ist injektiv[52]. Das bedeutet, $Im(f) \subseteq Y$ liegt dicht in Y. Insbesondere ist $Im(f)\cap V'$ nicht leer. Dann ist aber[53]

$U:=f^{-1}(V')\cap U'$

eine nicht-leere offene Teilmenge von X. Analog ist

$V:=g^{-1}(U')\cap V'$

nicht-leer und offen in Y. Nach Konstruktion gilt

$f(U) \subseteq V'$ und $g(f(U)) =$[54] U, d.h. $f(U) \subseteq g^{-1}(U) \subseteq g^{-1}(U')$.

Zusamen ergibt sich

$f(U) \subseteq V$.

Analog folgt

$g(V) \subseteq U$.

Nach Voraussetzung sind die Einschränkung $f: U \to V$ und $g: V\to U$ invers zueinander (und nach Konstruktion reguläre Funktionen).

QED.

2.3.5 Beispiel: Projektionen aus einem linearen Unterraum

Seien $L_1,...,L_{N-d}\in k[S]$ homogene Polynome des Grades 1, welche über k linear unabhängig sind. Dann ist

$$E := V(L_1,...,L_{N-d}) \subseteq \mathbb{P}^N$$

ein linearer Unterraum der Dimension d. Die nachfolgende rationale Abbildung heißt Projektion mit dem Zentrum E,

$$\pi: \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-d-1}, x \mapsto [L_1(x),...,L_{N-d}(x)].$$

---

[52] Das Einsetzen der Kooridnatenfunktionen von $f\circ g$ in reguläre Funktionen kann man in zwei Schritten ausführen. Erhält man beim ersten Schritt Null, ist auch das Endergebnis Null.

[53] Wir betrachten hier f als reguläre Abbildung $Def(f) \to Y$ und g als reguläre Abbildung $Def(g) \to X$.

[54] f ist auf ganz U definiert und g auf $f(U) \subseteq V'$.

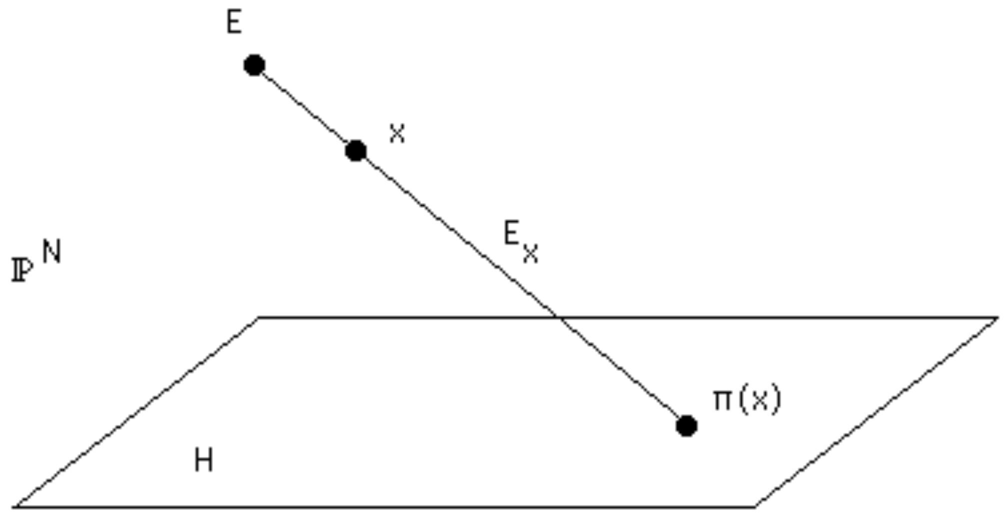
Diese Abbildung ist auf $\mathbb{P}^N$ - E regulär. Für jede abgeschlossene Menge

$$X \subseteq \mathbb{P}^N - E$$

des projektiven Raumes, die sich mit E nicht schneidet, induziert π eine reguläre Abbildung

$$\pi: X \to \mathbb{P}^{N-d-1}.$$

Diese Abbildung läßt sich wie folgt geometrisch interpredieren.



Wir wählen als Model[55] für den Bildraum $\mathbb{P}^{N-d-1}$ einen beliebigen linearen Unterraum H des $\mathbb{P}^N$ der Dimension n-d-1, der sich mit E nicht schneidet,[56]

$$H \subseteq \mathbb{P}^N, H \cap E = \emptyset, \dim H = N-d-1.$$

Zu jedem Punkt $x \in \mathbb{P}^{N-d-1}$ - E gibt es dann genau einen linearen Unterraum E_x der Dimension d+1, in welchem x und E enthalten sind,

$$E \subseteq E_x, x \in E_x, \dim E_x = \dim E + 1.$$

Dieser Unterraum E_x schneidet H in genau einem Punkt[57]. Dieser Punkt ist gerade $\pi(x)$,

$$E_x \cap H =^{58} \{\pi(x)\}.$$

---

[55] d.h. wir identifizieren $\mathbb{P}^{N-d-1}$ mit einem solchen Unterraum H.

[56] Seien $L_{N-d+1},...,L_{N+1}$ lineare Gleichungen mit der Eigenschaft, daß

$$L_1,...,L_{N+1}$$

linear unabhängig sind. Dann ist

$$H := V(L_{n-d+1},...,L_{N+1})$$

von der gesuchten Gestalt, denn das lineare homogene Gleichungssystem

$$L_1=...=L_{N+1} = 0$$

hat nur die triviale Lösung.

[57] Bei geeigneter Wahl der $L_1,...,L_{N-d}$ erhält man die Gleichungen von E_x, indem man die letzte Gleichung wegläßt. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$L_1 = ... = L_{N-d-1} = L_{N-d+1} = ... = L_{N+1} = 0$$

ist dann eine Gerade, d.h. $E_x \cap H$ ist ein Punkt im projektiven Raum.

[58] Durch geeignete Wahl der Koordinaten im $\mathbb{P}^N$ erreicht man

Wenn X gemeinsame Punkte mit E hat, aber nicht ganz in E liegt, so ist π eine rationale Abbildung. Dem Fall d = 0, der Projektion aus einem Punkt, sind wir schon verschiedentlich begegnet.

2.4 Produkte quasi-projektiver Varietäten

Die Definition des Produkts affiner Varietäten war so naheliegend, daß sie keine weiteren Kommentare erforderte. Für beliebige quasi-projektive Varietäten ist die Situation komplizierter. Deshalb betrachten wir zunächst quasi-projektive Teilvarietäten im affinen Räum.

2.4.1 Produkte von Teilvarietäten des $\mathbb{A}^n$

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^m$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ quasi-projektive Teilvarietäten. Dann gilt:

(i) Das direkte Produkt
$$X\times Y = \{(x,y) \mid x\in X, y\in Y\}$$
ist quasi-projektiv in $\mathbb{A}^m\times\mathbb{A}^n$.

(ii) Die in (i) definierte Struktur einer quasi-projektiven Varietät ist invariant gegenüber Isomorphismen, d.h. sind $\varphi: X \to \tilde{X}$ und $\psi: Y \to \tilde{Y}$ Isomorphismen quasi-projektiver Varietäten, so ist auch
$\varphi\times\psi: X\times Y \to \tilde{X}\times\tilde{Y}$ ein Isomorphismus.

Beweis. Zu (i). Wir schreiben X = X'-X" und Y = Y'-Y" mit abgeschlossenen Teilmengen
$$X', X'' \subseteq \mathbb{A}^m \text{ und } Y',Y'' \subseteq \mathbb{A}^n.$$
Damit ist aber
$$X\times Y = X'\times Y' - (X'\times Y'' \cup X''\times Y'),$$
also quasi-projektiv.
Zu (ii). Offensichtlich ist $\varphi\times\psi$ eine reguläre Abbildung. Dasselbe gilt für die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\times\psi^{-1}$.
QED.

$$L_i(x) = x_i \text{ für jedes } i,$$

d.h.

$$E: x_1 = ... = x_{N-d} = 0$$
$$H: x_{N-d+1} = ... = x_{N+1} = 0$$

und

$$\pi(a_1,...,a_{N+1}) = (a_1 , ... , a_{N-d}) = (a_1 , ... , a_{N-d} , 0,...,0)$$

Das Gleichheitszeichen rechts beschreibt die Identfikation des $\mathbb{P}^{N-d-1}$ mit dem Unterraum H, die man durch Abänderung um einen Automorphismus des $\mathbb{P}^{N-d-1}$ in der angegebenen Weise einreichten kann. Für jeden Punkt $p = [x] = [a_1,...,a_{N+1}] \in \mathbb{P}^N$ - E hat man

$$E_x = \mathbb{P}(\lambda x + \lambda_{N-d+1}e_{N-d+1}+...+\lambda_{N+1}e_{N+1} \mid \lambda_i\in k)$$

also

$$E_x\cap H = \{[a_1,...,a_{N-d} , 0,...,0]\} = \{\pi(p)\}$$

2.4.2 Verträglickkeit mit der affinen Definition

Seien $X\subseteq\mathbb{P}^m$ und $Y\subseteq\mathbb{P}^n$ quasi-projektive Varietäten. Und bezeichne $X\times Y$ wie üblich die Menge der Paare

$$X\times Y = \{(x,y) \mid x\in X, y\in Y\}.$$

Wir wollen $X\times Y$ mit der Struktur einer quasi-projektiven Varietät versehen. Dazu genügt es, eine injektive Abbildung

$$\varphi: X\times Y \to \mathbb{P}^N,$$

zu finden, deren Bild eine quasi-projektive Teilvarität ist. Die Struktur dieser Teilvarietät des $\mathbb{P}^N$ läßt sich dann auf die Menge $X\times Y$ übertragen, indem man die Menge $X\times Y$ mit derem Bild bei φ identifiziert, d.h. $X\times Y$ bekommt so die Struktur einer Varität.

Wir wollen dabei fordern, daß die so gewonnene Struktur einer quasi-projektiven Varietät im folgenden Sinne mit der im affinen Fall bereits definierten Struktur verträglich ist:

Für je zwei Punkte $x\in X$ und $y\in Y$ sollen affine Umgebungen U und V existieren,

$$x \in U \subseteq X \text{ und } y \in V \subseteq Y,$$

mit der Eigenschaft, daß

$$\varphi(U\times V) \subset \varphi(X\times Y)$$

eine offene Teilmenge ist und die Einschränkung von φ ein Isomorphismus

$$U\times V \to \varphi(U\times V)$$

von quasi-projektiven Varietäten.

<u>Behauptung</u>: Durch diese Forderung der Lokalität ist das direkte Produkt bereits, falls es existiert, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei

$$\psi: X\times Y \to \mathbb{P}^M$$

eine weitere Einbettung mit der geforderten Eigenschaft. Wir haben zu zeigen, daß dann die Zusammensetzung

$$\varphi\circ\psi^{-1}: \psi(X\times Y) \to \varphi(X\times Y)$$

ein Isomorphismus quasi-projektiver Varietäten ist.
Nach Konstruktion ist diese Abbildung bijektiv. Es reicht also zu zeigen, die Abbildung und ihre Umkehrung sind regulär. Aus Symmetrie-Gründen reicht es, die Regularität der Abbildung selbst zu beweisen. Nun ist die Regularität eine lokale Eigenschaft, d.h. es reicht, eine offene Überdeckung des Definitionsbereichs zu finden, so daß die Abbildung auf jeder offenen Menge der Überdeckung regulär ist. Sei also

$$z \in \psi(X\times Y)$$

ein vorgegebener Punkt,

$$z = \psi(x,y) \text{ mit } x\in X \text{ und } y\in Y.$$

Nach Voraussetzung gibt es affine offene Umgebungen

$U\subseteq X$ von x
$V \subseteq Y$ von y

derart, daß ψ einen Isomorphismus von $U\times V$ mit einer offenen Umgebung $\psi(U\times V)$ von z induziert,

(1) $$\psi: U\times V \xrightarrow{\cong} \psi(U\times V) = \text{offene Umgebung von } z \text{ in } \psi(X\times Y).$$

Diese Situation bleibt erhalten, wenn wir U und V zum Beispiel durch offene Hauptmengen, die x bzw. y enthalten, ersetzen.[59] Das bedeutet, wir können erreichen, daß auch φ einen Isomorphismus

(2) $$\varphi: U\times V \xrightarrow{\cong} \varphi(U\times V) = \text{Umgebung von } \varphi(\psi^{-1}(z)) \text{ in } \varphi(X\times Y)$$

---

[59] Weil Isomorphismen offene Teilmengen in offene Teilmengen abbilden.

von affinen Varietäten induziert. Dann ist aber auch die Zusammensetzung der Inversen von (1) mit (2) ein Isomorphismus und insbesondere regulär im Punkt z.
QED.

2.4.3 Vorbemerkung zur Konstruktion der Abbildung φ

Es reicht, die Abbildung φ für den Fall $X = \mathbb{P}^m$ und $Y = \mathbb{P}^n$ zu konstruieren. Hat nämlich

$$\varphi: \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$$

die geforderten Eigenschaften und sind $X \subseteq \mathbb{P}^m$ und $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ quasi-projektive Teilvarietäten, so hat die Einschränkung von φ auf die Teilmenge $X \times Y$ ebenfalls diese Eigenschaften.
Beweis. Man benutze die Tatsache, daß die Einschränkung eines Isomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge regulär ist, als Bild eine abgeschlossene Teilmenge besitzt und einen Isomorphismus mit dieser Teilmenge induziert.
QED.

2.4.4 Konstruktion der Abbildung φ im Fall von projektiven Räumen

Wir betrachten den projektiven Raum

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$$

und führen für dessen projektive Koordinaten die folgenden Bezeichnungen ein:

$$w_{ij}\ , i = 0,...,m, j = 0,...,n.$$

Sei φ die folgende Abbildung

$$\varphi: \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}, ([x],[y]) \mapsto [...,x_i y_j , ...],$$

d.h. der Bildpunkt $p := \varphi([x], [y])$ soll die folgenden projektiven Koordinaten haben:

$$w_{ij}(p) := x_i y_j$$

<u>Die Abbildung φ ist wohldefiniert</u>.
Wegen $[x] \in \mathbb{P}^m$ ist eine projektive Koordinate von [x] ungleich Null, sagen wir $x_{i_0} \neq 0$.
Wegen $[y] \in \mathbb{P}^n$ ist eine projektive Koordinate von [y] ungleich Null, sagen wir $y_{j_0} \neq 0$.
Dann ist aber die projektive Koordinate $w_{i_0 j_0}(p) := x_{i_0} y_{j_0}$ des Bildpunktes p ebenfalls ungleich Null.
<u>Die Abbildung φ ist injektiv</u>. Aus $\varphi([x], [y]) = \varphi([x'], [y'])$ folgt

$$x_i y_j =^{60} x'_i y'_j \text{ für alle i und alle j.}$$

Mit i_0 und j_0 wie oben folgt

$$x_i = x'_i \cdot (y'_{j_0} / y_{j_0}) \text{ und } y_j = y'_j \cdot (x'_{i_0} / x_{i_0}).$$

Mit anderen Worten die Koordinaten von x und x' sind proportional, d.h. [x] = [x']. Analog folgt [y] = [y'].

$\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{P}$ <u>ist abgeschlossen</u>.

Nach Konstruktion bestehen zwischen den Koordinaten der Bildpunkte von φ die folgenden Relationen.

[60] Genaugenommen besteht nur Proportionalität. Wir können jedoch die projektiven Koordinaten eines der beteiligten Punkte geeignet mit einem Faktor multiplizieren.

(1) $$w_{ij}\cdot w_{kl} - w_{kj}\cdot w_{il} = 0.$$
Es reicht zu zeigen, diese Relationen definieren die Menge $\mathrm{Im}(\varphi)$. Sei also
$$p = [..., w_{ij}, ...] \in \mathbb{P}$$
ein Punkt, dessen Koordinaten diesen Relationen genügen. Mindestens eine Koordinate von p ist ungleich Null. O.B.d.A. sei[61]
$$w_{00} \neq 0.$$
Wir setzen

$u := [w_{00},...,w_{m0}]$

$v := [w_{00},...,w_{0n}]$

$q := \varphi(u, v)$.

Dann gilt

$w_{ij}(q) = w_{i0}\cdot w_{0j} = w_{00}\cdot w_{ij}$ wegen (1)

$= w_{00}\cdot w_{ij}$.

Mit anderen Worten p und q haben proportionale Koordinaten, d.h. $p = q = \varphi(u, v)$. Wir haben gezeigt

$\mathrm{Im}(\varphi) = V(w_{ij}\cdot w_{kl} - w_{kj}\cdot w_{il} \mid i,k = 0,...,m,\ j,l = 0,...,n)$,

d.h. $\mathrm{Im}(\varphi)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{P}$.

Es gibt eine Überdeckung des $\mathbb{P}^m$ durch affine offene Mengen U_i und eine Überdeckung des $\mathbb{P}^n$ durch affine offene Mengen V_j derart, daß für beliebige i und j die Abbildung φ Isomorphismen $U_i\times V_j \to \varphi(U_i\times V_j)$ $(\subseteq \mathbb{P})$ mit offenen Teilmengen von $\mathrm{Im}(\varphi)$ induziert.

Wir setzen

$U_i := D(S_i)$ für $i = 0,...,m$.

$V_j := D(S_j)$ für $j = 0,...,n$

Dann gilt

$\varphi(U_i\times V_j) = \mathrm{Im}(\varphi)\cap D(w_{ij})$.

Dies ist eine offene Teilmenge von $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Indentifiziert man $D(w_{ij})$ in der üblichen Weise mit dem affinen Raum $\mathbb{A} := \mathbb{A}^{(m+1)(n+1)-1}$ (indem man $w_{ij} = 1$ setzt), so bekommt die Menge rechts die Gestalt

$\varphi(U_i\times V_j) = \mathrm{Im}(\varphi)\cap D(w_{ij}) = V(w_{kl} - w_{kj}\cdot w_{il}) \subseteq \mathbb{A}$

Man beachte auf dieser Teilmenge von $\mathbb{A}$ gilt
$$w_{kl} = w_{kj}\cdot w_{il}, .$$
Insbesondere ist jeder Punkt bereits durch die Koordinaten
$$w_{0j}, w_{1j},...,w_{mj} \text{ und } w_{i0}, w_{i1},...,w_{in}$$
festgelegt. Die reguläre Abbildung

---

[61] Allgemein hat man nur $w_{ij} \neq 0$ für ein (i,j). Durch Permutieren der Koordinaten in den Ausgangsräumen $\mathbb{P}^m$ und $\mathbb{P}^n$ und entsprechendes Umbenennen der Koordinaten von $\mathbb{P}$ erreicht man jedoch leicht, daß $i = j = 0$ gilt.

$$\varphi(U_i\times V_j) = V(w_{k\ell} - w_{kj}\cdot w_{i\ell}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^m\times\mathbb{A}^n,\ (w_{k\ell}) \mapsto ((w_{0j},...,w_{mj}), (w_{i0},...,w_{in})),$$

ist ein Isomorphismus. Die Zusammensetzung von $\varphi|_{U_i\times V_j}$ mit diesem Isomorphismus ist gerade die Abbildung

$$\varphi : U_i\times V_j \to \mathbb{A}^m\times\mathbb{A}^n$$

mit der Eigenschaft, daß für $p = \varphi(x,y)$ gilt:

$$w_{kj}(p) = x_k\cdot y_j = x_k\cdot 1 = x_k$$
$$w_{i\ell}(p) = x_i\cdot y_\ell = 1\cdot y_\ell = y_\ell$$

d.h. es ist $\varphi(x,y) = (x,y)$. Dies ist offensichtlich ein Isomorphismus. Die oben konstruierte Abbildung φ hat damit alle erforderlichen Eigenschaften.

QED.

2.4.5 Bemerkung 1 (Interpretation der Gleichungen von Im(φ))

Die Koordinaten der Punkte des Raumes $\mathbb{P}$ bilden eine $(m+1)\times(n+1)$-Matrix

$$w = (w_{ij})_{\substack{i=0,...,m\\ j=0,...,n}}$$

Die Gleichungen des Bildes $\mathrm{Im}(\varphi)$ kann man in der Gestalt

$$\begin{vmatrix} w_{ij} & w_{i\ell} \\ w_{kj} & w_{k\ell} \end{vmatrix} = 0$$

schreiben. Sie bedeuten gerade, die Matrix hat den Rang 1,

$$\mathrm{rk}\,(w_{ij}) = 1.$$

Die Definition der Abbildung φ besagt aber gerade, die Matrix (w_{ij}) ist das Produkt aus einer Spalte und einer Zeile.

$$w \in \mathrm{Im}(\varphi) \Leftrightarrow w = \begin{pmatrix} x_0 \\ ... \\ x_m \end{pmatrix}(y_0, ... , y_n).$$

Insbesondere sehen wir, eine Matrix ist genau dann vom Rang 1, wenn sie in der angegebenen Weise als Produkt geschrieben werden kann.

2.4.6 Bemerkung 2 (Direktes Produkt zweier projektiver Geraden)

Betrachten wir den Fall $m = n = 1$,

$$\varphi: \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^3,\ ([u,v],[s,t]) \mapsto [\overset{x}{us},\overset{y}{ut},\overset{z}{vs},\overset{w}{vt}].$$

Das Bild von φ ist durch nur eine Gleichung definiert.

Bezeichnen wir mit x,y,z,w die Koordinaten im $\mathbb{P}^3$. Dann ist das Bild von φ durch die einzige Gleichung

$$X := \mathrm{Im}\,(\varphi): xw - yz = 0$$

definiert, d.h. X ist eine nicht-entartete Fläche zweiter Ordnung im $\mathbb{P}^3$. Die Geraden der Gestalt

$$\{p\}\times\mathbb{P}^1,\quad p = [u_0,v_0]$$

gehen bei φ wieder in Geraden über mit den Gleichungen

$$x:z = u_0:v_0 = y:w$$

d.h.

$xv_0 = zu_0$, $yv_0 = wu_0$.

Es gibt also auf X eine Familie von paarweise disjunkten Geraden, die die Fläche füllen und von dem stetigen Parameter $p = [u_0,v_0] \in \mathbb{P}^1$ abhängen. Eine solche Fläche heißt[62] Regelfläche.

Analog gehen die Gerade der Gestalt

$$\mathbb{P}^1\times\{q\}, \quad q = [s_0,t_0]$$

in eine zweite Familie von paarweise disjunkten Geraden auf der Fläche über. Jede Gerade der einen Familie scheidet die Gerade der anderen in genau einem Punkt.

2.4.7 Die abgeschlossenen Mengen im $\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n$

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n$ eine beliebige Teilmenge. Dann sind äquivalent:

(i) X ist abgeschlossen.

(ii) X ist in $\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n$ definiert durch ein System von Gleichungen der Gestalt

$$G_i(u_0,...,u_m;v_0,...,v_n) = 0 \qquad (i=1,...,t),$$

wobei die $G_i\in k[u,v]$ homogen sind sowohl als Polynome in den u_i als auch als Polynome in den v_j allein.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Nach Voraussetzung gilt

$$\varphi(X) = V(F_1,...,F_t)$$

mit homogenen Polynomen $F_i\in k[w]$. Damit ist aber

$$X = \{(u,v)\in\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n \mid F_i(\varphi(u,v)) = 0 \text{ für } i=1,...,t\}$$
$$= V(F_1\circ\varphi,...,F_t\circ\varphi)$$

Nun entsteht aber $F_i\circ\varphi$ aus F_i indem man für die w_{ij} die Produkte u_iv_j einsetzt. Das bedeutet aber, $F_i\circ\varphi$ ist homogen sowohl in den u_i als auch in den v_j (vom selben Grad).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Da die Abgeschlossenheit eine lokale Eigenschaft ist, reicht es zu zeigen,

$$\varphi(X)\cap D(w_{ij}) \text{ ist abgeschlossen in } D(w_{ij})$$

für beliebige i und j. Wegen $w_{ij} = u_i\cdot v_j$ gilt aber

$$\varphi(X)\cap D(w_{ij}) = \varphi(X\cap(D(u_i)\times D(v_j)))$$

Auf den Teilmengen $D(u_i)\times D(v_j) \subseteq \mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n$ können wir aber die Gleichungen von X mit u_i oder v_j multiplizieren, ohne daß sich deren Nullstellenmenge ändert.

Deshalb können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, die Gleichungen von X haben bzgl. der u und der v denselben Grad,

$$\deg_u G_i = \deg_v G_i .$$

Mit anderen Wort, die G_i sind k-Linearkombinationen von Potenzprodukten der Gestalt

$$u^\alpha v^\beta \text{ mit}^{63}\ |\alpha| = |\beta|,$$

oder noch anders ausgedrückt, die G_i sind Polynome in den Produkten u_iv_j ,

---

[62] Genauer, die Projektion auf den Parameter heißt Regelfläche,

$$X \to \mathbb{P}^1, [x,y,z,w] \mapsto [x,z].$$

[63] $|\alpha| = \alpha_0+...+\alpha_m$ für $\alpha = (\alpha_0,...,\alpha_m)$

$$G_i = F_i(\ldots,u_i v_j,\ldots).$$

Dann gilt aber

$$\varphi(X) = \{w\in \mathrm{Im}(\varphi) \mid F_i(w) = 0,\ i = 1,\ldots,t\},$$

d.h. die F_i definieren zusammen mit den Gleichungen von $\mathrm{Im}(\varphi)$ gerade die Menge $\varphi(X)$, d.h. X ist abgeschlossen.

QED.

2.4.8 Die abgeschlossenen Mengen im $\mathbb{P}^m\times\mathbb{A}^n$

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^m\times\mathbb{A}^n$ eine beliebige Teilmenge. Dann sind äquivalent:

(i) X ist abgeschlossen.

(ii) X ist in $\mathbb{P}^m\times\mathbb{A}^n$ gegeben durch Gleichungen der Gestalt

$$G_i(u_0,\ldots,u_m;v_1,\ldots,v_n) = 0 \qquad (i=1,\ldots,t),$$

wobei die $G_i\in k[u,v]$ homogen sind als Polynome in den u_i.

Beweis. Die Argumentation ist so ähnlich wie beim Beweis von (g).

QED.

2.5 Abgeschlossenheit des Bildes einer projektiven Varietät

2.5.1 Vorbemerkung

Das Bild einer affinen abgeschlossenen Menge bei einer regulären Abbildung braucht keine abgeschlossene Menge zu sein,

$$X \subseteq \mathbb{A}^m \text{ abgeschlossen, } f\colon \mathbb{A}^m\to\mathbb{A}^n \not\Rightarrow f(X) \subseteq \mathbb{A}^n \text{ abgeschlossen.}$$

Man betrachte zum Beispiel die Projektion der Hyperbel

$$V(xy - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$$

auf eine der Koordinatenachsen.

Wir zeigen jetzt, in dieser Beziehung unterscheiden sich die projektiven Varietäten grundsätzlich von den affinen.

2.5.2 Theorem: Abgeschlossenheit des Bildes einer projektiven Varietät

Das Bilde einer projektiven Varietät bei einer regulären Abbildung ist abgeschlossen.

Zum Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen.

2.5.3 Definition: der Graph einer Abbildung

Sei $f\colon X \to Y$ eine reguläre Abbildung von quasi-projektiven Varietäten. Dann heißt die Menge

$$\Gamma_f := \{(x,f(x)) \mid x\in X\}$$

Graph von f.

2.5.4 Abgeschlossenheit des Graphen

Der Graph einer regulären Abbildung $f\colon X\to Y$ ist abgeschlossen in $X\times Y$.

Beweis. 1. Schritt: Reduktion auf den Fall $Y = \mathbb{P}^n$.

Sei $Y \subseteq \mathbb{P}^n$. Dann gilt

$$X\times Y \subseteq X\times\mathbb{P}^n$$

und f definiert eine Abbildung $\bar f\colon X \to \mathbb{P}^n$. Außerdem ist

$$\Gamma_f = \Gamma_{\bar f} \subseteq X\times Y,$$

also

$$\Gamma_f = (X\times Y)\cap\Gamma_{\bar f}\ .$$

Es reicht also zu zeigen, $\Gamma_{\bar f}$ ist abgeschlossen in $X\times\mathbb{P}^n$.

2. Schritt. Wir betrachten die reguläre[64] Abbildung

$$g := f\times id: X\times\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n,\ (x,y) \mapsto (f(x), y).$$

Es gilt

$$\Gamma_{id} = \{(x,x) \mid x\in\mathbb{P}^n\}$$

$$\Gamma_f = g^{-1}(\Gamma_{id})$$

Das Urbild einer abgeschlossenen Menge bei einer regulären Abbildung ist abgeschlossen. Es reicht also zu zeigen,

$$\Gamma_{id} \subseteq \mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n$$

ist abgeschlossen. Das ist aber der Fall wegen[65]

$$\Gamma_{id} = \{(u,v)\in\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n \mid u_iv_j - u_jv_i = 0 \text{ für alle i und alle j}\}.$$

QED.

2.5.5 Beweis von Theorem 1

Sei

$$f: X \to Y$$

eine reguläre Abbildung mit einer projektiven Varietät X. Wir betrachten die Projektion

$$p: X\times Y\to Y,\ (x,y) \mapsto y.$$

Es gilt

$$f(X) = p(\Gamma_f).$$

Die Abgeschlossenheit von f(X) folgt deshalb aus der nachfolgenden Aussage.

2.5.6 Theorem: Abgeschlossenheit der Projektion

Seien X eine projektive Varietät und Y eine quasi-projektive Varietät. Dann überführt die reguläre Abbildung

$$p: X\times Y \to Y,\ (x, y) \mapsto y,$$

abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen.

Beweis. 1.Schritt. Reduktion auf den Fall $X = \mathbb{P}^m$.

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^m$ abgeschlossen. Dann ist p die Komposition

$$X\times Y \subseteq \mathbb{P}^m\times Y \to Y$$

und es reicht, die Behauptung für $\mathbb{P}^m\times Y \to Y$ zu beweisen.

2. Schritt. Reduktion auf den Fall Y affine Varietät.

Wir überdecken Y durch offfene affine Mengen,

$$Y = \cup\, U_\alpha.$$

Es reicht zu zeigen, für $Z \subseteq \mathbb{P}^m\times Y$ abgeschlossen ist

$$p(Z)\cap U_\alpha \text{ ist abgeschlossen in } U_\alpha\ .$$

Wegen $p(Z)\cap U_\alpha = p(Z\cap(\mathbb{P}^m\times U_\alpha))$ reicht es also den Fall $Y = U_\alpha$ affin zu betrachten.

3.Schritt. Reduktion auf den Fall $Y = \mathbb{A}^m$.

---

[64] Es reicht, die Regularität lokal zu überprüfen, d.h. für den Fall, daß beide Faktoren affin sind. Dann ist die Regularitätsaussage aber trivial.

[65] d.h. Γ_{id} ist Nullstellenmenge eines bihomogenen Gleichungssystems.

Ist $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ abgeschlossen, so ist

$$\mathbb{P}^m \times Y \subseteq \mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^m \ (\to \mathbb{A}^m)$$

abgeschlossen. Es reicht also die Abgeschlossenheit der Projektion

$$\mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$$

zu beweisen.

<u>4. Schritt</u>. Abgeschlossenheit von $p: \mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$.

Eine abgeschlossene Menge

$$Z \subseteq \mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^m$$

ist eine Menge, die durch Gleichungen der Gestalt

$$g_i(u,y) = 0, \quad i=1,...,t,$$

definiert ist mit g_i homogen in den Unbestimmten u. Für $y_0 \in \mathbb{A}^m$ besteht

$$p^{-1}(y_0)$$

aus allen nicht-trivialen Lösungen des Gleichungssystems

(1) $$g_i(u,y_0) = 0, \quad i=1,...,t,$$

Es gilt also

$$y_0 \in p(Z) \Leftrightarrow \text{das System (1) hat eine nicht-triviale Lösung}$$
$$\Leftrightarrow I_s \nsubseteq (g_1(u,y_0),...,g_t(u,y_0)) \text{ für } s = 1,2,3,...$$

Dabei bezeichne I_s das von den Potenzprodukten des Grades s in u erzeugte Ideal.

Wir setzen

$$T_s := \{y_0 \in \mathbb{A}^m \mid I_s \nsubseteq (g_1(u,y_0),...,g_t(u,y_0))\}$$

Dann gilt

$$p(Z) = \cap_{\infty}^{s=1} T_s$$

Es reicht also zu zeigen:

<u>5. Schritt</u>. Abgeschlossenheit der Menge T_s.

Wir setzen

$$k_i := \deg_u g_i(u,y).$$

Seien

$$M^{(1)},...,M^{(a)}$$

die Potenzprodukte des Grades s in den Unbestimmten u.

Die Bedingung $I_s \subseteq (g_1(u,y_0),...,g_t(u,y_0))$, bedeutet dann, alle $M^{(\alpha)}$ liegen im Ideal, das von den $g_i(u,y_0)$ erzeugt wird,

(2) $$M^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{t} g_i(u,y_0) F_{i,\alpha}(u)$$

Durch Vergleich der homogenen Komponenten im Grad s sehen wir, daß wir die Faktoren $F_{i,\alpha}(u)$ durch ihre homogenen Komponenten des Grades $s-k_i$ ersetzen können, ohne daß die Gültigkeit der Relationen (2) verloren geht. Wir können also annehmen,

$$F_{i,\alpha}(u) \text{ ist homogen vom Grad } s - k_i$$

Seien jetzt

$$N_i^{(1)}, \ldots, N_i^{(b_i)}$$

die Potenzprodukte des Grades $s-k_i$. Die Relationen (2) bedeuten dann, die $M^{(\alpha)}$ sind k-Linearkombinationen der homogenen Polynome

(3) $$g_i(u,y_0)N_i^{(\beta)}\ ,\ i=1,...,t,\ \beta=1,...,b_i\ .$$

Das bedeutet natürlich die Formen erzeugen den gesamten Vektorraum der Formen des Grades s. Beschreibt man die Vektoren (3) durch irgentwelche Koordinaten, so bedeutet dies für die Matrix der Koordinaten, daß diese maximalen Rang besitzt, d.h. daß eine Determinante, die von $y_0\in\mathbb{A}^m$ abhängt, ungleich Null wird. Mit anderen Worten, es gibt Polynome $P_1,...,P_c$ mit der Eigenschaft

$$P_i(y_0) \ne 0 \text{ für ein } i \Leftrightarrow y_0\notin T_s\ .$$

Also ist $T_s = V(P_1,...,P_c)$ abgeschlossen.

QED.

2.5.7 Folgerung 1: Satz von "Liouville"

Sei X eine irreduzible projektive Varietät. Dann gilt

$$k[X] = k,$$

d.h. jede reguläre Funktion von X ist konstant.

Beweis. Sei $f\in k[X]$. Wir fassen f als reguläre Abbildung

$$X \to \mathbb{A}^1 \to \mathbb{P}^1,\ x \mapsto f(x) \mapsto [1,f(x)],$$

auf. Wie eben gezeigt, ist $f(X) \subseteq \mathbb{P}^1$ abgeschlossen. Wegen $f(X)\subseteq\mathbb{A}^1$ gibt es nur die Möglichkeiten

1. $f(X) = \mathbb{A}^1$
2. $f(X)$ = endliche Teilmenge des $\mathbb{A}^1$.

Der erste Fall kann nicht eintreten, da $\mathbb{A}^1$ nicht abgeschlossen ist im $\mathbb{P}^1$. Also tritt der zweite Fall ein,

$$f(X) = \{a_1,...,a_r\}.$$

Nun ist

$$X = f^{-1}(a_1)\cup...\cup f^{-1}(a_r)$$

eine Zerlegung von X in disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Weil X irreduzible ist, folgt r = 1, d.h. f ist konstant.

QED.

2.5.8 Folgerung 2: Bilder projektiver Varietäten im affinen Raum)

Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung mit X projektiv und Y affin. Dann isf f auf jeder irreduziblen Komponente von X konstant.

Beweis. Nach 2.5.7 sind die Koordinatenfunktionen von f auf jeder Komponente von X konstant.

QED.

2.5.9 Die Varietät der reduzible Hyperflächen

Die Menge aller Punkte $\xi\in\mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$, zu denen eine reduzible Hyperfläche im $\mathbb{P}^n$ gehört, ist abgeschlossen im $\mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$ (vgl. 2.2.8 zur Definition von $\nu_{n,m}$).

Bemerkung

Die Behauptung besagt, die Reduziblität eines homogenen Polynoms kann man durch ein polynomiales Gleichungssystem ausdrücken für die Koeffizienten des Polynoms. Im Fall m = n = 2 ist dies wohlbekannt:

$$F = \sum_{i=0}^{2} a_{ij}U_iU_j \text{ ist genau dann reduzibel, wenn gilt } \det(a_{ij}) = 0.$$

Beweis. Bezeichne F_ξ das homogene Polynom, dessen Koeffizienten gerade die Koordinaten des Tupels ξ sind und $\xi(F)$ das Tupel der Koeffizienten des homogenen Polynoms F. Wir setzen

$$X := \{\xi\in\mathbb{P}^{\nu_{n,m}} \mid F_\xi \text{ reduzibel }\}$$

$$X_l := \{\xi\in\mathbb{P}^{\nu_{n,m}} \mid F_\xi \text{ hat einen Teiler vom Grad } l\ \}$$

Dann gilt

$$X = \cup X_l$$

und es genügt zu zeigen, die X_l sind abgeschlossen. Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{P}^{\nu_{n,l}}\times\mathbb{P}^{\nu_{n,m-l}} \to \mathbb{P}^{\nu_{n,m}}, ([a], [b]) \mapsto [\xi(F_a\cdot F_b)].$$

Dies ist eine reguläre Abbildung (da die Koeffizienten des Produkts $F_a\cdot F_b$ in polynomialer Weise von den Koeffizienten der Faktoren abhängen)[66]. Das Bild dieser Abbildung ist abgeschlossen (da das direkte Produkt links projektiv ist) und stimmt mit der Menge X_l überein.

QED.

2.6 Endliche Abbildungen

2.6.1 Endliche Morphismen affiner Varietäten

Sei f: X→Y eine reguläre Abbildung affiner Varietäten. Dann heißt f endlich, wenn k[X] ganz ist über dem Teilring f*k[Y].

Bemerkungen

(i) Die Komposition endlicher Abbildungen ist endlich.

(ii) <u>Endlichkeit und Basiswechsel</u>. Für je zwei reguläre Abbildungen affiner Varietäten

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \uparrow g \\ & & Z \end{array}$$

mit f endlich ist auch die induzierte Abbildung

$$X\times_Y Z := \{ (x,z)\in X\times Z \mid f(x) = g(z) \} \to Z, (x,z) \mapsto f(x).$$

endlich. Insbesondere ist für jede endliche reguläre Abbildung f: X → Y und jede abgeschlossene Teilvarietät

$$Z \subseteq Y$$

die Einschränkung $f^{-1}(Z) \to Z$ endlich.

(iii) Die reguläre Abbildung

$$X = V(xy - 1) \to \mathbb{A}^1, (x,y) \mapsto x,$$

ist nicht endlich, $k[X] = k[x,y]/(xy-1) = k[x,x^{-1}]$ ist nicht endlich über k[x].

(iv) Für jede endliche Abbildung f:X→Y sind die Fasern $f^{-1}(y)$ über jedem Punkt y∈Y endliche Mengen.

---

[66] Und $F_a\cdot F_b$ nur dann Null ist, wenn einer der beiden Faktoren Null ist.

(v) Die Endlichkeit eines Morphismus $f:X\to Y$ bedeutet, daß die Punkte von $f^{-1}(y)$ im Endlichen bleiben, wenn y auf Y variiert. Die Punkte der Faser können verschmelzen, aber sie können nicht (im Unendlichen) verschwinden.

(vi) Oft wird von endlichen Abbildungen noch gefordert, daß sie dominant sein sollen. Endlichenkeit in unserem Sinne bedeutet dann, die Abbildung ist die Zusammensetzung aus einer endlichen (dominanten) Abbildung und einer abgeschlossenen Einbettung (siehe unten).

Beweis von (ii). Wir betrachten die zugehörigen Homomorphismen der Koordinatenringe:

$$\begin{array}{ccc} k[X] & \xleftarrow{f^*} & k[Y] \\ & & \downarrow g^* \\ & & k[Z] \end{array}$$

Weil Koordinatenringe endlich erzeugt sind, bedeutet die Endlichkeit von f gerade, k[X] ist als Modul über k[Y] endlich erzeugt. Dann ist aber auch

$$k[X]\otimes_{k[Y]}k[Z]$$

endlich erzeugt über k[Z]. Der zu diesem Tensorprodukt gehörige reduzierte Ring ist aber gerade $k[X\times_Y Z]$,[67] d.h. $X\times_Y Z$ ist endlich über Z.

Der Spezialfall einer abgeschlossenen Teilvarietät $Z \subset Y$ entspricht gerade dem Fall, daß g^* surjektiv ist.

Beweis von (iv). Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Dann sind die Koordinatenfunktionen

$$x_i = T_i|_X \in k[X]$$

endlich über $f^*k[Y]$, d.h. für jedes i genügt x_i einer Gleichung der Gestalt

$$x_i^n + f^*(a_1)x_i^{n-1} + ... + f^*(a_n) = 0 \text{ mit } a_i\in k[Y].$$

Für jeden Punkt $p\in X$ mit festem Bild $f(p) = y$ gilt also

$$x_i(p)^n + a_1(y)x_i(p)^{n-1} + ... + a_n(y) = 0.$$

Für festes y hat diese Gleichung nur endliche viele Lösungen $x_i(p)$, d.h. für die i-te Koordinaten eines Punktes aus $f^{-1}(y)$ kommen nur endlich viele Werte in Frage.

---

[67] Man schreibe alle beteiligten Koordinatenringe als Faktorringe von Polynomringen (d.h. man bette die betrachteten affinen Varietäen in affine Räume ein) und bestimmen die Nullstellenmengen der zugehörigen Ideale. Genauer: man schreibe k[X] und k[Z] als Faktorringe von Polynomringen über k[Y] und bette Y in einen $\mathbb{A}^n$ ein. Dadurch kann man f und g als Einschränkungen von Projektionsabbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n+a} & \xrightarrow{u} & \mathbb{A}^n \\ & & \uparrow v \\ & & A^{n+b} \end{array}$$

Man beweise die Aussage zunächst für den Fall f = u und g = v. Durch Einschränken auf die Teilvarietäten X und Z erhält man dann die Behauptung.

QED.

2.6.2 Theorem: Surjektivität endlicher dominanter Abbildungen

Jede endliche dominante Abbildung $f:X\to Y$ affiner Varietäten ist surjektiv.
Beweis. Sei $y\in Y$ und sei

$$m_y := \{f\in k[Y] \mid f(y) = 0\}$$

das Ideal von $\{y\}$ in $k[Y]$. Sind $y_1,...,y_n$ Koordinatenfunktionen auf Y und hat y die Koordinaten a_i, so gilt

$$m_y \supseteq (y_1 - a_1,...,y_n - a_n)$$

und rechts steht ein maximales Ideal, d.h. es gilt "=". Die Faser $f^{-1}(y)$ ist als Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen. Bestimmen wir also definierende Gleichungen der Faser. Es gilt

$$x \in f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow \alpha(f(x)) = 0 \text{ für alle } \alpha\in m_y$$

$$\Leftrightarrow x\in V(\alpha\circ f \mid \alpha\in m_y) \ (= V(f^*(\alpha) \mid \alpha\in m_y))$$

Da $f^*: k[Y]\to k[X]$ injektiv ist, können wir $k[Y]$ mit seinem Bild in $k[X]$ identifizieren und f^* im folgenden weglassen. Dann sind die Elemente von m_y definierende Gleichungen von $f^{-1}(y)$ und das von ihnen erzeugte Ideal ein definierendes Ideal:

$$f^{-1}(y) = V(m_y\cdot k[X]).$$

Nach dem Nullstellensatz gilt

$$f^{-1}(y) = \emptyset \Leftrightarrow 1\in m_y\cdot k[X].$$

Nach A3.4 tritt der Fall $1\in m_y\cdot k[X]$ nicht ein.
QED.
Bemerkung
Insbesondere sind endliche Abbildungen $f:X \to Y$ abgeschlossen.
Beweis. Sei $Z \subseteq X$ abgeschlossen. Bezeichne

$$W := \overline{f(Z)}$$

das Bild der Abschließung. Nach 2.6.1 (ii) ist dann die Einschränkung

(1) $$f^{-1}f(Z) =^{68} f^{-1}(W) \to W$$

endlich. Nach Konstruktion ist sie dominant, also nach 2.6.2 surjektiv. Also gilt

$$f(Z) = f(f^{-1}f(Z)) = f(f^{-1}(W)) =^{69} W = \overline{f(Z)}.$$

QED.

2.6.3 Wiederholung/Aufgabe

Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung affiner Varietäten, $g\in k[Y]$ und

$$D(g) = \{y\in Y \mid g(y) \neq 0\}$$

die durch g definierte affine Hauptmenge. Man zeige,
1. $k[D(g)] = k[Y][1/g]= k[Y]_g$
2. $f^{-1}(D(g)) = D(g\circ f)$.
3. Ist $f:X\to Y$ endlich, so auch die Einschränkung $D(g\circ f)\to D(g)$ von f.

---

[68] Die Punkte von W - f(Z) haben kein Urbild.
[69] gilt wegen der Surjektivität von (1).

2.6.4 Theorem: Lokalität der Endlichkeit

Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung von affinen Varietäten. Für jeden Punkt $y \in Y$ gebe es eine affine Umgebung $V \subseteq Y$ mit der Eigenschaft, daß $U := f^{-1}(V)$ affin ist und die Einschränkung

$$f|_U : U \to V \text{ endlich.}$$

Dann ist f endlich.

Beweis. Wir setzen

$$B := k[X]$$
$$A := k[Y]$$

Wir können annehmen die offenen Mengen U in der Formulierung des Theorems sind offene Hauptmengen[70] und wir wählen eine Überdeckung von Y durch solche offene Hauptmengen:

(1) $\quad Y = \cup_{\alpha \in I} D(g_\alpha) \qquad , g_\alpha \in k[Y].$

Da affine Mengen quasi-kompakt sind, können wir annehmen, die Überdeckung (1) ist endlich.

Nach Voraussetzung ist

$$f^{-1}(D(g_\alpha)) = D(g_\alpha \circ f)$$

endlich über $D(g_\alpha)$ für jedes α, d.h.

$$k[D(g_\alpha \circ f)] = B[1/g_\alpha]$$

ist eine endliche Algebra über

$$k[D(g_\alpha)] = A[1/g_\alpha].$$

Für jedes α können wir ein endliches Erzeugendensystem von $B[1/g_\alpha]$ über $A[1/g_\alpha]$ finden,

$$B[1/g_\alpha] = A[1/g_\alpha]b_{1,\alpha} + \ldots + A[1/g_\alpha]b_{n_\alpha,\alpha} .$$

Durch Multiplikation mit einer Potenz der Einheit g_α erreichen wir,

$$b_{i,\alpha} \in B$$

für jedes i und jedes α.

Nach Konstruktion kann man jedes Element $b \in B$ in der folgenden Gestalt schreiben.

$$b = \sum_{i=1}^{n_i} \frac{a_{i,\alpha}}{g_\alpha^{m_\alpha}} \cdot b_{i,\alpha} \text{ mit } a_{i,\alpha} \in A .$$

Wir multiplizieren diese Identität mit einer hohen Potenz von g_α und vergrößern bei Bedarf die Zahl m_α. Auf diese Weise erhalten wir eine Identität

(2) $$g_\alpha^{m_\alpha} b = \sum_{i=1}^{n_i} a_{i,\alpha} \cdot b_{i,\alpha} \text{ in A.}$$

Wegen (1) haben die $g_\alpha^{m_\alpha}$ keine gemeinsame Nullstelle auf Y, d.h. das von ihnen erzeugte Ideal enthält die 1,

$$1 = \sum_\alpha h_\alpha \cdot g_\alpha^{m_\alpha} \text{ mit } h_\alpha \in A.$$

---

[70] wegen der Basiswechsel-Eigenschaft 2.6.1 (ii).

Multiplikation mit b und Einsetzen von (2) liefert

$$b = b\cdot\sum_\alpha bh_\alpha\cdot g_\alpha^{m_\alpha} = \sum_\alpha \sum_i h_\alpha\cdot a_{i,\alpha}\cdot b_{i,\alpha},$$

d.h. die $b_{i,\alpha}$ erzeugen B über A.

QED.

2.6.5 Definition: Endliche Morphismen quasi-projektiver Varietäten

Eine reguläre Abbildung $f:X\to Y$ quasi-projektiver Varietäten heißt endlich, wenn jeder Punkt $y\in Y$ eine affine Umgebung $V\subseteq Y$ besitzt, sodaß

$$U := f^{-1}(V)$$

affin ist und die durch f induzierte reguläre Abbildung affiner Varietäten $U\to V$ endlich ist.

Bemerkungen

(i) Die Fasern jeder endlichen Abbildung sind endlich (nach 2.6.1).
(ii) Jede endliche dominante Abbildung ist surjektiv (nach 2.6.2).
(iii) Jede endliche Abbildung ist abgeschlossen (nach 2.6.2).
(iv) Die Endlichkeit einer Abbildung bleibt bei Basiswechsel erhalten (vgl. Bemerkung 2.6.1 (ii)).
(v) Das nachfolgende Ergebnis ist eine Konsequenz der Eigenschaften endlicher Abbildungen.

2.6.6 Theorem: Das Bild dominanter Morphismen

Sei $f: X\to Y$ eine reguläre dominante Abbildung quasi-projektiver Varietäten. Dann enthält f(X) eine nicht-leere offene Teilmenge von Y.

Beweis. O.B.d.A. seien Y und X irreduzible affine Varietäten.[71] Weil f dominant ist, gilt

$$k[Y] \subseteq k[X],\ \alpha \mapsto f^*(\alpha).$$

Sei r der Transzendenzgrad der Körpererweiterung

$$k(Y) \subseteq k(X).$$

Wir wählen r algebraisch unabhängige Elemente über k(Y),

$$u_1, \dots , u_r \in k[X].$$

Dann gilt

$$k[Y] \subseteq k[Y][u_1, \dots , u_r] \subseteq k[X]$$

und

$$k[Y][u_1, \dots , u_r] = k[Y\times\mathbb{A}^r]\ .$$

Die Inklusion der Koordinatenringe induziert eine Zerlegung des Morphismus f,

$$f: X \xrightarrow{h} Y\times\mathbb{A}^r \xrightarrow{g} Y\ .$$

Dabei ist g einfach die Projektion auf den ersten Faktor und h eine dominante reguläre Abbildung[72].

Nach Konstruktion ist jedes Element $v\in k[X]$ algebraisch über $k[Y\times\mathbb{A}^r]$, d.h. es gibt ein Element $a\in k[Y\times\mathbb{A}^r] - \{0\}$ derart, daß $a\cdot v$ ganz ist über $k[Y\times\mathbb{A}^r]$. Wir lassen jetzt v ein Erzeugendensystem

$$v_1,\dots,v_m \in k[X]$$

[71] Zunächst kann man eine Komponente von Y fixieren und von ihrr alle anderen Komponenten abziehen. Das Ergebnis kann man durch eine offene affine Teilmenge ersetzen (und X durch deren vollständiges Urbild). Danach kann man X durch eine Komponente von X ersetzen, die sich dominant auf Y abbildet und dann diese Komponente durch eine affine offene (und dichte) Teilmenge.

[72] Weil sich $k[Y][u_1, \dots , u_r]$ injektiv nach k[X] abbildet.

des Rings k[X] (über k) durchlaufen und bezeichnen mit

$$a_1,\ldots,a_m \in k[Y\times\mathbb{A}^r] - \{0\}$$

zugehörige Elemente a. Sei

$$F = a_1\cdot\ldots\cdot a_m.$$

Auf der nichtleeren offenen Menge

$$D(F) \subseteq Y\times\mathbb{A}^r$$

ist jede der Funktionen a_i umkehrbar, d.h. wir können die Ganzheitsgleichung von $a_i v_i$ durch eine Potenz von a_i teilen und so eine Ganzheitsgleichung für v_i gewinnen. Mit anderen Worten, die Abbildung h induziert eine endliche Abbildung

$$D(F\circ h) = h^{-1}(D(F)) \to D(F).$$

Als endliche dominante[73] Abbildung ist diese Abbildung surjektiv, d.h. es gilt

$$D(F) \subseteq h(X)$$

also

$$g(D(F)) \subseteq g(h(X)) = \text{Im } f.$$

Es reicht also zu zeigen, g(D(F)) enthälte eine offene Teilmenge von Y. Wir schreiben die Funktion $F\in k[Y\times\mathbb{A}^r] = k[Y][u]$ in der Gestalt

$$F(y,u) = \sum_\alpha F_\alpha(y)\cdot u^\alpha$$

mit Potenzprodukten u^α und Funktionen $F_\alpha\in k[Y]$. Für jeden Punkt $y\in Y$, in welchem nicht sämtliche $F_\alpha(y)$ Null sind, gibt es $u_i = \tau_i$ mit $F(y,\tau) \neq 0$, d.h. es gilt

$$y\in g(D(F)).$$

Also gilt

$$\text{Im } f \supseteq g(D(F)) \supseteq \cup\, D(F_\alpha)$$

Da nicht sämtliche F_α Null sind, steht rechts eine nicht-leere offene Menge von Y.

QED.

Bemerkung

Der letzte Satz zeigt, daß sich reguläre Abbildungen um einiges einfacher verhalten als stetige oder differenzierbare Abbildungen. Situationen wie bei der irrationalen Abwicklung des Torus,

$$f: \mathbb{R} \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2,\ r \mapsto (r, \sqrt{2}\cdot r) \bmod \mathbb{Z}^2,$$

können hier nicht auftreten.

2.6.7 Theorem: Endlichkeit von Projektionen

Seien $E\subseteq\mathbb{P}^n$ ein linearer Unterraum der Dimension d und

$$X\subseteq\mathbb{P}^n - E$$

eine abgeschlossene Menge. Dann induziert die Projektion mit dem Zentrum E,

$$\pi: X \to \mathbb{P}^{n-d-1}$$

eine endliche Abbildung $X \to \pi(X)$.

Beweis. Wir schreiben die Projektion π in der Gestalt

$$\pi: X \to \mathbb{P}^{n-d-1},\ [x] \mapsto [L_0(x),\ldots,L_{n-d-1}(x)],$$

mit k-linear unabhängigen Linearformen $L_i(S)$. Sei

---

[73] Die induzierte Abbildung der Koordinatenringe ist gerade die natürliche Injektion

$$k[Y][u_1, \ldots, u_r]_F \subseteq k[X]_F$$

$$U_i := \pi^{-1}(D(S_i)) = \{x\in X \mid L_i(x) \neq 0\}.$$

Dies ist eine affine offene Teilmenge von X. Es reicht zu zeigen, die durch π induzierten Abbildungen

$$\pi_i := \pi|_{U_i} : U_i \to D(S_i)$$

sind endlich. Sei $g\in k[U_i]$ beliebig. Wir haben zu zeigen, g genügt einer Ganzheitsgleichung über $k[D(S_i)]$. Dazu schreiben wir g in der Gestalt

$$g = \frac{G}{L_i^m} \text{ mit G homogen vom Grad m.}$$

Wir betrachten die reguläre Abbildung

$$\pi_1: X \to \mathbb{P}^{n-d},\ x \mapsto [L_0^m(x),...,L_{n-d-1}^m(x),G(x)].$$

Da X projektiv ist, ist das Bild dieser Abbildung abgeschlossen, sagen wir

$$\pi_1(X) = V(F_1,...,F_s).$$

Nach Voraussetzung haben die Formen L_i keine gemeinsame Nullstelle auf X. Deshalb liegt der Punkt

$$[0,...,0,1] \notin \pi_1(X)$$

nicht im Bild von π_1. Anders ausgedrückt, es gilt

$$V(z_0,....,z_{n-d-1},F_1,...,F_s) = \emptyset,$$

wobei die z_i die projektiven Koordinaten auf dem $\mathbb{P}^{n-d}$ bezeichnen sollen. Nach dem Nullstellensatz bedeutet dies,

$$I_{\ell} \subseteq (z_0,....,z_{n-d-1},F_1,...,F_s) \text{ für ein } \ell,$$

und insbesondere

$$z_{n-d}^{\ell} \in (z_0,....,z_{n-d-1},F_1,...,F_s).$$

Wir schreiben

(1) $$z_{n-d}^{\ell} = \sum_{j=0}^{n-d-1} z_j\cdot H_j + \sum_{j=1}^{s} F_j\cdot P_j$$

mit Polynomen H_j und P_j. Wir können dabei annehmen die H_j sind homogen vom Grad ℓ-1 und die P_j sind homogen vom Grad ℓ - deg F_j. Wir setzen

$$\Phi(z_0,...,z_{n-d}) := z_{n-d}^{k} - \sum_{j=0}^{n-d-1} z_j\cdot H_j$$

Dies ist ein normierten Polynom in z_{n-d}.Wegen (1) gilt

$$\Phi = 0 \text{ auf } \pi_1(X).$$

Wir setzen in diese Identität die Koordinaten der Abbildung π_1 ein und erhalten,

$$\Phi(L_0^m,...,L_{n-d-1}^m,G) = 0 \text{ auf X.}$$

Auf U_i ist $L_i \neq 0$. Wir können durch $L_i^{m\cdot\ell}$ teilen und erhalten auf U_i :

$$0 = \Phi\left(\left(\frac{L_0(x)}{L_i(x)}\right)^m,...,1,...,\left(\frac{L_{n-d-1}(x)}{L_i(x)}\right)^m,g\right)$$

$=^{74} \Phi(\pi^*(z_0)^m,...,1,...,\pi^*(z_{n-d-1})^m,g)$

Dies ist die gesuchte Ganzheitsgleichung für $g\in k[U_i]$ über

$$\pi^*k[D(S_i)] = \pi^*k[z_0,...,\hat{z}_i,...,z_{n-d-1}]$$

QED.

2.6.8 Theorem: Endlichkeitskriterium für allgemeine Abbildungen

Seien $F_0,...,F_s\in k[S]$ homogene Polynome des Grades m ohne gemeinsame Nullstelle auf der abgeschlossenen Menge

$$X \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Dann ist

$$\varphi: X \to \varphi(X), [x] \mapsto [F_0(x),...,F_s(x)],$$

eine endliche Abbildung.

Beweis. Wir können annehmen, die F_i sind linear unabhängig. Seien v: $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$ die Veronese-Abbildung und L_i die Linearform auf $\mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$ mit denselben Koeffizienten wie F_i,

$$F_i = v^*(L_i).$$

Weiter sei

$$p: \mathbb{P}^{\nu_{n,m}} \to \mathbb{P}$$

die durch die L_i definierte Projektion. Dann ist φ gerade die Zusammensetzung

$$X \subseteq \mathbb{P}^n \xrightarrow{v} \mathbb{P}^{\nu_{n,m}} \xrightarrow{p} \mathbb{P}.$$

Da die Veronese-Abbildung einen Isomorphismus $\mathbb{P}^n \to \mathrm{Im}(v)$ induziert, folgt die Behauptung aus der entsprechenden Aussage für p, d.h. aus Theorem 2,6,7.

QED.

Vorbemerkung

Der Beweis der nachfolgenden Aussage benötigt den Begriff der Dimension und einige von dessen Eigenschaften. Da die Aussage eigentlich hierher gehört, wollen wir sie trotzdem an dieser Stelle behandeln. Wir führen deshalb zunächst die zum Beweis benötigten Eigenschaften des Dimensionsbegriffs an (die wir später beweisen werden).

1. Die Dimension einer (irreduziblen) Varietät ist eine ganze Zahl ≥ -1, welche genau dann $= -1$ ist, wenn die Varietät leer ist.
2. Sind $X \subset Y$ echt ineinander enthaltene irreduzible Varietäten, so gilt
$$\dim X < \dim Y.$$
3. Ist $f:X \to Y$ eine reguläre dominante Abbildung, so gilt
$$\dim Y \leq \dim X.$$
4. Ist $X \to Y$ ein endlicher Morphismus irreduzibler Varietäten, so gilt
$$\dim X = \dim Y.$$

2.6.9 Grad einer dominanten endlichen Abbildung

Sei h: $Y \to X$ eine dominante endliche separable[75] Abbildung irreduzibler Varietäten. Dann gibt es eine nicht-leere offene Teilmenge $U\subseteq X$ derart, daß die Fasern über den Punkten von U aus genau

---

[74] über U_i ist π die Abbildung mit den affinen Koordinaten L_j/L_i.

$$\deg h := [k(X):k(Y)]$$

Punkten bestehen. Diese Zahl heißt Grad der Abbildung h.

Beweis. Wir können annehmen, X und Y sind affin. Dann ist

$$B:= k[Y] \text{ ganz über } A:= k[X]$$

und

$$L := k(Y) \text{ endliche separable Körpererweiterung von } K:= k(X).$$

Nach dem Satz vom primitiven Element ist

$$L = K[T]/(f(T))$$

mit einem irreduziblen Polynom $f\in K[T]$. Das Polynom f ist außerdem separabel, d.h. f und f' sind teilerfremd,

$$\alpha\cdot f + \beta\cdot f' = 1 \text{ in } K[T]$$

mit Polynom $\alpha,\beta\in K[T]$. Wir können X durch eine affine Teilmenge ersetzen und damit annehmen,

$$f,f',\alpha,\beta \in A[T].$$

Sei t die Restklasse von T in L. Dies ist eine rationale Funktion auf Y. Auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge Y-Z ist sie regulär. Als echte Teilmenge von Y ist die abgeschlossene Menge Z von kleinerer Dimension als Y. Also ist h(Z) abgeschlossen[76] in X und von kleinerer Dimension:

$$\dim h(Z) \le^{77} \dim Z <^{78} \dim Y =^{79} \dim X.$$

Insbesondere ist X-h(Z) nicht leer.Wir ersetzen X durch eine affine offene Teilmenge von X-h(Z) (und Y durch deren Urbild) und erreichen auf diese Weise,

$$t \in k[Y] = B$$

ist regulär auf Y. Damit gilt

$$A[t] \subseteq B$$

und, weil B endlich ist über A,

$$B = A\cdot b_1+...+A\cdot b_r.$$

Wegen $b_i\in L = K[t]$ hat b_i die Gestalt $b_i = \alpha_i/a$ mit $\alpha_i\in A[t]$ und $a\in A$. Wir ersetzen X durch die offene Hauptmenge D(a) und erreichen, daß sämtliche b_i bereits in A[t] liegen, d.h. es gilt

$$A[t] = B.$$

Auf dieselbe Weise können wir erreichen, daß der höchste Koeffizienten des Polynoms f eine Einheit von A ist, d.h. wir können erreichen, daß dieser Koeffizient gleich 1 ist.

Sei d = deg h (= deg f). Dann gilt

$$B = A[t] = A\cdot 1 + A\cdot t + A\cdot t^2 + ... + A\cdot t^{d-1}$$

und

$$L = K(t) = K\cdot 1 + K\cdot t + K\cdot t^2 + ... + K\cdot t^{d-1}.$$

Die ersten d-1 Potenzen von t sind über K linear unabhängig, d.h. B ist ein freier A-Modul und es gilt

$$B \cong A[T]/(f).$$

---

[75] d.h. k(X)/k(Y) ist eine separable Körpererweiterung.
[76] Endliche Abbildungen sind abgeschlossen (vgl. 2.6.2).
[77] weil f: Z → h(Z) regulär und dominant ist.
[78] weil Z echte Teilvarietät von Y ist.
[79] Weil Y ganz ist über X.

Dieser Isomorphismus beschreibt eine Zerlegung des Homomorphismus $f^*:A \to B$ in eine Injektion und eine Surjektion:

$$A \hookrightarrow A[T] \twoheadrightarrow B.$$

Dies entspricht einer Zerlegung des Morphismus $f: Y \to X$ in eine abgeschlossene Einbettung und eine Projektion auf den ersten Faktor:

$$Y \hookrightarrow X \times \mathbb{A}^1 \to X$$

Wir betten jetzt X in einen $\mathbb{A}^N$ ein und gewinnen so eine Darstellung von f als Einschränkung auf Y der Projektion

$$\mathbb{A}^{N+1} \to \mathbb{A}^N,\ (x_1,...,x_{N+1}) \mapsto (x_1,...,x_N).$$

Sei

$$X = V(g_1,...,g_r) \subseteq \mathbb{A}^N$$

Dann können wir $B = k[Y] = k[X][T]/(f)$ in der Gestalt

$$k[Y] = k[T_1,...,T_N,T]/(I(X), \tilde{f})$$

schreiben mit einem Polynom $\tilde{f}$, dessen Koeffizienten gerade die Koeffizienten von f auf $\mathbb{A}^N$ fortsetzen, d.h.

$$Y = V(g_1,...,g_r, \tilde{f}) \subseteq \mathbb{A}^{N+1}$$

und h ist gerade die Abbildung[80]

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{h} & Y & & (x_1,...,x_{N+1}) \mapsto (x_1,...,x_N) \\ \| & & \| & & \\ V(g_1,...,g_r,\tilde{f}) & & V(g_1,...,g_r) & & \end{array}$$

Es reicht zu zeigen, die Fasern

$$h^{-1}(a) = \{\ (a, b) \in \mathbb{A}^{N+1} \mid \tilde{f}(a,b) = 0\ \}$$

bestehen aus genau d Punkten für jedes $a \in Y$. Mit anderen Worten, wir haben zu zeigen, für $a \in Y$ hat das Polynom

$$\tilde{f}(a, T) \in k[T].$$

d verschiedene Nullstellen. Nach Konstruktion von $\tilde{f}$ gilt aber

$$f(a, T) = \tilde{f}(a, T),$$

wenn man $f \in A[T] = k[Y][T]$ als Funktion auf $Y \times \mathbb{A}^1$ auffaßt. Es reicht also zu zeigen, das Polynom d-ten Grades

$$f(a, T) \in k[T]$$

hat für jedes $a \in Y$ keine mehrfachen Nullstellen. Nun gilt aber

$$\alpha \cdot f + \beta \cdot f' = 1 \text{ in } A[T]$$

also

$$\tilde{\alpha}(a, T) \cdot \tilde{f}(a, T) + \tilde{\beta}(a, T) \cdot f'(a, T) = 1 \text{ in } k[T],$$

d.h. f(a, T) und f'(a,T) sind teilerfremd und es treten tatsächlich keine mehrfachen Nullstellen auf.

QED.

---

[80] denn diese Abbildung induziert gerade die natürliche Abbildung

$$k[T_1,...,T_N] / I(X) \to k[T_1,...,T_N,T] / (I(X), \tilde{f}).$$

Bemerkungen

(i) Im allgemeinen ist der Grad einer endlichen Abbildung keine obere Schranke für die Anzahl der Punkte in einer Faser. Seien zum Beispiel

$X = \mathbb{A}^1$

$Y = V(x^2 + x^3 - y^2)$

und f die Abbildung[81]

$f: X \to Y, t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$.

Die Faser von f über $(x,y) \neq (0,0)$ besteht aus dem einzigen Punkt $\frac{y}{x} = \frac{t^3-t}{t^2-1} = t$.

Über (0,0) besteht die Faser aus den Punkten t = +1 und t = -t.

Die induzierte Abbildung der Koordinatenring hat die Gestalt

$k[t] \leftarrow k[x,y]/(x^2 + x^3 - y^2), t^2 - 1 \leftarrow\!\dashv x, t^3 - t \leftarrow\!\dashv y$.

Sie identifiziert k[Y] mit dem Teilring

$$k[t^2 - 1, t^3 - t] \subseteq k[t].$$

Der Quotientenring des letzteren Rings enthält t, ist also gleich k(t), d.h. es gilt

$\deg f = [k(X):k(Y)] = [k(t):k(t)] = 1$.

(ii) Die Ungleichung

$$\# f^{-1}(y) \le \deg f$$

ist richtig für endliche Abbildungen, wenn der Koordinatenring von Y normal[82] ist.

2.7 Normalisierungssätze

2.7.1 Theorem: Projektive Varietäten sind endlich über $\mathbb{P}^n$

Für jede irreduzible projektive Varietät X gibt es eine endliche Surjektion der Gestalt

$$X \to \mathbb{P}^n.$$

Beweis. Sei $X \subseteq \mathbb{P}^m$ abgeschlossen. Falls "=" gilt, ist nichts zu beweisen. Sei die Inklusion also echt. Wir wählen einen Punkt

$$x \in \mathbb{P}^m - X$$

und betrachten die Projektion mit dem Zentrum x,

$$\varphi: X \to \mathbb{P}^{m-1}.$$

Dies ist nach 1.5.3 (h) eine endliche Abbildung und das Bild $\varphi(X)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{P}^{m-1}$. Falls $\varphi(X) = \mathbb{P}^{m-1}$ ist, so folgt die Behauptung, falls nicht, so wiederholen wir die Argumentation mit $\varphi(X)$ anstelle von X.

QED.

2.7.2 Theorem:Affine Varietäten sind endlich über $\mathbb{A}^n$

Für jede irreduzible affine Varietät X gibt es eine endliche Surjektion der Gestalt

$\varphi: X \to \mathbb{A}^n$.

---

[81] Das Bild von f liegt tatsächlich in Y, denn für das Bild (x,y) von t gilt $x^2 + x^3 = x^2(1 + x) = (t^2 - 1)^2 t^2 = (t^3 - t)^2 = y^2$

[82] d.h. der einzige Ring zwischen k[Y] und k(Y), der endlich ist über k[Y], ist k[Y] selbst. Wie wir sehen werden bedeutet dies, daß Y nicht zu schlimme Singularitäten haben darf.

Man kann sich die Situation so vorstellen, daß die Ungleichung gilt, wenn $\#ff^{-1}(y)$ noch durch die "Vielfachheit" des singulären Punktes y teilt. Im obigen Beispiel sich sich die Faser $f^{-1}(y)$ aus zwei "halben" Fasern zusammen (je eine für einen Zweig der Kurve), und für jede dieser "halben" Fasern gilt die Ungleichung.

Beweis. Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ echte abgeschlossene Teilmenge. Wir betrachten $\mathbb{A}^n$ als offene Teilmenge

$$\mathbb{A}^n = D(S_0) \subset \mathbb{P}^n$$

und bezeichnen mit $\overline{X}$ die projektive Abschließung von X. Das X echte abgeschlossene Teilmenge des affinen Raums ist, ist $\overline{X}$ echte abgeschlossene Teilmenge des projektiven Raums[83]. Die Fernhyperebene

$$H_\infty := \mathbb{P}^n - D(S_0) \nsubseteq \overline{X}$$

ist nicht vollständig enthalten[84] in $\overline{X}$. Wir wählen einen Punkt

$$x \in H_\infty - \overline{X} = \mathbb{P}^n - (\mathbb{A}^n \cup \overline{X}).$$

und betrachten die Projektion

$$\varphi: \overline{X} \to \mathbb{P}^{n-1}$$

mit dem Zentrum x. Ein Bildpunkt von φ liegt genau dann im Endlichen, d.h. in

$$D(S_0) \subseteq \mathbb{P}^{n-1},$$

wenn dasselbe für den Urbildpunkt gilt[85]. Mit anderen Worten, φ induziert eine endliche Abbildung von X auf eine affine Varietät im $\mathbb{A}^{n-1}$. Durch iteriertes Anwenden dieser Aussage ergibt sich die Behauptung.

QED.

Bemerkungen

(i) Die Untersuchung von projektiven Varietäten als endliche Überlagerungen des projektiven Raums verallgemeinert den Riemannschen Standpunkt, Riemannsche Flächen als Überlagerungen der Riemannschen Zahlenkugel zu betrachten.

(ii) Theorem 2.7.2 besagt, jede endlich erzeugte k-Algebra ohne Nullteiler ist eine endliche Erweiterung eines Polynomrings. Man kann diese Aussage auch direkt beweisen. Aus ihr ergibt sich der Hilbertsche Nullstellensatz.

3. Dimension

3.1 Definition der Dimension

3.1.1 Motivation

Im 1.1.7 haben wir gesehen, eine abgeschlossenen Teilmenge des $\mathbb{A}^2$ besteht aus einer endlichen Punktmenge, aus ebenen algebraischen Kurven oder ist selbst gleich dem $\mathbb{A}^2$. Diese Aufteilung entspricht intuitiv dem Begriff der Dimension - wir treffen Varietäten der Dimensionen 0, 1 und 2 an. Unser Ziel ist es jetzt, den Begriff der Dimension für eine beliebige algebraische Varietät zu definieren.

---

[83] Man erhält die Gleichungen von $\overline{X}$ durch Homogenisieren der Gleichungen von X.

[84] Nach dem Nullstellensatz (angewandt auf den affinen Kegel über $\overline{X}$ und über der Fernhyperebene) wären dann alle Gleichungen von $\overline{X}$ durch die Gleichung S_0 der Fernhyperebene teilbar. Beim Homogenisieren entstehen aber Gleichungen, die nicht durch S_0 teilbar sind. Der affine Kegel über einer projektiven Varietät $Z \subseteq \mathbb{P}^N$ mit dem Ideal $I(Z) = V(F_1,...,F_m)$ ist die affine Varietät $V(F_1,...,F_m) \subseteq \mathbb{A}^{N+1}$ mit denselben Gleichungen wir Z. Dies ist ein Kegel in dem Sinne, daß mit jedem Punkt die gesamte Verbindungsgerade mit dem Ursprung in der Varietät liegt.

[85] Da das Zentrum im Unendlichen liegt, liegen die Projektionsstrahlen entweder ganz im Unendlichem oder sie schneiden die Fernhyperebene in genau einem Punkt, nämlich im Zentrum.

Eigenschaften, die die Dimension haben sollte:
1. $\mathbb{P}^n$ und $\mathbb{A}^n$ sollten die Dimension n besitzen.
2. Falls es eine endliche Abbildung $X \to Y$ gibt, so sollten X und Y dieselbe Dimension besitzen.

Da nach Abschnitt 2.7 für jede projektive oder affine Varietät eine endliche Abbildung auf den $\mathbb{P}^n$ bzw. $\mathbb{A}^n$ existiert, ist es naheliegen, als Dimension einer solchen Varietät die Zahl n zu nehmen.

Es erhebt sich jedoch die Frage, ob die Dimension auf diese Weise korrekt definiert ist. Kann es vorkommen, daß es für ein und dieselbe Varietät X endliche Abbildungen

$$X \to \mathbb{A}^m \text{ und } X \to \mathbb{A}^n \text{ mit } m \neq n$$

gibt ?

Nehmen wir an, X ist irreduzibel. Dann ergibt sich aus der Endlichkeit der Abbildung

$$f: X \to \mathbb{A}^m,$$

daß k(X) eine endliche algebraische Erweiterung von

$$f^*k(\mathbb{A}^m) \cong k(T_1,...,T_m)$$

ist. Mit anderen Worten k(X) hat den Transzendenz-Grad m über k.

3.1.2 Definition der Dimension

Sie X eine irreduzible quasi-projektive Varietät. Dann heißt die Zahl

$$\dim X = \text{tr. deg}_k\, k(X)$$

Dimension von X.
Die Dimension einer reduziblen Varietät ist definiert als das Maximum der Dimensionen ihrer Komponenten.
Ist $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilvarietät, so heißt die Zahl

$$\text{codim}_X Y = \dim X - \dim Y$$

Kodimension von Y in X.

Bemerkung
Ist X irreduzibel und $U \subseteq X$ nicht-leer und offen, so gilt k(U) = k(X), also

$$\dim U = \dim X.$$

3.1.3 Beispiel 1 (afffiner und projektiver Raum)

$$\dim \mathbb{P}^n = \dim \mathbb{A}^n = n,$$

denn $\mathbb{A}^n$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{P}^n$, d.h.

$$\dim \mathbb{P}^n = \dim \mathbb{A}^n = \text{tr. deg}_k\, k(T_1, ..., T_n) = n.$$

3.1.4 Beispiel 2 (ebenene algebraische Kurven)

Eine irreduzible ebene algebraische Kurve X hat die Dimension 1 (wie wir in Abschnitt 1.1 gesehen haben): im affinen Fall ist der rationale Funktionenkörper eine algebraische Erweiterung von $k(T_1)$:

$$k(X) = Q(k[T_1, T_2]/(f(T_1, T_2))) =^{86} k(T_1)[T_2]/(f(T_1, T_2)).$$

[86] bei geeigneter Wahl der Koordinaten, vgl. den Beweis von 1.3.10.

3.1.5 Beispiel 3 (endliche Mengen)

Wenn $X = \{(a_1,...,a_n)\}$ aus nur einem Punkt besteht, so gilt

$$\begin{aligned}\dim X &= \text{tr. deg } Q(k[T_1,...,T_n]/(T_1-a_1,...,T_n-a_n)) \\ &= \text{tr.deg } Q(k) \\ &= \text{tr.deg } k \\ &= 0\end{aligned}$$

Allgemeiner ist

$$\dim \{\text{endlich viele Punkte}\} = 0$$

3.1.6 Beispiel 4 (direkte Produkte)

Für irreduzible Varietäten X und Y gilt

$$\dim X\times Y = \dim X + \dim Y.$$

Beweis. Wir können zu offenen Teilmengen übergehen und annehmen,

$$X \subseteq \mathbb{A}^M \text{ und } Y \subseteq \mathbb{A}^N$$

sind affin. Bezeichnungen:

$t_1,...,t_M$ Einschränkungen der Koordinatenfunktionen des $\mathbb{A}^M$ auf X

$u_1,...,u_N$ Einschränkungen der Koordinatenfunktionen des $\mathbb{A}^N$ auf Y

$m := \dim X$

$n := \dim Y$

Wir können annehmen,

$t_1,...,t_m$ algebraisch unabhängig in k(X)

$u_1,...,u_n$ algebraische unabhängig in k(Y)

Es gilt

$$\begin{aligned}k[X\times Y] &= k[X]\otimes_k k[Y] \\ &= k[t_1,...,t_M]\otimes_k k[u_1,...,u_N] \\ &=^{87} k[t_1,...,t_M,u_1,...,u_N]\end{aligned}$$

Alle Elemente des letzten Rings sind algebraisch abhängig von den Elementen

(1) $t_1,...,t_m,u_1,...,u_n$

Es reicht also, zu zeigen, letztere sind algebraisch unabhängig über k. Nehmen wir an, es besteht eine algebraische Relation zwischen ihnen,

$$F(t,u) = F(t_1,...,t_m,u_1,...,u_n) = 0 \text{ auf } X\times Y.$$

Für jedes $x\in X$ gilt dann

$$f(x,u_1,...,u_n) = \text{ auf } Y.$$

Da die $u_1,...,u_n$ algebraisch unabhängig sind auf Y, muß jeder Koeffizient a(x) dieses Polynoms (in den u_i) Null sein. Es gilt also a(x) = 0 für jedes $x\in X$, d.h.

$$a(t_1,...,t_m) = 0 \text{ auf } X.$$

Wegen der algebraischen Unabhängigkeit der $t_1,...,t_m$ auf X, müssend die Koeffizienten des Polynoms

$$a(t_1,...,t_m)$$

sämtlich Null sein. Da dies für alle Koeffizienten des Polynoms F gilt, folgt F = 0. Wir haben gezeigt, die Elemente (1) sind algbraisch unabhängig über k.

---

[87] Wir identifizieren wie $t_i\otimes 1$ mit t_i und $1\otimes u_j$ mit u_j. Das entspricht der Praxis, die i-te Koordinatenfunktion x_i des $\mathbb{A}^m$ auch als Koordinatenfunktion des $\mathbb{A}^m\times\mathbb{A}^n$ anzusehen.

QED.

3.1.7 Theorem: Verhalten der Dimension bei Inklusionen

Seien X und Y quasi-projektive Teilvarietäten des $\mathbb{P}^N$ mit

$$X \subseteq Y.$$

Dann gilt:

(i) dim X ≤ dim Y.

(ii). Ist Y irreduzibel und X abgeschlossen in Y von derselben Dimension,
dim X = dim Y,
so ist X = Y.

Beweis. Wir können annehmen, X und Y sind affin[88] und irreduzibel.[89] Sei

$$X \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^N \text{ und } \dim Y = n.$$

Wir bezeichnen mit

$t_i: \mathbb{A}^N \to k$

die Projektion auf die i-te Koordinate. Die Einschränkungen der t_i auf Y bzw. X, die wir ebenfalls von t_i bezeichnen, erzeugen dann die Koordinatenringe von Y bzw. X.

<u>Zu (i)</u>. Unter den Koordinatenfunktionen $t_1,...,t_N$ sind auf Y je n+1 algebraisch abhängig, d.h. sie genügen algebraischen Relationen

$$f(t_{i_1},...,t_{i_{n+1}}) = 0 \text{ auf } Y.$$

Diese Relationen bestehen erst recht auf der Teilmenge X, d.h. es gilt

$$\dim X \le n = \dim Y.$$

<u>Zu (ii)</u>. Sei

$$\dim X = \dim Y = n$$

Dann gibt es n Koordinatenfunktionen unter den $t_1,...,t_N$, die auf X algebraisch unabhängig sind, sagen wir

$$t_1,...,t_n .$$

Diese sind auch unabhängig auf Y (weil jede Relation auf Y auch auf der kleineren Menge X besteht).

Sei jetzt u ein Polynom, welches auf X identisch Null ist,

$$u \in I(X).$$

Es reicht zu zeigen, u ist auch auf Y identisch Null,

$$u \in I(Y).$$

Angenommen, dies ist nicht der Fall. Als Funktion auf Y genügt u einer algebraischen Relation

(1) $a_0(t_1,...,t_n)\cdot u^l+...+ a_l(t_1,...,t_n) = 0$ auf Y.

Wir können dabei annehmen, das Polynom auf der linken Seite von (1) ist irreduzibel und der höchste Koeffizient ist ungleich Null,

$$a_0(t_1,...,t_n) \ne 0.$$

Die Relation (1) besteht natürlich erst recht auch auf X. Wegen u = 0 auf X gilt mit (1) auch

---

[88] Wir können sogar annehmen, X ist abgeschlossen in $Y \subseteq \mathbb{A}^N$: man kann eine offene Hauptmenge $X\cap D(F)$ von X wählen und X und Y durch $X\cap D(F)$ bzw. $Y\cap D(F)$ ersetzten.

[89] Wir benutzen die Tatsache, daß mit $X\subseteq Y$ jede irreduzible Komponente X_i von X ganz in einer von Y liegt: die Zerlegung von Y in Komponenten würde sonst eine echte Zerlegung von X_i in Komponenten induzieren.

$$a_l(t_1,...,t_n) = 0 \text{ auf } X.$$

Weil die $t_1,...,t_n$ algebraisch unabhängig sind auf X, muß das Polynom a_l identisch Null sein (auf $\mathbb{A}^N$ also auch auf Y). Das widerspricht aber der Irreduzibilität der linken Seite von (1).
QED.

3.1.8 Theorem: Die Dimension der Komponenten von Hyperflächen

Die irreduziblen Komponenten einer Hyperfläche im $\mathbb{A}^N$ oder $\mathbb{P}^N$ haben die Kodimension 1.
Beweis. Wir können uns auf den Fall von Hyperflächen im $\mathbb{A}^N$ beschränken[90]. Sei

$$X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^N$$

die Hyperfläche. Wir betrachten die Zerlegung

$$f = f_1\cdot...\cdot f_l$$

der definierenden Gleichung in irreduzible Faktoren. Da f_i in k[T] ein Primideal erzeugt sind die $V(f_i)$ gerade die irreduziblen Komponenten von X und diese haben das Ideal

$$(f_i)\subseteq k[T].$$

Wir können uns auf den Fall $X = V(f_i)$ beschränken, d.h. wir können annehmen,

$$f \text{ irreduzibel.}$$

O.B.d.A komme die Unbestimmte T_N in F wirklich vor. Es reicht zu zeigen, die Koordinatenfunktionen

$$t_i := T_i|_X \text{ mit } i = 1,...,N-1$$

sind algebraisch unabhängig. Angenommen, sie wären abhängig. Dann gäbe es ein Polynom g in $T_1,...,T_{N-1}$ mit

$$g(T_1,...,T_{N-1}) = 0$$

auf X. Nach dem Nullstellensatz gilt dann[91] $f \mid g^r$ für ein r, was nicht möglich ist, da T_N in g nicht vorkommt.
QED.

3.1.9 Theorem: Mengen der Kodimension 1 sind Hyperflächen

Jede abgeschlossene Teilmenge $X\subseteq\mathbb{A}^N$, deren irreduzible Komponenten die Kodimension 1 haben, ist eine Hyperfläche. Das Ideal von X ist ein Hauptideal.
Beweis. Wir können uns auf den Fall beschränken, daß X irreduzibel ist. Wegen

$$\dim X = N-1 \ne N$$

ist $X \ne \mathbb{A}^N$, d.h. es gibt ein Polynom $f\in k[T] - \{0\}$ mit

$$f = 0 \text{ auf } X.$$

Weil X irreduzibel ist (d.h.I(X) ist prim), können wir annehmen f ist irreduzibel. Dann gilt

$$X \subseteq V(f) = \text{irreduzibel}$$

und

$$\dim X = N-1 = \dim V(f).$$

Nach Theorem (g) folgt X = V(f) und es ist

---

[90] Auf jeder Komponente gibt es einen Punkt mit einer affinen Umgebung.

[91] Wegen $V(f) \subseteq V(g)$ gilt $\sqrt{(g)} \subseteq \sqrt{(f)}$, d.h. eine Potenz von g liegt in (f).

$$I(X) = \sqrt{(f)} = (f)$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen (f) prim.
QED.

3.1.10 Theorem:Mengen der Kodimension 1 in Produkträumen

Jede Teilvarietät $X \subseteq \mathbb{P}^{N_1} \times ... \times \mathbb{P}^{N_r}$, deren irreduzible Komponenten die Kodimension 1 haben, wird durch eine Gleichung definiert, die homogen ist in jeder der r Gruppen von Variablen.
Beweis. Der Beweis ist analog zu dem von 3.1.9.[92]
QED.

3.2 Die Dimension von Schnitten mit Hyperebenen

Wenn wir versuchen, Varietäten zu verstehen, die durch mehr als nur eine Gleichung definiert sind, so werden wir sofort mit der Frage nach der Dimension des Durchschnitts einer Varietät mit einer Hyperfläche konfrontiert.

Wir untersuchen dieses Problem zunächst für projektive Varietäten.

3.2.1 Hyperebenenschnitte

Für jede abgeschlossene Teilmenge $X \subseteq \mathbb{P}^N$ und jede Form F, die auf X nicht identisch Null ist, setzen wir

$$X_F = X \cap V(F) = \{x \in X \mid F(x) = 0\}$$

Ein solche Menge heißt Hyperebenenschnitt von X.
Bemerkungen
(i) Man kann stets ein F mit vorgegebenen Grad finden, das auf keiner Komponente von X identisch verschwindet.
(ii) Wir berechnen als nächstes die Dimension von X_F im irreduziblen Fall.

Beweis von (i). Wir wählen auf jeder irreduziblen Komponente einen Punkt. Dann gibt es eine Linearform, die in keinem dieser Punkte Null ist.[93] Durch Übergang zu einer Potenz erhalten wir eine Form mit vorgegebenem Grad.
QED.

---

[92] Man braucht, daß die irreduziblen Faktoren eines multi-homogenen Polynoms multi-homogen sind. Das ist aber leicht einzusehen: aus $f = g \cdot h$ und f multi-homogen und g,h beliebig kann man leicht eine Zerlegung gewinnen mit g und h multi-homogen.

Genauer: man muß eine Ordnung in der Menge der "Multi-Grade" (a,b) = deg f einführen die "verträglich" ist mit der Multiplikation von Polynomen,

$$\deg f < \deg f' \text{ und } g \neq 0 \Rightarrow \deg (fg) < \deg (f'g),$$

zum Beispiel die lexikographische Ordnung:

$$(a,b) < (a', b') \Leftrightarrow a < b \text{ oder } (a=a' \text{ und } b<b').$$

Es ist dann leicht zu sehen, das multi-homogene Glied kleinsten Grades (die "Anfangsform") eines Produktes erhält man gerade, indem man die Anfangsformen der Faktoren multipliziert.

[93] Die Hyperflächen durch einen Punkt im $\mathbb{P}^N$ entsprechen einer Hyperfläche in einem anderen $\mathbb{P}^N$ (dem dualen projektiven Raum). Die Menge der Hyperflächen, die durch einen von endlich vielen Punkten gehen, entsprechen im dualen Raum der Vereinigung von endlich vielen Hyperflächen. Diese Vereinigung hat die Dimension N-1, ist also vom gesamten dualen Raum verschieden. Es gibt also eine Hyperfläche, die alle die vorgegebenen Punkte meidet.

3.2.2 Theorem: Die Dimension eines Hyperebenenschnitts im irreduziblen Fall

Seien $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge und F eine Form, die nicht identisch Null ist auf X. Dann gilt $\dim X_F = \dim X - 1$.

Beweis. Wir verzichten zunächst auf die Annahme, daß X irreduzibel sein soll, fordern aber, daß F auf keiner Komponente von X Null ist. Ist

$$X = X_1 \cup ... \cup X_r$$

die Zerlegung in irreduzible Komponenten, so gilt

$$X_F = (X_1)_F \cup ... \cup (X_r)_F$$

und jedes $(X_i)_F$ ist echt in der irrduziblen Menge X_i enthalten. Es folgt

$$\dim (X_i)_F < \dim X_i,$$

also $\dim X_F < \dim X$. Wir wiederholen jetzt die Argumentation mit $X^{(1)} := X_F$ anstelle von $X^{(0)} := X$ und einem homogenen Polynom F_1 anstelle von $F_0 := F$, das auf keiner Komponente von $X^{(1)}$ Null ist. Wir erhalten auf diese Weise eine absteigende Kette von geschlossenen Teilmengen

$$X = X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset ... \supset X^{(i+1)} = X^{(i)}_{F_i} \supset ...$$

mit einer Form F_i die auf keiner Komponente von $X^{(i)}$ Null ist. Nach Bemerkung 3.2.1(i) können wir dabei noch den Grad der F_i vorgeben. Sei also

$$\deg F_i = \deg F \text{ für alle i.}$$

Nach Konstruktion gilt

(1) $$\dim X^{(i)} <= d - i \text{ mit } d := \dim X$$

für alle i. Deshalb ist insbesondere

$$X^{(d+1)} = \emptyset$$

leer, d.h. die Formen $F_0,...,F_d$ haben auf X keine gemeinsame Nullstelle. Sei jetzt X irreduzibel. Wir betrachen die reguläre Abbildung

$$\varphi: X \to \mathbb{P}^d, x \mapsto [F_0(x),...,F_d(x)] .$$

Nach Theorem 2.6.8 ist diese Abbildung endlich. Insbesondere ist

$$\dim \varphi(X) = \dim X = d.$$

Weil X projektiv ist, ist $\varphi(X)$ abgeschlossen in $\mathbb{P}^d$. Nach 3.1.7 folgt

$$\varphi(X) = \mathbb{P}^d.$$

Wir haben noch zu zeigen, in (1) gilt für i=1 das Gleichheitszeichen. Angenommen, die Ungleichung wäre echt. Dann wäre nach der oben durchgeführten Argumentation bereits die Menge

$$X^{(d)} = \emptyset$$

leer. Mit anderern Worten, die Formen $F_0,...,F_{d-1}$ besitzen keine gemeinsame Nullstelle auf X. Das bedeutet aber, der Punkt [0,...,0,1] liegt nicht im Bild von φ im Widerspruch zur (gerade bewiesenen) Surjektivität von φ.
QED.

3.2.3 Folgerung 1: Existenz von Teilvarietäten zu vorgegebener Dimension

Auf einer projektiven Varietät X gibt es zu jeder vorgegebenen Dimension s < dim X eine Teilvarietät.

3.2.4 Folgerung 2: Induktive Definition der Dimension

Für jede irreduzible projektive Varietät X gilt

$$\dim X = 1 + \sup \{ \dim Y \mid Y \subset X \text{ echte Teilvarietät} \}.$$

3.2.5 Folgerung 3: Dimension als maximale Kettenlänge

Für jede projektive Varietät X gilt

$$\dim X = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid \begin{array}{c} \text{es gibt eine echt absteigende Kette} \\ \text{irreduzibler Teilvarietäten } Y_0 \supset Y_1 \supset \ldots \supset Y_n \end{array} \}$$

3.2.6 Folgerung 4: Dimension und komplementäre lineare Unterräume

Für jede projektive Varietät $X \subseteq \mathbb{P}^N$ gilt

$$\dim X = N - s - 1,$$

wenn s die größte Dimension eines linearen Unterraums $E \subseteq \mathbb{P}^N$ ist mit

$$X \cap E = \emptyset.$$

3.2.7 Folgerung 5: Dimension einer Nullstellenmenge mit r Gleichungen

Seien $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine projektive Varietät und $F_1,\ldots,F_r$ homogenen Polynome. Dann gilt

$$\dim X \cap V(F_1,\ldots,F_r) \geq \dim X - r.$$ [94]

Bemerkungen

(i) Insbesonder ist $X \cap V(F_1,\ldots,F_r) \neq \emptyset$ im Fall $r \leq \dim X$.

(ii) n homogene Polynome in n+1 Unbestimmten besitzt stets eine gemeinsame Nullstelle.

(iii) Je zwei Kurven im $\mathbb{P}^2$ besitzen einen gemeinsamen Schnittpunkt. Für die nicht-entartete Fläche zweiter Ordnung

$$Q (\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^3$$

ist das nicht so.[95] Insbesondere sind Q und $\mathbb{P}^2$ nicht isomorph. Wir haben damit ein Beispiel nicht-isomorpher Varietäten gefunden, die birational isomorph sind[96].

(iv) <u>Vollständige Durchschnitte</u>. Theorem 3.1.9 (i)[97] ist falsch zum Beispiel für die Kurven auf der nichtentarteten quadratischen Fläche

$$Q = V(H) \subseteq \mathbb{P}^3.$$

Würden sich zwei Kurven der Schar $\{pt\} \times \mathbb{P}^1$ durch jeweils eine Form definieren lassen, sagen wir durch F bzw. G, so hätte das Gleichungssystem

$$F = G = H = 0$$

im $\mathbb{P}^3$ keine Lösung (im Widerspruch zu Bemerkung (ii). Eine abgeschlossene Teilvarietät X einer Varietät Y heißt (mengentheoretisch) <u>vollständiger Durchschnitt</u> in Y, wenn X in Y durch n Gleichungen deiniert werden kann mit

$$n := \text{codim}_Y X := \dim Y - \dim Y.$$

Die Mantellinien eines Kreiskegels sind also keine vollständigen Durchschnitte.

---

[94] Folgt durch wiederholtes Anwenden von 3.2.2.

[95] Wir wissen, $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und je zwei Kurven der Gestalt $\{pt\} \times \mathbb{P}^1$ sind disjunkt.

[96] Sie enthalten beide den $\mathbb{A}^2$ als offene Teilmenge.

[97] abgeschlossene Mengen der reinen Kodimension 1 lassen sich durch eine Gleichung definieren.

3.2.8 Theorem: Dimension der Komponenten eines Hyperebenenschnitts

Seien $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge der Dimension d und F eine Form, die nicht identisch Null ist auf X. Dann hat jede irreduzible Komponente von X_F die Dimension d - 1.

Beweis. Wir betrachten die endliche Abbildung aus dem Beweis von 3.2.2,

$$\varphi: X \to \mathbb{P}^d,\ x \mapsto [F_0,...,F_d],$$

mit $F_0 = F$. Weiter setzen wir für i = 0,...,d

$$U_i := \varphi^{-1}(D(S_i)) = X \cap D(F_i).$$

Die U_i bilden eine Überdeckung von X durch affine offene Teilmengen[98],

$$X = U_0 \cup ... \cup U_d .$$

Es reicht zu zeigen, die irreduziblen Komponenten der affinen Varietäten

(1) $$U_i \cap X_F$$

haben die Dimension d-1. Alle weiteren Betrachtungen werden sich auf ein fest gewähltes i beziehen. Wir werden deshalb den Index i weglassen und einfach U anstelle von U_i schreiben. Die Menge (1) läßt sich wie folgt schreiben.

$$U \cap X_F = \{ x \in U \mid F(x) = 0 \} = \{ x \in U \mid f(x) = 0 \} \text{ mit } f = \frac{F}{F_i},$$

d.h. es ist gerade die Menge der Nullstellen der regulären Funktion $f \in k[U]$ auf der irreduziblen affinen Varietät,

$$U \cap X_F = V(f), \text{ U irreduzibel affin.}$$

Die Einschränkung der Abbildung φ auf U ist eine endliche Abbbildung[99]

(2) $\varphi: U \to \mathbb{A}^d,\ x \mapsto (f_1,...,f_d)$ mit $f_1 = f$.

Wegen $\dim X_F = d-1$, genügt es zu zeigen, die irreduziblen Komponenten von V(f) haben eine Dimension $\geq$ d-1. Es reich also zu zeigen,

$$f_2,...,f_d \text{ sind algebraisch unabhängig auf jeder Komponente von } V(f).$$

Sei $P \in k[T_2,...,T_d]$ ein von Null verschiedenes Polynom. Wir haben zu zeigen,

$$R := F(f_2,...,f_d) \neq 0 \text{ auf jeder Komponente von V(Ï).}$$

Dazu reicht es zu zeigen[100],

$$R \cdot Q = 0 \text{ auf } V(f),\ Q \in k[U] \Rightarrow Q = 0 \text{ auf } V(f).$$

Mit Hilfe des Nullstellensatzes für k[U] kann man diese Implikation wie folgt umformulieren:

$$f \mid (R \cdot Q)^a \text{ für ein a} \Rightarrow f \mid Q^b \text{ für ein b.}$$

---

[98] Die Offenheit der U_i ist klar. Sie sind affin, weil die Mengen $D(F_i)$ affin sind. Letzteres ist klar im Fall, daß F_i eine Linearform ist. Im allgemeinen Fall benutze man die Veronese-Einbettung, um $D(F_i)$ als abgeschlossene Teilmenge des Komplements einer Hyperebenen des projektiven Raums darzustellen.

[99] Die Koordinatenfunktionen haben gerade die Gestalt $\frac{F_j}{F_i}$

[100] Die i-te Komponente von V(f) liegt nicht in der Vereinigung der übrigen Komponenten. Es gibt also ein Polynom Q, welches auf allen Komponenten Null ist, nicht aber auf der i-ten. Die obige Implikation bedeutet dann, $R \cdot Q \neq 0$, d.h. R ist nicht Null auf der i-ten Komponente von V(f).

Die Abbildung (2) sorgt dafür, daß der Integritätsbereich k[U] eine ganze Erweiterung von $k[T_1,...,T_d]$ ist. Die zu beweisende Implikation ergibt sich deshalb aus folgenden Lemma.
QED.

Lemma
Seien A ein Integritätsbereich, der ganz ist über dem Teilring $B = k[T_1,...,T_d]$. Weiter seien

$$R \in k[T_2,...,T_d] - \{0\},\ Q\in A - \{0\}$$

Elemene mit $T_1 \mid (R\cdot Q)^a$ in A für ein a>0. Dann gilt $T_1 \mid Q^b$ in A für ein b > 0.
Beweis. Die einzigen Eigenschaften der Polynome

$$x := T_1 \text{ und } y := R,$$

die wir verwenden werden, ist die Tatsache, daß sie teilerfremd sind im ZPE-Ring B. Wir setzen weiter

$z := R^a$ und $v := Q^a$.

Dann bekommt die zu beweisende Implikation die Gestalt:

(3) $x,z\in B$ teilerfremd, $v\in A$ mit $x \mid vz$ in A $\Rightarrow$ $x \mid v^c$ in A für ein c > 0.

Die Implikation besagt, daß die Eigenschaft, teilerfremd zu sein, in gewissem Sinne erhalten bleibt beim Übergang zu ganzen Erweiterungen.

Sei K der Quotientenkörper von B,

$K := Q(B) = k(T_1,...,T_d)$.

Zwischenbemerkung (das Minimalpolynom eines ganzen Elements)
Jedes Element $t\in A$ ist ganz über B, also algebraisch über K. Sei

$F(T) \in K[T]$

das Mininimalpolynom, d.h. F sei normiert und irreduzibel mit F(t) = 0. Weil t ganz ist über B, gibt es außerdem ein normiertes Polynom

$G(T)\in B[T]$

mit G(t) = 0. In K[T] ist F ein Teiler von G,

$G = F\cdot H$ mit $H\in K[T]$

Durch Multiplikation der beiden Faktoren rechts mit Einheiten aus K gewinnt man aus dieser Zerlegung eine Zerlegung von G im Ring B[T]. Da G den höchsten Koeffizienten 1 hat, muß nach den Gaußschen Lemma die gegebene Zerlegung bereits eine Zerlegung in B[T] sein,

$F\in B[T],\ H\in B[T]$

Die Ganzheit des Elements t impliziert also, daß sein normiertes Minimalpolynom Koeffizienten in B hat.

Fahren wir fort mit dem Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$vz = xw$ für ein $w\in A$

Sei

$$F(T) = T^l + b_1T^{l-1} + ... + b_l$$

das Minimalpolynom von w über K. Weil w ganz ist über B, gilt $b_i\in B$ für jedes i. Das Minimalpolynom G des Elements $v = \frac{x}{z}w$ über K hat dann die Gestalt

(4) $$G(T) = \frac{x^l}{z^l}F(\frac{z}{x}\cdot T) = T^l + \frac{xb_1}{z}\cdot T^{l-1} + ... + \frac{x^lb_l}{z^l}$$

(5) $\quad 0 \quad = v^{l} + \frac{xb_1}{z} \cdot v^{l-1} + ... + \frac{x^{l} b_l}{z^{l}}$

Da $v \in A$ ganz ist über B, gilt $\frac{x^i b_i}{z^i} \in B$ für alle i. Da x und z nach Voraussetzung teilerfremd sind, folgt $z^i \mid b_i$ für alle i. Wegen (5) ist damit $x \mid v^{l}$

QED.

3.2.9 Folgerung 1: der quasi-projektive Fall

Seien $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine quasi-projektive irreduzible Varietät und F eine Form, die nicht identisch Null ist auf X. Dann ist X_F entweder leer oder jede irreduzible Komponente von X_F hat die Kodimension 1.

Beweis. Als quasi-projektive Varietät ist X offene Teilmenge einer abgeschlossenen Teilmenge

$$\bar{X} \subseteq \mathbb{P}^N.$$

Weil X irreduzibel ist, können wir annehmen, $\bar{X}$ ist auch irreduzibel. Als offene Teilmenge von $\bar{X}$ hat X dieselbe Dimension wie $\bar{X}$. Nach Theorem (h) hat die irreduzible Zerlegung von $\bar{X}_F$ die Gestalt

$$\bar{X}_F = \cup Y_i \text{ mit } \dim Y_i = \dim X - 1$$

Wir schneiden mit der offenen Teilmenge X und erhalten die Behauptung.

QED.

3.2.10 Folgerung 2: iterierte Hyperebenenschnitte

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine irreduzible quasi-projektive Varietät der Dimension d und $F_1,...,F_m$ seien Formen auf X. Dann ist

$$X \cap V(F_1,...,F_m)$$

entweder leer, oder jede irreduzible Komponente dieses Durchschnitts hat eine Dimension $\ge$ d-m.

Beweis ergibt sich durch wiederholtes Anwenden von (i).

QED.

3.2.11 Theorem: Dimension der Komponenten eines Durchschnitts

Seien X, $Y \subseteq \mathbb{P}^N$ irreduzible quasi-projektive Varietäten der Dimensionen

$$\dim X = m \text{ , } \dim Y = n.$$

Es gelte $N < m + n$ und $X \cap Y \ne \emptyset$. Dann gilt

$$\dim Z \ge m + n - N$$

für jede irreduzible Komponente Z von $X \cap Y$.

Beweis. Die Behauptung hat lokalen Charakter. Wir können deshalb annehmen, X und Y sind affine Varietäten. Dann besteht aber die Isomorphie

$$X \cap Y \cong (X \times Y) \cap \Delta \text{ (im } \mathbb{A}^{2N})$$

Die Behauptung folgt damit aus 3.2.10, denn Δ wird durch N Gleichungen definiert.

QED.

Bemerkungen

(i) Im projektiven Fall ist der Durchschnitt unter der Bedinung $N < m+n$ nie leer.

(ii) In etwas symmetrischerer Weise kann man die Aussage (im projektiven Fall) für eine beliebige Anzahl von Teilvarietäten wie folgt formulieren:

$$\operatorname{codim}_X \cap_{i=1}^r Y_i \le \sum_{i=1}^r \operatorname{codim}_X Y_i$$

3.3 Der Satz von der Dimension der Faser

3.3.1 Theorem: Satz von der Dimension der Faser

Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung quasi-projektiver Varietäten mit

1. X, Y irreduzibel.
2. $f(X) = Y$.

Dann gilt

(i) $\dim X \ge \dim Y$.

(ii) $\dim f^{-1}(y) \ge \dim X - \dim Y$ für jedes $y\in Y$.[101]

(iii) Für die Punkte aus einer nicht-leeren offenen Menge $V\subseteq Y$ gilt in (ii) das Gleichheitszeichen.

Beweis. Zu (ii). Die Aussage ist lokaler Natur bezüglich Y. Wir können annehmen, Y ist eine affine Varietät. Sei also

$$Y \subseteq \mathbb{A}^N \text{ abgeschlossen.}$$

Sei $\bar{Y}$ die Abschließung von Y im projektiven Raum $\mathbb{P}^N$ ($\supseteq \mathbb{A}^N$). Wie im Beweis von 3.2.2 betrachten wir eine echt absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen

(1) $\bar{Y} = Y^{(0)} \supset \ldots \supset Y^{(i)} \supset Y^{(i+1)} \supset \ldots \supset Y^{(n)}$, $n := \dim Y$.

Dabei sei

$$Y^{(i+1)} = Y^{(i)} \cap V(G_i)$$

mit einer Hyperfläche $V(G_i)$, die keine Komponente von $Y^{(i)}$ ganz enthält. Nach 3.2.10 hat dann jede Kompontente von $Y^{(i)}$ eine Dimension[102] = n-i.

Wir können dabei sogar annehmen, die $V(G_i)$ sind Hyperebenen und gehen sämtlich durch den vorgegebenen Punkt $y\in Y$. Eine solche Hyperebene findet sich, solange die Komponenten von $Y^{(i)}$ eine Dimension >0 haben, d.h. wir erhalten eine Kette der Gestalt (1).[103] Die Menge $Y^{(n)}$ ist 0-dimensional, besteht also aus nur endlich vielen Punkten, unter denen sich der Punkt y befindet. Wir können deshalb eine offene affine Umgebung $U \subseteq \mathbb{A}^N$ von y finden mit

$$Y^{(n)} \cap U = \{y\}.$$

---

[101] Der nachfolgende Beweis zeigt, diese Ungleichung bleibt bestehen, wenn man $f^{-1}(y)$ durch eine beliebige Komponente der Faser ersetzt.

[102] Auf Grund des Satzes ist die Dimension ≥ n-i. Auf Grund der speziellen Wahl der Hyperflächen sinkt die Dimension in jedem Schritt jedoch um mindestens 1, d.h. die Komponenten haben die Dimension = n-i.

[103] Sieht man die Koeffizienten der betrachteten Hyperebenen als Punkte in einem N-dimensionalen projektiven Raum $\check{\mathbb{P}}^N$ an, so bedeutet die Bedingung, durch einen Punkt zu gehen, den Übergang zu einer Hyperebene von $\check{\mathbb{P}}^N$. Die Bedingung nicht durch einen gegebenen Punkt einer Komponente zu gehen, bedeutet den Übergang zu einer offenen Teilmenge dieser Hyperebene. Der Durchschnitt endlich vieler solcher offenen Teilmengen ist nicht leer.

Die Menge $Y^{(n)} = Y\cap V(G_0,....,G_{n-1})$ ist auf Y durch n Gleichungen definiert. Deshalb ist die einpunktige Menge {y} auf U durch n Gleichungen definiert. Wir ersetzen jetzt Y durch U und X durch $f^{-1}(U)$ und können somit O.B.d.A annehmen, die Menge

$$\{y\} = V(g_0,...,g_{n-1}),\ g_i\in k[Y]$$

ist durch n Gleichungen definiert. Die Faser über y hat dann die Gestalt

$$f^{-1}(y) = V(g_0\circ f,...,g_{n-1}\circ f),$$

d.h. sie ist auf X ebenfalls durch n Gleichungen definiert. Nach 3.2.10 gilt damit

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - n = \dim X - \dim Y.$$

Diese Ungleichung bleibt erhalten, wenn man die Faser $f^{-1}(y)$ durch eine beliebige ihrer Komponenten ersetzt.

Zu (i) und (iii). Wir haben zu zeigen,

(2) $\dim f^{-1}(y) \leq \dim X - \dim Y$ für y aus einer offenen Teilmenge von Y.

Wir können Y durch eine offene Teilmenge ersetzen, also wieder annehmen,

$$Y \subseteq \mathbb{A}^N \text{ abgeschlossen.}$$

Aufgabe: Man zeige, jede quasi-projektive Varietät besitzt eine endliche Überdeckung durch affine offene Teilmengen.[104]

Sei

$$X = U_1\cup...\cup U_r$$

eine solche Überdeckung. Wenn wir für jede der Einschränkungen

$$f_i = f|_{U_i} : U_i \to Y$$

eine offene Teilmenge in Y finden, für welche (2) gilt, so ist für y aus dem Durchschnitt dieser offenen Teilmengen

$$\dim f^{-1}(y) \leq^{105} \max \dim f^{-1}(y)\cap U_i \leq \dim X - \dim Y.$$

Wir können also annehmen, X ist affin, sagen wir,

$$X \subseteq \mathbb{A}^M \text{ abgeschlossen.}$$

Man beachte, weil die U_i dicht liegen in X, liegen auch die $f(U_i)$ dicht in Y, d.h die f_i sind reguläre dominante Abbildungen. Nach 2.6.6 gibt es eine nicht-leere offene Teilmenge von Y, die ganz im Bild eines jeden f_i liegt. Indem wir Y durch diese offene Teilmenge ersetzen, erreichen wir, daß Voraussetzung 2 bei dieser Reduktion erhalten bleibt.

Die Abbildung

$$f^*: k[Y]\to k[X]$$

---

[104] Sei $X = X'-X''$ mit $X',X'' \subseteq \mathbb{P}^N$ abgeschlossen. Dann gilt

$$X' = D_{X'}(S_0)\cup...\cup D_{X'}(S_N) \text{ mit } D_{X'}(F) := \{p\in X' \mid F(p) \neq 0\}$$

$$X'' = V(G_1,...,G_s)$$

Es reicht zu zeigen, die $D_{X'}(S_i) - X''$ besitzen eine endliche affine offene Überdeckung. Das ist aber der Fall wegen

$$D_{X'}(S_i) - X'' = D_{X'}(S_iG_1)\cup...\cup D_{X'}(S_iG_s)$$

[105] Zu jeder Komponente von $f^{-1}(y)$ gibt es eine nicht-leere offene Teilmenge, die ganz in einem der Durchschnitte $f^{-1}(y)\cap U_i$ enthalten ist.

ist nach Voraussetzung injektiv. Wir werden im folgenden der Einfachheit halber annehmen,

$$k[Y] \subseteq k[X]$$

und damit $k(Y) \subseteq k(X)$. Bezeichnungen:

$n := \dim Y$
$m := \dim X$
$k[Y] = k[y_1,...,y_N]$
$k[X] = k[x_1,...,x_M]$

Der Körper $k(X)$ hat über $k(Y)$ den Transzendenzgrad m-n (≥ 0). Wir können annehmen,

$x_1,...,x_{m-n}$ algebraisch unabhängig über $k(Y)$.

Die übrigen x_i sind von diesen abhängig, es gilt

$$F_i(x_i, x_1,...,x_{m-n}, y_1,...,y_N) = 0,\ i = m-n+1,..., M,$$

mit Polynomen F_i über k, wobei x_i in F_i wirklich vorkommt. Sei $\bar{x}_i$ die Einschränkung von x_i auf $f^{-1}(y)$, Dann gilt

$$k[f^{-1}(y)] = k[\bar{x}_1,...,\bar{x}_M]$$

Wir betrachten jetzt die Polynome F_i als Polynome in den x_j allein, so daß die Koeffizienten der F_i Polynome in den y_j sind. Wir nehmen die von Null verschiedenen Koeffizientenpolynome a_{ij} der F_i her und betrachten die Menge

$$V := \{y \in Y \mid a_{ij}(y) \neq 0 \text{ für alle i und alle j }\}$$

Dies ist eine nicht-leere offene Teilmenge von Y (weil Y irreduzibel ist). Für $y \in V$ sind die Polynome

$$F_i(T_i, T_1,...,T_{m-n}, y_1(y),...,y_N(y)) \neq 0$$

nicht identisch Null und zeigen, die $\bar{x}_i$ sind algebraisch abhängig von den

$$\bar{x}_1,...,\bar{x}_{m-n}.$$

Die irreduziblen Komponenten von $f^{-1}(y)$ haben deshalb sämtlich eine Dimension $\leq$ n-m, d.h. es gilt

$$\dim f^{-1}(y) \leq n - m.$$

QED.

3.3.2 Folgerung: Mengen mit einer Faserdimension ≥ q

Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung quasi-projektiver Varietäten mit

1. X, Y irreduzibel.
2. $f(X) = Y$.

Dann ist für jede ganze Zahl q die Menge

$$Y_q := \{y \in Y \mid \dim f^{-1}(y) \geq q \}$$

abgeschlossen in Y.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach $\dim Y$. Im Fall $\dim Y = 0$ ist Y ein einzelner Punkt und die Mengen Y_q sind leer oder gleich Y, d.h. die Behauptung gilt. Sei jetzt $\dim Y > 0$. Für $q \leq \dim X - \dim Y$ ist $Y_q = X$ (nach 3.3.1), d.h. die Behauptung gilt. Sei jetzt $q > \dim X - \dim Y$. Dann gibt es nach 3.3.1(iii) eine echte abgeschlossene Teilmenge

$$Y' \subset Y \text{ (echt enthalten)}$$

mit

$$Y_q \subseteq Y'.$$

Sei

$$Y' = Y'_1 \cup ... \cup Y'_r$$

die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Weil Y irreduzibel ist, gilt
$\dim Y'_i < \dim Y$. Nach Induktionsvoraussetzung ist damit die Behauptung richtig für die Einschränkungen

(1) $$f_{ij}: Z_{ij} \subseteq f^{-1}(Y'_i) \to Y'_i$$

von f auf die irreduziblen Komponenten Z_{ij} der $f^{-1}(Y'_i)$.
Nach Konstruktion gilt

$$Y_q \subseteq \cup Y'_i$$

also

$$Y_q = (Y_q \cap Y'_1) \cup ... \cup (Y_q \cap Y'_1).$$

Außerdem ist

$$Y_q \cap Y'_i =^{106} \cup_j \{y \in Y'_i \mid \dim f_{ij}^{-1}(y) \geq q\}$$

Es reicht also, die Behauptung für die Abbildungen (1) zu beweisen. Für diese gilt sie aber nach Induktionsvoraussetzung.
QED.

3.3.3 Reguläre Abbildungen mit irreduziblen Fasern konstanter Dimension (im projektiven Fall)

Sei f: X → Y eine reguläre Abbildung von projektiven Varietäten und $V \subseteq Y$ eine nicht-leere offen Teilmenge. Wir nehmen an:

1. f(X) liegt dicht in Y.
2. Y ist irreduzibel.
3. Für $y \in V$ sind die Fasern $f^{-1}(y)$ irreduzibel und alle von derselben Dimension.

Dann ist $f^{-1}(V)$ irreduzibel.
Beweis. 1. Schritt: Reduktion auf den Fall X und Y projektiv (und f(X) = Y).
Seien

$$X \subseteq \mathbb{P}^M \text{ und } Y \subseteq \mathbb{P}^N$$

Der Graph von f,

$$\Gamma_f := \{(x, f(x) \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{P}^M \times \mathbb{P}^N$$

ist isomorph zu X. Die Abbildung f läßt sich deshalb zerlegen

$$X \xrightarrow{i} \Gamma_f \subseteq \mathbb{P}^M \times \mathbb{P}^N \xrightarrow{p} \mathbb{P}^N$$

$$x \mapsto (x, f(x)), \quad (x,y) \mapsto y$$

in den Isomorphismus i und die Projektion p auf den zweiten Faktor. Wir identifizieren die Varietät X mit ihrem Graphen Γ_f, betrachten sie als Teilvarietät des Produktraums

---

106 Beweis von "$\subseteq$". Für $y \in Y_q \cap Y'_i$ hat $f^{-1}(y)$ eine Dimension $\geq q$ und liegt ganz in $f^{-1}(Y'_i)$. Jede irreduzible Komponente von $f^{-1}(y)$ liegt ganz in einer irreduziblen Komponente Z_{ij} von $f^{-1}(Y'_i)$, und damit ganz in einen $f_{ij}^{-1}(y)$. Also besteht für mindestens ein j die Ungleichung $\dim f_{ij}^{-1}(y) \geq \dim f^{-1}(y) \geq q$. Mit anderen Worten, y liegt in der rechten Seite der zu beweisenden Identität.
Beweis von "$\supseteq$": trivial. Jede der Mengen der Vereinigung rechts liegt in der Menge links.

$$X \subseteq \mathbb{P}^M \times \mathbb{P}^N$$
und führen Bezeichnungen für die projektiven Abschließungen von X und Y ein:
$$\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^M \times \mathbb{P}^N \text{ und } \overline{Y} \subseteq \mathbb{P}^N$$
Die ursprünglichen Mengen X und Y sind dann offene dichte Teilmengen von $\overline{X}$ bzw. $\overline{Y}$. Insbesondere ist mit Y auch
$$\overline{Y} \text{ irreduzibel.}$$
Die Einschränkung der Projektion p auf $\overline{X}$ bezeichnen wir mit
$$\overline{f}: \overline{X} \subseteq \mathbb{P}^M \times \mathbb{P}^N \xrightarrow{p} \mathbb{P}^N.$$
Nach Konstruktion ist $\overline{f}$ gerade die Fortsetzung von f auf $\overline{X}$. Insbesondere gilt
$$\overline{f}(X) = f(X) \subseteq Y \subseteq \overline{Y},$$
d.h. $\overline{f}$ läßt sich als Abbildung mit Werten in $\overline{Y}$ auffassen, und es besteht ein kommutatives Diagramm
$$\begin{array}{ccc} \overline{X} & \xrightarrow{\overline{f}} & \overline{Y} \\ \cup & & \cup \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$
Das Bild von $\overline{f}$ enthält die dichte Teilmenge X von Y und ist als Bild einer projektiven Varietät abgeschlossen in $\overline{Y}$. Also gilt
$$\overline{f}(\overline{X}) = \overline{Y}.$$
Die Bedingungen 1. und 2. sind somit mit $\overline{f}$ anstelle von f erfüllt. Weiter ist die Faser
$$f^{-1}(y) = \overline{f}^{-1}(y) \cap X$$
offen und dicht in $\overline{f}^{-1}(y)$, hat also dieselbe Dimension wie $\overline{f}^{-1}(y)$ und ist genau dann irreduzibel, wenn $\overline{f}^{-1}(y)$ es ist. Mit anderen Worten, auch Bedingung 3 ist für $\overline{f}$ anstelle von f erfüllt. Falls die Behauptung für $\overline{f}$ anstelle von f gilt, so folgt die Irreduzibilität von $\overline{f}^{-1}(V)$. Dann ist aber auch die offene Teilmenge
$$f^{-1}(V) = \overline{f}^{-1}(V) \cap X$$
irreduzibel.

2. Schritt: Beweis im Fall X, Y projektiv und f(X) = Y.
Wir setzen

$n := \dim f^{-1}(y),\ y \in V.$

Seien $X' := f^{-1}(V)$ und
$$\overline{X}' = \cup X_i$$
die Zerlegung der projektiven Abschließung von X' in irreduzible Komponenten. Für jedes i ist dann
$$f(X_i) \text{ irreduzibel.}$$
Wegen $\cup f(X_i) = f(\overline{X}') =$[107] Y und Y irreduzibel folgt
$$f(X_i) = Y$$

[107] $f(\overline{X}')$ ist abgeschlossen und enthält die dicht liegende Menge V.

für mindestens ein i. Wir entfernen aus V alle $f(X_i)$, die von Y verschieden sind und erhalten eine nicht-leere[108] offene Teilmenge

$$V' := V - (\cup_{f(X_i)\neq Y} f(X_i))$$

mit dem vollständigen Urbild

$$U' := f^{-1}(V') = \cup U'_j \quad \text{(Zerlegung in irreduzible Komponenten)}$$

wobei die Vereinigung über alle j mit $f(X_j) = Y$ ersteckt wird und $U'_j \subseteq X_j$ offen ist. Weiter sei

$$f_j: U'_j \to V'$$

die Einschränkung von f und

$$m_j := \min \{ \dim f_j^{-1}(y) \mid y \in V\}$$

Nach dem Satz von der Dimension der Faser 3.3.1 werden alle diese Minima auf einer offenen Teilmenge $V''\subseteq V'$ angenommen. Wegen

$$\cup f_j^{-1}(y) = f^{-1}(y) \text{ irreduzibel von der Dimension n für } y\in V''$$

gilt

$$\max \{ m_j \} = n.$$

Außerdem gibt es ein $j = j_0$ mit $\dim f_{j_0}^{-1}(y) = n$ für $y\in V''$ also[109]

$$\dim f_{j_0}^{-1}(y) = n \text{ für alle } y\in V.$$

Für alle $y\in V$ hat also die abgeschlossene Teilmenge $f_{j_0}^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y)$ dieselbe Dimension wie die irreduzible Varietät $f^{-1}(y)$, d.h. es gilt $f_{j_0}^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ für alle $y\in V$, d.h.

$$f_{j_0}^{-1}(V) = f^{-1}(V).$$

Als offene Teilmenge der irreduziblen Komponente X_{j_0} ist $f_{j_0}^{-1}(V)$ aber irreduzibel.

QED.

Folgerung

Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung von projektiven Varietäten. Wir nehmen an:

1. $f(X) = Y$.
2. Y ist irreduzibel.
3. Die Fasern $f^{-1}(y)$ sind irreduzibel und alle von derselben Dimension.

Dann ist X irreduzibel.

Beweis. Man setze im obigen Satz V = Y.

QED.

Bemerkung

Als Spezialfall des obigen Satzes ergibt sich ein neuer Beweis für die Irreduzibilität des Produktes von irreduziblen Varietäten.

---

[108] Y ist irreduzibel, d.h. der Durchschnitt zweier nicht-leerer offener Teilmengen ist nicht-leer.

[109] Die Faserdimension von f_{j_0} kann in den Punkten von V - V'' höchstens größer werden. Das ist hier aber nicht der Fall, da n bereits die maximale Faserdimension über den Punkten von V ist.

3.4 Geraden auf Flächen

3.4.1 Vorbemerkungen

(i) Nach den Anstrengungen, die wir den Beweisen einiger Sätze über die Dimension gewidmet haben, ist es naheliegen nach Anwendungen dieser Sätze zu fragen. Wir illustieren dies hier anhand der Frage nach der Lage von Geraden auf Flächen im $\mathbb{P}^3$.

(ii) Der Begriff der Dimension erweist sich in der Regel dann als nützlich, wenn es darum geht exakt zu beschreiben von wievielen Parametern die Elemente einer gegebenen Menge abhängen.

(iii) So haben wir gesehen, daß die Hyperflächen des Grades m im $\mathbb{P}^n$ den Punkten des projektiven Raumes

$$\mathbb{P}^{\nu_{n,m}} \text{ mit } \nu_{n,m} := \binom{m+n}{m} - 1$$

entsprechen,

(iv) Wir wollen jetzt einen Fall betrachten, in welchem die Teilvarietäten keine Hyperflächen sind, und zwar den einfachsten - den der Geraden im $\mathbb{P}^3$.

3.4.2 Bezeichnungen

$G(l, n)$:= Menge der k-linearen Unterräume der Dimension l von k^n (Graßmann-Varietät).

$V(l,n)$:= Menge der linear unabhängigen l-Tupel von Vektoren des k^n (Stiefel-Varietät)

$\pi: V(l,n) \to G(l, n)$ die natürliche Abbildung, welche jedem l-Tupel unabhängiger Vektoren, den von diesen erzeugten Unterraum zuordnet.

3.4.3 Plücker-Koordinaten einer Geraden im $\mathbb{P}^3$

Ein Punkt im $\mathbb{P}^3$ ist durch eine Gerade durch den Ursprung im k^4 gegeben, d.h. durch einen 1-dimensionalen linearen Unterraum von k^4,

$$\mathbb{P}^3 = G(1, 4).$$

Eine Gerade im $\mathbb{P}^3$ ist durch einen 2-dimensionalen linearen Unterraum des k^4 gegeben, d.h.

$$\{\text{Geraden im } \mathbb{P}^3\} = G(2, 4).$$

Sei $L \in G(2, 4)$ und $(x,y) \in V(l,n)$ ein Urbild von L bei der natürliche Abbildung. Dann hängt der Vektor

$$p(L) = x \wedge y \in \wedge^2 k^4$$

von der speziellen Wahl der Basis (x,y) von L ab. Ist (x',y') eine weitere solche Basis, so gibt es eine lineare Transformation $T: L \to L$, welche die Basis x,y von L in die Basis x',y' von L überführt. Der Wert p(L) multipliziert sich also beim Wechsel der Basis mit $\det(T) \neq 0$. Mit anderen Worten, das Element des zugehörigen projektiven Raumes,

$$p(L) = [x \wedge y] \in (\wedge^2 k^4 - \{0\})/k^* = \mathbb{P}(\wedge^2 k^4) \cong \mathbb{P}^5$$

ist unabhängig von der speziellen Wahl der Basis von L. Die projektiven Koordinaten des Punktes p(L) heißen <u>Plücker-Koordinaten</u> der Geraden $L \subseteq \mathbb{P}^3$.

Bemerkungen

(i) Zur Standardbasis $e_0, \dots, e_3$ des k^4 gehört die Standardbasis $\{ e_i \wedge e_j \}_{0 \le i < j \le 3}$ von $\wedge^2 k^4$. Eine Gerade L mit dem Erzeugengensystem (x,y) hat bezüglich dieses Erzeugendensystems gerade die Plücker-Koordinaten[110]

$$p_{ij}(L) = x_i y_j - y_i x_j \quad , i < j,$$

d.h. es ist[111]

$$p(L) = [x^T y - y^T x].$$

(ii) Die projektiven Koordinaten nicht jeden Punktes im $\mathbb{P}^5$ treten als Plücker-Koordinaten einer Geraden L auf. Es ist leicht zu sehen, daß die Plücker-Koordinaten der Bedingung

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$$

genügen.[112]

(iii) Man kann zeigen, wenn die p_{ij} der Relation von (ii) genügen, so handelt es sich um die Plücker-Koordinaten einer Geraden im $\mathbb{P}^3$,

(iv) Die Geraden des $\mathbb{P}^3$ bilden eine projektive Hyperfläche zweiten Grades im $\mathbb{P}^5$, die <u>Plücker-Varietät</u>

$$\prod \subseteq \mathbb{P}^5.$$

3.4.4 Die Punkte einer Geraden mit gegebenen Plücker-Koordinaten

Sei $L \subseteq \mathbb{P}^3$ eine Gerade mit den Plücker-Koordinaten

$$p(L) = [p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}]$$

Dann gilt

$$L = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \mid x_i = \sum_j a_j p_{ij} \, , a_j \in k \}.$$

Beweis. Betrachten wir L als 2-dimensionalen Unterraum $L \subseteq k^4$. Sei (x,y) eine Basis von L. Dann liegt jeder Punkt der folgenden Gestalt in L

(1) $$x \cdot f(y) - y \cdot f(x) \in L.$$

Dabei bezeichne $f: k^4 \to k$ eine beliebige Lineareform. Wir erhalten auf diese Weise eine Abbildung

$$k^{4*} \to L, \; f \mapsto x \cdot f(y) - y \cdot f(x).$$

---

[110] Mit $x = \sum_i x_i e_i$ und $y = \sum_j y_j e_j$ ist $x \wedge y = \sum_{i,j} x_i y_j \, e_i \wedge e_j = \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i) \, e_i \wedge e_j$

[111] Wir verzichten hier auf die Bedingung i<j und erhalten damit 16 Koordinaten, die aber für i=j sämtlich Null sind und sich sonst nur im Vorzeichen von den eigentlichen Plücker-Koordinaten unterscheiden.

[112] Sei (x,y) eine Basis von $L \subseteq k^4$, $x = (x_0, \dots, x_3)$, $y = (y_0, \dots, y_3)$. Dann ist die Determinante

$$d = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

offensichtlich Null (erste und dritte bzw. zweite und vierte Zeile sind gleich). Entwicklung nach den ersten beiden Spalten liefert gerade die Plücker-Identität (multipliziert mit 2). In der Charakteristik 2 muß man sich etwas anderes einfallen lassen.

Diese Abbildung ist offensichtlich linear und hat als Kern die Linearformen f mit f(x) = f(y) = 0, d.h. einen 2-dimensionalen Unterraum. Das Bild ist somit 2-dimensional, d.h. die Abbildung ist surjektiv. Wir haben gezeigt: jeder Punkt von L hat die Gestalt (1) mit einer Linearform f. Mit $f(x) = \sum_j a_j x_j$ erhalten wir

$$x\cdot f(y) - y\cdot f(x) = \sum_j x\cdot a_j y_j - y\cdot a_j x_j = \sum_{i,j} (x_i a_j y_j - y_i a_j x_j) e_i = \sum_{i,j} a_j p_{ij} e_i$$

Die i-te Koordinate dieses Punktes ist $\sum_j a_j p_{ij}$. Die Punkte von L haben also tatsächlich die angegebenen Koordinaten.
QED.

3.4.5 Die Inzidenz-Relation
Betrachten wir jetzt die Menge

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}^\nu \text{ mit } \nu := \nu_{3,m} = \binom{m+3}{3} - 1 = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1$$

der Hyperflächen des Grades m im $\mathbb{P}^3$ und gleichzeitig die Menge $\prod \subseteq \mathbb{P}^5$ der Geraden im $\mathbb{P}^3$. Wir wollen nach den Paaren (H, L) aus

$$\mathbb{P}^\nu \times \prod$$

fragen mit $L \subseteq H$.

3.4.6 Projektivität der Inzidenz-Relation
Die Menge

$$I_m = \{(H,L) \in \mathbb{P}^\nu \times \prod \mid L \subseteq H\}$$

ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}^\nu \times \prod$.
Beweis. Für $x \in \mathbb{P}^\nu$ bezeichne F_x ein homogenes Polynom dessen Koeffizienten proportional zu den Koordinaten von x sind. Wie bisher bezeichne $p(L) = (p_{ij}(L))$ ein Tupel von Plücker-Koordinaten von L. Dann gilt

$$L \subseteq V(F_x) \quad \Leftrightarrow \quad F_x(p) = 0 \text{ für alle } p = (p_i) \text{ mit } p_i = \sum_j a_j p_{ij}(L) \text{ und } a_j \in k$$

$$\Leftrightarrow \quad F_x\left(\sum_j a_j p_{0j}(L), \dots, \sum_j a_j p_{3j}(L)\right) = 0 \text{ für alle } a_j \in k$$

Wir fassen jetzt den Ausdruck

$$F_x\left(\sum_j a_j p_{0j}, \dots, \sum_j a_j p_{3j}\right)$$

als homogenes Polynom in den a_j auf. Dessen Koeffizienten $f_1(x,p),\dots,f_r(x,p)$ sind dann bi-homogene Polynome in den Koordinaten x von H und in den Plücker-Koordinaten p. Nach Konstruktion gilt

$$I_m = V(f_1(x,p),\dots,f_r(x,p)),$$

d.h. I ist eine abgeschlossene Teilmenge des Produktraums.
QED.

3.4.7 Dimension und Irreduzibilität der Inzidenz-Relation

Die Inzidenz-Relation

$$I_m \subseteq \mathbb{P}^\nu \times \prod$$

der Geraden des $\mathbb{P}^3$ mit den Flächen des Grades m ist irreduzibel von der Dimension

$$\dim I_m = \frac{m(m+1)(m+5)}{6} + 3$$

Beweis. Wir betrachten die beiden regulären Abbildungen

$$f: I_m \subseteq \mathbb{P}^\nu \times \prod \to \mathbb{P}^\nu,\ (H, L) \mapsto H,$$

$$g: I_m \subseteq \mathbb{P}^\nu \times \prod \to \prod,\ (H, L) \mapsto L.$$

Es gilt

$$g(I_m) = \prod,$$

denn durch jede Gerade geht mindestens eine (nicht-notwendig irreduzible) Hyperfläche des Grades m.

Beschreiben wir die Fasern $g^{-1}(L)$. Dazu führen wir eine solche projektive Transformation aus, daß L die Gleichungen

$$L: u_0 = u_1 = 0$$

bekommt. Eine Hyperfläche mit der Gleichung

$$H: F = 0$$

enthält genau dann die Gerade L, wenn eine Potenz von F im Ideal (u_0, u_1) von L liegt. Dieses Ideal ist aber ein Primideal. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} L \subseteq H &\Leftrightarrow F \in (u_0, u_1) \\ &\Leftrightarrow F = u_0 G' + u_1 G'' \text{ mit } G', G'' \text{ homogen vom Grad m-1} \end{aligned}$$

Die Formen F von dieser Gestalt bilden eine Vektorraum der Dimension

$$\begin{aligned} &\binom{m-1+3}{3} + \binom{m-1+3}{3} - \binom{m-2+3}{3} \\ &= 2\cdot\frac{m(m+1)(m+2)}{6} - \frac{(m-1)m(m+1)}{6} \\ &= \frac{m(m+1)(m+5)}{6} \end{aligned}$$

Die Projektivierung dieses Vektorraums ist gerade die Faser $g^{-1}(L)$, d.h. $g^{-1}(L)$ ist ein projektiver Raum der Dimension

$$(1) \qquad \dim g^{-1}(L) = \frac{m(m+1)(m+5)}{6} - 1.$$

Insbesondere sind alle Fasern $g^{-1}(L)$ irreduzibel und haben dieselbe Dimension, d.h. I_m ist irreduzibel und hat die Dimension

$$\dim I_m = \dim g^{-1}(L) + \dim \prod = \frac{m(m+1)(m+5)}{6} + 3.$$

Man beachte $\prod$ ist eine Hyperfläche im $\mathbb{P}^5$.

QED.

3.4.8 Theorem: Existenz von Flächen, die keine Geraden enthalten

Für jedes m > 3 gibt es Flächen des Grades m im $\mathbb{P}^3$, welche keine Gerade enthalten. Genauer: diese Flächen bilden eine offene dichte Teilmenge des $\mathbb{P}^\nu$ mit $\nu = \nu_{3,m}$.

Beweis. Betrachten wir die reguläre Abbildung

$$f: I_m \subseteq \mathbb{P}^\nu \times \prod \to \mathbb{P}^\nu,\ (H, L) \mapsto H,$$

Das Bild dieser Abbildung ist eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{P}^\nu$. Es reicht zu zeigen, es handelt sich um eine echte Teilmenge. Dazu reicht es zu zeigen

$$\dim I_m < \dim \mathbb{P}^\nu$$

Die Dimension der Inzidenz-Relation haben wir gerade berechnet. Die des Bildraums ist gleich

$$\nu_{3,m} = \binom{m+3}{3} - 1 = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1$$

Es reicht also zu zeigen,

$$\frac{m(m+1)(m+5)}{6} + 3 < \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1$$

Dies ist äquivalent zu

$$m(m+1)(m+5) < (m+1)(m+2)(m+3) - 24$$

$\Leftrightarrow \quad (m+1)(m^2+5m - m^2 - 5m - 6) < - 24$

$\Leftrightarrow \quad 24 < (m+1)\cdot 6$

$\Leftrightarrow \quad 4 < m+1$

$\Leftrightarrow \quad 3 < m$

QED.

3.4.9 Bemerkungen zum Fall m = 2

Im Fall von Flächen des Grades $m = 2$ im $\mathbb{P}^3$ gilt

$\nu = 9$ (der Raum dieser Flächen ist 9-dimensional)

$\dim I_m = 10$

Die Fasern der Projektion

$$f: I_m \subseteq \mathbb{P}^\nu \times \prod \to \mathbb{P}^\nu, (H, L) \mapsto H,$$

haben also eine Dimension ≥ 1. Das ist eine wohlbekannte Tatsache: auf jeder Fläche zweiten Grades im Raum liegen unendlich viele Geraden.

Man kann leicht zeigen, über den Punkten die den irreduziblen Flächen entsprechen haben die Fasern eine Dimension = 1, über allen anderen Punkten eine Dimension =2.

Aufgabe

Jede irreduzible Fläche zweiten Grades im $\mathbb{P}^3$ ist isomorph zu $V(XZ-YW) \subseteq \mathbb{P}^3$.

3.4.10 Theorem: Die Geraden auf den Flächen dritten Grades

Auf jeder kubischen Fläche im Raum liegt mindestens eine Gerade. Die Menge der Flächen im Raum, die nur endlich viele Geraden enthalten bildet eine offene Teilmenge des $\mathbb{P}^{19}$.

Beweis. Betrachten wir die reguläre Abbildung

$$f: I_m \subseteq \mathbb{P}^\nu \times \prod \to \mathbb{P}^\nu, (H, L) \mapsto H,$$

im Fall $m = 3$. Es gilt

$$\dim I_m = \frac{m(m+1)(m+5)}{6} + 3 = 19$$

$$\dim \mathbb{P}^\nu = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1 = 19$$

Außerdem kann man sofort eine kubische Fläche angeben, die nur endlich viele Geraden enthält, zum Beispiel die mit der affinen Gleichung

$$H: T_1T_2T_3 - 1 = 0.$$

Im Endlichen besitzt diese Fläche überhaupt keine Geraden: durch Einsetzen von

$$T_i = a_it + b_i$$

in die Flächengleichung erhält man sofort einen Widerspruch (da Polynome in einer Variablen nur endlich viele Nullstellen besitzen). Die projektive Abschließung dieser Fläche hat die Gleichung

$$\bar{H} : S_1 S_2 S_3 - S_0 = 0.$$

Die Fernhyperebe $S_0 = 0$ schneidet aus dieser Fläche drei Geraden heraus. Damit ist die Faser $f^{-1}(\bar{H})$ endlich. Dann ist aber die Bilddimension gleich

$$\dim f(I_m) = \dim I_m = 19 = \dim \mathbb{P}^\nu,$$

d.h.

$$f(I_m) = \mathbb{P}^\nu,$$

d.h. jede kubische Fläche enthält mindestens eine Gerade. Über einer offenen Menge sind die Fasern endlich.

QED.

Bemerkung

Kubische Flächen, die unendlich viele Geraden enthalten existieren tatsächlich, z.B. die Kegel über ebenen Kurven dritten Grades (die gegeben sind durch eine kubische Gleichung, in der eine Variable nicht vorkommt).

4. Singularitäten

4.1 Singuläre und nicht-singuläre Punkte

4.1.1 Wiederholung: Der lokale Ring in einem Punkt

4.1.1 (a) Bezeichnungen

Seien

$$X$$

eine (quasi-projektive) Varietät und

$$\mathcal{O}_X$$

die Garbe der regulären Funktionen auf X. Für jeden Punkt $x \in X$ bezeichne

$$\mathcal{O}_{X,x}$$

den Halm von $\mathcal{O}_X$ im Punkt x. Dieser Ring ist die grundlegende lokale Invariante von X im Punkt x. Nach Definition besteht dieser Ring aus allen Funktionen, die in einer Umgebung von x regulär sind, wobei zwei Funktionen

$$f: U \to k \text{ und } g: V \to k,$$

die in einer Umgebung

$$W \subseteq U \cap V$$

von x übereinstimmen, als gleich angesehen werden.

Bemerkungen

(i) Ersetzt man X durch eine offene Umgebung des Punktes x, so bleibt der Ring

$$\mathcal{O}_{X,x}$$

unverändert.

(ii) Ist die Varietät X irreduzibel, so ist $\mathcal{O}_{X,x}$ der Teilring des Körpers k(X), der aus allen Funktionen besteht, die regulär sind in einer Umgebung von x,

$$\mathcal{O}_{X,x} := \{ \frac{f}{g} \mid f,g \in k[U],\ g(x) \neq 0 \}$$

Dabei bezeichne U eine beliebige affine Umgebung von x. Man beachte, es gilt

$$k(X) := Q(k[U]).$$

4.1.1(b) Vergleich von $\mathcal{O}_X$ mit der Strukturgarbe eines affinen Spektrums

Sei X eine affine Varietät mit dem affinen Koordinatenring

$$A = k[X],$$

so ist

$$X \subseteq \operatorname{Spec} A$$

eine dicht liegende Teilmenge des affinen Spektrums von A (weil A endlich erzeugte k-Algebra ist, vgl. 1.4.10) und für jede offene Teilmenge

$$U \subseteq \operatorname{Spec} A$$

ist die Einschränkungsabbildung

$$(1)\qquad \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(U) \to \mathcal{O}_X(X\cap U),\ f \mapsto f|_{X\cap U},$$

(wohldefiniert und) bijektiv. Insbesondere sind die Halme beider Garben in jedem abgeschlossenen Punkt von Spec A gleich,

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A),x} = \mathcal{O}_{X,x} \text{ für jedes } x\in X.$$

Beweis. Die auf ganz X regulären Funktion lassen sich auch als globale Schnitte der Strukturgarbe von Spec A auffassen:

$$\mathcal{O}_X(X) = A = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(\operatorname{Spec} A)$$

(vgl. 1.4.9). Anders ausgedrückt: die auf Spec A regulären Funktionen liefern durch Einschränkgen auf X reguläre Funktionen. Die Einschränkungs-Abbildung

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(\operatorname{Spec} A) \to \mathcal{O}_X(X),\ f \mapsto f|_X,$$

ist bijektiv. Die analoge Aussage bleibt richtig für jede offene Hauptmenge

$$D(a) \subseteq \operatorname{Spec} A,$$

d.h. die Einschränkungsabbilung

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(D(a)) \to \mathcal{O}_X(X\cap D(a)),\ f \mapsto f|_{X\cap D(a)},$$

ist ein Isomorphismus für jedes $a\in A$. Damit ist die Abbildung (1) wohldefiniert: eine Funktion ist regulär, wenn sie auf den Mengen einer offenen Überdeckung ihres Definitionsbereichs regulär ist. Eine solche Überdeckung existiert jedoch, da jede offene Menge durch Hauptmengen überdeckt wird.

Die Bijektivität der Abbildung folgt jetzt aus den Garbenaxiomen für $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}$ und $\mathcal{O}_X$ und der Tatsache, daß die offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis für Spec A bzw. X bilden.

QED.

4.1.1 (c) Beschreibung von $\mathcal{O}_{X,x}$ mit Hilfe des Koordinatenrings einer affinen Umgebung

Seien X eine affine Varietät mit dem Koordinatenring $A = k[X]$, $x\in X$ ein Punkt und $p = I\{x\}$ das Ideal der regulären Funktionen mit der Nullstelle x. Dann gilt

$$\mathcal{O}_{X,x} = A_p .$$

Das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ wird mit mit $m_{X,x}$ bezeichnet.

$$m_{X,x} = m_x = \{ \frac{f}{g} \in \mathcal{O}_{X,x} \mid g(x) \ne 0 \} = I\{x\}k[X]_{I\{x\}}.$$

Bemerkung
Mit A ist auch $\mathcal{O}_{X,x}$ noethersch (vgl. A2.8).

4.1.1 (d) Interpretation der Nullteilerfreiheit der lokalen Ringe

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ abgeschlossen und $x\in X$ ein Punkt. Dann sind äquivalent.
(i) x liegt auf nur einer Komponente von X.
(ii) $\mathcal{O}_{X,x}$ ist nullteilerfrei

Beweis. (i) ⇒ (ii). Es gibt eine affine Umgebung $U \subseteq X$ von x derart, daß U irreduzibel ist. Damit gilt

$$\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U,x} = k[U]_{I\{x\}}$$

Da U irreduzibel ist, ist k[U] ein Integritätsbereich, und damit auch der Quotientenring $\mathcal{O}_{X,x}$ von k[U].
(ii) ⇒ (i). Durch Übergang zu einer Umgebung von x können wir erreichen, daß alle Komponenten von X durch den Punkt x gehen. Es reicht dann zu zeigen, X ist irreduzibel. Angenommen nicht,

$$X = X' \cup X''.$$

Wir wählen von Null verschiedene Funktionen $f',f''\in k[X]$ mit

$$f'|X' = 0 \text{ und } f''|X'' = 0.$$

Dann ist $f'f'' = 0$ auf X, d.h. der Keim von $f'f''$ in $\mathcal{O}_{X,x}$ ist Null. Nach Voraussetzung ist einer der beiden Keime von f' bzw. f'' Null, sagen wir, der von f'. Dann ist f' in einer offenen Umgebung U des Punktes x Null, also insbesondere auch auf der nicht-leeren offenen Teilmenge

$$U\cap X'' \text{ von } X''.$$

Da $U\cap X''$ dicht liegt in X'' und f' stetig ist, folgt $f' = 0$ auf X'' und damit auf ganz X. Das steht aber im Widerspruch zur Wahl von f'.
QED.

4.1.2 Der Tangentialraum

4.1.2 (a) Die Schnittvielfachheit einer Geraden mit einer Varietät in einem Punkt

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ eine echte abgeschlossene Teilmenge mit dem Ideal

$$I(X) = (f_1,...,f_r),$$

$x\in X$ ein Punkt und L eine Gerade durch x,

$$x \in L \subseteq \mathbb{A}^N, L \nsubseteq X,$$

die nicht vollständig in X liegt.
Dann hat L die Gestalt

$$L = \{ ta + x \mid t\in k \}$$

mit einem von Null verschiedenen Richtungsvektor a. Die Menge

$$X\cap L$$

der Schnittpunkte von L mit X ist gerade die Menge der Lösungen des Gleichungssystems

$$f_1(ta + x) = ... = f_r(ta + x) = 0.$$

Dies ist ein Gleichungssystem von Polynomen in einer Variablen t. Diese haben einen größten gemeinsamen Teiler, sagen wir

$$f(t) = \text{ggT}(f_1(at),...,f_r(at)).$$

Wir schreiben f in der Gestalt

(1) $$f(t) = c \prod_{i=1}^{s} (t - \alpha_i)^{k_i},\ \alpha_i \in K \text{ paarweise verschieden.}$$
Da die Gerade L durch x geht, ist α_i Null für ein i, sagen wir $\alpha_0 = 0$. Dann heißt
$$i_x(X,L) = k_0$$
<u>Schnitt-Vielfachheit</u> von L mit X im Punkt x.

Bemerkungen

(i) Das obige Polynom f(t) ist der größte gemeinsame Teiler aller h(ta+x) mit $h\in I(X)$ und damit unabhängig von der spezielen Wahl des Erzeugendensystems $f_1,...,f_r$ von I(X).

(ii) Wir werden später sehen, für die "meisten" Punkte $x\in X$ und die "meisten" Geraden L durch x ist $i_x(X,L) = 1$. Eine Schnitt-Vielfachheit > 1 kann man dadurch erzwingen, daß man zu zwei vorgegebenen Punkten $x,x'\in X$ eine Gerade L(x,x') durch x und x' wählt und dann den Punkt x' immer stärker so an x annähert, daß L(x,x') einer Grenz-Geraden L immer näher kommt. Für diese Grenz-Gerade L gilt dann $i_x(X, L) > 1$.

(iii) Wir sagen, eine Gerade L durch $x\in X$ <u>berührt</u> X in x und ist eine <u>Tangente</u> an X im Punkt x, wenn $i_x(X, L) > 1$ gilt.

(iv) Die Vereinigung aller Tangenten an X im Punkt x wird mit
$$T_x(X) = \cup \{ L \subseteq \mathbb{A}^N \mid L \text{ Gerade mit } i_x(X,L) > 1 \}$$
bezeichnet und heißt <u>Tangentialraum</u> an X im Punkt x.

4.1.2 (b) Eine Formel für die Schnittvielfachheit

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ eine echte abgeschlossene Teilmenge, $x\in X$ ein Punkt und L eine Gerade durch x,
$$x \in L \subseteq \mathbb{A}^N,\ L \not\subseteq X,$$
die nicht vollständig in X liegt. Dann gilt
$$i_x(X, L) = \dim_k \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^N,x}} \mathcal{O}_{L,x}$$
Insbesondere ist der Ring auf der rechten Seite ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum.

Beweis. Sei a wie bisher ein Richtungsvektor der Geraden L. Wir betrachten die natürliche Abbildung
$$\varphi: k[T] \to k[t],\ \alpha(T_1,...,T_N) \mapsto \alpha(at + x),$$
welche jeder regulären Funktion auf dem $\mathbb{A}^N$ die Einschränkung auf L zuordnet. Der Kern dieser Abbildung ist das Ideal der Geraden L,
$$\text{Ker } \varphi = I(L).$$
Die Funktionen der Gestalt
$$h(at + x) \in k[t] \text{ mit } h\in I(X)$$
bilden ein Ideal. Dieses wird vom größten gemeinsamen Teiler dieser Polynome erzeugt, welches wir wie in 4.1.2(a) mit f(t) bezeichnen:
$$\varphi(I(X)) = fk[t]\ ,\ f = \text{ggT}(\ h(at + x) \mid h\in I(X)) = \prod_{i=1}^{s} (t - \alpha_i)^{k_i}.$$
Es folgt
$$k[T]/(I(L)+I(X)) = (k[T]/I(L))/(I(L)+I(X))/I(L) = \varphi(k[T])/\varphi(I(X) = k[t]/fk[t]$$
also

$$k[T]/(I(L) + I(X)) \cong k[t]/(\prod_{i=1}^{s} (t - \alpha_i)^{k_i}).$$

Wir lokalisieren jetzt nach dem Ideal m = I{x} des Punktes x. Auf der rechten Seite entspricht m gerade dem vom t erzeugten Ideal, d.h.

$$k[T]/(I(L) + I(X))_m \cong k[t]/(\prod_{i=1}^{s} (t - \alpha_i)^{k_i})_{(t)}.$$

Wir verwenden jetzt die Tatsache, daß die Operationen "Übergang zum Qutientenring" und "Übergang zum Faktorring" kommutieren. Es folgt

$$k[T]_m/(I(L) + I(X)) \cong k[t]_{(t)}/(\prod_{i=1}^{s} (t - \alpha_i)^{k_i}).$$

Nun ist $t - \alpha_i$ eine Einheit in $k[t]_{(t)}$, falls $\alpha_i \neq 0$ ist, d.h. es gilt

$$k[T]_m/(I(L) + I(X)) \cong k[t]_{(t)}/(t^{k_0}) \cong (k[t]/(t^{k_0}))_{(t)}.$$

Der Ring $k[t]/(t^{k_0})$ ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $(t)/(t^{k_0})$, d.h. alle Polynome mit von Null verschiedenen Absolutglied repräsentieren Einheiten. Es gilt also

$$k[T]_m/(I(L) + I(X)) \cong k[t]/(t^{k_0}).$$

Den Ring auf der linken Seite können wir als Tensorprodukt schreiben,

$$k[t]/(t^{k_0}) \cong k[T]_m/(I(L)) \otimes_{k[T]_m} k[T]_m/ (I(X))$$

$$\cong \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^N}} \mathcal{O}_{L,x}$$

Der Ring links ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis, die repräsentiert wird durch

$$1, t, t^2,..., t^{k_0-1}$$

Er hat also die Dimension $k_0 = i_x(X,L)$.

QED.

Bemerkungen

(i) Die obige Formel zeigt, die Multiplizität $i_x(X,L)$ hängt nur von den lokalen Ringen der beteiligten Räume im Punkt x ab, ist also eine lokale Invariante und damit für beliebige quasi-projektive Varietäten definiert.

(ii) Falls $L \subseteq X$ gilt in der obigen Rechnung, so ist $I(X) \subseteq I(L)$ und damit

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^N,x}} \mathcal{O}_{L,x} = \mathcal{O}_{L,x} = k[t]_{(t)}.$$

Dies ist ein unendlich-dimensionaler Vektorraum. Wir setzen daher,

$$i_x(X, L) = \infty \ (= \dim \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^N,x}} \mathcal{O}_{L,x})$$

im Fall $L \subseteq X$.

4.1.2 (c) Die Gleichungen des Tangentialraums

Seien

$$X \subseteq \mathbb{A}^N$$

eine abgeschlossene Teilmenge mit dem Ideal

$$I(X) = (f_1,...,f_r) \ (\subseteq k[T])$$

und

$$x = (x_1,...,x_N) \in X$$
ein Punkt. Dann gilt
$$T_x(X) = V(d_x f_j \mid j = 1,...,r).$$
Dabei sei
$$d_x f := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial T_i}(x)\cdot (T_i - x_i)$$
für $f \in k[T]$ das <u>Differential</u> von f im Punkt x.
Beweis. O.B.d.A. sei $x = (0,...,0)$ der Ursprung. Sei eine Gerade L durch x mit dem Richtungsvektor a,
$$L = \{ ta \mid t \in k \}.$$
Für $f \in \{f_1,...,f_r\}$ schreiben wir
$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + ... + f^{(m)} \text{ mit } f^{(i)} \text{ homogen vom Grad i.}$$
Weil der Ursprung x auf X liegt, gilt $f^{(0)} = 0$, also ist
$$f(ta) = t\cdot f^{(1)}(a) + t^2 f^{(2)}(a) + ... + t^m \cdot f^{(m)}(a).$$
Die Gerade L ist genau dann eine Tangente, wenn im ggT der Polynome f(ta) die Nullstelle t mit einer Vielfachheit > 1 auftritt, d.h. wenn alle diese Polynome durch t^2 teilbar sind. Dies ist äquivalent zu der Bedingung
$$f^{(1)}(a) = 0 \text{ für jedes } f \in \{f_1,...,f_r\}.$$
Da die Polynome $f^{(1)}(T)$ homogen (vom Grad 1) sind, folgt
$$\begin{aligned} T_x(X) &= \{ ta \mid f^{(1)}(a) = 0, t \in k, f \in \{f_1,...,f_r\}\} \\ &= \{ a \mid f^{(1)}(a) = 0, f \in \{f_1,...,f_r\}\} \end{aligned}$$
Wegen
$$f^{(1)}(T) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial T_i}(x)\cdot (T_i - x_i) = d_x f$$
ist dies gerade die Behauptung.
QED.
Bemerkung
Wenn wir den Ursprung des Raumes $\mathbb{A}^N = k^N$ in den Punkt x verschieben, werden sämtliche Koordinaten von x Null und die Gleichungen von $T_x(X)$ werden homogen (und sind linear), d.h. $T_x(X)$ wird zum k-linearen Unterraum des k-Vektorraums k^N. Wir denken uns im folgenden $T_x(X)$ mit dieser k-linearen Unterraumstruktur versehen.

4.1.2 (d) Beispiel: Tangentialräume des affinen Raums

Der Tangentialraum an $\mathbb{A}^N$ ist in jedem Punkt $\mathbb{A}^N$ selbst.

4.1.2 (e) Beispiel: Tangentialräume einer affinen Hyperfläche

Sei $H \subseteq \mathbb{A}^N$ eine Hyperfläche mit $I(H) = f\cdot k[T]$. Dann ist T_xH für jeden Punkt $x \in H$ eine Hyperebene. Genauer,
$$T_xH = V(d_x f).$$

4.1.3 Invarianz des Tangentialraums

(a) Das Differential einer regulären Funktion in einem Punkt

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ eine abgeschlossene Teilmenge mit dem Ideal

$$I(X) = (f_1,...,f_r),$$

$x = (x_1,...,x_n) \in X$ ein Punkt, $f \in k[X]$ eine reguläre Funktion und $\tilde{f} \in k[T]$ ein Polynom mit $\tilde{f} \mid X = f$. Die Einschränkung der linearen Funktion $d_x\tilde{f}$ auf den Tangentialraum $T_x(X)$,

$$d_x f := d_x\tilde{f} \mid T_x(X) : T_x(X) \to k,$$

heißt <u>Differential</u> von f im Punkt x. Es gilt

(1) $d_x(f+g) \quad = d_x f + d_x g$

(2) $d_x(fg) \quad = f(x)\cdot d_x g + g(x)\cdot d_x f$

für beliebige $f,g \in k[X]$.

Beweis. Nach Definition von $d_x\tilde{f}$ gilt

(2) $d_x(\tilde{f}+\tilde{g}) \quad = d_x\tilde{f} + d_x\tilde{g}$

(3) $d_x(\tilde{f}\tilde{g}) \quad = \tilde{f}(x)\cdot d_x\tilde{g} + \tilde{g}(x)\cdot d_x\tilde{f}$

für beliebige $\tilde{f}, \tilde{g} \in k[T]$. Aus diesen Relationen folgen die analogen Relationen für f und g. Es reicht deshalb zu zeigen, die Definition des Differentials $d_x f$ ist korrekt.

Sei $\tilde{f}'$ ein zweites Polynom mit der Einschränkung f auf X. Dann gilt

$$\tilde{f}' = \tilde{f} + \sum_{i=1}^{r} s_i f_i \text{ mit } s_i \in k[T].$$

Nach (2) und (3) folgt

$$d_x\tilde{f}' = d_x\tilde{f} + \sum_{i=1}^{r} (d_x s_i)\cdot f_i(x) + \sum_{i=1}^{r} s_i\cdot(x)\cdot d_x f_i$$

Wegen $x \in X$ sind alle Summanden der ersten Summe Null. Weil die $d_x f_i$ Null sind auf dem Tangentialraum $T_x(X)$, folgt durch Einschränken

$$d_x\tilde{f}' \mid T_x(X) = d_x\tilde{f} \mid T_x(X),$$

d.h. die Definition von $d_x f$ ist korrekt.

QED.

(b) Invariante Beschreibung des Kotangentialraums

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ abgeschlossen, $x \in X$ ein Punkt und

$$I\{x\} := \{ f \in k[X] \mid f(x) = 0 \}$$

das Ideal des Punktes x. Dann ist die Abbildung

$$\varphi: I\{x\}/ I\{x\}^2 \to \mathrm{Hom}_k (T_x(X), k) = \check{T}_x(X), \ f \bmod I\{x\}^2 \mapsto d_x f,$$

korrekt definiert, k-linear und bijektiv.

Beweis. O.B.d.A. sei x = (0,...,0). Dann ist

$$I\{x\} = (t_1,...,t_N) \text{ mit } t_i = T_i|X$$

und $I\{x\}^2$ wird von den Produkten $t_i t_j$ erzeugt,

$$I\{x\}^2 = (t_i t_j \mid i,j = 1,...,N\}$$

φ <u>ist korrekt definiert</u>. Wegen x = (0,...,0) sind die Funktionen $d_x f$ homogene lineare Funktionen auf $T_x(X)$, d.h. sie sind Elemente von $\mathrm{Hom}_k(T_x(X), k)$. Sei jetzt

$$g \in I\{x\} = (t_1,...,t_N)$$

ein Element mit demselben Repräsentanten modulo $I\{x\}^2$ wie f. Dann gilt

$$f - g = \sum_{i,j} h_{ij} \cdot t_i \cdot t_j \text{ mit } h_{ij} \in k[X]$$

also

$$d_x f - d_x g = \sum_{i,j} (d_x h_{ij}) \cdot t_i(x) \cdot t_j(x) + h_{ij}(x) \cdot (d_x t_i) \cdot t_j(x) + h_{ij}(x) \cdot t_i(x) \cdot (d_x t_j).$$

Da die t_i Null sind in x, folgt

$$d_x f - d_x g = 0,$$

d.h. $d_x f = d_x g$.

φ <u>ist k-linear</u>. φ ist additiv, wegen der ersten Formel 2.1.3 (a)(1). Wegen Formel 2.1.3 (a)(2) gilt für $c \in k$

$$\varphi(cf \bmod I\{x\}^2) = d_x(c \cdot f) = d_x(c) \cdot f(x) + c \cdot d_x f$$

wegen $d_x(c) = 0$ für $c \in k$ folgt die Linearität von φ.

<u>Surjektivität von</u> φ. Sei $l: T_x(X) \to k$ eine k-lineare Abbildung. Wir denken uns l auf den gesamten Raum k^n linear fortgesetzt, und schreiben l in der Gestalt

$$l(T) = c_1 \cdot T_1 + ... + c_N \cdot T_N \text{ mit } c_i \in k.$$

Dann gilt

$$d_x l = l,$$

also

$$\varphi(l \bmod I\{x\}^2) = d_x l = l.$$

<u>Injektivität von</u> φ. Sei $\varphi(f \bmod I\{x\}^2) = 0$, d.h. es ist

$$d_x f = 0 \text{ auf } T_x(X).$$

Wegen $f \in I\{x\}$ gilt auch f(x) = 0. Mit anderen Worten, Taylor-Entwicklung[113] von f im Punkt x = (0,...,0) beginnt im Grad ≥ 2. Das bedeutet aber

$$f \in I\{x\}^2,$$

QED.

Bemerkungen

(i) Seien X affin und $x \in X$. Die natürliche Abbildung in den Quotientenring

$$h: k[X] \to \mathcal{O}_{X,x}$$

induziert dann eine k-lineare Abbildung

$$I\{x\} \to m_x$$

[113] Genauer, f läßt sich von einer Funktiom aus k[T] mit solcher Taylor-Entwicklung repräsentieren.

und damit eine k-lineare Abbildung

(1) $$I\{x\}/I\{x\}^2 \to m_x/m_x^2$$

Diese letztere Abbildung ist ein Isomorphismus von k-Vektorräumen. Der Kotangentialraum läßt sich also mit m_x/m_x^2 identifizierten,

$\check{T}_x(X) = m_x/m_x^2$

$T_x(X) = \mathrm{Hom}_k(m_x/m_x^2, k)$

und damit allein mit Hilfe des lokalen Rings in $x \in X$ beschreiben. Mit anderen Worten der Tangential- und Kotangentialraum sind lokale Invarianten von X in x.

(ii) Durch Dualisieren erhält man aus der Abbildung φ die Abbildung

$$T_x(X) \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_k(T_x(X),k), k) \xrightarrow{v} \mathrm{Hom}_k(m_x/m_x^2, k)$$

mit

$u : p \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(p))$
$v: \lambda^* \mapsto (f \mapsto \lambda^*(d_x f))$
$v\circ u: p \mapsto (f \bmod m_x^2 \mapsto d_x f(p)\}$,

Nehmen wir an, $x = (0,...,0)$. Dann kann man die Elemente vom $m_x/m_x^2 = I\{x\}/I^2\{x\}$ mit den Linearformen auf dem Tangentialraum identifizieren.

Das Dual von φ identifiziert dann die Punkte des Tangentialraums mit den Auswertungsabbildungen der Linearformen in diesen Punkten.

Beweis der Bijektivität von (1). Mit $x = (x_1,...,x_N)$ gilt

$$I\{x\} = (T_1\text{-}x_1,...,T_N\text{-}x_N).$$

Insbesondere ist $I\{x\}$ ein maximales Ideal von $k[T]$. Deshalb hat

(2) $$k[T]/I\{x\}^2$$

genau ein Primideal: ein beliebiges Primideal $\bar{p}$ hat als Urbild beim natürlichen Homomorphismus

$$k[T] \to k[T]/I\{x\}^2$$

ein Primideal p mit $I\{x\}^2 \subseteq p$. Es folgt $I\{x\} \subseteq p$, und weil $I\{x\}$ maximal ist, $I\{x\} = p$. Damit gilt

$$\bar{p} = I\{x\}/I\{x\}^2.$$

Insbesondere ist der Ring (2) lokal und Lokalisieren nach p läßt den Ring unverändert,

$$k[T]/I\{x\}^2 \cong (k[T]/I\{x\}^2)_{\bar{p}} \cong k[T]_p/(I\{x\}^2) = \mathcal{O}_{X,x}/I\{x\}^2\mathcal{O}_{X,x}$$

Wir beachten, das von $I\{x\}$ in $\mathcal{O}_{X,x}$ erzeugte Ideal ist gerade das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$,

$$I\{x\}\, \mathcal{O}_{X,x} = \{ \frac{f}{1} \cdot \frac{1}{s} \mid f(x) = 0, s(x) \neq 0 \} = m_x .$$

Wir erhalten damit einen Isomorphismus

$$k[T]/I\{x\}^2 \cong \mathcal{O}_{X,x}/m_x^2.$$

Dieser induziert einen Isomorphismus der maximalen Ideale,

$$I\{x\}/I\{x\}^2 \cong m_x/m_x^2.$$

QED.

(c) Das Differential einer regulären Abbildung

Seien f: $X \to Y$ eine reguläre Abbilung affiner Varietäten, $x \in X$ ein Punkt und $y = f(x)$. Dann induziert f eine k-lineare Abbidung

$$d_x f: \mathrm{Hom}_k(m_x/m_x^2, k) \to \mathrm{Hom}_k(m_y/m_y^2, k).$$

Diese heißt Differential von f im Punkt x.

Konstruktion

Die Verpflanzungsabbildung

$$\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}, s \mapsto s \circ f,$$

überführt Keime, die in y Null sind, in Keime, die in x Nul sind, d.h. die maximalen Ideale werden ineinander abgebildet. Man erhält damit eine Abbildung

$$m_{Y,y} \to m_{X,y}, s \mapsto s \circ f,$$

die die Quadrate der maximalen Ideale ineinander abbildet und damit eine Abbildung

$$m_y/m_y^2 \to m_x/m_x^2, s \bmod m_y^2 \mapsto s \circ f \bmod m_x^2.$$

Dies ist offensichtlich eine k-lineare Abbildung. Ihr Dual bezeichnen wir mit $d_x f$.

Bemerkungen

(i) Durch die Identifikation der obigen Hom-Mengen mit den beiden Tangential-Räumen $T_x(X)$ bzw. $T_y(Y)$ wird $d_x f$ zu einer k-linearen Abbildung

$$d_x f: T_x(X) \to T_y(Y)$$

Bezüglich gegebener affiner Einbettungen $X \subseteq \mathbb{A}^M$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^M$ bekommt das Differential die folgenden Gestalt.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_M \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial T_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial T_M}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_N}{\partial T_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial T_M}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_M \end{pmatrix}$$

Dabei seien die f_i die Koordinatenfunktionen von f,

$$f: X \to Y, x \mapsto (f_1(x),\dots,f_N(x)).$$

(ii) Bezeichnet $i: X \to \mathbb{A}^M$, $x \mapsto x$, die natürliche Einbettung, so ist

$$d_x i: T_x X \to T_x \mathbb{A}^M$$

injektiv, d.h. $d_x i$ identifiziert $T_x X$ mit einem Unterraum des Tangentialraums von $\mathbb{A}^M$.

(iii) Das Differential ist mit der Komposition regulärer Abbildungen verträglich: sind $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$ reguläre Abbildunge und $x\in X$ ein Punkt, so gilt

$$d_x(g \circ f) = d_y g \circ d_x f$$

mit $y = f(x)$.

Beweis. Zu (iii). Für das Dual von $d_x f$,

(1) $$\psi: m_y/m_y^2 \to m_x/m_x^2, s \bmod m_y^2 \mapsto s \circ f \bmod m_x^2,$$

kann man aus der Abbildungsvorschrift direkt ablesen, daß die Kontruktion funktoriell ist. Beim Übergang zum Dual bleibt diese Eigenschaft erhalten.
Zu (ii). Die Aussage folgt aus der Beschreibung des Differentials in (i). Die Matrix von (i) ist für die identische Abbildung $f = i$ gerade die Einheitsmatrix.
Zu (i). O.B.d.A. seien $x = (0,...,0) \in \mathbb{A}^M$ und $y = (0,...,0) \in \mathbb{A}^N$. Dann ist die i-te Zeile des Matrizenprodukts gerade der Wert $d_x f_i(p)$ der linearen Funktion $d_x f_i$ an der Stelle p. Die lineare Abbildung mit der angegebenen Matrix kann somit in der Gestalt

$$p \mapsto \begin{pmatrix} d_x f_1(p) \\ \dots \\ d_x f_N(p) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Die induzierte duale Abbildung genügt damit der folgenden Abbildungsvorschrift. Sei λ eine Linearform aus $\mathrm{Hom}(T_y(Y), k)$, die wir uns k-linear auf den ganzen Raum fortgesetzt denken[114]. Das Bild von λ ist dann die Abbildung

$$\tilde{\lambda}: p \mapsto \lambda\begin{pmatrix} d_x f_1(p) \\ \dots \\ d_x f_N(p) \end{pmatrix}$$

Wir haben zu zeigen, dies ist gerade das Bild von λ bei der Abbildung (1). Nach 2.1.3(b) kann man die Zuordnung $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$I\{y\}/ I\{y\}^2 \cong \mathrm{Hom}(T_y(Y), k) \to \mathrm{Hom}(T_x(X), k) \cong I\{x\}/ I\{x\}^2,$$

$$\alpha \bmod I\{y\}^2 \mapsto \quad d_x\alpha \quad \mapsto \quad (d_x\alpha)^\sim \quad \mapsto (\alpha\circ f) \bmod I\{x\}^2$$

Dabei bildet die lineare Abbildung $(d_x\alpha)^\sim$ den Punkt $p \in T_x(X)$ ab auf

$$d_x\alpha\begin{pmatrix} d_x f_1(p) \\ \dots \\ d_x f_N(p) \end{pmatrix} = d_x(\alpha\circ f)$$

(nach der Kettenregel). Schließlich nutzen wir die Tatsache, daß die natürlichen Abbildungen $I\{y\}/ I\{y\}^2 \to m_y/m_y^2$ und $I\{x\}/ I\{x\}^2 \to m_x/m_x^2$ und erhalten die Abbildung

$$m_y/m_y^2 \to m_x/m_x^2, \alpha \bmod m_y^2 \mapsto \alpha\circ f \bmod m_y^2 .$$

Dies ist aber gerade die Abbildung (1).
QED.

(d) Eine Anwendung: Kurven, die sich nicht in den $\mathbb{A}^{N-1}$ einbetten lassen.
Die Kurve

$$X = \{(t^N, t^{N+1}, ..., t^{2N-1}) \in \mathbb{A}^N \mid t \in k\}$$

ist zu keiner Kurve des $\mathbb{A}^{N-1}$ isomorph.

---

[114] Der Übergang zur Fortsetzung auf den ganzen Raum soll sicherstellen, daß die nachfolgende Abbildung definiert ist. Wir könnten auf die Fortsetzung von λ verzichten, wenn wir bereits wüßten, daß der Punkt mit den Koordinaten $d_x f_j(p)$ (j=1,...,N) im Tangentialraum $T_y(Y)$ liegt.

Beweis. Es reicht zu zeigen, der Tangentialraum von X in x = (0,...,0) ist N-dimensional,

$$T_x X = \mathbb{A}^N.$$

Das ist äquivalent zu der Aussage, die Gleichung f∈I(X) haben eine Taylor-Entwicklung im Ursprung x, die im Grad ≥ 2 beginnt. Sei f∈I(X) von der Gestalt

$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i T_i + g \text{ mit } a_i \in k \text{ und } g \in (T_1,...,T_N)^2.$$

Dann gilt für jedes t∈k,

$$\begin{aligned} 0 &= f(t^N, t^{N+1},...,t^{2N-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{N} a_i t^{N+i-1} + g(t^N, t^{N+1},...,t^{2N-1}). \end{aligned}$$

Nun ist die Summe vom Grad < 2N in t während jedes Glied von g einen Grad ≥ 2N hat. Diese Relation kann also nicht identisch in t erfüllt sein außer im Fall

$$a_i = 0$$

für alle i.

QED.

Bemerkung

Die obigen Argumente zeigen, keine Umgebung des Ursprungs der angegebenen Kurve ist isomorph zu einer quasi-projektiven Varietät im $\mathbb{A}^{N-1}$.

4.1.4 Singuläre Punkte

(a) Das Tangentialbündel einer affinen Varietät

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^N$ eine abgeschlossen Teilmenge. Dann heißt die Menge

$$T(X) := \{(v,x) \in \mathbb{A}^N \times X \mid d_x f(v) = 0 \text{ für alle } f \in I(X)\}$$

Tangentialbündel von X. Die Einschränkung

$$\pi: T(X) \to X$$

der Projektion auf den zweiten Faktor heißt natürliche Projektion des Tangentialbündels.

Bemerkungen

Für jedes Polynom f∈k[T] ist $d_x f(v)$ ein Polynom in x und v. Das Tangentialbündel von X ist also eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^N \times X$.

(b) Die Dimension der Fasern des Tangentialbündels

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\pi: T(X) \to X$ die natürliche Projektion des Tangentialbündels von X und X'⊆X eine irreduzible Komponente von X. Dann gibt es eine nicht-negative ganze Zahl

$$s$$

mit[115]

---

[115] Seien $\overline{X}$ die projektive Abschließung von X im $\mathbb{P}^N$ und $\overline{TX}$ die projektive Abschließung von TX im $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N$. Wir haben dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{\pi} & X \\ \cap & & \cap \\ \overline{TX} & \xrightarrow{\overline{\pi}} & \overline{X} \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}^N \end{array}$$

(i) $\dim \pi^{-1}(x) \ge s$ für alle $x \in X'$.

(ii) $F := \{ x \in X' \mid \dim \pi^{-1}(x) > s \}$ ist abgeschlossen und nirgends dicht[116] in X'.

(iii) Die Fasern von π in den Punkten von $X' - F$ sind s-dimensional.

(iv) $\pi^{-1}(X'-F)$ ist irreduzibel.

Beweis. Wir setzen

$$
\begin{aligned}
T'X &:= \pi^{-1}(X') \\
\pi' &:= \pi|_{T'X} : T'X \to X'
\end{aligned}
$$

Die Anwendung des Satzes von der Dimension der Faser ist an dieser Stelle etwas kritisch, da es Komponenten von $T'X$ geben könnte, deren Bild von X' verschieden ist aber dicht liegt in X'.

Seien $\overline{X}$ die projektive Abschließung von X im $\mathbb{P}^N$ und $\overline{TX}$ die projektive Abschließung von TX im $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N$. Wir haben dann ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{array}{ccc}
TX & \xrightarrow{\pi} & X \\
\cap & & \cap \\
\overline{TX} & \xrightarrow{\overline{\pi}} & \overline{X} \\
\cap & & \cap \\
\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}^N
\end{array}
$$

Dabei sei $\overline{\pi}$ die Einschränkung der Projektion auf den zweiten Faktor. Die Gleichungen von $\overline{TX}$ sind von der Gestalt

$$\tilde{f} = 0,\ d_x\tilde{f}(v) = 0.$$

Dabei durchlaufe f ein gewisses Gleichungssystem für X und es bezeichne $\tilde{f}$ die Homogenisierung[117] von f und $d_x\tilde{f}(v)$ sei

---

Dabei sei $\overline{\pi}$ die Einschränkung der Projektion auf den zweiten Faktor. Die Gleichungen von $\overline{TX}$ sind von der Gestalt

$$\tilde{f} = 0,\ d_x\tilde{f}(v) = 0$$

Dabei durchlaufe f ein gewisses Gleichungssystem für X und es bezeichne $\tilde{f}$ die Homogenisierung von f und $d_x\tilde{f}(v)$ ist $\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial S_j}(S)\,(S_0T_j - S_jT_0)$. Für $p \in X$ und $q=(v,p) \in \overline{\pi}^{-1}(p) = \overline{TX} \cap \mathbb{P}^N \times \{p\}$ gilt genügt v den Gleichungen

$$0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial S_j}(1,p)\,(S_j - p_jS_0) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial S_j}(p)\,(S_j - p_jS_0).$$

Dies sind die Gleichungen der projektiven Abschließung der Faser $\pi^{-1}(p)$. Für $p \in X$ gilt also $\overline{\pi}^{-1}(p) = \overline{\pi^{-1}(p)}$. Insbesondere ist $\dim \overline{\pi}^{-1}(p) = \dim \pi^{-1}(p)$. Damit kann man $\overline{\pi}:\overline{TX} \to \overline{X}$ betrachten anstelle vo $\pi:TX \to X$.

[116] Jede offene Menge von X hat Punkte mit dem Komplement dieser Menge gemeinsam.

$$d_x\tilde f(v) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \tilde f}{\partial S_j}(S)\,(S_0T_j - S_jT_0).$$

Für $p\in X$ und $q=(v,p)\in\bar\pi^{-1}(p) = \overline{TX}\cap\mathbb{P}^N\times\{p\}$ genügt v den Gleichungen

$$0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \tilde f}{\partial S_j}(1,p)\,(S_j - p_jS_0) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial S_j}(p)\,(S_j - p_jS_0).$$

Dies sind die Gleichungen der projektiven Abschließung der Faser $\pi^{-1}(p)$. Insbesondere handelt es sich um einen linearen Unterraum des $\mathbb{P}^N$, der dieselbe Dimension hat wie $\pi^{-1}(p)$.
Damit gilt:

(1) Für $p\in X$ gilt $\bar\pi^{-1}(p) = \overline{\pi^{-1}(p)}$ und insbesondere $\dim \bar\pi^{-1}(p) = \dim \pi^{-1}(p)$

(2) Die Fasern von $\bar\pi$ sind projektive Räume und insbesondere irreduzibel.

Damit kann man $\bar\pi:\overline{TX} \to \bar X$ betrachten anstelle von $\pi:TX \to X$ und

$$\bar\pi':\bar T'X := \bar\pi^{-1}(\bar X') \to \bar X'$$

anstelle von π': $T'X \to X'$, wobei $\bar X'$ die projektive Abschließung von X' bezeichne. Seien

$$\bar T'X = Y_1\cup\ldots\cup Y_{r'},$$

die Zerlegung in irreduzible Komponenten und

$$Y_1,\ldots,Y_r$$

seien die Komponenten maximaler Dimension, die sich surjektiv auf $\bar X'$ abbilden. Dann ist

$$s := \dim Y_j - \dim X \quad (j = 1,\ldots,r)$$

unabhängig von j ($\le r$) und die Menge

$$U_j := \{x\in\bar X' \mid \dim (\bar\pi'|_{Y_j})^{-1}(x) = s \}$$

ist nicht-leer und offen in $\bar X'$ für $j \le r$. Damit ist auch

$$U = \cap_{j=1}^{r} U_j - \bar\pi'(Y_{r+1}\cup\ldots\cup Y_{r'})$$

nicht-leer und offen in $\bar X'$. Die Fasern von $\bar\pi'$ über den Punkten von U sind isomorph zu projektiven Räumen der Dimension s. Deshalb ist $\bar\pi'^{-1}(U)$ irreduzibel, d.h. es gibt nur eine Komponente Y_j maximaler Dimension, die sich surjektiv auf $\bar X'$ abbildet.

Die Faserdimension von

$$\bar\pi':\bar T'X := \bar\pi^{-1}(\bar X') \to \bar X'$$

---

[117] d.h. $\tilde f = S_0^d\cdot f(\frac{S_1}{S_0},\ldots,\frac{S_N}{S_0})$ mit d = deg f. Man beachte, es gilt für $j>0$,

$$\frac{\partial \tilde f}{\partial S_j} = S_0^d\cdot\frac{\partial f}{\partial S_j}(\frac{S_1}{S_0},\ldots,\frac{S_N}{S_0})\cdot\frac{1}{S_0} = S_0^{d-1}\cdot\frac{\partial f}{\partial S_j}(\frac{S_1}{S_0},\ldots,\frac{S_N}{S_0}),$$

d.h. der Übergang zur Homogenisierung kommutiert mit partiellen Ableitungen.

ist in allen Punkten von $\bar{X}'$ mindestens s[118], d.h. es gilt (i). Die Faserdimension ist größer in den Punkten von

$$\bar{X}' - U_1$$ [119]

und in den Punkten gewisser abgeschlossener Teilmengen[120]

$$F_j \subseteq f(Y_j) \text{ für } j = 2,\dots,r'$$

und sonst nirgends. Mit anderen Worten, die Menge

$$F := \{ x \in \bar{X}' \mid \dim \bar{\pi}^{-1}(x) > s \} = (\bar{X}' - U_1) \cup F_2 \cup \dots \cup F_{r'},$$

ist abgeschlossen in $\bar{X}'$. Ihr Durchschnitt mit X' ist damit abgeschlossen in X', d.h. es gilt (ii) und (iii).

Die Fasern von $\bar{\pi}$ über den Punkten von $\bar{X}'$ - F sind s-dimension und irreduzibel, d.h.

$$\bar{\pi}^{-1}(\bar{X}' - F)$$

ist irreduzibel. Dann ist aber auch die offfene Teilmenge

$$\pi^{-1}(X' - F) = \bar{\pi}^{-1}(X' - F) \cap \mathbb{A}^N \times X'$$

irreduzibel, d.h. es gilt.

QED.

(c) Begriff des singulären Punktes für irreduzible Varietäten

Seien X ein quasi-projektive irreduzible Varietät und

$$s := \min \{ \dim T_x(X) \mid x \in X \}$$

$$S(X) := \{x \in X \mid \dim T_x(X) > s \}$$

Die Punkte von S(X) heißen singuläre Punkte von X und die von X - S(X) nicht-singuläre Punkte von X. Die Menge S(X) heißt singulärer Ort von X.

Bemerkungen

(i) Die Menge der nicht-singulären Punkte einer irreduziblen affinen Varietät X bilden eine nicht-leere offene Teilmenge von X. Der singulären Ort S(X) ist abgeschlossen und nirgends dicht in X. Insbesonderen ist die Dimension echt kleiner,

$$\dim S(X) < \dim X.$$

(ii) Eine Varietät ohne singuläre Punkte heißt nicht-singulär oder glatt.

Beispiel

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^N$ eine Hyperfläche mit der Gleichung f,

$$I(X) = (f).$$

Dann gilt s = dim X.

Beweis. Die Gleichung des Tangentialraums von X in $x \in X$ ist

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial T_j}(x)(T_j - x_j) = 0.$$

Seine Dimension ist höchsten N und mindestens N-1 = dim X. Die Behauptung besagt gerade, die Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial T_j}$$

sind nicht alle identisch Null auf X. Im Fall der Charakteristik

$$\mathrm{char}\,(k) = 0$$

---

[118] Da sie auf Y_1 bereits s ist.

[119] Da sie bereits auf Y_1 größer ist.

[120] In den Punkten, in denen $Y_j \to f(Y_j)$ Fasern einer Dimension > s hat.

würde dies bedeuten, f ist eine Konstante, was nicht möglich ist. Im Fall positiver Charakteristik,

$$\mathrm{char}\,(k) = p > 0.$$

würde es bedeuten, alle Variablen von f gehen in f mit der p-ten Potenz ein. Dann wäre aber f eine p-te Potenz eines Polynoms im Widerspruch zu I(X) = (f).
QED.

(d) Theorem: die Dimension des Tangentialraums in einem nicht-singulären Punkt

Sei X eine quasi-projektive irreduzible Varietät und $x\in X$ ein nicht-singulärer Punkt. Dann gilt

$$\dim_k T_x(X) = \dim X.$$

Beweis. Wir haben zu zeigen, für jedes $x\in X$ gilt

$$\dim T_x(X) \ge \dim X$$

und die Menge

$$\{x\in X \mid \dim T_x(X) = \dim X\}$$

ist nicht-leer und offen. Diese Aussage ist lokaler Natur. Wir können also annehmen, X ist affin. Nach 2.1.4(b) gibt es ein s mit

1. $\dim \pi^{-1}(x) \ge s$ für alle $x\in X$.
2. $S(X) := \{ x \in X \mid \dim \pi^{-1}(x) > s \}$ ist abgeschlossen und nirgends dicht[121] in X.

Es reicht zu zeigen,

$$s = \dim X.$$

Nach 1.3.3(h) gibt es einen birationalen Isomorphismus

$$f: X \dashrightarrow H$$

mit einer Hyperfläche H. Insbesondere gibt es nicht-leere offene Teilmengen

$$U\subseteq X \text{ und } V\subseteq H$$

auf denen f einen Isomorphismus induziert. Deshalb ist

$$f(U - S(X))$$

eine nicht-leere offen Teilmenge von H mit

$$\dim T_y H = s \text{ für alle } s\in f(U - S(X))$$

Nach dem Beispiel von (c) ist aber

$$\dim T_y H = \dim H = \dim X$$

für y auf einer offenen Teilmenge von H. Da H irreduzibel ist, hat letztere Menge Punkte gemeinsam mit $f(U\cap S(X))$, d.h. es gibt ein $y\in H$ mit

$$s = \dim T_y H = \dim X$$

QED.

(e) Singuläre Punkte von reduziblen Varietäten, Vorbemerkung

Sei jetzt $X \subseteq \mathbb{A}^N$ eine reduzible abgeschlossenen Menge. Dann ist die Ungleichung

$$\dim T_x X \ge \dim X$$

im allgemeinen falsch. Seien zum Beispiel

$$X = X' \cup X'', \dim X' = 1, \dim X'' = 2,$$

und $x\in X'-X''$ ein nicht-singulärer Punkt. Dann gilt

$$\dim T_x X = 1 \text{ , } \dim X = 2.$$

Das liegt daran, daß die Komponenten von X, die nicht durch x gehen zwar keinen Einfluß auf den Tangentialraum haben, wohl aber auf die Dimension. Deshalb ist es naheliegend, den Begriff der Dimension in einem Punkt einzuführen.

[121] Jede offene Menge von X hat Punkte mit dem Komplement dieser Menge gemeinsam.

(f) Die Dimension einer Varietät in einem Punkt
Seien

$$X = X_1 \cup ... \cup X_r$$

eine quasi-projektive Varietät, $x \in X$ ein Punkt und X' die Vereinigung der Komponenten X_i von X, die den Punkt x enthalten. Dann heißt

$$\dim_x X := \dim X' = \max \{ \dim X_i \mid x \in X_i \}$$

Dimension von X im Punkt x.
Bemerkung
Es gilt

$$\dim X = \max \{ \dim_x X \mid x \in X \}$$

(g) Singuläre Punkte von reduziblen Varietäten
Sei X ein quasi-projektive Varietät und $x \in X$ ein Punkt. Dann heißt X nicht-singulär in x, wenn gilt

$$\dim T_x X = \dim_x X$$

und andernfalls heißt X singulär in x.
Bemerkungen
(i) In jedem Punkt $x \in X$ gilt

$$\dim T_x X \ge \dim_x X .$$

(ii) Durch jeden nicht-singulären Punkt von X geht höchstens eine Komponente.
(iii) Ist

$$X = X_1 \cup ... \cup X_r$$

die Zerlegung von X in irreduzible Komponenten, so gilt

$$S(X) = S(X_1) \cup ... \cup S(X_r) \cup \cup_{i \ne j} (X_i \cap X_j)$$

(iii) Die Menge S(X) der singulären Punkte von X ist eine nirgends dichte abgeschlossene Teilmenge.

Beweis. Zu (i). Seien $X_1, ..., X_r$ die Komponenten von X durch den Punkt x. Dann gilt für jedes i,

$$T_x X \supseteq T_x X_i \text{ und } \dim T_x X_i \ge \dim X_i$$

also

$$\dim T_x X \ge \dim X_i$$

also

$$\dim T_x X \ge \max \{ \dim X_i \} = \dim_x X.$$

Zu (ii). Zum Beweis dieser Aussage fehlt uns im Augenblick noch ein Hilfmittel, nämlich die Beschreibung der vervollständigten lokalen Ringe von X in einem nicht-sigulären Punkt. Mit dieser Frage werden wir uns im nächsten Abschnitt 2.2 beschäftigen.
Zu (iii). Nach (ii) gilt $\cup_{i \ne j} (X_i \cap X_j) \subseteq S(X)$. Es reicht also die Punkte von X zu betrachten, die auf nur einer Komponente liegen. Für solche Punkte ergibt sich aber die Behauptung aus der Definition des singulären Punktes und aus 2.1.4(d).
Zu (iv). Die Menge S(X) ist abgeschlossen nach (iii). Es reicht deshalb zu zeigen,

$$X - S(X) = \cup_i (X_i - S(X_i)) - \cup_{i \ne j} (X_i \cap X_j)$$

liegt dicht in X. Sei $U \subseteq X$ nicht-leer und offen. Dann gibt es ein i mit

$$U \cap X_i \ne \emptyset.$$

Dann ist $U \cap X_i$ eine nicht-leere offene Teilmenge von X_i. Dasselbe gilt für die Mengen

$$X_i - S(X_i) \text{ und } X_i - \cup_{j \ne i} (X_i \cap X_j)$$

Da X_i irreduzibel ist, ist der Durchschnitt dieser drei offenen Mengen nicht leer, d.h.

$$U\cap(X-S(X))$$

ist nicht leer.
QED.

4.1.5 Der Tangentialkegel

(a) Vorbemerkung

Die einfachste Invariante, die die Abweichung eines Punktes davon mißt, nicht-singulär zu sein, ist der Tangentialraum. Es gibt jedoch eine wesentlich feinere Invariante, die wir jetzt einführen: den Tangentialkegel. Wir benötigen zunächst einige Vorbereitungen.

(b) Lemma: Ideal der Abschließung einer Differenz

Seien $I, J \subseteq k[T]$ Ideale. Dann ist das Ideal der Abschließung von

$$V(I) - V(J)$$

gleich dem Radikal von

$$I: J^\infty := \{ f\in k[T] \mid \text{Es gibt ein n mit } fJ^n \subseteq I \}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\overline{V(I)-V(J)} &= \cap \{V(f) \mid f \text{ ist Null auf } V(I) - V(J) \} \\
&= \cap \{ V(f) \mid V(I) - V(J) \subseteq V(f) \} \\
&= V(f \mid V(I) \subseteq V(f)\cup V(J) = V(fJ) \} \\
&= V(f \mid \sqrt{I} \supseteq \sqrt{fJ}) \\
&= V(f \mid fJ \subseteq \sqrt{I}) \\
&= V(M)
\end{aligned}$$

mit

$$M := \{f\in k[T] \mid \text{Es gibt ein n mit } f^nJ^n \subseteq I \}$$

Wir setzen

$$M' := \{f\in k[T] \mid \text{Es gibt ein n mit } fJ^n \subseteq I \}.$$

Dann gilt $M' \subseteq M$, also $V(M) \subseteq V(M')$. Für jedes $x\in V(M')$ und jedes $f\in M$ gibt es ein n mit $f^n\in M'$, also $f^n(x) = 0$, also $f(x) = 0$. Es gilt also $x\in V(M)$. Insgesamt ist $V(M) = V(M')$. Wir erhalten

$$\overline{V(I)-V(J)} = V(M),$$

also, wie behauptet

$$I(\overline{V(I)-V(J)}) = \sqrt{M}$$

QED.

(c) Anfangsformen

Seien A ein Ring und $f\in A[T]$. Wir betrachten die Zerlegung von f in homogene Polynome in den T_i,

$$f = f_l + f_{l+1} + ... + f_m$$

mit

$$f_l \ne 0 \text{ und } \deg f_i = i \text{ für alle } i$$

Dann heißt

$$\text{in } f = \text{in}_T f = f_l$$

<u>Anfangsform</u> von f bezüglich T (im Ursprung). Die Zahl

$$\text{indeg } f = \text{indeg}_T f = l$$

heißt <u>Anfangsgrad</u> von f. Für jedes Ideal $I \subseteq A[T]$ bezeichne

$$\text{in } I = \text{in}_T\, I := (\text{in } f \mid f \in I)$$
das von den Anfangsformen der Elemente von I erzeugte Ideal.

Bemerkungen

(i) Sei t eine Unbetimmte. Für jedes Ideal $I \subseteq A[T]$ besteht die Menge
$$\{ f(tT) \mid f \in I \}$$
gerade aus Polynomen der Gestalt
$$t^{\text{indeg } f} \cdot (\text{in } f + t\cdot\tilde{f}(T,t)).$$
Das Ideal von A[T,t],
$$\tilde{I} := (f(tT) \mid f \in I): t^{\infty}$$
wird von Polynomen der Gestalt[122]
$$\text{in } f + t\cdot\tilde{f}(T,t) \text{ mit } f\in I, \tilde{f}\in A[T,t]$$
erzeugt. Modulo t ist $\tilde{I}$ gerade das Anfangsformenideal in I. Genauer, der Isomorphismus
$$A[T] \xrightarrow{\cong} A[T,t] / (t), f \mapsto f \text{ mod } (t)$$
induziert eine Bijektion
$$\text{in } I \xrightarrow{\cong} \tilde{I} + (t) / (t) =^{123} \tilde{I}\,|_{t=0}$$

(ii) Seien $Y \subseteq \mathbb{A}^M$, $I \subseteq k[Y][T]$ ein Ideal und
$$X := V(I) \subseteq \mathbb{A}^N \times Y$$
die durch I definierte abgeschlossenen Teilmenge. Die durch
in(I)
definierte Teilmenge kann man dann wie folgt erhalten. Seien
$$\tilde{X} := \{(v,y,t) \in \mathbb{A}^N \times Y \times \mathbb{A}^1 \mid (t\cdot v,y) \in X \},$$
φ die Projektion
$$\varphi: \tilde{X} \to \mathbb{A}^1, (v,y,t) \mapsto t,$$
und
$$\tilde{X}' := \text{Abschließung von } \varphi^{-1}(\mu) \text{ mit } \mu := \mathbb{A}^1 - \{0\}.$$
Dann gilt
$$V(\text{In}(I)) = (\varphi|\tilde{X}')^{-1}(0).$$

Beweis . Zu (i). Wir haben zu zeigen, daß $\tilde{I}$ tatsächlich wie angegeben von Polynomen der Gestalt
$$\text{in } f + t\cdot\tilde{f}(T,t) \text{ mit } f\in I, \tilde{f}\in A[T,t]$$
erzeugt wird. Nach Definition sind die Elemente von $\tilde{I}$ Polynome g, für welche ein Produkt $t^n g$ die Gestalt
$$t^n g = \sum_i g_i(T,t) f_i(tT) \text{ mit } g_i\in A[T,t],\ f_i\in I$$
hat. Wir schreiben $g_i = \sum_{i,d} g_{ijd}(T)\cdot t^j$ mit $g_{ijd}\in A[T]$ homogen vom Grad d. Nach eventuellem Erhöhen des Exponenten n erhalten wir

---

122

[123] Man identifiziere A[T,t] / (t) mit dem Bild der Abbildung $A[T,t] \to A[T]$, $f(T,t) \mapsto f(T,0)$.

(1) $$t^n g = \sum_{d,i,j\ge d} g_{ijd}(tT)f_i(tT)\cdot t^{j-d} = \sum_j f^{(j)}(tT)\cdot t^j$$

mit $f^{(j)}(tT) = \sum_{d,i,} g_{i,j+d,d}(tT)f_i(tT)$. Man beachte, die Koeffizienten der t^j sind Polynome der Gestalt $f(tT)$ mit $f\in I$. Wir setzen

$$d_j := \text{indeg } f^{(j)} \text{ und } d := \min\{d_j + j\}.$$

und ordnen die Summanden der rechten Seite von (1) nach dem Wert von $d_j + j$. Wir erhalten

$$t^n g = t^d \cdot \sigma(d) + t^{d+1}\cdot\sigma(d+1) + \ldots$$

mit $\sigma(l) := \sum_{d_j+j=l} (\text{in } f^{(j)} + t\cdot\tilde{f}^{(j)})$. Die Anfangsformen in den Summen $\sigma(l)$ haben für verschiedene j verschiedene Grade d_j und können sich deshalb nicht wegheben. Wir sehen, das Ideal $\tilde{I}$ wird von den Summen der Gestalt $\sigma(l)$ erzeugt. Die einzelnen Summanden dieser Summen haben selbst schon diese Gestalt, d.h. $\tilde{I}$ wird erzeugt von den Elementen der Gestalt

$$\text{in } f + t\cdot\tilde{f} \text{ mit } f\in I.$$

<u>Zu (ii)</u>. Wir verwenden die Bezeichnungen von (i) mit

$$A := k[Y].$$

Für $f\in I$ ist dann $f(t\cdot T)$ ein Element von $A[Y][T,t]$ und es gilt

$$\tilde{X} = V(f(tT) \mid f\in I) \subseteq \mathbb{A}^N\times Y\times\mathbb{A}^1$$

Nach (b) hat die Abschließung von $\varphi^{-1}(\mu) = \tilde{Y} \cap \mathbb{A}^N\times Y\times\mu$ als definierendes Ideal gerade das Ideal $\tilde{I} := (f(tT) \mid f \in I): t^\infty$, d.h.

$$\tilde{X}' = V(\tilde{I}).$$

Nach (i) folgt

$$V(\text{in}(I)) = \tilde{X}'\cap \mathbb{A}^N\times Y\times\{0\} = (\varphi|\tilde{X}')^{-1}(0).$$

QED.

(d) Konstrukion des Tangentialkegels

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ eine abgeschlosse Teilmenge und $x\in X$ ein Punkt. Wir werden den Tangentialkegel

$$C_x(X) \subseteq \mathbb{A}^N$$

von X im Punkt x als Vereinigung gewisser Gerade definieren, die sich analog zur Differentialgeometrie als Grenzlage von Sekanten durch x ergeben werden.

Betrachten wir die wie folgt definierte Menge im $\mathbb{A}^N\times\mathbb{A}^1$,

$$\tilde{X} := \{(v,t) \in \mathbb{A}^N\times\mathbb{A}^1 \mid x + t\cdot v \in X \},$$

und die Einschränkungen der beiden Projektion

$$\varphi: \tilde{X} \to \mathbb{A}^1 \text{ und } \psi: \tilde{X} \to \mathbb{A}^N.$$

Die Menge $\tilde{X}$ ist offensichtlich abgeschlossen. Die Faser von φ über $t\in\mathbb{A}^1$ ist für $t\ne 0$ isomorph zu X,

$$\varphi^{-1}(t) \cong X \text{ für } t \neq 0.$$

Mit

$$\mu := \mathbb{A}^1 - \{0\}$$

gilt

$$\tilde{X} = \varphi^{-1}(\mu) \cup \varphi^{-1}(0)$$

also

$$\tilde{X} = \tilde{X}' \cup \tilde{X}'' \text{ mit } \tilde{X}' := \overline{\varphi^{-1}(\mu)} \text{ und } \tilde{X}'' := \mathbb{A}^N \times \{0\}$$

Insbesondere ist $\tilde{X}$ reduzibel (außer im Fall $X = \mathbb{A}^N$).[124] Die Menge $\tilde{X}'$ hat dieselbe Kodimension in $\mathbb{A}^N \times \mathbb{A}^1$ wie X in $\mathbb{A}^N$. $\tilde{X}'$ ist irreduzibel, falls X es ist.

Die Elemente von

$$\varphi^{-1}(\mu)$$

bestehen gerade aus den Punkten der Sekanten von X durch x, wobei die zweite Koordinate gerade den zweiten von x verschiedenen Schnittpunkt angibt. Die Faser über 0 der Einschränkung

$$\varphi': \tilde{X}' \to \mathbb{A}^1$$

von φ enthält also gerade die Grenzlagen dieser Sekanten, wenn der zweite Punkt gegen x geht. Mit Hilfe von ψ identifiziert man diese Faser mit einer Teilmenge des $\mathbb{A}^N$.

$$C_x(X) := \psi(\varphi'^{-1}(0))$$

heißt <u>Tangentialkegel</u> von X im Punkt x.

Bemerkungen

(i) Ist $x \in X \subseteq \mathbb{A}^N$ und x der Ursprung im $\mathbb{A}^N$, so gilt

$$C_x(X) = V(\text{in } f \mid f \in I(X)).$$

(ii) $x \in C_x(X) \subseteq T_x(X)$.

(iii) $C_x(X) = T_x(X)$ falls x nicht-singulärer Punkt von X ist.

(iv) Sei $Y \subseteq X$ abgeschlossene Teilmenge, die den Punkt x enthält. Dann gilt

$$C_x(Y) \subseteq C_x(X).$$

(v) Sei $X = X_1 \cup X_2$ Vereinigung abgeschlossener Teilmengen, die den Punkt x enthalten. Dann gilt

$$C_x(X) = C_x(X_1) \cup C_x(X_2).$$

(vi) $\dim C_x(X) \geq \dim_x X$

(vii) Es gilt in (vi) sogar das Gleichheitszeichen. Die Ungleichung "$\leq$" ist jedoch schwerer zu beweisen. Wir benötigen dazu den Begriff der lokalen Hilbert-Funktion, mit welchem wir uns im nächsten Abschnitt beschäftigen. Hier beschränken wir uns zunächst mit dem Fall einer Kurve.

(viii) Falls alle Komponenten von X die Dimension 1 haben, gilt

$$\dim C_x(X) = \dim_x X$$

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Folgt aus Bemerkung (ii) von (c) (mit Y := einpunktiger Raum).
<u>Zu (ii) und (iii)</u>. Folgt unmitttelbar aus der Beschreibung der Gleichungen von $C_x(X)$ in (i).

---

[124] Ist $X \neq \mathbb{A}^N$, so ist $\tilde{X} \neq \mathbb{A}^N \times \mathbb{A}^1$ also $\dim \tilde{X} \leq N$. Wäre $\tilde{X}$ irreduzibel, so wäre wegen $\tilde{X}'' \subseteq \tilde{X}$ und $\dim \tilde{X}'' = N$ sogar $\tilde{X}'' = \tilde{X}$. Das kann aber nicht sein, da $\tilde{X}$ Punkte enthält, die nicht in $\tilde{X}''$ liegen (nämlich alle Punkte von $\varphi^{-1}(\mu)$).

Zu (iv). Es gilt $\tilde{Y} := \{(v,t) \mid x + t\cdot v\in Y\} \subseteq \tilde{X}$, also

$$\varphi^{-1}(\mu)\cap\tilde{Y} \subseteq \varphi^{-1}(\mu)\cap\tilde{X}.$$

Diese Inklusion bleibt beim Übergang zu den Abschließungen erhalten,

$$\tilde{Y}' \subseteq \tilde{X}'.$$

Damit gilt aber auch

$$C_x(Y) = \tilde{Y}'\cap\varphi^{-1}(0) \subseteq \tilde{X}'\cap\varphi^{-1}(0) = C_x(X)$$

Zu (v). Mit $\tilde{X}_i := \{(v,t) \mid x + t\cdot v\in X_i\}$ gilt $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2$, also

$$\varphi^{-1}(\mu)\cap\tilde{X} = \varphi^{-1}(\mu)\cap\tilde{X}_1 \cup \varphi^{-1}(\mu)\cap\tilde{X}_2.$$

Durch Übergang zu den Abschließungen folgt[125]

$$\tilde{X}' = \tilde{X}'_1 \cup \tilde{X}'_2.$$

Damit gilt aber auch

$$C_x(X) = \tilde{X}'\cap\varphi^{-1}(0) = \tilde{X}'_1\cap\varphi^{-1}(0) \cup \tilde{X}'_2\cap\varphi^{-1}(0) = C_x(X_1)\cup C_x(X_2)$$

Zu (vi). Sei $X' \subseteq X$ eine Komponente maximaler Dimension durch x,

$$\dim_x X' = \dim_x X.$$

Dann gilt $C_x(X) \supseteq C_x(X')$, also $\dim C_x(X) \ge \dim C_x(X')$. Es reicht, die Aussage im Fall X irreduzibel zu beweisen.

Wie wir gesehen haben, sind die Fasern der Abbildung

$$\varphi: \tilde{X} \to \mathbb{A}^1$$

über $t\in\mu$ isomorph zu X. Deshalb ist $\varphi^{-1}(\mu)$ irreduzibel von der Dimension dim X + 1. Dasselbe gilt auch für die Abschließung $\tilde{X}'$ von $\varphi^{-1}(\mu)$. Nach dem Satz von der Dimension der Faser[126] ist dann aber

$$\dim C_x(X) = \dim \tilde{X}' \cap \varphi^{-1}(0) \ge \dim \tilde{X}' - \dim \mathbb{A}^1 = \dim X = \dim_x X.$$

Zu (vii). Es ist nichts zu beweisen.

Zu (viii). Wegen (v) können wir annehmen, X ist irreduzibel von der Dimension 1. Die Menge

$$\tilde{X}'$$

ist dann irreduzibel von der Dimension 2. Die Faser über 0 der Einschränkung

$$\tilde{X}' \to \mathbb{A}^1$$

ist somit von der Dimension 1 oder 2. Wäre die Faser 2-dimensional, so würde die gesamte Menge $\tilde{X}'$ in der Faser über 0 liegen, d.h. die Fasern über den Punkten von μ wären leer. Das ist aber nicht der Fall: die Fasern über den Punkten von μ sind isomorph zu X.

QED.

---

[125] Der Übergang zur Abschließung ist mit endlichen Vereinigungen verträglich:

$$\overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}\ .$$

Die Inklusion '$\supseteq$' ist trivial. Sei x Berührungspunkt von $A\cup B$, jedoch nicht von A. Wir haben zu zeigen, x ist Berührungspunkt von B. Nach Voraussetzung gibt es eine Umgebung U von x, die disjunkt ist zu A,

$$U\cap A = \emptyset.$$

Jede Umgebung U' von x hat mit $A\cup B$ Punkte gemeinsam. Das gilt speziell für $U'\cap U$. Dann hat aber $U'\cap U$ Punkte gemeinsam mit B für jedes U', d.h. x ist Berührungspunkt von B.

[126] Die Faser über 0 ist nicht leer (vgl. (i)).

(e) Beispiel: ebene algebraische Kurven

Sei $X = V(f(x,y)) \subseteq \mathbb{A}^2$ eine ebene Kurve mit der (reduzierten)[127] Gleichung

$$f(x,y) = 0.$$

Sei f_l die Anfangsform von f in $(0,0) \in X$. Dann gilt

$$C_{(0,0)}X = V(f_l).$$

Als homogenes Polynom des Grades l in zwei Variablen hat f_l die Gestalt

$$f_l(x,y) = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i x + \beta_i y)^{n_i} \text{ mit } \sum_{i=1}^{r} n_i = l.$$

Der Tangentialkegel zerfällt somit in die Vereinigung von Geraden

$$\alpha_i x + \beta_i y = 0$$

Diese Geraden heißen <u>Tangenten</u> an die Zweige von X und die Zahlen n_i heißen <u>Vielfachheiten</u> dieser Tangenten.

Die Zahl l heißt <u>Multiplizität</u> der Kurve X im Punkt (0,0). Im Fall $l > 1$ gilt $T_x(X) = \mathbb{A}^2$ Im Fall $l = 2$ spricht man von <u>Doppeltpunkten</u>. Eine <u>gewöhnlicher Doppelpunkt</u> ist ein Doppelpunkt mit zwei verschiedenen Tangenten.

Subbeispiel. Sei $X = V(f)$ mit $f = y^2 - x^2 - x^3$. Dann ist

$$C_{(0,0)}X = V(y^2 - x^2)$$

die Vereinigung von zwei Geraden, die sich im Ursprung schneiden. Es liegt ein gewöhnlicher Doppelpunkt vor.

Subbeispiel. Sei $X = V(f)$ mit $f = y^2 - x^3$. Dann ist

$$C_{(0,0)}X = V(y^2)$$

eine (doppelt zu zählende) Gerade. Man sagt, X hat eine <u>Spitze</u> in (0,0).

Subbeispiel. Sei $X = V(f)$ mit $f = x^2y - y^3 + x^4$. Dann ist

$$C_{(0,0)}X = V(x^2y - y^3)$$

ein dreifacher Punkt mit den drei einfachen Tangenten $y = 0$, $y = x$ und $y = -x$.

Bemerkung

Wir wollen dieses Beispiel noch etwas verallgemeinern. Dazu ist der Begriff des affinen Kegel einer projektiven Varietät nützlich.

(f) Der affine Kegel über einer projektiven Varietät

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^N$ abgeschlossen. Dann definiert das Ideal I(X) im affinen Raum $\mathbb{A}^{N+1}$ eine affine abgeschlossene Menge

$$C_X := V(I(X)) \subseteq \mathbb{A}^{N+1}.$$

Diese heißt affiner Kegel von X.

Bemerkungen

(i) Die Definition von C_X hängt nicht nur von X sondern wesentlich von der Einbettung von X in den projektiven Raum ab.

(ii) Mit jedem Punkt $x \in C_X$ liegt die ganze Gerade durch x und dem Ursprung auf X, d.h. X ist ein Kegel mit der Spitze im Ursprung 0.

(iii) Die Abbildung

---

[127] f soll keine mehrfachen irreduziblen Faktoren haben, d.h. I(X) = (f).

$$\pi: C_X - \{0\} \to X, x \mapsto [x],$$

ist wohldefiniert und regulär.Die Fasern von π ist affine Geraden, deren Ursprung entfernt wurde, d.h. die Fasern sind irreduzibel und 1-dimensional. Insbesondere gilt

$$\dim C_X = \dim X + 1.$$

(iv) Jede durch homogene Gleichungen im $\mathbb{A}^N$ definierte affine Varietät kann als affiner Kegel einer projektiven Varietät im $\mathbb{P}^{N-1}$ aufgefaßt werden.

(g) Beispiel: Kurven

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^N$ eine (nicht notwendig irreduzible) Kurve, d.h. die irreduziblen Komponenten der abgeschlossenen Menge X seien 1-dimensional. Nach 2.1.5 (d) Bemerkung (viii) ist

$$C_x(X)$$

für jeden Punkt $x \in X$ von der Dimension 1,

$$\dim C_x(X) = 1.$$

Man beachte, als Kegel kann $C_x(X)$ keine irreduziblen Komponenten der Dimension 0 (d.h. keine isolierten Punkte) besitzten. Nach (f) ist $C_x(X)$ der affine Kegel über einer projektiven Varietät, sagen wir $Z \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$ der Dimension 0, d.h. über einer endlichen Punktmenge

$$Z = \{z_1,...,z_1\}.$$

Die natürliche Projektion

$$\pi: C_x(X) - \{0\} \to Z, x \mapsto [x],$$

definiert eine Zerlegung von $C_x(X) - \{0\}$ in r Geraden durch den Ursprung, aus denen der Ursprung entfern wurde. Der Kegel selbst ist damit

$$C_x(X) = \overline{\pi^{-1}(z_1)} \cup ... \cup \overline{\pi^{-1}(z_r)}$$

Vereinigung von r Geraden durch den Ursprung.

Bemerkung

Unser nächstes Ziel ist eine invariante Beschreibung des Tangentialkegels. Dazu führen wir die Begriffe ‘graduierter Ring’ und ‘graduierter Modul’ ein.

(h) Graduierte Ringe und Moduln

Ein Ring R heißt ($\mathbb{Z}$-)graduiert, wenn seine additive Gruppe in eine direkte Summe von Untergruppen zerfällt,

$$R = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$$

mit

$$R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$$

für alle $i,j \in \mathbb{Z}$. Sei R ein graduierter Ring. Insbesondere ist jedes R_n ein Modul über R_0. Der Modul R_n heißt homogene Komponente von R des Grades n von R. Ein R-Modul M heißt graduiert, wenn seine additive Gruppe in eine direkte Summe von Untergruppen zerfällt,

$$M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$$

mit

$$R_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$$

für alle $i,j \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist jedes M_n ein Modul über R_0. Der Modul M_n heißt <u>homogene Komponente</u> des Grades n von M.

Beispiel 1

Sei $R = k[S]$ der Polynom in $T = (S_0,...,S_N)$. Dann ist R ein graduierter Ring mit

$$R_n := \text{Vektorraum der Formen n-ten Grades von } k[T].$$

Jedes homogene Ideal I von R ist ein graduierter R-Modul mit

$$I_n := \text{Vektorraum der Formen n-ten Grades von } I.$$

Beispiel 2

Seien R ein beliebiger Ring, M ein R-Modul und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann hat der R-Modul

$$Gr_I(R) := \oplus_{n=0}^{\infty} Gr_I^n(R) \text{ mit } Gr_I^n(R) = I^n/I^{+1}$$

die Struktur eines graduierten Rings mit $Gr_I^n(R)$ als homogener Komponente des Grades n. Das Produkt der beiden homogenen Elemente

$$x \bmod I^{i+1} \in Gr_I^i(R) \text{ und } y \bmod I^{j+1} \in Gr_I^j(R)$$

ist dabei gerade

$$xy \bmod I^{i+j+1} \in Gr_I^{i+j}(R).$$

Ist M ein R-Modul, so hat der R-Modul

$$Gr_I(M) := \oplus_{n=0}^{\infty} Gr_I^n(M) \text{ mit } Gr_I^n(M) = I^nM/I^{+1}M$$

die Struktur eines graduierten $Gr_I(R)$-Moduls mit $Gr_I^n(M)$ als homogener Komponente des Grades n. Das Produkt der beiden homogenen Elemente

$$r \bmod I^{i+1} \in Gr_I^i(R) \text{ und } m \bmod I^{j+1}M \in Gr_I^j(M)$$

ist dabei gerade

$$rm \bmod I^{i+j+1}M \in Gr_I^{i+j}(R).$$

Beispiel 3

Nimmt man im Beispiel 2 als Ring R den Polynomring

$$R := k[T]$$

und als Ideal I das maximale Ideal, das von den Unbestimmten erzeugt wird,

$$I := (T),$$

so erhält man als zugehörigen graduierten Ring einen Ring, der wieder zum Polynomring (in nicht-kanonischer Weise) isomorph ist,

(1) $$Gr_I R \cong k[T].$$

Nimmt man als R-Modul den Faktorring

$$M = R/J$$

so hat der $Gr_I(R)$-Modul

$$Gr_I(M) \qquad = Gr_{I\cdot R/J}(R/J)$$

die Struktur eines graduierten Rings. Es gilt

$$\begin{aligned} Gr_I^n(R/J) \quad &= (I^n\cdot R/J) / (I^{n+1}\cdot R/J) \\ &\cong (I^n + J) / ((I^{n+1} + J) \\ &\cong I^n / (I^n \cap J + I^{n+1}) \\ &\cong Gr_I^n(R) / in_I^n(J,R). \end{aligned}$$

d.h. der Ring $Gr_I(R/J)$ ist Faktorring von $Gr_I(R)$ bezüglich des homogenen Ideals

$$\mathrm{in}_I(J, R) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{in}_I^n(J,R) \text{ mit } \mathrm{in}_I^n(J,R) = (I^n \cap J + I^{n+1}) / I^{n+1}.$$

Diese Ideal heißt Anfangsformen-Ideal von J in $Gr_I(R)$.

Bemerkungen

(i) Alle Betrachtungen mit Ausnahme der Isomorphie (1) bleiben richtig für beliebige Ring R und beliebige Ideale I und J von R.

(ii) Ist $Gr_I(R)$ ein noetherscher Ring, so besitzt das Ideal in(J,R) ein endliches Erzeugendensystem. Insbesondere gibt einen Grad r derart, daß alle Elemente höheren Grades Linearkombinationen von Elementen des Grades r sind, d.h.

$$\mathrm{in}_I^n(J,R) = Gr_I^{n-r}(R)\cdot \mathrm{in}_I^r(J,R) \text{ für alle } n \ge r,$$

d.h.

$$I^n \cap J \subseteq I^{n-r} \cdot I^r \cap J + I^{n+1}$$

d.h.

$$I^n \cap J = I^{n-r} \cdot I^r \cap J + I^{n+1} \cap J \text{ für alle } n \ge r.$$

Iteration liefert

$$I^n \cap J = I^{n-r} \cdot I^r \cap J + I^{l} \cap J \text{ für } l \ge n \ge r.$$

Ist zum Beispiel R ein lokaler (noetherscher) Ring, so kann man den letzten Summanden auf Grund des Krullschen Durchschnittssatzes weglassen. Wir erhalten das

Lemma von Artin-Rees

Seien R ein lokaler noetherscher Ring und $I,J \subseteq R$ zwei Ideale. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$I^n \cap J = I^{n-r} \cdot (I^r \cap J)$$

für alle $n \ge r$.

Beispiel 4

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ abgeschlossen und $x \in X$ ein Punkt. O.B.d.A. sei $x = (0,...,0)$ der Ursprung. Dann ist das Ideal des Tangentialkegels von X in x gerade das Radikal des Ideals

$$\mathrm{in}_{(T)}(I(X), k[T]).$$

Den Koordinatenring des Tangentialkegels erhält man also aus dem Ring

$$Gr_{(T)}(k[T]) / \mathrm{in}_{(T)}(I(X), k[T]) \cong Gr_{(T)}(k[T]/I(X)) = Gr_{I\{x\}}(k[X])$$

durch Faktorisieren nach dem Ideal der nilpotenten Elemente. Wir schreiben,

(2) $$k[C_x(X)] \cong Gr_{I\{x\}}(k[X])_{red}$$

Allgemein bezeichne für jeden Ring R,

$$R_{red} = R/\mathrm{nil}(R)$$

den Faktorring nach dem Ideal der nilpotenten Elemente. R_{red} heißt der zu R gehörige reduzierte Ring oder Reduktion von R. Das Ideal

$$\mathrm{nil}(R) = \sqrt{(0)}$$

heißt Nilradikal von R.

(i) Der Koordinatenring des Tangentialkegels

Seien X ein quasi-projektive Varietät und $x \in X$ ein Punkt. Dann gilt

$$k[C_x(X)] \cong Gr_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x})_{red}.$$

Insbesondere ist der Tangentialkegel eine lokale Invariante.

Beweis. O.B.d.A. seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ abgeschlossen und $x = (0,...,0)$ der Ursprung. Wir betrachten die natürliche Abbildung

(1) $$k[X] / I\{x\}^{n+1} \to \mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x}^{n+1} .$$

Der Ring rechts entsteht aus den Ring links durch Lokalisieren nach dem von

$$(T) = I\{x\}$$

erzeugten maximalen Ideal. Dieses ist aber des einzige Primideal des Rings links, d.h. der Ring links ist bereits ein lokaler Ring und die natürliche Abbildung ist ein Isomorphismus. Das maximale Ideal

$$I\{x\}/ I\{x\}^{n+1}$$

entspricht dabei dem maximalen Ideal

$$m_{X,x} / m_{X,x}^{n+1}$$

rechts und die n-ten Potenzen dieser Ideale entsprechen einander. Wir erhalten einen natürlichen Isomorphismus

$$I\{x\}^n/ I\{x\}^{n+1} \to m_{X,x}^n / m_{X,x}^{n+1}$$

Die Familie dieser Isomorphismen definiert einen Isomorphismus graduierter Ring

$$Gr_{I\{x\}}(k[X]) \to Gr_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x})$$

Durch Übergang zu den Reduktionen erhalten wir die Behauptung.
QED.

(j) Lemma von Nakayama

Sei A ein Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter A-Modul. Es gelte

$$I \subseteq \text{rad } A \text{ (:= Durchschnitt der maximalen Ideale von A).}$$

Wenn die Restklassen der Elemente

$$u_1,...,u_n \in M$$

den Modul M/IM erzeugen, so erzeugen die u_i bereits M selbst.

Beweis. 1. Schritt. Reduktion auf den Beweis der Implikation $IM = M \Rightarrow M = 0$.
Sei

$$N = Au_1+...+ Au_n.$$

Wir haben zu zeigen, der Modul M’:= M/N ist gleich 0. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} M' / IM' &=(M/N) / (IM + N)/N \\ &\cong M / (IM + N) \\ &= (M/IM) / (N + IM)/IM \\ &= 0, \end{aligned}$$

also M’ = IM’. Es reicht also, die angegebene Implikation zu beweisen.

Zum Beweis der Implikation reicht es zu zeigen,

(1) Es gibt ein $x \in I$ mit $(1+x)M = 0$.

Wegen $I \subseteq \text{rad } A$ liegt nämlich 1+x in keinem maximalen Ideal von A, d.h. 1+x ist eine Einheit von A.

Sei $v_1,...,v_r$ ein Erzeugendensystem von M,

$$M = Av_1+...+ Av_r.$$

2. Schritt. Beweis von (1) durch Induktion nach r.
Im Fall r = 0 gilt M = 0 und die Behauptung gilt trivialerweise. Sei jetzt r > 0. Wir setzen

$$M'' := M/v_rA.$$

Dann gilt M” = IM”. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $x\in I$ mit $(1+x)M'' = 0$, d.h. mit

$$(1+x)M \subseteq Av_r .$$

(im Fall r = 1 können wir x = 0 setzen). Wegen IM = M folgt

$$(1+x)M = (1+x)IM \subseteq Iv_r$$

Insbesondere gilt

$$(1+x)v_r = yv_r \text{ mit einem } y\in I,$$

also

$$(1+x-y)(1+x)M \subseteq (1+x-y)Av_r = 0.$$

Das Element (1+x-y)(1+x) ist aber von der gesuchten Art, denn es gilt

$$(1+x-y)(1+x) \equiv 1 \bmod I.$$

QED.

Bemerkung

Der obige Beweis zeigt die Gültigkeit der folgenden Aussage (die manchmal auch als Lemma von Nakayama bezeichnet wird):

Seien A ein Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und I ein Ideal mit IM = M. Dann gibt es ein Element $a\in A$ mit aM = 0 und $a \equiv 1 \bmod I$.

(k) Tangentialkegel und Zariski-Tangentialraum

(i) Seien $m_1,...,m_r \in m_{X,x}$ Elemente, deren Restklassen $\bar{m}_i$ in $m_{X,x}/m^2_{X,x}$ eine Vektorraumbasis bilden,[128]

$$Gr^1_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}) = \bar{m}_1\cdot k + ... + \bar{m}_r\cdot k .$$

Dann bilden die Restklassen der Potenzprodukte des Grades d der m_i eine Vektorraumbasis von $m^d_{X,x}/m^{d+1}_{X,x}$,

$$Gr^d_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}) = \sum_{i_1+...+i_r=d} \bar{m}_1^{i_1}\cdot...\cdot\bar{m}_r^{i_r} .$$

(Nach dem Lemma von Nakayame) Mit anderen Worten der Homomorphismus von k-Algebren

$$k[t_1,...,t_r] \to Gr_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}), T_i \mapsto \bar{m}_i,$$

der die Unbestimmte t_i abbildet in das Differential

$$d_x m_i = \bar{m}_i ,$$

ist surjektiv. Diese Surjektion definiert eine Einbettung

$$C_x(X) \subseteq \mathbb{A}^r$$

in einen affinen Raum, dessen Koordinatenfunktionen gerade einer Basis des Kotangentialraums entsprechen, d.h. einem System von Koordinatenfunktionen auf dem Tangentialraum. Mit anderen Worten, der affine Raum $\mathbb{A}^r$ läßt sich in natürlicher Weise mit dem Tangentialraum von X in x identifizieren (aufgefaßt als affine Varietät),

$$C_x(X) \subseteq T_x(X).$$

Wir erhalten so erneut die Einbettung von 2.1.5(d) Bemerkung (ii).

---

[128] Weil $m_{X,x}$ ein maximales Ideal ist, gilt $Gr^0_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}) = \mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x} = k$.

(ii) Etwas formaler kann man diese Einbettung auch wie folgt beschreiben. Die natürliche Abbildung

$$m_{X,x}/m^2_{X,x} \subseteq Gr_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}) \to Gr_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x})_{red}$$

ist k-linear und induziert daher einen Homomorphismus von k-Algebren,

$$S_k(m_{X,x}/m^2_{X,x}) \to Gr_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x})_{red},$$

wobei links die symmetrische Algebra über dem k-Vektorraum $m_{X,x}/m^2_{X,x}$ steht. Diese symmetrische Algebra läßt sich als Koordinatenring des Tangentialraums auffassen und die Algebra rechts als Koordiantenring des Tangentialkegels. Der Homomorphismus also als Abbildung

$$k[T_x(X)] \to k[C_x(X)].$$

Die zugehörige reguläre Abbildung

$$C_x(X) \to T_x(X)$$

ist gerade die oben beschriebene Einbettung.

(iii) In einem gewissem Sinne kann man den Zariski-Tangentialraum als den kleinsten Vektorraum betrachten, der den Tangentialkegel enthält.[129]

(l) Funktorialität des Tangentialkegels

Seien f: X → Y eine reguläre Abbildung affiner Varietäten, $x \in X$ ein Punkt und $y = f(x)$ dessen Bild. Dann gilt $d_x f(C(X)) \subseteq C(Y)$, d.h. das Differential

$$d_x f = T_x(f): T_x(X) \to T_y(Y)$$

induziert eine reguläre Abbildung

$$d_x f = C_x(f): C_x(X) \to C_y(Y).$$

Beweis. Betrachten wir die zu f gehörige Verpflanzungsabbildung

$$f^*: \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}, \alpha \mapsto \alpha \circ f.$$

Sie überführt die maximalen Ideale der beteiligten lokalen Ring ineinader. Dasselbe gilt daher für deren Potenzen. Nach dem Homomorphiesatz erhalten wir für d = 0,1,2,... Homomorphismen

(1) $$f^d_x: m^d_{Y,y} / m^{d+1}_{Y,y} \to m^d_{X,x} / m^{d+1}_{X,x}, [\alpha] \mapsto [\alpha \circ f].$$

---

[129] Dazu muß man sich auf den Standpuntk stellen, der "richtige" Koordinatenring des Tangentialkegel ist der Ring $Gr_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x})$ (nicht dessen Reduktion). Wäre der Tangentialkegel in einem echten Vektorraum V der Tangentialraums enthalten,

(1) $$C_x(X) \subseteq V \subset T_x(X)$$

so würden diese Inklusionen Surjektionen auf den Koordinatenringen induzierten,

(2) $$k[C_x(X)] \leftarrow k[V] \leftarrow k[T_x(X)]$$

Die Echtheit der rechten Inklusion in (1) impliziert, daß im Kern der rechten Surjektion von (2) lineare Polynome liegen (die Gleichungen von V), d.h. (2) ist nicht injektiv im Grade 1. Im Grade 1 ist aber (2) gerade die identische Abbildung

$$m_{X,x}/m^2_{X,x} \leftarrow m_{X,x}/m^2_{X,x}$$

(wenn man den Übergang zur Reduktion ignoriert).

Für d = 1 ist dies gerade das Dual der Linearisierung $d_x f$ von f, d.h. f_x^1 ist gerade die die Verflanzungsabbildung entlang des Differentials $d_x f$: $T_x(X) \to T_y(Y)$ für die linearen Funktionen auf $T_y(Y)$. Die induzierte Abbildung auf den symmetrischen k-Algebren

$$\begin{array}{ccc} S_k(m_{Y,y}/m_{Y,y}^2) & \xrightarrow{(d_x f)^*} & S_k(m_{X,x}/m_{X,x}^2) \\ || & & || \\ k[T_y(Y)] & & k[T_x(X)] \end{array}$$

ist also gerade die durch $d_x f$ auf den Koordinatenringen induzierte Abbildung. Die Abbildungen (1) setzen sich zu einem Ringhomomorphismus

$$Gr_{m_{Y,y}}(\mathcal{O}_{Y,y}) \to Gr_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x})$$

zusammen. Die natürlichen Inklusionen

$$m_{Y,y} / m_{Y,y}^2 \subseteq Gr_{m_{Y,y}}(\mathcal{O}_{Y,y}) \text{ und } m_{X,x} / m_{X,x}^2 \subseteq Gr_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x})$$

induzieren Surjektionen

$$k[T_y(Y)] \to Gr_{m_{Y,y}}(\mathcal{O}_{Y,y}) \text{ und } k[T_x(X)] \to Gr_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}).$$

Ersetzt man die Bildringe noch durch ihre Reduktionen, so entsprechen diese Surjektionen gerade den natürlichen Einbettungen der Tangentialkegel in die zugehörigen Tangentialräume.
Wir erhalten ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[T_y(Y)] & \xrightarrow{(d_x f)^*} & k[T_x(X)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ Gr(\mathcal{O}_{Y,y}) & \to & Gr(\mathcal{O}_{X,x}) \end{array}$$

von Homomorphismen graduierter k-Algebren. Im Grad 1 sind die vertikalen Abbildungen gerade die identischen Abbildung von

$$m_{Y,y} / m_{Y,y}^2 \text{ bzw. von } m_{X,x} / m_{X,x}^2.$$

Im Grad 1 sind die beiden horizontalen Abbildungen gleich der Abbildung (1) mit d = 1, d.h. sie stimmen überein. Das Diagramm ist also kommutativ im Grad 1. Nun wird die k-Algebra links oben von ihren Elementen des Grades 1 erzeugt und alle Abbildungen des Diagramms sind Homomorphismen von k-Algebren. Deshalb ist das Diagramm in allen Graden kommutativ. Wir ersetzen noch die Algebren der unteren Zeile durch ihre Reduktionen und gehen zu den induzierten Abbildungen der affinen Varietäten über. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_y(Y) & \xleftarrow{d_x} & T_x(X) \\ \cup & & \cup \\ C_y(Y) & \leftarrow & C_x(X) \end{array}$$

Die Existenz dieses kommutativen Diagramms ist gerade die zu beweisende Aussage.
QED.

Bemerkungen

(i) Als nächstes wollen wir eine Aussage beweisen, die das Verhalten des Tangentialkegels bei bestimmten Hyperebenenschnitten beschreibt. Dabei sind wir mit dem Problem konfrontiert, daß der “richtige Koordinatenring” des Tangentialkegels

$$C_x(X)$$

eigentlich der Ring

$$Gr(\mathcal{O}_{X,x})$$

ist und nicht, wie in der klassischen algebraischen Geometrie, dessen Reduktion.

(ii) Anders ausgedrückt, der Tangentialkegel besitzt nicht nur die Struktur einer affinen Variatät sondern die eines affinen Schemas und wir müssen bei der Formulierung der Aussage auf diese Schemastruktur Bezug nehmen: die Aussage ist falsch im klassischen Kontext.

(iii) Als Vorbereitung benötigen wir ein Stück kommutative Algebra, welche in der Theorie der affinen Schemata die Zerlegung in irreduzible Komponenten ersetzt.

(m) Assoziierte Primideale

Seien A ein Ring und M ein A-Modul. Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{Spec}\, A$$

die Menge der Primideale von A. Ein Primideal $p\in\mathrm{Spec}\, A$ heißt <u>assoziertes Primideal</u> von M, wenn es eine injektive A-lineare Abbildung

$$A/p \hookrightarrow M$$

gibt. Die Menge der assoiierten Primideale von M wird mit

$$\mathrm{Ass}\, M = \mathrm{Ass}_A\, M$$

bezeichnet. Ein Teilmodul $N \subseteq M$ heißt <u>primär</u>, wenn Ass M/N aus genau einem Primideal besteht. Ist

$$\mathrm{Ass}\, M/N = \{p\},$$

so sagt man auch, N ist p-primär.

Bemerkungen

(i) Sei $p\in\mathrm{Ass}\, M$, $A/p \to M$ eine injektive und A-lineare Abbildung und sei m das Bild vom 1 mod p in M. Dann ist der Kern der linearen Abbildung

$$A \to M,\ x \mapsto xm,$$

gerade p, d.h. es gibt ein Elment $m \in M$ mit

$$\mathrm{Ann}_A m = p.$$

(ii) Ist $m\in M$ umgekehrt ein Element, dessen Annullator ein Primideal p ist, so hat die Abbildung

$$A \to M,\ x \mapsto xm,$$

den Kern p und induzierte eine A-lineare Injektion $A/p \to M$, d.h. es gilt $p\in\mathrm{Ass}\, M$.

(iii) Sei $p \in \mathrm{Spec}\, A$. Dann ist der Annullator eines jeden von Null verschiedenen Elements des A-Moduls

$$M = A/p$$

gleich p. Es gilt also

$$\mathrm{Ass}_A\, A/p = \{p\},$$

d.h. A/p ist p-primär.

(n) Eigenschaften von Ass M

Sei A ein Ring. Dann gilt

(i) Für je zwei A-Moduln M' und M" mit $M'\subseteq M''$ gilt

$$\mathrm{Ass}_A M' \subseteq \mathrm{Ass}_A\, M''$$

(ii) Für jede kurze exakte Sequenz von A-Moduln

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

gilt

$$\mathrm{Ass}_A\, M \subseteq \mathrm{Ass}_A\, M' \cup \mathrm{Ass}_A\, M''.$$

(iii) Für je zwei A-Moduln M' und M" gilt

$$\mathrm{Ass}\, M'\oplus M'' = \mathrm{Ass}\, M' \cup \mathrm{Ass}\, M''.$$

(iv) Sei M ein A-Modul. Die maximalen Elemente in der Menge der Ideale von A der Gestalt

$$\mathrm{Ann}_A\, m := \{a\in A \mid am = 0\}$$

mit $0 \neq m \in M$ sind Elemente von $\mathrm{Ass}_A M$.

(v) Seien M ein A-Modul und $V \subseteq \mathrm{Ass}\, M$ eine Menge von assoziierten Primidealen. Dann gibt es einen Teilmodul

$$N \subseteq M$$

mit

$$\mathrm{Ass}\, N = \mathrm{Ass}\, M - V \text{ und } \mathrm{Ass}\, M/N = V.$$

Falls A ein noetherscher Ring ist, so gilt außerdem:

(vi) Seien M ein A-Modul, $p\in\mathrm{Spec}\, A$ und $N', N'' \subseteq M$ zwei Teilmoduln, die p-primär sind in M. Dann ist auch $N'\cap N''$ p-primär in M.

(vii) Für jeden A-Modul M gilt

$$M \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ass}\, M \neq \emptyset.$$

(viii) Für jeden A-Modul M und jedes Elemente $a\in A$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

1. Die Multiplikation mit a ist eine Injektion $M \xrightarrow{a} M$.
2. Das Element a liegt in keinem assoziierten Primideal von M.

(ix) Seien M ein A-Modul und $N \subset M$ ein echter Teilmodul. Dann sind äquivalent.

1. $N \subseteq M$ ist primär.
2. Für jedes $a\in A$ ist die Multiplikation mit a auf M/N injektiv oder <u>fast nilpotent</u> (d.h. jedes Element von M/N wird von einer a-Potenz annulliert).

Ist p das einzige assoziierte Primideal von M/N so gilt[130]

$$p = \{ a \in A \mid a \text{ ist fast nilpotent auf } M/N\}$$

(x) Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann ist

$$\mathrm{Ass}\, M$$

eine eindliche Menge.

(xi) Seien M ein endlicher A-Modul und $N \subseteq M$ ein Teilmodul. Dann existieren primäre Teilmoduln

$$N_1,\dots,N_r \subseteq M$$

mit

$$N = N_1\cap\dots\cap N_r .$$

Diese Zerlegung heißt <u>Primärzerlung</u> von N, falls kein N_i weggelassen werden kann und die Mengen $\mathrm{Ass}\, N_i$ paarweise verschieden sind (vgl. (vi)).

(xii) Seien $I \subseteq A$ ein Ideal und

$$I = I_1\cap\dots\cap I_r.$$

eine Primärzerlegung von I. Mit $\mathrm{Ass}\, A/I_i = \{p_i\}$ gilt dann

$$p_i^{n_i} \subseteq I_i \subseteq p_i \text{ für geeignete } n_i \in \mathbb{N}.$$

Speziell im im Fall $A = k[T]$ gilt

$$V(I) = V(I_1) \cup \dots \cup V(I_r) = V(p_1) \cup \dots \cup V(p_r).$$

Im Gegensatz zum Fall $I = I(X)$ mit $X\subseteq\mathbb{A}^N$ abgeschlossen kann es Enthaltenseinsrelationen zwischen den p_i und damit zwischen den $V(p_i)$ geben.

---

[130] Wegen der Äquivalenz von 1. und 2. und wegen (vii).

Auch in diesem Kontext nennen wir die p_i bzw. $V(p_i)$ Komponenten. Komponten, mit $V(p_i) \subset V(p_j)$ heißen eingebettete Komponenten. Die eingebetteten Komponenten einer Primärzerlegung sind im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Beweis. Zu (i). Jede Einbettung $A/p \to M'$ ist auch eine Einbettung $A/p \to M''$.
Zu (ii). Wir können annehmen,

$$M' \subseteq M$$

ist ein Teilmodul von M.
Sei $p \in \mathrm{Ass}\, M$. Dann existier eine A-lineare Injektion

(1) $$A/p \to M.$$

Falls die Zusammensetzung mit $M \to M'$ injektiv ist, so gilt $p \in \mathrm{Ass}\, M''$ und es ist nicht weiter zu beweisen. Sei also die Zusammensetzung nicht injektiv. Dann gibt es ein Element $a \in A$ derart, daß das Bild von a mod p bei (1) in M' liegt. Dann wir der Teilmodul

$$(Aa + p)/p \subseteq A/p$$

bei (1) vollständig in den Modul M' abgebildet, d.h. es gibt eine A-lineare Injektion

$$Aa + p / p \to M'.$$

Die Surjektion

$$A \to (Aa + p) / p,\ x \mapsto xa \bmod p,$$

hat den Kern p, induziert also einen Isomorphismus

$$A/p \to (Aa + p)/ p.$$

Es gibt daher eine A-lineare Injektion $A/p \to M'$, d.h. es ist $p \in \mathrm{Ass}\, M'$.
Zu (iii). Die Inklusion "$\subseteq$" ergibt sich aus (ii), die Inklusion "$\supseteq$" aus (i).
Zu (iv). Sei

$$I := \mathrm{Ann}\,(m) \text{ mit } 0 \ne m \in M$$

ein maximales Element der angegebenen Mengen. Es reicht zu zeigen, I ist ein Primideal von A. Wegen $m \ne 0$ gilt $I \ne A$. Seien jetzt $a', a'' \in A$ Elemente mit

$$a' \cdot a'' \in I.$$

Wir haben zu zeigen, einer der beiden Faktoren liegt in I. Falls a' nicht in I liegt, gilt

$$a'm \ne 0,$$

aber $a'a''m = 0$, d.h.

$$a'' \in \mathrm{Ann}\,(a'm).$$

Weil I das Element m annulliert, gilt erst recht $I \cdot a'm = 0$, d.h.

$$I \subseteq \mathrm{Ann}(a'm).$$

Da I maximal in der Menge der Annullatorein ist, folgt $I = \mathrm{Ann}(a'm)$, also $a'' \in I$.
Zu (v). Sei

$$\mathcal{M} := \{P \subseteq M \text{ Teilmodul} \mid \mathrm{Ass}\, P \subseteq \mathrm{Ass}\, M - V\}$$

die Menge der Teilmoduln von M, die keine assoziierten Primideale aus V besitzen. Diese Menge $\mathcal{M}$ ist nicht leer, denn sie enthält den Null-Modul. Wir versehen $\mathcal{M}$ mit der Halbordnung "$\subseteq$". Sei $\{P_i\}_{i\in I}$ eine lineare geordnete Familie von Elementen aus $\mathcal{M}$. Wir setzen

$$P := \cup_{i\in I} P_i .$$

Dies ist ein Teilmodul von M. Jedes Element $x \in P$ liegt bereits in einem P_i. Insbesondere gilt

$$\mathrm{Ass}\, P \subseteq \cup_{i\in I} \mathrm{Ass}\, P_i \subseteq \mathrm{Ass}\, M - V.$$

Mit anderen Worten P ist ein Element von $\mathcal{M}$. Wir haben gezeigt, jede Kette hat in $\mathcal{M}$ eine obere Schranke. Nach dem Zornschen Lemma besitzt $\mathcal{M}$ ein maximales Element

$$N \subseteq M.$$

Nach Konstruktion gilt

$$\text{Ass } N \subseteq \text{Ass } M - V.$$

Zum Abschluß des Beweises reicht es zu zeigen,

(2) $$\text{Ass } M/N \subseteq V.$$

Denn dann kann keine der beiden letzten Inklusionen echt sein:

$$\text{Ass } M \subseteq \text{Ass } N \cup \text{Ass } M/N \subseteq (\text{Ass } M - V) \cup V = \text{Ass } M.$$

Beweisen wir also (2). Sei $p \in \text{Ass } M/N$. Dann gibt es einen Teilmodul

$$F/N \subseteq M/N,$$

welcher isomorph ist zu A/p. Nach (ii) ist

$$\text{Ass } F \subseteq \text{Ass } N \cup \text{Ass } F/N = \text{Ass } N \cup \{p\}.$$

Weil N maximal ist in $\mathfrak{M}$, kann der echt größere Modul F nicht in $\mathfrak{M}$ liegen, d.h.

$$\text{Ass } F$$

hat mit V ein Element gemeinsam. Dann muß aber p in V liegen, d.h. es gilt (2).

Zu (vi). Betrachten wir die injektive Abbildung

$$M/N'\cap N'' \to M/N'\oplus M/N'',\ [m] \mapsto ([m], [m]).$$

Nach (i) und (iii) ergibt sich

$$\text{Ass}(M/N'\cap N'') \subseteq \text{Ass } M/N'\oplus M/N'' = \text{Ass } M/N' \cup \text{Ass } M/N'' = \{p\}.$$

Es reicht also zu zeigen, Ass $(M/N'\cap N'')$ ist nicht leer. Wegen

$$\text{Ass } M/N' = \{p\} \ne \emptyset$$

gilt $M/N' \ne 0$, also $M/N'\cap N'' \ne 0$. Es reicht also, die nachfolgende Aussage (vii) anzuwenden.

Zu (vii). Aus $M = 0$ folgt trivialerweise Ass $M = \emptyset$. Im Fall $M \ne 0$ ist die Menge der Ideale der Gestalt

$$\text{Ann } m \text{ mit } 0 \ne m \in M$$

nicht leer. Weil A noethersch ist, gibt es in dieser Menge ein maximales Element. Dieses ist nach (iv) ein Element von Ass M. Also sit Ass M nicht leer.

Zu (viii). 1. ⇒ 2. Angenommen a liegt in einem assoziierten Primideal p von M. Dann gibt es eine A-lineaer Injektion

$$A/p \subseteq M.$$

Auf dem Teilmodul A/p von M ist die Multiplikation mit a die Nullabbildung. Also ist sie auf M nicht injektiv.

2. ⇒ 1. Angenommen, die Multiplikation mit a ist auf M nicht injektiv. Dann gibt es ein m mit

$$0 \ne m \in M \text{ und } am = 0.$$

Wegen $Am \ne 0$ gibt es (nach (vi)) ein $p \in \text{Ass } Am \subseteq \text{Ass } M$. Betrachten wir eine zugehörige A-lineare Injektion

$$A/p \subseteq Am \subseteq M.$$

Wegen $am = 0$ ist die Multiplikation mit a auf A/p die Nullabbildung. Also gilt $a \in p$ im Widerspruch zur Annahem 2.

Zu (ix). 1. ⇒ 2. Sei die Multiplikation mit a nicht injektiv. Dann gibt es ein m mit

$$0 \ne m \in M/N \text{ und } am = 0.$$

Wegen $Am \ne 0$ gilt Ass $Am \ne \emptyset$, d.h. es gibt ein

$$p \in \text{Ass } Am \subseteq \text{Ass } M \qquad (= \{p\} \text{nach 1.}).$$

Wegen $am = 0$ annulliert a den Teilmodul $A/p \subseteq Am$, d.h. es gilt

$$a \in p.$$

Sei jetzt

$$0 \ne x \in M/N.$$

Wir haben zu zeigen, eine Potenz von a annulliert x. Betrachten wir die aufsteigende Kette

$$\text{Ann } x \subseteq \text{Ann } ax \subseteq \text{Ann } a^2 \subseteq ...$$

von Idealen in A. Weil A noethersch ist, ist diese Kette stationär, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{Ann } a^n x = \text{Ann } a^{n+1} x.$$

Es reicht zu zeigen, $a^n x = 0$. Angenommen $a^n x \ne 0$. Dann gilt

$$\emptyset \neq \mathrm{Ass}\ Aa^n x \subseteq \mathrm{Ass}\ M = \{p\},$$
d.h. es gibt ein A-lineare Injektion

(3) $$A/p \cong Ay \subseteq Aa^n x.$$

Wegen $a \in p$ wird $y = a'a^n x$ von a annulliert, d.h. $a'a^{n+1}x = 0$, d.h.
$$a' \in \mathrm{Ann}\ a^{n+1}x = \mathrm{Ann}\ a^n x,$$
d.h. $0 = a'a^n x = y$. Letzteres ist unmöglich wegen (3). Diese Widerspruch zeigt, es gilt $a^n x = 0$.

2. $\Rightarrow$ 1. Angenommen, M/N ist nicht primär. Dann gibt es zwei verschiedene Primideale
$$p', p'' \in \mathrm{Ass}\ M/N,\ p' \neq p''.$$
Seien
$$A/p' \cong Am' \subseteq M \text{ und } A/p'' \cong Am'' \subseteq M$$
zugehörige A-lineaer Injektionen. O.B.d.A. können wir annehmen, es gibt ein Element
$$a \in p' - p''.$$
Dann ist die Multiplikation mit a auf dem Teilmodul Am' nicht injektiv und auf dem Teilmodul Am" nicht nilpotent. Dies steht im Widerpruch zur Annahme 2.

Zu (x). Sei $M = Am_1+...+Am_r$ und $M' := Am_1$. Dann hat man eine exakte Sequenz
$$0 \to M' \to M \to M/M' \to 0$$
und nach (ii) reicht es zu zeigen, Ass M' und Ass M/M' sind endlich. Da M/M' von r-1 Elementen erzeugt wird, haben wir damit den Beweis der Aussage auf den Fall reduziert, daß M von einem Element erzeugt wird. Dann gilt aber
$$M = A/I$$
mit einem Ideal I, und es reicht, diesen Spezialfall zu behandeln. Angenommen, die Behauptung wäre falsch für ein Ideal $I \subseteq A$. Dann gibt es in der Menge der Ideale, für welche die Behauptung falsch ist ein maximales und wir können annehmen, I ist ein solches. Für jedes Ideal, welches I echt enthält, gelte also die Behauptung. Weil die Menge
$$\mathrm{Ass}\ A/I$$
nach Annahme unendlich ist, ist sie jedenfalls nicht leer. Es gibt also eine A-lineare Injektion
$$A/p \to A/I \text{ mit } p \in \mathrm{Spec}\ A.$$
Sei a mod I das Bild des Elements 1 mod p bei diesere Injektion. Dann hat man eine exakte Sequenz
$$0 \to A/p \to A/I \to A/(I+aA) \to 0.$$
Nach Wahl von I ist Ass A/(I+aA) eindlich und nach (ii) gilt
$$\mathrm{Ass}\ A/I \subseteq \mathrm{Ass}\ A/p \cup \mathrm{Ass}\ A/(I+aA) = \{p\} \cup \mathrm{Ass}\ A/(I+aA).$$
Also ist auch Ass A/I im Widerspruch zur Wahl von I.

Zu (xi). Wir können M durch M/N ersetzen und somit annehmen, N = 0. Nach (x) ist Ass M endlich,
$$\mathrm{Ass}\ M = \{p_1,...,p_r\}.$$
Nach (v) gibt es für jedes i einen Teilmodul $N_i \subseteq M$ mit
$$\mathrm{Ass}\ M/N_i = \{p_i\} \text{ und } \mathrm{Ass}\ N_i = \mathrm{Ass}\ M - \{p_i\}.$$
Insbesondere sind die N_i primär in M. Sei
$$P := N_1 \cap ... \cap N_r.$$
Es reicht zu zeigen P = 0. Wegen $P \subseteq N_i$ gilt $\mathrm{Ass}\ P \subseteq \mathrm{Ass}\ N_i \subseteq \mathrm{Ass}\ M - \{p_i\}$, d.h.
$$p_i \notin \mathrm{Ass}\ P.$$
Keines der assoziierten Primideale p_i von M liegt somit in Ass P. Wegen $P \subseteq M$ folgt
$$\mathrm{Ass}\ P = \emptyset$$

(vgl. (i)). Nach (vii) ist dann aber P = 0.
Zu (xi). Nach (ix) gilt

$$p_i = \{a \in A \mid a \text{ ist fast nilpotent auf } A/I_i\}.$$

Eine Potenz von p_i liegt deshalb ganz in I_i. Nach (viii) ist für $a \in A - p_i$ die Multiplikation mit a auf A/I_i injektiv. Insbesondere liegt a nicht in I_i. Wir haben gezeigt

$$A - p_i \subseteq A - I_i,$$

d.h. $I_i \subseteq p_i$.
QED.

(o)??? Beispiele

Die assoziierten Primideale von k[X]

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^N$ abgeschlossen und

$$X = X_1 \cup ... \cup X_r$$

die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Dann gilt

$$\mathrm{Ass}_{k[T]}\, k[X] = \{ I(X_1),...,I(X_r) \}.$$

Beweis. Die $I(X_i)$ sind Primideale von k[T] mit

$$I(X) = I(X_1)\cap...\cap I(X_r),$$

also

$$k[X] = k[T]/I(X) \subseteq k[T]/I(X_1) \oplus ... \oplus k[T]/I(X_r)$$

also

$$\mathrm{Ass}\, k[X] \subseteq \cup_{i=1}^{r} \mathrm{Ass}\, k[T]/I(X_i) = \{ I(X_1),...,I(X_r)\}$$

Für jedes i hat man andererseits ein Polynom p, welches nicht in $I(X_i)$ aber in jedem anderen $I(X_j)$ liegt. Für $q \in k[T]$ gilt daher

$$qp \in I(X) \Leftrightarrow qp \in I((X_i) \Leftrightarrow q \in I(X_i),$$

Die Abbildung

$$k[T] \to k[X],\ q \mapsto qp \bmod I(X),$$

hat somit den Kern $I(X_i)$ und man hat eine Injektion

$$k[T]/I(X_i) \to k[X].$$

Es gilt also

$$\mathrm{Ass}\, k[X] = \{ I(X_1),...,I(X_r) \}.$$

QED.

Beispiel: Die Primärzerlegung von Hyperflächen

Sei $H = V(f) \subseteq \mathbb{A}^N$ eine Hyperfläche und

$$f = f_1^{n_1}\cdot...\cdot f_r^{n_r}$$

die Zerlegung in paarweise verschiedene irreduzible Faktoren. Dann ist

$$(f) = (f_1^{n_1})\cap...\cap(f_r^{n_r})$$

die Primärzerlegung des Ideals (f) von k[T]. Außerdem ist

$$\mathrm{Ass}\, k[T]/(f_i^{n_i}) = \{ (f_i) \}$$

für jedes $i \in \{1,...,r\}$. Insbesondere treten keine eingebetteten Komponenten auf.

Beweis. Ein Polynom ist genau dann durch f teilbar, wenn es durch $f_i^{n_i}$ teilbar ist für jedes i. Deshalb gilt

$$(f) = (f_1^{n_1})\cap\ldots\cap(f_r^{n_r})$$

Die Multiplikation mit $g\in k[T]$ induziert genau dann eine Injektion auf $k[T]/(f_i^{n_i})$, wenn g teilerfremd ist zu f_i, d.h. wenn $g\notin(f_i)$ gilt. Andernfalls ist die Multiplikation eine nilpotente Abbildung. Nach 2.1.5(m)(ix) ist $(f_i^{n_i})$ primär in k[T] mit dem assoziierten Primideal (f_i).

QED.

Beispiel: eingebettete Komponenten

Seien $A = k[x,y]$ und

(1) $$I = (x)\cap(x^2,xy,y^2).$$

Das Ideal (x) ist als Primideal auch primär (denn die Multiplikation mit $a\in A$ ist auf $A/(x)$ injektiv im Fall $a\notin(x)$ und Null sonst). Das Ideal

$$(x^2,xy,y^2)$$

ist ebenfalls primär, denn

$$A/(x^2,xy,y^2)$$

ist ein lokaler Ring. Multiplikation mit $a\in A$ ist auf diesem Ring nilpotent, falls

$$a \in (x,y)$$

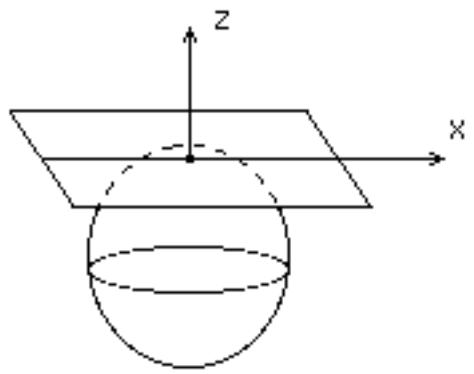
gilt und ein Isomorphismus andernfalls. Wir haben gezeigt, (1) ist eine Primärzerlegung. Die erste Komponente entspricht gerade der y-Achse und die zweite Komponente ist eingebettet: sie entspricht dem mit einer gewissen Vielfachheit gezählten Ursprung.

Beispiel: eingebettete Komponenten eines Tangentialkegels

Sei $X = V(x^2+y^2+(z+1)^2-1) \cup V(y, z) \subseteq \mathbb{A}^3$ die Vereinigung aus einer Einheitskugel und der x-Achse (die durch den Nordpol der Kugel verläuft). Dann gilt

$$I(X) = (x^2+y^2+z^2+2z)\cap(y,z) = (f,g)$$

mit $f = x^2y+y^3+yz^2+2yz$ und $g = x^2z+y^2z+z^3+2z^2$



Das Anfangsideal von I(X) im Ursprung enthält die Formen

$$\text{in } f = 2yz \text{ und in } g = 2z^2.$$

Aus der Relation

$$0 = z\cdot \text{in } f - y\cdot \text{in } g$$
erhält man das folgende Element von I(X).
$$z\cdot f - y\cdot g = (x^2yz+y^3z+yz^3) - (x^2yz+y^3z+yz^3) = 0.$$
Deshalb ist
$$\text{in } I(X) = (\text{in } f, \text{in } g) = (2yz, 2z^2) = (y,z)\cap(2z^2).$$

Der Tangentialkegel $C_x(X)$ besteht also aus der doppelt gezählten Tangentialebene im Nordpol der Kugel und der x-Achse. Letzte ist eine eingebettete Komponente, die jedoch wesentlich für das Veständnis der Geometrie in dieser Situation ist.

(p) ???Verhalten des Tangentialkegels bei Hyperebenen-Schnitten

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ abgeschlossen und $x\in X$ ein Punkt. Wir schreiben
$$Gr(\mathcal{O}_{X,x}) = k[T]/I.$$
Weiter sei H eine Hyperebene durch x,
$$x \in H \subseteq \mathbb{A}^N,$$
die keine Komponente von[131] X und keine Komponente von $C_x(X)$ vollständig enthält, auch keine eingebettete Komponente von I mit eventueller Ausnahme[132] der Kegelspitze x. Dann gilt
$$C_x(X)\cap H = C_x(X\cap H).$$
Beweis. Sei f eine reduzierte Gleichung H, d.h.
$$I(H) = f\cdot k[T].$$
Wir beginnen damit, die Vorausetzungen über H in eine algebraische Sprache zu übersetzen.

1. Schritt. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ abgeschlossen, $x\in X$ ein Punkt und $H = V(f) \subseteq \mathbb{A}^N$ eine Hyperfläche mit der Gleichung f. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) H enthält keine Komponente von X durch x.
(ii) Die Multiplikation mit f induziert eine injektive Abbildung $\mathcal{O}_{X,x}\to\mathcal{O}_{X,x}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $\alpha\in \mathcal{O}_{X,x}$ mit $\alpha\cdot f = 0$ in $\mathcal{O}_{X,x}$. Wir schreiben $\alpha = \frac{u}{v}$ mit $u,v\in k[X]$ und $v(x) \ne 0$. Indem wir den Bruch geeignet erweitern können wir dann errreichen, daß
$$u\cdot f = 0 \text{ in } k[X].$$
Wir denken uns u durch ein Polymom repräsentiert, d.h. wir fassen u als reguläre Funktion auf dem $\mathbb{A}^N$ auf. Dann bekommt diese Gleichung die Gestalt
$$X \subseteq V(u\cdot f) = V(u)\cup V(f).$$
Jede irreduzible Komponente von X liegt also ganz in V(u) oder ganz in V(f). Auf Grund der Voraussetzung (i) liegen also alle irreduziblen Komponenten von X, die durch den Punkt x gehen in V(u), d.h. u ist Null auf diesen irreduziblen Komponenten. dann ist aber u in einer ganzen Umgebung $U \subseteq X$ von x gleich Null, d.h. das durch u in $\mathcal{O}_{X,x}$ repräsentierte Element ist Null. Dann ist aber auch $\alpha = \frac{u}{v}$ gleich Null in $\mathcal{O}_{X,x}$.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Angenommen, eine Komponente $X'\subseteq X$ durch x liegt ganz in H, d.h. f ist Null auf X'. Wir wählen ein Polynom $g\in k[T]$ welches auf allen Komponenten von X Null ist mit Ausnahme von X'. Dann gilt
$$f\cdot g = 0 \text{ auf } X,\ g \ne 0 \text{ auf } X'.$$

[131] Die Bedingung hinsichtlich der Komponenten von X ergibt sich in Wirklichkeit aus den übrigen Forderungen.
[132] Wir lassen zu, daß x eine eingebettete Komponente von I ist (die natürlich automatisch auf der Hyperfläche liegt).

Wegen der Irreduzibilität von X' ist g aud keiner nicht-leeren offenen Teilmenge von X' identisch Null, d.h. es gibt keine Umgebung $U \subseteq X$ des Punktes x, auf welcher g Null ist. Mit anderen Worten, g repräsentiert ein von Null verschiedenes Element von $\mathcal{O}_{X,x}$,

$$g \neq 0 \text{ in } \mathcal{O}_{X,x}.$$

Das Produkt vn f und g ist jedoch Null in $\mathcal{O}_{X,x}$ (da f·g identisch Null ist auf X). Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung (ii).

<u>2. Schritt</u>. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ abgeschlossen, $x \in X$ ein Punkt und $H \subseteq \mathbb{A}^N$ eine Hyperfläche durch x mit der reduzierten Gleichung f, $I(H) = f \cdot k[T]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) H enthält keine irreduzible Komponente von $C_x(X)$ (auch keine eingebettete Komponenten von I mit eventueller Ausnahme der Kegelspitze x).

(ii) Es gibt ein $c \in \mathbb{N}$ mit $(0: in(f)) \cap Gr^d(\mathcal{O}_{X,x}) = 0$ für alle $d \geq c$.

(iii) Es gibt ein $c \in \mathbb{N}$ mit $m^n:f \cap m^c = m^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dabei bezeichne $m = m_{X,x}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$. Ein Element f mit der Eigenschaft (iii) heißt <u>Oberflächenelement</u> von $\mathcal{O}_{X,x}$.

<u>(i) ⇒ (ii)</u>. O.B.d.A. sie $x = (0,...,0)$ der Ursprung. Wir fassen $C_x(X)$ als Teilmenge des $\mathbb{A}^N$ auf, d.h. wir denken uns $k[C_x(X)]$ als Faktorring von k[T] gegeben, wobei wir in geeigneter Weise den graduierten Ring

$$Gr_{(T)}(k[T])$$

mit dem Polynomring k[T] identifizieren. Die Gleichung f der Hyperebene H wird dabei mit deren Anfangsform in(f) identifiziert. Man beachte f ist homogen vom Grad 1. Bedingung (i) bedeutet dann gerade, daß in(f) in keinem assoziierten Primideal von

$$R := Gr_{(T)}\, k[X] = Gr\,(\mathcal{O}_{X,x})$$

liegt. Ausnehmen müssen wir dabei das Primideal

$$R^+ := Gr^+(\mathcal{O}_{X,x}) = \oplus_{d=1}^{\infty} m_{X,x}^d / m_{X,x}^{d+1},$$

in welchem in(f) stets enthalten ist und das möglicherweise unter den assoziierten Primidealen vorkommt. Sei

$$(0) = I_1 \cap ... \cap I_r$$

eine Primärzerlegung der Null in R. Falls R^+ als assoziierten Primideal vorkommt, so sei I_r die zugehörige Primärkomponente. Falls nicht, so fügen wir zur Menge der I_i das Ideal R^+ künstlich hinzu. Wir können also annehmen,

$$Ass\ R/I_r = \{R^+\}.$$

Insbesondere liegt eine Potenz von R^+ in I_r, d.h. es gilt $R_d \subseteq I_r$ für große d, sagen wir

$$R_d \subseteq I_r \text{ für } d \geq c.$$

Für alle anderen i liegt in(f) nicht im Primideal von R/I_i , d.h. die Multiplikation mit in(f) ist injektiv auf R/I_i , d.h. es gilt

$$I_i : in(f) = I_i \text{ für } i = 1,...,r\text{-}1.$$

Damit ist aber für $d \geq c$

$$\begin{aligned}(0 : in(f)) \cap R_d &= (I_1:in(f))\cap...\cap(I_r:in(f)) \cap R_d\\ &\subseteq I_1\cap...\cap I_{r-1}\cap R_d\\ &= I_1\cap...\cap I_r\cap R_d\\ &= (0).\end{aligned}$$

<u>(ii) ⇒ (iii)</u>. Sei c wie in (ii) gewählt und sei $\alpha\in m^n:f \cap m^c$. Wir haben zu zeigen

$$u := \deg in(\alpha) \geq n-1.$$

Nach Wahl von α gilt zumindest

$$u \geq c.$$

Angenommen $u < n-1$. Dann gilt

$$in(\alpha)\cdot in(f) = (\alpha \bmod m^{u+1})\cdot(f \bmod m^2) = (\alpha f \bmod m^{u+2}) = 0$$

Man beachte, $u+2 \leq n$ und $\alpha f\in m^n$. Damit ist

$$in(\alpha) \in (0:in(f)) \cap Gr^u(\mathcal{O}_{X,x}) = 0.$$

Das steht aber im Widerspruch zur Definition von $in(\alpha)$ (eine Anfangsform ist niemals Null).

<u>(iii) ⇒ (i)</u>. Angenommen (i) ist falsch. Dann gibt es ein assoziiertes Primideal P von $R := Gr(\mathcal{O}_{X,x})$ mit $P \neq R^+$ und $in(f) \in P$,

$$R/P \cong R\cdot in(g) \subseteq R.$$

Wegen $P \neq R^+$ enthält R/P Elemente positiven Grades (mit dem Annulator P), d.h. durch Multiplikation mit geeigneten homogenen Elementen positiven Grades können wir den Grad von in(g) bei Bedarf beliebig vergrößern. Insbesondere können wir annehmen,

$$n := \deg in(g) \geq c.$$

Es gilt

$$0 = in(f)\cdot in(g) = fg \bmod m^{n+2},$$

d.h.

$$g \in m^{n+2}: f \cap m^c = m^{n+1},$$

d.h. $\deg g \geq n+1$ im Widerspruch zur Wahl von n.

<u>3. Schritt</u>. Berechnung des Koordinatenrings von $C_x(X\cap H)$.

O.B.d.A. sei

$$x = (0,...,0)$$

Das Ideal von $X\cap H$ ist

$$I(X\cap H) = \sqrt{I(X)+(f)}.$$

Die definierenden Gleichungen von $C_x(X\cap H)$ sind von der Gestalt

$$in\ g \text{ mit } g \in \sqrt{I(X)+(f)}.$$

Wegen $in(g^n) = in(g)^n$ können wir die g auch durch irgendwelche Potenzen ersetzen, d.h. es gilt

$$C_x(X\cap H) = V(in(g) \mid g \in I(X)+(f)) = V(in\ I(X)+(f)).$$

Als Koordinatenring erhalten wir

$$\begin{aligned}k[C_x(X\cap H)] &= Gr_{(T)}(k[T]/(I(X)+(f))_{red}\\ &= Gr(\mathcal{O}_{X,x}/(f))_{red}\\ &= (Gr(\mathcal{O}_{X,x})/ in((f), \mathcal{O}_{X,x}))_{red}\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\mathrm{in}^d((f), \mathcal{O}_{X,x}) = (f)\cap m^d + m^{d+1}/m^{d+1}$$
$$= (m^d:f)f + m^{d+1}/m^{d+1}$$
Nach dem Lemma von Artin-Rees können wir aber auch schreiben
$$(m^d:f)f = (f)\cap m^d = m^{d-r}\cdot(f)\cap m^r = m^{d-r}\cdot(m^r:f)f$$
für ein r und alle $d \ge r$. Nach dem ersten Schritt ist die Multiplikation mit f injektiv in $\mathcal{O}_{X,x}$, d.h. es gilt
$$m^d:f = m^{d-r}\cdot(m^r:f) \subseteq m^c$$
für $d \ge c+r$, also
$$m^d:f = (m^d:f) \cap m^c = m^{d-1}.$$
Für $d \ge c+r$ ergibt sich damit
$$\mathrm{in}^d((f), \mathcal{O}_{X,x}) = m^{d-1}f + m^{d+1}/m^{d+1}$$
$$= \mathrm{in}(f)\cdot \mathrm{Gr}^{d-1}(\mathcal{O}_{X,x})$$
Mit anderen Worten, in den Graden $d \ge c+r$ stimmen die Ideale
$$\mathrm{in}((f), \mathcal{O}_{X,x}) \text{ und } \mathrm{in}(f)\cdot\mathrm{Gr}(\mathcal{O}_{X,x}).$$
Insbesondere gibt es zu jedem Element des Ideals links eine Potenz, die in dem kleineren Ideal rechts liegt. Anders ausgedrückt, die beiden Ideale haben dasselbe Radikal. Damit gilt
$$k[C_x(X\cap H)] = (\mathrm{Gr}(\mathcal{O}_{X,x})/ (\mathrm{in}(f)))_{red} = k[C_x(X)\cap H]$$
Insbesondere ist die natürliche Inklusion
$$C_x(X\cap H) \subseteq C_x(X)\cap H$$
ein Isomorphismus.
QED.

(q) ???Das Tangentialkegelbündel

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^N$ abgeschlossen. Wir setzen
$$\tilde{X}' := \{(v,x,t) \in \mathbb{A}^N\times X\times\mathbb{A}^1 \mid x + t\cdot v \in X \}.$$
Dies ist eine abgeschlossene Menge des $\mathbb{A}^N\times X\times\mathbb{A}^1$. Man beachte, die bei der Konstruktion des Tangentialkegels in $x\in X$ verwendete Menge $\tilde{X} = \tilde{X}_x$ ist bis auf Isomorphie gerade
$$\tilde{X}_x = \tilde{X}' \cap (\mathbb{A}^N\times\{x\}\times\mathbb{A}^1).$$
Die nachfolgende Konstruktion unterscheidet sich von der des Tangentialkegels in x darin, daß wir zusätzlich x variieren. Wir betrachten die Projektionen
$$\varphi: \tilde{X}' \to \mathbb{A}^1, \quad (v,x,t) \mapsto t,$$
$$\psi: \tilde{X}' \to \mathbb{A}^N\times X, \quad (v,x,t) \mapsto (v,x).$$
Mit
$$\mu := \mathbb{A}^1 - \{0\}$$
Es gilt
$$\tilde{X}' = \varphi^{-1}(\mu) \cup \varphi^{-1}(0) = \tilde{X}'' \cup \mathbb{A}^N\times X\times\{0\}$$
mit
$$\tilde{X}'' := \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{A}^1 - \{0\})}$$

Sei φ' die Projektion

$$\varphi'': \tilde{X}'' \to X\times\mathbb{A}^1, (v,x,t) \mapsto (x,t).$$

Dann heißt

$$C(X) := \varphi''^{-1}(X\times\{0\})$$

<u>Tangentialkegelbündel</u> und die Projektion

$$\pi: C(X) \to X, (v,x,0) \mapsto x,$$

heißt <u>natürliche Projektion</u> des Tangentialkegelbündels. Weiter heißt die Abbildung

$$\psi: C(X) \to \mathbb{A}^N\times X, (v,x,0) \mapsto (v,x),$$

<u>natürliche Inklusion</u> des Tangentialkegelbündels. Im allgemeinen identifizieren wir C(X) vermittels dieser natürlichen Inklusion mit einer (abgeschlossenen) Teilmenge des Produktraums $\mathbb{A}^N\times X$.

(r) ???Der Koordinatenring des Tangentialkegelbündels

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^N$ abgeschlossen, k[T,T'] der Koordinatenring von $\mathbb{A}^N\times\mathbb{A}^N$ und

$$\Delta := \{ (x,x) \mid x \in \mathbb{A}^N \}$$

die Diagonale.Dann gilt

(i) $k[C_x(X)] \cong Gr_{I(\Delta)}(k[X\times X])_{red}$.

(ii) Die kononische Projektion des Tangentialkegelbündels induziert auf den Koordinatenringen die natürliche Abbildung

$$k[X] \xrightarrow{\cong} Gr^0_{I(\Delta)}(k[X\times X]) \subseteq Gr_{I(\Delta)}(k[X\times X])_{red}$$

Bemerkungen

(i) Das Ideal $I(\Delta) \subseteq k[T,T']$ wird von den Differenzen $T'_i - T_i$ erzeugt. Deshalb ist

$$Gr^0_{I(\Delta)}(k[X\times X]) =^{133} k[T,T'] / (I(X), I'(X), I(\Delta))$$
$$\cong k[T] / I(X) = k[X]$$

isomorph zum Koordinatenring von X.

(ii) Mit $\Delta T_i := T'_i - T_i$ gilt

$$k[T,T'] = k[T, \Delta T]$$

Der Übergang von den Koordinaten T,T' zu den Koordinaten T, ΔT entspricht der Ausführung einer linearen Koordinatentransformation. Bezüglich der neuen Koordinaten haben die Elemente des Ideals I'(X) die Gestalt

$$I'(X) = \{ f(T') \mid f\in I(X) \} = \{ f(T+\Delta T) \mid f\in I(X) \}$$

Beweis. <u>1. Schritt</u>. $C(X) = V(in_{\Delta T} f(T,\Delta T) \mid f \in I(X\times X))$ im $\mathbb{A}^N\times\mathbb{A}^N$.

Wir wenden Bemerkung (ii) von (c) an mit

$$Y := X \text{ und } I := (f(T+\Delta T) \mid f \in I(X)).$$

Die dortige Menge $\tilde{X}$ ist gerade die Menge

$$\{(v,x,t) \in \mathbb{A}^N\times X\times\mathbb{A}^1 \mid (t\cdot v,x) \in V(I) \}$$
$$= \{(v,x,t) \in \mathbb{A}^N\times X\times\mathbb{A}^1 \mid f(x + t\cdot v) = 0 \text{ für } f\in I(X)\}$$

Dies ist gerade die bei der Konstruktion von C(X) in (h) verwendete Menge Menge $\tilde{X}'$.
Die in $\mathbb{A}^N\times X$ durch

---

[133] I'(X) entstehe aus dem Ideal $I(X) \subseteq k[T]$, indem überall man die Unbestimmten T_i durch die Unbestimmten T'_i ersetzt.

$$\mathrm{in}_{\Delta T}(I) = (\ \mathrm{in}_{\Delta T}\ f(T,\Delta T) \mid f \in I(X\times X))$$

definierte Menge erhalten wir nach Bemerkung (ii) von (c), indem wir

$$\tilde{X}' \cap \mathbb{A}^N \times X \times \mu$$

abschließen und mit $\mathbb{A}^N \times X \times \{0\}$ schneiden. Dies ist aber gerade C(X).

<u>2. Schritt</u>. Berechnung von $\mathrm{Gr}_{I(\Delta)}(k[X\times X])$.

Es gilt

$$\mathrm{Gr}_{I(\Delta)}(k[T,\Delta T] = \oplus_{n=0}^{\infty} I(\Delta)^n / I(\Delta)^{n+1}.$$

Dabei ist

$$\mathrm{Gr}^0_{I(\Delta)}(k[T,\Delta T) = k[T,\Delta T]/I(\Delta) = k[T,\Delta T] / (\Delta T) = k[T]$$

$$\mathrm{Gr}^1_{I(\Delta)}(k[T,\Delta T) = I(\Delta) / I(\Delta)^2 = k[T]\cdot\Delta T_1 + ... + k[T]\cdot\Delta T_N$$

$$\mathrm{Gr}^2_{I(\Delta)}(k[T,\Delta T) = I(\Delta) / I(\Delta)^2 = \sum_{i,j=1}^{N} k[T]\cdot\Delta T_i \Delta T_j$$

...

Man sieht, $\mathrm{Gr}_{I(\Delta)}(k[T,\Delta T]$ kann identifiziert werden mit dem Polynomring $k[T,\Delta T]$. Damit ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Gr}_{I(\Delta)}(k[X\times X]) &= \mathrm{Gr}_{I(\Delta)}(k[T,\Delta T] / I(X\times X)) \\ &= \mathrm{Gr}_{I(\Delta)}(k[T,\Delta T] / \mathrm{in}_{I(\Delta)}\ (I(X\times X), k[T,\Delta T]) \\ &= k[T,\Delta T] / \mathrm{in}(I(X\times X)).\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathrm{in}(I(X\times X)) &= \oplus_{n=0}^{\infty} I(X\times X) \cap I(\Delta)^n + I(\Delta)^{n+1} / I(\Delta)^{n+1} \\ &= (\ \mathrm{in}_{\Delta T}\ h \mid h \in I(X\times X))\end{aligned}$$

Nach dem ersten Schritt definiert dieses Ideal das Tangentialkegelbündel C(X), sein Radikal ist also I(C(X)). Damit ist aber

$$k[C(X)] = \mathrm{Gr}_{I(\Delta)}(k[X\times X])_{red}$$

QED.

(s) ???Die Fasern des Tangentialkegelbündels

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ und

$$\pi: C(X) \to X$$

das Tangentialkegelbündel von X. Dann ist

$$C_x(X) \subseteq \pi^{-1}(x)$$

für jeden Punkt $x \in X$ gerade der Tangentialkegel von X in x.

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen des Vorangehenden Abschnitts. Zur Abkürzung schreiben wir außerdem

$$\mu := \mathbb{A}^1 - \{0\}.$$

Sei

$$x_0 \in X$$

ein Punkt. Dann gilt

$$\pi^{-1}(x_0) \qquad = \tilde{X}'' \cap \mathbb{A}^N \times \{(x_0, 0)\}$$

$$= \overline{\varphi^{-1}(\mu)} \cap \mathbb{A}^N \times\{(x_0,0)\}$$

Den Tangentialkegel in x_0 kann man dagegen mit Hilfe der kanonischen Einbettung identifizieren mit der folgenden Menge.

$$C_{x_0}(X) \qquad = \overline{\varphi^{-1}(\mu) \cap \mathbb{A}^N \times\{x_0\}\times\mathbb{A}^1} \cap \mathbb{A}^N \times\{(x_0,0)\}$$

Auf Grund dieser Beschreibung ist klar, daß der Tangentialkegel in x_0 enthalten ist in der Faser von π über x_0 ,

$$C_{x_0}(X) \subseteq \pi^{-1}(x_0).$$

QED.

Bemerkungen

(i) Es ist naheliegend zu fragen ob bei der eben bewiesenen Inklusion nicht vielleicht sogar das Gleichheitszeichen gilt. Das ist tatsächlich der Fall, der entsprechende Satz ist aber sehr viel tiefliegender. Wir benötigen dazu den Satz über Auflösung der Singuläritäten (von Kurven). Wir kömmen später darauf zurück.

(ii) Unser nächstes Ziel ist die Berechnung der Dimension des Tangentialkegels. Unser wichtigestes Mittel wird eine lokale Variante des Hilbertpolynoms sein und der Vergleich mit dem Hilbertpolynom einer projektiven Varietät.

(t) ???Lemma

Seien A ein Ring, B eine A-Algebra und I das Ideal

$$I := \mathrm{Ker}(B\otimes_A B \to B,\ b'\otimes b'' \mapsto b'b'').$$

Dann gilt:

(i) Das Ideal I wird erzeugt von den Elementen der Gestalt

$$b\otimes 1 - 1\otimes b \text{ mit } b\in B.$$

(ii) Ist $n \subseteq B$ ein Ideal, für welches die Komposition $A \to B \to B/n$ surjektiv ist, so wird I erzeugt von den Elementen der Gestalt

$$b\otimes 1 - 1\otimes b \text{ mit } b\in n.$$

(iii) In der Situation von (ii) gibt es eine natürliche Surjektion von B-Algebren

$$Gr_I(B\otimes_A B)\otimes_B B/n \to Gr_n(B\otimes_A B/n)$$

mit dem Kern

$$K := \oplus_{i=0}^{\infty} (I^i\cap(B\otimes_A B\cdot n) + I^{i+1}) / (I^{i+1} + I^i\cdot n).$$

Beweis. Zu (i). Die Elemente der angegebenen Gestalt liegen in I. Sei umgekehrt ein Element

$$\alpha := \sum_i b'_i\otimes b''_i$$

aus dem Kern von $B\otimes_A B \to B$ gegeben. Dann gilt $\sum_i b'_i b''_i = 0$, also

$$\alpha := \sum_i (b'_i\otimes 1 - 1\otimes b'_i)\cdot 1\otimes b''_i + \sum_i 1\otimes b'_i b''_i$$

$$= \sum_i (b'_i\otimes 1 - 1\otimes b'_i)\cdot 1\otimes b''_i$$

d.h. α liegt im Ideal, welches von den $b'_i\otimes 1 - 1\otimes b'_i$ erzeugt wird.

Zu (ii). Nach Voraussetzung gibt es für jedes $b\in B$ ein $a\in A$ mit

$$\tilde{b} := b - a\cdot 1_B \in n$$

Damit gilt

$$b\otimes 1 - 1\otimes b = \tilde{b}\otimes 1 - 1\otimes\tilde{b} + a\cdot 1_B\otimes 1 - 1\otimes a\cdot 1_B = \tilde{b}\otimes 1 - 1\otimes\tilde{b}$$

Nach (i) wird I von den Elementen dieser Gestalt erzeugt.

Zu (iii). Mit $\overline{B} := B/n$ gilt nach (ii):

$$I\cdot(B\otimes_A\overline{B}) = (b\otimes 1 - 1\otimes b \mid b\in n)\cdot(B\otimes_A\overline{B}) = (b\otimes 1 \mid b\in n\ \}\cdot(B\otimes_A\overline{B}) = n\cdot(B\otimes_A\overline{B})$$

also

(1) $$\mathrm{Gr}_I(B\otimes_A\overline{B}) = \mathrm{Gr}_n(B\otimes_A\overline{B}).$$

Für den i-ten graduierten Bestandteil von $\mathrm{Gr}_I(B\otimes_A B)\otimes_B B/n$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
I^i/I^{i+1}\otimes_B B/n &= I^i / (I^i\cdot n + I^{i+1}) \\
&\twoheadrightarrow I^i / (I^i\cap(B\otimes_A B\cdot n) + I^{i+1}) \\
&= (I^i + B\otimes_A B\cdot n) / (\ I^{i+1} + B\otimes_A B\cdot n) \\
&= \mathrm{Gr}^i_I(B\otimes_A\overline{B}) \\
&= \mathrm{Gr}^i_n(B\otimes_A\overline{B}) \qquad \text{(vgl. (1)).}
\end{aligned}$$

Der i-te graduierte Bestandteil des Kerns dieser Surjektion ist wie behauptet

$$K_i = (I^i\cap(B\otimes_A B\cdot n) + I^{i+1})/(I^i\cdot n + I^{i+1})$$

QED.

4.1.6 Die lokale Hilbertfunktion in einem Punkt

(a) Die Länge eines Moduls

Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Eine (echt absteigende) Kette von Teilmoduln der Länge n ist eine Familie $\{M_i\}_{i=0,...,n}$ von n+1 Teilmoduln M_i von M mit

$$M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_n$$

(echte Inklusionen). Das Supremum über alle Kettenlängen,

$$l_R(M) := \sup \{\ n \mid \text{Es gibt eine Teilmodulkette der Länge } n \text{ von } M\ \}$$

heißt Länge des R-Moduls M.

Bemerkungen

(i) Falls es eine Kette maximaler Länge gibt, so gilt für diese
  1. $M_0 = M$.
  2. $M_n = 0$.
  3. $l(M_{i-1}/M_i) = 1$ für $i = 1,...,n$.

(ii) Ist R ein Körper (also M ein R-Vektorraum), so gilt $l_R(M) = \dim_R M$.

(b) Additivität der Länge

Seien R ein Ring und

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln. Dann gilt

$$l(M) = l(M') + l(M'').$$

Insbesondere hat jede Teilmodulkette von M maximaler Länge (falls es solche Ketten gibt) dieselbe Länge $l(M)$.

Beweis. 1. Schritt. $l(M') + l(M'') \le l(M)$.

Seien

$$M'_0 \supset M'_1 \supset ... \supset M'_{n'},$$

eine Kette der Länge n' von M' und

$$M''_0 \supset M''_1 \supset ... \supset M''_{n''}$$

eine Kette der Länge n'' von M''. Dann gilt $g^{-1}(M''_{n''}) \supseteq M' \supseteq M'_0$ und

$$g^{-1}(M''_0) \supset g^{-1}(M''_1) \supset ... \supset g^{-1}(M''_{n''-1}) \supset M' \supset M''_1 \supset ... \supset M'_{n'},$$

ist eine Kette in M der Länge

$$n'' + n'.$$

Also gilt $l(M) \ge n' + n''$. Damit ist die behauptete Ungleichung bewiesen. Man beachte, diese Ungleichung gilt auch wenn die Länge von M' oder M'' unendlich ist. Im letzterem Fall ist damit sogar der Satz bewiesen. Wir können im folgenden also annehmen, es gilt

$$l' := l(M') < \infty \text{ und } l'' := l(M'') < \infty.$$

Wir werden im folgende M' mit seinem Bild in M identifizieren und M'' mit M/M',

$$M' \subseteq M \text{ und } M'' = M/M'.$$

Die Abbildung f wird dabei zur natürlichen Inklusion und g zur natürlichen Abbildung auf den Faktormodul.

Wir führen den weiteren Beweis durch Indukion nach l'.

2. Schritt. Beweis der Behauptung im Fall $l' = 1$.

Dann sind 0 und M' die einzigen Teilmoduln von M'. Sei

$$M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_n$$

eine Teilmodulkette von M. Wir haben zu zeigen, es gilt

(1) $$n \le l'' + 1.$$

Dabei können wir annehmen

$$M_n = 0.$$[134]

Sei $r \in \{0,...,n\}$ der kleinste Index mit $M' \cap M_r = 0$. Dann hat die Einschränkung der Surjektion $g: M \to M''$ auf M_r den Kern $M' \cap M_r = 0$, d.h.

$$g|_{M_r} : M_r \to M'' \text{ ist injektiv,}$$

und wir erhalten die folgende echt absteigende Kette.

(2) $$g(M_r) \supset g(M_{r+1}) \supset ... \supset g(M_n)$$

Im Fall r = 0 gilt $n \le l'' \le l'' + 1$, d.h. (1) ist richtig. Sei also

$$r > 0.$$

Nach Wahl von r ist dann $M_{r-1} \cap M' \ne 0$ und wegen $l(M') = 1$ gilt dann

$$M' \subseteq M_{r-1} \subset M_{r-2} \subset ... \subset M_0.$$

Also haben wir eine echt absteigende Kette

(1) $$g(M_0) \supset g(M_1) \supset ... \supset g(M_{r-1}) \; (\supseteq g(M_r))$$

---

[134] Wenn die Abschätzung (1) für alle Ketten mit $M_n = 0$ und alle n gilt, so gilt auch für Ketten mit beliebigem letzten Modul M_n.

Die beiden Ketten setzen sich also zu einer echt absteigenden Kette der Länge n-1 zusammen. Es folgt

$$n - 1 \le \ell'',$$

d.h. es gilt (1).

3. Schritt. Der Induktionsschritt.
Sei also $\ell' > 1$. Dann gibt es einen Teilmodul $N \subseteq M'$ der Länge 1. Wir betrachten die folgenden exakten Sequenzen.

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$
$$0 \to N \to M' \to M'/N \to 0.$$
$$0 \to M'/N \to M/N \to M'' \to 0$$

Aus den ersten beiden folgt (wegen Schritt 2),

$$\ell(M) = \ell(M/N) + 1$$
$$\ell(M') = \ell(M'/N) + 1$$

und aus der dritten erhalten wir nach Induktionsvoraussetzung

$$\ell(M/N) = \ell(M'/N) + \ell(M'')$$

also

$$\ell(M) = \ell(M/N) + 1 = \ell(M'/N) + 1 + \ell(M'') = \ell(M') + \ell(M'').$$

QED.

(c) Die Hilbertfunktion eines lokalen Rings

Sei A ein lokaler (noetherscher) Ring mit dem maximalen Ideal m. Wir setzten

$$H_A(n) = \ell_A(m^n/m^{n+1})$$
$$H_A^1(n) = \ell_A(A/m^{n+1}).$$

Die Funktion

$$H_A^0 = H_A: \mathbb{N}\cup\{0\} \to \mathbb{N}\cup\{0\}$$

heißt Hilbert-Funktion von A und die Funktion

$$H_A^1 = H_A: \mathbb{N}\cup\{0\} \to \mathbb{N}\cup\{0\}$$

Hilbert-Samuel-Funktion.

Bemerkung

Die Werte $H_A(n)$ und $H_A^1(n)$ sind für jedes n endlich. Es reicht, dies für die Hilbert-Funktion zu zeigen, denn wegen der Additivität der Länge gilt

$$H_A^1(n) = H_A(n) + H_A(n-1) + ... + H_A(0).$$

Im Fall der Hilbert-Funktion beachten wir, der A-Modul m^n/m^{n+1} wird vom Ideal m annulliert, d.h. man kann diesen Modul als A/m-Modul auffassen, d.h. als Vektorraum. Damit gilt

$$\ell_A(m^n/m^{n+1}) = \dim_{A/m} m^n/m^{n+1}.$$

Es reicht also, zu zeigen, der A-Modul m^n/m^{n+1} ist endlich erzeugt. Das ist aber der Fall, weil m^n (als Ideal eines noetherschen Rings) endlich erzeugt ist.

(d) Die lokale Hilbert-Funktion in einem Punkt einer Varietät.

Seien X eine quasi-projektive Varietät und $x \in X$ ein Punkt. Dann heißt

$$H_{X,x} = H^0_{X,x} := H_{\mathcal{O}_{X,x}}$$

(lokale) Hilbert-Funktion von X im Punkt x und

$$H^1_{X,x} := H^1_{\mathcal{O}_{X,x}}$$
heißt Hilbert-Samuel-Funktion von X im Punkt x.

(e) Vergleich der lokalen Hilbert-Funktion mit der einer projektiven Varietät

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ abgeschlossen, $x \in X$ ein Punkt und $\bar{X} \subseteq \mathbb{P}^N$ die projektive Abschließung von X. Dann gilt
$$H^1_{X,x}(n) \le H_{\bar{X}}(n) \text{ für jedes } n.$$
Beweis. O.B.d.A. sei
$$x = (0,...,0) \in \mathbb{A}^N$$
der Ursprung. Wir schreiben
$$I := I(X)$$
und ρ und σ für die natürlichen Abbildungen
$$k[T] \xrightarrow{\rho} k[T]/(I + (T)^{n+1}) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{X,x} / m^{n+1}_{X,x}$$
auf den Faktorring bzw. in den Quotientenring. Man beachte, der Ring in der Mitte ist bereits ein lokaler Ring. Die Lokalisierungsabbildung σ ist deshalb ein Isomorphismus. Weiter setzen wir
$$J := (F \in k[S] \mid F(1,T) \in I),$$
d.h. J sei die Homogenisierung von I. Man beachte, dieses Ideal stimmt mit seinem Radikal überein[135], es gilt daher
$$J = I(\bar{X}).$$

Wir betrachten die Abbildungen
$$\alpha: k[S]_n \to k[T]_{\le n},\ F(S) \mapsto F(1,T),$$
$$\beta: k[S]_n \leftarrow k[T]_{\le n},\ S_0^n f(\frac{S}{S_0}) \leftarrow\!\shortmid f(T)$$
Dabei seinen $k[S]_n$ der Vektorraum der homogenen Polynome des Grades n von k[S] und $k[T]_{\le n}$ der Vektorraum der Polynome des Grades $\le$ n von k[T]. Die beiden Abbildungen sind wohldefiniert und k-linear. Und sie sind invers zueinander:
$$\alpha(\beta(f)) = \alpha(S_0^n f(\frac{S}{S_0})) = f(T)$$
$$\beta(\alpha(F)) = \beta(F(1,T)) = S_0^n F(1,\frac{S}{S_0}) = F.$$
Wir setzen jetzt α mit der natürlichen Abbildung $k[T] \xrightarrow{\rho} k[T]/(I + (T)^{n+1})$ zusammen,
$$\gamma: k[S]_n \to k[T]/(I + (T)^{n+1}),\ F \mapsto F(1,T) \bmod I + (T)^{n+1}.$$

[135] Ist F homogen und gilt $F^r \in J$, so gilt $F(1,T)^r \in I(X)$ also $F(1,T) \in I(X)$ also $F \in J$. Ist f beliebig mit $f^r \in J$ und F der homogene Bestandteil höchsten Grades so ist $F^r \in J$ also $F \in J$. Wir schreiben $(f-F)^r$ in der Gestalt
$$(f-F)^r = f^r + F \cdot g$$
Wegen f^r, $F \in J$ folgt $(f-F)^r \in J$. Durch Induktion nach der Zahl der homogenen Summanden von f ergibt sich $f \in J$.

Mit α ist auch γ surjektiv. Der homogene Bestandteil J_n von J liegt im Kern von γ, d.h. γ induziert eine k-lineare Surjektion

$$k[S]_n/J_n \twoheadrightarrow k[T]/(I + (T)^{n+1}).$$

Insbesondere gilt

$$H_{\overline{X}}(n) \ge H^1_{X,x}(n) \text{ für alle } n \ge 0.$$

QED.

Bemerkung

Nach Bemerkung (vi) von 2.1.5(d) gilt

$$\dim C_x(X) \ge \dim_x X.$$

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, es gilt sogar das Gleichheitszeichen. Dazu benutzen wir die eben bewiesene Abschätzung

$$H^1_{X,x}(d) \le H_{\overline{X}}(d) \text{ für alle } d \ge 0. \tag{1}$$

Der Rest des Beweises besteht im wesentlichen darin, einige der bereits erwähnten Standard-Eigenschaften der Hilbert-Funktion zu beweisen. Genauer, es reicht, die folgenden beiden Aussage zu beweisen.

1. $H_{\overline{X}}(d)$ ist für große n ein Polynom des Grades dim X.
2. $H^1_{X,x}(d)$ ist für große n ein Polynom des Grades $\dim C_x(X)$

Aus (1) ergibt sich dann eine Ungleichung für den Grad der beteiligten Polynome und damit die Ungleichung

$$\dim C_x(X) \le \dim \overline{X}.$$

Ersetzt man nun X durch eine Affine Umgebung von x, die nur die Komponenten von X durch x enthält, so ändert sich die linke Seite nicht und die rechte Seite wird gleich $\dim_x X$, d.h. wir erhalten

$$\dim C_x(X) \le \dim_x X.$$

(f) Hilbert-Reihen graduierter Moduln

Seien R ein ($\mathbb{Z}$-) graduierter Ring und M ein graduierter R-Modul mit

$$l_{R_0}(M_d) < \infty$$

für jeden Grad d. Dann heißt die Abbildung

$$H_M : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

Hilbert-Funktion des R-Moduls M. Ist M außerdem noch <u>nicht-negativ graduiert</u>, d.h.

$$M_d = 0 \text{ für } d < 0$$

so können wir H_M durch die formale Potenzreihe

$$H_M = \sum_{d=0}^{\infty} l_{R_0}(M_d)\cdot T^d$$

beschreiben, deren Koeffizienten gerade die Werte der Hilbert-Funktion sind. Wir bezeichnen diese mit demselben Symbol wie die Hilbert-Funktion selbst und nennen sie <u>Hilbert-Reihe</u> des R-Moduls M.

Ist speziell $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine projektive Varietät, R = k[S] und M = k[S]/I(X), so heißt

$$H_X = H_M = \sum_{d=0}^{\infty} H_X(d)\cdot T^d$$

Hilbert-Reihe der projektiven Varietät X.

(g) Eigenschaften von Hilbertreihen von Moduln

Seien R ein graduierter Ring Dann gilt:

(i) Für jede exakte Sequenz

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

nicht-negativ graduierter R-Moduln mit homogenen Komponenten endlicher Länge. Dann gilt

$$H_M = H_{M'} + H_{M''}.$$

(ii) Ist M ein nicht-negativ graduierter R-Modul mit homogenen Komponenten endlicher Länge und $F \in R$ ein homogenes Element derart, daß die Multiplikation mit F auf M injektiv ist, d.h.

$$0 \to M \xrightarrow{F} M$$

ist exakt, so gilt

$$H_M = \frac{1}{1-T^{\deg F}} \cdot H_{M/FM}$$

Beweis. Zu (i). Nach Voraussetzung ist für jedes d die Sequenz der homogenen Komponenten n-ten Grades exakt,

$$0 \to M'_d \to M_d \to M''_d \to 0,$$

d.h. es gilt

$$l_{R_0}(M_d) = l_{R_0}(M'_d) + l_{R_0}(M'_d).$$

Wir multiplizieren die d-te Identität mit T^d und summieren über alle d. Das Ergebnis ist gerade die behauptete Identität

$$H_M = H_{M'} + H_{M''}.$$

Zu (ii). Die Multiplikation mit F definiert eine exakte Sequenz graduierter R-Moduln

$$0 \to M[-\deg F] \xrightarrow{F} M \to M/FM \to 0$$

Dabei bezeichne M[-d] den Modul mit dem n-ten graduierten Bestandteil

$$M[-d]_d = M_{d-\deg F}.$$

Nach (i) gilt

$$H_M = H_{M[-\deg F]} + H_{M/FM}.$$

also

$$H_{M/FM} = H_M - H_{M[-\deg F]} = (1-T^{\deg F})H_{M'}$$

d.h.

$$H_M = \frac{1}{1-T^{\deg F}} \cdot H_{M/FM}$$

QED.

(h) Eigenschaften von Hilbert-Reihen projektiver Varietäten

(i) $H_{\mathbb{P}^N} = \frac{1}{(1-T)^{N+1}}$

(ii) Für jedes homogene Ideal $I \subseteq k[S]$ gilt

$$H_{k[S]/I} = \frac{p(T)}{(1-T)^{n+1}}, \ p(1) > 0,$$

mit $p(T) \in \mathbb{Z}[T]$ und $n = \dim V(I)$.

Beweis. Zu (i). Wir führen den Beweis durch Induktion nach N. Für N = 0 ist der homogene Bestandteil des Grades n von k[S] eindimensional, d.h. es gilt

$$H_{\mathbb{P}^0}(d) = 1$$
für alle d. Für die Hilbert-Reihe erhalten wir damit
$$H_{\mathbb{P}^0} = 1 + T + T^2 + ... = \frac{1}{1-T}.$$
Sei jetzt N > 0. Multiplikation mit $F = S_N$ induziert eine injektive Abbildung
$$k[S] \xrightarrow{S_N} k[S].$$
Nach 2.1.6(g)(ii) folgt
$$H_{\mathbb{P}^N} = H_{k[S]} = \frac{1}{1-T}\ H_{k[S]/(S_N)} = \frac{1}{1-T}\cdot H_{\mathbb{P}^{N-1}}.$$
Die Behauptung folgt damit nach Induktionsvoraussetzung.

Zu (ii). Angenommen die Aussage ist falsch für ein homogenes $I\subseteq k[S]$. Weil k[S] noethersch ist, gibt es dann auch ein homogenes Ideal $I\subseteq k[S]$, daß maxial ist bezüglich dieser Eigenschaft, d.h. für jedes homogene Ideal $J\subseteq k[S]$ mit $I\subseteq J$, $I \neq J$ ist die Aussage richtig.

Das Ideal I ist dann kein maxiaales homogenes Ideal von k[S], denn für I = (S)k[S] ist die Aussage richtig: $V(I) = \emptyset$, dim V(I) = -1, $H_{k[S]/I} = H_k = 1 = \frac{1}{(1-T)^0}$.

Das Ideal I ist auch kein Primideal. Denn andernfalls gibt es, da I nicht maximal ist, ein $S_i \notin I$ und die Multiplikation mit S_i induziert eine injektive Abbildung $k[S]/I \to k[S]/I$.
Nach 2.1.6(g)(ii) folgt
$$H_{k[S]/I} = \frac{1}{1-T}\cdot H_{k[S]/(I,S_i)} = \frac{p(T)}{(1-T)^{n+1}}$$
mit $n = \dim V(I,S_i) + 1 = \dim V(I)$ (man beachte, die Varietät V(I) liegt nicht in der Hyperebene $V(S_i)$).

Nachweis des endgültigen Widerspruchs. Da I nicht prim ist, gibt es homogene Polynome F,G mit
$$F\cdot G\in I,\ F\notin I,\ G\notin I.$$
Insbesondere sind (I,F) und $I:F = \{a\in k[S] \mid aF\in I\}$ homogene Ideale, die echt größer sind als I, d.h. Ideale, für welche die Behauptung gilt. Aus der exakten Sequenz
$$0 \to k[S]/(I:F) \xrightarrow{F} k[S]/I \to k[S]/(I,F) \to 0$$
lesen wir ab, es gilt $H_{k[S]/I} = H_{k[S]/(I,F)} + T^d\cdot H_{k[S]/(I:F)}$ mit d = deg F, also
$$H_{k[S]/I} = \frac{p(T)}{(1-T)^{n'+1}} + \frac{q(T)}{(1-T)^{n''+1}}$$
mit Polynomen $p,q\in\mathbb{Z}[T]$ und n' = dim V(I,F), n" = dim V(I:F).
Nach Konstruktion gilt $V(I,F) \subseteq V(I)$ und $V(I:F) \subseteq V(I)$. Für $x\in V(I)$ gilt entweder F(x) = 0 oder $F(x) \neq 0$. Im ersten Fall gilt $x\in V(I,F)$, im zweiten Fall $x\in V(I:F)$. Zusammen erhalten wir
$$V(I) = V(I,F) \cup V(I:F).$$
Deshalb gilt $n', n'' \le \dim V(I)$ und eine der beiden Dimensionen n',n" ist gleich dim V(I). Damit hat $H_{k[S]/I}$ aber die im Satz behauptete Gestalt.

QED.

(i) Existenz des Hilbert-Polynoms

Seien $I \subseteq k[S]$ ein homogenes Ideal und $X := V(I) \subseteq \mathbb{P}^N$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $P_{k[S]/I}$ mit

$$H_{k[S]/I}(d) = P_{k[S]/I}(d)$$

für alle hinreichend großen $d\in\mathbb{N}$. Dieses Polynom heißt Hilbert-Polynom von k[S]/I. Der Grad dieses Polynoms ist gerade die Dimension von X.
Im Fall I = I(X) schreibt man auch

$$P_X := P_{k[S]/I}$$

und nennt P_X Hilbert-Polynom von $X\subseteq\mathbb{P}^N$.
Beweis.Nach (h) gilt

$$H_{k[S]/I} = \frac{p(T)}{(1-T)^{n+1}}, n := \dim V(I),$$

und $p(T) = a_0 + a_1T + ... + a_l T^l$.

Die Funktion p(d) zur Reihe $\frac{1}{(1-T)^{n+1}}$ ist ein Polynom des Grades n für große Argumente, nämlich das Hilbert-Polynom des $\mathbb{P}^n$. Zur Reihe $\frac{a_iT^i}{(1-T)^{n+1}}$ gehört die Funktion $p(d - i)\cdot a_i$, zur Reihe $H_{k[S]/I}$ gehört also die Funktion

$$\sum_{i=0}^{l} p(d - i)\cdot a_i$$

Dies aber ein Polynom in d des Grades n für große d (da p(d) ein solches ist).
QED.
Bemerkung
Die obige Argumentation zeigt, für jede formale Potenzreihe der Gestalt

$$\frac{p(T)}{(1-T)^{n+1}}$$

mit nicht-negativen ganzen Koeffizienten ist die Folge der Koeffizienten von einer gewissen Stelle ab gleich der Folge der Werte eines Polynoms des Grades n an den ganzzahligen Stellen.

(j) Die Dimension des Tangentialkegels

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ abgeschlossen und $x\in X$ ein Punkt. Dann gilt

$$\dim C_x(X) = \dim_x X.$$

Beweis. Auf Grund der Bemerkung von 2.1.6(e) genügt es zu zeigen,

(1) $H^1_{X,x}(d)$ ist für große d ein Polynom des Grades $\dim C_x(X)$

Es gilt

$$H^1_{X,x}(d) = H_{X,x}(d) + H_{X,x}(d-1) + ... + H_{X,x}(0)$$

mit

$$H_{X,x}(d) = l_{\mathcal{O}_{X,x}}(m^d_{X,x}/m^{d+1}_{X,x}) = H_R(d)$$

und

(2) $R := Gr_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}) = \oplus_{d=0}^{\infty} m^d_{X,x}/m^{d+1}_{X,x}$.

Für die Hilbert-Reihen folgt

$$H^1_{X,x} = \frac{1}{1-T} \cdot H_R$$

Nun ist die Reduktion von R gerade der Koordinaten-Ring des Tangentialkegels. Wir können damit R als Faktorring

$$R = k[T] / J$$

nach einem homogenen Ideal J schreiben, welches den Tangentialkegel definiert. Das Ideal J definiert aber auch eine projektive Varietät. Für die Hilbert-Reihen erhalten wir damit

$$\begin{aligned} H^1_{X,x} &= \frac{1}{1-T} H_R \\ &= \frac{1}{1-T} \cdot \frac{p(T)}{(1-T)^{n'+1}} \\ &= \frac{p(T)}{(1-T)^{n'+2}} \end{aligned}$$

Dabei bezeichne n' die Dimension der projektiven Varietät

$$V(J) \subseteq \mathbb{P}^{N-1} .$$

Es gilt weiter

$$C_x(X) = \text{affiner Kegel über } V(J) \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$$

also

$$n' = \dim V(J) = \dim C_x(X) - 1.$$

Damit ist

$$H^1_{X,x} = \frac{p(T)}{(1-T)^{n+1}} \text{ mit } n = \dim\ C_x(X).$$

Die Behauptung folgt damit aus der Bemerkung von 2.1.6(i) über den Grad des zugehörigen Hilbert-Polynoms.
QED.

4.2 Die Entwicklung in formale Potenzreihen

4.2.1 Lokale Parameter

(a) Definition

Seien X eine quasi-projektive Varietät der Dimension n und $x \in X$ ein Punkt. Die Funktionskeime $u_1,...,u_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ heißen lokale Parameter von X im Punkt x, wenn sie im maximalen Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ liegen und ihre Restklassen in

$$d_x u_i \in m_{X,x}/m^2_{X,x}$$

eine Basis dieses Vektorraums bilden. Wir werden sagen,

$$u_1,...,u_n$$

ist ein Parametersystem von X im Punkt x. Ist x ein regulärer Punkt von X,also n = dim X, so heißt

$$u_1,...,u_n$$

auch reguläres Parametersystem.

Bemerkungen

(i) Da $m_{X,x}/m^2_{X,x}$ isomorph ist zum Kotangentialraum ist die Bedingung äquivalent zur lineare Unabhängigkeit der

$$d_x u_i : T_x(X) \to k$$

und damit zu der Aussage, daß das homogene Gleichungssystem

(1) $$d_x u_1 = ... = d_x u_n = 0$$

in $T_x(X)$ nur die triviale Lösung besitzt.

(ii) Wir können X durch eine offene affine Umgebung X' von x ersetzen

$$x \in X' \subseteq X,\ X' \subseteq \mathbb{A}^N,$$

auf welcher die u_i reguläre Funktionen sind,

$$u_1,...,u_n \in k[X'].$$

(b) Theorem 1: Die Tangentialräume zu einem lokalen Parametersystem

Seien X eine quasi-projektive Varietät der Dimension n, $x \in X$ ein nicht-singulärer Punkt und

$$u_1,...,u_n$$

ein System von reguläreb Parametern von X in x, die auf ganz X regulär sind. Wir setzen

$$X_i := V(u_i)\ \ (\subseteq X)$$

für jedes i. Dann ist x ein nicht-singulärer Punkt auf jeder der Teilvarietäten X_i und es gilt

$$T_x(X_1) \cap ... \cap T_x(X_n) = 0.$$

Beweis. O.B.d.A. sei X abgeschlossen im $\mathbb{A}^N$. Bezeichne $\tilde{u}_i \in k[T]$ ein Polynom mit

$$u_i = \tilde{u}_i|_X$$

Dann gilt

$$X_i = V(u_i) = X \cap V(\tilde{u}_i).$$

also

$$I(X_i) \supseteq I(X) + \tilde{u}_i k[T]$$

und

$$T_x(X_i) \subseteq L_i := \{v \in T_x(X) \mid d_x u_i (v) = 0\}.$$

Weil das homogenen Gleichungssystem (1) von 2.2.1 (a) nur die triviale Lösung besitzt, folgt

$$n\text{-}1 = \dim L_i \geq \dim T_x(X_i) \geq \dim X_i \geq n - 1.$$

Die letzte Ungleichung besteht, weil X_i durch nur eine Gleichung auf X' definiert ist. In der obigen Abschätzung gilt also überall das Gleichheitszeichen. Insbesondere ist x ein nicht-singulärer Punkt auf jeder der Varietäten X_i. Außerdem ist

$\cap\, T_x(X_i) = \cap\, L_i = 0.$

QED.

Bemerkungen

(i) Der Durchschnitt der Varietäten X_i besteht in einer Umgebung von x nur aus dem Punkt x allein: würde durch x eine Komponente positiver Dimension von $\cap X_i$ verlaufen,

$$x \in Y \subseteq \cap X_i\ ,$$

so hätte $T_x(Y)$ eine positive Dimension und läge im Durchschnitt der Tangentialräume $T_x(X'_i)$,

$$0 < \dim T_x(Y),\ T_x(Y) \subseteq \cap T_x(X_i).$$

Das steht aber im Widerspruch zu der Tatsache, daß der Durchschnitt dieser Tangentialräume nur aus dem Nullvektor besteht.

(ii) Im folgenden benötigen wir den Begriff der Transversalität.

(c) Transversale Teilvarietäten

Eine Varietät heißt äquidimensional, wenn alle ihre irreduziblen Komponenten dieselbe Dimension besitzen. Seien X eine glatte äquidimensionale Varietät und $Y_1,...,Y_r \subseteq X$ äquidimensionale Teilvarietäten. Die Y_i heißen transversal im Punkt

$$x \in Y_1 \cap ... \cap Y_r,$$

wenn gilt

$$\operatorname{codim}_{T_x(X)} \cap_{i=1}^{r} T_x(Y_i) = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{codim}_X Y_i$$

Wir sagen, die Y_i scheiden sich transversal (in X), wenn sie transversal sind in jedem gemeinsamen Punkt, d.h. in jedem Punkt von $Y_1 \cap ... \cap Y_r$

Bemerkungen

(i) Für beliebige irreduzible Teilvarietäten Y_i durch x gilt

$$\operatorname{codim}_X Y_i \geq^{136} \operatorname{codim}_{T_x(X)} T_x(Y_i)$$

und

$$\sum_{i=1}^{r} \operatorname{codim}_{T_x(X)} T_x(Y_i) \geq \operatorname{codim}_{T_x(X)} \cap_{i=1}^{r} T_x(Y_i).$$

(ii) Die Transversalitätsbedingung impliziert, daß in den Abschätzungen von (i) überall das Gleichheitszeichen gilt. Insbesondere sind alle Y_i dann nicht-singulär im Punkt x und der Durchschnitt

$$\cap_{i=1}^{r} T_x(Y_i)$$

besitzt die kleinste Dimension, die in Anbetracht der gegebenen Dimensionen der Y_i möglich ist.

(iii) Allgemein gilt

$$\operatorname{codim}_X \cap_{i=1}^{r} Y_i \geq \operatorname{codim}_{T_x(X)} T_x(\cap_{i=1}^{r} Y_i) \qquad (\text{wegen } \dim T_p W \geq \dim W\ )$$

$$\geq \operatorname{codim}_{T_x(X)} \cap_{i=1}^{r} T_x(Y_i) \quad (\text{wegen } T_x(\cap_{i=1}^{r} Y_i) \subseteq \cap_{i=1}^{r} T_x(Y_i))$$

Im transversalen Fall ist außerdem

$$\operatorname{codim}_{T_x(X)} \cap_{i=1}^{r} T_x(Y_i) = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{codim}_X Y_i \geq \operatorname{codim}_X \cap_{i=1}^{r} Y_i$$

Die letzte Ungleichung besteht nach 1.6.2(k) Bemerkung (ii). Zusammen erhalten wir, daß im transversalen Fall überall das Gleichheitszeichen gilt. Insbesondere ist dann x ein nicht-singulärer Punkt von $Y := \cap_{i=1}^{r} Y_i$.

---

[136] Wegen $\dim X = \dim T_x(X)$ und $\dim Y_i \leq \dim T_x(Y_i)$

Beispiel
Zwei glatte Kurven auf einer Fläche, die in einem gemeinsamen Punkt unterschiedliche Tangenten besitzen, schneiden sich dort transversal.

(d) Theorem 2: Lokale Parameter und Erzeugende des maximalen Ideals
Seien X ein Varietät, $x \in X$ ein Punkt und $u_1,...,u_n$ ein System von lokalen Parametern im Punkt x. Dann erzeugen die u_i das maximale Ideal $m_{X,x}$ des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$.

Beweis. Die u_i liegen in $m_{X,x}$ und ihre Restklassen erzeugen $m_{X,x}/m^2_{X,x}$. Die Behauptung folgt also aus dem Lemma von Nakayama.
QED.

Bemerkungen
(i) Die Nicht-singularität eines Punktes $x\in X$ läßt sich in rein algebraischer Weise durch Daten des lokalen Rings charakterisieren. Zu diesem Zweck wollen wir wie folgt die Dimension eines lokalen Rings definieren.
(ii) Seien A ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal m. Die Dimension[137]

$$\dim' A$$

von A sei die kleinste nicht-negative ganze Zahl r derart, daß es Elemente

$$u_1,...,u_r \in m$$

gibt mit der Eigenschaft, daß eine Potenz von m in dem von diesen Elementen erzeugten Ideal liegt

$$m^l \subseteq (u_1,...,u_r),$$

d.h. mit der Eigenschaft $\sqrt{(u_1,...,u_r)} = m$.
Nach dem Lemma von Nakayama gilt also insbesondere,
$\dim' A \le \dim_{A/m} m/m^2$ (= minimale Erzeugendenzahl von m).
Ein lokaler Ring heißt regulär, wenn gilt
$\dim' A = \dim_{A/m} m/m^2$
(iii) $\dim' \mathcal{O}_{X,x} = \dim_x X$ für jede (quasi-projektive) Varietät.
(iv) X ist genau dann regulär in $x\in X$, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ als lokaler Ring regulär ist.
(v) Wir kennen inzwischen drei Verallgemeinerungen des Dimensionsbegriffs auf den Fall lokaler Ringe: die eben eingeführte, die mit Hilfe von Primidealketten und die mit Hilfe des Grades des Hilbertpolynoms. Wir wollen jetzt zeigen, diese drei Begriffe stimmen überein. Als Vorbereitung benötigen wir einige Lemmata.

Beweis von (iii). Wir können X durch eine so kleine affine Umgebung von x ersetzen, daß gilt

$$n := \dim_x X = \dim X.$$

Es gibt dann n Hyperflächen $H_1,...,H_n$ durch x derart, daß die Menge

$$X \cap H_1,...,H_n$$

den Punkt x als einzigen Punkte einer ganzen Umgebung von x enthält. Durch weiteres Verkleinern von X können wir erreichen,

[137] Wir haben bereits die Dimension eines Rings mit Hilfe von Primidealketten definiert. In der gegenwärtigen Situation ist aber die hier angegebene geeigneter: wir sparen uns den Beweis des Hauptidealsatzes. Um Verwechslungen mit dem früheren Dimensionsbegriff zu vermeiden, schreiben wir dim' A anstelle von dim A (die beiden Zahlen sind jedoch gleich, wann immer sie beide definiert sind).

$$X\cap H_1,...,H_n = \{x\}.$$

Sie u_i ein lokale Gleichung von H_i. dann gilt nach dem Hilbertschen Nullstellensatz, daß es für jede reguläre Funktion auf X mit der Nullstelle x eine Potenz gibt, die in

$$(u_1,...,u_n)$$

liegt. Wir wenden dies auf die Erzeugenden des maximalen Ideals $m_{X,x}$ an (indem wir X eventuel weiter verkleinern) und erhalten, es gibt ein $l\in\mathbb{N}$ mit

$$m_{X,x}^{l} \subseteq (u_1,...,u_n)\mathcal{O}_{X,x}.$$

Es gilt also

$$\dim' \mathcal{O}_{X,x} \le n = \dim_x X$$

Angenommen, die linke Ungleichung ist echt. Dann gibt es Elemente

$$v_1,...,v_{n-1}\in\mathcal{O}_{X,x}$$

und ein $l'\in\mathbb{N}$ mit

$$m_{X,x}^{l'} \subseteq (v_1,...,v_{n-1})\mathcal{O}_{X,x}.$$

Indem wir X durch eine affine Umgebung von x ersetzen, erreichen wir, daß die v_i auf ganz X definierte reguläre Funktionen sind.
O.B.d.A. sei

$$x = (0,...,0) \in X \subseteq \mathbb{A}^N$$

und $t_i := T_i\,|_X$. Dann wird das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ von den t_i erzeugt, d.h. die $t_i^{l'}$ sind Linearkombinationen der v_j. Deshalb gilt

$$t_i^{l'} = 0 \text{ in den Punkten einer Umgebung von } V(v_1,...,v_{n-1})\ (\subseteq X).$$

Mit anderen Worten, $V(v_1,...,v_{n-1})$ besteht in einer Umgebung von x nur aus dem Punkt x, d.h.

$$\dim_x V(v_1,...,v_{n-1}) = 0.$$

Das ist aber unmöglich, denn der Schnitt einer n-dimensionalen Varietät mit n-1 Hyperflächen hat nur Komponenten einer Dimension ≥ 1.
QED.

(e) Lemma von Artin-Rees

Seien A ein noetherscher Ring, M ein endlicher erzeugter A-Modul, $N \subseteq M$ ein Teilmodul und $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann gibt es eine natürliche Zahl c mit

(1) $$I^nM\cap N = I^{n-c}(I^cM\cap N)$$

für alle n≥c.
Bemerkung
Die I-adische Topologie von M hat als Unterraum-Topologie von N gerade die I-adische Topologie von N.
Beweis des Lemmas (Matsumura). Die Inklusion “⊇” ist trivial. Es reicht also, “⊆” zu beweisen.
Wir beginnen mit einer Beschreibung der Zahl c. Dazu wählen wir Erzeugendensysteme von I und M, sagen wir,

$$I = (a_1, ... , a_r) \text{ und } M = Am_1+...+Am_s.$$

Wir setzen

$$B := A[X_1,...,X_r]$$

und betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon B^s \to M,\ (b_1,...,b_s) \mapsto b_1(a)m_1 + ... + b_s(a)m_s,$$

mit

$$a := (a_1,...,a_r).$$

Jedes Element von I^nM hat dann die Gestalt $\varphi(b_1,...,b_s)$ mit homogenen Polynomen b_i des Grades n. Sei

$$J_n := \{(b_1,...,b_s)\in B^s \mid b_i \text{ homogen vom Grad n und } \varphi(b_1,...,b_s)\in N\}.$$

Dann gilt

$$I^nM \cap N = \varphi(J_n).$$

Sei $L \subseteq B^s$ der Teilmodul über B, der von den Elementen aus

$$\cup_{n=1}^{\infty} J_n$$

erzeugt wird. Der Polynomring B ist noethersch, d.h. B^s ist ein noetherscher B-Modul. Deshalb besitzt L ein endliches Erzeugendensystem, sagen wir

$$L = B\mathtt{l}_1 + ... + B\mathtt{l}_t$$

mit

$$\mathtt{l}_i := (\mathtt{l}_{i1},...,\mathtt{l}_{is}) \in J_{n_i}.$$

Wir setzen

$$c := \max\{n_1,..., n_t\}.$$

Zeigen wir, daß mit dem so gewählten c die linke Seite von (1) in der rechten liegt. Sei also

$$m \in I^nM\cap N = \varphi(J_n).$$

Dann gibt es ein $b = (b_1,...,b_s)\in J_n$ mit

$$m = \varphi(b) = \sum_{i=1}^{s} b_i(a)m_i .$$

Wegen $b \in J_n \subseteq L$ ist b eine B-Linearkombination der erzeugenden Elemente $\mathtt{l}_i$ von L, sagen wir

$$b = \sum_{j=1}^{u} p_j(X)\cdot\mathtt{l}_j(X), \text{ mit } p_j \in B = A[X_1,...,X_r].$$

Nun sind b und die $\mathtt{l}_j$ Tupel von homogenen Polynomen der Grade n bzw. n_j. Alle Glieder aller anderen Grade $\neq$ n auf der rechten Seite heben sich somit weg. Wirkönnen also annehmen,

$$p_j \text{ ist homogen vom Grad } n - n_j .$$

Wir erhalten

$$m = \sum_{i=1}^{s} b_i(a)m_i = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{u} p_j(a)\cdot\mathtt{l}_{ji}(a)m_i$$

und

$$\sum_{i=1}^{s} \mathtt{l}_{ji}(a)m_i = \varphi(\mathtt{l}_j) \in \varphi(J_{n_j}) = I^{n_j}M \cap N,$$

also

$$m \in \sum_{j=1}^{u} I^{n-n_j} \cdot I^{n_j} M \cap N \subseteq I^{n-c} \cdot I^c M \cap N$$

QED.

(f) Lemma: Inklusionen in Vereinigungen von Primidealen

Seien A ein Ring und

$$I, p_1,...,p_r$$

Ideale von A.Es gelte

1. Alle p_i seien Primideale (mit Ausnahme von höchstens zweien).
2. I sei in keinem p_i ganz enthalten.

Dann liegt I nicht vollständig in der Vereinigung der p_i.

Beweis (Matsumura). Wir können annehmen, kein p_i liegt ganz in einem anderen. Wir führen den Beweis durch Induktion nach r.

Induktionsanfang r = 2. Angenommen $I \subseteq p_1 \cup p_2$. Wir wählen Elemente

$$x \in I - p_2 \text{ und } y \in I - p_1.$$

Dann gilt $x \in p_1$, also $x+y \notin p_1$, also

$$x+y \in p_2.$$

Nach Wahl von y muß y in p_2 liegen. Mit x+y liegt also auch x in p_2 im Widerspruch zur Wahl von x.

Induktionsschritt r > 2. Wir können annehmen, p_r ist ein Primideal. Da I in keinem p_i liegt und keine Inklusionen zwischen den p_i bestehen, gilt

$$I \cdot p_1 \cdot ... \cdot p_{r-1} \nsubseteq p_r .$$

Wir wählen ein Element

$$x \in I \cdot p_1 \cdot ... \cdot p_{r-1} - p_r.$$

und setzen

$$S := I - (p_1 \cup ... \cup p_{r-1}).$$

Nach Induktionsvoraussetzung liegt I nicht vollständig in der Vereinigung der r-1 Ideale $p_1,...,p_{r-1}$, d.h. S ist nicht leer,

$$S \neq \emptyset.$$

Angenommen

$$I \subseteq p_1 \cup ... \cup p_r.$$

Dann liegt S vollständig in p_r,

$$S \subseteq p_r.$$

Für $y \in S$ gilt $x+y \in S$. Also liegen y und x+y beide in p_r. Dann gilt aber $x \in p_r$ im Widerspruch zur Wahl von x.

QED.

(g) Die Hilbert-Samuel-Funktion eines Faktorrings nach einem Hauptideal

Seien A ein (noetherscher) lokaler Ring mit dem maximalen Ideal m und $x \in m$ ein Element. Dann gilt:

(i) $H^0_A(n) \le H^1_{A/xA}(n)$ für jedes n.

(ii) Ist x ein Nicht-Nullteiler in A, so gibt es ein $r\in\mathbb{N}$ mit

$$H^1_{A/xA}(n) \le H^0_A(n) + H^0_A(n-1) + ... + H^0_A(n-r) \text{ für alle } n \ge r.$$

Insbesondere gilt für die Grade der zugehörigen Polynome

$$\deg H^1_{A/xA} \ge \deg H^1_A - 1.$$

Das Gleichheitszeichen gilt, falls x ein Nicht-Nullteiler in A ist.
Beweis.Es gilt

$$\begin{aligned} H^1_{A/xA}(n) &= l(A/(xA + m^{n+1}) \\ &= l(A/m^{n+1}) - l((xA + m^{n+1})/m^{n+1}) \\ &= H^1_A(n) - l(xA/xA\cap m^{n+1}) \end{aligned}$$

Zu (i). Die Multiplikation mit x definiert eine Surjektion

$$A \to xA/xA\cap m^{n+1}, a \mapsto [ax],$$

deren Kern das Ideal m^n vollständig enthält (wegen $x\in m$). Es besteht also eine Surjektion

$$A/m^n \to xA/xA\cap m^{n+1}.$$

Deshalb gilt

$$H^1_{A/xA}(n) \ge H^1_A(n) - l(A/m^n) = H^1_A(n) - H^1_A(n-1) = H^0_A(n).$$

Zu (ii). Nach dem Lemma von Artin-Rees gibt ein r mit

$$xA\cap m^{n+1} = m^{n-r}\cdot xA\cap m^{r+1} = m^{n-r}\cdot(m^{r+1}:x)\cdot xA.$$

Damit gilt

$$H^1_{A/xA}(n) = H^1_A(n) - l(xA/m^{n-r}\cdot(m^{r+1}:x)\cdot xA).$$

Da x ein Nicht-Nullteiler sein soll, induziert die Multiplikation mit x eine Bijektion

$$A \to Ax, a \mapsto ax.$$

Dem Teilmodul $m^{n-r}\cdot(m^{r+1}:x)$ links entspricht dabei dem Teilmodul

$$m^{n-r}\cdot(m^{r+1}:x)\cdot xA$$

rechts. Es folgt

$$\begin{aligned} H^1_{A/xA}(n) &= H^1_A(n) - l(A/m^{n-r}\cdot(m^{r+1}:x)). \\ &\le H^1_A(n) - l(A/m^{n-r}) = H^1_A(n) - H^1_A(n-r-1) \\ &= H^0_A(n) + H^0_A(n-1) + ... + H^0_A(n-r) \end{aligned}$$

Beweis der übrigen Aussagen. Aus (i) folgt

$$\deg H^1_{A/xA} \ge \deg H^0_A = \deg H^1_A - 1.$$

Aus (ii) folgt im Fall, daß x ein Nicht-Nullteiler in A ist,

$$\deg H^1_{A/xA} \le \deg H^0_A = \deg H^1_A - 1$$

Man beachte die Polynome zu

$$H^0_A(n), H^0_A(n-1), ..., H^0_A(n-r)$$

haben alle denselben Grad und alle denselben höchsten Koeffizienten.
QED.

(h) Vergleich der verschiedenen Dimensionsbegriffe eines lokalen Rings

Sei A ein lokaler noetherscher Ring mit dem maximalen Ideal m. Dann gilt

$$\dim A = \dim' A = \deg H^1_A .$$

Beweis. 1. Schritt. $\deg H^1_A \le \dim' A$.
Sei $r := \dim A'$. Dann gibt es r Elemente $u_1,...,u_r \in m$ mit

$$m^{l} \subseteq (u_1,...,u_r).$$

Für große d ist dann aber

$$H^1_{A/(u_1,...,u_r)} (d) = l(A/(u_1,...,u_r)+m^{d+1})$$

konstant (genauer, für $d \ge l - 1$), d.h. es gilt (nach 2.2.1(g))

$$0 = \deg H^1_{A/(u_1,...,u_r)} \ge \deg H^1_A - r,$$

also

$$\dim A' = r \ge \deg H^1_A .$$

2. Schritt. $\dim' A \le \dim A$.
Sie Aussage ist trivial, falls dim A unendlich ist. Sei also

$$\dim A = n < \infty$$

und sei

$$p_0 \subset p_1 \subset ... \subset p_n \ (= m)$$

eine echt aufsteigende Kette von Primidealen maximaler Länge. Wir wählen ein Element

$$x \in p_1 ,$$

das in keinem minimalen Primideal von A liegt. Ein solches Element existiert, denn andernfalls läge p_1 in der Vereinigung der minimalen Primideale von A, also ganz in einen minimalen Primideal von A im Widerspruch zur Wahl von p_1.
Es gibt also ein Element x der beschriebenen Art. Auf Grund der Wahl von x gilt

$$\dim A/xA = \dim A - 1.$$

Wir können die obige Argumentation mit A/xA anstelle von A solange wiederholen, bis wir einen 0-dimensionalen Ring erhalten.
Wir erhalten außerdem eine Folge $x_1,...,x_n$ von Elementen aus m mit

$$\dim A/(x_1,...,x_i) = n - i \text{ für } i = 1,...,n.$$

Insbesondere für i = n erhalten wir einen 0-dimensionalen Ring, d.h.

$$A/(x_1,...,x_n)$$

hat genau ein Primideal. Das Radikal von (0) ist damit gleich dem maximalen Ideal dieses Rings[138], d.h. das maximalen Ideal ist nilpotent. damit liegt eine Potenz von m in dem Ideal

$$(x_1,...,x_n),$$

d.h. es gilt

$$\dim' A \le n = \dim A.$$

3. Schritt. $\dim A \le \deg H^1_A$.

---

[138] Für jeden Ring A gilt $\sqrt{0} = \cap \operatorname{Spec} A$.
Beweis. Die Inklusion "$\subseteq$" ist trivial: jedes nilpotente Element liegt in allen Primidealen. Sei s umgekehrt in allen Primidealen. Dann ist Spec A_s (=D(s)) leer, d.h. $A_s = 0$. Das Einelement wird von einer Potenz von s annulliert, d.h. $s \in \sqrt{0}$.
QED.

Weil A noethersch ist, ist jede echt aufsteigende Kette von Primidealen endlich. Es reicht zu zeigen,

$$n \le \deg H^1_A,$$

falls es in A eine echt aufsteigende Kette von Primidealen

(1) $$p_0 \subset p_1 \subset \ldots \subset p_n \;(= m)$$

gibt. Als Nebenergebnis erhalten wir dim A < ∞ (da dim' A nach Definition endlich ist und damit auch $\deg H^1_A$).

Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Im Fall n = 0 ist nichts zu beweisen, da $\deg H^1_A$ immer mindestens 0 ist.

Sei jetzt n > 0 und eine Kette (1) gegeben. Wir wählen ein Element

$$x \in p_1 - p_0.$$

Dann genügt der Ring

$$A' := A/(xA + p_0)$$

der Induktionsvoraussetzung, d.h. es gilt

$$n - 1 \le \deg H^1_{A'}, .$$

Weil die Restklasse von x in A/p_0 kein Nullteiler ist, folgt

$$\begin{aligned} n-1 &\le \deg H^1_{A'}, \\ &= \deg H^1_{A/p_0} - 1 \qquad \text{(vgl. 2.2.1(g))} \\ &\le \deg H^1_A - 1 \end{aligned}$$

also

$$n \le \deg H^1_A$$

QED.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Anwendung des Begriffes der Transversalität.

(h) Satz von Bertini

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^N$ abgeschlossen und nicht-singulär. Dann ist die Menge der Hyperebenen

$$\{ H \in \check{\mathbb{P}}^N \mid X \text{ und } H \text{ schneiden sich transversal} \}$$

nicht-leer und offen im $\check{\mathbb{P}}^N$. Insbesondere gibt es eine nicht-leere offene Menge von Hyperebenen H, für welche

$$X \cap H \text{ nicht-singulär}$$

ist.

Beweis. Sei

$$I := \{(x,H) \in X \times \check{\mathbb{P}}^N \mid H \text{ und } X \text{ nicht transversal in } x \in H \cap X \}$$

1. Schritt. I ist abgeschlossen in $\check{\mathbb{P}}^N$.

Wir setzen

$$\begin{aligned} U_i &:= D(S_i) \\ V_i &:= U_i \times \check{\mathbb{P}}^N \\ H_i &:= V(S_i) \\ I_i &:= \{(x,H) \in X \cap U_i \times \check{\mathbb{P}}^N \mid H \text{ und } X \text{ nicht transversal in } x \in H \cap X\} \\ &= I \cap V_i \end{aligned}$$

Dann gilt

$$I = I_0 \cup ... \cup I_N .$$

Da die Abgeschlossenheit eine lokale Eigenschaft ist, reicht es zu zeigen,

$$I_i = I \cap V_i$$

ist abgeschlossen in V_i für jedes i.

Wir identifizieren die von Null verschiedenen Elemente des k^{N+1} mit den Gleichungen der Hyperebenen des $\mathbb{P}^N$ und betrachten die Abbildung

$$\varphi_i : (X \cap U_i) \times k^{N+1} \to k^{N+1}$$

$$(x, L) \mapsto (x, f = \frac{L}{S_i}) \mapsto (f(x), d_x(f|_{X \cap U_i})),$$

d.h. wir ordnen der Hyperebenengleichung L zunächst die reguläre Funktion $f = \frac{L}{S_i}$ auf auf U_i zu und bilden dann das Differential der Einschränkung auf $X \cap U_i$ im Punkt x. Dabei identifizieren wir hier $d_x(f|_{X \cap U_i})$ mit dem N-Tupel, desssen Koordinaten die Ableitungen von $f|_{X \cap U_i}$ im Punkt x sind

Die Abbildung φ_i ist regulär.[139] Es reicht zu zeigen,

$$I_i = \{(x, V(L)) \in V_i \mid \varphi_i(x,L) = 0 \}.$$

Auf der offenen Teilmenge $X \cap U_i$ von X ist der Durchschnitt $X \cap H$ mit der durch L definierten Hyperebene H gerade durch die Gleichung f = 0 gegeben, d.h.

$$X \cap H \cap U_i = V(I(X \cap U_i), f), \quad H := V(L).$$

Das Verschwinden der ersten Koordinate f(x) von $\varphi_i(x,L)$ ist äquivalent zu $x \in X \cap V(L)$. Betrachten wir jetzt die Paare (x,V(L)) mit f(x) = 0. Wenn $d_x(f|_{X \cap U_i})$ nicht Null ist, so ist $T_x X$ nicht vollständig in der Hyperebene

(1) $$T_x(H) = V(d_x f)$$

enthalten, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \dim X - 1 &= \dim T_x X - 1 \\ &= \dim T_x(X) \cap T_x(H) \\ &\geq \dim T_x(X \cap H) \geq \dim X \cap H \geq \dim X - 1. \end{aligned}$$

Es gilt überall das Gleichheitszeichen, d.h. für die Kodimensionen im $\mathbb{P}^N$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{codim} T_x(X) \cap T_x(H) &= \operatorname{codim} T_x(X \cap H) \\ &= N - (\dim X - 1) \\ &= (N - \dim X) + 1 \\ &= \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} H \end{aligned}$$

d.h. X und H sind transversal in x.

Sind X und H in x transversal, so liegt $T_x(X)$ nicht vollständig in der Hyperebenen (1), d.h.

[139] Die beiden Koordinaten $d_x f$ und x hängen in polynomialer Weise von den Koordinaten von x und den Koeffizienten von L ab.

$$T_x(H)\cap T_x(X) = V(d_x f|_{X\cap U_i}),$$
ist ein echter Unterraum von $T_x(X)$, d.h. $d_x f|_{X\cap U_i}$ ist nicht identisch Null auf T_xX.

2. Schritt. Berechnung der Dimension von I
Betrachten wir die die reguläre Abbildung
$$I \to X,\ (x,H) \mapsto x.$$
Diese Abbildung ist surjektiv[140], denn durch jeden Punkt $x\in X$ gibt es eine Hyperebene, die in x nicht transversal zu X liegt: man nehme zum Beispiel eine Hyperebene, die den Tangentialraum T_xX enthält. Sei jetzt $x\in X$ festgewählt. Bestimmen wir die Faser über I_x über x. O.B.d.A. sei $x\in U_i$. Dann gilt
$$\begin{aligned} I_x &= \{ (x,H) \in I_i \} \\ &= \{(x,V(L)) \mid f(x) = 0,\ d_x(f|_{X\cap U_i}) = 0,\ f := \frac{L}{S_i},\ L\in k^{N+1},\ L \ne 0\} \end{aligned}$$
Betrachten wir die Abbildung
$$k^{N+1} \to k \oplus m_{X,x}/m^2_{X,x},\ L \mapsto f = \frac{L}{S_i} \mapsto (f(x), d_x(f|_{X\cap U_i})).$$
Diese Abbildung ist k-linear und surjektiv, denn jede Linearform auf $T_x(X)$ läßt sich zu einer Linearform auf $U_i \cong \mathbb{A}^N = k^N$ fortsetzen und der zugehörige Unterraum läßt sich so verschieben, daß eine seiner Gleichungen in x einen vorgegebenen Wert annimmt. Der Kern diese Abbildung hat also die Dimension
$$\dim W_i - \dim k \oplus m_{X,x}/m^2_{X,x} = N+1 - 1 - \dim X.$$
Deshalb gilt
$$\dim I_x = N - \dim X - 1.$$
Die Projektion von I auf X hat also Fasern der Dimension N - dim X - 1 und diese Fasern sind projektive Räume also insbesondere irreduzibel. Damit gilt
$$\dim I = N - 1.$$
3. Schritt. Der Beweis.
Das Bild
$$\bar{I} \subseteq \check{\mathbb{P}}^N$$
von $I \subseteq X\times\check{\mathbb{P}}^N$ bei der Projektion auf den zweiten Faktor ist abgeschlossen und von einer Dimension $\le$ N-1. Also ist
$$\check{\mathbb{P}}^N - \bar{I}$$
nicht-leer und offen.
QED.
Bemerkungen
(i) Der obigen Satz und sein Beweis bleiben richtig für projektive Varietäten mit singulären Punkten, wenn man den Begriff der Transversalität einer Hyperebenen H mit einer Varietät X wie folgt abschwächt.

1. H und X heißen schwach transversal im Punkt $x\in H\cap X$, wenn $T_x(X)$ nicht vollständig in $T_x(H)$ liegt.

2. H und X heißen schwach transversal (im schwachen Sinne) wenn sie transversal im schwachen Sinne in jedem Punkt von $H\cap X$ sind.

[140] Die Surjektivität dieser Projektion wird in Wirklichkeit garnicht benötigt: wir könnten X durch das Bild Y der Projektion ersetzen und im weiteren Beweis ausnutzen, daß dim Y ≤ dim X gilt.

(ii) Für Punkte $x \in H \cap X$, in denen X nicht-singulär ist, ist dieser Transversalitätsbegriff äquivalent zum ursprünglichen Transversalitätsbegriff.
(iii) Insbesondere ist x ein nicht-singulärer Punkt von $H \cap X$, wenn x nicht-singulär ist auf X und H und X schwach transversal in x sind.

4.2.2 Entwicklund in Potenzreihen

(a) Die Entwicklung eines Funtionskeims in eine Protenzreihe

Seien X eine (quasi-projektive) Varietät, $x \in X$ ein Punkt und

$$u_1,...,u_n \in m_{X,x}$$

ein System von lokalen Parametern im Punkt x. Unter der Entwicklung eines Funktionskeims

$$f \in \mathcal{O}_{X,x}$$

in eine Potenzreihe bezüglich der Parameter $u_1,...,u_n$ versteht man den folgenden Algorithmus.

Im ersten Schritt setzen wir

$$\alpha_0 := f(x) \text{ und } f_1 := \alpha_0.$$

Dann gilt $f_1 \in m_{X,x}$, d.h. es gibt Koeffizienten

$$\alpha_1,...,\alpha_n \in k$$

mit

$$f_1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in m_{X,x}^2 .$$

Wir setzen

$$f_2 := f_1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = f - \alpha_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in m_{X,x}^2 .$$

Wegen $f_2 \in m_{X,x}^2$ gilt $f_2 = \sum_j g_j h_j$ mit g_j, $h_j \in m_{X,x}$. Wie oben gibt es Elemente β_{ij}, γ_{ij} $\in k$ mit

$$g_j - \sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} u_i \in m_{X,x}^2 \text{ und } h_j - \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} u_i \in m_{X,x}^2 .$$

Wir schreiben

$$\sum_j \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} u_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} u_i\right) = \sum_{1\le i',i''\le n} \alpha_{i'i''} u_{i'} u_{i''} .$$

Dann gilt

$$f_2 - \sum_{1\le i',i''\le n} \alpha_{i'i''} u_{i'} u_{i''} \in m_{X,x}^3$$

also

$$f - \alpha_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i - \sum_{1\le i',i''\le n} \alpha_{i'i''} u_{i'} u_{i''} \in m_{X,x}^3 .$$

Indem wir so fortfahren, können wir offensichtlich homogene Polynome

$$F_i \in k[T_1,...,T_n]$$

finden mit

$$\deg F_i = i$$

und

$$f - \sum_{i=1}^{l} F_i(u_1,...,u_n) \in m_{X,x}^{l+1}.$$

(b) Definition (formaler Potenzreihenring)

Eine formale Potenzreihe in $T = (T_1,...,T_N)$ mit Koeffizienten aus k ist eine formale Summe[141]

$$f := F_0 + F_1 + F_2 + ...$$

mit $F_i \in k[T]$ homogen vom Grad i, wobei die Anzahl der von Null verschiedenen Summanden unendlich sein darf. Ist

$$g := G_0 + G_1 + G_2 + ...$$

so definieren wir Summe und Produkt von f und g als

$$f + g := (F_0+G_0) + (F_1+G_1) + (F_2+G_2) + ...$$

und

$$f \cdot g = H_0 + H_1 + H_2 + ...$$

mit $H_l := \sum_{i+j=l} F_i G_j$.

Bemerkungen

(i) Die formalen Potenzreihen mit Koeffizienten aus k bilden mit diesen Operationen einen Ring

$$k[[T]],$$

den <u>formalen Potenzreihenring</u> in T über k.

(ii) Die Potenzreihen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Summanden bilden einen zum Polynomring k[T] isomorphen Teilring, den wir mit k[T] identifizieren,

$$k[T] \subset k[[T]].$$

(iii) Wie im Fall von Polynomen können wir jeder von Null verschiedenen Potenzreihe

$$f = \sum_{i=l}^{\infty} F_i \text{ , } F_l \neq 0,$$

ihre Anfangsform zuordnen,

$$in(f) := F_l .$$

Wie im Fall von Polynomen gilt

$$in(f \cdot g) = in(f) \cdot in(g)$$

für Potenzreihen f und g. Insbesondere ist der formale Potenzreihenring k[[T]] nullteilerfrei.

(c) Die Potenzreihe einer einer regulären Funktion

Seien X eine (quasi-projektive) Varietät, $x \in X$ ein nicht-singulärer Puntk von X und

$$u_1,...,u_n$$

---

[141] d.h. f ist eine Folge $\{F_i\}_{i=0,1,...}$ von homogenen Polynomen, für deren Bezeichnung wir das Symbol

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_i = F_0 + F_1 + F_2 + ...$$

benutzen.

ein System von Parametern von X in x. Eine formale Potenzreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_i \in k[[T_1,...,T_n]]$$

heißt Taylor-Reihe des Funktionskeims $f\in\mathcal{O}_{X,x}$, falls gilt

$$f - \sum_{i=0}^{l} F_i(u_1,...,u_n) \in m_{X,x}^{l+1}$$

für $l = 0,1,2,$ ...

Bemerkung

In 2.2.2(a) haben wir für jeden Funktionskeim $f\in\mathcal{O}_{X,x}$ in einem nicht-singulärem Punkt x und jedes Parametersystem $u_1,...,u_n$ in x ein Taylor-Reihe von f konstruiert.

(d) Beispiel

Seien $X = \mathbb{A}^1$ und $x = 0\in X$ der Ursprung der affinen Geraden. Dann ist

$m_{X,x} = (t)$, t eine Unsbestimmte,

und f eine rationale Funktion

$$f = \frac{p(t)}{q(t)},\ q(0) \neq 0,$$

mit Polynomen p und q. Sei weiter $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i t^i$ eine Potenzreihe mit

$$f - \sum_{i=0}^{l} \alpha_i t^i \equiv 0 \bmod (t^{l+1})$$

für jedes l. Das ist äquivalent zu den Bedingungen

$$p(t) - q(t)\cdot \sum_{i=0}^{l} \alpha_i t^i \equiv 0 \bmod (t^{l+1}).$$

Diese Relationen geben uns die Möglichkeit, die Koeffizienten von α_i aus den Koeffizienten von p und q zu bestimmen.

Sei zum Beispiel $f = \frac{1}{1-t}$. Dann erhält man die Relationen

$$0 \equiv 1 - (1-t)\cdot \sum_{i=0}^{l} \alpha_i t^i = 1 - \sum_{i=0}^{l} (\alpha_i - \alpha_{i-1})\cdot t^i \bmod (t^{l+1}).$$

Es folgt

$$\alpha_0 = 1 \text{ und } \alpha_i = \alpha_{i-1} \text{ für alle } i > 0.$$

Damit ist die Taylor-Reihe von f gleich $\sum_{i=0}^{\infty} t^i = 1 + t + t^2 + ...$

(e) Theorem 3: Existenz der Taylor-Entwicklung

Jeder Funktionskeim besitzt mindestens eine Taylor-Reihe.

Beweis. Siehe 2.2.2(a).

QED.

(f) Theorem 4. Existenz und Eindeutigkeit im Fall nicht-singulärer Punkte

Seien X eine (quasi-projektive) Varietät und $x\in X$ ein nicht-singulärer Punkt von X und

$$u_1,...,u_n$$
ein reguläres Parametersystem. Dann besitzt jeder Funktionskeim
$$f\in\mathcal{O}_{X,x}$$
genau eine Taylor-Reihe (bezüglich des gegebenen Parametersystems).
Beweis. Es reicht zu zeigen, jede Taylor-Reihe der Funktion
$$f = 0 \in \mathcal{O}_{X,x}$$
ist Null in k[[T]]. Sei $\sum_{i=0}^{\infty} F_i$ ein solche Taylor-Reihe. Wir haben zu zeigen
$$F_i = 0$$
für jedes i. Nach Voraussetzung gilt
$$\sum_{i=0}^{l} F_i \in m_{X,x}^{l+1},$$
d.h.
$$F_0(u) \in m_{X,x}$$
$$F_0(u) + F_1(u) \in m_{X,x}^2$$
$$F_0(u) + F_1(u) + F_2(u) \in m_{X,x}^3$$
...
Es reicht die Gültigkeit der folgenden Implikation zu beweisen
(*) F homogen vom Grad l, $F(u) \in m_{X,x}^{l+1} \Rightarrow F = 0$.
Denn dann folgt schrittweise aus den obigen Relationen $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, ...
Angenommen (*) ist falsch. Es gibt also ein von Null verschiedenes homogenes Polynom F des Grades l mit
$$F(u) \in m_{X,x}^{l+1}.$$
Wir Betrachten eine lineare Koordinatentransformation der folgenden Gestalt durch.
$$T_n = T'_n$$
$$T_{n-1} = T'_{n-1} + \alpha_{n-1}T'_n$$
...
$$T_1 = T'_1 + \alpha_1 T'_n$$
Diese ist offensichtlich umkehrbar und es gilt
$$F(T) = F(\alpha,1)T'^{\,l}_n + \text{Glieder vom Grad} < l \text{ in } T'_n,$$
wobei $F(1,\alpha)$ also Polynom in $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_{n-1})$ nicht identisch Null ist.[142] Wir können solche $\alpha_i\in k$ wählen, daß $F(\alpha,1)$ ein von Null verschiedenes Elemente von k wird. Mit anderen wir können durch eine Transformation erreichten, daß
$$T_n^l$$
in F einen von Null verschiedenen Koeffizienten besitzt, sagen wir

[142] Wei F homogen und nicht identisch Null ist. Man beachte, es gilt $F(T) = T_n^l \cdot F(\frac{T}{T_n})$, d.h. man kann F(T) aus $F(\alpha,1)$ wiedergewinnen.

$$F(T) = \beta\cdot T_n^{l} + \text{Glieder vom Grad} < l \text{ in } T_n,\ \beta\in k-\{0\}.$$

Nach 2.2.2(a) kann man jedes Elemente von $m_{X,x}^{l+1}$ als homogenes Polynom des Grades l in den u_i schreiben mit Koeffizienten aus $m_{X,x}$. Insbesondere ist

$$\beta\cdot u_n^{l} + ... = F(u) = \mu\cdot\upsilon_n^{l} + G_1(u')\cdot u_n^{l-1} + G_2(u')\cdot u_n^{l-2} + ... + G_l(u')$$

mit $\mu\in m_{X,x}$ und $G_i(u')$ homogen vom Grad i in $u' := (u_1,...,u_{n-1})$. Es folgt

$$(\beta-\mu)\cdot u_n^{l} \in (u_1,...,u_{n-1})\mathcal{O}_{X,x}$$

Wegen $\beta\neq 0$ und $\mu\in m_{X,x}$ ist $\beta-\mu$ eine Einheit in $\mathcal{O}_{X,x}$ und es gilt

$$u_n^{l} \in (u_1,...,u_{n-1})\mathcal{O}_{X,x}$$

In einer affinen Umgebung von x folgt

$$V(u_n) \subseteq V(u_1)\cap...\cap V(u_{n-1}),$$

d.h. es ist

$$T_xV(u_n) \subseteq T_xV(u_1) \cap ... \cap T_xV(u_{n-1})$$

Im Widerspruch zu 2.2.1(b).

QED.

Bemerkung

Für jeden nicht-singulären Punkt $x\in X$ einer quasi-projektiven Varietät gibt es, wie eben gezeigt, eine Abbildung

$$\tau: \mathcal{O}_{X,x} \to k[[T]],\ T = (T_1,...,T_n),\ n = \dim_x X,$$

die jedes Funtionskeim in x die eindeutig bestimmte Taylor-Reihe zuordnet.

Jedes Elemente $f\in\mathcal{O}_{X,x}$ besitzt also, falls X nicht-singulär in x ist, genau eine Taylor-Reihe $\tau(f)\in k[[T]]$. Wir haben eine Abbildung

$$\tau: \mathcal{O}_{X,x} \to k[[T]],\ T = (T_1,...,T_n),\ n = \dim_x X,$$

konstruiert. Die Charakterisierung der Taylor-Reihe eines Keims in 2.2.2(c) zeigt, daß τ ein Homomorphismus von k-Algebren ist. Der Kern besteht gerade aus allen Funktionskeimen von

$$\cap_{l=0}^{\infty} m_{X,x}^{l}$$

Wir wollen jetzt zeigen, dieser Kern in trivial, d.h. τ ist injektiv. Dies ist eine direkte Folge des Durchschnittsatzes von Krull.

(g) Theorem 5: Durchschnittsatz von Krull

Seien A ein Noetherscher Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter A-Modul.Dann gilt:

(i) Es gibt ein $a\in A$ mit $a\equiv 1 \bmod I$ und $a\cdot\cap_{n=0}^{\infty} I^nM = 0$.

(ii) Liegt I ganz im Radikal von A, so gilt für jeden Teilmodul $N \subseteq M$,

$$\cap_{n=0}^{\infty} (I^nM+N) = N.$$

(iii) Ist A ein Integritätsbereich und $I \neq A$, so gilt

$$\cap_{n=0}^{\infty} I^n = 0.$$

Beweis (Matsumura). Zu (i). Wir setzen

$$D := \cap_{n=0}^{\infty} I^n M.$$

Nach dem Lemma von Nakayama (vgl. Bemerkung von 2.1.5(j)) reicht es zu zeigen,

$$I \cdot D = D.$$

Nach dem Lemma von Artin-Rees gilt

$$I^n M \cap D \subseteq ID$$

für hinreichend großes n. Der linke Modul ist nach Definition von D aber gleich D.
Zu (ii). Seien

$$M' := M/N$$

und

$$D' := \cap_{n=0}^{\infty} I^n M' = \cap_{n=0}^{\infty} (I^n M+N)/N$$

Die zu beweisende Identität ist äquivalent zu

$$D' = 0.$$

Nach (i) gibt es ein $a \in A$ mit $a \equiv 1 \mod I$ und $aD' = 0$. Wegen $I \subseteq \mathrm{rad}\, A$ ist das Element a aber eine Einheit von A, d.h. es gilt $D' = 0$.
Zu (iii). Seien

$$D := \cap_{n=0}^{\infty} I^n.$$

Nach (i) (mit M = A) gibt es ein $a \in A$ mit $a \equiv 1 \mod I$ und $aD = 0$. Wegen $a \equiv 1 \mod I$ ist a von Null verschieden. Mit $aD = 0$ gilt deshalb auch $D = 0$.
QED.

(h) Folgerung: lokale Ringe in regulären Punkten als Teilringe von Potenzreihenringen

Sei x ein nicht-singulärer Punkt einer (quasi-projektiven) Varietät ist. Dann ist $\mathcal{O}_{X,x}$ isomorph zu einem Teilring eines formalen Potenzreihenrings.
Beweis. Dies folgt aus Bemerkung von 2.2.2 (f) und dem Durchschnittsatz von Krull.
QED.

(i) Theorem 6: Die Zahl der Komponenten durch nicht-singuläre Punkte

Durch einen nicht-singulären Punkt x einer quasi-projektiven Varietät X geht genau eine Komponente.
Beweis. Sei X' die Vereinigung der Komponenten von X, die den Punkt x nicht enthalten. Wir können X durch X - X' ersetzen, d.h. wir können annehmen, alle Komponenten von X enthalten den Punkt x. Dann gilt aber

$$k[X] \subseteq \mathcal{O}_{X,x},$$

denn jede reguläre Funktion auf X, die in einer Umgebung von x Null ist, ist auf einer dichten offenen Menge von X Null, d.h. sie ist auf ganz X Null.

Weil x ein nicht-singulärer Punkt von X ist, ist $\mathcal{O}_{X,x}$ isomorph zu einem Teilring einer Potenzreihenrings, also nullteilerfrei. Der Koordinatenring k[X] besitzt also keine Nullteiler, d.h. X besteht aus nur einer Komponente.
QED.

4.2.3 Varietäten über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$[143]

(a) Die reelle bzw. komplexe Topologie

Der Raum $\mathbb{P}^N$ über den reellen oder komplexen Zahlen k besitzt die Struktur eines topologischen Raums, wobei die Topologie von der der reellen bzw. komplexen Zahlen kommt. Auf jeder algebraischen Teilvarietät X dieses topologischen Raums wird eine Unterraumtopologie induziert. Diese heißt reelle Topologie bzw. komplexe Topologie von X.

Diese ist wesentlich verschieden von der bisher benutzten Zariski-Topologie.

(b) Nicht-singuläre Punkte und lokal vollständige Durchschnitte

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ abgeschlossen, $x \in X$ ein nicht-singulärer Punkt und

$$I(X) = (f_1,...,f_m).$$

Wir setzen

$$n := \dim_x X .$$

Dann gibt es eine Umgebung U von x,

$$x \in U \subseteq \mathbb{A}^N,$$

derart, daß X in den Punkten von U bereits von N-n der Gleichungen f_i definiert wird,

$$X \cap U = V(f_{i_1},...,f_{i_{N-n}}) \cap U.$$

Mit anderen Worten, X ist in einer Umgebung von x (mengentheoretisch) ein vollständiger Durchschnitt.

Beweis. Nach Vorraussetzung hat der Tangentialraum

$$T_x(X) = V(d_x f_1, ..., d_x f_m)$$

die Dimension n, d.h. unter den Gleichungen $d_x f_i = 0$ gibt es N-n linear unabhängige. Mit anderen Worten, die Matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j(x)}\right)_{i=1,...,m,j=1,...,N}$$

hat den Rang N-n. Durch Permultieren der Unbestimmten und Gleichungen können wir erreichen, daß

$$(1) \qquad \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j(x)}\right)_{i=1,...,N-n,j=n+1,...,N} \neq 0$$

gilt. O.B.d.A. sei x der Ursprung im $\mathbb{A}^N$,

$$x = (0,...,0).$$

Dann bilden die Einschränkungen

$$t_i := T_i|_X \ (i=1,...,n)$$

ein reguläres Parametersystem von X in x.[144] Betrachten wir die affine Varietät mit den Gleichungen

---

[143] Im Fall $k = \mathbb{R}$ bezeichne $\mathbb{A}^N$ das affine Schema Spec k[T] und X sei ein reduziertes affines Teilschema

$$X = \text{Spec } k[T]/I$$

dessen lokaler Ring $\mathcal{O}_{X,x} = (k[T]/I)_{(T)}$ im Ursprung x regulär sei.

(2) $$f_1 = \ldots = f_{N-n} = 0.$$

Bezeichne X' die Vereinigung der Komponenten dieser Varietät, die den Punkt x enthalten, und

$$U$$

das Komplement in $\mathbb{A}^N$ aller übrigen Komponenten. Dann gilt

$$X \cap U \subseteq X' \cap U,$$

also

$$n = \dim_x X \le \dim_x X' \le \dim T_x(X') \le n.$$

Die letzte Ungleichung besteht dabei wegen (1). Also gilt überall das Gleichheitszeichen. Insbesondere ist X' nicht-singulär in x und besteht damit aus nur einer Komponente.

Wegen $X\cap U \subseteq X'\cap U$, $\dim X\cap U = \dim X'\cap U$ und X' irreduzibel folgt $X\cap U = X'\cap U$, d.h. X wird in einer Umgebung von x durch die Gleichungen (2) definiert.

QED.

(c) Der Fall k = $\mathbb{C}$ bzw. k = $\mathbb{R}$

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^N$ abgeschlossen, $x \in X$ ein nicht-singulärer Punkt und

$$I(X) = (f_1,\ldots,f_m).$$

Wir setzen

$$n := \dim_x X .$$

O.B.d.A. sei

(1) $$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j(x)}\right)_{i=1,\ldots,N-n,j=n+1,\ldots,N} \ne 0$$

Nach (a) wird X in einer Umgebung von x durch die N-n Gleichungen

$$f_1 = \ldots = f_{N-n} = 0$$

definiert. Nach dem Auflösungssatz[145] gibt es N-n eindeutig bestimmte Potenzreihen

$$\Phi_1(T_1,\ldots,T_n), \ldots, \Phi_{N-n}(T_1,\ldots,T_n)$$

und ein $\varepsilon>0$ derart, daß die Potenzreihen für $|T_j| < \varepsilon$ konvergieren und

---

[144] Die N×N-Matrix $\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ * & A \end{pmatrix}$ mit $A := \left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j(x)}\right)_{i=1,\ldots,N-n,j=n+1,\ldots,N}$ hat den Rang N, d.h. das lineare Gleichungssystem

$$d_x T_1 = \ldots = d_x T_n = d_x f_1 = \ldots = d_x f_{N-n} = 0$$

hat nur die triviale Lösung. Die Einschränkungen der $d_x T_1$, ... , $d_x T_n$ auf die Lösungsmenge des Gleichungssytems $d_x f_1 = \ldots = d_x f_{N-n} = 0$ sind also linear unabhängig. Mit anderen Worten, die

$$d_x t_i = t_i \bmod m^2_{X,x} \quad (i=1,\ldots,n)$$

sind linear unabhängig auf $T_x(X)$. Da das Dual von $T_x(X)$ die Dimension n hat, bilden sie sogar eine Basis dieses Duals.

[145] genauer: der analytischen Version des Auflösungssatzes (über $\mathbb{R}$ bzw. über $\mathbb{C}$). Diese analytische Variante des Auflösungssatzes gilt über beliebigen bewerteten Körpern (siehe: Kurke, Pfister, Roczen: Henselsche Ringe und algebraische Geometrie, Abschnitt 2.1). Der Beweis erfolgt dadurch, daß man zunächst den Satz für formale Potenzreihen beweist und dann im analytischen Fall die Konvergenz der beteiligten Potenzreihen nachweist.

(2) $\Phi_j(0) = x$

(3) $f_i(T_1,...,T_n, \Phi_1(T),...,\Phi_{N-n}(T)) = 0$

ist für i=1,...,n; j = 1,..., N-n und alle diese T_j mit $|T_j| < \varepsilon$. Die Taylor-Reihen

$$\tau(T_{n+1}),...,\tau(T_N)$$

bezüglich des regulären Parametersystems $t_i = T_i|_X$ (i=1,...,n) genügen ebenfalls den Bedingungen (2) und (3). Sie stimmen deshalb mit den Potenzreihen Φ_j überein und sind insbesondere in einer Umgebung[146] von x konvergent.

Jeder Funktionskeim $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ läßt sich in der Gestalt

$$f = \frac{p(T_1,..,T_N)}{q(T_1,...,T_N)}$$

schreiben mit Polynome p,q mit $q(x) \neq 0$. Deshalb gilt für die zugehörigen Taylor-Reihen

$$\tau(f) = \frac{p(\tau(T_1),..,\tau(T_N))}{q(\tau(T_1),...,\tau(T_N))}$$

Deshalb konvergiert auch die Taylor-Reihe $\tau(f)$ von f in einer Umgebung[147] U von x. Die Eindeutigkeitsaussage des Auflösungssatzes bedeutet, man kann die Umgebung U $\subseteq$ X so wählen, daß die Abbildung

$$U \to \mathbb{A}^n, (t_1...t_N) \mapsto (t_1,...,t_n),$$

einen Homöomorphismus von U mit einer offenen Menge des $\mathbb{A}^n$ induziert.[148]

(d) Wechsel des (regulären) Parametersystems

Seien X eine quasi-projektive Varietät, $x \in X$ ein nicht-singulärer Punkt und

$$u_1,...,u_n$$

ein regulären Parametersystem von X in x. Dann sind die Taylor-Reihen (bezüglich der u_i) der Funktionskeime in x in einer Umgebung von x (bezüglich der reellen bzw. komplexen Topologie) konvergent.

Beweis. Wir benutzen die Bezeichnungen von (b) und insbesondere das reguläre Parametersystem

$$t_1,...,t_n .$$

Nach Definition des Begriffs 'Parametersystem' gibt es eine umkehrbare Matrix

$$C = (c_{ij}) \in k^{n\times n}$$

mit

$$u_i \equiv \sum_{j=1}^{n} c_{ij} t_j \bmod m^2_{X,x} .$$

also (auf Grund der Produkt-Regel)

$$\frac{\partial u_i}{\partial T_j} \equiv c_{ij} \bmod m_{X,x}$$

also

---

[146] bezüglich der reellen bzw. komplexen Topologie.

[147] bezüglich der reellen bzw. komplexen Topologie.

[148] bezüglich der reellen bzw. komplexen Topologie.

$$\frac{\partial u_i}{\partial T_j}(x) = c_{ij}$$

also

$$\det\left(\frac{\partial u_i}{\partial T_j}(x)\right) = \det A \neq 0.$$

Wir gehen zu den Taylor-Reihen bezüglich der t_i über und erhalten

$$\det\left(\frac{\partial \tau(u_i)}{\partial T_j}(x)\right) \neq 0.$$

Nach dem Auflösungssatz ist das Gleichungssystem

$$\tau(u_i) = \Phi_i(T_1,...,T_n) \text{ (i=1,...,n)},$$

dessen rechte Seiten gerade die Taylor-Entwicklungen der linken Seiten bezüglich der t_i sind, nach den T_i auflösbar, d.h. wir können die t_i als konvergente Reihen der u_i schreiben. Da jedes $f\in\mathcal{O}_{X,x}$ ein Darstellung als konvergente Reihe in den t_i besitzt, erhalten wir durch Einsetzen der Reihen in den u_i die analoge Aussage auch für die Taylor-Entwicklungen bezüglich der u_i .

QED.

Bemerkungen

(i) Die obigen Betrachtungen zeigen, in der reellen bzw. komplexen Topologie besitzt jeder nicht-singuläre Punkt einer n-dimensionalen Varietät eine Umgebung, die homöomorph einer offenen Menge im affinen n-dimensionalen Raum (über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) ist. Sind also alle Punkte einer algebraischen Varietät X nicht-singulär, so handelt es sich um eine reelle bzw. komplexe Mannigfaltigkeit.

(ii) Der $\mathbb{P}^N$ selbst ist eine kompakte reelle bzw. komplexe Mannigfaltigkeit. Nicht-singuläre projektive Varietäten über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ sind also kompakte Mannigfaltigkeiten.

(iii) Im Fall k = $\mathbb{C}$ ist auch die Umkehrung der letzten Aussage richtig: eine quasi-projektive Varietät X, die kompakt ist in der komplexen Topologie, ist projektiv.[149]

(iv) Die Aussagen dieses Abschnitts lassen sich auf den Fall, daß k der Körper der p-adischen Zahlen ist, übertragen.

4.3 Eigenschaften nicht-singulärer Punkte

4.3.1 Teilvarietäten der Kodimension 1

(a) Vormerkung

Wie wir wissen kann jede Varietät im $\mathbb{A}^N$ bzw. $\mathbb{P}^N$ durch nur eine Gleichung definiert werden. Wie wir bereits wissen, ist diese Aussage für allgemeine Varietäten X nicht richtig. In diesem Abschnitt, wollen wir zeigen, daß dies wenigstens noch lokal in den nicht-singulären Punkten von X gilt.

---

[149] Mehr noch: Beliebige komplexe kompakte Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{P}^N$ sind projektive Varietäten.

(b) Lokale Gleichungen einer Varietät

Seien X eine Varietät, $Y \subseteq X$ eine Teilvarietät und $x \in X$ ein Punkt. Die Funktionskeime $f_1, ..., f_m \in \mathcal{O}_{X,x}$ heißen <u>lokale Gleichungen</u> der Teilvarietät $Y \subseteq X$ in einer Umgebung von x, wenn es eine affine Umgebung U von x gibt,

$$x \in U \subseteq X,$$

auf welcher die f_i regulär sind[150],

$$f_1, ..., f_m \in k[U],$$

mit

$$I(Y \cap U) = (f_1, ..., f_m) \quad (\subseteq k[U]).$$

Bemerkungen

(i) Der obige Begriff läßt sich leicht in der Sprache der lokalen Ringe formulieren. Zu diesem Zweck betrachten wir das Ideal

$$I(Y)_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$$

der Keime regulärer Funktionen auf X, die in einer Umgebung von x Null sind entlang Y. Im Fall X affin gilt

(1) $$I(Y)_x = \{\frac{u}{v} \in \mathcal{O}_{X,x} \mid u,v \in k[X],\ u \in I(Y),\ v(x) \neq 0\}.$$

(ii) Gehen außerdem noch alle Komponenten von Y durch x, so ist

(2) $$I(Y) = k[X] \cap I(Y)_x.$$

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Wir haben (1) zu beweisen. <u>Zu</u> '$\subseteq$'. Ein Element von $I(Y)_x$ ist nach Definition ein Funktionskeim der Gestalt

$$f = \frac{u}{v} \text{ mit } u,v \in k[X] \text{ und } v(x) \neq 0$$

wobei außerdem u = 0 ist auf $Y \cap U$ für eine affine Umgebung $U \subseteq X$ von x. O.B.d.A. sei U eine affine Umgebung,

$$U = D(h) = \{ p \in X \mid h(p) \neq 0 \}.$$

Dann ist $h(x) \neq 0$ (wegen $x \in U$) und $u \cdot h = 0$ auf ganz Y (auf U ist u = 0 und außerhalb von U ist h = 0). Das erstere impliziert

$$f = \frac{uh}{vh} \in \mathcal{O}_{X,x}$$

und das letztere impliziert, daß f in der rechten Seite von (1) liegt.

<u>Zu</u> '$\supseteq$'. Trivial: eine auf Y verschwindende Funktion hat diese Eigenschaft auch in einer Umgebung von x.

<u>Zu (ii)</u>. <u>Zu</u> '$\subseteq$'. Trivial: eine auf Y verschwindende Funktion hat diese Eigenschaft auch in einer Umgebung von x. <u>Zu</u> '$\supseteq$'. Sei f aus der reichten Seite von (2). Dann ist f eine polynomiale Funktion auf X, mit

$$f|_{U \cap Y} = 0$$

für eine Umgebung $U \subseteq X$ von x. Dann ist aber auch

$$f = 0 \text{ auf } \overline{U \cap Y}$$

(wegen $U \cap Y \subseteq V(f)$ und V(f) abgeschlossen). Jede Komponente Y_i von Y geht nach Voraussetzung durch x, hat also mit U Punkte gemeinsam. Also ist ein $U \cap Y_i$ eine nicht-leere offene Teilmenge von Y_i und damit eine dicht liegende offene Teilmenge,

$$\overline{U \cap Y} \supseteq \overline{U \cap Y_i} = Y_i .$$

---

[150] Wir wollen für die Repräsentanten der Funktionskeime in k[U] keine gesonderten Bezeichnungen einführen und nehem dafür eine gewisse Unkorrektheit der Bezeichnungen in Kauf.

Da dies für jede Komponente von Y gilt, folgt $\overline{U\cap Y} \supseteq Y$, d.h. f ist Null auf ganz Y.
QED.

(c) Lemma: Lokale Gleichungen und Funktionskeime

Seien X eine Varietät, $Y\subseteq X$ eine Teilvarietät, $x\in X$ ein Punkt und $f_1,...,f_m\in\mathcal{O}_{X,x}$ Funktionskeime. Dann sind äquivalent.

(i) $f_1,...,f_m$ bilden ein System von lokalen Gleichungen von Y in einer Umgebung von x.

(ii) $I(Y)_x = (f_1,...,f_m)$.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Indem wir X durch eine geeignete offene affine Umgebung von X ersetzen, erreichen wir

$$I(Y) = (f_1,...,f_m).$$

Nach Bemerkung (b)(i) folgt

$$I(Y)_x = I(Y)\cdot\mathcal{O}_{X,x} = ((f_1,...,f_m)\cdot\mathcal{O}_{X,x},$$

d.h. es gilt (ii).

(ii) ⇒ (i). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, X ist affin, die f_j sind regulär auf X und identisch Null auf Y. Sei

$$I(Y) = (g_1,...,g_s)\ (\subseteq k[X]).$$

Wegen (ii) und $g_i \in I(Y)_x$ für jedes i können wir dann g_i in der Gestalt

(1) $$g_i = \sum_{j=1}^{m} h_{ij} f_j$$

schreiben mit Funktionskeimen $h_{ij} \in \mathcal{O}_{X,x}$. Es gibt dann eine affine offene Umgebung U von x derart, daß sich (die f_j und) die h_{ij} als reguläre Funktionen auf U auffassen lassen und die angebebene Identität (1) sogar auf ganz U gilt. Wir können außerdem annehmen, U ist eine offen Hauptmenge,

$$U = X - V(h),$$

d.h. (1) ist eine Relation von Funktionen aus k[U]. Nun ist

$$k[U] = \{\frac{u}{h^k} \mid u\in k[X], k = 0, 1, 2, ...\}.$$

Wegen (1) ist

$$g_i \in (f_1,...,f_m)k[U]$$

für jedes i, also

$$I(Y)\cdot k[U] \subseteq (f_1,...,f_m)k[U]$$

Die umgekehte Inklusion ist trivial, d.h. es gilt

$$I(Y)\cdot k[U] = (f_1,...,f_m)k[U].$$

Es reicht deshalb zu zeigen,

(2) $$I(Y)\cdot k[U] = I(Y\cap U).$$

Trivialerweise gilt '$\subseteq$'. Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Sei $v\in I(Y\cap U)$. Dann ist

$$v = \frac{u}{g^k} \text{ mit } u \in k[X].$$

Durch Erweitern mit einer g-Potenz erreichen wir, daß gilt

$$u = v\cdot g^k \text{ in } k[X],$$

also[151]

$$u \in I(Y).$$

Wegen $\frac{1}{g^k} \in k[U]$ folgt

$$v = u\cdot\frac{1}{g^k} \in I(Y)\cdot k[U].$$

QED.

(d) Theorem 1: Anzahl der lokalen Gleichungen von Teilvarietäten der Kodimension 1 in nicht-singulären Punkten

Seien X eine äquidimensionale Varietät, $x\in X$ ein nicht-singulärer Punkt und $Y\subseteq X$ eine irreduzible Teilvarietät der Kodimension 1 von X. Dann kann man Y lokal in einer Umgebung von X durch nur eine lokale Gleichung definieren.

Bemerkung

Der Beweis des Theorems ist im wesentlichen derselbe wie der von 1.6.1 (i). Im dortigen Beweis benutzen wir die Tatsache, daß der Polynomring k[T] ein ZPE-Ring ist. Beim vorliegenden Theorem benutzen wir die stattdessen die ZPE-Eigenschaft des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$. Wir formulieren zunächst diese Tatsache als Satz.

(e) Theorrem 2: Die ZPE-Eigenschaft der lokalen Ringe in regulären Punkten.

Seien X eine Varietät und $x\in X$ ein nicht-singulärer Punkt. Dann ist $\mathcal{O}_{X,x}$ ein ZPE-Ring.

Der **Beweis** dieses Satzes erfolgt im Abschnitt 2.3.3.

Beweis. von 2.3.1 (d). Nach 2.2.2(i) (Theorem 6) geht durch den nicht-singulären Punkt $x\in X$ genau eine Komponente von X. Wir können X durch eine affine Umgebung des Punktes x ersetzen und annehmen, X ist affin und irreduzibel. Wegen

$$\dim Y = \dim X - 1$$

ist Y eine echte Teilmenge von X, d.h. es gibt eine von Null verschiedene polynomiale Funktion $f\in k[X]$, die identisch Null ist entlang Y. Betrachten wir f als Element des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ und sei

$$f = f_1\cdot\ldots\cdot f_r$$

die Zerlegung von f in irreduzible Faktoren in $\mathcal{O}_{X,x}$. Da f auf Y identisch Null ist, muß mindestens einer der Faktoren f_i, sagen wir $g = f_1$, in einer Umgebung von x entlang Y Null sein.[152] Ersetzen wir X durch eine affine Umgebung von x, auf welcher g regulär ist und identisch Null entlang Y. Dann gilt

$$Y \subseteq V(g) \subseteq X.$$

Weil g nicht identisch Null ist auf X_i, muß die rechte Inklusion echt sein. Dann hat aber V(g) die Kodimension 1 in X, d.h. es gilt dim V(g) = dim Y und Y ist eine irreduzible Komponente von V(g).

---

[151] Der erste Faktor rechts ist Null auf $Y\cap U$ (wegen $v\in I(Y\cap U)$) und der zweite Faktor ist Null außerhalb von U.

[152] Auf einer affinen offenen Umgebung von x kann man die f_i als reguläre Funktionen auffassen und die Ralation $f = f_1\cdot\ldots\cdot f_r$ ist eine Ralation von regulären Funktionen (nicht nur eine solche von Keimen). Weil Y irreduzibel ist, d.h. I(Y) ist ein Primideal und enthält f, muß eines der f_i in I(Y) liegen.

Es reicht zu zeigen, der Durchschnitt von V(g) mit einer Umgebung von x ist irreduzibel, denn dann stimmt V(g) in dieser Umgebung mit Y überein und Y läßt sich dort mit Hilfe der einzigen Gleichung $g = 0$ definieren.

Beweisen wir also die Irreduzibilität von V(g) in einer Umgebung von x. Sei

$$V(g) = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$$

die Zerlegung von V(g) in irreduzible Komponenten. Für die zugehörigen Ideale in k[X] gilt dann

$$I(V(g)) = I(Y_1) \cap \ldots \cap I(Y_r),$$

wobei auf der rechten Seite ein Durchschnitt von Primidealen steht. Wir gehen zu den in $\mathcal{O}_{X,x}$ erzeugten Idealen über und erhalten[153]

$$(g) \subseteq I(V(g))_x = I(Y_1)_x \cap \ldots \cap I(Y_r)_x.$$

Nun ist $I(V(g))_x$ gerade das Radikal[154] von (g) und g ist ein Primelement im ZPE-Ring $\mathcal{O}_{X,x}$. Deshalb ist

(1) $$(g) = I(V(g))_x = I(Y_1)_x \cap \ldots \cap I(Y_r)_x.$$

Insbesondere liegt das Produkt der Ideale $I(Y_j)_x$ in (g). Weil (g) ein Primideal ist, folgt

$$(g) = I(Y_i)_x$$

für mindestens ein i. Die definierenden Gleichungen von Y_i sind dann aber in einer Umgebung von x Vielfache von g, d.h. in dieser Umgebung gilt

$$V(g) = Y_i ,$$

d.h. V(g) ist in diesr Umgebung irreduzibel.
QED.

Es folgen einige Anwendungen des eben bewiesenen Satzes.

(f) Theorem 3: Die Kodimension des fundamentalne Orts einer rationalen Abbildung mit Werten im $\mathbb{P}^n$

Seien X ein glatte Varietät und

$$\phi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^n \ (n \ge 1)$$

eine rationale Abbildung mit Werten im projektiven Raum. Dann hat die Menge der Punkte, in denen ϕ nicht regulär ist,[155] eine Kodimension ≥ 2 in X.

Beweis. Seien

$$Y := \{ x \in X \mid \phi \text{ ist nicht regulär in } x \}$$

und $y \in Y$ ein vorgegebener Punkt. Es reicht zu zeigen,

$$\dim_y Y \le \dim_y X - 2.$$

Diese Aussage ist lokaler Natur: wir können zum Beweis X durch eine beliebig kleine affine Umgebung von y ersetzen. Die Abbildung ϕ hat dort die Gestalt

---

[153] Wegen $V(g) = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ ist ein Funktionskeim in x genau dann Null entlang V(g) in einer Umgebung von x, wenn er Null ist entlang jedem Y_j in einer Umgebung von x (welches durch x geht).

[154] Jedes Element von $I(V(g))_x$ hat die Gestalt $\frac{a}{b}$ mit $a \in I(V(g))$, d.h. eine Potenz von a liegt in (g)k[X]. Dann liegt aber eine Potenz von $\frac{a}{b}$ in $(g)\mathcal{O}_{X,x}$.

[155] Diese Menge heißt fundamentaler Ort der rationalen Abbildung oder auch Menge der Fundamentalpunkte von ϕ.

$$\phi = [f_0,...,f_n]$$

mit rationalen Funktionen $f_i \in k(X)$. Durch Multiplikation mit einem gemeinsame Nenner erreichen wir weiter, daß die f_i Elemente des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,y}$ sind. Weil y ein nicht-singulärer Punkt von X ist, ist dieser lokale Ring (nach 2.3.1(e)) ein ZPE-Ring. Wir können weiter erreichten, daß der größte gemeinsame Teiler der f_i eins ist. Durch weiteres Verkleinern von X erreichen wir, daß die f_i auf ganz X regulär sind. In jedem Punkt von X, in welchem ein f_i von Null verschieden ist, ist ϕ eine wohldefinierte reguläre Abbildung. Mit anderen Worten,

$$Y \subseteq V(f_0,...,f_n).$$

Wäre Y in y von der Kodimension 1, so liese sich Y lokal in y durch eine Gleichung definieren. Wir könnten annehmen,

$$Y = V(g) \subseteq V(f_0,...,f_n),$$

mit einer regulären Funktion $g \in k[X]$. Nach dem Nullstellensatz gibt es dann ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$f_i^m \in gk[X] \text{ für } i = 0,...,n.$$

Insbesondere ist dann

$$g \mid f_i^m \text{ in } \mathcal{O}_{X,y} \text{ für } i = 0,...,n$$

Da die f_i in $\mathcal{O}_{X,y}$ teilerfremd sind, muß g eine Einheit in $\mathcal{O}_{X,y}$ sein, d.h. $g(y) \neq 0$. Das steht aber im Widerspruch zu

$$y \in Y = V(g).$$

Dieser Widerspruch zeigt, die Kodimension von Y in y muß größer sein als 1.
QED.

(g) Folgerung 1: Regularität rationaler Abbildungen auf glatten Kurven

Jede rationale Abbildung auf einer glatten Kurve mit Werten im projektiven Raum ist regulär.
Beweis. Die Menge der Fundamentalpunkte der Abbildung hat nach (f) eine Kodimension ≥ 2 in der Kurve, muß also leer sein.
QED.

(h) Folgerung 2: Isomorphie und birationale Isomoprhie glatter Kurven

Zwei glatte projektive Kurven, die birational isomorph sind, sind sogar isomorph.

(i) Einige Anwendungen

1. Seien X' und X" glatte projektive Kurven über $\mathbb{C}$. Aus (g) ergibt sich, diese Kurven sind homöomorph in der komplexen Topologie falls sie birational isomorph sind.[156]
2. Seien X' und X" projektive Kurven die durch Gleichungen mit reellen Koeffizienten definiert sind und die in allen Punkten mit reellen Koordinaten glatt sind. Falls es einen birationalen Isomorphismus zwischen diesen Kurven gibt, der

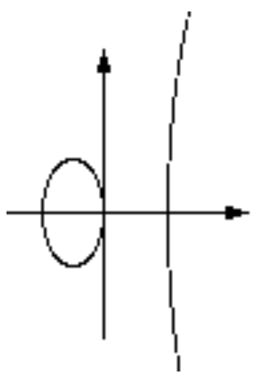
[156] Nach (g) sind sie dann isomorph, d.h. es gibt zueinander inverse reguläre Abbildungen mit komplexen Koeffizienten zwischen ihnen. Solche Abbildungen sind insbesondere stetig in der komplexen Topologie.

über den reellen Zahlen definiert ist[157], so sind die reellen Punktmengen dieser Kurven homöomorph in der reellen Topologie.[158]

3. Auf Grund der letzten Bemerkung kann man manchmal ganz einfach erkennen, daß zwei gegebene Kurven über den reellen Zahlen nicht birational äquivalent sein können. Zum Beispiel hat die Kurve mit der Gleichung

$$y^2 = x^3 - x$$

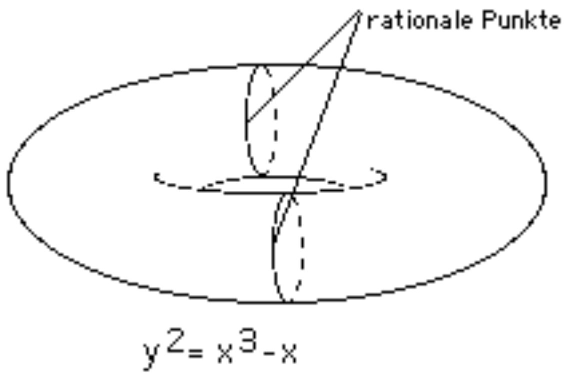
über den reellen Zahlen einen Graphen, der aus zwei Komponenten besteht.



Der reelle Teil einer projektiven Geraden P^1 dageben besteht aus nur einer Komponente. Die reellen Punktmengen dieser Kurven sind also nicht homöomorph. Die Kurven selbst können damit nicht birational isomoph sein, d.h. durch $y^2=x^3-x$ ist keine rationale Kurve gegeben

Mit Hilfe derselben Idee kann man sogar zeigen, daß diese Kurve auch über den komplexen Zahlen nicht rational ist. Es reicht zu zeigen, die beiden Kurven sind in der komplexen Topologie nicht homöomorph.

Es ist nicht schwer, einzusehen, die Kurve $y^2 = x^3 - x$ ist als komplexe Mannigfaltigkeit ein Torus, die projektive Gerade dagegen eine Kugeloberfläche, d.h. es besteht keine Homöomorphie. Also ist die Kurve $y^2 = x^3 - x$ nicht rational. Die nachfolgende



Skitze beschreibt die Lage der rationalen Punkte auf dieser Kurve.

4.3.2 Glatte Teilvarietäten

Die Aussage von Theorem 1 (2.3.1(d)), daß eine Teilvarietät der Kodimension 1 in einem nicht-singulären Punkt lokal durch eine Gleichung definieren läßt, kann man nicht auf den Fall einer größeren Kodimension verallgemeinern. Zumindest nicht im Fall beliebiger Teilvarietäten. Falls die Teilvarietät jedoch glatt ist, ist eine Verallgemeinerung möglich. Wir beginnen mit einer vorbereitenden Aussage.

(a) Theorem 4: durch reguläre Parameter definierte Teilvarietäten

Seien X eine affine Varietät, $x \in X$ ein nicht-singulärer Punkt und

---

[157] d.h. der birationale Isomorphismus und dessen Umkehrung ist durch rationale Funktionen mit reellen Koeffizienten gegeben.

[158] Jeder reelle Punkt dieser Kurven ist nicht-singulär und besitzt damit eine Umgebung aus nicht-singujlären Punkten. Man betrachte offene Teilmengen der beidene Kurven, die alle reellen Punkte enthalten und die ausschließlich aus nicht-singulären Punkten bestehen. Der birationale Isomorphismus ist in den reellen Punkten regulär und definiert zueinander inverse Abbildungen zwischen den reellen Punktmengen, die stetig sind in der reellen Topologie.

$$u_1, ... , u_n \in k[X]$$

reguläre Funktionen, die in x ein (reguläres) Parametersystem von X bilden. Dann ist für jedes $m \le n$ die Teilvarietät

$$Y := V(u_1, ... , u_m)$$

von X nicht-singulär im Punkt x und in einer affinen Umgebung von x gilt

$$I(Y) = (u_1, ... , u_m).$$

Außerdem bilden die Einschränkungen der $u_{m+1}, ... , u_n$ auf Y ein reguläres Parametersystem von Y im Punkt x.

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach m geführt. Sei m = 1. Nach 2.3.1(d) (Theorem 1) kann man X durch eine geeignete affine Umgebung von x so ersetzen, daß das Ideal von Y in k[X] von nur einer lokalen Gleichung f erzeugt wird,

$$I(Y) = (f).$$

Der Parameter u_1 ist dann ein Vielfaches von f,

$$u_1 = v\cdot f \text{ mit } v\in k[X].$$

Wir gehen zu den Differentialen in x über und erhalten

$$d_x u_1 = v(x)\cdot d_x f + f(x)\cdot d_x v = v(x)\cdot d_x f .$$

Der zweite Summand fällt weg, weil f auf Y Null ist, also f(x) = 0 gilt. Da u_1 Teil eines Parametersystems ist, gilt $d_x u_1 \ne 0$, also $v(x)\cdot\ne 0$, d.h. v ist eine Einheit in $\mathcal{O}_{X,x}$ und wir können X so durch eine kleinere affine Umgebung von x ersetzen, daß

$$I(Y) = (u_1)$$

gilt.

Der Tangentialraum $T_x Y$ besteht gerade aus den Punkten von $T_x X$ mit $d_x u_1 = 0$. Deshalb bilden die

$$d_x u_2,..., d_x u_n$$

eine Basis des Duals $T^*_x Y$, d.h. die $u_2,..., u_n$ bilden ein Parametersystem von Y in x. Die Zahl der Parameter ist n-1 = dim Y. Damit ist die Behauptung im Fall m = 1 bewiesen.

Sei jetzt m > 1. Wir setzen

$$X' := V(u_1).$$

Dann genügt X' den Voraussetzungen des Satzes (auf Grund es Falles m = 1) und auf X' gilt

$$Y := V(u_2, ... , u_m)$$

Die Behauptung des Satzes ergibt sich damit aus der Induktionsvoraussetzung.

QED.

(b) Theorem 5: Die lokalen Gleichungen einer nicht-singulären Teilvarietät

Seien X eine Varietät, $Y \subseteq X$ eine Teilvarietät und $x\in Y$ ein Punkt, in welchem Y und X nicht-singulär sind. Dann gibt es ein System $u_1, ... , u_n$ von lokalen Parametern von X in x und eine affine Umgebung $U\subseteq X$ von x mit $I(Y\cap U) = (u_1, ... , u_m)$.

Beweis. Die natürliche Einbettung $Y \subseteq X$ induziert eine Injektion der Tangentialräume in x,

$$T_x Y \to T_x X.$$

Letztere induziert eine Surjektion der Kotangentialräume[159],

$$m_{X,x}/m^2_{X,x} \twoheadrightarrow m_{Y,x}/m^2_{Y,x} = (m_{X,x} + I(Y)_x)/(m^2_{X,x} + I(Y)_x)$$
$$= m_{X,x}/(m_{X,x} \cap I(Y)_x + m^2_{X,x}).$$

Der Kern dieser linearen Abbildung ist

$$(m_{X,x} \cap I(Y)_x + m^2_{X,x})/ m^2_{X,x}.$$

Es gibt deshalb Funktionen

$$u_1,...,u_m \in I(Y) \subseteq k[X],$$

deren Restklassen in $m_{X,x}/m^2_{X,x}$ diesen Kern erzeugen, und Funktionen

$$u_{m+1},...,u_n \in k[X],$$

deren Restklassen in $m_{Y,x}/m^2_{Y,x}$ eine Vektorraumbasis bilden. Zusammen bilden dann die Restklassen der

$$u_1, ... , u_n \in k[X]$$

eine Vektorraumbasis von $m_{X,x}/m^2_{X,x}$, d.h. die Funktionen selbst bilden ein System von lokalen Parametern von X in x.

Wir setzen

$$Y' := V(u_1,...,u_m).$$

Nach Konstruktion gilt $Y \subseteq Y'$. Es reicht zu zeigen, in einer Umgebung von x gilt sogar das Gleichheitszeichen.

Nach 2.3.2 (a) (d.h. Theorem 4) ist Y' nicht-singulär im Punkt x, also nach 2.2.2(i) (Theorem 6) irreduzibel in einer Umgebung von x. Ebenfalls nach 2.2.2(a) gilt[160]

$$\dim Y' = n - m.$$

Auf Grund der Konstruktion der u_i ist

$$\dim T_x Y = n - m.$$

Weil Y in x nicht-singulär ist, folgt

$$\dim Y = n - m = \dim Y'.$$

Weil Y' in einer Umgebung von x irreduzibel ist, folgt Y = Y' in einer solchen Umgebung.

QED.

4.3.3 Zerlegung in Primfaktoren im lokalen Ring eines nicht-singulären Punktes

(a) Vorbemerkungen

1. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem Beweis von Theorem 2 (2.3.1(e)). Der Beweis beruht wesentlich auf der Einbettung

$$\tau: \mathcal{O}_{X,x} \to k[[T]],$$

[159] Das Gleichheitszeichen rechts kommt von der Tatsache, daß k[Y] = k[X]/I(Y) gilt, und der Tatsache, daß die natürliche Abbildung $k[Y] \to \mathcal{O}_{Y,x}$ modulo dem Quadrat von $m = I(\{x\}) \subseteq k[X]$ einen Isomorphismus induziert,

$$m_{Y,x}/m^2_{Y,x} = m\, k[Y] /m^2 k[Y] = (m + I(Y))/(m^2 + I(Y)) = (m_{X,x} + I(Y)_x)/(m^2_{X,x} + I(Y)_x).$$

[160] Das Theorem gibt ein reguläres Parametersystem in x an.

wobei $x \in X$ ein nicht-singulärer Punkt und k[[T]] der formale Potenzreihenring in den Unbestimmten $T = (T_1,...,T_n)$ ist mit $n = \dim_x X$ ist.

2. Wir beginnen mit der Angabe einiger Eigenschaften des Rings k[[T]] und der Einbettung τ. Eine formale Potenzreihe kann man zum Beispiel nicht einfach als Summe ihrer Glieder ansehen, wobei man lediglich die Ringstruktur von k[[T]] im Auge hat. In einem Ring sind unendliche Summe nicht definiert.

   Um die Betrachtung unendlicher Summen zu ermöglichen, muß man einen Konvergenzbegriff oder - was auf dasselbe hinausläuft - eine Topologie im Ring k[[T]] einführen.

(c) Die natürliche Topologie von k[[T]]

Bezeichne M das Ideal von k[[T]], welches aus den Reihen mit dem Absolutglied Null besteht. Es gilt offensichtlich

$$M = (T_1,...,T_n).$$

Die k-te Potenz M^k von M besteh gerade aus den Potenzreihen, deren Taylor-Polynome der Grade < k identisch Null sind.

Die Topologie von k[[T]] ist durch die Forderung gegeben, daß die Potenzen M^k eine Umgebungsbasis der Null bilden sollen. Mit anderen Worten, eine Folge

$$\{\phi_m\}_{m=1,2,..}$$

von Potenzreihen aus k[[T]] konvergiert genau dann gegen eine Potenzreihe ϕ, wenn der Grad der Anfangsform von

$$\phi_m - \phi$$

gegen ∞ geht für $m \to \infty$. In dieser Situation schreibt man

$$\phi_m \to \phi \text{ oder auch } \phi = \lim_{m\to\infty} \phi_m.$$

Es ist leicht einzusehen, mit dieser Topologie ist k[[T]] ein topologischer Ring, d.h. die Ringoperationen + und · sind stetig in dieser Topologie.

Die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} \phi_m$ mit $\phi_m \in k[[T]]$ <u>konvergiert</u> gegen $\phi \in k[[T]]$, wenn gilt

$$\sum_{m=0}^{n} \phi_m \to \phi \text{ für } n \to \infty.$$

(d) Das Bild von τ: $\mathcal{O}_{X,x} \to k[[T]]$

Das Bild $\tau(\mathcal{O}_{X,x})$ des lokalen Rings im regulären Punkt x liegt dicht in k[[T]].

Beweis. Seien $u_1,...,u_n$ ein reguläres Parametersystem von X in $x \in X$,

$$m_{X,x} = (u_1,...,u_n)$$

und τ: $\mathcal{O}_{X,x} \to k[[T]]$ die zugehörige Taylor-Entwicklung, d.h.

$$\tau(u_i) = T_i$$

für alle i. Für jedes Polynom $P \in k[T]$ gilt dann

$$\tau(P(u)) = P(T),$$

d.h. der Polynomring k[T] liegt vollständig im Bild von τ. Da jede Potenzreihe Limes einer Folge von Polynomen ist,, liegt k[T] bereits dicht in k[[T]]. Das Bild von τ liegt deshalb erst recht dicht.

QED.

Bemerkung

Der Beweis von Theorem 2 besteht darin, daß man zunächst die Eindeutigkeit der Zerlegung in Primfaktoren für den Potenzreihenring k[[T]] beweist. Dies ist eine ziemlich elementare Tatsache, die analog zum endsprechenden Ergebnis für Polynomerweiterungen ist. Einen vollständig vom übrigen Buch unabhängigen Beweis findet man zum Beispiel in [16, Teil 2, Chap. VII, §4].

(e) Reguläre Potenzreihen

Eine Potenzreihe ϕ heißt <u>regulär</u> bezüglich der Unbestimmten T_n, wenn die Anfangsform von ϕ ein Glied der Gestalt $c_m \cdot T_n^m$ mit $c_m \in k - \{0\}$ enthält.

Bemerkung

Eine lineare Transformation der $T_1,...,T_n$ induziert offensichtlich einen Automorphismus von k[[T]]. Insbesondere gibt es für jede von Null verschiedene Potenzreihe von k[[T]] einen Automorphismus des Potenzreihenrings, der die gegebene Potenzreihe in eine reguläre Potenzreihe überführt.

(f) Lemma: Vorbereitungssatz von Weierstraß

Sei $\phi \in k[[T]]$ eine reguläre Potenzreihe bezüglich T_n mit dem Anfangsgrad m. Dann gibt es eine Potenzreihe

$$\psi \in k[[T]]$$

mit einem von Null verschiedenen Absolutglied mit der Eigenschaft, daß das Produkt

$$\phi \cdot \psi$$

ein Polynom in T_n ist mit Koeffizienten aus $k[[T_1,...,T_{n-1}]]$, d.h.

$$\phi \cdot \psi = T_n^m + r_1(T')\cdot T_n^{m-1} + ... + r_m(T')$$

mit $T' := (T_1,...,T_{n-1})$.

Beweis. Siehe [16, II, page 145 bzw. page 174 der russischen Ausgabe].

Bemerkung

Die Einheiten von k[[T]] sind gerade die Potenzreihen mit von Null verschiedenen Absolutglied. Das liegt im wesentlichen einfach daran, daß $1-T_1$ umkehrbar ist,

$$(1-T_1)^{-1} = 1 + T_1 + T_1^2 + ...$$

Zum Beweis der Behauptung genügt es die folgende Aussage zu beweisen.

Vorbereitungssatz von Weierstraß II

Seien k ein Körper und

$$F(T_1,...,T_n)$$

eine nicht umkehrbare formale Potenzreihe über k (d.h. eine Nicht-Einheit in k[[T]]). Wir nehmen an, F enthält Glieder der Gestalt

$$a\cdot T_n^h \text{ mit } a\in k-\{0\}.$$

Bezeichne s ($\geq$1) den kleinsten der Exponenten h aller dieser Glieder von F. Dann gibt es zu jeder Potenzreihe

$$G(T_1,...,T_n) \in k[[T]]$$

eine eindeutigbestimmte Potenzreihe

$$U(T_1,...,T_n) \in k[[T]]$$

und eindeutig bestimmte Potenzreihen

$$R_i(T_1,...,T_{n-1}) \in k[[T']] \ (i=0,...,r-1)$$

mit

(1) $$G = U\cdot F + \sum_{i=0}^{r-1} R_i\cdot T_n^i .$$

Beweis von Theorem (f) mit Hilfe des Vorbereitungssatzes II. Wir wenden die zweite Formulierung des Vorbereitungssatzes auf das Polynom

$$G = - T_n^s$$

an und erhalten Polynome U und R_i mit

$$- T_n^s = U\cdot F + \sum_{i=0}^{r-1} R_i\cdot T_n^i .$$

d.h.

$$T_n^s + \sum_{i=0}^{r-1} R_i\cdot T_n^i = - U\cdot F.$$

Es reicht zu zeigen, U ist eine Einheit. Wir setzen $T_1 = ... = T_{n-1} = 0$ und erhalten auf der rechten Seite eine Potenzreihe in T_n mit einem Anfangsgrad $\geq$ s. Deshalb gilt

$$R_i(0,...,0) = 0$$

für jedes i, d.h. die R_i sind sämtlich Nicht-Einheiten., Gleichzeitig ergibt sich, $U(0,...,0,T_n)$ ist vom Anfangsgrad 0, also eine Einheit.

QED.

Bemerkung

Aus der Eindeutigkeitsaussage der zweiten Variante des Vorbereitungssatzes ergibt sich auch die Eindeutigkeit von ϕ und den r_i in der ursprünglichen Formulierung.

Beweis des Vorbereitungssatzes II. Für jede Potenzreihe $P \in k[[T]]$ bezeichne r(P) die Summe aller Glieder, die die Potenz T_n^s nicht teilen.und h(P) entstehe aus der Summe der übrigen Glieder durch Division durch T_n^s. Wir erhalten so zwei k-lineare Abbildungen

$$r: k[[T]] \to k[[T']] + k[[T']]\cdot T_n + ... + k[[T']]\cdot T_n^{s-1}$$

und

$$h: k[[T]] \to k[[T]]$$

mit

(2) $$P = r(P) + T_n^s\cdot h(P)$$

für jede Potenzreihe P. Weiter gilt:

(3) h(F) ist eine Einheit in k[[T]].

(4) Die Koeffizienten von r(F), auf gefaßt als Polynom in T_n, sind Nicht-Eiheiten in k[[T']].

1.Schritt. Es reicht zu zeigen, zu jedem G gibt es genau ein U mit h(G) = h(UF). Ist nämlich U eine Potenzreihe mit h(G) = h(UF) so gilt, weil h linear ist,

$$h(G-UF) = 0$$

also wegen (2)

$$G - UF = r(G-UF),$$

d.h. G - UF ist ein Polynom in T_n vom Grad $\leq$ s-1 und es gilt die Behauptung.

Ist umgekehrt die Behauptung richtig, so gilt h(G-UF) = 0, d.h. wegen der Linearität der Operation h gilt h(G) = h(UF).

2. Schritt. Es reicht zu zeigen, zu jedem G gibt es genau eine Potenzreihe U mit

(5) $$h(G) = h(Ur(F)) + U\cdot h(F).$$

Aus $F = r(F) + T_n^s \cdot h(F)$ erhalten wir durch Multiplikation mit U die Relation

$$UF = U\cdot r(F) + T_n^s \cdot Uh(F).$$

Die Relation $h(G) = h(UF)$ des ersten Schritts bekommt daher die Gestalt

$$h(G) = h(U\cdot r(F) + h(T_n^s \cdot Uh(F)) = h(U\cdot r(F)) + Uh(F).$$

<u>Bezeichnungen</u>

$V \quad := U\cdot h(F)$

$M \quad := -r(F)/h(F) \in M'\cdot k[[T]]$ (wegen (4)).

$M' \quad :=$ maximales Ideal von $k[[T']]$

<u>Bemerkung</u>

Da $h(F)$ eine Einheit ist, reicht es, anstelle von U die Potenzreihe V zu konstruieren.

Es gilt $U\cdot r(F) = - MV$. Die Relation (5) des zweiten Schritts ist damit äquivalent zu

(6) $\quad h(G) = - h(MV) + V,$

d.h. es reicht zu zeigen, zu jedem G gibt es genau ein V, so daß diese Relation besteht.

<u>Bezeichnung</u>

$$m(P) := h(MP)$$

für jede Potenzreihe P. Die Abbildung

$$m: k[[T]] \to k[[T]]$$

ist k-linear. Weiter gilt

(7) Liegen alle Koeffizienten der Potenzreihe P in T_n in M'^j, so liegen alle Koeffizienten von $m(P)$ in M'^{j+1}.

Mit den eingeführten Bezeichnungen bekommt Bedingung (6) die Gestalt

$$V = h(G) + m(V).$$

Da m k-linear ist, kann man diese Relation wiederholt in sich selbst einsetzen und erhält

$$\begin{aligned} V &= h(G) + m(h(G)) + m^2(V) \\ &= h(G) + m(h(G)) + m^2(h(G)) + ... + m^q(h(G)) + m^{q+1}(V). \end{aligned}$$

Damit ist

(8) $$V = \sum_{j=0}^{\infty} m^j(h(G)),$$

d.h. falls ein V, wie es gesucht wird, so hat es die Gestalt (8). Insbesondere ist V eindeutig bestimmt.

Man beachte, die Potenzreihe (8) ist wegen (7) konvergent. Wir haben noch zu zeigen, diese Potenzreihe genügt der Bedingung (6). Dazu schreiben wir

$$V = h(G) + m(h(G)) + m^2(h(G)) + ... + m^q(h(G)) + W_{q+1}$$

mit . $W_{q+1} \in M^{q+1}\cdot k[[T]]$.

Wegen der Linearität der Operation m folgt

$$V - h(G) - m(V) = W_{q+1} - m^{q+1}(h(G)) - m(W_{q+1}) \in M^{q+1}\cdot k[[T]]$$

mit anderen Worten die Potenzreihe

$$V - h(G) - m(V),$$

aufgefaßt als Potenzreihe in T_n hat Koeffizienten aus M^{q+1} mit q beliebig, d.h. die Anfangsgrade dieser Koeffizienten ist beliebig hoch. Dann müssen die Koeffizienten aber gleich Null sein und es gilt

$$V - h(G) - m(V) = 0.$$

Mit anderen Worten, Bedinung (6) ist erfüllt.

QED.

(g) Lemma: ZPE-Eigenschaft der Potenzreihenringe

k[[T]] ist ein ZPE-Ring.

Beweis. Lemma (f) bietet die Möglichkeit, die Behauptung durch Induktion nach der Zahl n der Ungestimmten zu beweisen. Man leitet dabei die ZPE-Eigenschaft von k[[T]] aus der ZPE-Eigenschaft des Polynomrings $k[[T']][T_n]$ ab, die sich aus der ZPE-Eigenschaft des Potenzreihenrings k[[T']] in n-1 Unbestimmten ergibt. Die Einzelheiten des findet man in [16, II, Chap. VII, §1, Th. 6]

QED.

(h) Beweis von 2.3.1(e) (Theorem 2).

Der Beweis für die Eindeutigkeit der Primzerlegung ganzer Zahlen basiert auf der Existenz des größten gemeinsamen Teilers. Dieser Beweis verallgemeinert sich auf den Fall beliebiger (kommutativer) Ringe mit 1 (in denen der größte gemeinsame Teiler existiert). Statt die Existenz des größten gemeinsamen Teilers zu beweisen, reicht es die Existenz des kleinsten gemeinsamen Vielfach nachzuweisen, denn

$$\mathrm{ggT}(a,b) = \frac{a\cdot b}{\mathrm{kgV}(a,b)}.$$

Nun ist die Relation $m = \mathrm{kgV}(a,b)$ äquivalent zu

$$(a) \cap (b) = (m).$$

Es reicht deshalb, wenn wir zeigen, im Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ist der Durchschnitt von je zwei Hauptidealen wieder ein Hauptideal. Wir können dabei die Tatsache benutzen, daß die entsprechende Aussage für den Potenzreihenring k[[T]] richtig ist.

Im folgenden identifizieren wir den Keim $f\in\mathcal{O}_{X,x}$ mit seiner Taylorentwicklung, d.h. wir betrachten $\mathcal{O}_{X,x}$ vermittels τ als Teilring von k[[T]],

$$\mathcal{O}_{X,x} \subseteq k[[T]].$$

Wir haben die Beziehungen zwischen den Idealen von $\mathcal{O}_{X,x}$ und k[[T]] zu beschreiben.

Für jedes Ideal I von $\mathcal{O}_{X,x}$ bezeichne

$$\bar{I} \subseteq k[[T]]$$

die Abschließung von I in k[[T]], d.h. die Menge der Potenzreihen, die als Limes von konvergenten Folgen aus I auftreten. Theorem 2 ergibt sich dann aus den folgenden Eigenschaften der Abschließung.

1) $\overline{I\cap J} = \bar{I} \cap \bar{J}$ für je zwei Ideale I und J von $\mathcal{O}_{X,x}$.

2) Das Ideal I von $\mathcal{O}_{X,x}$ ist genau dann ein Hauptideal, wenn $\bar{I}$ ein Hauptideal von k[[T]] ist.

Den Beweis dieser beiden Eigenschaften findet man in [16,II, Chap. VIII]. Wir beschränken uns hier auf eine Beweisskitze. Wir schreiben (in Anpassung an die dortige Terminologie)

$$A := \mathcal{O}_{X,x} \text{ und } \hat{A} := k[[T]].$$

Die grundlegende im folgenden benutzte Operation ist die Vervollständigung $\hat{E}$ eines Moduls E über einem lokalen noetherschen Ring A. Für jeden A-Modul E führt man eine Topologie ein, für welche die Teilmoduln der Gestalt

$$M^k E$$

eine Topologie-Basis von $0\in E$ bilden. Diese Topologie heißt <u>M-adische Topologie</u> von E. Man konstruiert einen topologischen $\hat{A}$-Modul $\hat{E}$, der den Modul E als dichte

Teilmenge enthält und in welchem jede Cauchy-Folge konvergent ist, d.h. für jede Folge $\{e_n\}$ in $\hat{E}$ mit

$$e_n - e_m \to 0$$

für $m,n \to \infty$ gibt es ein Element $e\in\hat{E}$ mit $e_n \to e$, d.h. der topologische Modul $\hat{E}$ ist vollständig.

Der Modul $\hat{E}$ wird dabei wie folgt konstruiert. Man setzt

$$\hat{E} := \{\{e_n\} \mid \{e_n\} \text{ ist Cauchy-Folge in } E\}/\{\{e_n\} \mid \{e_n\} \text{ ist Nullfolge in } E\}.$$

<u>Eigenschaften der Vervollständigung von E.</u>

1. Jede A-lineare Abbildung $f: E' \to E''$ von A-Moduln induziert genau eine $\hat{A}$-lineare Abbildung der Vervollständigungen $\hat{f}: \hat{E}' \to \hat{E}''$ (die auf E' mit f übereinstimmt).
2. Im Spezialfall $E = A$ ($= \mathcal{O}_{X,x}$) ist die Vervollständigung $\hat{E} = \hat{A}$ ($= k[[T]]$).
3. Ist $E = I$ ein Ideal von A, so ist $\hat{E} = \overline{I}$ gerade die Abschließung von I in $\hat{A}$.
4. Ist E ein endlich erzeugter A-Modul, so gilt $\hat{E} = E\cdot\hat{A}$, d.h. jedes Erzeugendensystem von E über A ist auch ein Erzeugendensystem von $\hat{E}$ über $\hat{A}$. (vgl. [16, Th. 5§2].
5. Für jede exakte Sequenz $E'\to E\to E''$ von endlich erzeugten A-Moduln ist die induzierte Sequenz $\hat{E}'\to \hat{E}\to\hat{E}''$ der Vervollständigungen ebenfalls exakt.

Der Beweis von 1) und 2) (und damit der Beweis des Satzes) ergibt sich aus den angeführten Eigenschaften der Vervollständigung von Moduln wie folgt.

Sei $I,J\subseteq A$ zwei Ideale des (noetherschen) Rings A. Auf Grund von Eigenschaft 4 gilt dann

3) $$\overline{I+J} = (I+J)\cdot \hat{A} = I\cdot\hat{A} + J\cdot\hat{A} = \overline{I} + \overline{J}$$

Betrachten wir die exakten Sequenzen

$$0 \to I\cap J \to J \to J/(I\cap J) \to 0$$
$$0 \to I \to I+J \to (I+J)/I \to 0$$

Wir gehen zu den Vervollständigungen über und erhalten die exakten Sequenzen

$$0 \to \overline{I\cap J} \to \overline{J} \to \overline{J/(I\cap J)} \to 0$$

$$0 \to \overline{I} \to \overline{I+J} \to \overline{(I+J)/I} \to 0.$$

Wegen $J/(I\cap J) = (I+J)/I$ gilt $\overline{J/(I\cap J)} = \overline{(I+J)/I}$, also

$$\overline{J}/\overline{I\cap J} = \overline{I+J}/\overline{I}.$$

Wegen 3) läßt sich die rechte Seite auch schreiben als $\overline{I+J}/\overline{I} = (\overline{I} + \overline{J})/\overline{I} = \overline{J}/(\overline{I}\cap\overline{J})$, d.h. es ist

$$\overline{J}/\overline{I\cap J} = \overline{J}/(\overline{I}\cap\overline{J}).$$

Dann gilt aber $\overline{I\cap J} = \overline{I}\cap\overline{J}$, d.h. Aussage 1) ist richtig.

Zum Beweis von Aussage 2) nehmen wir an, $\overline{I} = (f)$. Nach Eigenschaft 4 ist

$$I\cdot\hat{A} = \overline{I} = (f),$$

d.h.

(1) $$f = \sum_i f_i a_i \text{ mit } f_i\in I \text{ und } a_i\in\hat{A}.$$

Wegen $f_i\in I$ ist weiter

(2) $$f_i = f\cdot b_i \text{ mit } b_i \in \hat{A}.$$

Durch Einsetzen von (2) in (1) folgt $\sum_i a_i b_i = 1$, d.h.nicht alle b_i liegen in M, d.h. mindestens ein b_i ist eine Einheit in $\hat{A}$, d.h.

$$\bar{I} = (f_i)\cdot\hat{A}.$$

Aus Eigenschaft 5. ergibt sich damit aber $I = f_i A$.

QED.

4.4 Zur Konstruktion von birationalen Isomorphismen

4.4.1 Aufblasungen im projektiven Raum

(a) Vorbemerkung

Im vorigen Abschnitt haben wir gezeigt, ein birationaler Isomorphismus von glatten projektiven Kurven ist eine Isomorphismus. Für glatte projektive Varietäten großerer Dimension ist die analoge Aussage falsch. Zum Beispiel definiert die stereographische Projektion einen birationalen Isomorphismus einer nicht-entarteten Fläche zweiter Ordnung im $\mathbb{P}^3$ mit der projektiven Ebene, ohne ein Isomorphismus zu sein.[161]
In diesem Abschnitt wollen wir den einfachsten Typ eines birationalen Isomorphismus konstruieren und untersuchen, der kein Isomorphismus ist.

(b) Die Aufblasung des projektiven Raums in einem Punkt

Wir versehen die projektiven Räume $\mathbb{P}^N$ und $\mathbb{P}^{N-1}$ mit den projektiven Koordinaten x_i bzw. y_j ,

$$x = [x_0,...,x_N] \in \mathbb{P}^N$$

$$y = [y_1,...,y_N] \in \mathbb{P}^{N-1}$$

und betrachten die abgeschlossene Teilvarietät

$$\prod := \{(x,y)\in\mathbb{P}^N\times\mathbb{P}^{N-1} \mid x_i y_j - y_i x_j = 0 \text{ für } i,j = 1,...,N\}.$$

Die Einschränkung

$$\pi:\prod \to \mathbb{P}^N, (x,y) \mapsto x,$$

der Projektion auf den ersten Faktor heißt <u>Aufblasung</u> des $\mathbb{P}^N$ im Punkt

$$\xi := [1,0,...,0]$$

oder auch (in älterer Terminologie <u>σ-Prozeß</u> oder <u>monoidale Transformation</u>) und man schreibt auch[162]

---

[161] Nicht-entartet soll hier bedeuten, der quadratische Teil der Gleichung ist durch eine (symmetrische) Matrix maximalen Rangs gegeben. Die Mittelpunktsgleichung einer solchen Fläche ist eine Summe von Quadraten. Insbesondere sind je zwei solche Flächen isomorph. Ein Beispiel für eine solche Fläche haben wir bereits untersucht und wir haben gezeigt, sie ist isomorph zu $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$. Insbesondere gibt es auf solchen Flächen Scharen $\{pt\}\times\mathbb{P}^1$ von paarweise disjunkten rationalen Kurven, eine Eigenschaft, welche die projektive Ebene nicht besitzt: je zwei Kurven im $\mathbb{P}^2$ sind durch jeweils eine Gleichung definiert, haben also einen nicht-leeren Durchschnitt (der Durchschnitt einer Kurve mit einer Hyperfläche im projektiven Raum hat die Dimension Null, ist also nicht-leer).

[162] Bl = blowing up oder blowup.

$$Bl_\xi(\mathbb{P}^N) := \prod.$$

Der Punkt ξ heißt Zentrum der Aufblasung.

Bemerkungen

(i) Für jeden Punkt $x\in\mathbb{P}^N$, welcher vom Zentrum der Aufblasung verschieden ist,
$$x \neq \xi ,$$
besteht $\pi^{-1}(x)$ aus genau einem Punkt.

(ii) Die Aufblasung π induziert einen Isomorphismue
$$\prod - \pi^{-1}(\xi) \to \mathbb{P}^N - \{\xi\}$$
mit der Umkehrung
$$\rho:\mathbb{P}^N - \{\xi\} \to \prod - \pi^{-1}(\xi), [x_0,...,x_N] \mapsto ([x_0,...,x_N], [x_1,...,x_N]).$$

(iii) $\pi^{-1}(\xi) = \{\xi\}\times\mathbb{P}^{N-1}$.

(iv) Sei $g \subseteq \mathbb{P}^N$ eine Gerade durch ξ. Dann läßt sich die Einschränkung von ρ auf die punktierte Gerade
$$g - \{\xi\}$$
eindeutig zu einer regulären Abbildung
$$\rho|_g: g \to \prod$$
auf ganz g fortsetzen. Das Bild
$$(\rho|_g)(\xi) \in \pi^{-1}(\xi)$$
hängt von der Wahl der Geraden g ab und die Abbildung
$$\{\text{Gerade durch } \xi\} \to \pi^{-1}(\xi) , g \mapsto (\rho|_g)(\xi),$$
ist bijektiv.

(v) $\prod$ ist nicht-singulär.

(vi) $\prod$ ist irreduzibel.

Beweis. Zu (i). Auf Grund der definierenden Gleichungen von $\prod$ ist
$$z = (x',y') \in \pi^{-1}(x),$$
äquivalent zu
$$x' = x \text{ und } y'_i = \frac{y'_{i_0}}{x'_{i_0}} \cdot x'_i .$$
Dabei sei x_{i_0} irgendeine von Null verschiedene projektive Koordinate von x (welche wegen $x \neq \xi$ existiert). Der Punkt y' im projektiven Raum $\mathbb{P}^{N-1}$ ist somit durch x eindeutig festgelegt.

Zu (ii). Offensichtlich gilt $\rho\circ\pi = Id$ und $\pi\circ\rho = Id$. Man beachte, die Zuordnungsvorschrift für ρ liefert in ξ keinen wohldefinierten Punkt.

Zu (iii). Im Fall $x = \xi$ sind die definierenden Gleichungen von $\prod$ mit beliebigem y erfüllt.

Zu (iv). 1. Schritt. Die Geraden g durch ξ sind genau die Geraden mit den Gleichungen $x_j = \alpha_j\cdot x_i$ für $j = 0,...,N$.

Sei $\eta = [\alpha_0,...,\alpha_N]$ ein von $\xi = [1,0,...,0]$ verschiedener Punkt
$$x = [x_0,...,x_N]$$
der Geraden g. Jeder weitere Punkt von g hat dann die Gestalt
$$x = s\cdot\eta + t\cdot\xi \text{ mit } [s,t]\in\mathbb{P}^1,$$

d.h. es ist $x_0 = s\cdot\alpha_0 + t$ und

$$x_j = s\cdot\alpha_j \text{ für } j = 1,...,N.$$

Mindestens ein α_j ist von Null verschieden, sagen wir $\alpha_i \ne 0$. Dann können wir schreiben $s = x_i/\alpha_i$. O.B.d.A. sei $\alpha_i = 1$, d.h.

$$x_j = \alpha_j\cdot x_i \text{ für } j = 1,...,N$$

und $x_0 = \alpha_0\cdot x_i + t = (\alpha_0 + t/x_i)\cdot x_i$. Durch abändern von α_0 erreichen wir, daß g gerade die Gerade mit den Gleichungen

$$x_j = \alpha_j\cdot x_i \text{ für } j = 0,...,N$$

wird. Umgekehrt geht für jedes $[\alpha_0,...,\alpha_i=1,...,\alpha_N]\in\mathbb{P}^N$ die Gerade mit diesen Gleichungen durch den Punkt ξ.

<u>2. Schritt</u>. Die Fortsetzbarkeit der Einschränkung von ρ auf g.

Für $x = [x_0,...,x_N] \in g$, d.h. $x_j = \alpha_j\cdot x_i$ für $j=0,...,N$ gilt

$$\begin{aligned}\rho(x) &= (x, [x_1,...,x_N]) \\ &= (x, \alpha) \text{ mit } \alpha := [\alpha_0,...,\alpha_i=1,...,\alpha_N].\end{aligned}$$

Die zweite Koordinate des Bildes ist somit nur abhängig von g und nicht vom Punkt $x\in g$. Durch die Vorschrift

$$\rho(x) = (x, \alpha)$$

ist somit die gesuchte Fortsetzung auf ganz g definiert. Aus Stetigkeitsgründen ist dies die einzig mögliche reguläre Fortsetzung.

<u>3. Schritt</u>. Beweis der übrigen Aussagen von (iv).

Es gilt $\mathrm{Im}(\rho|_g) = g\times\{\alpha\}$ wobei $\alpha\in\mathbb{P}^{N-1}$ gerade die projektiven Koordinaten der Geraden g sind, aufgefaßt als Gerade in einem affinen Raum, dessen Ursprung gerade der Punkt ξ ist. Daraus ergeben sich die verbleibenen Aussagen von (iv).

<u>Zu (v)</u>. Weil $\prod - \pi^{-1}(\xi)$ isomorph ist zu $\mathbb{P}^N - \{\xi\}$ ist $\prod$ nicht-singulär in allen Punkten, die nicht üer dem Zentrum der Aufblasung liegen. Sei jetzt

$$z' = (x',y') \in \pi^{-1}(\xi),$$

d.h. $x' = \xi$. Wir schreiben $y' = [y'_0,...,y'_N]$. Mindestens eine projektive Koordinate von y' ist von Null verschieden und o.B.d.A. gleich 1, sagen wir die i-te.

Dann liegt z' in der affinen Umgebung

$$\{x_0 \ne 0\}\times\{y_i \ne 0\} \subseteq \mathbb{P}^N\times\mathbb{P}^{N-1}$$

und $\prod$ hat dort die affinen Gleichungen

$$x_iy_j - y_ix_j = 0 \text{ für } i,j = 1,...,N \text{ mit } x_i = y_i = 1,$$

d.h.

$$x_j = y_j \text{ für } j = 1, ... , i-1, i+1, ... , N.$$

Dies sind die Gleichungen eines linearen Unterraums, d.h. einer nicht-singulären Varietät.

<u>Zu (vi)</u>. Zumindest ist

$$\prod - \pi^{-1}(\xi)$$

irreduzibel (da isomorph ist zu $\mathbb{P}^N - \{x_0\}$). Damit ist aber auch die Abschließung

$$\overline{\prod - \pi^{-1}(\xi)}$$

irreduzibel. Es reicht zu zeigen, $\pi^{-1}(\xi)$ liegt ganz in dieser Abschließung. Wegen (iv) recht es zu zeigen, für jede Gerade g durch ξ gilt

$$(\rho|_g)(g) \subseteq \overline{\prod - \pi^{-1}(\xi)}$$

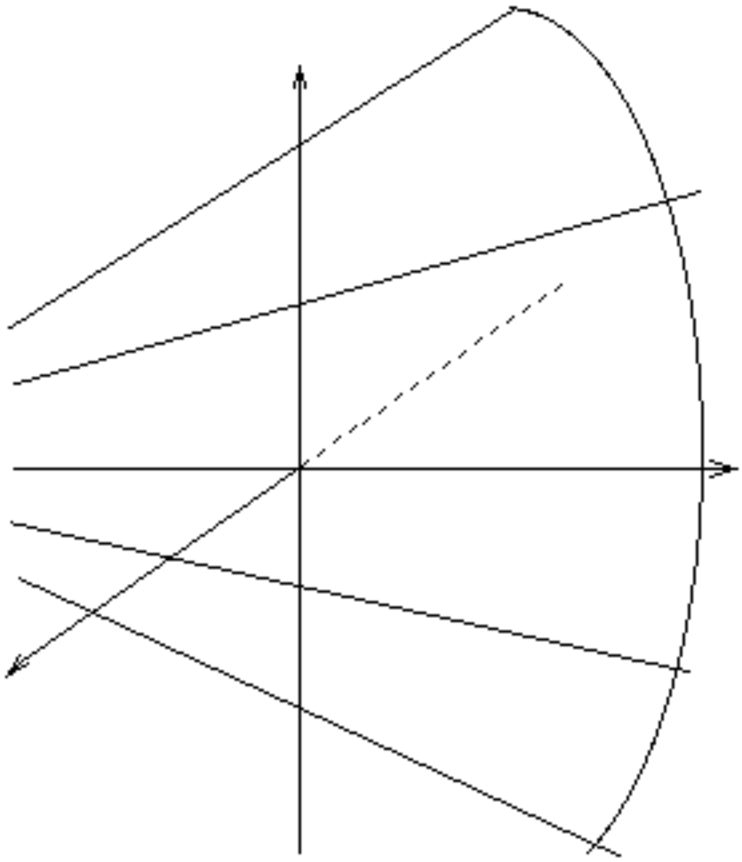
Nun ist aber $(\rho|_g)(g)$ gerade die Abschließung von $(\rho|_g)(g - \{\xi\})$ und es gilt nach Definition von ρ (vgl. (ii))

$$(\rho|_g)(g - \{\xi\}) = \rho(g - \{\xi\}) \subseteq \prod - \pi^{-1}(\xi).$$

QED.

Bemerkung

Im Fall N = 2 kann man sich die Aufblasung $\prod = Bl_\xi(\mathbb{P}^2) \to \mathbb{P}^2$ durch deren Wirkung auf die Geraden g durch x veranschaulichen. Die Kurve $\rho(g)$ schneidet die Gerade $\{\xi\}\times\mathbb{P}^1$ in einem Punkt, der sich in dem Maße verschiebt, wie sich die Gerade g um das Zentrum dreht. Die Fläche $\prod$ ähnelt daher der Windung einer Schraube.



4.4.2 Lokale Aufblasungen

(a) Vorbemerkung

Wir konstruieren jetzt für jede quasi-projektive Varietät X und jeden ihren nicht-singulären Punkte $\xi \in X$ eine Abbildung

$$\pi: Y = Bl_\xi(X) \to X,$$

die analog ist zur Aufblasung des projektiven Raums in einem Punkt. Wir beginnen mit einer Hilfskonstruktion.

(b) lokale Konstruktion

Seien X eine nicht-singuläre irreduzible quasi-projektive Varietät und $\xi \in X$ ein Punkt. Weiter seien

$$u_1,...,u_n \in \mathcal{O}_X(X)$$
reguläre Funktionen auf X mit folgenden Eigenschaften.

1. $V(u_1,...,u_n) = \{\xi\}$.
2. $u_1,...,u_n$ bilden ein reguläres Parametersystem von X in ξ.

Wir betrachten die folgende Teilvarietät von $X\times\mathbb{P}^{n-1}$.
$$Y := \{(x, [t_1,...,t_n]) \in X\times\mathbb{P}^{n-1} \mid u_i(x)t_j - u_j(x)t_i = 0 \text{ für } i,j = 1, ... , n \}$$
Die Einschränkung
$$Y \to X, (x,t) \mapsto x,$$
der Projektion auf den ersten Faktor auf Y heißt dann <u>lokale Aufblasung</u> von X im Punkt x und man schreibt
$$Bl_\xi(X) := Y.$$

Bemerkungen

(i) Diese Konstruktion ist nicht anwendbar auf den Fall, daß X eine projektive Varietät ist, denn dann gibt es auf X keine global definierten regulären Funktionen außer den Konstanten, also insbesondere keine Funktionen u_i , die den obigen Bedingungen genügen.

(ii) Die eben angegebene Defintion der Aufblasung ist somit keine Verallgemeinerung der früher angegebenen im Fall $X = \mathbb{P}^N$. Man erhält jedoch die erstere (lokale) aus der letzteren (globalen) auf folgende Weise. Sei
$$\pi: \prod \to \mathbb{P}^N$$
die (globale) Aufblasung des $\mathbb{P}^N$ in $\xi := [1,0,...,0]$. Wir setzen
$$X := \{x = [x_0,...,x_N] \in \mathbb{P}^N \mid x_0 \ne 0\}$$
$$Y := \pi^{-1}(X)$$
Dann ist die Einschränkung $Y \to X$ von π auf Y die (lokale) Aufblasung von X im Punkt ξ.

(iii) Die lokale Aufblasung
$$\pi: Y = Bl_\xi(X) \to X$$
induziert einen Isomorphismus
$$Y - \pi^{-1}(\xi) \to X - \{\xi\}.$$
Gezeigt wird dies auf genau dieselbe Weise wie im Fall der globalen Aufblasung des $\mathbb{P}^N$.

(iv) Im folgenden wollen wir Funktionen $u_1,...,u_n \in \mathcal{O}_X(X)$, die den obigen Bedingungen 1 und 2 genügen (eventuell, nachdem man X durch eine Umgebung von ξ ersetzt hat), <u>lokale Koordinaten</u> von X in ξ nennen.

Da die u_j in $\mathcal{O}_{X,x}$ das maximalen Ideal erzeugen, kann man X so durch eine affine Umgebung von ξ ersetzen, daß das Ideal
$$I(\{\xi\}) \subseteq k[X]$$
des Punktes ξ in k[X] ebenfalls von den u_j erzeugt wird.

(v) Der Begriff ‘lokale Koordinaten’ ist mit Vorsicht zu verwenden. Im allgemeinen kann man nämlich durch Übergang zu einer affinen Umgebung von ξ nicht erreichen, daß die u_j den affinen Koordinatenring erzeugen,
$$k[X] \ne k[u_1,...,u_n],$$

d.h. die u_j definieren im allgemeinen keine affine Einbettung einer Umgebung von ξ, die diese Umgebung mit einer offenen Menge des $\mathbb{A}^n$ identifiziert[163]. Lokale Koordinaten wie oben definiert sind also keine Koordinaten im klassischen Sinne.

(c) Glattheit der lokalen Aufblasung

Unter den Bedingungen von (b) ist die lokale Aufblasung Y von X im Punkt $\xi \in X$ irreduzibel und glatt.

Beweis. Beweis der Irreduzibilität. Es gilt

$$\begin{aligned} Y &= (Y - \pi^{-1}(\xi)) \cup \pi^{-1}(\xi) \\ &= (Y - \pi^{-1}(\xi)) \cup \{\xi\}\times\mathbb{P}^{n-1}. \end{aligned}$$

Weil $Y - \pi^{-1}(\xi)$ isomorph ist zu $X - \{\xi\}$, ist Y entweder irreduzibel und gleich der Abschließung von $Y - \pi^{-1}(\xi)$ oder es gibt noch eine weitere Komponente, die isomorph ist zu $\mathbb{P}^{n-1}$. Im zweiten Fall schneiden sich die beiden Komponenten, denn andernfalls wäre $Y - \pi^{-1}(\xi)$ abgeschlossen und hätte damit ein abgeschlossenes Bild $X - \{\xi\}$ in X, was nicht der Fall ist. Sei also x ein gemeinsamer Punkt der beiden Komponenten. Dann ist

$$Y - \pi^{-1}(\xi)$$

eine offene Umgebung dieses Punktes, die nicht-singulär ist (weil isomorph zu $X - \{\xi\}$). Dies widerspricht der Tatsache, daß ein nicht-singulärer Punkt nur auf einer Komponente liegen kann. Wir haben damit den zweiten Fall ausgeschlossen. Mit anderen Worten Y ist irreduzibel.

Beweis der Glattheit. Weil $Y - \pi^{-1}(\xi)$ isomorph ist zu $X - \{\xi\}$, ist Y in jedem Punkt, der nicht über dem Zentrum liegt, glatt. Sei jetzt

$$\eta = (\xi,[\eta_1,...,\eta_n])\in\pi^{-1}(\xi).$$

ein Punkt über dem Zentrum. Wir haben zu zeigen, Y ist nicht-singulär in η. Wir wählen ein i mit

$$\eta_i \ne 0.$$

Der Punkt η liegt dann in einer affinen Umgebung mit den affinen Koordinaten

$$x_j \text{ und } s_j = \eta_j/\eta_i$$

wobei die x_j irgendwelche affinen Koordinaten auf X in einer Umgebung von ξ bezeichnen sollen. Die Varietät Y hat dort die Gleichungen[164]

$$u_j = u_i s_j \quad (j=1,...,n,\ j\ne i).$$

Das Ideal des Punktes η hat damit die Gestalt

$$\begin{aligned} m_{Y,y} &= (u_1-u_1(\eta),...,u_n-u_n(\eta),\ s_1-s_1(\eta),...,s_n- s_n(\eta)) \\ &= (s_1-s_1(\eta),...,u_i-u_i(\eta),...s_n- s_n(\eta)). \end{aligned}$$

Insbesondere wird dieses Ideal von n Elementen erzeugt, d.h. es gilt

$$\dim T_\eta(Y) \le n = \dim X - \{\xi\} = \dim Y - \pi^{-1}(\xi) \le \dim Y.$$

Also ist Y nicht-singulär im Punkt η.

QED.

---

[163] Die Existenz einer solchen Einbettung hätte zur Folge, daß X (bzw. die Komponente von X durch ξ) birational ist. Das ist eher selten der Fall: durch Polynome definierte implizite Funktionen sind im allgemeinen nicht mehr polynomial.

[164] Um die Bezeichnungen möglichst einfacht zu halten, verwenden wir für die von X auf $X\times\mathbb{P}^{n-1}$ (entlang der ersten Projektion) angehobenen Funktionen dieselben Symbole wie für die ursprünglichen Funktione selbst.

(d) Unabhängigkeit der lokalen Aufblasung von der Wahl des Parametersystems
Sei unter den Bedingungen von (b) ein weiteres System von 'lokalen Koordinaten'

$$u'_1,...,u'_n \in \mathcal{O}_X(X)$$

gegeben, d.h. die Funktionen u'_j sollen ebenfalls den beiden Bedingungen von (b) genügen. Sei weiter

$$Y' := \{(x, [t'_1,...,t'_n]) \in X\times\mathbb{P}^{n-1} \mid u'_i(x)t'_j - u'_j(x)t'_i = 0 \text{ für } i,j = 1, ... , n \}$$

die mit Hilfe der u'_j definierte lokale Aufblasung von X in ξ und

$$\pi': Y' \to X$$

die Einschränkung der Projektion auf den ersten Faktor. Dann gibt es einen Isomorphismus φ: $Y \to Y'$ derart, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & Y' \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ X & = & X \end{array}$$

Beweis. Wir betrachten die rationalen Abbildungen

$$\varphi: Y \dashrightarrow Y', ([x],[t]) \mapsto ([x], [u'_1(x),...,u'_n(x)])$$

$$\psi: Y' \dashrightarrow Y, ([x],[t']) \mapsto ([x], [u_1(x),...,u_n(x)]).$$

Man beachte, für jeden Punkt $([x],[t])\in Y$, in welchem φ definiert ist, gilt trivialerweise

$$u'_i(x)u'_j(x) - u'_j(x)u'_i(x) = 0 \text{ für } i,j = 1, ... , n,$$

d.h. der Bildpunkt liegt in Y'. Analog liegt für jeden Punkt von Y', in welchem ψ definiert ist, der Bildpunkt in Y,

$$u_i(x)u_j(x) - u_j(x)u_i(x) = 0 \text{ für } i,j = 1, ... , n.$$

Da die u_j bzw. u'_j den Bedingungen 1 von (b) genügen, d.h. die einzigen gemeinsamen Nullstellen liegen über dem Zentrum, so gilt für die Definitionsbereiche von φ bzw. ψ,

$$Y - \pi^{-1}(\xi) \subseteq \mathrm{Def}(\varphi)$$
$$Y' - \pi'^{-1}(\xi) \subseteq \mathrm{Def}(\psi).$$

Direkt aus den Definitonen lesen wir ab, φ und ψ sind zueinander invers.[165] Es reicht zu zeigen, φ und ψ lassen sich auf die ganze projektive Varietät Y bzw. Y' regulär fortsetzen. Aus Symmetriegründen reicht es, dies für φ zu beweisen. Sei

$$U_i := \{y\in Y \mid t_i(y) \ne 0 \}.$$

Es reicht zu zeigen, für jedes vorgegebene i läßt sich φ auf U_i fortsetzen.

Die u_j erzeugen in $\mathcal{O}_{X,\xi}$ dasselbe Ideal wie die u'_j (nämlich das maximale Ideal). Es gibt also $h_{\iota j}\in\mathcal{O}_{X,\xi}$ mit

(1) $$u'_\iota = \sum_{j=1}^{n} h_{\iota j}u_j$$

Die lineare Abbildung mit den Koeffizienten $h_{\iota j}$ induziert auf $m_{X,\xi}/m^2_{X,\xi}$ einen Basiswechsel. Es gilt also

(2) $$\det(h_{\iota j}(\xi)) \ne 0.$$

Wir heben die Relation (1) entlang der Aufblasung π auf U_i an und erhalten

---

[165] φ und ψ lassen die erste Koordinate [x] von ([x],[t]) unverändert. Außerdem ist für Punkte, die nicht über dem Zentrum liegen, die zweite Koordinate durch die erste festgelegt.

$$u'_l \circ\pi = \sum_{j=1}^{n} h_{lj}\circ\pi\cdot u_j\circ\pi .$$

Nun bilden die $s_j := (u_j/u_i)\circ\pi$ auf U_i ein System affiner Koordinaten (zusammen mit den x_j). Es gilt

$$u'_l \circ\pi = (\sum_{j=1}^{n} h_{lj}\circ\pi\cdot s_j)\cdot u_i\circ\pi = g_l\cdot u_i\circ\pi$$

mit

(3) $$g_l = \sum_{j=1}^{n} h_{lj}\circ\pi\cdot s_j.$$

Die g_l sind auf U_i zu den $u'_l\circ\pi$ proportional, d.h. wir können auf U_i

$$\varphi([x], [t]) = ([x], [g_1,...,g_n]).$$

setzen. Es reicht zu zeigen, in jedem Punkt von $\pi^{-1}(\xi)\cap U_i$ ist mindestens ein g_l von Null verschieden. Angenommen, es gilb einen Punkt $\eta\in\pi^{-1}(\xi)\cap U_i$ mit

$$g_l(\eta) = 0$$

für alle l. Aus (3) ergibt sich

$$0 = \sum_{j=1}^{n} h_{lj}(\xi)\cdot s_j(\eta)$$

für $l = 1,..., n$. Dies ist ein lineares homogenes Gleichungssystem für die $s_j(\eta)$. Wegen (2) hat es nur die triviale Lösung. Dies steht aber im Widerspruch zu $s_i(\eta) = 1$. Die Abbildung φ läßt sich also auf die gesamte Faser fortsetzen.
QED.

4.4.3. Das Verhalten von Teilvarietäten bei Aufblasungen

(a) Theorem 1: Das vollständige Urbild einer Teilvarietät

Seien X eine echte[166] quasi-projektive Teilvarietät des $\mathbb{P}^N$ und

$$\pi: \prod \to \mathbb{P}^N$$

die (globale) Aufblasung des $\mathbb{P}^N$ im Punkt $\xi = [1,0,...,0]$.
Das Zentrum ξ der Aufblasung sei ein nicht-singulärer Punkt von X.

Dann ist das vollständige Urbild von X bei π reduzibel und besteht aus zwei irreduziblen Komponenten,

(1) $$\pi^{-1}(X) = \tilde{X} \cup \{\xi\}\times\mathbb{P}^{N-1}.$$

Die Einschränkung

$$\pi|_{\tilde{X}} : \tilde{X} \to X$$

ist in den Punkten

$$\tilde{x} \notin \pi^{-1}(\xi),$$

[166] d.h. $X \neq \mathbb{P}^N$.

die nicht über dem Zentrum liegen, ein lokaler Isomorphismus und in den Punkten über dem Zentrum lokal isomorph zur (lokalen) Aufblasung von X in ξ.

Beweis. Wir definieren $\tilde{X}$ als die Abschließung des Urbildes von X - $\{\xi\}$ in $\pi^{-1}(X)$,

$$\tilde{X} := \overline{\pi^{-1}(X-\{\xi\})}.$$

Nun ist π außerhalb von $\pi^{-1}(\xi)$ ein Isomorphismu, d.h. $\pi^{-1}(X - \{\xi\})$ ist isomorph zur Varietät X - $\{\xi\}$,

$$\pi: \pi^{-1}(X - \{\xi\}) \xrightarrow{\cong} X - \{\xi\}$$

Insbesondere ist $\pi^{-1}(X - \{\xi\})$ irreduzibel, d.h. die Abschließung $\tilde{X}$ ist irreduzibel.
Beweisen wir (1). Es gilt

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(X) &= \pi^{-1}(X-\{\xi\}) \cup \pi^{-1}(\xi) \\ &= \pi^{-1}(X-\{\xi\}) \cup \{\xi\}\times\mathbb{P}^{N-1} \\ &\subseteq \tilde{X} \cup \{\xi\}\times\mathbb{P}^{N-1} \end{aligned}$$

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion reicht es zu zeigen,

$$\pi^{-1}(X) \supseteq \tilde{X}.$$

Das ist aber trivialerweise der Fall, da $\tilde{X}$ nach Definition die Abschließung von

$$\pi^{-1}(X-\{\xi\})$$

in $\pi^{-1}(X)$ ist. Damit gilt (1). Beide Mengen auf der rechten Seite von (1) sind irreduzibel. Wir haben noch zu zeigen, daß sie nicht ineinander enthalten sind. Nach Konstruktion enthält $\tilde{X}$ Punkte, die nicht über dem Zentrum liegen, d.h. $\tilde{X}$ ist nicht in $\{\xi\}\times\mathbb{P}^{N-1}$ enthalten. Wäre $\{\xi\}\times\mathbb{P}^{N-1}$ in $\tilde{X}$ enthalten, so wäre

$$(\pi|_{\tilde{X}})^{-1}(\xi) = \tilde{X}\cap\{\xi\}\times\mathbb{P}^{N-1} = \{\xi\}\times\mathbb{P}^{N-1},$$

d.h. die Faser von $\pi|_{\tilde{X}}$ über ξ wäre irreduzibel von der Dimension N-1. Insbesondere könnte $\pi|_{\tilde{X}}$ in den Punkten über ξ nicht lokal isomorph zur (lokalen) Aufblasung von X in ξ sein[167].
Es reicht also, die angegebenen Eigenschaften der Einschränkung

$$\pi|_{\tilde{X}} : \tilde{X} \to X$$

nachzuweisen. Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Liegt $\tilde{x}$ nicht über dem Zentrum ξ, so ist

$$\pi^{-1}(X-\{\xi\}) \subseteq \tilde{X}$$

ein offene Umgebung von $\tilde{x}$, welche durch π isomorph auf X - $\{\xi\}$ ahgebildet wird. Wir haben noch den Fall zu betrachten, daß $\tilde{x}$ über dem Zentrum ξ liegt.
Dazu benutzen wir die Tatsache, daß die Aufblasung

$$\pi: \prod \to \mathbb{P}^N$$

über einer Umgebung von ξ isomorph ist zur lokalen Aufblasung mit dem Zentrum ξ und daß außerdem die lokalen Aufblasungen nicht von der Wahl der 'lokalen Koordinaten' abhängen.
Wir wählen lokale Koordinaten (vgl. Bemerkungen (iv) und (v) von 2.4.2 (b))

$$u_1,\dots,u_N$$

im Punkt $\xi\in\mathbb{P}^N$ derart, daß X in einer Umgebung von ξ die lokalen Gleichungen

---

[167] deren Faser ist irreduzibel von der Dimension dim X - 1 < dim $\mathbb{P}^N$ - 1 = N-1.

(2) $$u_{n+1} = \ldots = u_N = 0$$
besitzt[168] und die Funktionen $u_1,\ldots,u_n$ ein System von lokalen Koordinaten von X in ξ bilden. Solche lokalen Koordinaten existieren nach 2.3.2(b).[169]
Bezeichne U eine affine Umgebung von ξ derart, daß u_j regulär sind auf U, als einzige gemeinsame Nullstelle in U den Punkt ξ besitzen und X auf U die lokalen Gleichungen (2) hat. Wir können annehmen,
$$X = \{x\in U \mid u_{n+1}(x)=\ldots=u_N(x)= 0 \}.$$
Außerdem können wir U so klein wählen, daß
$$X \text{ nicht-singulär und irreduzibel}$$
ist.
Bezeichne
$$\tilde{U} \to U$$
die mit Hilfe der u_j definierte lokale Aufblasung von U mit dem Zentrum ξ. Nach 2.4.2 (b) können wir diese Abbildung identifizieren mit der durch π induzierten Abbildung
$$\pi_U := \pi|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \to U.$$
Mit dieser Identifizierung gilt
$$\begin{aligned}\pi_U^{-1}(X - \{\xi\}) &= \{ ([x],[t])\in\tilde{U} \mid u_{n+1}(x) = \ldots = u_N(x) = 0, [x] \neq \xi\}\\ &= \{([x],[t])\in U\times\mathbb{P}^N \mid [x] \neq \xi, u_{n+1}(x)=\ldots=u_N(x)= 0, u_i(x)\cdot t_j=u_j(x)\cdot t_i \ i,j=1,\ldots,N\}\\ &= \{([x],[t])\in X\times\mathbb{P}^N \mid [x] \neq \xi, u_i(x)\cdot t_j=u_j(x)\cdot t_i \ i,j=1,\ldots,N\}\end{aligned}$$
Die Bedingung $[x] \neq \xi$ ist äquivalent zu $u_j(x) \neq 0$ für ein j. Wegen $u_i(x)\cdot t_j=u_j(x)\cdot t_i$ gilt dann aber mit $u_i(x) = 0$ auch $t_i = 0$ für $i = n+1, \ldots, N$. Wir schreiben
$$\mathbb{P}^n := \{[t] \in \mathbb{P}^N \mid t_{n+1} =\ldots=t_N = 0\}$$
und erhalten damit
$$\begin{aligned}&\pi^{-1}(X - \{\xi\}) \cap \tilde{U}\\ &\quad= \pi_U^{-1}(X - \{\xi\})\\ &\quad= \{([x],[t])\in X\times\mathbb{P}^n \mid [x] \neq \xi, u_i(x)\cdot t_j=u_j(x)\cdot t_i \ i,j=1,\ldots n \}\\ &\quad= \{([x],[t])\in X\times\mathbb{P}^n \mid u_i(x)\cdot t_j=u_j(x)\cdot t_i \ i,j=1,\ldots n; \text{ ein } u_i(x)\neq 0 \}\\ &\quad= \{([x],[t])\in X\times\mathbb{P}^n \mid u_i(x)\cdot t_j=u_j(x)\cdot t_i \ i,j=1,\ldots n\} - \cup_{j=1}^n V(u_j)\\ &\quad= X' - \cup_{j=1}^n V(u_j)\end{aligned}$$
mit
$$X' := \{([x],[t])\in X\times\mathbb{P}^n \mid u_i(x)\cdot t_j=u_j(x)\cdot t_i \ i,j=1,\ldots n\}.$$

---

[168] d.h. in der betrachteten Umgebung erzeugen die $u_{n+1}, \ldots, u_N$ das Ideal von X.

[169] Durch den zitierten Satz wird die Existenz eine lokalen Parametersystems der angegeben Art sichergestellt, d.h. die $u_1,\ldots,u_N$ bzw. $u_1,\ldots,u_n$ erzeugen das maximale Ideal des lokalen Rings von $\mathbb{P}^N$ bzw. X in ξ. In einer affinen Umgebung von ξ erzeugen sie also dasselbe Ideal wie die entsprechenen Koordinatenfunktionen.

Mit anderen Worten, X' ist 'die' lokale Aufblasung von X im Punkt ξ und als solche nicht-singulär und irreduzibel. Durch die Gleichungen $u_j = 0$ sind auf X Hyperflächen, also echte Teilmengen definiert, d.h. die $V(u_j)$ sind echte Teilmengen der irreduziblen Menge X' und damit nirgends dicht. Wir gehen zu den Abschließungen (in $\tilde{U}$) über und erhalten

$$\tilde{X} \cap \tilde{U} = \overline{\pi^{-1}(X-\{\xi\})} \cap \tilde{U} = X'.$$

Mit anderen Worten, die Punkte über dem Zentrum besitzen eine Umgebung, auf welcher $\pi|\tilde{X}$ isomorph ist zur lokalen Aufblasung von X im Punkt ξ.
QED.

(b) Definition: Aufblasung einer Varität in einem Punkt

Seien $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine quasi-projektive Varietät, und $\xi \in X$ ein nicht-singulärer Punkt. Die Varietät $\tilde{X}$ im obigen Satz (a) zusammen mit der natürlichen Abbildung

$$\pi: \tilde{X} \to X$$

heißt dann Aufblasung von X im Punkt ξ. Bezeichnung:

$$Bl_\xi(X) := \tilde{X}.$$

Bemerkung
Die Aufblasung von X im nicht-singulären Punkt ξ hängt bis auf natürliche Isomorphie nicht von der Wahl der Einbettung von X in einen projektiven Raum ab. Ist nämlich eine zweite Einbettung

$$X \subseteq \mathbb{P}^{N'}$$

Einbettung gegeben (d.h. ein Isomorphismus mit einer quasi-projektiven Teilvarietät des projektiven Raumes) und ist

$$\pi': \tilde{X}' \to X$$

die zugehörige Aufblasung, so gibt es, wie eben gezeigt (vgl. (b)) eine offene Umgebung U von ξ derart, daß sowohl

$$\pi^{-1}(U) \to U$$

also auch

$$\pi'^{-1}(U) \to U$$

isomorph sind zur lokalen Aufblasung von U in ξ,[170] Es gibt also einen Isomorphismus

$$\alpha: \pi^{-1}(U) \to \pi'^{-1}(U),$$

für welchen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\alpha} & \pi'^{-1}(U) \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ X & = & X \end{array}$$

kommutativ wird. Da π und π' außerhalb der Fasern über dem Zentrum Isomorphismen sind, hat man außerdem einen Isomoprhismus

$$\beta: \pi^{-1}(X - \{\xi\} \to \pi'^{-1}(X - \{\xi\},$$

für welchen das analog Diagramm kommutiv ist. Diese beiden Isomorphismen stimmen offensichtlich in den gemeinsamen Punkten ihrer Definitionsbereiche überein. Sie verheften sich also zu einen Isomorphismus

$$\gamma: \tilde{X} \to \tilde{X},'$$

für welchen das Diagramm

---

[170] Zunächst gibt es für π und π' jeweils eine eigenen Umgebung, für die das gilt. Der Durchschnitt dieser beiden Ungebung ist dann eine Umgebung der behaupteten Art.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{X}' \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ X & = & X \end{array}$$

kommutativ ist. Auf Grund der Kommutativität dieses Diagramms ist γ auf $\pi^{-1}(X-\{\xi\})$ eindeutig bestimmt. Da diese Menge dicht liegt in $\tilde{X}$ ist damit aber γ überall eindeutig festgelegt.

(c) Der Koordinatenring von $Bl_\xi(\mathbb{A}^N)$

Es gilt für jeden Punkt ξ des affinen Raumes

(1) $$k[Bl_\xi(\mathbb{A}^N)] \cong \oplus_{n=0}^{\infty} I(\{\xi\})^n.$$

Bemerkungen

(i) Der angegebene Ring ist kein affiner Koordinatenring. $Bl_\xi(\mathbb{A}^N)$ ist eine abgeschlossene Teilvarietät des Produktraums $\mathbb{A}^N\times\mathbb{P}^{N-1}$. Der zugehörige Koordinatenring ist somit weder affin noch projektiv, sondern wird von Koordinaten erzeugt, die zum Teil affin sind und zum Teil projektiv.[171]

(ii) Die direkte Summe auf der rechten Seite besitzt die Struktur einer graduierten Algebra über $k[\mathbb{A}^N]$, deren n-ter homogener Bestandteil die n-te Potenz von $I(\{\xi\})$ ist. Das Produkt von
$$\alpha\in I(\{\xi\})^{n'} \text{ und } \beta\in I(\{\xi\})^{n''}$$
ist vom Grad n'+n" und als Element von $I(\{\xi\})^{n'+n''}$ gerade das gewöhnliche in $k[\mathbb{A}^N]$ gebildete Produkt.

Beweis von (1). Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen,
$$\xi = (0,...,0)\in\mathbb{A}^N$$
ist der Urspruing. Wir schreiben

$$\begin{aligned} k[\mathbb{A}^N] &= k[T],\ T = (T_1,...,T_N),\\ k[\mathbb{P}^{N-1}] &= k[S],\ S = (S_1,...,S_N),\\ k[\mathbb{A}^N\times\mathbb{P}^{N-1}] &= k[T,S].\\ I &= I(\{\xi\}) = (T)\ (\subseteq k[\mathbb{A}^N]), \end{aligned}$$

und betrachten die additive Abbildung

(2) $$k[T,S] = \oplus_{n=0}^{\infty} \oplus_{|\nu|=n} k[T]S^\nu \to \oplus_{n=0}^{\infty} I^n,\ p(T)S^\nu \mapsto p(T)T^\nu\ (\in I^{|\nu|}),$$

die jedes Monom
$$p(T)S^\nu = p(T)S_1^{\nu_1}\cdot...\cdot S_N^{\nu_N}$$
in den S_i mit Koeffizienten $p(T)\in k[T]$ abbildet in das Element
$$p(T)T^{|\nu|} = p(T)T^\nu \in I^{|\nu|} = I^{\nu_1+...+\nu_N}$$

---

[171] Als System von affinen Koordinaten kann man die Verpflanzungen der affinen Koordinaten des $\mathbb{A}^N$ entlang π: $Bl_\xi(\mathbb{A}^N) \to \mathbb{A}^N$ benutzen und als System von projektiven Koordinaten die Verpflanzungen der proejtiven Koordinaten des $\mathbb{P}^{N-1}$ entlang der Projektion $Bl_\xi(\mathbb{A}^N) \to \mathbb{P}^{N-1}$ auf den zweiten Faktor.

des n-ten graduierten Bestandteils.
Die Abbildung (2) ist offensichtlich k[T]-linear und sie überführt die homogenen Bestandteile des Grades n in sich, wenn man

$$k[T,S] = k[T][S]$$

als Polynomring in den S allein auffaßt (über k[T]) mit mit der von den S kommenden Graduierung versieht.
Die Abbildung ist außerdem surjektiv.
Die Multiplikation des Rings rechts ist gerade so definiert (siehe Bemerkung (ii)), daß diese Abbildung ein Ringhomomorphismus ist.
Außerdem liegen alle Polynome der Gestalt

(3) $$T_iS_j - T_jS_i$$

im Kern der Abbildung (2). Die Abbildung faktorisiert sich also über den Faktorring nach diesen Polynomen. Wir erhalten damit eine Surjektion

$$k[Bl_\xi(\mathbb{A}^N)] \twoheadrightarrow \oplus_{n=0}^{\infty} I^n$$

und es reicht, die Injektivität dieser Abbilduing zu beweisen.
Mit anderen Worten, es reicht zu zeigen, der Kern der Abbildung (2) wird von den Polynomen der Gestalt (3) erzeugt.
Betrachten wir den n-ten homogenen Bestandteil

(4) $$\oplus_{|\nu|=n} k[T]S^\nu \to I^n,\ p(T)S^\nu \mapsto p(T)T^\nu\ (\in I^{|\nu|}),$$

der Abbildung (2). Dies ist eine k[T]-lineare Surjektion. Wir haben zu zeigen, ihr Kern besteht aus Linearkombinationen von Polynomen der Gestalt (3).

Zum Beweis versehen wir Definitions- und Bildmodul mit der Struktur eines multigradieren Moduls bezüglich der Gruppe

$$G = \mathbb{Z}^N.$$

Genauer, wir schreiben

$$k[T] = \oplus_{\nu\in G} k\cdot T^\nu$$

mit $T^\nu = T_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot T_N^{\nu_N}$ für $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$. Der Polynomring ist bezüglich dieser Zerlegung ein G-gradierter Ring und die Potenzen I^n von I werden von homogenen Elementen bezüglich dieser Graduierung erzeugt, d.h. die I^n sind G-graduierte k[T]-Moduln.
Analog besitzt der Definitionsbereich von (4) die Struktur eines G-graduierten k[T]-Moduls bei der der homogenen Bestandteil des Multigrades $d\in G$ gerade

$$\oplus_{|\nu|=n} k\cdot T^{d-\nu}S^\nu$$

ist. Dabei sei $T^{d-\varpi} = 0$ falls das N-Tupel $d-\varpi$ eine negative Koordinate besitzt. Die Abbildung (4) ist mit den so eingeführten Multigraduierungen eine k[T]-lineare Abbildung von G-graduierten k[T]-Moduln. Ihr Kern wird also von homogenen Elementen erzeugt, d.h. von Elementen der Gestalt

(5) $$\sum_{|\nu|=n} c_\nu\cdot T^{d-\nu}S^\nu,\ c_\nu\in k.$$

Das Bild eines solchen Element bei (4) ist $(\sum_{|\nu|=n} c_\nu\cdot)T^d$, d.h. das Element liegt genau dann im Kern, wenn die Summe seiner Koeffizienten Null ist,

(6) $$\sum_{|\nu|=n} c_\nu = 0.$$

Es reicht also zu zeigen, ist die Summe der Koeffizienten des Polynoms (5) gleich Null, so ist dieses Polynom eine Linearkombination von Polynomen der Gestalt (3).

Bezeichne

(7) $$\sigma_1, \dots , \sigma_M$$

die Potenzprodukte des Multigrades d in S und T in irgendeiner Anordnung. Das Polynom (5) kann man dann in der Gestalt schreiben.

$$\sum_{i=1}^{M} c_i\sigma_i \text{ mit } \sum_{i=1}^{M} c_i = 0$$

schreiben, und es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{M} c_i\sigma_i &= \sum_{i=1}^{M-1} c_i\sigma_i + c_M\sigma_M\\ &= \sum_{i=1}^{M-1} c_i\sigma_i - (\sum_{i=1}^{M-1} c_i)\sigma_M\\ &= \sum_{i=1}^{M-1} c_i (\sigma_i - \sigma_M)\end{aligned}$$

d.h., (5) ist eine Linearkombination von Differenzen von Potenzprodukten des Multigrades d. Es reicht also zu zeigen, jede Differenz von Potenzprodukten des Multigrades d ist Linearkombination von Polynomen der Gestalt (3).

Zum Beweis ordnen wir die Menge der Potenzprodukte $T^\mu S^\nu$ des Multigrades d lexikographisch:bezüglich der Exponenten, d.h. es sei

$$T^\mu S^\nu < T^{\mu'} S^{\nu'}$$

genau dann, wenn die Potenzproduke verschieden sind und die erste von Null verschiedene Koordinaten von

$$(\mu,\nu)-(\mu',\nu')$$

negativ ist. Auf diese Weise ist die Menge dieser Potenzprodukte linear geordnet. Die Differenz von je zwei solchen Potenzprodukten läßt sich dann als Summe von Differenzen benachbarter Potenzprodukte schreiben.

Es reicht also, zu zeigen, die Differenz von zwei benachbarten Potenzprodukten ist Linearkombination von Polynomen der Gestalt (3).

Benachbarte Potenzprodukte unterscheiden sich genau in zwei ν-Koordinaten[172] und der Unterschied ist Betragsmäßig gleich[173] 1, d.h. die Differenz von zwei benachbarten Potenzprodukten ist von der folgenden Gestalt.

$$T^{\mu+e_i-e_j} S^{\nu-e_i+e_j} - T^\mu S^\nu = T^{\mu-e_j} S^{\nu-e_i} \cdot (T_i S_j - T_j S_i)$$

wenn e_i den i-ten Standart-Einheitsvektorbezeichnet.

QED.

---

[172] Sind alle ν-Koordinaten gleich, so sind wegen $\mu+\nu = d$ auch die μ-Koodinaten gleich, d.h. die Potenzprodukte sind gleich (also nicht benachbart). Wegen $|\nu| = n$ führt Verkleinerung einer Koordinate stets auch zur Vergrößerung einer anderen. Unterscheiden sich die ν-Koordinaten an mehr als zwei Stellen, so kann man die Potenzprodukte durch eine Kette von Potenzprodukten verbinden, die sich in nur an jeweils zwei Stellen unterscheiden und zwischen den beiden gegebenen Potenzprodukten liegen.

[173] Eine Abänderung um mehr als Eins kann man erreichen, indem man mehrmals um 1 abändert.

(d) Die Koordinatenringe einer affinen Überdeckung von $Bl_\xi(\mathbb{A}^N)$

Sei

$$\pi: Y := Bl_\xi(\mathbb{A}^N) \to \mathbb{A}^N$$

die Aufblasung in ξ . Dann bilden die Mengen der Gestalt

$$U = \{ y\in Y \mid f(y) \neq 0\} \text{ mit } f\in I(\{\xi\})$$

eine affine offene Überdeckung von Y mit

$$k[U] \cong k[T, \frac{I(\{\xi\})}{f}].$$

Bemerkungen

(i) In der Definition von U wird f als homogenes Element des Grades 1 im Koordinatenring von Y aufgefaßt, d.h. als Einschränkung auf $Y \subseteq \mathbb{A}^N \times \mathbb{P}^{N-1}$ eines linearen homogenen Polynoms auf dem zweiten Faktor $\mathbb{P}^{N-1}$ (dessen Koeffizienten Polynome auf dem ersten Faktor sind).

(ii) Um eine Überdeckung zu erhalten, genügt es, wenn die Elemente f ein Erzeugendensystem des Ideals $I(\{\xi\})$ durchlaufen.

Beweis. O.B.d.A. sei ξ der Ursprung im $\mathbb{A}^N$,

$$\xi = (0,...,0).$$

Es gilt

$$U = D(f) \quad = \{(x,[t])\in\mathbb{A}^N\times\mathbb{P}^{N-1} \mid x_it_j - x_jt_i = 0, f(x, t) \neq 0\}.$$

Dabei bezeichne $f(S,T) \in k[S,T]$ ein homogenes Polynom des Grades 1 in S, welches die Restklasse

$$f\in I(\{\xi\}) \subseteq \oplus_{n=0}^{\infty} I(\{\xi\})^n = k[S,T]/(T_iS_j - T_jS_i \mid i,j = 1,...,N)$$

repräsentiert. Betrachten wir die Abbildung

$$\varphi:U \to V(f(T,S) - 1, T_iS_j - T_jS_i) \subseteq \mathbb{A}^N\times\mathbb{A}^N, (x,[t]) \mapsto (x, \frac{t}{f(x,t)}).$$

Nach Definition von U ist diese Abbildung regulär auf U und wegen

$$f(x, \frac{t}{f(x,t)}) - 1 = \frac{1}{f(x,t)} \cdot f(x,t) - 1 = 0$$

nimmt sie tatsächlich Werte in der angegebenen Menge an. Die Abbildung

$$\psi: V(f(T,S) - 1) \to U, (x, t) \mapsto (x, [t]),$$

ist ebenfalls regulär[174] und invers zu φ:

$$\psi(\varphi(x, [t]) = \psi(x, \frac{t}{f(x,t)}) = (x, [\frac{t}{f(x,t)}]) = (x, [t]).$$

$$\varphi(\psi(x,t)) = \varphi(x, [t]) = (x, \frac{t}{f(x,t)}) = (x, t).$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt wegen $(x,t)\in V(f(T,S) - 1)$, d.h. $f(x,t) = 1$. Wir haben gezeigt, φ und ψ sind zueinander inverse Isomorphismen, d.h. U ist isomorph zu der affinen Varietät $V(f(T,S) - 1) \subseteq \mathbb{A}^N\times\mathbb{A}^N$, also selbst affin.

Durchläuft f die Menge

$$\{t_1,...,t_N\}$$

so erhalten wir eine offen Überdeckung von Y. Allgemeiner ist

$$f_1,...,f_r$$

---

[174] Für $(x,t)\in V(f(T,S)-1)$ gilt $f(x,t) = 1$. Weil $f(T,S)$ homogen in den S ist, können die Koordinaten von t nicht sämtlich Null sein, d.h. [t] ist ein wohldefinierter Punkt des $\mathbb{P}^{n-1}$ (mit $f(x,t) = 1 \neq 0$).

ein Erzeugendensystem des Ideals $I(\{\xi\})$, so läßt sich jedes der t_i als Linearkombination der f_j schreiben. Da in jedem Punkt von Y mindestens eines der t_i (aufgefaßt als homogenes Polynom des Grades 1) ungleich Null ist, gilt damit dasselbe für die f_j, d.h. die $D(f_j)$ bilden eine Überdeckung von Y.

Wir haben noch den affinen Koordinatenring von U zu bestimmen. Wie wir eben gesehen haben (beim Nachweis, daß U affin ist), gilt

$$k[U] = k[T, S]/(f(T,S) - 1, S_iT_j - S_jT_i \mid i,j=1,...,N).$$

Wir setzen

$$I := I(\{\xi\}) \text{ und } f := f(T,T).$$

und haben zu zeigen, der Ring $k[U]$ ist isomorph zu

$$k[T, \frac{I}{f}] = k[T_1,...,T_N, \frac{T_1}{f},..., \frac{T_N}{f}] \ (\subseteq k[T]_f).$$

Betrachten wir den folgenden Homomorphismus von k-Algebren.

$$\varphi: k[T,S] \to k[T, \frac{I}{f}],\ T_i \mapsto T_i,\ S_i \mapsto \frac{T_i}{f}.$$

Es gilt

$$\varphi(S_iT_j - S_jT_i) = 0$$

$$\varphi(f(T,S)-1) = f(T, \frac{T}{f}) - 1 = \frac{1}{f}\cdot f(T,T) - 1 = 0,$$

d.h. φ faktorisiert sich über $k[U]$ und definiert damit einen Homomorphismus von k-Algebren

$$\tilde{\varphi}: k[U] \twoheadrightarrow k[T, \frac{I}{f}],\ T_i \mapsto T_i,\ S_i \mapsto \frac{T_i}{f},$$

welcher offensichtlich surjektiv ist. Konstruieren wir als nächstes die Umkehrabbildung. Dazu schreiben wir

$$k[T, \frac{I}{f}] \cong k[T,S]/(f\cdot S_i - T_i \mid i = 1,...,N)$$

Die Restklasse der Unbestimmten rechts entspricht dabei dem Ringelement $\frac{T_i}{f}$ links. Wir betrachten den folgenden Homomorphismus von k-Algebren.

$$\psi: k[T,S] \to k[U],\ T_i \to T_i,\ S_i \mapsto S_i.$$

Dabei verwenden wir, wie auch in der nachfolgenden Rechnung, ein und dasselbe Symbol für ein Element von $k[S,T]$ und dessen Restklasse in $k[U]$.[175] Es gilt für jedes i,

$$\begin{aligned}
\psi(f\cdot S_i - T_i) &= f(T,T)\cdot S_i - T_i \\
&= f(T,TS_i) - T_i && \text{(f(T,S) ist linear und homogen in S)} \\
&= f(T,ST_i) - T_i && (\text{wegen } S_iT_j - S_jT_i = 0) \\
&= f(T,S)T_i - T_i && \text{(f(T,S) ist linear und homogen in S)} \\
&= T_i - T_i && (\text{wegen } f(T,S) = 0 \text{ in } k[U]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten ψ faktorisiert sich über $k[T, \frac{I}{f}]$ und definiet so einen Homomorphismujs von k-Algebren

[175] Diese Bezeichnungsweise ist eindeutig, wenn klar ist, in welchen Ring sich das betrachtete Element befindet.

$$\tilde\psi: k[T, \frac{I}{f}] \twoheadrightarrow k[U],\ T_i \mapsto T_i,\ \frac{T_i}{f} \mapsto S_i\ .$$

Die Erzeugenden S_i und T_i der k-Algebra k[U] liegen im Bild von $\tilde\psi$, d.h. $\tilde\psi$ ist surjektiv.

Durch Vergleich der Abbildungsvorschriften von $\tilde\varphi$ und $\tilde\psi$ sehen wir, die beiden Abbildungen sind invers zueinander. Es handelt sich also um Isomorphismen.
QED.

(e) Die Koordinatenringe einer affinen Überdeckung von $Bl_\xi(X)$

Sei ξ ein nicht-singulärer Punkt der affinen Varietät X,

$$I := I(\{\xi\}) \subseteq A:=k[X]$$

das Ideal des Punktes ξ und

$$\pi: Y := Bl_\xi(X) \to X$$

die Aufblasung von X in ξ . Dann bilden die Mengen der Gestalt

$$U = \{\ y\in Y \mid f(y) \neq 0\}\ \text{mit}\ f\in I$$

eine affine offene Überdeckung von Y mit

$$k[U] \cong A[\frac{I(\{\xi\})}{f}] \qquad (\subseteq k[X]_f\ )$$

Beweis. Die Varietät X ist abgeschlossene Teilmenge eines affinen Raumes,

$$X \subseteq \tilde X := \mathbb{A}^N.$$

Bezeichne $J \subseteq k[\tilde X]$ das Ideal von X, d.h.

$$k[X] = k[\tilde X]/J.$$

Wir betrachten die Aufblasung

$$\varphi: \tilde Y := Bl_\xi(\tilde X) \to \tilde X$$

des $\mathbb{A}^N$ mit dem Zentrum ξ. Weiter sei $\tilde f\in k[\tilde X]$ eine reguläre Funktion, deren Einschränkung

$$f : = \tilde f|X = \tilde f \bmod J \in k[X]$$

auf X in I liegt,

$$f \in I,\ \text{d.h.},\ \tilde f(\xi) = 0.$$

Nach (d) bilden die offenen Mengen der Gestalt

$$\tilde U := \{\ y\in \tilde Y \mid \tilde f(y) \neq 0\}$$

eine affine Überdeckung von $\tilde Y$. Nach Definition 2.4.3(b) ist die Aufblasung π gerade die Einschränkung von φ auf die Abschließung von $\varphi^{-1}(X - \{\xi\})$. Das Ideal von $\varphi^{-1}(X)$ auf $\tilde U$ ist nach (d) gerade

$$I(\tilde U\cap\varphi^{-1}(X)) = J\cdot k[\tilde U] = J\cdot k[T, \frac{\tilde I}{\tilde f}],$$

wenn $\tilde I$ das Ideal von ξ in $k[\tilde X]$ bezeichnet. Analog ist das Ideal von $\varphi^{-1}(\xi)$ in $\tilde U$ gleich

$$I(\tilde U\cap\varphi^{-1}(\xi)) = \tilde I\cdot k[\tilde U] = \tilde I\cdot k[T, \frac{\tilde I}{\tilde f}] =^{176} \tilde f\cdot k[T, \frac{\tilde I}{\tilde f}].$$

---

[176] Nach Wahl von $\tilde f$ ist $\tilde f\in\tilde I$, d.h. es gilt "$\supseteq$". Weiter ist $\tilde I = \tilde f\cdot\frac{\tilde I}{\tilde f}$, d.h. es gilt "$\subseteq$".

Für das Ideal der Abschließung von

$$\tilde{U} \cap (\varphi^{-1}(X) - \varphi^{-1}(\xi)) = \tilde{U} \cap \varphi^{-1}(X - \{\xi\})$$

erhalten wir damit (vgl. 2.1.5 (b) Ideal der Abschließung einer Differenz)

$$I(\tilde{U} \cap Y) = J\cdot k[T, \frac{\tilde{I}}{\tilde{f}}] : \tilde{f}^{\infty} = Jk[\tilde{X}]_{\tilde{f}} \cap k[T, \frac{\tilde{I}}{\tilde{f}}].$$

Mit $U := \tilde{U} \cap Y \{y\in Y \mid f(y) \neq 0\}$ ist damit

$$\begin{aligned} k[U] &= k[\tilde{U}]/I(\tilde{U} \cap Y) \\ (*) \qquad &= k[T, \frac{\tilde{I}}{\tilde{f}}]/Jk[\tilde{X}]_{\tilde{f}} \cap k[T, \frac{\tilde{I}}{\tilde{f}}] \\ &= (k[T, \frac{\tilde{I}}{\tilde{f}}] + Jk[\tilde{X}]_{\tilde{f}})/Jk[\tilde{X}]_{\tilde{f}} \subseteq k[\tilde{X}]_{\tilde{f}}/Jk[\tilde{X}]_{\tilde{f}} = (k[\tilde{X}]/J)_f = k[X]_f \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, k[U] wird als k[X]-Algebra erzeugt vom Bild der Menge

$$\frac{\tilde{I}}{f} \subseteq k[\tilde{X}]_f$$

bei der natürlichen Abbildung $k[\tilde{X}]_f \to (k[\tilde{X}]/J)_f = k[X]_f$, d.h. von der Menge $\frac{I}{f}$. Das ist aber gerade die Behauptung:

$$k[U] = k[X][\frac{I}{f}] \quad (\subseteq k[X]_f).$$

QED.

Bemerkung

Zur Berechnung des Koordinatenrings der Aufblasung $Bl_\xi(X)$ einer beliebign affinen Varietät (in einem nicht-singulären Punkt ξ) benötigen wir eine leichte Verallgemeinerung des Hilbertschen Nullstellensatzes, die der Produktstruktur der hier betrachteten Räume angepaßt ist.

(f) Hilbertscher Nullstellensatz auf Produktvarietäten

Seien X eine affine Varietät und

$$I \subseteq k[X][S],\ S := (S_0,...,S_N),$$

ein von homogenen Polynomen in den S_i erzeugtes Ideal. Dann sind äquivalent:

(i) Die Nullstellenmenge $V(I) \subseteq X\times\mathbb{P}^N$ von I ist leer.

(ii) Es gibt ein $m\in\mathbb{N}$ mit $(S)^m \subseteq I.$,

Beweis. <u>(ii) ⇒ (i)</u>. Es gilt

$$V(I) \subseteq V((S)^m) \subseteq V(S_0^m,...,S_n^m) = \emptyset.$$

<u>(i) ⇒ (ii)</u>. Nach Voraussetzung gilt $V(I) = \emptyset$. Wir fixieren ein endliches homogenes Erzeugendensystem von I,

$$I = (F_1,...,F_m),\ F_i \text{ homogen}$$

und bezeichnen mit U_j die affine Menge

$$U_j = \{(x,t) \in X\times\mathbb{P}^N \mid S_i(t) \neq 0\} \cong X\times\mathbb{A}^N,$$

Die Polynome F_i haben keine gemeinsame Nullstelle, also auch keine gemeinsame Nullstelle in U_j. Mit anderen Worten, die affine abgeschlossene Menge

$$V(f_1,...,f_m) \subseteq X\times\mathbb{A}^n \text{ mit } f_i := F_i / S_j^{\deg F_i}$$

ist leer.Nach dem Nullstellensatz gilt

$$1 = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i = \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot F_i / S_j^{\deg F_i}$$

mit gewissen Polynomen $u_i \in k[S/S_j]$. Wir multiplizieren mit einer geeigneten Potenz von S_j und sehen, daß eine Potenz von S_j Linearkombination der F_i ist, sagen wir,

$$S_j^m \in I.$$

Eine solche Relation erhalten wir für jedes j. Wir können der Einfachheit halber annehmen, der Exponent m ist für jedes j derselbe. Ein Potenzprodukt der S_j des Grades $\geq m(N+1)$ ist durch mindestens eines der S_j^m teilbar und liegt damit in I. Also gilt

$$(S)^{m(N+1)} \subseteq I.$$

QED.

(f) Der Koordinatenring von $Bl_\xi(X)$

Sei ξ ein nicht-singulärer Punkt der affinen Varietät X. Dann gilt

(1) $$k[Bl_\xi(X)] \cong (\oplus_{n=0}^{\infty} I(\{\xi\})^n)_{red}.$$

Beweis. Sei X abgeschlossen (und echt enthalten) in $\mathbb{A}^N$ und O.B.d.A. sei $\xi = (0,...,0)$. Wir verwenden die bisherigen Bezeichnungen. Die Symbole, die sich auf den $\mathbb{A}^N$ beziehen, versehen wir wie bisher mit einem Cirkonflexe:

$\tilde{X} := \mathbb{A}^N$

$\tilde{Y} := Bl_\xi(\tilde{X})$

$\tilde{A} := k[\tilde{X}] = k[T],\ T = (T_1,...,T_N)$

$\tilde{I} := (T_1,...,T_N)$ (das Ideal von ξ in $k[\tilde{X}]$)

Symbole ohne Cirkonflexe beziehen sich auf X:

$Y := Bl_\xi(X)$

$A := k[X] = k[T]/J$

$I := \tilde{I} \cdot k[X] = \tilde{I}+J/J = \tilde{I}/\tilde{I} \cap J$

$Bl(I) := \oplus_{n=0}^{\infty} I^n$

$Bl(\tilde{I}) := \oplus_{n=0}^{\infty} \tilde{I}^n = k[S,T]/(T_iS_j - S_iT_j \mid i,j = 1,...., N),\ S = (S_1,...,S_N)$

Damit ist

$I^n = \tilde{I}^n.k[X] = \tilde{I}^n+J/J = \tilde{I}^n/\tilde{I}^n \cap J$

$Bl(I) = Bl(\tilde{I}) / \oplus_{n=0}^{\infty} \tilde{I}^n \cap J$

Wir haben zu zeigen, ein homogenes Element des Grades m in S,

$F(S,T) \in k[S,T]$, $\deg F(S,T) = m$,

mit der Restklasse

$$F = F(T,T) \in \oplus_{n=0}^{\infty} I^n = k[S,T]/(J, T_iS_j - S_iT_j \mid i,j = 1,...., N)$$

ist genau dann identisch Null auf der Aufblasung Y von X in ξ, wenn F im Radikal des Ideals $\oplus_{n=0}^{\infty} \tilde{I}^n \cap J$ liegt,

$$F \in \sqrt{\oplus_{n=0}^{\infty} \tilde{I} \cap J}$$

Beim Beweis haben wir ein Phänomen zu berücksichtigen, das wir bisher wenig beachtet haben. Um dieses Phänomen zu beschreiben, betrachten wir das Ideal

$$Bl^+(\tilde{I}) \qquad = \oplus_{n=1}^{\infty} \tilde{I}^n$$

von $Bl(\tilde{I})$. Es heißt <u>irrelevantes Ideal</u> von $Bl(\tilde{I})$ und wird erzeugt von den Restklassen der S_j,

$$Bl^+(\tilde{I}) = (S)\cdot Bl(\tilde{I}).$$

Für die Punkte $(x, [t])$ der durch dieses Ideal definierten abgeschlossenen Teilmenge von $Y \subseteq X\times\mathbb{P}^N$ gilt also $t_1 = ... = t_N = 0$, d.h. es definiert die leere Menge,

$$V(Bl^+(\tilde{I})) \qquad = \varnothing.$$

Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist die Nullstellenmenge eines Ideals genau dann leer, wenn es eine Potenz des irrelevanten Ideals enthält.

Wir schreiben jetzt das uns interessierende Ideal $\oplus_{n=0}^{\infty} \tilde{I}^n \cap J$ in der Gestalt

(2) $\quad \oplus_{n=0}^{\infty} \tilde{I}^n \cap J \quad = Q' \cap Q''$

Dabei sei Q' der Durchschnitt der Primärideale in der Primärzerlegung des homogenen Ideals $\oplus_{n=0}^{\infty} \tilde{I}^n \cap J$, deren Nullstellenmenge leer ist und Q'' sei der Durchschnitt der übrigen Primärideale. Dann liegt eine Potenz des irrelevanten Ideals in Q', sagen wir

$$Bl^+(\tilde{I})^l \subseteq Q'.$$

Andererseits ist $Bl^+(\tilde{I})$ in keinem Primideal, zu einer Primärkomponente von Q'' enthalten. Mit anderen Worten, zu jeder Primärkomponente Q von Q'' gibt es ein Element $a\in Bl^+(\tilde{I})$, welches regulär ist im Restklassenring von Q, d.h. $Q:a = Q$. Dann gilt aber erst recht $Q: Bl^+(\tilde{I}) = Q$ und damit

$$Q'' : Bl^+(\tilde{I}) = Q''.$$

Wir teilen beide Seiten von (2) durch $Bl^+(\tilde{I})^l$ und erhalten damit

(3) $\quad \oplus_{n=0}^{\infty} \tilde{I}^n \cap J: Bl^+(\tilde{I})^l = Q''$ für l groß

Weiter gilt

(4) $\quad \sqrt{\oplus_{n=0}^{\infty} \tilde{I} \cap J} = \sqrt{Q'} \cap \sqrt{Q''}$

Es reicht also zu zeigen

$$F|Y = 0 \qquad \Leftrightarrow F\in\sqrt{Q'} \text{ und } F\in\sqrt{Q''}$$

$$\qquad\qquad \Leftrightarrow F^l\in Q' \text{ und } F^l\in Q'' \text{ für } l \text{ groß}$$

Wegen $Bl^+(\tilde{I})^l \subseteq Q'$ für l groß ist dieerste Bedingung trivialerweise erfüllt. Es reicht also zu zeigen

$$F|Y = 0 \qquad \Leftrightarrow F\in\sqrt{Q''}$$

Wir werden sogar zeigen[177],

$F|Y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F\in Q$"

d.h. (vgl. (3))

$$F|Y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Bl^+(\tilde{I})^l\cdot F \subseteq \oplus_{n=0}^{\infty} \tilde{I}^n \cap J \text{ für } l \text{ groß.}$$

Es reicht also, die folgende Äquivalenz zu beweisen:

(5) $\quad F|Y = 0 \quad \Leftrightarrow$ Es gibt ein l mit $T_j^l F \in \tilde{I}^{l+m} \cap J$ für $j = 1,...,N$.

Die Bedingung $F|Y = 0$ ist äquivalent zu

$$F|Y\cap U_j = 0 \text{ für alle } j$$

mit

$$U_j := \{(x,t) \in X\times\mathbb{P}^N \mid S_i(t) \ne 0\} \cong X\times\mathbb{A}^N.$$

Diese Bedingung bedeutet, F/T_j^m liegt im Ideal der affinen abgeschlossenen Teilmenge $Y\cap U_j$ von $\tilde{Y}\cap U_j$. Bei der Berechnung des affinen Koordinatenrings $Y\cap U_j$ haben wir gesehen (vgl. (*) im Beweis von (e)):

$$k[Y\cap U_j] = k[\tilde{Y}\cap U_j] /(J\cdot k[\tilde{X}]_{T_j} \cap k[\tilde{Y}\cap U_j])$$

Damit ist $F|Y = 0$ äquivalent zu

$$F/T_j^m \in J\cdot k[\tilde{X}]_{T_j} \cap k[\tilde{Y}\cap U_j] \qquad (= J\cdot k[T]_{T_j} \cap k[T, \frac{\tilde{I}}{T_j}] \subseteq k[T]_{T_j})$$

für $j = 1, ... , N$. Letztere Bedingung ist äquivalent zu[178]

$$F/T_j^m \in (\frac{\tilde{I}}{T_j})^l \cap \frac{J}{T_j^l} \text{ für } l \text{ groß}$$

d.h. zu

$$T_j^{l-m}F \in \tilde{I}^l \cap J \text{ für } l \text{ groß.}$$

Wir führen eine Indexverschiebung durch und erhalten die Gültigkeit von (5).
QED.

(g) Aufblasungen von Kurven

Seien X eine affine Kurve und $\xi\in X$ ein nicht-singulärer Punkt. Dann ist die Aufblasung von X in ξ ein Isomorphimus.

Beweis. Sei

$$\pi: Y \to X$$

die Aufblasung von X in ξ. Das Ideal $I = I(\{\xi\})$ in $k[X]$ wird von einem Element erzeugt,

$$I = fk[X],$$

d.h. X besitzt eine offene Überdeckung, die aus nur einer offenen affinen Menge
$U = \{y\in Y \mid f(y) \ne 0\}$
besteht, d.h. Y ist affin und hat den affinen Koordinatenring

---

[177] Mit anderen Worten, wenn man vom irrelevanten Ideal absieht ist $\oplus_{n=0}^{\infty} I^n$ bereits der reduzierte Koordinatenring.

[178] Man beachte, es gilt $(\frac{\tilde{I}}{T_j})^l = \frac{\tilde{I}^l T_j}{T_j^{l+1}} \subseteq (\frac{\tilde{I}}{T_j})^{l+1}$

$$k[Y] = k[U] = k[X][\frac{I}{f}].$$

Die Menge $\frac{I}{f} = \frac{fk[X]}{f}$ besteht aus lauter Elementen, die bereits in k[X] liegen, d.h. k[Y] ist als k-Algebra isomorph zu k[X].
QED.

4.4.4 Ausnahme-Divisoren

(a) Vorbemerkungen

(i) Das Beispiel der Aufblasungen zeigt, daß es einen wesentlichen Unterschied zwischen den algebraischen Kurven und den algebraischen Varietäten einer größeren Dimension gibt. Während jeder birationale Morphismus von nicht-singulären algebraischen Kurven ein Isomorphismus ist, zeigt das Beispiel der Aufblasungen, daß dies in höheren Dimensionen durchaus birationale Morphismen gibt, die keine Isomorphismen sind.

(ii) In diesem Abschnitt untersuchen wir birationale Morphismen, d.h. reguläre Abbildungen $f: X \to Y$, die birationale Isomorphismen sind, d.h.

$$g = f^{-1}: Y \dashrightarrow X$$

existiert als rationale Abbildung und ist nicht notwendig regulär.

(iii) Die Aufblasunge eines Punktes ist ein Beispiel für eine derartige Abbildung. Wie wir gesehen haben, wird bei einer Aufblasung eine Teilvarietät der Kodimension 1 in einen Punkt kontrahiert. Wir zeigen hiert, daß beliebige birationale Morphismen eine ähnliche Eigenschaft haben.

(b) Theorem 2: Kontraktion von Divisoren bei birationalen Morphismen

Seien $f: X \to Y$ ein birationaler Morphismus und $x \in X$ ein Punkt. Der Bildpunkt

$$y = f(x)$$

sei ein nicht-singulärer Punkt von Y und die Umkehrung

$$g := f^{-1}: Y \dashrightarrow X$$

sei nicht regulär im Punkt y. Dann gibt es eine Teilvarietät

$$Z \subset X$$

der Kodimension 1,

$$\text{codim}_X Y = 1$$

mit[179]

$$\text{codim}_Y f(Z) \ge 2.$$

Beweis. Die Aussage ist lokaler Natur bezüglich X, d.h. wir können bei Bedarf X durch eine beliebig kleine affine Umgebung des Punktes x ersetzen. Insbesondere können wir annehmen,

$$X \subseteq \mathbb{A}^N$$

ist affin. Wir betrachten die rationale Abbildung $g = f^{-1}$ als Abbildung mit Werten im affinen Raum $\mathbb{A}^N$, sagen wir,

$$g: Y \dashrightarrow X \subseteq \mathbb{A}^N, y \mapsto (g_1(y),...,g_N(y)).$$

Weil g nach Voraussetzung im Punkt $y \in Y$ nicht regulär ist, ist mindestens eine der Koordinatenfunktionen von g, sagen wir g_1, nicht regulär in y. Wir schreiben g_1 in der Gestalt

---

[179] f(Z) muß im allgemeinen keine algebraische Varietät sein (sondern ist im allgemeinen nur eine konstruktive Menge). Die nachfolgende Dimensionsaussage über f(Z) soll sich deshalb gegebenenfalls auf die Zariski-Abschließung von f(Z) beziehen.

$$g_1 = \frac{u}{v} \text{ mit } u,v\in\mathcal{O}_{Y,y}.$$

Weil y nach Voraussetzung ein nicht-singulärer Punkt von Y ist (d.h. $\mathcal{O}_{Y,y}$ ist ein ZPE-Ring) können wir annehmen, u und v sind teilerfremd in $\mathcal{O}_{Y,y}$. Weil g_1 in y nicht regulär ist, gilt

$$v(y) = 0.$$

Wir schreiben

$$t_i = T_i|X$$

für die Einschränkung der i-ten Koordinatenfunktion auf X. Dann gilt

$$g_1 = g^*(t_1)$$

also

$$t_1 = f^*(g^*(t_1)) = f^*(g_1) = \frac{f^*(u)}{f^*(v)}$$

also

(1) $$f^*(u) = t_1 \cdot f^*(v).$$

Wegen v(y) = 0 ist

$$f^*(v)(x) = v(f(x)) = v(y) = 0,$$

d.h. die abgeschlossene Menge

$$Z := V(f^*(v)) \subseteq X$$

ist nicht leer und damit von der Kodimension 1 in X,

$$\operatorname{codim}_X Z = 1.$$

Schätzen wir die Kodimension von f(Z) ab. Zunächst beachten wir, es gilt

(2) $$f(Z) \subseteq V(u,v).$$

Für $z\in Z$ gilt nämlich

$$v(f(z)) = f^*(v)(z) = 0$$

(wegen $z\in Z = V(f^*(v))$) und

$$\begin{aligned} u(f(z)) &= f^*(u)(z) \\ &= t_1\cdot f^*(v)(z) && \text{(wegen (1))} \\ &= t_1\cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist (2) bewiesen. Wäre nun f(Z) lokal in y von der Kodimension 1, so könnte man f(Z) lokal in y durch eine lokale Gleichung, sagen wir h, definieren (weil $y\in Y$ ein nicht-singulärer Punkt ist). Da u und v nach (2) identisch Null sind auf f(Z), gilt dann im lokalen Ring $\mathcal{O}_{Y,y}$ aber $u \in (h)$ und $v \in (h$. Das steht im Widerspruch zur Teilfremdheit von u und v.

QED.

(c) Definition: Ausnahme-Divisor

Sei f: X → Y ein birationaler Morphismus. Eine Teilvarietät $Z \subseteq X$ heißt Ausnahme-Divisor von f, wenn gilt

$$\operatorname{codim}_X Z = 1 \text{ und } \operatorname{codim}_Y f(Z) \geq 2.$$

(d) Folgerung 1: Existenz von Ausnahme-Divisoren

Sei f: X → Y ein birationaler Morphismus von glatten Varietäten, welcher kein Isomorphismus ist. Dann besitzt f einen Ausnahme-Divisor $Z \neq \emptyset$.

Beweis. trivial.

QED.

(e) Folgerung 2:
Sei f: $X \to Y$ ein birationaler Morphismus von Kurven, wobei die Kurve Y glatt ist. Dann ist f(X) ein offene Teilmenge von Y und f induziert einen Isomorphismus

$$X \to f(X).$$

Beweis. Weil f ein birationaler Isomorphismus ist, gibt es dichte offene Teilmengen

$$U \subseteq X \text{ und } V \subseteq Y$$

derart, daß f einen Isomorphismus

$$U \xrightarrow{\cong} V$$

induziert. Weil Y eine Kurve ist, ist Y - V eine endliche Menge. Dann ist aber erst recht auch die Menge

$$Y - f(X)$$

endlich, d.h. f(X) ist offen in Y. Wäre nun die induzierte Abbildung $X \to f(X)$ kein Isomorphismus, so gibt es nach (b) einen Ausnahme-Divisor $Z \neq \emptyset$ von f. Insbesondere gilt

$$\dim f(Z) \le \dim Y - 2 = 1- 2 = -1,$$

d.h. f(Z) muß leer sein. Das steht aber im Widerspruch zu $Z \neq \emptyset$.
QED.

4.4.5 Isomorphismen und birationale Isomorphismen

(a) Modelle
Betrachten wir Klassen, die aus paarweise zueinander birational isomorphen quasi-projektiven Varietäten bestehen. Die Repräsentanten dieser Klasse nennen wir auch Modelle.
Bemerkungen
(i) Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, in jeder Klasse von birational isomorphen Kurven liegt eine glattes projektives Modell. Nach (2.3.1)(h) ist ein solches Modell bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
(ii) Wenn wir also jeder Klasse das eindeutig bestimmte in ihr enthaltene nicht-singuläre projektive Modell zuordnen, so reduzieren wir die Frage nach der birationalen Klassifikation der algebraischen Kurven auf die Frage nach der Klassifikation der nicht-singulären projektiven Kurven (bis auf Isomorphie).

(b) Das Modell eines Funktionenkörpers
Der Funktionenkörper einer algebraischen Kurve ist dasselbe wie eine Körpererweiterung von k des Transzendenzgrades 1, die von endlich vielen Elementen erzeugt wird. Deshalb besteht eine 1-1-Korrespondenz zwischen diesen Körpern und den nicht-singulären projektiven Kurven (bis auf Isomorphie). Ist in dieser Situation

$$K = k(X),$$

so werden wir ebenfalls sagen, X ist ein Modell von K.

(c) Das Modell eines Funktionenkörpers vom Transzendenzgrad 1
Man kann auf direktem Wege versuchen zu gegebenem K das Modell zu finden, indem man die algebraischen Eigenschaften von K ausnutzt. Etwas genauer kann man danach fragen, wie sich die lokalen Ringe des Modells X von K charakterisieren lassen. Es ist leicht einzusehen, daß der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ die folgenden Eigenschaften besitzt.

1) $\mathcal{O}_{X,x}$ ist ein Teilring von K mit $k \subset \mathcal{O}_{X,x} \subset K$ (echte Inklusionen).

2) $\mathcal{O}_{X,x}$ ist ein lokaler Ring, desssen maximales Ideal $m_{X,x}$ ein Hauptideal ist,

$$m_{X,x} = (u).$$

3) Der Quotientenkörper von $\mathcal{O}_{X,x}$ ist gleich K.

Man kann zeigen (vgl. Aufgaben 7, 8, 9), daß jeder Teilring von K mit diesen Eigenschaften ein lokaler Ring von X ist. In diesem Sinne ist das Modell X universell, d.h. es liefert alle Teilringe von K, die den naheliegenden Bedingungen 1), 2) und 3) genügen.

(d) Die Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen

Problem: Wie lautet die Antwort auf die analoge Frage in höheren Dimensionen ?
Bekannte Ergebenisse:
Hinsichtlich der Existenz projektiver nicht-singulärer Modelle in der Dimension n steht die Sache vergleichsweise angenehm. Deren Existenz ist bewiesen in den Fällen $n = 2, 3$ (Walker, Zariski für Körper der Charakteristik 0, Abhynakar für endliche Charakteristiken > 5) und für beliebiges n im Fall der Charakteristik 0 (Hironaka). Für beliebige Körper und beliebige n wird die Existenz als sehr wahrscheinlich angesehen.

Die Eindeutigkeit ist dagegen eine Besonderheit des Falles $n = 1$. Das ist bereit an den Beispielen der Projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ und der projektiven Fläche zweiter Ordnung im $\mathbb{P}^3$ zu erkennen, denn diese sind birational äquivalent, jedoch nicht isomorph.

Man könnte die Frage nach der Existenz eines Modells in jeder Klasse von birational isomorphen Varietäten stellen, welches universell ist in dem Sinne, daß die lokalen Ringe seiner Punkte wie im Fall $n = 1$ gerade alle lokalen Teilringe von $K := k(X)$ sind, die den Bedingungen 1), 2) und 3) genügen (wobei man in Bedingung 2 fordern muß, daß das maximale Ideal von n Elementen erzeugt wird).

Ein solches Modell kann jedoch aus denselben Gründen nicht existieren. Ist nämlich $\pi: Y \to X$ die Aufblasung des Punktes $\xi \in X$, so kann kein lokaler Ring $\mathcal{O}_{Y,y}$ eines Punktes $y \in \pi^{-1}(\xi)$ mit einem lokalen Ring der Gestalt $\mathcal{O}_{X,x}$ zusammenfallen.
Man könnte ein universelles Modell im obigen Sinne dadurch erhalten, indem man alls nicht-singulären Modelle einer Klasse vereinigt. Doch dies wäre dann keine endlich-dimensionale algebraische Varietät. Näheres über diese “unendlich-dimensionalen Modelle” kann man in [16], Teil 2, Kapitel VI, § 17 finden.

(e) Zusammenhänge zwischen verschiedenen nicht-singulären Modellen

Im Zusammenhang mit dem Fehlen eines ausgezeichneten Modells ergibt sich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den verschiedenen nicht-singulären projektiven Modellen einer Klasse von birational isomorphen Varietäten. Wir beschreiben hier ohne Beweis die grundlegenden Ergebnisse.

(f) Vereinbarung zum Begriff der Varietät

In diesem Abschnitt werden wir von jetzt ab alle Varietäten als irreduzibel, glatt und projektive voraussetzen.

(g) Relativ minimale Modelle

Ein Modell X’ dominiert ein Modell X, falls es einen birationalen Morphismus $X' \to X$ gibt. Eine Varietät heißt relativ minimal, falls sie keine andere Varietät domimiert.

Beispiele

Jede glatte projektive Kurve ist relativ minimal.
Nach 2.4.4(b) (d.h. Theorem 2) ist eine glatte projektive Varietät genau dann minimal, wenn sie keine Ausnahme-Divisoren enthält.

Bemerkungen

(i) Man kann zeigen, jede (nicht-singuläre) Varietät dominiert mindestens ein relativ minimales Modell. Insbesondere existiert also in jeder Klasse birational isomorpher Varietäten mindestens ein relativ minimales Modell.

(ii) Es ergibt sich die Frage nach der Eindeutigkeit des relativ minimalen Modells. Würde es in jeder Klasse genau ein solches Modell geben, so hätte man die Frage nach der birationalen Klassifikation auf die Frage nach der Klassifikation (der relativ minimalen Modelle) bis auf Isomorphie zurückgeführt.

(iii) Im Fall n > 1 ist dies jedoch nicht der Fall. Wie wir wissen sind der $\mathbb{P}^2$ und die Fläche 2-ter Ordnung $Q \subseteq \mathbb{P}^3$ birational isomorph jedoch nicht isomorph.

(h) Die Existenz mehrer relativ minimaler Modelle

Unser nächstes Ziel ist es, zu zeigen, daß die beiden Flächen $\mathbb{P}^2$ und Q relativ minimale Modelle sind.

In unserer Situation ist ein Ausnahme-Divisor eine Kurve $C \subseteq X$, welche bei einem birationalen Morphismus $f: X \to Y$ in einen Punkt abgebildet wird,

$$f(C) = \{y\}.$$

Dabei sind X und Y projektive Flächen. Kurven dieser Art besitzen eine Reihe von sehr speziellen Eigenschaften (weshalb man sie auch Ausnahmekurven nennt). Wir leiten hier jetzt einige davon ab.

Eine Ausnahmekurve sei im folgenden eine Kurve C auf einer projektiven Fläche X, welche sich in der Gestalt

$$C = f^{-1}(y)$$

schreiben läßt mit einem birationalen Morphismus $f: X \to Y$ und einem Punkt $y \in Y$.

(i) Eine Eigenschaft der Ausnahmekurven

Seien X eine nicht-singuläre projektive Fläche und $C \subseteq X$ eine Ausnahmekurve. Dann gibt es eine offene Menge $U \subseteq X$ mit den folgenden Eigenschaften.

(i) $C \subseteq U$.

(ii) Die Komponenten von C sind die einzigen irreduziblen projektiven Kurve auf X, welche ganz in U liegen.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es einen birationalen Morphismus

$$f: X \to Y$$

und einen Punkt $y \in Y$ mit

$$C = f^{-1}(y).$$

Der Punkt $y \in Y$ ist notwendig ein Punkt, in welchem die Umkehrung f^{-1} von f nicht regulär ist.[180] Die Menge der Punkte, in denen f^{-1} nicht regulär ist, ist abgeschlossen, also (wegen dim Y = 1) endlich. Es gibt also eine offene affine Menge

$$V \subseteq Y$$

mit

$$y \in V,$$

wobei f^{-1} in allen Punkten außer y regulär ist. Wir setzen

$$U := f^{-1}(V).$$

Dann gilt offensichtlich (i). Sei jetzt $C' \subseteq X$ eine irreduzible projektive Kurve, die ganz in U liegt. Dann ist $f(C')$ eine irreduzible projektive Varietät, die ganz in der affinen offenen Menge V liegt, d.h. es gilt

$$f(C') = \{y'\}$$

für einen geeigneten Punkt $y' \in Y$. Dann ist aber f^{-1} in y' nicht regulär. Wegen $C' \subseteq U$ folgt $y' \in V$, d.h. y' = y. Dann ist aber C' eine Komponente von C.

QED.

---

[180] Wäre f^{-1} in einer Umgebung W von y regulär, so wäre die offene Menge $f^{-1}(W)$ eine Umgebung eines Punktes von C, auf welcher f injektiv ist (im Widerspruch zu $f(C) = \{y\}$).

(j) Die relative Minimalität des $\mathbb{P}^2$

Die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ ist relativ minimal.

Beweis. Andernfalls gäbe es eine eine Ausnahmekurve $C \subseteq \mathbb{P}^2$, Nach (i) gibt es eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}^2$ mit $C \subseteq U$ mit der Eigenschaft, daß es außerden irreduziblen Komponenten von C keine weiteren projektiven Kurven des $\mathbb{P}^2$ gibt, die ganz in U liegen. Wir schreiben U in der Gestalt

$$U = \mathbb{P}^2 - D$$

mit $D \subseteq \mathbb{P}^2$ abgeschlossen. Dann gilt

$$\dim D = 0,$$

denn andernfalls hätte D mit C Punkte gemeinsam (nach dem Satz über die Dimension eines Durchschnitts). Damit ist aber D eine endliche Punktmenge und es gibt unendlich viele projektive Kurven im Komplement $U = \mathbb{P}^2 - D$ (zum Beispiel unendlich viele Geraden). Das steht aber im Widerspruch zur Wahl von U.

QED.

(k) Die relative Minimalität der quadratischen Fläche Q im $\mathbb{P}^3$

Die Quadrik $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ist relativ minimal.

Beweis. Bezeichne F die Matrix der quadratischen Gleichung der Fläche

$$Q = V(xz - yw) \subseteq \mathbb{P}^3.$$

Die linearen Transformationen des $\mathbb{P}^3$, die die Fläche Q in sich abbilden, kann man identifizieren mit den 4×4-Matrizen A mit

$$A^T FA = F.$$

Diese bilden also insbesondere eine algebraische Varietät, die wir mit

$$G$$

bezeichnen wollen. G besitzt die Struktur einer algebraischen Gruppe. Insbesondere ist G glatt. Damit sind je zwei Komponenten von G disjunkt. Bezeichne

$$G^0$$

die Komponenten von G, welche das neutrale Elemente enthält. Alle anderen Komponenten von G sind als algebraische Varietäten isomorph zu G^0. Sei jetzt

$$c_0 = (x_0, y_0) \in C \subseteq Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

ein vorgegebener Punkt. Wir wählen einen Punkt $z_0 \in \mathbb{P}^1$, der von x_0 und y_0 verschieden ist. Die Verschiebung mit den Elementen von k definiert dann eine Gruppe von Automorphismen von

$$\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 - \{z_0\},$$

die transitiv auf den Punkten von $\mathbb{P}^1 - \{z_0\}$ operiert. Aus dieser Bemerkung ergibt sich, daß G^0 eine Untergruppe enthält, die transitiv auf den Punkten von

$$(\mathbb{P}^1 - \{z_0\}) \times (\mathbb{P}^1 - \{z_0\})$$

operiert. Insbesondere gibt es für jede Kurven $C \subseteq Q$ ein $\varphi \in G^0$ mit $\varphi(C) \neq C$.

Angenommen, Q ist nicht relative minimal. Dann gibt es eine Ausnahme-Kurve $C \subseteq Q$ und nach (i) eine offene Menge U,

$$C \subseteq U \subseteq Q,$$

mit der Eigenschaft, daß jede projektive Kurve, die ganz in U liegt, eine Komponente von C ist. Es reicht zu zeigen, es gibt ein $\varphi \in G$ mit

$$\varphi(C) \neq C \text{ und } \varphi(C) \subseteq U.$$
Dazu reicht es zu zeigen, die folgenden beiden Mengen sind offen.
$$\{\varphi\in G^0 \mid \varphi(C) \subseteq U\}$$
$$\{\varphi\in G^0 \mid \varphi(C) \neq C\}$$
Auf Grund der obigen Beobachtungen sind diese Mengen nämlich nicht leer und haben deshalb in der irreduziblen Mengen G^0 einen nicht-leeren Durchschnitt. Anstelle der Offenheit dieser Mengen beweisen wir die Abgeschlossenheit ihrer Komplemente, d.h. die Abgeschlossenheit der Mengen

(1) $$\{\varphi\in G^0 \mid \varphi(C)\cap (Q-U) \neq \emptyset\}$$

(2) $$\{\varphi\in G^0 \mid \varphi(C) = C\}$$

Die Menge (2) stimmt mit der Menge

(2') $$\{\varphi\in G^0 \mid \varphi(C) \subseteq C\}$$

überein: da φ ein Automorphismus ist besteht die Kurve $\varphi(C)$ aus derselben Anzahl von Komponenten wie C und die Inklusion $\varphi(C) \subseteq C$ bedeutet, jede Komponente von $\varphi(C)$ liegt ganz in einer Komponente von C und stimmt deshalb mit dieser überein. Aus der Inklusion ergibt sich daher die Gleichheit. Beweisen wir die Abgeschlossenheit der Menge (2'). Die Menge ist gleich dem Durchschnitt der Mengen
$$F_c := \{\varphi\in G^0 \mid \varphi(c) \in C\} \text{ mit } c\in C.$$
Es reicht also die Abgeschlossenheit der F_c zu beweisen. Bezeichne
$$\mu: G^0\times Q \to Q,\ (\varphi, x) \mapsto \varphi(x),$$
den Morphismus, der die Operation von G^0 auf Q beschreibt. Dann gilt
$$F_c\times\{c\} = \mu^{-1}(C)\cap(G^0\times\{c\}),$$
d.h, $F_c\times\{c\}$ ist abgeschlossen in $G^0\times\{c\}$. Dann ist aber F_c abgeschlossen in G^0,
Wir haben noch die Abgeschlossenheit der Menge (1) zu beweisen. Sei
$$\Gamma := \{(\varphi,x)\in G^0\times Q \mid \mu(\varphi, x) = \varphi(x) \in D:= Q - U\}.= \mu^{-1}(D).$$
Diese Menge ist abgeschlossen in $G^0\times Q$ (wegen der Stetigkeit von μ). Die Menge (1) ist aber das Bild von Γ bei der Projektion
$$G^0\times Q \to G^0$$
auf den ersten Faktor. Weil Q ein projektive Varietät ist, bildet diese Projektion abgeschlossene Mengen (d.h. projektive Teilvarietäten) in abgeschlossene Mengen ab.
QED.

(l) Zur Eindeutigkeit der relativ minimalen Modelle im Flächenfall

Obwohl die obigen Argumente etwas anderes suggerieren, sind die minimalen Modelle von algebraischen Flächen in gewissem Sinne doch eindeutig bestimmt. Man braucht nämlich nur die Flächen auszuschließen die birational isomorph sind zu einer Fläche der Gestalt
$$C\times\mathbb{P}^1$$
mit einer Kurve C. Flächen dieser Art heißen Regelflächen. Zum Beweis siehe den Satz von Enriques,

Beauville, A.: Surfaces complexes algébriques complexes, Asterisque 54 (1978), (über $\mathbb{C}$)

Šafarevič, I.R.: Algebraische Flächen, Geest & Portig, Leipzig 1968

Die Theorie der minimalen Modelle in höheren Dimensionen ist sehr viel komplizierter (vgl. die Arbeiten von Mori und Kollar).
Bemerkung

Wir wenden uns jetzt dem Problem der Auflösung der Singularitäten von Kurven zu. Die Auflösung der Singularitäten ist im Kurvenfall besonders einfach. Die zugehörige algebraische Konstruktion heißt Normalisierung.

4.5 Normale Varietäten

4.5.1 Normalität

(a) Normale Ringe

Seien A ein nullteilerfreier Ring und K = Q(A) dessen Quotientenkörper. Der Ring A heißt ganz abgeschlossen oder auch normal, wenn jedes Element von K, welches ganz ist über A, selbst schon in A liegt.

Beispiel

Jeder ZPE-Ring ist ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper.

Beweis. Sei A ein ZPE-Ring und $\alpha = \frac{a}{b} \in Q(A)$ ein über A ganzes Element. Wir können annehmen, die Elemente $a,b\in A$ sind teilerfremd. Nach Vorraussetzung besteht eine Relation der Gestalt

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_n = 0 \text{ in } Q(A)$$

mit $a_1,...,a_n \in A$. Wir multiplizieren mit b^n und erhalten die Relation

$$a^n + a_1a^{n-1}b + a_2a^{n-2}b^2 + ... + a_nb^n = 0 \text{ in } A.$$

Aus dieser Relation folgt aber, b teilt a^n. Dann können aber a und b unmöglich teilerfremd sein, es sei denn b ist eine Einheit. Im letzteren Fall gilt aber $\alpha\in A$.

QED.

(b) Normalität von irreduziblen Varietäten

Eine affine irreduzible Varietät X heißt normal, wenn deren affiner Koordinatenring normal ist. Eine quasi-projektive irreduzible Varietät heißt normal, wenn sie eine affine offene Überdeckung besitzt, die aus normalen Varietäten besteht.

Bemerkung

Wir zeigen demnächst, glatte irreduzible Varietäten sind normal (vgl. Theorem 1).

(c) Beispiel für eine irreduzible Kurve, die nicht normal ist

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^2$ die affine Kurve mit der Gleichung

$$y^2 = x^2 + x^3.$$

Zeigen wir, diese Kurve ist nicht normal. Es gilt[181]

$$k[X] = k[x,y]/(f) \quad , f := y^2 - x^2 - x^3,$$

und die Funktion $t := \frac{y}{x}|_X \in k(X)$ ist ganz über k[X], denn sie genugt der Relation

$$t^2 = 1 + x .$$

Zum Beweis, der Aussage, daß X nicht normal ist, reicht es zu zeigen, t liegt selbst nicht in k[X],

$$t \notin k[X].$$

Angenommen, doch. Dann gibt es ein Polynom $p(x,y) \in k[x,y]$ mit

$$\frac{y}{x} = \frac{p(x,y)}{1} \text{ in } k(X),$$

d.h. es gibt ein nicht durch f teilbares Polynom q(x,y) mit

---

[181] Nach dem Eisenstein-Kriterium ist das Polynom $y^2 - x^2 - x^3$ über k[x] irreduzibel, da das Absolutglied durch das Primelement $x+1\in k[x]$ teilbar ist, jedoch nicht durch dessen Quadrat.

$$(y - x\cdot p(x,y))\cdot q(x,y) = 0 \text{ in } k[X],$$

d.h.

$$(y - x\cdot p(x,y))\cdot q(x,y) \cong 0 \bmod f.$$

Da f irreduzibel ist und q nicht durch f teilbar, muß sogar

$$y - x\cdot p(x,y) \cong 0 \bmod f.$$

gelten. Wir können p modulo f abändern und dafür sorgen, daß y höchstens linear in p vorkommt, d.h. wir können annehmen, p hat die Gestalt

$$p(x,y) = g(x) + h(x)\cdot y$$

mit Polynomen $g(x), h(x) \in k[x]$. Damit gilt

$$y - x\cdot g(x) + xy\cdot h(x) \cong 0 \bmod f,$$

d.h.

$$y\cdot(1 + xh(x)) - x\cdot g(x) \in fk[x,y].$$

Links steht ein in y lineares Polynom. Da y in f quadratisch vorkommt, ist das Polynom links nur dann ein Vielfaches von f, wenn es Null ist,

$$y\cdot(1 + xh(x)) - x\cdot g(x) = 0 \text{ in } k[x,y],$$

d.h.

$$y\cdot(1 + xh(x)) = x\cdot g(x) \text{ in } k[x,y],$$

Letzteres ist nicht möglich, weil das Primelement x des Polynomrings k[x,y] weder ein Teiler von y noch einer von $1 + xh(x)$ ist. Dieser Widerspruch zeigt, t liegt nicht k[X].

Bemerkung

Das angegebene Beispiel ist eine singuläre Kurve. Geben wir als nächstes ein Beispiel einer singulären Varietät an, die normal ist.

(d) Beispiel einer singulären Fläche, welche normal ist

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^3$ die affine Fläche mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Dies ist offensichtlich ein Kreiskegel mit der Spitze im Ursprung. Wir nehmen an, der Grundkörper habe eine von 2 verschiedenen Charakteristik,

$$\text{char}(k) \ne 2.$$

Zeigen wir, die angegebene Fläche ist dann normal. Es gilt[182]

$$k[X] = k[x,y,z]/(f) \text{ mit } f = x^2 + y^2 - z^2.$$

Der Körper k(X) ist eine quadratische Erweiterung des Körpers k(x,y) mit dem Minimalpolynom f, d.h. es gilt

(1) $$k(X) = k(x,y) + k(x,y)\cdot z,$$

wobei wir für die Restklasse eines Polynoms in k(X) dieselbe Bezeichnung verwenden wie für das Polynom selbst. Insbesondere kann man die Elemente x und y in k(X) wie Unbestimmte behandeln (sie sind dort algebraisch unabhängig). Für den Teilring k[X] von k(X) erhalten wir

(2) $$k[X] = k[x,y] + k[x,y]\cdot z\ .$$

Aus den Relationen (1) und (2) lesen wir ab, ein Element

$$u + v\cdot z \quad (u,v\in k(x,y))$$

gilt

(3) $$u + v\cdot z \in k[X] \Leftrightarrow u,v\in k[x,y].$$

Wegen (2) ist k[X] ein endlicher Modul über k[x,y]. Insbesondere ist jedes Element von k[X] ganz über k[x,y].

Sei jetzt

$$\alpha = u + v\cdot z \in k(X),\ u,v \in k(x,y),$$

---

[182] Nach dem Eisenstein-Kriterium ist das Polynom f über k[x,z] irreduzibel, weil sein Absolutglied

$$x^2 - z^2 = (x+z)(x-z)$$

durch das Primelement x+z teilbar ist, jedoch nicht durch dessen Quadrat.

ein über k[X] ganzes Element. Wir wollen zeigen, dann gilt $\alpha\in k[X]$. Da α ganz ist über k[X], ist es auch ganz über k[x,y]. Das Minimalpolynom von α über k(x,y) hat die Gestalt[183]

$$g(T) := T^2 - 2u\cdot T + (u^2 - (x^2+y^2)v^2).$$

Wie wir früher gesehen haben, hat das Minimalpolynoms eines über einem ZPE-Ring ganzen Elements Koeffizienten in diesem ZPE-Ring (vgl. Zwischenbemerkung im Beweis des Lemmas zu Theorem 5 in 1.6.2 (h)). Deshalb gilt

$$2u\ ,\ u^2 - (x^2+y^2)v^2 \in k[x,y].$$

Da die Charakteristik von k ungleich 2 sein soll, folgt

$$u\ ,\ (x^2+y^2)v^2 \in k[x,y].$$

Nun ist $x^2+y^2 = (x + iy)(x - iy)$ das Produkt von zwei teilerfremden Elementen[184] (d.h. die Zerlegung in irreduzible Faktoren ist quadratfrei). Deshalt gilt
$v \in k[x,y]$. Wir haben gezeigt,

$$\alpha = u + v\cdot z \in k[x,y] + k[x,y]\cdot z = k[X].$$

(e) Normalität und ganze Abgeschlossenheit der lokalen Ringe

Eine irreduzible algebraische Varietät X ist genau dann normal, wenn ihre lokalen Ringe ganz abgeschlossen sind.

Beweis. Da die Definition der Normalität lokalen Charakter trägt, können wir annehmen, X ist affin.

Nehmen wir zunächst an, X ist normal, d.h. k[X] ist ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper k(X). Wir haben zu zeigen, für $x\in X$ ist auch der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ganz abgeschlossen in k(X). Sei $\alpha\in k(X)$ ganz über $\mathcal{O}_{X,x}$, d.h. es bestehe ein Relation der Gestalt

(1) $$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_n = 0 \text{ in } k(X)$$

mit $a_i\in \mathcal{O}_{X,x}$ für alle i. Wir schreiben

$$a_i = \frac{b_i}{c_i} \text{ mit } b_i\ ,\ c_i \in k[X] \text{ und } c_i(x) \neq 0.$$

und setzen

$$d_0 := c_1\cdot...\cdot c_n.$$

Wir multiplizieren die Identität (1) mit d_0^n und erhalten eine Relation der Gestalt

(1) $$(d_0\alpha)^n + a'_1(d_0\alpha)^{n-1} + ... + a'_n = 0 \text{ in } k(X)$$

---

[183] Wir ignorieren den Fall, daß α selbst schon in k(x,y) liegt, denn dann liegt α sogar in $k[x,y] \subseteq k[X]$ und es ist nichts zu beweisen. Wenn aber α nicht in k(x,y) ist das Minimalpolynom quadratisch (da k(X) nach (1) den Körpergrad 2 über k(x,y) hat. Das angegebene Polynom ist ein quadratisches Polynom über k(x,y) mit der Nullstellen α, d.h. es ist das Minimalpolynom:

$$\begin{aligned} g(u + v\cdot z) &= u^2 + v^2z^2 + 2uvz - 2u^2 - 2uvz + u^2 - (x^2+y^2)v^2 \\ &= v^2z^2 - (x^2+y^2)v^2 \\ &= 0 \text{ in } k(X). \end{aligned}$$

[184] Aus $(x + iy) = e\cdot(x - iy)$ mit einer Einheit $e\in k[x,y]$ folgt deg e = 0, d.h. $e \in k$ und durch Koeffizientenvergleich bezüglich x, e = 1, also x + iy = x - iy, was offensichtlich falsch ist.

mit $a'_i \in k[X]$ für alle i. Mit anderen Worten $d_0\alpha$ ist ganz über k[X]. Da k[X] ganz abgeschlossen ist, folgt $d_0\alpha\in k[X]$. Wegen $d_0(x) \ne 0$ ist damit aber $\alpha\in \mathcal{O}_{X,x}$. Wir haben gezeigt, der Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ist ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper.

Seien jetzt umgekehrt die Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ mit $x\in X$ sämtlich ganz abgeschlossen in k(X). Wir haben zu zeigen, dann ist auch k[X] ganz abgeschlossen in k(X). Sei $\alpha\in k(X)$ ganz über k[X], d.h. es bestehe eine Identität der Gestalt (1) mit $a_i\in k[X]$ für alle i. Dann ist α für jedes $x\in X$ ganz über $\mathcal{O}_{X,x}$, liegt also in $\mathcal{O}_{X,x}$. Mit anderen Worten α ist ein in x reguläre Funktion. Da dies für jedes $x\in X$ gilt, folgt $\alpha\in k[X]$.
QED.

(f) Theorem 1: Normalität der glatten Varietäten
Jede (irreduzible) nicht-singuläre Varietät X ist normal.
Beweis. Sei X eine nicht-singuläre Varietät. Nach (e) reicht es zu zeigen, jeder der Ringe

$$\mathcal{O}_{X,x} \text{ mit } x\in X$$

ist normal. Nun ist jeder Punkt $x\in X$ ein nicht-singulärer Punkt, also $\mathcal{O}_{X,x}$ ein ZPE-Ring. Nach dem Beispiel von (a) sind solche Ringe aber ganz abgeschlossen in ihrem Quotientenkörper.
QED.

(g) Theorem 2: Das Ideal einer Teilvarietät der Kodimension 1 in einem allgemeinen Punkt einer normalen Varietät
Seien X eine (irreduzible) normale Varietät und

$$Y \subset X$$

eine Teilvarietät der Kodimension 1.
Dann gibt es eine affine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit

$$Y\cap U \ne \emptyset$$

derart, daß das Ideal von $Y\cap U$ in k[U] ein Hauptideal ist.
Beweis. Wir wählen einen Punkt $x\in Y$, der nur eine Komponente der Kodimension 1 enthält. Indem wir X durche eine hinreichend kleine affine Umgebung dieses Punktes ersetzen, erreichen wir, daß

X affin und Y irreduzibel

ist. Sei f ein von Null verschiedenes Element des Ideals $I(Y) \subseteq k[X]$,

$$0 \ne f \in I(Y) \subseteq k[X].$$

Dann gilt $Y \subseteq V(f)$ und $\operatorname{codim}_X V(f) = 1$. Insbesondere ist Y eine Komponente von V(f),

$$V(f) = Y \cup \bar{Y}, Y\not\subseteq \bar{Y}.$$

Aus Dimensionsgründen ist $\bar{Y}$ ein echte Teilmenge von X. Wir können X durch $X - \bar{Y}$ uns Y durch $Y-\bar{Y}$ ersetzen und erreichen (durch anschließenden Übergang zu einer affinen Teilmenge), daß gilt

$$Y = V(f).$$

Wir wollen zeigen, daß Ideal

$$I(Y) \subseteq k[X]$$

ist (nach Übergang zu eiuer affinen offenen Teilmenge) ein Hauptideal, d.h. wir wollen ein Element

$$u\in I(Y)$$

finden mit der Eigenschaft, daß alle Elemente von I(Y) durch u teilbar sind,

$$\frac{I(Y)}{u} \subseteq k[X].$$

Dazu reicht es, die Existenz eines Elementes $v \in k(X)$ zu beweisen mit den folgenden beiden Eigenschaften.

1. $I(Y)v \subseteq k[X]$
2. $I(Y)v \nsubseteq I(Y)$.

Aus der Existenz von v folgt nämlich die Existenz eines $u \in I(Y)$ mit

$$w := uv \notin I(X).$$

Wir können X durch X - V(w) ersetzen und erreichen, daß w umkehrbar wird im neuen Koordinatenring k[X - V(w)]. Wegen $w \notin I(X)$ gilt

$$Y \nsubseteq V(w),$$

d.h. beim Übergang zu X-V(w) bleibt Y nicht-leer. Nach Konstruktion gilt

$$u \in I(Y)$$

und

$$\frac{I(Y)}{u} = \frac{I(Y)v}{w} \subseteq I(Y)vk[X\text{-}V(w)] \subseteq k[X\text{-}V(w)].$$

Mit anderen Worten, indem man X durch X-V(w) ersetzt, erreicht man, daß u ein Element der gesuchten Art wird.

Es reicht also, die Existenz eines $v \in k(X)$ zu beweisen, welches den Bedingungen 1 und 2 genügt. Man beachte, anstellen von 2. genügt des die folgende Relation zu beweisen.

2'. $v \notin k[X]$.

Wäre nämlich unter den Bedingungen 1 und 2' die Bedingung 2 nicht erfüllt,

$I(Y)v \subseteq I(Y)$,

so wäre, da I(Y) als k[X]-Modul endlich erzeugt ist, das Element v ganz (auf Grund des nachfolgenden Lemmas) über k[X], d.h. es würde $v \in k[X]$ gelten im Widerspruch zu 2'. Es reicht also, die Existenz eines $v \in k(X)$ zu beweisen, für welches 1 und 2' gelten.

Wegen Y = V(f) gibt es nach dem Nullstellensatz ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$I(Y)^m \subseteq f \cdot k[X].$$

Das Produkt von je m Elementen aus I(Y) ist also durch f teilbar. Sei m minimal bezüglich dieser Eigenschaft gewählt. Dann gibt es Elemene

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in I(Y)$$

mit

$$g := \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_{m-1} \notin f \cdot k[X]$$

und

$$I(X)g \subseteq f \cdot k[X].$$

Mit anderen Worten,

$$v := \frac{g}{f}$$

ist ein Element der gesuchten Art.

QED.

(h) Lemma: Kriterium für ganze Elemente

Sei A ein Integritätsbereich und $v \in Q(A)$. Falls es einen exakten[185] A[v]-Modul M gibt, welcher als A-Modul endlich erzeugt ist, so ist v ganz über A.

Beweis. Sei

$$M = Am_1 + \ldots + Am_r .$$

Dann gibt es $a_{ij} \in A$ mit

[185] Aus $x \in A[v]$ und $xM = 0$ folgt $x = 0$ (d.h. $\mathrm{Ann}_A M = 0$).

$$vm_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}m_j$$

d.h.

$$\sum_{j=1}^{r} (a_{ij} - v\delta_{ij})m_j = 0.$$

Es folgt

$$\det(a_{ij} - v\delta_{ij})\cdot m_l = 0$$

für alle l, d.h.

$$\det(a_{ij} - v\delta_{ij})\cdot M = 0.$$

Weil M exakt ist, folgt

$$\det(a_{ij} - v\delta_{ij}) = 0,$$

d.h. v ist ganz über A.
QED.

(i) Theorem 3: Die Kodimension des singulären Orts von normalen Varietäten

Sei X ein (irreduzible) normale Varietät. Dann besitzt die Menge der singulären Punkte von X in X eine Kodimension ≥ 2.
Beweis. Sei

$$n = \dim X.$$

Wir bezeichnen mit

$$S$$

die Menge der singulären Punkte von X. Wir wissen bereits, S ist eine abgeschlossene Teilmenge von X. Angenommen, S besitzt eine irreduzible Komponente Y der Dimension n-1,

$$\dim Y = n-1.$$

Wir wählen eine nach (g) existierende affine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit

$$Y \cap U \neq \emptyset$$

derart, daß das Ideal von Y in U ein Hauptideal ist,

$$I(Y\cap U) = u\cdot k[U].$$

Insbesondere ist

(1) $$k[Y\cap U] = k[U]/(u).$$

Die affine Varietät $Y\cap U$ besitzt mindestens einen nicht-singulären Punkt

$$y \in Y\cap U.$$

Aus (1) erhalten wir durch Übergang zu den Quotientenring bezüglich der zu y gehörigen maximalen Ideale

(2) $$\mathcal{O}_{Y\cap U,y} = \mathcal{O}_{U,y}/(u).$$

Da y ein ein nicht-singulärer Punkt von $Y\cap U$ ist, wird das maximale Ideal $m_{Y\cap U,y}$ von $\mathcal{O}_{Y\cap U,y}$ von n-1 = dim Y Elementen erzeugt,

$$m_{Y\cap U,y} = (u_1,...,u_{n-1}).$$

Bezeichne $v_i \in \mathcal{O}_{U,y}$ einen Repräsentanten von u_i. Dann wird wegen (2) das maximale Ideal $m_{U,y}$ von $\mathcal{O}_{U,y}$ von n = dim U Elementen erzeugt,

$$m_{U,y} = (v_1,...,v_{n-1},u).$$

Insbesondere ist ist y ein nicht-singulärer Punkt von $U \subseteq X$. Das steht aber im Widerspruch zur Wahl von y,

$$y \in Y \subseteq S \subseteq X.$$

Die Annahme, daß S eine Komponente der Dimension n-1 besitzt, ist also falsch.

QED.

(j) Folgerung: der Fall von Kurven

Für algebraische Kurven stimmen die Begriffe der Normalität und der Glattheit überein.
Beweis. Folgt aus (i).
QED.

(k) Abschließende Bemerkungen

1. Beim Beweis von (f) (glatte Varietäten sind normal) wurde die Glattheit nicht im vollem Umfang benutzt. Wir haben lediglich die Tatsache verwendet, daß die lokalen Ringe solcher Varietäten ZPE-Ringe sind. Varietäten, deren lokale Ringe ZPE-Ringe sind, heißen auch faktorielle Varietäten. Genauer gelten also die beiden folgenden Aussagen:
(a) Jede nicht-singuläre Varietät ist faktoriell.
(b) Jede faktorielle Varietät ist normal.
2. Man kann zeigen, je zwei der drei genannten Klassen von Varietäten (nicht-singuläre, faktorielle bzw. normale Varietäten) sind verschieden., Man kann zum Beispiel zeigen,

(c) Eine Hyperfläche im $\mathbb{A}^n$ mit $n \ge 5$ mit genau einem singulären Punkt ist faktorielle (vgl. Grothendieck [14], XI, 3.14).

3, Ein Beispiel für eine faktoriellen Fläche mit Singularität ist durch die folgende Gleichung gegeben.

$$x^2 + y^3 + z^5 = 0.$$

4. Ein Beispiel für eine normale Fläche, die nicht faktoriell ist, ist der folgende Kegel.[186]

$$z^2 = (x+iy)(x-iy).$$

5. Nach (i) hat der singuläre Ort einer normalen Varietät eine Kodimension ≥ 2. Solche Varietäten heißen regulär in der Kodimension 1. Die Klasse der Varietäten, welche regulär in der Kodimension 1 sind, ist ebenfalls verschieden von der Klasse der normalen Varietäten.

6. Wir wollen hier sogar eine Fläche angeben mit nur einen singulären Punkt, welche nicht normal ist. Dazu genügt es eine reguläre Abbildung

$$f: \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^4$$

mit den folgenden Eigenschaften anzugeben.

α) $X := f(\mathbb{A}^2)$ ist abgeschlossen im $\mathbb{A}^4$.

β) $f: \mathbb{A}^2 \to X$ ist endlich.

γ) Es gibt einen Punkt $x \in X$, mit einem Urbild $f^{-1}(x) = \{y_1, y_2\}$ aus zwei Elementen derart, daß f einen Isomorphismus $\mathbb{A}^2 - \{y_1, y_2\} \to X - \{x\}$ induziert.

Dann ist nämlich X wegen γ) nicht-normal und x ist der einzige singuläre Punkt von X.
7. Konstruktion einer Abbildung f wie in 6. Wir setzen

$$f(x,y) := (x, xy, y(y-1), y^2(y-1)).$$

Seien u,v,w,t die Koordinaten im $\mathbb{A}^4$. Dann gilt, wie man leicht einsieht,

$$X = V(ut-vw, w^3-t(t-w), u^2w - v(v-u)).$$

Wegen $x = u$ und $y^2-y = w$ sind x und y ganz über k[X], d.h. die Abbildung f ist endlich. Der einzige singuläre Punkt von X ist der Ursprung. Sein Urbild besteht aus

[186] Die Normalität wurde in (d) bewiesen. Die Gleichung des Kegels besagt gerade, daß es zwei verschiedene Zerlegungen von z^2 gibt.

den Punkten (0,0) und (0, 1). Außerhalb des Ursprungs ist die folgende Abbildung invers zu f,

$$g(u,v,w,t) = (u, \frac{v}{u} = \frac{t}{w})$$

Man beachte, wenn u = w = 0 gilt, so sind auf Grund der Gleichungen von X alle Koordinaten Null.

4.5.2 Normalisierung affiner Varietäten

(a) Ein Beispiel

Betrachten wir ein einfaches Beispiel einer nicht-normalen Varietät, sagen wir,

$$X := V(f) \subseteq \mathbb{A}^2 , f := y^2 - x^2 - x^3.$$

Diese Kurve besitzt eine Parametrisierung mit dem Parameter

$$t = \frac{y}{x},$$

namlich[187]

$$x = t^2 - 1, y = t\cdot(t^2-1).$$

Diese Parametrisierung definiert eine reguläre Abbildung

$$f: \mathbb{A}^1 \to X, t \mapsto (t^2 -1, t\cdot(t^2-1)),$$

und damit eine Einbettung

$$k[X] \subseteq k[t].$$

Die Abbildung f ist ein birationaler Isomorphismus. Deshalb gilt

$$k[X] \subseteq k[t] \subseteq k(t) = k(X).$$

Die affine Gerade $\mathbb{A}^1$ ist normal (weil singularitätenfrei), d.h. der Polynomring k[t] ist ganzabgeschlossen. Es gilt:

(1) k[t] ist der Ring aller Elemente von k(X), die ganz sind über k[X].

Es gilt nämlich k[t] = k[X][t] und $t^2 = x + 1$, d.h. k[t] ist isomorph zu einem Faktorring von

$$k[X][T]/(T^2 - x-1),$$

d.h. k[t] ist ein endlich erzeugter k[X]-Modul. Sämtliche Elemente von k[t] sind damit ganz über k[X]. Umgekehrt muß jedes über k[X] ganze Element von k(X) bereits in k[t] liegen (da k[t] ganz abgeschlossen ist).

Geometrisch bedeutet (1), die Abbildung f ist endlich.

Unser Ziel in diesem Abschnitt besteht darin, für jede irreduzible affine Varietät X eine endliche reguläre Abbildung

$$f: X' \to X$$

mit einer normalen Varietät X' zu konstruieren. Wir beginnen mit einer Definition,.

(b) Definition: Normalisierung einer irreduziblen Varietät

Sei X ein irreduzible Varietät. Unter einer Normalisierung von X versteht man eine endliche reguläre Abbildung

$$\nu: X^\nu \to X$$

mit X^ν normal, welche ein birationaler Isomorphismus ist. Oft spricht man dann auch von X^ν als von der Normalisierung von X (und betrachtet den Morphismus als gegeben).

---

[187] $x^2 + x^3 = x^2(x+1) = (t^2-1)^2\cdot t^2 = y^2$.

(c) Theorem 4: Existenz der Normalisierung im affinen Fall

Sei X eine affine irreduzible Varietät. Dann gibt es eine Normalisierung $\nu: X^\nu \to X$ von X mit X^ν affin.

Beweis. Bezeichne A die ganze Abschließung von k[X] in k(X).
Dann ist A ein Teilring von k(X) [188] und ist nach Konstruktion ganz abgeschlossen in k(X)[189].

1. Schritt. Reduktion auf die Existenz einer affinen Varietät X' mit A = k[X'].
Falls eine solche affine Varietät X' existiert, ist diese Konstruktion normal und die natürliche Einbettung

$$k[X] \subseteq A = k[X']$$

definiert eine reguläre Abbildung

$$f:X' \to X.$$

Weil A im Quotientenkörper des Teilrings k[X] liegt, induziert f einen Isomorphismus der rationalen Funktionenkörper, d.h. f ist ein birationaler Isomorphismus. Weiter ist A als Koordinatenring der affinen Varietät X' endlich erzeugt und entsteht aus k[X] durch Ringadjunktion von endlich vielen ganzen Elementen, d.h. A = k[X'] ist als k[X]-Modul endlich erzeugt, d.h. die reguläre Abbbildung f ist endlich. Es reicht also tatsächlich, zu zeigen, daß es eine affine Varietät X' gibt mit

$$A = k[X'].$$

2. Schritt. Reduktion auf die Aussage, daß A als k[X]-Modul endlich erzeugt ist.
Als Teilmodul von k(X) ist A ein Integritätsbereich. Ist A als Modul endlich erzeugt, so ist A erst recht also k[X]-Algebra endlich erzeugt (und umgekehrt). Damit ist A isomorph zum Faktorring eines Polynomrings, sagen wir

$$A = k[T_1,....,T_N]/I$$

mit einem Ideal I. Wir können dann $X' = V(I) \subseteq \mathbb{A}^N$ setzen. Weil A ein Integritätsbereich ist, ist die algebraische Varietät X' automatisch irreduzibel.

---

[188] Die ganze Abschließung A eines Integritätsbereiches B ist definiert als die Menge aller Elemente des Quotientenkörpers K := Q(B), die ganz sind über B. Es gilt:

Lemma 1

Sei B ein noetherscher Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper K = Q(B). Dann ist die ganze Abschließung A von B in K ein Ring.

Beweis. Für je zwei Elemente α, $\beta\in A$ sind $B[\alpha]$ und $B[\beta]$ endlich erzeugte B-Moduln,

$B[\alpha] = B\cdot 1 + B\cdot\alpha + ... + B\cdot\alpha^a$ (das Ganzheitspolynom von α hat den Grad a+1)

$B[\beta] = B\cdot 1 + B\cdot\beta + ... + B\cdot\beta^b$ (das Ganzheitspolynom von β hat den Grad b+1).

Dann ist aber auch

$$B[\alpha,\beta] = B[\alpha] + ... + B[\alpha]\cdot\beta^b = \sum_{0\le i\le a, 0\le j\le b} B\alpha^i\beta^j$$

ein endlicher B-Modul. Da B noethersch ist, sind damit auch die von $\alpha+\beta$ und $\alpha\cdot\beta$ erzeugten Algebren als B-Moduln endlich erzeugt, d.h. $\alpha+\beta$ und $\alpha\cdot\beta$ sind ganz über B und liegen damit in A. Wir haben gezeigt, A ist ein Teilring von k(X).

QED.

[189] **Lemma 2**

Sei B ein noetherscher Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper K = Q(B). Dann ist die ganze Abschließung A von B in K ganz abgeschlossen in K.

Beweis. Sei $\alpha\in K$ ganz über A. Wir wählen ein Ganzheitspolynom für α über A und adjungieren dessen Koeffizienten zu B. Als Ergebnis erhalten wir einen Ring B' zwischen B und A,

$$B \subseteq B' \subseteq A.$$

Da B' durch Adjunktion von endlich vielen ganzen Elementen entsteht, ist B' als B-Modul endlich erzeugt. Nach Konstruktion ist α ganz über B', d.h. $B'[\alpha]$ ist als B'-Modul und damit als B-Modul endlich erzeugt. Dann ist aber auch der Teilmodul $B[\alpha]$ als B-Modul endlich erzeugt, d.h. α ist ganz über B, d.h. α liegt in A.

QED.

3. Schritt. Reduktion auf die Aussage der nachfolgenden Proposition.
Wir haben die folgenden Inklusionen.

$$\begin{array}{ccc} k[X] & \subseteq & A \\ \cap & & \cap \\ k(X) & = & k(X) \end{array}$$

Im Zusammenhang mit der Dimensionstheorie hatten wir früher gesehen, daß es einen endlichen Morphismus

$$X \to \mathbb{A}^n$$

gibt mit n = dim X. Dieser induziert eine Inklusion

$$B := k[T] = k[T_1,...,T_n] \subseteq k[X],$$

derart, daß k[X] ganz ist über k[T]. Insbesondere damit auch A ganz über k[T], d.h. A ist die ganze Abschließung von k[T] in K(X),

$$\begin{array}{ccc} B & \subseteq & A \\ \cap & & \cap \\ k(T) & \subseteq & k(X) \end{array}$$

Der Körper k(X) wird über k und damit über k(T) erzeugt von endlich vielen Elementen aus k[X]. Diese sind ganz über B, also algebraisch über k(T). Mit anderen Worten, k(X) ist eine endlich erzeugte algebraische Körpererweiterung von k(T) und damit eine endliche Körpererweiterung von k(T).
Die Behauptung gilt deshalb auf Grund der nachfolgenden Proposition.
QED.

(d) Proposition:die ganze Abschließung eines Polynomrings in einer endliche Erweiterung des Quotientenkörpers
Seien B := k[T] ein Polynomring, L := k(T) dessen Quotientenkörper und K/L eine endliche Körpererweiterung. Dann ist die ganze Abschließung A von B in K als B-Modul endlich erzeugt.

$$\begin{array}{ccc} B & \subseteq & A \\ \cap & & \cap \\ L & \subseteq & K \end{array}$$

Beweis. 1. Schritt. Reduktion auf den Fall, daß K separabel ist über L.
Sei

$$K = L(\alpha_1,...,\alpha_s).$$

Falls α_1 nicht separabel ist über L, so besitzt die irreduzible Gleichung dieses Elements die Gestalt

(1) $$\alpha_1^{mp^s} + a_1\alpha_1^{(m-1)p^s} + ... + a_m = 0 \text{ mit } a_1,...,a_m \in L.$$

Insbesondere ist $\alpha_1^{p^s}$ separabel über L. Wir schreiben

$$a_i = b_i^{p^s} \text{ mit } b_i \in L' := k(\sqrt[p^s]{T_1},..., \sqrt[p^s]{T_n})$$

und setzen

$$K' := K(\sqrt[p^s]{T_1},..., \sqrt[p^s]{T_n})$$

$$B' := k[\sqrt[p^s]{T_1},..., \sqrt[p^s]{T_n}]$$

$$L' := Q(B') = k(\sqrt[p^s]{T_1},..., \sqrt[p^s]{T_n})$$

Weiter sei A’ die ganze Abschließung von B’ in K’. Wir haben dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & A \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& B' \arrow[rr] \arrow[dd] & & A' \arrow[dd] \\
L \arrow[rr] \arrow[dr] & & K \arrow[dr] & \\
& L' \arrow[rr] & & K'
\end{tikzcd}$$

Aus (1) ergibt sich durch ziehen der p^s-ten Wurzel

(1) $$\alpha_1^m + b_1\alpha_1^{m-1} + ... + b_m = 0 \text{ mit } b_1,...,b_m \in L',$$

d.h. α_1 ist separabel über L’. Falls nun die Behauptung für L’,K’,B’,A’ anstelle von L,K,B,A gilt, d.h. wenn A’ als B’-Modul endlich erzeugt ist, so ist B’ auch als B-Modul endlich erzeugt und dasselbe gilt für den Teilmodul A, d.h. es gilt die Behauptung. Damit haben wir die Aussage auf den Fall, daß α_1 separabel ist zurückgeführt. In diesem Fall läßt sich aber K über L bereits durch s-1 Elemente erzeugen (nach dem Satz vom primitiven Element). Wir wiederholen die obigen Betrachtungen s-1 mal und reduzieren so den Beweis auf den Fall, daß K über L separabel ist.

2. Schritt. Der Fall K/L separabel.

Der Ring B ist als Polynomring ein ZPE-Ring und als solcher ganz abgeschlossen. Es reicht also, die nachfolgende Aussage zu beweisen.

(e) Die ganze Abschließung eines normalen Rings in einer endlichen separablen Erweiterung des Quotientenkörpers

Seien B ein normaler noetherscher Integritätsbereich, L dessen Quotientenkörper und K/L eine endliche separable Körpererweiterung. Dann ist die ganze Abschließung A von B in K als B-Modul endlich erzeugt.

$$\begin{array}{ccc} B & \subseteq & A \\ \cap & & \cap \\ L & \subseteq & K \end{array}$$

Beweis (vgl. Zariski-Samuel [16, Teil I, Chap. V, §4, Th. 7]).

1. Schritt. Es gibt eine L-Vektorraumbasis von K, deren Vektoren ganz in A liegen.

Dieser Teil des Beweises kommt ohne die Separabilitätsbedingung an K/L aus. Es reicht zu zeigen, für jedes Element $a \in K$ gibt es ein von Null verschiedenes Element $s \in B$ mit

$$sa \in A.$$

Zum Beweis betrachten wir die irreduzible Gleichung von a über L, sagen wir

(1) $$a^n + b_1 a^{n-1} + ... + b_n = 0 \text{ mit } b_1,...,b_1 \in L.$$

Wir wählen einen gemeinsamen Nenner der b_i, d.h. ein Element $s \in B$ mit $sb_i \in B$. Multiplikation von (1) mit s^n liefert eine Identität

(2) $$(sa)^n + sb_1(sa)^{n-1} + ... + s^n b_n = 0 \text{ mit } sb_1,...,sb_n \in B,$$

d.h. $sa \in K$ ist ganz über B. Weil A ganz abgeschlossen ist in K, folgt $sa \in A$.

2, Schritt. Der Beweis.

Nach dem ersten Schritt gibt es L-linear unabhängige Elemente $u_1,...,u_N \in A$ mit

$$K = L\cdot u_1 + ... + L\cdot u_N ,$$

Weil die Erweiterung K/L separabel ist, ist die durch die Spur definierte Abbildung L-bilineare Abbildung

$$K\times K \to L,\ (x,y) \mapsto Tr(xy),$$
nicht entartet. Es gibt also eine bezüglich dieser Bilinearform duale Basis, d.h. Elemente $v_1,...,v_N \in K$
mit
$$K = L\cdot v_1 + ... + L\cdot v_N$$
und
$$Tr(u_i v_j) = \delta_{ij} \text{ für alle i und alle j.}$$
Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

(3) $$A \subseteq B\cdot v_1 + ... + B\cdot v_N ,$$

denn als Teilmodul eines endlich erzeugten B-Moduls ist dann auch A endlich erzeugt über B (weil B noethersch ist). Sei $x\in A$ vorgegeben. Wir schreiben x in der Gestalt
$$x = x_1 v_1 + ... + x_N v_N \text{ mit } x_i \in L.$$
Weil x und die u_i ganz sind über B, ist dies auch für die Produkte xu_i der Fall. Dann ist aber auch die Spur
$$Tr(xu_i) \in L$$
ganz über B.[190] Da B ganz abgeschlossen ist in L, folgt
$$Tr(xu_i) \in B.$$
Aus der Darstellung von x als Linearkombination der v_i erhalten wir
$$Tr(xu_i) = x_1 Tr(v_1 u_i) + ... + x_N Tr(v_N u_i) = x_i$$
(nach Definition der dualen Basis). Wir haben gezeigt, $x_i \in B$ für jedes i, d.h.
$$x\in Bv_1 + ... + Bv_N .$$
Mit anderen Worten, es gilt (3).
QED.

(f) Universaltitätseigenschaft der Normalisierung im affinen Fall

(i) Sei $f: Y\to X$ ein endlicher birationaler Morphismus[191] affiner irreduzibler Varietäten. Dann gibt es genau eine reguläre Abbildung $f^\nu: X^\nu \to Y$, für welche das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} & X^\nu \arrow[dl, "f^\nu"'] \arrow[d, "\nu"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Dabei bezeichne ν die Normalisierung von X.

(ii) Sei $f: Y\to X$ eine reguläre Abbildung mit Y normal und f(Y) dicht in X. Dann gibt es genau eine reguläre Abbildung $f_\nu: Y \to X^\nu$, für welche das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} & X^\nu \arrow[d, "\nu"] \\ Y \arrow[ur, "f_\nu"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Beweis. Zu (i). Nach Voraussetzung bestehen Inklusionen
$$k[X] \subseteq k[Y] \subseteq k(X).$$

---

[190] Die Konjugierten von xu_i sind ganz über B und die Spur ist Summe von solchen Konjugierten.

[191] d.h. eine endliche reguläre Abbildung, welche ein birationaler Isomorphismus ist.

Dabei ist k[Y] ganz über k[X], d.h. es gilt sogar

$$k[X] \subseteq k[Y] \subseteq k[X^\nu] \subseteq k(X).$$

Die Inklusion $k[Y] \subseteq k[X^\nu]$ definiert die gesuchte reguläre Abbildung f^ν. Ersetzt man diese Inklusionen etwas genauer durch die entsprechenen injektiven Ringhomomorphismen,

$$\begin{array}{ccc} k[X^\nu] & \xrightarrow{\iota=\mathrm{Id}} & k(X) \\ \uparrow\nu^* & \mathrm{Id}\nearrow & \uparrow\alpha \\ k[X] & \xrightarrow{f^*} & k[Y] \end{array}$$

so kann man aus dem kommutativen Diagramm auch die Eindeutigkeit von f^ν ablesen.[192]

<u>Zu (ii)</u>. Nach Voraussetzung bestehen Inklusionen

$$k[X] \subseteq k[Y] \subseteq k(Y)$$

und k[Y] ist ganz abgeschlossen in k(Y). Dann liegt aber die ganze Abschließung $k[X^\nu]$ von k[X] in $k(X) \subseteq k(Y)$ vollständig in k[Y],

$$k[X] \subseteq k[X^\nu] \subseteq k[Y] \subseteq k(Y)$$

Die Inklusion $k[X^\nu] \subseteq k[Y]$ definiert die gesuchte reguläre Abbildung f_ν. Durch etwas genauere Betrachtung erhält man wie im Beweis von (i) die Eindeutigkeit von f_ν.

QED.

(g) Eindeutigkeit der Normalisierung im affinen Fall

Die Normalisierung einer irreduziblen affinen Varietät ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Das folgt aus jeder der beiden Aussagen von (f).

QED.

(h) Existenz und Eindeutigkeit der Normalisierung im allgemeinen Fall

Sei X eine quasi-projektive irreduzible Varietät. Dann besitzt X eine Normalisierung

$$\nu: X^\nu \to X.$$

Zu je zwei Normalisierungen

$$\nu': X^{\nu'} \to X. \text{ und } \nu'': X^{\nu''} \to X$$

gibt es genau eine reguläre Abbildung $X^{\nu'} \to X^{\nu''}$, für welche das folgende Diagramm kommutativ ist. Diese reguläre Abbildung ist eine Isomorphismus.

$$\begin{array}{ccc} X^{\nu'} & \to & X^{\nu''} \\ \downarrow\nu' & & \downarrow\nu'' \\ X & == & X \end{array}$$

Beweis. Wir betrachten eine affine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X durch affine offene Hauptmengen in irgendeinem projektiven Raum. Jedes U_i besitzt eine Normalisierung

$$\nu_i: U_i^\nu \to U_i ,$$

[192] Der Homomorphismus α exisiert (und ist eindeutig bestimmt), weil f eine birationaler Isomorphismus ist. Für f^ν muß gelten $f^{\nu *} = \iota^{-1} \circ \alpha$, d.h. f^ν ist eindeutig bestimmt.

wobei die U_i^ν affine Varietäten sind. Für je zwei $i',i''\in I$ mit nicht-leeren Durchschnitt $U_{i'}\cap U_{i''}$ ist dieser Durchschnitt eine offenene Hauptmenge in $U_{i'}$ und damit eine affine Varietät. Insbesondere sind die Einschränkungen

$$\nu_{i'}^{-1}(U_{i'}\cap U_{i''})\to U_{i'}\cap U_{i''} \text{ und } \nu_{i''}^{-1}(U_{i'}\cap U_{i''})\to U_{i'}\cap U_{i''}$$

von $\nu_{i'}$ bzw. $\nu_{i''}$ gerade Normalisierungen von $U_{i'}\cap U_{i''}$ und damit kanonisch isomorph. Einander entsprechende Punkte bei dem zugehörigen kanonsichen Isomorphismus wollen wir äquivalent nennen. Indem wir äquivalente Punkte der disjunkten Vereinigung der U_i^ν identifizieren erhalten wir eine normale Varietät X^ν und eine reguläre Abbildung

$$\nu\colon X^\nu\to X.$$

Diese ist nach Konstruktion gerade eine Normalisierung von X. Anstelle der Eindeutigkeitsaussage genügt es die folgende Universaltitäteigenschaft zu beweisen.
QED.

(i) Universaltitätseigenschaft der Normalisierung im allgemeinen Fall

Sei $f\colon Y\to X$ ein endlicher birationaler Morphismus[193] irreduzibler Varietäten. Dann gibt es genau eine reguläre Abbildung $f^\nu\colon X^\nu\to Y$, für welche das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} & X^\nu \arrow[dl, "f^\nu"'] \arrow[d, "\nu"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Dabei bezeichne ν die Normalisierung von X.
Beweis. Dies folgt aus der analogen Aussage (f) im affinen Fall und der Konstruktion der Normalisierung in (h).
QED.
Bemerkung
Die zweite Univesalitäteigenschaft der Normalisierung von (f) läßt sich ebenfalls auf den allgemeinen Fall übertragen.

4.5.3. Verzweigung

(a) Vorbemerkung

Der Begriff der Normalität bietet die Möglichkeit, einen wichtige Eigenschaft endlicher Abbildungen zu beschreiben. Für jede endliche Abbildung

$$f\colon X\to Y$$

ist die Zahl der Urbilder eines Punktes $y\in Y$ endlich. Untersuchen wir diese Zahl. In Analogie zum Satz über die Dimension der Faser kann man erwarten, daß diese Zahl ein und dieselbe ist für alle Punkte y aus einer offenen Teilmenge von Y, und daß sie nur auf einer echten abgeschlossenen Teilmenge vom allgemeinen Wert abweicht.

(b) Beispiel

$$f\colon \mathbb{A}^1\to\mathbb{A}^1,\ x\mapsto x^2.$$

Die induzierte Abbildung der Koordinatenringe ist gerade

$$f^*\colon k[T]\to k[T],\ p(T)\mapsto p(T^2).$$

Insbesondere ist die Abbildung endlich. Die Fasern bestehen außerhalb des Ursprungs aus zwei Punkten. Die Faser über dem Ursprung besteht aus einem Punkt.

---

[193] d.h. eine endliche reguläre Abbildung, welche ein birationaler Isomorphismus ist.

(c) Definition: der Grad einer dominanten Abbildung

Seien X und Y irreduzible Varietäten derselben Dimension und

$$f: X \to Y$$

eine dominante[194] reguläre Abbildung. Dann heißt der Grad

deg f := [k(X): f*k(Y)]

der algebraischen Körpererweiterung k(X)/ f*k(Y) auch Grad der Abbildung f.

Bemerkungen

(i) Im Fall von Beispiel (b) ist der Grad der Abbildung gleich

$$\deg f = 2.$$

Die Zahl der Urbilder eines Punktes ist bei f höchstens 2 und außerhalb des Ursprung gleich 2.

(ii) Der Grad der Parametrisierung

$$f: \mathbb{A}^1 \to Y = V(y^2-x^2-x^3) \ (\subseteq \mathbb{A}^2),\ t \mapsto (t^2-1, t(t^2-1)),$$

ist gleich 1 (da f ein birationaler Isomorphismus ist), über dem Ursprung liegen jedoch zwei Punkte, d.h. in diesem Beispiel ist die Situation grundsätzlich anders als im vorhergehenden. Der Grund dafür ist die Tatsache, daß hier Y nicht normal ist.

(d) Theorem 6: die Fasern endlicher Morphismen normaler Varietäten

Sei f: X → Y eine endliche reguläre Abbildung normaler irreduzibler Varietäten. Dann besitzt jeder Punkt y∈Y eine Faser aus höchstens deg f Punkten,

$$\# f^{-1}(y) \le \deg f.$$

Beweis. Wir können annehmen, die Varietäten X und Y sind affin. Wir setzen

A := k[X], B := k[Y]
K := k(X), L := k(Y)
n := deg f = [K:L]

und haben die folgenden Inklusionen:

$$\begin{array}{ccc} B & \subset & A \\ \cap & & \cap \\ L & \subset & K \end{array}$$

Da Y normal ist, ist B ganz abgeschlossen in L und da f endlich ist, ist A ein endlich erzeugter B-Modul. Für jedes Elemente a∈A liegen deshalb die Koeffizienten des Minimalpolynoms von a über K in B.[195]

Die Faser über y bestehe aus m verschiedenen Punkten,

$$f^{-1}(y) = \{x_1,...,x_m\}$$

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^N$ Wir wählen eine Koordinatensystem des $\mathbb{A}^N$, bei dem die ersten Koordinaten dieser Punkte paarweise verschieden sind und erhalten so eine Element $a \in A = k[X]$, welches in jedem der x_i einen anderen Wert annimmt[196],

$$a(x_i) \ne a(x_j) \text{ für } i \ne j.$$

Sei

$$F \in B[T]$$

das Minimalpolynom von a über L. Dann gilt

$$\deg F \le [K:L] = \deg f = n.$$

---

[194] d.h. f(X) liegt dicht in Y.

[195] Das Minimalpolynom hat Koeffizienten in K und ist ein Produkt von Polynomen der Gestalt
T - a'
wobei a' die Konjugierten von a durchläuft. Insbesondere ist mit a auch a' ganz über B. Das Minimalpolynom hat also Koeffizienten aus K, die ganz sind über B, also in B liegen.

[196] Die Menge $U_{ij} \subseteq \mathbb{A}^N$ der linearen homogenen Polynome a auf dem $\mathbb{A}^N$ mit $a(x_i) \ne a(x_j)$ ist nicht-leer und offen. Der Durchschnitt aller U_{ij} ist somit nicht leer (weil $\mathbb{A}^N$ irreduzibel ist).

Wir ersetzen alle Koeffizienten $b\in B = k[Y]$ durch deren Wert im Punkt y und erhalten so ein Polynom

$$\bar{F} \in k[T]$$

mit demselben Grad wie F (da der höchst Koeffizient von F gleich 1 ist),

$$\deg \bar{F} = \deg F \le n.$$

Wegen

$$F(a) = 0$$

besitzt das Polynom $\bar{F}$ die m verschiedenen Nullstellen $a(x_1),...,a(x_m)$.[197] Also gilt

$$m \le \deg \bar{F} \le n.$$

QED.

Bemerkung

Im Rest dieses Abschnitt betrachten wir endliche reguläre Abbildungen $f: X \to Y$ mit Y normal.

(e) Definition: Unverzweigte Punkte

Sei $f: X \to Y$ eine endliche reguläre Abbildung mit Y normal. Dann heißt f unverzweigt im Punkt $y\in Y$, wenn die Anzahl der Urbilder von y gleich dem Grad von f ist,

$$\# f^{-1}(y) = \deg f.$$

(f) Theorem 7: der Verzweigungsort

Sei $f: X \to Y$ eine endliche reguläre Abbildung mit Y normal. Dann ist die Menge der Punkte $y\in Y$, in denen f unverzweigt ist, offen,

Sie ist nicht leer, falls die Körpererweiterung $k(X)/f^*k(Y)$ separabel ist.

Definition. Die Mengen der Punkte von Y, in denen f verweigt ist, heißt Verzweigungsort von f.

Beweis. Wie im Beweis von (d) können wir annehmen, X und Y sind affin. Wir verwenden die Bezeichnungen wie im Beweis von (d). Insbesondere betrachten wir eine Element

$$a\in A = k[X],$$

welches in den Punkten der Faser über $y\in Y$ paarweise verschiedene Werte annimmt und wir betrachten dessen Minimalpolynom

$$F \in B[T].$$

Wenn f in y unverzweigt ist, so ist

$$\deg \bar{F} = \deg F = n$$

und das Polynom $\bar{F}$ hat n verschiedene Nullstellen. Bezeichne

$$D(F) = \mathrm{Res}(F,F')$$

die Diskriminante von F. Die Bedingung der Unverzweigtheit von f in y kann man damit in der folgenden Gestalt ausdrücken.

$$0 \ne D(\bar{F})(y) = D(F)(y).$$

Diese Bedingung ist aber, wenn sie in $y\in Y$ erfüllt ist, in den Punkten einer ganze Umgebung von y erfüllt, d.h. die Menge der unverzweigten Punkte ist offen.

Der Verzweigungsort von f ist also eine Teilvarietät von Y. Wir haben noch zu zeigen, diese ist im separablen Fall eine echte Teilvarietät.

---

[197] F hat die Gestalt $F = \sum_{i=0}^{n} f^*(b_i)T^i$ mit $b_i\in B$, d.h. es gilt $\sum_{i=0}^{n} f^*(b_i)a^i = 0$. Der Wert dieses Polynoms an der Stelle x_j ist somit für jedes j gleich Null, d.h. $0 = \sum_{i=0}^{n} b_i(y)a(x_j)^i = \bar{F}(a(x_j))$

Sei also $k(X)/f^*k(Y)$ separabel. Wir wählen ein primitives Element $a \in A$ der Köpererweiterung $k(X)/f^*k(Y)$ und bezeichnen mit

$$F \in B[T]$$

dessen Minimalpolynom über $k(Y)$. Dann gilt

$$\deg F = n \text{ und } D(F) \neq 0.$$

Deshalb gibt es ein $y \in Y$ mit $D(F)(y) \neq 0$.[198] Dann ist aber f unverzweigt in y, d.h. der Verzweigungsort ist echt enthalten in Y.
QED.

(g) Theorem 8: infinitesimales Verhalten in unverzweigten Punkten

Sei $f: X \to Y$ eine endliche reguläre Abbildung mit Y normal. Falls f in $y \in Y$ nicht verzweigt ist, so induziert f für jeden Punkt $x \in f^{-1}(y)$ und jedes $r>0$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_{Y,y}/m^r_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}/m^r_{X,x}$$

Aus Zeitgründen ohne Beweis.

(h) Folgerung 1: der induzierte Homomorphismus der vollständigen lokalen Ringe in unverzweigten Punkten

Sei $f: X \to Y$ eine endliche reguläre Abbildung mit Y normal. Falls f in $y \in Y$ nicht verzweigt ist, so induziert f für jeden Punkt $x \in f^{-1}(y)$ einen Isomorphismus der vervollständigten lokalen Ringe

$$\hat{f} : \hat{\mathcal{O}}_{Y,y} \xrightarrow{\cong} \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$$

Beweis. Die Vervollständigung eines lokalen Rings A mit dem maximalen Ideal m kann man definieren als inversen Limes[199]

$$\hat{A} := \lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} A/m^{n+1}.$$

Dann hat $\hat{A}$ wieder die Struktur eines lokalen Rings mit dem maximalen Ideal, sagen wir,

$$\hat{m},$$

und die natürliche Einbettung

$$A \to \hat{A}$$

induziert Isomorphismen

$$A/m^{n+1} \to \hat{A}/\hat{m}^{n+1}.$$

Die Isomorphismen von (g) liefern dann durch Übergang zum inversen Limes den behaupteten Isomorphismus.
QED.

(i) Folgerung 2: der induzierte Homomorphismus der Tangentialräume in unverzweigten Punkten

Sei $f: X \to Y$ eine endliche reguläre Abbildung mit Y normal. Falls f in $y \in Y$ nicht verzweigt ist, so induziert f für jeden Punkt $x \in f^{-1}(y)$ einen Isomorphismus der Tangentialräume

$$T_x(f): T_xX \xrightarrow{\cong} T_yY.$$

---

198 D(F) ist ein Element von B = k[Y].

199 Man stelle sich $\hat{A}$ als Menge von Limiten von Reihen vor. Der Faktorring A/m^{n+1} entspricht dann der Menge der n-ten Partialsummen dieser Reihen.

Beweis. Der Ring-Isomorphismus

$$\mathcal{O}_{Y,y}/m^2_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}/m^2_{X,x}$$

von (g) induziert einen Isomorphismus der maximalen Ideale,

$$m_{Y,y}/m^2_{Y,y} \to m_{X,x}/m^2_{X,x} .$$

Die induzierte Abbildung der dualen Vektorräume ist also auch ein Isomorphismus.
QED.

(j) Folgerung 3: Erhaltung der Glattheit in unverzweigten Punkten

Sei f: X → Y eine endliche reguläre Abbildung mit Y normal. Falls f in y∈Y nicht verzweigt ist, so sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Y ist nicht-singulär in y.

(ii) X ist nicht-singulär in jedem Punkt von $f^{-1}(y)$.

(iii) X ist nicht-singulär in einem Punkt von $f^{-1}(y)$.

Bemerkung

Wir haben gesehen, die Unverzweigtheit von f: X → Y in y∈Y ist äquivalent zur Bijektivität der Linearisierungen $T_x(f)$: $T_xX \xrightarrow{\cong} T_yY$ von f in den Punkten x der Faser von y. Im Fall, daß der Grundkörper gerade der Körper der komplexen Zahlen ist,

$$k = \mathbb{C},$$

impliziert dies auf Grund das Satzes über implizite Funktionen, daß f in diesen Punkten lokal biholomorph ist in diesen Punkten.

4.5.4 Normalisierung von Kurven

(a) Vorbemerkung

Bei der Konstruktion der Normalisierung einer quasi-projektiven Varietät haben wir nicht gezeigt, daß diese Normalisierung quasi-projektiv ist, d.h. daß sie sich als offene Teilmenge einer projektiven Varietät realisierung läßt. Die haben damit strengenommen nicht gezeigt, daß die Normalisierung eine Varietät ist.

In diesem Abschnitt wollen wir dies wenigstens im Kurvenfall tun.

Die entsprechende Aussage ist auch für Varietäten beliebiger Dimension richtig, jedoch schwerer zu beweisen als im Kurvenfall.

Diese Situation weist auf einen Mangel des Varietätenbegriffs hin: er hängt von der Einbettbarkeit in einen projektiven Raum ab. Eine geeignete Verallgemeinerung des Varietätenbegriffs sollte diesem Mangel abhelfen.

(b) Theorem 10: Die Normalisierung einer projektiven Kurve.

Die Normalisierung einer quasi-projektiven (bzw. projektiven) (irreduziblen) Kurve ist quasi-projektiv (bzw. projektiv).

Beweis. <u>1. Schritt</u>. Beweis der Quasi-Projektivität.

Sei

$$X = \cup_{i\in I} U_i$$

eine Überdeckung von X durch endlich viele affine offene Teilmengen U_i. Bezeichne

$$\nu_i: \overset{\nu}{U_i} \to U_i$$

die Normalisierung von U_i. Für jedes i∈I, wählen wir eine Einbettung von U_i in einen proejektiven Raum und bezeichnen mit

$$\overline{U}_i^{\nu}$$

die projektive Abschließung von U_i^{ν}.

Man beachte, alle bisher konstruierten Varietäten sind birational isomorph zu X: U_i ist es als offene Teilmenge von X, U_i^{ν} ist birational isomorph zu U_i und $\overline{U}_i^{\nu}$ ist birational isomorph zu U_i^{ν}.

Auf Grund der Universalitätseigenschaft der Normalisierung gibt es eindeutigbestimmte Isomorphismen

$$\varphi_{ij}: \nu_i^{-1}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\cong} \nu_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

die zusammen ν_i und ν_j ein kommutatives Dreieck bilden. Wir fassen die φ_{ij} als birationale Isomorphismen

$$\varphi_{ij}: U_i^{\nu} \dashrightarrow \overline{U}_j^{\nu}$$

auf. Für i=j ist φ_{ij} gerade die natürliche Einbettung in die projektive Abschließung. Weil U_i^{ν} eine glatte Kurve ist und $\overline{U}_j^{\nu}$ eine projektive Kurve, so ist φ_{ij} sogar eine reguläre Abbildung. Wir setzen

$$W := \prod_{i\in I} \overline{U}_j^{\nu}$$

und für jedes $i\in I$ sei

$$\varphi_i := \prod_{j\in I} \varphi_{ij} : U_i^{\nu} \to W,\ u \mapsto (\varphi_{ij}(u))_{j\in I}.$$

Weiter sei

$$X' := \cup_{i\in I}\, \varphi_i(U_i^{\nu}) \subseteq W.$$

Zum Beweis der Behauptung des ersten Schrittes reicht es die folgenden Aussagen zu beweisen.

1. X' ist quasi-projektiv.
2. X' ist irreduzibel.
3. X' ist normal.
4. Es gibt einen endlichen birationalen Isomorphismus ν: X' $\to$ X: .

<u>Zu 1 und 2</u>.Wir setzen

$$V := \cap_{i\in I} U_i^{\nu}$$

Für die Normalisierung V^{ν} von V gilt dann $V^{\nu} \subseteq U_i^{\nu}$ und die Abbildungen φ_i stimmen auf V^{ν} paarweise überein. Die gemeinsame Einschränkung der φ_i auf V^{ν} bezeichnen wir mit

$$\varphi := \varphi_i |\, V^{\nu}.$$

Dann gilt

$$\varphi(V^{\nu}) \subseteq \varphi_i(U_i^{\nu}) \subseteq \overline{\varphi(U_i^{\nu})}.$$

Dabei bezeichne die Menge rechts die Abschließung der linken Menge in W.

Nun ist die Menge links eine irreduzible quasi-projektive Kurve[200] und deren Komplement in der Menge rechts ist endlich[201]. Die die Inklusionen für beliebiges i bestehen, folgt

$$\varphi(V^{\vee}) \subseteq X' \subseteq \overline{\varphi(\check{U}_i)}.$$

Das Komplement von X' in der rechten Menge ist erst recht endlich. Damit gelten Aussagen 1 und 2.

Zu 3. Sei $x \in X'$ vorgegeben. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $x \in \varphi_i(\check{U}_i)$ und $\varphi_i(\check{U}_i)$ ist eine offene Umgebung von x. Es reicht also zu zeigen,

$$\varphi_i: \check{U}_i \to \varphi_i(\check{U}_i),\ u \mapsto (\varphi_{ij}(u))_{j\in I}$$

ist ein Isomorphismus, denn $\check{U}_i$ ist nach Konstruktion normal. Nach Wahl ist φ_{ii} eine natürliche Einbettung der Varietät $\check{U}_i$ in deren projektive Abschließung. Also besitzt φ_i die reguläre Abbildung

(*) $\qquad \varphi_i(\check{U}_i) \to \check{U}_i,\ (u_j)_{j\in I} \mapsto \varphi^{-1}_{ii}(u_i) = u_i$,

als Umkehrung, d.h. φ_i ist ein Isomorphismus.

Zu 4. Auf der offenen Teilmenge $\varphi_i(\check{U}_i)$ von X' sei $\nu: X' \to X$ die Abbildung

$$g_i := \nu_i \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\check{U}_i) \to \check{U}_i \to U_i$$

Es reicht zu zeigen, daß diese Definition korrekt ist, d.h. daß je zwei der Abbildungen g_i im gemeinsamen Teil ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen. Als Zusammensetzung aus einem Isomorphismus φ_i^{-1} und einer endlichen Abbildung ν_i ist g_i nämlich endlich.

Beweis der Korrektheit der Definition.

Wir haben zu zeigen

$$\nu_i \circ \varphi_i^{-1} = \nu_j \circ \varphi_j^{-1}$$

auf einer nicht-leeren offenen (und damit dichten) Teilmenge von X', d.h. es reicht zu zeigen

$$\nu_i = \nu_j \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$$

auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge von $V := \cap_{i\in I} \check{U}_i$. Auf Grund der Beschreibung (*) von φ_j^{-1} als Projektion auf die j-te Koordinate, reicht es zu zeigen

$$\nu_i = \nu_j \circ \varphi_{ij}$$

auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge von V. Diese Relation besteht aber nach Definition der φ_{ij} auf $\nu_i^{-1}(U_i \cap U_j)$.

2. Schritt. Beweis der Projektivität der Normalisierung im projektiven Fall.

Sei jetzt X eine projektive Kurve und

$$\nu: X^{\vee} \to X$$

deren Normalisierung. Angenommen, $X^{\vee}$ ist nicht projektiv. Wir bezeichnen mit

[200] Die φ_i sind birationale Morphismen, also auf einer offenen Teilmenge regulär und Isomorphismen.

[201] Die projektive Abschließung einer Kurve hat nur endlich viele Punkte mehr.

$$\overline{X}$$

eine Abschließung von X^ν in einem projektiven Raum. Nach Annahme gibt es dann einen Punkt

$$x \in \overline{X} - X^\nu.$$

Wir wählen eine affine Umgebung von x in $\overline{X}$,

$$x \in U \subseteq \overline{X}$$

und bezeichnen mit ν': $U^\nu \to U$ die Normalisierung von U. Wir erhalten ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & U^\nu \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "\nu'"] \\
X^\nu \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\nu"'] & \overline{X} & U \arrow[l, "\psi"'] \\
X & &
\end{tikzcd}$$

Dabei seien φ und ψ die natürlichen Einbettungen und h kommt wie folgt zustande. Die rationale Abbildung

$$\alpha = \nu\circ\varphi^{-1}\circ\psi\circ\nu' : U^\nu \to X$$

ist auf ganz U^ν regulär, denn U^ν ist eine singularitätenfreie Kurve und X ist nach Voraussetzung projektiv. Auf Grund der Universalitätseigenschaft der Normalisierung ν faktorisiert sich deshalb α in eindeutiger Weise über ν,

(*) $$\nu\circ\varphi^{-1}\circ\psi\circ\nu' = \alpha = \nu\circ h$$

mit eindeutig bestimmter regulärer Abbildung h. Weil ν ein birationaler Isomorphismus ist, gilt mit (*) sogar

$$\varphi^{-1}\circ\psi\circ\nu' = h$$

zumindest auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge von U^ν, d.h. es gilt

(**) $$\psi\circ\nu' = \varphi\circ h$$

auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge von U^ν. Da U^ν irreduzibel ist, liegt diese nicht-leere offene Menge dicht in U^ν, d.h. (**) gilt auf ganz U^ν. Aus (**) folgt aber

$$\mathrm{Im}\,(\psi\circ\nu') \subseteq \mathrm{Im}(\varphi\circ h) \subseteq X^\nu.$$

Da ν' als endliche Abbildung surjektiv ist, folgt

$$x \in U = \mathrm{Im}(\psi) \subseteq X^\nu$$

im Widerspruch zur Wahl von x.
QED.

(c) Folgerung

Jede irreduzible algebraische Kurve X ist birational zu einer glatten projektiven Kurve.
Beweis. Sei X' die Normalisierung einer projektiven Abschließung von X. Dann ist X' birational isomorph zu X und nach Konstruktion projektiv und glatt.
QED.

(d) Theorem 11: Endlichkeit regulärer Abbildungen von Kurven

Sei f. $X \to Y$ eine reguläre Abbildung einer irreduziblen glatten projektiven Kurve X <u>auf</u> eine Kurve Y. Dann ist f endlich.
Bemerkung
Falls f nicht konstant ist, ist f(X) automatisch eine projektive Kurve.
Beweis. Seien $y\in Y$ ein vorgegebener Punkt und $V\subseteq Y$ eine offene affine Umgebung des Punktes y und $U \subseteq f^{-1}(V)$ eine affine offene Teilmenge des vollständigen Urbildes von der Menge V. Wir schreiben

$$K := k(X), \qquad L := k(Y)$$

$A := k[U] \qquad B := k[V]$

und betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} B & \subseteq & A' & \subseteq & A \\ \cap & & & & \cap \\ L & & \subseteq & & K \end{array}$$

Dabei bezeichne A' die ganze Abschließung von B in K.

Fakten:

1. Weil V dicht liegt in Y, ist L der Quotientenkörper von B.
2. Weil U dicht liegt in X, ist K der Quotientenkörper von A.
3. Weil X und Y beides Kurven sind, haben K und L beide den Transzendenzgrad 1 über k, d.h. K ist algebraisch über L und damit (als endlich erzeugter Körper) sogar endlich.
4. Jedes Element von A' liegt in K und ist ganz über B, also auch ganz über A. Da $U \subseteq X$ eine singularitätenfreie Kurve ist, ist A ganz abgeschlossen in K, d.h. jedes Element von A' liegt in A.

Die ganze Abschließung A' ist als B-Modul endlich erzeugt (vgl. 2.5.2(c),(d),(e)) und damit erst recht auch als k-Algebra. Mit anderen Worten, es gibt eine affine irreduzible Varietät U mit

$$A' = k[U'].$$

Weil K der Quotientenkörper von A' ist, ist U' birational isomorph zu X. Die Inklusion

$$B \subseteq A' \subseteq A$$

definieren eine Faktorisierung der Einschränkung $f|U$: $U \to U' \to V$. Wir lassen U eine affine Überdeckung von $f^{-1}(V)$ durch laufen und erhalten eine Faktorisierung

$$f|\, f^{-1}(V): f^{-1}(V) \to U' \to V$$

Schließlich lassen wir V eine affine offene Überdeckung von Y durchlaufen. Die zugehörigen Mengen U' verheften sich zu einem topologischen Raum X', der lokal isomorphis ist zu einer affinen Kurve.[202] Wir erhalten eine Faktorisierung von

$$f: X \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{h} X$$

d.h. ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & U' \arrow[d, "h"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

mit einer endlichen regulären Abbildung h und einem birationalen Morphismus g. Da U' eine (normale also) glatte Kurve ist, ist g nach 2.4.4 (e)[203] ein Isomorphismus von X mit einer offnen Teilmenge von U'. Weil X projektiv ist, können wir X gleichzeitig als abgeschlossenen Teilmenge von U' auffassen, d.h. U' läßt sich schreiben als disjunkte Vereinigung

$$U' = X \cup X'$$

mit abgeschlossenen Teilmengen X, X' von U' (die damit insbesonder affin sind). Es folgt

$$k[U'] = k[X] \times k[X'].$$

Mit k[U'] ist dann aber auch der Faktorring k[X] ganz über k[Y].

QED.

---

[202] Wie in 2.5.4 (b) zeigt man erst, es ist eine quasi-projektive Kurve und dann, es ist sogar eine projektive Kurve. Die Varietät heißt Normalisierung von Y im rationalen Funktionenkörper von X.

[203] 2.4.4 (e): Sei f: $X \to Y$ ein birationaler Morphismus von Kurven, wobei die Kurve Y glatt ist. Dann ist f(X) ein offene Teilmenge von Y und f induziert einen Isomorphismus

$$X \to f(X).$$

4.5.5.Projektive Einbettungen von glatten Varietäten

(a) Vorbemerkung

Nach Konstruktion liegt ein glattes projektives Modell einer algebraischen Kurve in irgendeinem projektiven Raum $\mathbb{P}^N$. Es ist naheliegend, danach zu fragen, wie klein man die Dimension N dieses projektiven Raumes wählen kann.

(b) Theorem 12: Einbettbarkeit in den $\mathbb{P}^{2n+1}$

Jede glatte projektive Varietät der Dimension n ist isomorph zu einer Teilvarietät des projektiven Raums $\mathbb{P}^{2n+1}$ der Dimension 2n+1.

Beweis. Es reicht zu zeigen, für jede glatte projektive Teilvarietät

$$X \subseteq \mathbb{P}^N$$

der Dimension n mit

$$N > 2n+1$$

gibt es einen Punkt

$$\xi \in \mathbb{P}^N - X$$

derart, daß die Projektion mit dem Zentrum ξ eine isomorphe Einbettung

$$X \to \mathbb{P}^{N-1}$$

induziert. Wir beginnen deshalb mit der Untersuchung der Frage, wann eine solche Projektion eine isomorphe Einbettung induziert.

<u>1. Schritt</u>. **Lemma 1**

Eine endliche Abbildung f: $X \to Y$ einer glatten Varietät X ist eine isomorphe Einbettung, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

1. f ist injektiv.
2. $d_x f: T_x X \to T_x Y$ ist injektiv für jeden Punkt $x \in X$.

Beweis des Lemmas. Als endliche Abbildung ist f surjektiv, wegen 1 also bijektiv. Sei

$$g := f^{-1}: Y \to X.$$

Es reicht zu zeigen, g ist regulär. Diese Aussage hat lokalen Charakter. Seien

$$x \in X,\ y := f(x) \in Y.$$

Wir bezeichnen mit

$$U \subseteq X \text{ und } V \subseteq Y$$

solche affinen offenen Umgebungen von x bzw. y, daß gilt

$$f(U) = V \text{ und } k[U] \text{ ganz über } k[V].$$

Wir bezeichnen die Einschränkung von f zu einer Abbildung $U \to V$ ebenfalls mit f. Es reicht zu zeigen, bei einer geeigneten Wahl von U und V ist

$$f: U \to V$$

ein Isomorphismus. Die zum Differential $d_x f$ duale Abbildung ist nach Bedingung 2 surjektiv, d.h. die durch f induzierte Abbildung

$$m_{Y,y}/m^2_{Y,y} \to m_{X,x}/m^2_{X,x}$$

ist surjektiv. Mit anderen Wort, ist

$$m_{Y,y} = (u_1,\ldots,u_r),$$

so gilt

$$m_{X,x} = (f^*u_1,\ldots,f^*u_r),$$

d.h. es ist

(*) $$m_{X,x} = m_{Y,y}\mathcal{O}_{X,x}.$$

Wir wollen jetzt das Lemma von Nakayama auf den Modul $\mathcal{O}_{X,x}$ über dem Ring $\mathcal{O}_{Y,y}$ anwenden. Aus der Endlichkeit des Moduls k[U] über k[V] folgt die von $\mathcal{O}_{X,x}$ über $\mathcal{O}_{Y,y}$.[204] Wegen (*) gilt

$$\mathcal{O}_{X,x} = k + m_{X,x} = \mathcal{O}_{Y,y} + m_{Y,y}\mathcal{O}_{X,x} .$$

Nach dem Lemma von Nakayama ist damit $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{Y,y}$, genauer, f induziert einen Isomorphismus

(**) $$f^*: \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

der lokalen Ring. Schreiben wir jetzt k[U] in der Gestalt

$$k[U] = k[V]\cdot f_1 + ... + k[V]\cdot f_s .$$

Wegen der Surjektivität von (**) gibt es für jeden der endlich vielen Erzeuger f_i eine affine Umgebung von x innerhalb von U, sodaß f_i im Koordinatenring dieser Umgebung liegt. Durch Verkleinern von U erreichen wir also

$$k[U] = k[V],$$

d.h. f: U → V ist ein Isomorphismus.

QED (Lemma 1).

2. Schritt. **Lemma 2**

Seien $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine glatte projektive Varietät und $\xi \in \mathbb{P}^N$-X ein Punkt. Es gelte:

1. Jede Gerade durch ξ schneidet die Varietät X in höchstens einem Punkt.
2. Keine Gerade durch ξ liegt in einem der Tangentialräume $T_x X$ mit $x \in X$.

Dann induziert die Projektion mit dem Zentrum ξ einen Isomorphismus von X mit einer projektiven Varietät im $\mathbb{P}^{N-1}$.

Beweis des Lemmas. Bezeichne

$$f: X \to Y \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$$

die Projektion mit dem Zentrum ξ. Es reicht zu zeigen, die Bedingungen von Lemma 1 sind erfüllt.

Die Endlichkeit von f folgt aus 1.5.3 (h)[205]. Die Injektivität von f folgt aus Bedingung 1 von Lemma 2. Wegen Bedingung 2 induziert die Projektion f auf den Tangentialräumen injetive lineare Abbbildungen. Diese stimmen als lineare Abbildungen mit ihrer Linearisierung überein, d.h. es sind gerade die Abbildungen $d_x f$.

QED (Lemma 2).

3. Schritt. Abschluß des Beweises.

---

[204] Weil k[U] endlich erzeugt ist über k[V] ist auch $k[U]_n$ endlich erzeugt als Modul über

$$\mathcal{O}_{Y,y} = k[V]_n .$$

Dabei bezeichne $n \subseteq k[V]$ das maximale Ideal des Punktes y. Die Punkte der Faser über y entsprechen gerade den maximalen Idealen von $k[U]_n$, deren Einschränkung auf $k[V]_n$ das maximale Ideal (n) ist. Da es nur einen Punkt in dieser Faser gibt, besitzt $k[U]_n$ nur ein maximales Ideal, d.h. der Ring $k[U]_n$ ist ein lokaler Ring. Nun ist $\mathcal{O}_{X,x}$ die Lokalisierung von $k[U]_n$ bezüglich des zu x gehörigen maximalen Ideals, d.h. es ist

$$\mathcal{O}_{X,x} = k[U]_n$$

Insbesondere ist $\mathcal{O}_{X,x}$ als Modul über $\mathcal{O}_{Y,y}$ endlich erzeugt.

[205] Beliebige Projektionen, deren Zentrum ein zu X komplementärer linearer Unterraum ist, sind endlich.

Es reicht zu zeigen, im Fall

$$X \subseteq \mathbb{P}^N, \dim X = n, N > 2n + 1$$

gibt es einen Punkt ξ wie in Lemma 2.
Bezeichnungen:

$F' := \{\xi\in\mathbb{P}^N \mid \xi$ genügt nicht der Bedingung 1 von Lemma 2 $\}$

$F'' := \{\xi\in\mathbb{P}^N \mid \xi$ genügt nicht der Bedingung 2 von Lemma 2 $\}$

$\Gamma' := \{ (a,b,c)\in\mathbb{P}^N\times X\times X \mid a,b,c$ liegen auf einer Geraden $\}$

Die Bedingung auf einer Geraden zu liegen ist äquivalent zum Verschwinden gewisser Determinanten. Deshalb ist

$\Gamma' \subseteq \mathbb{P}^N\times X\times X$

eine abgeschlossene Teilmenge. Wir betrachten die Projektionen

$\varphi: \Gamma' \to \mathbb{P}^N$ und $\psi: \Gamma' \to X\times X$.

Für jeden Punkt $y = (b,c)\in X\times X$ außerhalb der Diagonalen besteht $\psi^{-1}(y)$ aus allen Tripeln (a,b,c) mit a auf der Geraden durch b und c, d.h.

$$\dim \psi^{-1}(y) = 1.$$

Nach dem Satz von der Dimension der Faser folgt

$$\dim \Gamma' = \dim X\times X + 1 = 2n + 1.$$

Damit ist

(1) $\dim F' = \dim \psi(\Gamma') \le \dim \Gamma' = 2n + 1.$

Zur Abschätzung der Dimension von F'' betrachten wir die Menge

$\Gamma'' := \{ (a,b) \in \mathbb{P}^N\times X \mid a\in T_b X \}.$

Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge

$\Gamma''\subseteq\mathbb{P}^N\times X.$

Wir betrachten die beiden Projektionen

$\varphi': \Gamma'' \to \mathbb{P}^N$ und $\psi': \Gamma'' \to X\times X.$

Für jedes $x\in X$ gilt, weil X nach Voraussetzung glatt ist,

$\dim \psi'^{-1}(x) = \dim T_x X = \dim X = n$

also $\dim \Gamma'' = 2n$, also

$\dim F'' = \psi'(\Gamma'') \le \dim \Gamma'' = 2n.$

Aus Dimensionsgründen ist $F'\cup F''$ nicht der gesamte Raum $\mathbb{P}^N$. Es gibt also einen Punkt $\xi\in\mathbb{P}^N$, der nicht in $F'\cup F''$ liegt.
QED.

(c) Folgerung 2

Jede glatte quasi-projektive Kurve ist isomorph zu einer Kurve im $\mathbb{P}^3$.
Bemerkungen

(i) Man kann zeigen, nicht jede glatte Kurve ist isomorph zu einer ebenen projektiven Kurven.

(ii) Durch genauere Betrachtung des oben beschriebenen Projektierungsprozessen kann man jedoch zeigen, daß man so immer eine ebene projektive Kurve gewinnen kann, die höchstens gewöhnliche Doppelpunkte besitzt (vgl. Hartshorne).

(iii) Jede glatte Fläche ist isomorph zu einer Fläche im $\mathbb{P}^5$. Im vierdimensionalen projektiven Raum kann man nicht jede solche Fläche realisieren. Es läßt sich jedoch stets eine Projektion auf den $\mathbb{P}^4$ finden, die außerhalb von endlich vielen Punkten ein Isomorphismus ist. Man gewinnt so Beispiele für Flächen mit isolierten Singularitäten (die nicht normal sind).

5. Schnitt-Theorie

6. Chow-Koordinaten

6.1 Vorbemerkungen

1. Idee der Chow-Varietät. Eine der wichtigsten Anwendungen des Satzes von der Dimension eines Durchschnitts besteht in der Möglichkeit, die Teilvarietäten des $\mathbb{P}^N$ einer vorgegebener Dimension n durch Koordinaten zu beschreiben.
2. Beispiel: Hyperflächen des Grades m im projektiven Raum. Wir sind einer solchen Aufgabe bereits im Fall der Hyperflächen begegnet: die Hyperflächen, die durch eine Form des Grades m im $\mathbb{P}^n$ definiert sind, entsprechen den Punkten des $\mathbb{P}^{\nu_{m,n}}$.
3. Beispiel: Geraden im $\mathbb{P}^3$. Ein anderes Beispiel sind die Geraden im $\mathbb{P}^3$ und deren Beschreibung durch Plücker-Koordinaten.

4. Konstruktions-Idee: Reduktion auf den Hyperflächen-Fall. Es ist naheliegend, zu versuchen, den allgemeinen Fall auf den Fall von Hyperflächen zurückzuführen, und zu diesem Zweck einer allgemeinen Varietät eine Hyperfläche zuzuordnen.

5. Beispiel: Kurven im $\mathbb{P}^3$.Sei zum Beispiel $X\subseteq\mathbb{P}^3$ eine (irreduzible) projektive Kurve im Raum. Betrachten wir die Menge
$$Y := \{L\subseteq\mathbb{P}^3 \mid L \text{ Gerade, } L\cap X \neq \emptyset\}$$
aller Geraden im $\mathbb{P}^3$, die die Kurve X schneiden. Betrachten wir die Inzidenzrelation
$$I \subseteq \{ (x,L)\in\mathbb{P}^3\times\prod \mid x\in L \}.$$
In so ähnlicher Weise wie im Fall der in 1.6.4 betrachteten Inzidensz relation zeigt man, I ist eine projektive Teilvarietät von $\mathbb{P}^3\times\prod$. Die Projektionen auf die beiden Faktoren,
$$p_1: I \to \mathbb{P}^3 \text{ und } p_2: I \to \prod$$
sind reguläre Abbildungen und das vollständige Urbild von $X\subseteq\mathbb{P}^3$ bei p_1 ist ebenfalls eine projektive Varietät,
$$p_1^{-1}(X) = \{(x,L) \in \mathbb{P}^3\times\prod \mid L \ni x \in X \},$$
und damit deren Bild bei p_2 ebenfalls,
$$Y = p_2(p_1^{-1}(X)) \subseteq \prod.$$
Die obige Menge Y is also ein projektive Varietät. Für jeden Punkt $x\in X$ ist die Menge aller Geraden des $\mathbb{P}^3$ durch x,
$$p_1^{-1}(\{x\}) = \{(x,L)\in\mathbb{P}^3\times\prod \mid x\in L \} \ (\cong \mathbb{P}^2)^{206}$$

---

[206] Wir fassen x als 1-dimensionalen linearen Unterraum des k^4 auf und L als 2-dimensionalen linearen Unterraum. Wenn L durch x gehen soll, so bedeutet das gerade
$$x \subseteq L \subseteq k^4$$
d.h. $0 \subseteq L/x \subseteq k^4/x$. Die gesuchte Menge ist isomorph zur Menge aller Gerade L/x im $k^3 = k^4/x$, d.h. zum $\mathbb{P}^2$.

eine irreduzible Varietät d von $p_1^{-1}(X)$ der Dimension 2, d.h.

$$p_1^{-1}(X)$$

ist irreduzibel von der Dimension dim X + dim $p_1^{-1}(X)$ = 3. Falls X keine Gerade ist, sind die Fasern der Projektion

$$p_1^{-1}(X) \twoheadrightarrow Y$$

endlich (da eine Gerade mit einer irreduziblen Kurve, die keine Gerade ist höchstens endlich viele Punkt gemeinsam hat), d.h.

$$\dim Y = 3 \ (\dim \prod = 4),$$

Wenn wir wüßteen, daß wie beim $\mathbb{P}^n$ jede Teilvarietät der Kodimension 1 von $\prod$ durch eine Gleichung definiert ist, so könnte man die Koeffizienten der Gleichung von Y als Koordinaten der Kurve X verwenden.

6. Eine modifizierte Konstruktion. Man kann die Frage nach der Beschreibung der Hyperflächen von $\prod$ durch eine Gleichung aber auch umgehen, indem man die obige Konstruktion leicht abändert.
Statt der Geraden, die X schneiden, kann man auch Paare von Ebenen E',E" betrachten die X schneiden:

$$Y := \{(E',E") \in \check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3 \mid E' \cap E" \cap X \neq \emptyset \}$$

Wir werden unten zeigen, dies ist eine projektive Varietät der Kodimension 1 in der Produktvarietät $\check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3$, und daher durch eine bi-homogenen Gleichung gegeben. Wir führen jetzt diese Konstruktion in einem allgemeineren Kontext durch.

6.2 Chow-Koordinaten einer projektiven Varietät

Die Hyperebenen $H \subseteq \mathbb{P}^N$ entsprechen den Punkten eine N-dimensionalen projektiven Raumes, den wir mit $\check{\mathbb{P}}^N$ bezeichnen wollen:

$$\check{\mathbb{P}}^N := \{ \text{ Menger aller Hyperebenen des } \mathbb{P}^N \} \cong \mathbb{P}^N.$$

Dieser Raum heißt auch dualer projektiver Raum der Dimension N.

Sei jetzt $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine irreduzible projektive Varietät der Dimension

$$\dim X = n.$$

Wir betrachten die folgende Inzidenz-Relation.

$$I := \{(H_0,\dots,H_n,x) \in (\check{\mathbb{P}}^N)^{n+1} \times X \mid x \in H_i \text{ für } i = 0,\dots, n \}.$$

Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge[207] von $(\check{\mathbb{P}}^N)^{n+1} \times X$. Wir betrachten die beiden regulären Abbildungen

$$\psi: I \to X \text{ und } \varphi: I \to (\check{\mathbb{P}}^N)^{n+1}.$$

Betrachen wir die erste Projektion. Offensichtlich gilt[208]

$$\psi(I) = X.$$

[207] Die Relation $x \in H_i$ läßt sich als bihomogene polynomiale Gleichung aufschreiben: sie ist lineare in den Koordinaten von x und linear in den Koordinaten von H_i.

[208] Durch jeden Punkt von X kann man n+1 (nicht notwendig verschiedene) Hyperebenen legen.

Für jeden Punkt $x_0 \in X$ besteht $\psi^{-1}(x_0)$ aus allen Tupeln

$$(H_0,\ldots,H_n,x) \text{ mit } x_0 \in H_i \text{ für alle i.}$$

Die Menge der möglichen H_i füllt gerade eine Hyperebenen $\check{\mathbb{P}}^{N-1} \subseteq \check{\mathbb{P}}^N$, d.h.

$$\psi^{-1}(x_0) \cong (\check{\mathbb{P}}^{N-1})^{n+1}$$

ist irreduzibel von der Dimension (N-1)·(n+1). Das bedeutet,

$$\dim I = (N-1)\cdot(n+1) + n = N(n+1) - 1$$

und I ist irreduzibel.

Betrachten wir als nächstes die zweite Projektion. Durch Schneiden mit n geeigneten Hyperebenen können wir erreichen, daß die Dimension des Durchschnitts 0-dimensional wird, d.h. aus endlich vielen Punkten besteht. Durch Schneiden mit einer weiteren Hyperebene erreichen wir, daß der Durchschnitt aus genau einem Punkt besteht. Mit anderen Worten, es gibt einen Punkt

$$y \in (\check{\mathbb{P}}^N)^{n+1}$$

derart, daß $\varphi^{-1}(y)$ aus genau einem Punkt besteht. Die Abbildung

$$\varphi: I \to \varphi(I)$$

hat somit endliche Fasern. Es gilt also

$$\dim \varphi(I) = \dim I = N(n+1) - 1.$$

Mit anderen Worten, $\varphi(I)$ hat in $(\check{\mathbb{P}}^N)^{n+1}$ die Kodimension 1 und ist daher durch eine multihomogenen Gleichung F_X gegeben. Mit I ist auch $\varphi(I)$ irreduzibel. Wir können also für F_X ein irreduzibles Polynom wählen. Dann ist F_X durch X eindeutig bis auf einen konstanten Faktor $\neq 0$ festgelegt. Das Polynom F_X heißt dann Chow-Polynom[209] von X und seine Koeffizienten heißen Chow-Koordinaten von X.

Bemerkungen

(i) Nach Konstruktion besteht

(1) $$V(F_X)$$

aus allen (n+1)-Tupeln von Hyperebenen im $\mathbb{P}^N$, die einen gemeinsamen Punkt haben, der auf X liegt.

(ii) Aus dem Chow-Polynom kann man die Varietät X wiedergewinnen:

(2) $$X = \{ x \in \mathbb{P}^N \mid \text{für je (n+1) Hyperebenen } H_0,\ldots,H_n \text{ durch x gilt } F_X(H_0,\ldots,H_n) = 0 \}$$

Die Inklusion “$\subseteq$” ergibt sich unmittelbar aus (i). Liegt x nicht in X, so kann man leicht n Hyperebenen $H_1,\ldots,H_n$ durch x finden mit

$$X \cap H_1 \cap \ldots \cap H_n \text{ endlich}$$

und damit eine weitere Hyperebene H_0 mit

$$X \cap H_0 \cap \ldots \cap H_n \text{ leer.}$$

Dann liegt aber x auch nicht in der Menge auf der rechten Seite von (2). In (2) gilt also tatsächlich das Gleichheitszeichen.

[209] Im Buch von Hodge und Pedoe: Methods of algebraic geometry II, Chap. X, §8 heißt diese Form Cayley-Form und es wird auf Arbeiten von Cayley verwiesen.

6.3 Der Grad des Chow-Polynoms

Seien $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine irreduzible projektive Varietät der Dimension n und F_X deren Chow-Polynom. Dann ist F_X homogen in allen n+1 Gruppen der N+1 Unbestimmten. Es besitzt also n+1 Grade $d_0,...,d_n$. Es gilt aber

$$d_0 = ... = d_n = \deg X.$$

Dabei bezeichne deg X den Grad der projektiven Varietät, d.h. die maximale Anzahl der Schnittpunkte eines linearen Unterraums der Dimension N-n, welcher X in nur endlich vielen Punkten schneidet,

(1) $\deg X := \max \{ \#(X\cap E) \mid E\subseteq\mathbb{P}^N, E \text{ linear}, \dim E = N-n, \#(X\cap E) < \infty \}$

Beweis. 1. Schritt: Gleichheit der Grade d_i.

Das Polynom G_X entstehe aus F_X durch eine Permutation der (n+1) Variablen Gruppen. Es reicht zu zeigen,

$$G_X = c\cdot F_X$$

mit einer Konstanten $c\in k$. Auf Grund der Beschreibung von $V(F_X)$ in 1.6.5(b)(i) gilt

$$V(F_X) = V(G_X),$$

d.h. F_X und G_X beschreiben dieselbe Hyperebene. Auf Grund des Nullstellensatzes ist dann aber eine Potenz von F_X im Ideal von G_X . Weil F_X nach Konstruktion keine mehrfachen irreduziblen Faktoren besitzt, folgt

$$G_X \mid F_X .$$

Aus Symmentriegründen gilt auch $F_X \mid G_X$, d.h. $G_X = c\cdot F_X$.

Im folgenden wollen wir den gemeinsamen Wert der d_i mit d bezeichnen,

$$d := d_0 = ... = d_n .$$

2. Schritt. $\deg X \le d$.

Wir fixieren d Hyperebenen $H_1,...,H_n$ derart, daß der Durchschnitt

$$X\cap H_1\cap...\cap H_n = \{x^{(1)},...,x^{(c)}\}$$

aus endlich vielen Punkten besteht. Dann ist

$$E := H_1\cap...\cap H_n$$

ein linearer Unterraum, wie er in der Definition (1) des Grades von X verwendet wird. Es reicht also zu zeigen, die Anzahl c der Schnittpunkte ist $\le d$,

$$c \le d.$$

Wir führen Bezeichnungen für die Koodinaten der Schnittpunkte ein,

$$x^{(j)} := [u_0^{(j)},...,u_N^{(j)}]$$

Weiter sei $H_0 = [v_0,...,v_N]\in\check{\mathbb{P}}^N$ eine 'variable' Hyperebene,

$$H_0 : \sum_{i=0}^N v_i u_i = 0.$$

Dann ist $F_X(H_0,H_1,...,H_n)$ ein homogenes Polynom des Grades d in den v_i mit

(2) $F_X(H_0,H_1,...,H_n) = 0 \Leftrightarrow x^{(j)}\in H_0$ für mindestens ein $j\in\{1,...,d\}$.

Wir betrachten jetzt F_X als homogenes Polynom in den Koordintaten des 'Punktes'

$$H_0 \in \check{\mathbb{P}}^N.$$

Die Bedinungung $x^{(j)} \in H_0$ bedeutet, daß H_0 auf einer Hyperebene im $\check{\mathbb{P}}^N$ liegt, wir können die $x^{(j)}$ als Hyperebenen im dualen Projektiven Raum auffassen. Das Polynom $F_X$in H_0 ist somit genau dann Null wenn H_0 auf der Vereinigung von endlich vielen Hyperebenen liegt. Diese Vereinigung hat die homogene Gleichung

$$G(v) = \prod_{j=1}^{c} \left(\sum_{i=0}^{N} v_i u_i^{(j)} \right).$$

(2) bekommt damit die Gestalt

$$F_X(H_0,H_1,...,H_n) = 0 \Leftrightarrow G(H_0) = 0.$$

Nach dem Nullstellensatz teilt F_X eine Potenz von G und G eine Potentz von F_X, d.h. es gilt

$$F_X(H_0,H_1,...,H_n) = \alpha\cdot \prod_{j=1}^{c} \left(\sum_{i=0}^{N} v_i u_i^{(j)} \right)^{r_j}$$

mit einer Konstanten $\alpha \in k$ und natürlichen Zahlen r_j (≥ 1). Für den Grad von F_X in den v_i erhalten wir damit

(3) $$d = \sum_{j=1}^{c} r_j \geq c.$$

<u>3. Schritt</u>. deg X = d.

Es reicht zu zeigen, für eine geeignete Wahl der Hyperebenen $H_1,...,H_n$ des zweiten Schritts gilt $r_j = 1$ für alle j. Wir benutzen das folgende Lemma.

Lemma

Sei $f(x,y) \in k[x,y]$ ein irreduzibles Polynom in zwei Gruppen von Variablen

$$x = (x_1,...,x_m) \text{ und } y = (y_1,...,y_n)$$

Weiter sei für mindestens ein i die Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y) \text{ nicht identisch Null.}$$

Dann gibt es eine nicht-leere offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}^n$ derart, daß für jedes $y_0 \in U$ das Polynom

$$f(x,y_0)$$

keine mehrfachen irreduziblen Faktoren besitzt.

Das Polynom $f = F_X$ genügt den Voraussetzungen des Lemmas. Wären nämlich alle Ableitungen nach den Variablen einer Gruppe gleich Null, so würden alle diese Variablen nur als p-te Potenzen in f vorkommen,

$$p := \mathrm{char}(k).$$

Aus Symmetriegründen, würden dann alle Variablen aller Gruppen nur als p-te Potenzen in f eingehen. Dann wäre aber f eine p-te Potenz, was nach Konstruktion ausgeschlossen ist. Auf Grund des Lemmas hat also

$$F_X(H_0,H_1,...,H_n)$$

als Polynom in H_0 keine mehrfachen irreduziblen Faktoren, wenn man die übrigen Hyperebenen $H_1,...,H_n$ aus einer nicht-leeren offenen Mengen U von $(\check{\mathbb{P}}^N)^n$ wählt,

$$(H_1,...,H_n) \in U \subseteq (\check{\mathbb{P}}^N)^n.$$

Außerdem wissen wir, der Durchschnitt

$$X\cap H_1\cap...\cap H_n \text{ ist endlich,}$$

wenn das Tupel der Hyperebenen aus einer gewissen eventuel anderen nicht-leeren offenen Menge U' gewählt wird,

$$(H_1,...,H_n) \in U' \subseteq (\check{\mathbb{P}}^N)^n.$$

Nun ist $(\check{\mathbb{P}}^N)^n$ irreduzibel, d.h.

$$U\cap U' \neq \emptyset.$$

Wählt man das Tupel aus diesem Durchschnitt, so sind in (3) sämtliche $r_j = 1$ und des gilt d = c = deg X.

QED.

Beweis des Lemmas.

<u>1. Schritt</u>. <u>Reduktion auf den Fall, daß keine der Ableitungen</u> $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)$ <u>identisch Null ist</u>.

Wir betrachten eine lineare Transformation x = Ax' mit einer Matrix $A = (a_{ij})$ und setzen

$$g(x') := f(Ax',y).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x'_j} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(Ax',y)\cdot a_{ij}$$

Diese Ausdrücke sind Polynome in den a_{ij}, die nicht identisch Null sind. Man kann die $a_{ij}\in k$ so wählen, daß keine der Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial x'_j}$ identisch Null wird und die Matrix A umkehrbar ist. Die Behauptung für das Polynom g impliziert dann die Behauptung für f.

<u>2. Schnitt</u>. Der Beweis.

Wir betrachen f als Polynom in x_i mit Koeffizienten aus k(x',y). Dabei bezeichne x' das Tupel der übrigen x_j. Wegen f irreduzibel und f' ≠ 0 hat f keine mehrfachen Nullstellen, d.h. f und f' sind teilerfremd, d.h.

$$A\cdot f + B\cdot f' = 1 \text{ in } k(x',y).$$

Wir multiplizieren mit dem Hauptnenner und erhalten eine Relation der Gestalt

$$A\cdot f + B\cdot f' = C_i \text{ in } k[x',y]$$

mit einem von Null verschieden Polynom $C_i\in k[x', y]$, in welchem die Unbestimmte x_i nicht vorkommt. Wir betrachten die C_i als Polnome in den x allein mit Koeffizienten aus k[y]. Sei

$$U := D(\prod a(y)) \subseteq \mathbb{A}^n$$

die offenene Menge, auf welcher sämtliche (von Null verschiedenen) Koeffizienten a(y) aller C_i ungleich Null sind. Wir haben zu zeigen, für $y_0\in U$ hat $f(x,y_0)$ keine mehrfachen irreduziblen Faktoren. Es gilt

$$A(x,y_0)\cdot f(x,y_0) + B(x,y_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y_0) = C_i(x,y_0).$$

Jeder gemeinsame Teiler von $f(x,y_0)$ und $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y_0)$ ist also ein Teiler von $C_i(x,y_0)$. Das bedeutet, jeder mehrfache Primteiler p von $f(x,y_0)$ teilt $C_i(x,y_0)$, d.h. in p kommt die Unbestimmte x_i nicht vor. Da dies für jedes i gilt, ist $p \in k$ eine Einheit, d.h. kein Primteiler. Wir haben gezeigt, $f(x,y_0)$ hat keine mehrfachen Primteiler.

QED.

Bemerkung

Aus dem Beweis geht hervor, für “fast alle” linearen Unterräume $E\subseteq\mathbb{P}^N$ mit

$$\dim E = N - \dim X$$

gilt

$$\deg X = \#(X\cap E). \tag{4}$$

Genauer: es gilt (4) für alle E der Gestalt

$$E = H_1\cap\ldots\cap H_n \text{ , } n = \dim X,$$

mit $(H_1,\ldots,H_n)$ aus einer offenen Mengen von $(\check{\mathbb{P}}^N)^n$.

6.4 Berechnung der Gleichungen einer Varietät aus deren Chow-Polynom

Seien $X\subseteq\mathbb{P}^N$ eine projektive Varietät der Dimension n mit dem Chow-Polynom

$$F_X = F_X(v_0,\ldots,v_n),\ v_i = \begin{pmatrix} v_{i0} \\ \ldots \\ v_{iN} \end{pmatrix},\ v_{ij} \text{ Unbestimmte.}$$

Weiter seien

$$a_{ij}^{l} \qquad l = 0, \ldots , N, 0\le i < j \le N$$

Unbestimmte und

$$A_0 , \ldots , A_N$$

schiefsymmetrische Matrizen deren Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen gerade die Unstimmten a_{ij}^{l} sind,

$$A_l = (a_{ij}^{l}).$$

Wir betrachten das Polynom

$$F_X(A_0x,\ldots,A_nx) \text{ mit } x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \ldots \\ x_N \end{pmatrix}$$

als Polynom in den a_{ij}^{l} allein und bezeichnen dessen Koeffizienten, welche homogene Polynome in x sind, mit

$$F_1(x),\ldots,F_r(x).$$

Dann gilt

$$X = V(F_1,\ldots,F_r),$$

d.h. die F_i sind die Gleichungen der gegebenen projektiven Varietät X.

Beweis. Wir haben zu zeigen, für einen Punkt $x\in\mathbb{P}^N$ gilt

$$x \in V \Leftrightarrow F_X(A_0x,...,A_nx) \text{ ist als Polynom in den } a_{ij}^l \text{ identisch Null.}$$

Dazu reicht es zu zeigen,

1. Für jede schiefsymmetrische Matrix A ist Ax der Vektor der Koeffizienten einer Hyperebene durch x.
2. Für jede Hyperebene durch x ist der Vektor der Koeffizienten von der Gestalt Ax mit A schiefsymmetrisch.

Die Bedingung $F_X(A_0x,...,A_nx)$ identisch Null bedeutet dann nämlich gerade, jedes (n+1)-Tupel von Hyperebenen durch x ist eine Nullstelle von F_X, was nach Definition des Chow-Polynoms gerade $x\in V$ bedeutet.

Zu 1. Weil A schiefsymmetrisch ist, ist $f(x,y) = x^TAy = \langle x,Ay\rangle$ eine in x und y schiefsymmetrische Funktion, d.h. es gilt

$$0 = f(x,x) = \langle x, Ax\rangle,$$

d.h. x genügt der Hyperebenengleichung mit den Koeffizienten Ax.

Zu 2. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f: so(n+1, k) = \{\text{schiefsymmetrische } A \} \to k^{n+1}, A \mapsto Ax.$$

Das Bild dieser Abbildung besteht aus Hyperebenen durch x. Die Hyperebenen durch x entsprechen einem linearen Unterraum der Kodimension 1 von k^{n+1}. Es reicht also zu zeigen,

$$\dim \operatorname{Im} f = n.$$

Dazu wählen wir eine orthogonale Matrix T mit $x = Te_1$, $e_1 := (1,0,...,0)^T$. Da T umkehrbar ist, reicht es zu zeigen, die Abbildung

$$so(n+1, k) \to k^{n+1}, A \mapsto T^{-1}ATe_1,$$

hat ein n-dimensionales Bild. Nun ist $T^{-1}AT$ wieder schiefsymmetrisch, d.h. $T^{-1}AT$ durchläuft alle schiefsymmetrischen Matrizen,wenn dasselbe für A gilt. Es reicht also zu zeigen,

$$so(n+1, k) \to k^{n+1}, A \mapsto Ae_1 := \text{erste Spalte von } A,$$

hat ein n-dimensionales Bild. Das ist aber trivialerweise der Fall.

QED.

6.5 Die Chow-Varietät, algebraische Familien

Die Menge aller Polynome

$$F(H_0,...,H_n) \ne 0$$

in n+1 Gruppen von N+1 Variablen, die homomgen vom Grad d bezüglich jeder der Variablengruppen sind, bilden einen projektiven Raum

$$\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}},$$

wenn man Formen, die sich nur um einen konstanten Faktor aus k* underscheiden identifiziert. In 1.6.5(b) haben wir eine Abbildung

$$\{X \subseteq \mathbb{P}^N \mid X \text{ projektiv, } \dim X = n, \ \deg X = d\} \to \mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}, X \mapsto c(X),$$

definiert, die jeder projektiven Teilvarietät der Dimension n und des Grades d im $\mathbb{P}^N$ ihre Chow-Koordinaten zuordnet. Wir bezeichnen mit

$$C_{N,n,d} \ (\subseteq \mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}})$$

das Bild dieser Abbildung. Der nachfolgende Satz besagt unter anderem, dies ist eine quasi-projektive Varietät. Sie heißt <u>Chow-Varietät</u> der n-dimensionalen Teilvarietäten des Grades d von $\mathbb{P}^N$.

Zur Formulierung des Satzes benötigen wir noch den Begriff der algebraischen Familie. Seien S eine quasi-projektive Varietät,

$$\Gamma \subseteq S\times\mathbb{P}^N$$

eine abgeschlossene Teilvarietät und

$$\varphi: \Gamma \to \mathbb{P}^N$$
$$\psi: \Gamma \to S$$

die Einschränkungen der beiden Projektionen. Betrachten wir die folgende Familie von projektiven Teilvarietäten des $\mathbb{P}^N$,

$$\{X_s\}_{s\in S} \text{ mit } X_s := \varphi(\psi^{-1}(s)).$$

Eine solche Familie heißt <u>algebraische Familie</u>, wenn alle X_s dieselbe Dimension haben.[210]

Bemerkungen

(i) Für jedes $s\in S$ induziert die Projektion φ einen Isomorphismus

$$\psi^{-1}(s) = \{s\}\times X_s \to X_s\ , (s,x) \mapsto x,$$

d.h. sie identifiziert die Faser über $\psi^{-1}(s)$ mit einer Teilvarietät des $\mathbb{P}^N$. Oft ist es zweckmäßig, diese Identifikation automatisch vorzunehmen und die Abbildung φ in den Bezeichnungen zu unterdrücken. Eine algebraische Familie ist dann eine Familie der Gestalt

$$\{\psi^{-1}(s)\}_{s\in S}$$

mit einem Morphismus $\psi: \Gamma \to S$, dessen Fasern konstante Dimension haben.

(ii) Häufig betrachtet man den Morphismus selbst als die algebraische Familie.

6.6 Theorem (Existenz der Chow-Varietät)

Die irreduziblen abgeschlossenen Teilvarietäten $X \subseteq \mathbb{P}^N$ mit dim X = n und deg X = d bilden eine algebraische Familie. Genauer, es gibt eine solche quasi-projektive Teilmenge

$$C_{N,n,d} \subseteq \mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$$

und eine abgeschlossenen Teilmenge Teilvarietät

$$I\subseteq C_{N,n,d}\times\mathbb{P}^N,$$

sodaß die beiden Projektionen $\varphi: I\to\mathbb{P}^N$ und $\psi: I\to C_{N,n,d}$ diese Familie definieren:

$$\{\varphi(\psi^{-1}(s))\}_{s\in C_{N,n,d}}.$$

Beweis. Wir betrachten im $\mathbb{P}^N\times\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$ die folgende Inzidenz-Relation.

---

[210] In der Schema-Theorie fordert man stattdessen die Flachheit von $\psi: \Gamma \to S$. Daraus folgt dann die (lokale) Konstanz der Dimension. Falls S reduziert und irreduzibel ist, ist die Flachheit (projektiver Morphismen $X \subseteq \mathbb{P}^n_T\to T$) fast äquivalent zur Konstanz der Dimension: sie ist äquivalent zur Konstanz des Hilbert-Polynoms (vgl. Hartshorne, III, Th. 9.9). Ist $X \subseteq \mathbb{P}^n_T$ ein vollständiger Durchschnitt, so ist die Flachheit äquivalent zur Konstanz der Dimension.

$$I := \{(x, F)\in\mathbb{P}^N\times\check{\mathbb{P}}^{N,n,d} \mid F(H_0,...,H_d) = 0 \text{ für je n+1 Hyperebenen } H_i \subseteq\mathbb{P}^N \text{ durch x } \}$$

In 1.7.4 haben wir gesehen, dies ist eine abgeschlossene Teilvarietät im Produktraum $\mathbb{P}^N\times\check{\mathbb{P}}^{N,n,d}$. Wir betrachten die beiden Projektionen

$$\varphi: I \to X \text{ und } \psi: I \to \check{\mathbb{P}}^{N,n,d}.$$

Nach 1..6.5(b) wissen wir, ist $F = F_X$ das Chow-Polynom einer irreduziblen Varietät $X\subseteq\mathbb{P}^N$ der Dimension n und des Grades d, so ist

$$\psi^{-1}(F) = X\times\{F\} \text{ und } \varphi(\psi^{-1}(F)) = X.$$

Es reicht also zu zeigen, die Menge

$$C_{N,n,d} \subseteq \check{\mathbb{P}}^{N,n,d}$$

ist lokal abgeschlossen[211]. Die Einschränkung

$$\psi: \psi^{-1}(C_{N,n,d}) \to C_{N,n,d}$$

definiert dann zusammen mit φ die gesuchte algebraische Familie. Dazu reicht es zu zeigen,

(1) $\qquad C_{N,n,d} = \{F \mid \dim \psi^{-1}(F) = n\}\cap \{F \mid F \text{ irreduzibel}\},$

denn die erste Menge des Durchschnitts rechts ist lokal abgeschlossen[212] (nach dem Satz von der Dimension der Faser) und die zweite ist offen (nach 1.5.2 (i)).

Die Inklusion "$\subseteq$" ist einfach: die Irreduzibilität des Chow-Polynoms F_X haben wir während der Konstruktion der Chow-Koordinaten bereits bewiesen. Wegen $\psi^{-1}(F_X) = X \times \{F_X\}$ ist die Dimension der Faser über F_X gleich n.

Betrachten wir die Inklusion "$\supseteq$". Seien F ein Element der rechten Seite von (1) und X eine Komponente von $\psi^{-1}(F)$,

$$X \subseteq \varphi\psi^{-1}(F) \text{ irreduzibel, } \dim X = n.$$

Wir betrachten die Inzidenz-Relation

$$I' := \{(x, H_0,...,H_d)\in X\times(\check{\mathbb{P}}^N)^{n+1} \mid x\in H_i\}$$

und die beiden Projektionen

$$\varphi': I' \to X \text{ und } \psi': I' \to (\check{\mathbb{P}}^N)^{n+1}.$$

Das Bild von ψ' besteht aus allen Tupeln $(H_0,...,H_d)$ von Hyperebenen, die einen gemeinsamen Punkt $x\in X \subseteq \varphi\psi^{-1}(F)$ enthalten. Es gilt $(x,F)\in\psi^{-1}(F) \subseteq I$, also ist für diese Tupel

$$F(H_0,...,H_d) = 0.$$

Die Elemente aus dem Bild von ψ' liegen also auf der Hyperfläche,

$$\operatorname{Im} \psi' \subseteq V(F),$$

Das Bild von Im ψ' ist aber gerade das Chow-Polynom von X,

$$V(F_X) \subseteq V(F).$$

Nach dem Nullstellensatz teilt F_X eine Potenz von F. Weil F_X irreduzibel ist, folgt

---

[211] d.h. offene Teilmenge einer abgeschlossenen, oder, äquivalent, Durchschnitt einer offenen mit einer abgeschlossenen Teilmenge.

[212] als Durchschnitt der abgeschlossenen Menge der F, für welche ≥ gilt, und der offenen Menge alle F, für welche ≤ gilt.

$$F_X \mid F .$$

Weil F irreduzibel ist, folgt $F = c\cdot F_X$ mit $c\in k^*$. Mit anderen Worten F ist Chow-Polynom von X.

QED.

Bemerkungen

(i) Der obige Beweis ist eine Übersetzung des Beweises von [35], Teil II, Chap. X, § 8 in eine geometrischere Sprache. Eine Variate dieses Beweises, die sehr nahe am Original ist, findet sich im nachfolgenden (ergänzenden) Abschnitt. Siehe auch [28], Chap. I, §9.

(ii) Offensichtlich liegt eine Form $F\in\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$ genau dann in $C_{N,n,d}$, wenn sie von der Gestalt $F = F_X$ ist mit $X\subseteq\mathbb{P}^N$ von der Dimension n und vom Grad d.

(iii) Die Menge $C_{N,n,d}$ ist im allgemeinen nicht abgeschlossen im $\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$. Man kann zum Beispiel zeigen, eine quadratische Form

$$F(x_0,x_1,x_2,y_0,y_1,y_2)$$

ist genau dann die Caley-Form zu einer ebenen Kurve des Grades 2, wenn sie nicht das Quadrat einer Linearform ist.

(iv) Man kann die obige Konstruktion jedoch etwas abändern und so erzwingen, daß man eine abgeschlossene Teilmenge erhält: man führt den Begriff des n-dimensionalen Zyklus ein.

(v) Unter einem n-dimensionalen <u>Zyklus</u> versteht man eine formale Linearkombination

$$D = m_1X_1 + ... + m_\ell X_\ell$$

von irreduziblen projektiven Teilvarietäten $X_i\subseteq\mathbb{P}^N$ der Dimension n und natürlichen Zahlen m_i. Man setzt

$$\deg D := m_1\cdot\deg X_1 + ... + m_\ell \deg X_\ell$$

$$F_D := F_{X_1}^{m_1}\cdot...\cdot F_{X_\ell}^{m_\ell}$$

Auf diese Weise kann man Chow-Koordinaten für beliebige n-dimensionale Zyklen eines festen Grades definieren und vergrößert das Bild der oben definierten Abbildunge etwas. Die Menge der Chow-Koordinaten der n-dimensionalen Zyklen des $\mathbb{P}^N$ vom Grad d wird mit

$$\bar{C}_{N,n,d}$$

bezeichnet. Sie enthält $C_{N,n,d}$ und ist eine abgeschlossen Teilmenge von $\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$.

(vi) Die Chow-Koordinaten bieten die Möglichkeit die Teilvarietäten und Zyklen des $\mathbb{P}^N$ zu klassifizieren. Die Chow-Varietät ist im allgemeinen reduzibel. Ihre irreduziblen Komponenten, deren Zahl und Dimension vermitteln eine Vorstellung von der Gesamtheit aller Teilvarietäten des $\mathbb{P}^N$ mit gegebener Dimension und gegebenen Grad.

(vii) Wir weisen darauf hin, daß die Teilvarietäten nicht bis auf Isomorphie betrachtet werden. Sei werden als verschieden angesehen, wenn sie als Teilmengen des $\mathbb{P}^N$ verschieden sind.

6.7 Theorem (Die Kompaktivizierung der Chow-Varietät)

Die n-dimensionalen Zyklen des Grades d im $\mathbb{P}^N$ bilden eine algebraische Familie

Beweis. Es reicht zu zeigen, $\bar{C}_{N,n,d}$ ist abgeschlossen im $\check{\mathbb{P}}^{N,n,d}$. Sei

$$I := \{(x, F) \in \mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}}^{N,n,d} \mid F(H_0,...,H_n)=0 \text{ für alle Tupel von Hyperebenen } H_i \ni x\}.$$

die Inzidenz-Relation aus dem Beweis von 1.6.5(f). Weiter seien

$$p_{13}: \mathbb{P}^N \times (\check{\mathbb{P}}^N)^{n+1} \times \check{\mathbb{P}}^{N,n,d} \to \mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}}^{N,n,d}$$

die natürliche Projektion und

$$J := \{(x,H_0,...,H_n,F) \in p_{13}^{-1}(I) \mid x \in H_0 \cap ... \cap H_n\}$$

$$= \{(x,H_0,...,H_n,F) \in \mathbb{P}^N \times (\check{\mathbb{P}}^N)^{n+1} \times \check{\mathbb{P}}^{N,n,d} \mid \begin{array}{l} x \in H_0 \cap ... \cap H_n \text{ und } F(H'_0,...,H'_n)=0 \\ \text{für alle Tupel von Hyperebenen } H'_i \ni x \end{array}\}$$

$$K := \{(H_0,...,H_n,F) \in (\check{\mathbb{P}}^N)^{n+1} \times \check{\mathbb{P}}^{N,n,d} \mid F(H_0,...,H_n) = 0\}$$

Wir betrachten das kommutative Diagramm von Projektionen

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^N \times (\check{\mathbb{P}}^N)^{n+1} \times \check{\mathbb{P}}^{N,n,d} \supseteq & J & \xrightarrow{q} & I \quad (\subseteq \mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}}^{N,n,d}) & \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^N \\ & r \downarrow & & \downarrow \psi & \\ (\check{\mathbb{P}}^{N})^{n+1} \times \check{\mathbb{P}}^{N,n,d} \supseteq & K & \xrightarrow{\varepsilon} & \check{\mathbb{P}}^{N,n,d} & \end{array}$$

<u>1. Schritt</u>. Wir zeigen

$$\bar{C}_{N,n,d} = \{F \in \check{\mathbb{P}}^{N,n,d} \mid \varepsilon^{-1}(F) \subseteq \mathrm{Im}(r)\}$$

<u>Beweis von</u> "$\subseteq$". Sei $F \in \bar{C}_{N,n,d}$ und sei

$$F = F_1 \cdot ... \cdot F_r$$

die Zerlegung von F in irreduzible Faktoren. Für jedes i gibt es dann eine irreduzible Teilvarietät $X_i \subseteq \mathbb{P}^N$ der Dimension n mit $F_i = F_{X_i}$. Es gilt

$$\varepsilon^{-1}(F) = V(F) \times \{F\}.$$

Die Faser von r über einem Punkt $p := (H_0,...,H_n,F) \in V(F) \times \{F\}$ besteht aus allen Tupeln

$$(x, H_0,...,H_n,F)$$

mit $x \in H_0 \cap ..., \cap H_n$ und $F(H'_0,...,H'_n) = 0$ für alle Tupel von Hyperebenen H'_i durch den Punkt x. Insbesondere gilt

$$r^{-1}(H_0,...,H_n,F) \supseteq (X \cap H_0 \cap ... \cap H_n) \times \{p\} \text{ , } X := \cup_{i=1}^r X_i \text{ ,}$$

d.h. die Faser ist nicht leer, d.h. es gilt $(H_0,...,H_n,F) \in \mathrm{Im}(r)$. Wir haben gezeigt,

$$\varepsilon^{-1}(F) \subseteq \mathrm{Im}(r)$$

für jedes $F \in \bar{C}_{N,n,d}$.

<u>Beweis von</u> "$\supseteq$". Sei F aus der Menge auf der rechten Seite und sei

$$F = F_1^{n_1} \cdot ... \cdot F_r^{n_r}$$

die Zerlegung von F in paarweise teilerfremde irreduzible Faktoren. Dann gilt

$$\cup_{i=1}^r V(F_i) \times \{F\} = V(F) \times \{F\} = \varepsilon^{-1}(F) \subseteq \mathrm{Im}(r).$$

Für jedes i gilt

$$\dim r^{-1}(V(F_i)\times\{F\}) \geq \dim V(F_i)\times\{F\} = \dim V(F_i) = N\cdot(n+1) - 1.$$

Wir haben gezeigt,

$$r^{-1}(\varepsilon^{-1}(F))$$

ist Vereinigung von mindestens r irreduziblen Varietäten einer Dimension $\geq N\cdot(n+1) - 1$ und eventuel weiterer Varietäten einer kleineren Dimension. Wegen der Kommutativität des obigne Diagramms gilt

$$r^{-1}(\varepsilon^{-1}(F)) = q^{-1}(\psi^{-1}(F))$$

Die Faser von ψ über F hat eine Dimension $\leq n$. Ist nämlich die Dimension von $\psi^{-1}(F)$ größer , so kann man eine irreduzible Teilvarietät

$$Y \subseteq \varphi\psi^{-1}(F)$$

der Dimension n wählen. Wie im Beweis von 1.6.5(f) sieht man[213], dann gilt

$$V(F_Y) \subseteq V(F),$$

d.h. F_Y teilt eine Potenz von F. Da F_Y irreduzibel ist, teilt F_Y das Polynom F selbst. Jede irreduzible Teilvarietät Y der Dimension n von $\psi^{-1}(F)$ liefert also einen Primteiler von F. Verschiedene Y liefern teilerfremde Teiler, da man Y aus F_Y rekonstruieren kann. Also ist $\psi^{-1}(F)$ Vereinigung von höchstens r Teilvarietäten der Dimension n (und eventuell endlich vieler weiterer von kleinerer Dimension). Es folgt $\dim \psi^{-1}(F) = n$, im Widerspruch zur Annahme. Wir haben gezeigt,

$$\dim \psi^{-1}(F) \leq n \text{ für alle F.}$$

Nach Konstruktion sind die Fasern von q isomorph zu $(\check{\mathbb{P}}^{N-1})^{n+1}$. Damit gilt

$$\dim q^{-1}(\psi^{-1}(F)) = \dim \psi^{-1}(F) + (N-1)(n+1) \leq n + (N-1)(n+1) = N(n+1) - 1.$$

Oben haben wir gesehen, es gibt mindestens r irreduzible Komponenten dieser Faser von mindestens dieser Dimension. Es gilt also:

> Es gibt genau r verschiedene irreduzible Komponenten von $q^{-1}(\psi^{-1}(F))$ mit der Dimension $N(n+1) - 1$. Die Dimension jeder weiteren Komponente ist kleiner.

Da die Fasern von q irreduzibel von der Dimension $(N-1)(n+1)$ sind, folgt:

> Es gibt genau r verschiedene irreduzible Komponenten von $\psi^{-1}(F)$ mit der Dimension n. Die Dimension jeder weiteren Komponente ist kleiner.

Seien $X_1,\dots,X_r$ die höchstdimensionalen Komponenten von $\psi^{-1}(F)$. Wie schon angemerkt liefert jedes X_i einen Primteiler F_{X_i} von F und verschiedene X_i liefern teilerfremde Primteiler. Wir können also annehmen,

$$F_{X_i} = F_i \text{ für } i = 1,\dots,r.$$

Dann ist aber F ein Chow-Polynom.

---

[213] Sei $(H_0,\dots,H_n)\in V(F_Y)$. Dann gibt es einen Punkt $y\in Y$ mit $y\in H_i$ für alle i. Nach Wahl von Y ist

$(y,F) \subseteq \psi^{-1}(F) \subseteq I$

und nach Definition von I ist $F(H_0,\dots,H_n) = 0$ (für jedes Tupel von Hyperebenen durch y, also auch für dieses spezielle). Dann ist aber $(H_0,\dots,H_n)\in V(F)$.

2. Schritt. Beweis der Abgeschlossenheit von

(1) $$\{F\in\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}} \mid \varepsilon^{-1}(F) \subseteq \mathrm{Im}(r)\}$$

Sei $\bar F \in \mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$ nicht in (1). Es reicht, eine offene Umgebung von $\bar F$ zu finden, die disjunkt ist zu (1). Nach Voraussetzung ist

$$\varepsilon^{-1}(\bar F) \not\subseteq \mathrm{Im}(r).$$

Es gibt also Hyperebenen $\bar H_i$ mit

$$(\bar H_0,...,\bar H_n, \bar F) \in \varepsilon^{-1}(\bar F) - \mathrm{Im}(r).$$

Da Im(r) projektiv (also abgeschlossen) ist, gibt es eine offene Menge U mit

$$(\bar H_0,...,\bar H_n, \bar F) \in U \subseteq K - \mathrm{Im}(r).$$

Auf Grund des nachfolgenden Lemmas überführt

$$\varepsilon: K \to \mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$$

offene Mengen in offene Mengen. Es gibt also eine offene Umgebung V von $\bar F$ mit

$$\bar F \in V \subseteq \varepsilon(U).$$

Für jedes $F'\in V$ gibt es also ein $(H'_0,...,H'_n,F')\in U\cap\varepsilon^{-1}(F')$. Wegen $U\subseteq K-\mathrm{Im}(r)$ folgt $\varepsilon^{-1}(F') \not\subseteq \mathrm{Im}(r)$, d.h. F' liegt nicht in (1) für beliebiges $F'\in V$.

QED.

Lemma (Ein Beispiel für eine offene Abbildung)

Seien X ein Produkt von Exemplaren projektiver Räume,

$$H \subseteq \mathbb{P}^a\times X$$

eine Hyperfläche, die sich surjektiv abbildet auf $\mathbb{P}^a$ bei der ersten Projektion

$$p: \mathbb{P}^a\times X \to \mathbb{P}^a.$$

Dann ist die Einschränkung $p|H$ offen, d.h. überführt offene in offene Mengen.

Beweis. Da die offenen affinen Mengen eine Topologie-Basis bilden, reicht es die analoge Aussage in der affinen Situation zu beweisen:

$$p: \mathbb{A}^{a+b} \to \mathbb{A}^a,\ H = V(f) \subseteq \mathbb{A}^{a+b},$$

mit einer linearen Abbildung p. Anstelle der Surjektivität von $p|_H$ können wir nur die Dominanz dieser Abbildung fordern. Seien

$$x\in D(g)\cap H$$

gegeben. Wir haben zu zeigen, $p(D(g)\cap H)$ enthält eine offene Umgebung von p(x). O.B.d.A. sei x = (0,...,0). Wir schreiben

$$k[\mathbb{A}^{a+b}] = k[T_1,...,T_{a+b}]$$

$$f(T) = f_n(T) + f_{n-1}(T) + ...\ \text{(Zerlegung in homogene Bestandteile)}$$

Durch eine lineare Transformation der Gestalt

$$T_i = T'_i + \alpha_i T'_{a+b} \text{ für } i = 1,..., a+b-1.$$
$$T_{a+b} = T'_{a+b}$$

erreich wir

$$f_n(T) = T'^n_{a+b}\cdot f_n(\alpha,1) + \text{niedrigere Grade bezüglich } T'_{a+b}$$

d.h. wir können erreichen,daß f die folgende Gestalt bekommt:

$$f(T) = T^n_{a+b} + f_{n-1}(T')T^{n-1}_{a+b} + ... + f_0(T')$$

mit $T' = (T_1,...,T_{a+b-1})$ (und $f_n(T') = 1$). Gleichzeitig können wir für g die Darstellung

$$g(T) = T_{a+b}^n + g_{n-1}(T')T_{a+b}^{n-1} + ... + g_0(T').$$

realisieren. Wegen $x \in D(g) \cap H$ gilt $f_0(x')=0$ und $g_0(x') \neq 0$. Insbesondere haben f und g keine gemeinsame Nullstelle mit $x' = 0$, d.h. die Resultante

$$h(T') = \mathrm{Res}_{T_{a+b}}(f,g)$$

ist in $x'=0$ von Null verschieden.
Die Abbildung $p|_H$ zerfällt damit in die Zusammensetzung der beiden folgenden:

$$p':H \to \mathbb{A}^{a+b-1}, (x_1,...,x_{a+b}) \mapsto (x_1,...,x_{a+b-1})$$

$$p'': \mathbb{A}^{a+b-1} \to \mathbb{A}^a \text{ (linear).}$$

<u>Offenheit von p'</u>: Es gilt $p'D(g) \cap H \supseteq D(h \cdot g_0) \cap H \ni x'$ und $D(h \cdot g_0)$ ist offen in $\mathbb{A}^{a+b-1}$).

<u>Offenheit von p''</u>: Es reicht zu zeigen, bei der Projektion $p:\mathbb{A}^{a+b} \to \mathbb{A}^a$ auf die ersten a Koordinaten geht D(g) in eine Menge über, die eine offene Umgebung des Ursprungs enthält. O.B.d.A. sei b = 1.

Dazu schreiben wir g als Funktion von T_{a+b} mit Koeffizienten

$$\tilde{g}_i(T')$$

Das Produkt der Koeffizienten $\tilde{g}_i$ die in $x' = 0$ nicht Null sind definiert eine Umgebung des Ursprungs von $\mathbb{A}^a$ welche in p(D(g)) enthalten ist.
QED.

(6.8) Bezeichnungen

Die Varietät

$$\bar{C}_{N,n,d}$$

heißt (abgeschlossene) <u>Chow-Varietät</u> der n-dimensionalen Teilvarietäten des Grades d von $\mathbb{P}^N$. Die Teilvarietät

$$C_{N,n,d} \subseteq \bar{C}_{N,n,d}$$

heißt <u>offene Chow-Varietät</u> der n-dimensionalen irreduziblen Teilvarietäten des Grades d von $\mathbb{P}^N$. Die bisher mit I bezeichnete Inzidenz-Relation, eingeschränkt auf $\bar{C}_{N,n,d}$ bezeichnen wir mit

$$I_{N,n,d} := \{(x,F) \in \mathbb{P}^N \times \bar{C}_{N,n,d} \mid F(H_0,...,H_n)=0 \text{ für alle Tupel mit } x \in H_i \text{ für alle } i\}$$

Da die zweite Koordinate ein Chow-Polynom ist, können wir die Inzidenz-Relation jetzt auch wie folgt beschreiben.

$$I_{N,n,d} = \{(x,F_X) \in \mathbb{P}^N \times \bar{C}_{N,n,d} \mid x \in X\}$$

Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ll} I_{N,n,d} & \subseteq \mathbb{P}^N \times \overline{C}_{N,n,d} \\ \psi\downarrow & \swarrow \\ \overline{C}_{N,n,d} & \end{array}$$

heißt <u>universelle Familie der Chow-Varietät</u> $\overline{C}_{N,n,d}$.

Bemerkung

Nach Konstruktion ist die Faser von ψ über $F_X \in \overline{C}_{N,n,d}$,

$$\psi^{-1}(F_X) = X\times\{F_X\}$$

isomorph zu X.

(6.9) Beispiele: Kurven im $\mathbb{P}^3$ (N = 3, n = 1)

<u>d = 1</u>: $C_{3,1,1} = \overline{C}_{3,1,1} = \prod$ (die Plücker-Varietät).

<u>d = 2</u>: $\overline{C}_{3,1,2} = C' \cup C''$ zwei Komponenten der Dimension 8 mit

C' := ebene Kurven zweiter Ordnung

C'' := Paare von Geraden (die im allgemeinen windschief sind)

<u>d = 3</u>: $\overline{C}_{3,1,3} = C' \cup C'' \cup C^{III} \cup C^{IV}$ vier Komponenten der Dimension 12 mit

C' := Tripel von Geraden

C'' := ebene Kurven 2.Ordnung vereinigt mit einer Geraden

C^{III}:= ebene Kurven 3.Ordnung.

C^{IV}:= nicht-ebene Kurven 3.Ordnung.

Die letzteren Kurven erhält man sämtlich aus dem Bild der Veronese-Abbildung

$$v_3: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$$

durch lineare Transformationen,

$$X = \mathrm{Im}(v_3) = \{[s^3,s^2t,st^2,t^3] \mid [s,t]\in\mathbb{P}^1\} = V(I(X))$$

$$I(X) = (xw-yz,\ xz - y^2,\ yw - z^2)$$

$(x = s^3, y = s^2t, z = st^2, w = t^3)$

6.10 Faserprodukte

Seien f: X→Z und g:Y→Z zwei reguläre Abbildungen. Dann heißt

$$X\times_Z Y := \{(x,y) \in X\times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

<u>Faserprodukt</u> von X und Y über Z bezüglich der gegebenen Abbildungen. Dies ist eine abgeschlossene Menge des Produkts X×Y.[214] Betrachten wir das kommutative Diagramm

(1)
$$\begin{array}{ccc} X\times_Z Y & \xrightarrow{p_i} & X \\ \downarrow p_2 & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

[214] Wegen $X\times_Z Y = (f\times g)^{-1}(\Delta)$ mit $\Delta := \{(z,z) \mid z\in Z\} \subseteq Z\times Z$.

wobei p_i (i=1,2) die Projektion auf den i-ten Faktor sei. Ein Diagramm das bis auf Isomorphie von dieser Gestalt ist, heißt kartesisch.

Bemerkungen

(i) In einem kartesichen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & Z \end{array}$$

ist W isomorph zum Faserprodukt von X und Y über Z. Insbesondere ist W bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt.

(ii) In einem kartesischen Diagramm haben parallele Morphismen viele Gemeinsamkeiten. Identifiziert f in (1) zum Beispiel X mit einer offenen Teilmenge von Z, so identifiziert p_2 das Faserprodukt mit einer offenen Teilmenge von Y,

$$X\times_Z Y = \{(x,y) \mid X\ni x = g(y)\} \cong \{ y\in Y \mid g(y) \in X \} = g^{-1}(X).$$

Die analoge Aussage gilt für abgeschlossene Teilmengen.

(iii) Für jeden Morphismus f: X→Y und jede offene oder abgeschlossene Teilmenge $Z\subseteq Y$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Z) & \subseteq & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \subseteq & Y \end{array}$$

kartesisch.

(iv) Die Zusammensetzung zweier kartesicher Vierecke ist kartesich.

(v) Die Faser von p_2 über $y\in Y$ ist in natürlicher Weise isomorph zur Faser von f über g(y).

$$p_2^{-1}(y) = \{(x,y)\in X\times Y \mid f(x) = g(y)\} = f^{-1}(g(y))\times\{y\} \cong f^{-1}(g(y))$$

6.11 Hilbert-Polynom einer projektiven Varietät

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine projektive Varietät mit dem Ideal $I(X) \subseteq k[S]$. Bezeichne

$$k[S]_n$$

die Menge der homogenen Polynome des Grades n von k[S]. Dies ist ein Vektorraum der Dimension

$$\dim_k k[S]_n = \binom{n+N}{N}$$

Weil I(X) ein homogenes Ideal ist, gilt

$$I(X) = \oplus_{n=0}^{\infty} I(X)\cap k[S]_n$$

d.h. der homogene Koordinatenring von X,

$$k[X] := k[S]/I(X) \cong \oplus_{n=0}^{\infty} k[S]_n/I(X)\cap k[S]_n$$

besitzt die Struktur eines graduierten Moduls. Wir setzen

$$H_X(n) := \dim_k k[X]_n = \dim_k k[S]_n - \dim_k I(X)\cap k[S]_n$$

Die Funktion

$$H_X\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\cup\{0\}$$

heißt Hilbert-Funktion der Teilvarietät $X \subseteq \mathbb{P}^N$. Mit demselben Symbol bezeichnen wir auch die formale Potenzreihe

$$H_X = \sum_{n=0}^{\infty} H_X(n)T^n,$$

deren Koeffizienten die Werte der Hilber-Funktion sind. Sie heißt Hilbert-Reihe von X. Allgemeiner schreiben wir für jeden graduierten k-Vektorraum

$$M = \oplus_{n=0}^{\infty} M_n ,$$

dessen homogene Bestandteile M_n endlich-dimensionale k-Vektorräume sind,

$$H_M(n) := \dim_k M_n$$

und

$$H_M = \sum_{n=0}^{\infty} H_M(n)T^n,$$

und nenen die Funktion H_M Hilbert-Funktion von M und die zugehörieg formale Potenzreihe Hilbert-Reihe von M.

Bemerkungen

(i) H_X ist keine Invariante von X sondern eine der Teilvarietät, $X \subseteq \mathbb{P}^N$. Isomorphe X können verschiedener Einbettungen verschiedene Hilbert-Funktionen haben.

(ii) Sind

$$M = k[S]/I \text{ und } N = k[S]/(I,F),\ I \subseteq k[S],\ F \in k[S]$$

Faktor-Ringe des Polynomrings k[S] mit einem homogenen Ideal I und einem homogenen Element F, welches M-regulär ist, d.h. die Multiplikation mit F induziert eine injektive Abbildung $M \xrightarrow{F} M$. Wir haben dann eine exakte Sequenz

$$0 \to M \xrightarrow{F} M \to N \to 0$$

die in jedem Grad eine exakte Sequenz endlich-dimensionaler k-Vektorräume liefert. Es gilt deshalb

$$H_N(n) = H_M(n) - H_M(n - d) \text{ mit } d = \deg F$$

also

$$H_N = \sum_{n=0}^{\infty} (H_M(n) - H_M(n - d))T^n = H_M - T^d \cdot H_M = (1-T^d)\cdot H_M$$

also

$$H_M = \frac{1}{1-T^d} \cdot H_N$$

(iii) $H_{\mathbb{P}^N} =^{215} \frac{1}{1-T} \cdot H_{\mathbb{P}^{N-1}}$

$$H_{\mathbb{P}^N} =^{216} \frac{1}{(1-T)^{N+1}}$$

(iv) Berechnen wir das Hilbert-Polynom der Kurve $X \subseteq \mathbb{P}^3$ mit

$$I(X) = (xw-yz,\ xz - y^2,\ yw - z^2)$$

---

[215] Man wenden (ii) an mit I = (0) und F = S_N.

[216] Folgt durch wiederholtes Anwenden der vorangehenden Formel und aus $H_k = 1$.

d.h. das Hilbert-Polynom der nicht-ebenen Kurven dritten Grades im $\mathbb{P}^3$. Diese sind keine (idealtheorisch) vollständigen Durchschnitte. Die natürliche Abbildung in den Faktorring induziert eine Bijektion

$$k\cdot y + k\cdot z + k[x,w] \xrightarrow{\cong} k[x,y,z,w]/I(X)$$

Deshalb gilt für n > 1

$$H_X(n) = \dim_k k[x,w]_n = \binom{n+1}{1} = n + 1$$

(v) Für jedes homogenen Ideal $I \subseteq k[S]$ gilt

$$H_{k[S]/I} = \frac{p(T)}{(1-T)^{n+1}}\ ,\ p(1) > 0,$$

mit $p(T) \in \mathbb{Z}[T]$ und $n = \dim V(I)$.[217]

(vi) Es gibt ein eindeutig bestimmtes Polynom P_X mit $H_X(n) = P_X(n)$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. Es heißt Hilbert-Polynom von $X \subseteq \mathbb{P}^N$. Der Grad dieses Polynoms ist gerade die Dimension von X. Zum Beispiel gilt für den projektiven Raum

$$H_{\mathbb{P}^N}(n) = \dim k[X]_n = \binom{n+N}{N},$$

d.h. das Hilbert-Polynom hat den Grad N.[218]

---

[217] Angenommen die Aussage ist falsch für ein $I \subseteq k[S]$. Weil k[S] noethersch ist, gibt es dann auch ein homogenes Ideal $I \subseteq k[S]$, daß maxial ist bezüglich dieser Eigenschaft, d.h. für jedes homogene Ideal $J \subseteq k[S]$ mit $I \subseteq J$, $I \neq J$ ist die Aussage richtig.

Das Ideal I ist dann kein maxiaales homogenes Ideal von k[S], denn für I = (S)k[S] ist die Aussage richtig: $V(I) = \emptyset$, $\dim V(I) = -1$, $H_{k[S]/I} = H_k = 1 = \frac{1}{(1-T)^0}$.

Das Ideal I ist auch kein Primideal. Denn andernfalls gibt es, da I nicht maximal ist, ein $S_i \notin I$ und die Multiplikation mit S_i induziert eine injektive Abbildung $k[S]/I \to k[S]/I$. Nach Bemerkung (ii) folgt

$$H_{k[S]/I} = \frac{1}{1-T} \cdot H_{k[S]/(I,S_i)} = \frac{p(T)}{(1-T)^{n+1}}$$

mit $n = \dim V(I,S_i) + 1 = \dim V(I)$ (man beachte, die Varietät V(I) liegt nicht in der Hyperebene $V(S_i)$).

Nachweis des endgültigen Widerspruchs. Da I nicht prim ist, gibt es homogene Polynome F,G mit

$$F\cdot G \in I,\ F \notin I,\ G \notin I.$$

Insbesonder sind (I,F) und $I:F = \{a \in k[S] \mid aF \in I\}$ homogene Ideale, die echt größer sind als I, d.h. Ideale, für welche die Behauptung gilt. Aus der exakten Sequenz

$$0 \to k[S]/(I:F) \xrightarrow{F} k[S]/I \to k[S]/(I,F) \to 0$$

lesen wir ab, es gilt $H_{k[S]/I} = H_{k[S]/(I,F)} + T^d \cdot H_{k[S]/(I:F)}$ mit d = deg F, also

$$H_{k[S]/I} = \frac{p(T)}{(1-T)^{n'+1}} + \frac{q(T)}{(1-T)^{n''+1}}$$

mit Polynomen $p,q \in \mathbb{Z}[T]$ und $n' = \dim V(I,F)$, $n'' = \dim V(I:F)$.

Nach Konstruktion gilt $V(I,F) \subseteq V(I)$ und $V(I:F) \subseteq V(I)$. Für $x \in V(I)$ gilt entweder $F(x) = 0$ oder $F(x) \neq 0$. Im ersten Fall gilt $x \in V(I,F)$, im zweiten Fall $x \in V(I:F)$. Zusammen erhalten wir

$$V(I) = V(I,F) \cup V(I:F).$$

Deshalb gilt $n', n'' \leq \dim V(I)$ und eine der beiden Dimensionen n',n" ist gleich dim V(I). Damit hat $H_{k[S]/I}$ aber die im Satz behauptete Gestalt.

(vii) Ist $X \subseteq \mathbb{P}^N$ ein (idealtheoretisch) volständiger Durchschnitt der Dimension n, d.h. es gibt N-n Formen F_i mit

$$I(X) = (F_1,...,F_{N-n}).$$

Dann gilt nach (ii) mit $d_i := \deg F_i$

$$H_X = (1-T^{d_1})\cdot...\cdot(1-T^{d_{N-n}})\cdot\frac{1}{(1-T)^{N+1}}$$

$$= \frac{1}{(1-T)^{N-n+1}}\prod_{i=1}^{N-n}(1 + T + T^2 + ... + T^{d_i})$$

wird von N-n Formen erzeugt) ein Hilbert-Polynom des Grades n besitzt.

(viii) Seien $X \subseteq \mathbb{P}^N$, $v: \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^{\nu_{N,m}}$ die Veronese-Einbettung des Grades m und

$$X' = v(X).$$

Den Einschränkungen von linear unabhängigen Hyperflächengleichungen des Grades l auf X' entsprechen dann gerade den Einschränkungen von linear unabhängigen Hyperflächengleichungen des Grades $l\cdot m$. Deshalb gilt

$$H_{X'}(l) = H_X(l\cdot m).$$

(ix) Seien $X \subseteq \mathbb{P}^N$ ein projektive Varietät des Grades d mit der Hilbert-Reihe

$$H_{k[X]} = \frac{p(T)}{(1-T)^{n+1}}$$

Dann ist p(1) gerade der Grad von X,

$$\deg X = p(1).$$

Beweis. Seien $H_1,...,H_n$ Hyperebenen mit

$$\#\,(X \cap H_1 \cap ... \cap H_n) = d.$$

Da der Durchschnitt aus nur endlich vielen Punkten besteht,

$$X \cap H_1 \cap ... \cap H_n = \{p^{(1)},...,p^{(p)}\},$$

ist er affin, und der affine Koordinaten-Ring ist ein direktes Produkt von Exemplaren des Grundkörpers k. Der projektive Koordinatenring ist damit

(1) $$k[X \cap H_1 \cap ... \cap H_n] = k[\{p^{(1)}\}] \times ... \times k[\{p^{(d)}\}]$$
$$\cong k[S_0]\times...\times k[S_0] \qquad \text{(d-mal)}$$

Für die Hilbert-Reihe ergibt sich damit

$$H_{k[X\cap H_1\cap...\cap H_n]} = \frac{d}{1-T}$$

d.h. es gilt

---

[218] Sei $H_{k[S]/I} = \frac{p(T)}{(1-T)^{n+1}}$ und $p(T) = a_0 + a_1T + ... + a_lT^l$. Die Funktion p(n) zur Reihe $\frac{1}{(1-T)^{n+1}}$ ist ein Polynom für große Argumente, nämlich das Hilbert-Polynom des $\mathbb{P}^n$. Zur Reihe $\frac{a_iT^i}{(1-T)^{d+1}}$ gehört die Funktion $p(n - i)\cdot a_i$, zur Reihe $H_{k[S]/I}$ gehört also die Funktion

$$\sum_{i=0}^{l} p(n - i)\cdot a_i$$

Dies aber ein Polynom in n des Grades d für große n (da p(n) ein solches ist).

(2) $$H_{k[X\cap H_1\cap...\cap H_n]}(l) = d \text{ für alle } l$$

Andererseits ergibt sich aus (ii), wenn L_i homogene Gleichung der Hyperebenen H_i ist,

$$H_{k[S]/(I(X),L_1,...,L_n)} = \frac{p(T)}{1-T}\ ,\ p(T) = a_0 + a_1T + ... + a_mT^m\ ,$$

d.h. es gilt

(3) $$H_{k[S]/(I(X),L_1,...,L_n)}(l) = a_0 + a_1 + ... + a_m = p(1) \text{ für alle großen } l.$$

Nun ist aber $V(I(X), L_1,...,L_n) = X\cap H_1\cap...\cap H_n = V(\{p^{(1)}\})\vee...\vee V(\{p^{(d)}\})$, d.h. gilt

$$(I(X), L_1,...,L_n) \subseteq I(X\cap H_1\cap...\cap H_n)$$

und zu jedem Element des rechten Ideals gibt es eine Potenz, die im linken Ideal liegt. Wir wählen eine Hyperebene, die durch keinen der Punkte $p^{(i)}$ und betrachten die Ideal im zugehörigen affinen Raum.

...

QED.

6.12 Problem: Die Universaltätseigenschaft der Chow-Varietät

Sei

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \subseteq & \mathbb{P}^N\times S \\ f\downarrow & \swarrow & \\ S & & \end{array}$$

eine algebraische Familie von abgeschlossenen Teilmengen der Dimension n und des Grades d des $\mathbb{P}^N$.

Problem: Gelten dann die folgenden Aussagen ?

(i) Die Abbildung

$$g:S \to \bar{C}_{N,n,d}\ ,\ s \mapsto F_{X_s}\ ,$$

mit $X_s = \varphi\psi^{-1}(s)$ ist regulär.

(ii) Die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^N\times S & \xrightarrow{id\times g} & \mathbb{P}^N\times\bar{C}_{N,n,d} \\ \pi\downarrow & & \downarrow\psi \\ S & \xrightarrow{g} & \bar{C}_{N,n,d} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{id\times g|\Gamma} & I_{N,n,d} \\ f\downarrow & & \downarrow\psi \\ S & \xrightarrow{g} & \bar{C}_{N,n,d} \end{array}$$

sind kartesisch, d.h. die gegebene Familie entsteht aus der universellen Familie durch Basiswechsel mit $g: S \to \bar{C}_{N,n,d}$.

Bemerkungen

(i) Wenn die Fasern von f nicht irreduzibel sind, ist die Abbildung g nicht wohldefiniert. Man braucht dann eine Methode, die Fasern einer regulären Abbildung in natürlicher Weise mit Multiplizitäten zu versehen. Die moderne Art, dies zu tun, führt zum Begriff des algebraischen Schemas. Das führt allerdings dazu, daß man bei der Konstruktion anstelle des Grades das Hilbert-Polynom benutzen muß.

(ii) Ohne die Voraussetzung, daß die S_i normal sind, ergibt sich aus dem Beweis nur, daß g eine rationale Abbildung ist.

(iii) Im Fall positiver Charakteristik ist die Situation komplizierter: die Aussagen gelten erst nach Basis-Wechsel mit einer gewissen Frobenius-Abbildung.

(iv) Seien

$S := \mathbb{A}^2 - V(ab)$ (die Ebene ohne die Achsen)

$\Gamma :=$[219] $\cup_{(a,b)\in S} C_{(a,b)}$

$C_{(a,b)} := \{[s^3, a\cdot s^2t+b\cdot st^2, b\cdot s^2t + a\cdot st^2, t^3] \mid [s,t]\in\mathbb{P}^1\}$

$C_{(a,b)}$ ist eine Kurve im $\mathbb{P}^3$. Für $a^2 \neq b^2$ ist sie isomorph zu Raumkurve

$$C_{(1,0)} = V(xw-yz, xz - y^2, yw - z^2)$$

vermittels der Substitutionen

$y \ \mathrm{a} \ \frac{1}{a^2-b^2}\cdot(ay - bz)$

$z \ \mathrm{a} \ \frac{1}{a^2-b^2}\cdot(-by + az)$

Für $a^2 = b^2$ handelt es sich um eine ebene Kurve dritten Grades[220]. Die algebraische Familie

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[d, "f"'] & \subseteq & \mathbb{P}^3\times S \arrow[dll] \\ S & & \end{tikzcd}$$

besteht aus Kurven dritten Grades im $\mathbb{P}^3$. Die Kurve $f^{-1}(a,b)$ ist genau dann eben, wenn a = b gilt. Die zugehörige Abbildung

$$g: S \to \overline{C}_{3,1,3}$$

bildet also die drei Geraden V(a - b), V(a) und V(b) in die Komponente C^{III} der ebenen Kurven von $\overline{C}$ ab, den Rest des affinen Raumes S in die Komponente C^{IV} der nicht-ebenen Kurven. Das bedeutet, die beiden Komponenten haben Punkte gemeinsam. Im Fall des Hilbertschemas ist das nicht so: die Hilbert-Polynome, die zu den beiden Komponenten gehören sind verschieden.

(v) Man sieht an dem Beispiel, daß man sich im Fall des Hilbert-Schemas auf Familien beschränken sollte, die in nur eine Komponente der Chow-Varietät abbilden. Das läuft daraus hinaus, daß man sich auf Familien beschränkt, deren Fasern alle dasselbe Hilbert-Polynom besizen. Von den Raumkurven dritten Grades X haben wir gesehen, sie haben das Hilbert-Polynom

$$P_X(n) = n + 1$$

Von den ebenen Kurven Y dritten Grades kennen wir das Hibert-Polynom ebenfalls.

---

[219] Formaler: sei $\overline{\Gamma}$ das Bild bei $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2$, $([s,t],[a,b,c])$ a $[cs^3, a\cdot s^2t+b\cdot st^2, b\cdot s^2t + a\cdot st^2, ct^3]$. Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge der Produktraums. Die Faser von $\overline{\Gamma}\to\mathbb{P}^2$ über [a,b,1] ist gerade die Kurve $C_{(a,b)}$.

[220] Es sind isomorphe Kurven, die aber als Teilmengen des $\mathbb{P}^3$ verschieden sind. Sie liegen in der Ebene V(y-z).

$$\begin{aligned} P_Y(n) &= \binom{n+2}{2} - \binom{n-1}{2} \\ &= \frac{1}{2}((n+2)(n+1) - (n-1)(n-2)) \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2 - n^2 + 3n - 2) \\ &= 3n \end{aligned}$$

Die Zerlegung der universellen Familie der Chow-Varietät in Teilfamilien mit konstantem Hilbert-Polynom führt auf das Hilbert-Schema. (Dieses kann mehrere Komponenten haben).

Die Forderung der Konstanz des Hilbert-Polynoms für die Familie $f: \Gamma \to S$ läuft auf die Forderung der Flachheit von f hinaus.

(vi) Der zweite Teil der obigen Aussage folgt aus dem ersten. Es reicht also die Existenz und die Regularität der Basiswechsel-Abbildung zu zeigen.

Zum **Beweis** der Implikation (i) ⇒ (ii).

Betrachten wir das erste Diagramm. Es reicht zu zeigen, ist

$$g: S \to C$$

ein beliebiger Morphismus und

$$\pi: P\times C \to C$$

die Projektion auf den zweiten Faktor, so ist

$$\begin{array}{ccc} P\times S & \to & P\times C \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \to & C \end{array}$$

kartesisch. Es gilt

$$\begin{aligned} S\times_C(P\times C) &= \{(s,p,c) \mid g(s) = \pi(p,c)\} = \{(s,p,c) \mid g(s) = c\} \\ &= \{(s,p,g(s)) \mid s\in S, p\in P\} \cong \{(s,p) \mid s\in S, p\in P\} = S\times P \end{aligned}$$

Betrachten wir das zweite Diagramm. Es gilt

$$\begin{aligned} S\times_{\overline{C}} I &= \{(s,i) \mid g(s) = \psi(i)\} \\ &= \{ (s,(x,F_X)) \mid x\in X, F_{X_s} = F_X \} \\ &= \{(s,x, F_{X_s}) \mid x\in X_s \} \\ &\cong \{(x,s) \in \mathbb{P}^N\times S \mid x\in X_s \} \\ &= \{(x,s) \in \mathbb{P}^N\times S \mid x\in f^{-1}(s)\ (= \Gamma\cap\mathbb{P}^N\times\{s\})\} \\ &= \Gamma \end{aligned}$$

QED.

6.12a Ein Spezialfall 1

Wir werden die obigen Aussagen hier unter den folgenden zusätzlichen Voraussetzungen beweisen.

1. char(k) = 0.
2. Die irreduziblen Komponenten S_i von S sind normal, d.h. $k[S_i]$ ist ganz abgeschlossen in $k(S_i)$ für jedes i.
3. Die Fasern von f sind irreduzibel.

Beweis. Wie oben bemerkt, reicht es, Aussage (i) zu beweisen. Wir benutzen folgende Bezeichnungen

$$I := I_{N,n,d}$$

$\overline{C} := \overline{C}_{N,n,d}$

$\mathbb{P} := \mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$

Um im folgenden die Bezeichnungen zu vereinfachen, verändern wir die Reihenfolge der Koordinaten in $\Gamma\subseteq\mathbb{P}^N\times S$, d.h. wir fassen Γ vorübergehend als Teilmenge von $S\times\mathbb{P}^N$ auf,

$$\Gamma \subseteq S\times\mathbb{P}^N$$

<u>1. Schritt</u>. Die Menge $J := \{(s,F_X) \in S\times\overline{C} \mid X_s = X\}$ ist abgeschlossen in $S\times\overline{C}$.

Sei $D \subseteq S\times\mathbb{P}^N\times\overline{C}$ die abgeschlossene Teilmenge

$$D = (\Gamma\times\overline{C}) \cap (S\times I) \quad = \{(s,x,F_X) \in S\times\mathbb{P}^N\times\overline{C} \mid x\in X_s \text{ und } x\in X\}$$
$$= \{(s,x,F_X) \in S\times\mathbb{P}^N\times\overline{C} \mid x\in X_s\cap X\}.$$

Wir betrachten die reguläre Abbildung

$$h: D \to S\times\overline{C},\ (s,x,F_X) \mapsto (s, F_X).$$

Nach dem Satz von der Dimension der Faser ist die folgende Menge abgesschlossen.

$$\{(s,F_X) \in S\times\overline{C} \mid \dim h^{-1}(s,F_X) \geq n\}$$
$$= \{(s,F_X) \in S\times\overline{C} \mid \dim X_s\cap X \geq n\}$$
$$= \{(s,F_X) \in S\times\overline{C} \mid X_s = X\}$$

Man beachte, weil X_s nach Vorraussetzung stets irreduzibel ist, gilt mit $\dim X_s\cap X \geq n$ sogar $X_s \subseteq X$, also $F_{X_s} \mid F_X$. Da F_{X_s} und F_X denselben Grad d haben unterscheiden sie sich nur um einen konstanten Faktor, d.h. es gilt $X_s = X$.

<u>2. Schritt</u>. Abschluß des Beweises.

Betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} J & \subseteq & S\times\overline{C} \to \overline{C} \\ \alpha\downarrow & \swarrow\pi_1 & \\ S & & \end{array}$$

Dabei sei $J = \{(s,F_X)\in S\times\overline{C} \mid X_s = X\}$ die abgeschlossene Menge des vorigen Schritts. Die Fasern der Abbildung α sind einpunktige Mengen, d.h. die Abbildung ist umkehrbar. Die Zusammensetzung der Inversen α^{-1} mit der horizontalen Abbildung des Diagramms,

$$J \to \overline{C},\ (s, F_{X_s}) \mapsto F_{X_s},$$

ist gerade die Abbildung, deren Regularität wir beweisen wollen. Es reicht also zu zeigen, α^{-1} ist regulär, d.h

$$\alpha \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

Nach Zariskis Hauptsatz[221] ist α eine endliche Abbildung.

---

[221] vgl. Milne J.S., Etale cohomology, Th. I.1.8: Jeder separierte quasi-endliche Morphismus $f:Y\to X$ mit X quasi-kompakt zerfällt in eine Komposition $Y \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} X$ mit einer offenen Einbettung f' und einen endlichen Morphismus g.

Da die Fasern einpunktige Mengen sind, d.h. 0-dimensional und irreduzibel, ist $\alpha^{-1}(S_i)$ irreduzibel für jede Komponente S_i von S und es reicht zu zeigen,

$$\alpha|\ \alpha^{-1}(S_i) : T_i = \alpha^{-1}(S_i) \to S_i \text{ ist ein Isomorphismus}$$

für jedes i. Die Aussage ist lokaler Natur. Wir können annehmen, S_i und T_i sind affin. Nach 1.5.3 (j) ist α eine endliche Abbildund des Grades 1, d.h. ein birationaler Isomorphismus, d.h. die beiden affinen Koordinatenringe

$$(1) \qquad k[S_i] \subseteq k[T_i]$$

haben denselben Quotientenkörper. Nun ist (1) eine ganze Erweiterung und der Ring $k[S_i]$ ist ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper. Deshalb gilt in (1) das Gleichheitszeichen, d.h. α ist ein Isomorphismus.
QED.

6.12b Ein Spezialfall 2

Wir werden die obigen Aussagen hier unter der folgenden zusätzlichen Voraussetzungen beweisen.

S ist faktoriel[222].

Dann existiert die reguläre Basiswechsel-Abbildung $S \to \bar{C}_{N,n,d}$ bei geeigneter Definition des Grades d der Fasern von $f: \Gamma \to S$.

Beweis. Wie oben bemerkt, reicht es, Aussage (i) zu beweisen. Außerdem ist die Aussage der Behauptung lokaler Natur bezüglich S. Wir können also annehmen, S ist affin mit

$$k[S] \text{ ZPE-Ring}$$

Wir benutzen folgende Bezeichnungen

$$I := I_{N,n,d}$$
$$\bar{C} := \bar{C}_{N,n,d}$$
$$\mathbb{P} := \mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$$
$$\check{\mathbb{P}} := (\check{\mathbb{P}}^N)^{n+1}$$

Wir betrachte die folgenden Projektionen.

$$p_{13}: \mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}} \times S \to \mathbb{P}^N \times S$$

$$p23: \mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}} \times \mathbb{P} \to \check{\mathbb{P}} \times S$$

und setzen

$$J' := \{(x,H_1,\ldots,H_n,s) \in p_{13}^{-1}(\Gamma) \mid x \in H_1 \cap \ldots \cap H_n\}$$

Da Γ abgeschlossenen ist in $\mathbb{P}^N \times S$, ist J' abgeschlossen in $\mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}} \times S$. Die folgende Beschreibung von J' ist etwas expliziter.

$$J' := \{(x,H_1,\ldots,H_n,s) \in \mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}} \times S \mid x \in X_s \cap H_1 \cap \ldots \cap H_n\} \text{ mit } X_s := f^{-1}(s).$$

Weiter benötigen wir noch die folgende Menge.

$$K' := p_{23}(J') = \{(H_1,\ldots,H_n,s) \in \check{\mathbb{P}} \times S \mid X_s \cap H_1 \cap \ldots \cap H_n \neq \emptyset\}$$

---

[222] Es gibt eine offene Überdeckung von S durch affine Varietäten, deren Koordinatenringe ZPE-Ringe sind.

Als reguläres Bild der projektiven Varietät J' ist K' projektiv, also abgeschlossen im Produktraum $\check{\mathbb{P}}\times S$. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^N\times\check{\mathbb{P}}\times S \supseteq & J' & \xrightarrow{q'} & \Gamma & (\subseteq\mathbb{P}^N\times S) \\ & \downarrow r' & & \downarrow f & \\ \check{\mathbb{P}}\times S \supseteq & K' & \xrightarrow{\varepsilon'} & S & \end{array}$$

Nach Definition von K' haben die Fasern von ε' die Gestalt

$$\varepsilon'^{-1}(s) \cong \{(H_1,...,H_n)\in\check{\mathbb{P}} \mid X_s\cap H_1\cap...\cap H_n \neq \emptyset \} = V(F_{X_s}).$$

Sie sind damit insbesondere Hyperflächen in $\check{\mathbb{P}}$, also von der Dimension dim $\check{\mathbb{P}}$ = N(n+1) - 1. Für die Dimension von K' bekommen wir damit

$$\dim K' = \dim \varepsilon'^{-1}(s) + \dim S = \dim \check{\mathbb{P}} + \dim S - 1 = \dim \check{\mathbb{P}}\times S - 1,$$

d.h. K' ist eine Hyperfläche von $\check{\mathbb{P}}\times S$. Ihr Ideal liegt in

$$k[S][v_0,...,v_n].$$

Dies ist ein ZPE-Ring, da k[S] nach Voraussetzung einer ist. Das Ideal von K' ist somit ein Hauptideal,

$$I(K') = \Phi_u(v_0,...,v_n)\cdot k[S][v_0,...,v_n].$$

Der Index u soll darauf hinweisen, daß die Koeffizienetn von Φ Funktionen auf S sind.

Problem: gibt es einen Punkt s∈S derart, daß die Zerlegung von $\Phi_s(v_0,...,v_n)$ keine mehrfachen Faktoren enthält ? (dann ist $\Phi_s(v_0,...,v_n)$ ein Chow-Polynom dessen Grad gleich der Mächtigkeit der allgemeinen Faser von r' ist, die gleich d sein sollte. Dann hat aber auch $\Phi_s(v_0,...,v_n)$ bezüglich jedes v_i den Grad d und die Abbildung

$$S \to \bar{C}_{N,n,d}, s \mapsto \Phi_s,$$

ist wohldefiniert und regulär. Es ist gerade die gesuchte Basiswechsel-Abbildung).

Da Φ das Ideal von K' erzeugt, kommen in der Zerlegung von Φ in irreduzible Faktoren keine mehrfachen Faktoren vor.
Die Definition von K' ist symmetrisch in den v_i . Beim Permutieren der v_i ändert sich somit Φ nur um einen Faktor, der in k[S] liegt und dort eine Einheit ist.
????????
QED.

6.13 Beispiel (eines bijektiven birationalen Isomorphismus, der kein Isomorphismus ist)

Seien $X = V(x^3-y^2) \subseteq \mathbb{A}^2$, $Y = \mathbb{A}^1$ und h die Abbildung

$$h: Y \to X, t \mapsto (t^2,t^3).$$

Diese Abbildung ist regulär, bijektiv, rational, jedoch kein Isomorphismus. Die induzierte Abbildung auf den Koordinatenringen kann man identifizieren mit der Inklusion

$$k[t] \supset k[t^2,t^3] \xleftarrow{\cong} k[x,y]/(x^3-y^2).$$

Wir werden sehen, die Kurven sind nicht isomorph, da X einen singulären Punkt besitzt, Y jedoch nicht.

6.14 Satz von Bertini

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge der Dimension n.Dann ist für jede natürliche Zahl $m \le n$ die Menge

$$\{ (H_1,...,H_m)\in(\check{\mathbb{P}}^N)^m \mid X \cap H_1\cap...\cap H_m \text{ irreduzibel von der Dimension } n\text{-}m\}$$

offen im $(\check{\mathbb{P}}^N)^m$ und nicht-leer im Fall $m < n$.

Bemerkungen

(i) Die Menge ist leer im Fall m = dim X umd d := deg X>1 , denn der allgemeine Schnitt von m Hyperebenen mit X besteht dann aus d verschiedenen Punkten.

(ii) Eine der vielen klassischen Varianten des Satzes von Bertini besagt, die Menge

$$\{ H\in\check{\mathbb{P}}^N \mid X\cap H \text{ nicht-singulär und zusammenhängend, } \dim X\cap H = n\text{-}1\}$$

ist nicht-leer und offen für nicht-singuläre projektive irreduzible Varietäten der Dimension 1(vgl. Hartshorne Th. II.8.18 und III.7.9).

(iii) Die Aussage, die sich auf die Nicht-Singularität des Schnitts bezieht, ist leicht zu beweisen (mit Hilfe des Satzes von der Dimension der Fasern), sobald der Begriff des nicht-singulären Punktes eingeführt ist.
Die Aussage, die sich auf die Eigenschaft, zusammenhängend zu sein, bezieht ist tiefliegender (und erfordert kohomologische Methoden).

(iv) Die Aussage ist falsch, wenn X reduzibel ist. Man nehme für X zum Beispiel zwei Kugeln im Raum, die sich in einem Kreis schneiden. Die Ebene, die den Kreis enthält ist die einzige, die einen irreduziblen Schnitt mit X hat.

Beweis. Beweisidee: Man benutze die Chow-Varietät um das Problem auf eine Frage über Hyperfläche zu reduzieren.

1. Schritt. Sei $\bar{F}(x,y)$ ein bihomogenes Polynom über k. Dann ist

$$\{x_0 \mid \bar{F}(x_0,y) \text{ irreduzibel }\}$$

eine offene Menge im projektiven Raum. Diese Menge ist nicht-leer, falls das Polynom $\bar{F}(x,y)$ irreduzibel ist.

Seien

$x := (x_0,...,x_M)$

$y := (y_0,...,y_N)$

$d := \deg_x \bar{F}(x,y)$

$e := \deg_y \bar{F}(x,y)$

Die irreduziblen Formen (modulo Vielfache) des Grades e in N+1 Unbestimmten lassen sich identifizieren mit den Punkten des Raumes

(1) $$\mathbb{P}_k^{\nu_{e,N}} - \cup_{e-1}^{i=1} \mathbb{P}_k^{\nu_{e-i,N}} \times \mathbb{P}_k^{\nu_{i,N}}$$

Dies ist auch richtig, wenn der Grundkörper k nicht algebraisch abgeschlossen ist. Mit anderen Worten, es gibt homogene Polynome

$$G_1,...,G_r\in\mathbb{Z}[S_0,...,S_\nu] , \nu := \nu_{e,N},$$

derart, daß für jedes homogene Polynom F(y) des Grades e in y gilt

$$F \text{ reduzibel} \Leftrightarrow G_1(F) =...=G_r(F) = 0$$

Die ganzzahligen Polynome G_i hängen dabei nicht von der speziellen Wahl des Grundkörpers k ab,[223] d.h. wir erhalten dieselben Polynome G_i wenn wir k durch einen größeren Körper ersetzen.

---

[223] Die G_i sind die Gleichungen der über $\mathbb{Z}$ definierten Teilvarietät

Insbesondere gilt

(2) $\{x_0 \in \mathbb{P}_k^M \mid \overline{F}(x_0, ?\ ) \text{ irreduzibel } \} = \{x_0 \in \mathbb{P}_k^M \mid G_i(\overline{F}(x_0, ?\ )) \neq 0 \text{ für ein } i\}$

Diese Menge ist also offen (für k algebraisch abgschlossen, für allgemenes k haben wir den Begriff “offen” nicht definiert).

Sei jetzt $\overline{F}(x,y)$ irreduzibel über k. Dann ist $\overline{F}(x,y)$ auch irreduzibel über k(x) (nach dem Lemma von Gauß, denn der Polynomring k[x] ist ein ZPE-Ring). Deshalb liegt der Punkt

$$x$$

in der linken Menge von (2) mit k(x) anstelle von k, also auch in der rechten Menge von (2). Die Polynome $G_i(\overline{F}(x, ?\ ))$ sind also nicht alle identisch Null als Polynome in x. Dann kann man aber die Koordinaten von x so durch Elemente aus k ersetzen, daß für den entstehenden Punkt x_0 die $G_i(\overline{F}(x_0, ?\ ))$ auch nicht alle Null sind. Dann liegt aber x_0 in (2), d.h. diese Menge ist nicht leer.

<u>2. Schritt</u>. Die Menge

$$\{(H_1,...,H_m) \in (\check{\mathbb{P}}^N)^m \mid \dim X \cap H_1 \cap ... \cap H_m = \dim X - m\ \}$$

ist offen im $(\check{\mathbb{P}}^N)^m$.

Wir betrachten die abgeschlossene Menge

$$I := \{(x, H_1,...,H_m) \in X \times (\check{\mathbb{P}}^N)^m \mid x \in H_i \text{ für alle } i\ \}$$

und die Einschränkung

$$I \to (\check{\mathbb{P}}^N)^m$$

der Projektion auf die letzten m Faktoren. Die Faser dieser Abbildung über $(H_1,...,H_m)$ ist isomorph $X \cap H_1 \cap ... \cap H_m$. Der Ort, an dem die Faserdimension $\leq \dim X - m$ ist, ist offen (nach dem Satz von der Dimension der Faser). Er stimmt aber überein mit dem Ort der Faserdimension = dim X - m.

<u>3.Schritt</u>. Sei X ein irreduzible Varietät der Dimension d im $\mathbb{P}^N$ und $H \subseteq \mathbb{P}^N$ eine Hyperebene, die X echt schneidet. Dann ist $F_X(v_0,...,v_{d-1},H)$ das Chow-Polynom von $X \cap H$.

Für Hyperflächen $H_1,...,H_d$ gilt

$$F_X(H, H_1,...,H_d) = 0 \Leftrightarrow X \cap H \cap H_1 \cap ... \cap H_d \neq \emptyset.$$

Das bedeutet aber gerade, $F_X(H, v_1,...,v_d)$ ist Chow-Polynom von $X \cap H$.

<u>4. Schritt</u>. Der Beweis.

Seien $F := F_X$ das Chow-Polynom von X und

$$U := \{(H_1,...,H_m) \in (\check{\mathbb{P}}^N)^m \mid \dim X \cap H_1 \cap ... \cap H_m = n-m\ \}.$$

$\cup_{e-1}^{i=1} \mathbb{P}_k^{\nu\, e-i,N} \times \mathbb{P}_k^{\nu\, i,N}$

Nach dem zweiten Schritt ist U eine offene Menge. Für $(H_1,...,H_m)\in U$ ist nach dem 3.Schritt $F(v_0,...,v_{n-m},H_1,...,H_m)$ das Chow-Polynom von $X\cap H_1\cap...\cap H_m$. Für Hyperebenentupel $(H_1,...,H_m)\in U$ gilt deshalb

$$X\cap H_1\cap...\cap H_m \text{ irreduzibel} \Leftrightarrow F(v_0,...,v_{n-m},H_1,...,H_m) \text{ irreduzibel}$$

Nach dem 1. Schritt ist deshalb

$$\{(H_1,...,H_m)\in U \mid X\cap H_1\cap...\cap H_m \text{ irreduzibel }\}$$

eine offene Menge, die nicht-leer ist im Fall $n > m$.

QED.

Bemerkungen (weglassen ?)

(i) Sei $X\subseteq\mathbb{P}^N$ n-dimensional vom Grad d und $H\subseteq\mathbb{P}^N$ eine Hyperebene. Dann gilt
1. $F_X(v_0,...,v_{n-1},H) = 0 \Leftrightarrow$ H enthält eine Komponente von X.
2. H enthält keine Komponente von X $\Rightarrow F_X(v_0,...,v_{d-1},H) = F_{X\cap H}$

Zu 1.

H enthält eine Komponente von X
$\Leftrightarrow \dim X\cap H = n$
$\Leftrightarrow X\cap H\cap H_1\cap...\cap H_n \ne \emptyset$ für beliebige Hyperebenen H_i
$\Leftrightarrow F_X(H_1,...,H_n,H) = 0$ für beliebige Hyperebenen H_i
$\Leftrightarrow F_X(v_0,...,v_{n-1},H)$ ist identisch Null.

Zu 2. Nach Voraussetzung ist $\dim X\cap H = n-1$. Deshalb gilt

$$F(H_1,...,H_n,H) = 0 \Leftrightarrow X\cap H\cap H_1\cap...\cap H_n \ne \emptyset$$
$$\Leftrightarrow F_{X\cap H}(H_1\cap...\cap H_n) = 0$$

d.h. es ist $F(H_1,...,H_n,H) = F_{X\cap H}$.

(Im reduziblen Fall muß man $X\cap H$ in geeigneter Weise als Zyklus auffassen).

(ii) Die Fasern der universellen Familie ψ: $I \subseteq \mathbb{P}^N\times\mathbb{P}\to\bar{C}$ sind sämtlich n-dimensional. Sind $H_1,...,H_n\subseteq\mathbb{P}^N$ Hyperebenen und $\bar{F}\in\bar{C}$ ein "Punkt" mit

(1) $$\dim \psi^{-1}(\bar{F})\cap(H_1\cap...\cap H_n)\times\{\bar{F}\} = 0$$

so gilt für alle Punkte F einer ganzen Umgebung von $\bar{F}$ ebenfalls

(2) $$\dim \psi^{-1}(F)\cap(H_1\cap...\cap H_n)\times\{\bar{F}\} = 0$$

Beweis. Nach Definition von I gilt

$$\psi^{-1}(\bar{F}) = X\times\{\bar{F}\},$$

wenn $\bar{F} = F_X$ das Chow-Polynom von $X\subseteq\mathbb{P}^N$ ist. Die Faser ist also n-dimensional.

Bedinung (1) ist nach Bemerkung (i) äquivalent zu

$$\bar{F}(v_0,H_1,..., H_n) \text{ ist nicht identisch Null}$$

d.h. mindestens ein Koeffizienten von $\bar{F}$ ist ungleich Null. Sei $a(H_1,..., H_n)$ das Produkt der Null verschiedenen Koeffizienten von $\bar{F}$. Dann ist

$$D(a) \subseteq \mathbb{P}$$

eine offene Umgebung von $\bar{F}$ mit der Eigenschaft, daß (2) gilt für alle $F\in D(a)$.

QED.

6.15 Problem: Satz von der Irreduzibilität der Fasern

Seien f: X → Y eine reguläre Abbildung projektiver Varietäten und $\bar{y}\in Y$ ein Punkt. Es gelte:

1. X ist irreduzibel.
2. f(X) = Y.
3. $f^{-1}(\bar{y})$ ist irreduzibel mit $\dim f^{-1}(\bar{y}) = \dim Y - \dim X > 0$.

Gibt es dann eine offene Umgebung $V\subseteq Y$ von $\bar{y}$ mit $f^{-1}(y)$ irreduzibel für alle $y\in V$?

Bemerkung

Entsteht f durch Basiswechsel aus der universellen Familie der Chow-Varietät und ist

$$g: Y \to \bar{C}_{N,n,d}$$

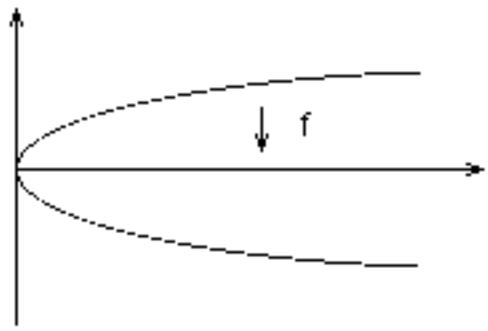
die Basiswechsel-Abbildung, so liegt $g(\bar{y})$ in der offenen Teilmenge $C_{N,n,d}$ der irreduziblen Chow-Polynome. Dies gilt dann aber auch für alle Punkte aus einer Umgebung von $\bar{y}$, d.h. es gilt die Behauptung.

Beispiel 1.

$X = V(y - x^2) \subseteq \mathbb{A}^2$

$Y = \mathbb{A}^1$

f: X → Y, $(x,y) \mapsto y$.



Für jedes $a \in \mathbb{A}^1 - \{0\}$ gilt

$$f^{-1}(a) = \{ (a, \sqrt{a}), (a, -\sqrt{a})\}.$$

Die Faser über a = 0 besteht aus einem Punkt ist also irreduzibel. Die Faser über allen anderen Punkten besteht aus zwei Punkten, ist also reduzibel.

Durch Übergang zu den projektiven Abschließungen erhält man ein analoges Beispiel für reguläre Abbildungen projektiver Varietäten:

$X = V(yz - x^2) \subseteq \mathbb{P}^2$

$Y = \mathbb{P}^1$

f: X → Y, $[x,y,z] \mapsto [y,z]$.

Bemerkungen

(i) Zur Erklärung dieses Phänomens kann man sich auf den Standpunkt stellen, die Faser über 0 ist in Wirklichkeit ein doppelt zu zählender Punkt (also reduzibel).

(ii) Ersetzt man die Parabel $X \subseteq \mathbb{A}^2$ durch den Zylinder über dieser Parabel im $\mathbb{A}^3$ so erhält man kein Gegenbeispiel zum Satz über die Irreduzibilität der Faser mit 1-demensionalen Fasern: für

$X = V(yz - x^2) \subseteq \mathbb{P}^3$

$Y = \mathbb{P}^1$

ist die Abbildung

$f: X \to Y, [x,y,z,w] \mapsto [y,z]$,

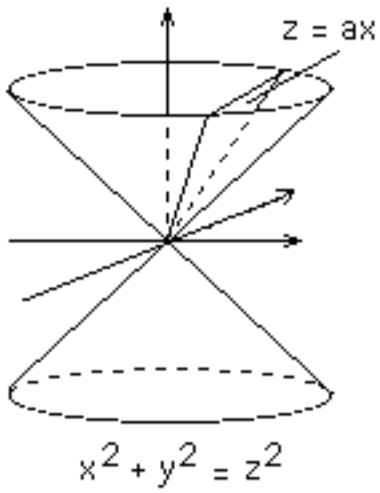
nicht regulär im Punkt [0,0,0,w].

Beispiel 2.

$X = V(x^2 + y^2 - z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$

$Y = \mathbb{A}^1$

$f: X \to Y, (x,y,z) \mapsto \frac{z}{x}$.



Es gilt

$$f^{-1}(a) = V(z - ax, x^2 + y^2 - a^2x^2) = V(z - ax , (1-a^2)x^2 - y^2)$$

Da das Polynom $(1-a^2)x^2 - y^2$ zerfällt in das Produkt von zwei linearen Polynomen, besteht die Faser für alle $a \ne \pm 1$ aus der Vereinigung von zwei verschiedenen Mantel-Linien des Kegels X. Für $a = \pm 1$ erhält man als Faser nur eine Mantel-Linie. Die Fasern über $a = \pm 1$ sind somit irreduzibel, alle anderen reduzibel.

Bemerkungen

(i) Die Abbildung ist nicht regulär im Punkt (0,0,0).

(ii) Wir werden später eine Möglichkeit kennenlernen, die Regularität der Abbildung f zu erzwingen, indem man X im Punkt (0,0,0) aufbläst. Die neue Abbildung ist dann zwar regulär, die Fasern über $a = \pm 1$ sind dann aber reduzibel: sie bestehen außer aus der Mantellinie noch aus dem Ausnahme-Divisor.

7. Schemata

8. Das Hilbert-Schema

Anhang

A1. Noethersche Ringe

A1.1 Noethersche Ringe und Moduln

Seien A ein Ring und M ein A-Modul. Dann heißt M noethersch, wenn jeder Teilmodul $N \subseteq M$ endlich erzeugt ist, d.h. es gibt Elemente $n_1,...,n_r \in N$ mit

$$N = n_1A+...+An_r = \{ a_1n_1 + ... + a_rn_r \mid a_1,...,a_r \in A \}.$$

Der Ring A heißt noethersch, wenn er als Modul über sich selbst noethersch ist. Ein A-Modul M genügt der aufsteigenden Kettenbedinung, wenn jede aufsteigende Kette

$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_i \subseteq N_{i+1} \subseteq \ldots$$

von A-Teilmoduln von N stationär ist, d.h. es gibt ein n mit

$$N_i = N_{i+1} \text{ für alle } i \geq n.$$

Bemerkungen

(i) Jeder noethersche Modul ist endlich erzeugt.

(ii) Die Teilmoduln des A-Moduls A sind gerade die Ideale von A. Ein Ring ist somit genau dann noethersch, wenn jedes Ideal $I \subseteq A$ ein endliches Erzeugendensystem besitzt, d.h. es gibt Elemente $r_1,\ldots,r_n \in I$ mit

$$I = (r_1,\ldots,r_n) = \{ f_1 r_1 + \ldots + f_n r_n \mid f_1,\ldots,f_n \in A \}.$$

(iii) Beispiel: jeder Körper K ist ein noetherscher Ring, denn die einzigen Ideale $\{0\} = 0 \cdot K$ und $K = 1 \cdot K$ haben endliche Erzeugendensysteme.

A1.2 Charakterisierung der noetherschen Moduln

Seien A ein Ring und M ein A-Modul. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) M ist noethersch.

(ii) M genügt der aufsteigenden Kettenbedingung.

(iii) In jeder Familie $\{M_i\}_{i\in I}$ von A-Teilmoduln von M gibt es ein maximales Element, d.h. ein Teilmodul M_{i_0}, der in keinem Teilmodul M_i der Familie echt enthalten ist.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Sei eine aufsteigende Kette von Teilmoduln von M gegeben,

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq \ldots$$

und sei $M' := \cup_{i=0}^{\infty} M_i$ die Vereinigung der Moduln der Kette. Dann ist M' ein Teilmdodul von M und als solcher endlich erzeugt,

$$M' = A \cdot m_1 + \ldots + A \cdot M_r .$$

Jedes der Elemente m_i liegt in einem Modul der Kette. Da die Zahl der m_i endlich ist, gibt es ein M_n mit

$$n_1, \ldots, n_r \in M_n$$

Dann gilt aber für jedes $j \geq n$,

$$M' = A \cdot m_1 + \ldots + A \cdot M_r \subseteq M_n \subseteq M_j \subseteq M'$$

d.h. es gilt

$$M_j = M' \text{ für alle } j \geq n.$$

(ii) ⇒ (iii). Angenommen, es gibt eine Familie $\{M_i\}_{i\in I}$ von Teilmoduln von M ohne maximales Element. Dann ist zum Beispiel M_{i_0} nicht maximal, d.h. es gibt ein M_{i_1} mit

$$M_{i_0} \subset M_{i_1} \text{ (echte Inklusion).}$$

Aus demselben Grund ist M_{i_1} nicht maximal, d.h. es gibt ein M_{i_2} mit

$$M_{i_1} \subset M_{i_2} \text{ (echte Inklusion).}$$

Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine nicht-stationäre Kette von Teilmoduln von M im Widerspruch zur Annahme (ii).

(iii) ⇒ (i). Angenommen ein Teilmodul $N \subseteq M$ ist nicht endlich erzeugt. Wir wählen ein beliebiges Element von $n_1 \in N$ und setzen

$$N_1 := An_1.$$

Weil N nicht endlich erzeugt ist, gibt es ein $n_2 \in N-N_1$. Wir setzen

$$N_2 := N_1 + An_2.$$

Weil N nicht endlich erzeugt ist, gibt es ein $n_3 \in N-N_2$. Wir setzen

$$N_3 := N_2 + An_3.$$

Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine echt aufsteigende Kette

$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq ... \subseteq N_i \subseteq N_{i+1} \subseteq ...$$

von Teilmoduln von M. Die Familie der N_i besitzt kein maximales Element in Widerspruch zur Annahme (iii).

QED.

A1.3 Exakte Sequenzen und noethersche Moduln

Seien A ein Ring. Dann gilt:

(i) Jeder Teilmodul eines noetherschen A-Moduls ist noethersch.

(ii) Jedes A-lineare Bild eines noetherschen A-Moduls ist noethersch.

(iii) Ist

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von A-Moduln mit M' und M" noethersch, so ist auch M noethersch.

Beweis. Zu (i). Jeder Teilmodul eines noetherschen Moduls genügt der aufsteigenden Kettenbedinung, d.h. die Behauptung folgt aus 1.2 (ii).

Zu (ii). Seien $f: M \to M''$ eine A-lineare Surjektion mit M noethersch und

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq ...$$

ein aufsteigende Kette von Teilmoduln von M". Dann ist

$$f^{-1}(M_0) \subseteq f^{-1}(M_1) \subseteq ... \subseteq f^{-1}(M_i) \subseteq f^{-1}(M_{i+1}) \subseteq ...$$

eine aufsteigende Kette von Teilmoduln von M und als solche stationär. Weil f surjektiv ist, gilt aber

$$f(f^{-1}(M_i)) = M_i ,$$

d.h. die Ausgangskette ist bereits stationär.

Zu (iii). Sei $N \subseteq M$ ein Teilmodul. Dann ist $N \cap M'$ ein Teilmodul von M' und als solcher endlich erzeugt,

$$N \cap M' = A \cdot n'_1 + ... + An'_r$$

Das Bild $\bar{N} \subseteq M''$ von N in M" ist endlich erzeugt, d.h. es gibt Elemente

$$n''_1,...,n''_s \in N,$$

deren Bilder in M" den Modul $\bar{N}$ erzeugen. Mit andern Worten, für jedes $n \in N$ gibt es Elemente $a''_1,..., a''_s \in A$ mit

$$n - a''_1 n''_1 + ... + a''_s n''_s \in \mathrm{Ker}(M \to M'') = M'.$$

Diese Differenz liegt aber auch in N, also in $N \cap M'$ und ist damit eine Linearkombination der $n'_1, ... , n'_r$. Wir haben gezeigt, die Elemente

$$n'_1, ... , n'_r , n''_1,...,n''_s \in N$$

bilden ein (endliches) Erzeugendensystem von N.

QED.

A1.4 Beispiel: endlich-dimensionale Vektorräume

Seien A ein Ring und M ein A-Modul. Der Ring A enthalte einen Körper

$$K \subseteq R$$

derart, daß M als K-Vektorraum endlich-dimensional ist,

$$\dim_K M < \infty.$$
Dann ist M als R-Modul noethersch.
Beweis. Jeder Teilmodul von M ist ein K-Vektorraum endlicher Dimension. Endlich-dimensionale K-Vektorräume genügen aber der aufsteigenden Kettenbedinung.
QED.

A1.5 Beispiel: endlich erzeugte Moduln über noetherschen Ringen
Seien A ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann ist M noethersch.
Beweis. Sei
$$M = A\cdot m_1 + ... + A\cdot m_r .$$
Wir führen den Beweis durch Induktion nach r. Im Fall r = 1 gibt es eine R-lineare Surjektion
$$A \to M = A\cdot m_1, a \mapsto a\cdot m_1.$$
Nach 1.3 (ii) ist mit A auch der Modul $M = A\cdot m_1$ noethersch.
Sei jetzt r > 1. Wir betrachten die exakte Sequenz
$$0 \to A\cdot m_1 \to M \to M/A\cdot m_1 \to 0$$
Nach 1.3(iii) reicht es zu zeigen, die Moduln $A\cdot m_1$ und $M/A\cdot m_1$ sind noethersch. Für den Modul $A\cdot m_1$ ist des auf Grund des Induktionsanfangs der Fall. Der Modul $M/A\cdot m_1$ wird von den Restklassen der Elemente $m_2, ..., m_r$ erzeugt. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung ist er also noethersch.
QED.

A1.6 Beispiel: Polynomringe über noetherschen Ringen
Seien A ein noetherscher Ring und T eine Unbestimmte. Dann ist der Polynomring
$$A[T]$$
noethersch.
Beweis. Sei $I \subseteq A[T]$ ein Ideal. Wir haben zu zeigen, I besitzt ein endliches Erzeugendensystem. Für jedes Element $f\in A[T]$ bezeichne
$$v(f) \in A$$
den höchsten von Null verschiedenen Koeffizienten von f. Wir setzen
$$v(I) := \{0\} \cup \{v(f) \mid f\in I \}.$$
Die Menge v(I) ist ein Ideal von A und als solches endlich erzeugt, sagen wir,
$$v(I) = (a^{(1)},...,a^{(r)})$$
Für jedes $a^{(i)}$ wählen wir ein $f^{(i)}\in I$ mit dem höchsten Koeffizienten $a^{(i)}$. Indem wir einige der $f^{(i)}$ mit einer T-Potenz multiplizieren, können wir erreichen, daß die $f^{(i)}$ alle denselben Grad d haben. Sei
$$d = \deg f^{(1)} = ... = \deg f^{(r)}$$
und
$$M_I := \{ f \in I \mid \deg f < d \}$$
Die Polynome von Grad < d bilden einen endlich erzeugten A-Modul und M_I ist ein Teilmodul dieses A-Moduls. Nach 1.5 ist der Modul M_I endlich erzeugt, sagen wir
$$M_I = A\cdot f^{(r+1)} + ... + A\cdot f^{(s)}$$
Es reicht zu zeigen, das Ideal I wird von den Elementen $f^{(1)}, ... , f^{(s)}$ erzeugt,

$$I = (f^{(1)}, ... , f^{(s)}).$$

Sei $f\in I$ beliebig. Wir haben zu zeigen, f ist ein A[T]-Linearkombination der Polynome $f^{(1)}, ... , f^{(s)}$. Wir führen den Beweis durch Induktion nach deg f. Falls deg f < d ist, so gilt $f \in M_I$ und f ist sogar eine A-Linearkombination der $f^{(r+1)}, ... , f^{(s)}$. Sei jetzt der Grad von f ≥ d,

$$\deg f \geq d.$$

Dann ist der höchste Koeffizient v(f) eine A-Linearkombination der $a^{(1)},...,a^{(r)}$, sagen wir

$$v(f) = a_1 a^{(1)} +... + a_r a^{(r)} \text{ mit } a_i \in A.$$

Dann hat $a_1 f^{(1)} +... + a_r f^{(r)}$ denselben höchsten Koeffizienten wie f und den Grad d. Die Differenz

$$f - (a_1 f^{(1)} +... + a_r f^{(r)})\cdot T^{\deg f - d}$$

hat deshalb einen kleineren Grad als f. Nach Induktionsvoraussezung ist diese Differenz eine Linearkombination der $f^{(1)}, ... , f^{(s)}$,

$$f - (a_1 f^{(1)} +... + a_r f^{(r)})\cdot T^{\deg f - d} = (f^{(1)}, ... , f^{(s)}).$$

Damit gilt aber auch

$$f \in (f^{(1)}, ... , f^{(s)}).$$

QED.

A2 Quotientenringe und Qutientenmoduln

A2.1 Definition

Sei A ein Ring. Eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A oder kürzer eine multiplikative Menge von A ist eine nicht-leere Teilmenge

$$S \subseteq A,$$

die mit je zwei Elementen auch deren Produkt enthält,

$$s', s'' \in S \Rightarrow s'\cdot s'' \in S.$$

Für jede multiplikative Menge $S \subseteq A$ und jeden A-Modul M führen wir auf der Menge

$$M \times S$$

die folgende Äquivalenz-Relation ein.

(1) $(m',s') \sim (m'',s'') \Leftrightarrow s(m's'' - m''s') = 0$ für ein $s\in S$.[224]

Die Äquivalenzklasse des Paares (m,s) bezeichnen wir mit

$$\frac{m}{s},$$

die Menge aller Äquivalenzklassen mit

$$S^{-1}M := \{ \frac{m}{s} \mid m\in M, s\in S \}.$$

Speziell für M = A schreiben wir

---

[224] Unmittelbar einleuchtend wäre die Bedingung

$$m's'' - m''s' = 0.$$

Der zusätzliche Faktor s wird gebraucht um sicherzustellen, daß wir eine Äquivalenzrelion erhalten.

$$S^{-1}A := \{ \frac{a}{s} \mid a\in A, s\in S \}.$$

Auf der Menge der Äquivalenzklassen definieren wir die folgenden Operationen.

$$\frac{m'}{s'} + \frac{m''}{s''} := \frac{m's''+m''s'}{s's''}$$

$$\frac{a}{s'} \cdot \frac{m}{s''} := \frac{am}{s's''}$$

Bemerkung

Die obigen Definitionen sind korrekt und definieren auf diese Weise auf $S^{-1}A$ die Struktur eines Rings und auf $S^{-1}M$ die Struktur eines $S^{-1}A$-Moduls. Der Ring $S^{-1}A$ heißt <u>Quotientenring</u> von A bezüglich S, der Modul $S^{-1}M$ <u>Quotientenmodul</u> von M bezüglich S.

Für beliebige $m\in A$, $s,t\in S$ gilt

$$\frac{m}{s} = \frac{mt}{st}$$

Beweis. <u>1. Schritt</u>: durch (1) ist eine Äquivalenzrelation definiert.

<u>Reflexivität</u>: für $s' = s''$ und $m' = m''$ ist die Bedingung auf der rechten Seite von (1) trivialerweise erfüllt.

<u>Symmetrie</u>: vertauschen wir s' und s'' und gleichzeitig m' und m'', so bleibt die Relation auf der rechten Seite von (1) erhalten.

<u>Transitivität</u>: Es gelte

$$(m,s) \sim (m',s') \text{ und } (m',s') \sim (m'',s'').$$

Dann gibt es Elemente $t,t'\in S$ mit

$$t(ms' - m's) = 0$$
$$t'(m's'' - m''s') = 0$$

Wir multiplizieren die erste Identität mit $t's''$ und die zweite mit ts und bilden die Summe. Die Multiplikation ist gerade so gewählt, daß sich das zweite Glied der ersten Identität gegen das erste Glied der zweiten weghebt. Es folgt

$$0 = ms'tt's'' - m''t's'ts = tt's'(ms'' - m''s),$$

d.h. es gilt

$$(m,s) \sim (m'',s'').$$

<u>2. Schritt</u>: Die Addition auf $S^{-1}M$ ist korrekt definiert.

Seien

$$\frac{m'}{s'} = \frac{n'}{t'} \text{ und } \frac{m''}{s''} = \frac{n''}{t''}$$

Wir haben zu zeigen, dann gilt

$$\frac{m's''+m''s'}{s's''} = \frac{n't''+n''t'}{t't''}.$$

Nach Voraussetzung gibt es Elemente $u,u'\in S$ mit

$$u(m't'-n's') = 0 = u'(m''t''- n''s'').$$

Wir multiplizieren den Ausdruck links mit

$$u's''t''$$

und den Ausdruck rechts mit

$$us't'$$

und bilden die Summe. Wir erhalten

$$uu'(m's''t't'' - n's's''t'' + m''s't't'' - n''s's''t') = 0$$

also

$$uu'((m's''+ m''s')\, t't'' - (n't'' + n''t')\, s's'') = 0$$

Das ist aber gerade die zu beweisende Identität.

<u>3. Schritt</u>: Die Multiplikation auf $S^{-1}M$ ist korrekt definiert.

Der Beweis ist eine vereinfachte Variante des Beweises des zweiten Schrittes.

<u>4. Schritt</u>: Brüche können erweitert werden: $\frac{m}{s} = \frac{mt}{st}$

Das gilt wegen

$$u(m\cdot st - mt\cdot s) = 0$$

für jedes $u \in S$.

<u>5. Schritt</u>: $S^{-1}A$ ist ein Ring und $S^{-1}M$ ein Modul über $S^{-1}A$.
Das folgt aus den Ring- bzw. Modul-Axiomen für A bzw. M.
QED.

Bemerkungen

(i) Für jedes $s \in S$ ist $\frac{s}{s}$ das Einselement von $S^{-1}A$.

(ii) Die Modulstruktur von $S^{-1}M$ über $S^{-1}A$ ist durch die Formel

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} = \frac{am}{st}$$

definiert.

(iii) Nach Definition ist

$$\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \Leftrightarrow t\cdot(ms' - m's) = 0 \text{ für ein } t \in S.$$

Mit anderen Worten,

$$\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \Leftrightarrow \text{“}ms' - m's = 0 \text{ für geeignet erweiterte Brüche”}^{225}.$$

A2.2 Die Universalitätseigenschaft von $S^{-1}A$

Seien A ein Ring und $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge. Dann gilt:

(i) Die Abbildung φ: $A \to S^{-1}A$, a a $\frac{as}{s}$, ist für jedes $s \in S$ ein Ring-Homomorphismus, der die Elemente von S in Einheiten von $S^{-1}A$ abbildet. (Sie ist unabhängig von der speziellen Wahl des Elements $s \in S$. Wir schreiben im folgenden oft $\frac{a}{1}$ anstelle von $\frac{as}{s}$, auch wenn 1 nicht in S liegt).

(ii) Für jeden Ring-Homomorphismus ψ:$A \to A'$, der die Elemente von S in Einheiten von A' abbildet, gibt es genau einen Ring-Homormorphismus $\tilde{\psi}$:$S^{-1}A \to A'$, für welchen das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & A' \\ S^{-1}A \arrow[ur, "\tilde{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

Genauer gilt $\tilde{\psi}(\frac{a}{s}) = \psi(s)^{-1}\psi(a)$ für $a \in A$ und $s \in S$.

Bemerkung

Auf Grund von (i) ist $S^{-1}A$ eine A-Algebra. Damit hat $S^{-1}M$ für jeden A-Modul M auch die Struktur eines A-Moduls, wobei die Multiplikation durch

$$a\cdot\frac{m}{s} = \frac{a}{1}\cdot\frac{m}{s} = \frac{am}{s}$$

gegeben ist.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Die Relationstreue von φ folgt unmittelbar aus der Defintion von Addition und Muiltiplikation in $S^{-1}A$. Zum Beispiel ist

$$\varphi(a'+a'') = \frac{(a'+a2)s}{s} = \frac{a's+a''s}{s} = \frac{a's^2+a''s^2}{s^2} = \frac{a's}{s} + \frac{a''s}{s}.$$

---

[225] d.h. mit $\frac{tm}{ts}$ anstelle von $\frac{m}{s}$ oder $\frac{tm'}{ts'}$ anstelle von $\frac{m'}{s'}$.

Die Aussage, daß φ nicht von der speziellen Wahl von s abhängt, ergibt sich durch das Erweitern von Brüchen: für $s',s''\in S$ und $a\in A$ gilt

$$\frac{as'}{s'} = \frac{as's''}{s's''} = \frac{as''}{s''}.$$

<u>Zu (ii)</u>. <u>Eindeutigkeit</u> von $\tilde{\psi}$: Sei $\tilde{\psi}$ eine Abbildung wie in (ii). Es reicht die in (ii) angegebene Formel für $\tilde{\psi}$ zu beweisen.Für beliebige $a\in A$ und $s\in S$ gilt:

$$\begin{aligned}
\psi(s)\tilde{\psi}(\frac{a}{s}) &= \tilde{\psi}(\varphi(s))\,\tilde{\psi}(\frac{a}{s}) && \text{(das Diagramm von (ii) ist kommutativ)}\\
&= \tilde{\psi}(\frac{s^2}{s})\tilde{\psi}(\frac{a}{s}) && \text{(Definition von } \varphi)\\
&= \tilde{\psi}(\frac{s^2}{s}\cdot\frac{a}{s}) && (\tilde{\psi} \text{ ist ein Homomorphismus})\\
&= \tilde{\psi}\,(\frac{as^2}{s^2}) && \text{(Definition der Multiplikation in } S^{-1}A)\\
&= \tilde{\psi}(\varphi(a)) && \text{(Definition von } \varphi)\\
&= \psi(a) && \text{(das Diagramm von (ii) ist kommutativ).}
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\psi(s)$ eine Einheit in A'. Wir können also mit dem Inversen von $\psi(s)$ multiplizieren:

$$\tilde{\psi}(\frac{a}{s}) \quad = \psi(s)^{-1}\psi(a).$$

Diese Formel zeigt, $\tilde{\psi}$ ist durch φ eindeutig bestimmt.

<u>Existenz von</u> $\tilde{\psi}$. Wir nehmen die Formel

$$\tilde{\psi}(\frac{a}{s}) \quad = \psi(s)^{-1}\psi(a).$$

als Definition für $\tilde{\psi}$. Es reicht zu zeigen, diese Definition ist korrekt. Die Relationstrue von ψ ergibt sich dann unmittelbar aus der Definition von $\tilde{\psi}$ und die Kommutativität aus derselben Rechnung wie im Eindeutigkeitsbeweis. Zeigen wir also die Korrektheit der Definition. Sei $a,a'\in$ und $s,s'\in S$ Elemente mit

$$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$$

Wir haben zu zeigen, dann gilt

(1) $$\psi(s)^{-1}\psi(a) = \psi(s')^{-1}\psi(a').$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $t\in S$ mit

$$t(as' - a's) = 0$$

Wir wenden ψ an und erhalten

$$\psi(t)(\,\psi(a)\,\psi(s') - \psi(a')\,\psi(s)) = 0.$$

Weil $\psi(t)$ eine Einheit in A' ist, können wir mit dem Inversen multiplizieren und erhalten

$$\psi(a)\,\psi(s') - \psi(a')\,\psi(s) = 0.$$

Multiplikation mti dem Inversen vn $\psi(s)\psi(s')$ liefert die zu beweisende Identität (1).
QED.

A2.3 Quotientenmoduln und Tensorprodukt

Seien A ein Ring, $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge und M ein A-Modul. Dann ist die natürliche Abbildung

$$S^{-1}A\otimes_A M \to S^{-1}M, \frac{a}{s}\otimes m \mapsto \frac{am}{s},$$

ein Isormoprhismus von $S^{-1}A$-Moduln mit der Inversen

$$S^{-1}M \to S^{-1}A\otimes_A M, \frac{m}{s} \mapsto \frac{s}{s^2}\otimes m.$$

Beweis. Die folgende Abbildung ist A-bilinear.

$$\alpha: S^{-1}A \times_A M \to S^{-1}M, (\frac{a}{s}, m) \mapsto \frac{am}{s}.$$

Es gilt nämlich

$$\alpha(a'\cdot\frac{a}{s}, a'\cdot m) = \alpha(\frac{a'a}{s}, m) = \frac{aa'm}{s} = \alpha(\frac{a}{s}, a'm).$$

Damit induziert aber α die Abbildung

$$\beta: S^{-1}A\otimes_A M \to S^{-1}M, \frac{a}{s}\otimes m \mapsto \frac{am}{s},$$

d.h. die Abbildung der Behauptung ist wohldefiniert und A-linear. Betrachten wir weiter die Abbildung

$$\gamma: S^{-1}M \to S^{-1}A\otimes_A M, \frac{m}{s} \mapsto \frac{s}{s^2}\otimes m.$$

Wir haben zu zeigen, diese Abbildung ist wohldefiniert, d.h. für je zwei Elemente $s,s'\in S$ und $m,m'\in M$ mit

$$\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$$

gilt

(1) $$\frac{s}{s^2}\otimes m = \frac{s'}{s'^2}\otimes m'.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $t\in S$ mit

$$t(ms' - m's) = 0.$$

Auf Grund der Bilinearität von $\otimes$ folgt

$$\frac{ts'}{1}\otimes m - \frac{ts}{1}\otimes m' = \frac{1}{1}\otimes(ts'm - tsm') = 1\otimes 0 = 0,$$

also

$$\frac{ts'}{1}\otimes m = \frac{ts}{1}\otimes m' \text{ in } S^{-1}A\otimes_A M.$$

Nun ist $\frac{s}{ts's^2}$ ein wohldefiniertes Element von $S^{-1}A$ und $S^{-1}A\otimes_A M$ hat eine $S^{-1}A$-Modul-Struktur. Multiplikation mit diesem Element liefert

$$\frac{ts's}{ts's^2}\otimes m = \frac{ts^2}{ts's^2}\otimes m' \text{ in } S^{-1}A\otimes_A M.$$

Durch Kürzen (und Erweitern) erhalten wir die zu beweisende Identität (1).
Damit ist die Abbildung γ wohldefiniert.

Durch direktes Nachrechnen sieht man, β und γ sind invers zueinander. Insbesondere handelt es sich also um Isomorphismen.

Ebenfalls durch direktes Nachrechnen sieht man, β ist $S^{-1}A$-linear.
QED.

A2.4 Funktorialität

Seien A ein Ring, $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge und

$$\varphi: M \to M'$$

eine A-lineare Abbildung. Dann gibt es genau eine $S^{-1}A$-lineare Abbildung

$$S^{-1}\varphi: S^{-1}M \to S^{-1}M'$$

für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & M' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{-1}M & \xrightarrow{S^{-1}\varphi} & S^{-1}M' \end{array}$$

kommutativ ist. Es gilt

(1) $$S^{-1}\varphi(\frac{m}{s}) = \frac{\varphi(m)}{s}.$$

Beweis. Eindeutigkeit von $S^{-1}\varphi$. Wir nehmen an, die Abbildung

$$\psi := S^{-1}\varphi$$

existiert. Es reicht dann die Gültigkeit von Formel (1) zu beweisen. Es gilt in $S^{-1}M'$:

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{s}\psi(\frac{m}{s}) &= \psi(\frac{s^2}{s}\cdot\frac{m}{s}) && (\psi \text{ ist } S^{-1}A\text{-linear}) \\ &= \psi(\frac{ms}{s}) \\ &= \frac{\varphi(m)s}{s} && (\text{Kommutativität des Diagramms}) \end{aligned}$$

Wir multiplizieren mit dem Element $\frac{s}{s^2}$ von $S^{-1}A$ und erhalten

$$\psi(\frac{m}{s}) = \frac{s}{s^2}\cdot\frac{\varphi(m)s}{s} = \frac{\varphi(m)}{s}.$$

Existtenz von $S^{-1}\varphi$. Wir verwenden Formel (1) als Definition. Es reicht zu zeigen, diese Defintion ist korrekt (die $S^{-1}A$-Linearität ergibt sich durch direktes Nachrechnen). Seien also $s,s'\in S$ und $m,m'\in M$ Elemente mit

$$\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}.$$

Wir haben zu zeigen, dann gilt

$$\frac{\varphi(m)}{s} = \frac{\varphi(m')}{s'}.$$

Nach Voraussetzung gilt es ein $t\in S$ mit

$$t(ms' - m's) = 0.$$

Wir wenden die A-lineare Abildung φ an und erhalten

$$t(\varphi(m)s' - \varphi(m')s) = 0.$$

Durch Anwenden der natürlichen Abbildung $M' \to S^{-1}M$ folgt

$$0 = \frac{ss'\ t(\varphi(m)s' - \varphi(m')s)}{ss'} = \frac{ss't}{1}(\frac{\varphi(m)}{s} - \frac{\varphi(m')}{s'})$$

Wegen $s,s', t\in S$ ist $\frac{ss't}{1}$ in $S^{-1}S$ ein Einheit. Durch Multiplikation mit dem Inversen dieses Elements erhalten wir die zu beweisende Identität.
QED.

A2.5 Wechsel der Nennermenge

Seien A ein Ring, f: A→B ein Ringhomomorphismus, $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge und N ein B-Modul. Dann besteht ein natürlicher Isomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln

$$S^{-1}N \to f(S)^{-1}N, \frac{n}{s} \mapsto \frac{n}{f(s)}.$$

Beweis. 1.Schritt: Der Fall N = B.
Die Existenz und Isomorphie von

$$S^{-1}B \to f(S)^{-1}B, \frac{b}{s} \mapsto \frac{b}{f(s)}.$$

ergibt sich aus den folgenden Fakten.

1. Der A-Modul

$$S^{-1}B = S^{-1}A\otimes_A B$$

ist ein Ring.

2. Die natürliche Abbildung

$$B \to S^{-1}B = S^{-1}A\otimes_A B,\ b \mapsto 1\otimes b$$

ist ein Ring-Homomorphismus (welcher die Elemente von f(S) in Einheiten abbildet).

3. Der Ring $S^{-1}B$ besitzt die Universalitätseigenschaft des Rings $f(S)^{-1}B$.

Die ersten beiden Aussagen sieht man durch direktes Nachrechnen. Zum Beweis der dritten beachten wir, für jeden Ringhomomorphismus

$$\psi: B \to B',$$

der die Elemente von f(S) in Einheiten abbildet, ist die Zusammensetzung

$$A \to B \to B'$$

ein solcher, der die Elemente von S in Einheiten abbildet. Deshalb faktorisiert er sich eindeutig über $S^{-1}B$ und der induzierte Homomorphismus

$$S^{-1}B \to B',\ \frac{b}{s} \mapsto \frac{\psi(b)}{s},$$

ist ein Ringhomomorphismus.

<u>2. Schritt</u>. Der allgemeine Fall.

Aus dem Isomorphismus des ersten Schritts,

$$S^{-1}B \to f(S)^{-1}B,\ \frac{b}{s} \mapsto \frac{b}{f(s)}.$$

erhält man durch Tensorieren mit N über B den Isomorphismus

$$S^{-1}B\otimes_B N \to f(S)^{-1}B\otimes_B N =^{226} f(S)^{-1}N,\ \frac{b}{s}\otimes n \mapsto \frac{b}{f(s)}\otimes n = \frac{bn}{f(s)}.$$

Weiter ist

$$S^{-1}B\otimes_B N =^{227} S^{-1}A\otimes_A B\otimes_B N = S^{-1}A\otimes_A N =^{228} S^{-1}N$$

$$\frac{b}{s}\otimes n \mapsto \frac{1}{s}\otimes b \otimes n \quad \mapsto \frac{1}{s}\otimes bn \quad \mapsto \frac{bn}{s}$$

Damit nimmt der Isomorphismus die behauptete Gestalt an.

QED.

A2.6 Beispiele

Lokalisierung eines Rings in einem Primideal

Seien A ein Ring und p ein Primideal von A. Dann ist S := A-p eine multiplikative Menge und manschreibt

$$A_p := S^{-1}A$$

Der Ring heißt <u>lokaler Ring</u> von A im Primideal p oder auch <u>Lokalisierung</u> von A in p.

Bemerkungen

(i) Die Teilmenge

$$m(A_p) := \{ \frac{a}{s} \mid a\in p,\ s\notin p \}$$

von A_p ist ein Ideal des Rings.[229]

---

[226] gilt nach A2.3 .

[227] gilt nach A2.3 angewandt auf den A-Modul B.

[228] gilt nach A2.3.

(ii) Ein kommutativer Ring $\mathcal{O}$ mit 1 heißt lokaler Ring, wenn er genau ein maximales Ideal besitzt. Dieses wird dann mit

$$m(\mathcal{O})$$

bezeichnet.

Quotienten bezüglich der Potenzen eines Elements

Seien A ein Ring und f∈A ein Element. Dann bilden die Potenzen von f eine multiplikative Menge,

$$S = \{1, f, f^2, f^3,... \}.$$

Der zugehörige Ring wird mit

$$A_f := S^{-1}A$$

bezeichnet.

Voller Quotientenring

Seien A ein Ring und S die Menge aller Nicht-Nullteiler. Die Menge S ist multiplikativ. Der Ring

$$Q(A) := S^{-1}A$$

heißt voller Quotientenring von A.

Bemerkung

Ist A ein Integritätsbereicht, so gilt S = A - {0} und

$$Q(A)$$

ist ein Körper, der Quotientenkörper von A.

A2.7 Verhalten der Ideale beim Übergang zu Quotientenringen

Seien A ein Ring und S⊆A eine multiplikative Menge. Dann gilt:

(i) Ein Ideal I ⊆ A erzeugt in $S^{-1}A$ genau dann ein echtes Ideal

$$I\cdot S^{-1}A := \{ \frac{a}{s} \mid a\in I, s\in S \}$$

im Quotientenring, wenn I∩S = ∅ gilt.

(ii) Für jedes Ideal J ⊆ $S^{-1}A$ erzeugt das vollständige Urbild

$$J\cap A := \{a\in A \mid \frac{a}{1} \in J \}$$

von J in A im Quotientenring das ursprüngliche Ideal,

$$(J\cap A)\cdot S^{-1}A = J.$$

(iii) Für jedes Primideal p von A mit p∩S = ∅ gilt

$$A\cap(p\cdot S^{-1}A) = p$$

Beweis. Zu (i). Enthält I∩S ein Element s, so liegt die Einheit $\frac{s}{s}$ in $I\cdot S^{-1}A$, d.h. es gilt

$$I\cdot S^{-1}A = S^{-1}A,$$

Besteht umgekehrt diese Identität, so liegt das Einselement in diesem Ideal, d.h. es gibt Elemente a∈I und s∈S mit $\frac{a}{s} = \frac{s}{s}$. Bei geeigneter Wahl von s∈S folgt

$$I \ni as = s^2 \in S,$$

d.h. I∩S ist nicht leer.

Zu (ii). Trivialerweise gilt

$$(J\cap A)\cdot S^{-1}A \subseteq J.$$

---

[229] Jedes Element aus A_p - $m(A_p)$ ist eine Einheit. Deshalb ist jedes echte Ideal von A_p in $m(A_p)$ enthalten. Der Ring A_p besitzt deshalb genau ein maximales Ideal, nämlich $m(A_p)$.

Sei jetzt $\frac{a}{s} \in J$. Dann gilt $\frac{a}{1} = \frac{a}{s} \cdot \frac{s}{1} \in J$ also $a \in J \cap A$. Es folgt

$$\frac{a}{s} = \frac{a}{1}\frac{1}{s} \in (J \cap A) \cdot S^{-1}A.$$

Zu (iii). Trivialerweise gilt

$$p \subseteq A \cap (p \cdot S^{-1}A).$$

Sei $a \in A \cap (p \cdot S^{-1}A)$. Dann gilt

$$\frac{a}{1} = \frac{a'}{s} \text{ mit } a' \in p \text{ und } s \in S.$$

Bei geeigneter Wahl von s ergibt sich

$$as = a' \in p.$$

Wegen $s \in S$ und $p \cap S = \emptyset$ gilt $s \notin p$, also $a \in p$.
QED.

A2.8 Quotientenringe noetherscher Ringe

Ist A ein noetherscher Ring und $S \subseteq A$ multiplikativ, so ist $S^{-1}A$ wieder noethersch.
Beweis. Sei $I \subseteq S^{-1}A$ ein Ideal. Wir setzen

$$I' := I \cap A = \{a \in A \mid \frac{a}{1} \in I\}.$$

Dies ist ein Ideal von A, wird also von endlich vielen Elementen von A erzeugt,

$$I' = (a_1, \dots, a_r).$$

Damit gilt nach A2.4:

$$(\frac{a_1}{1}, \dots, \frac{a_r}{1}) = I' \cdot S^{-1}A = (I \cap A) \cdot S^{-1}A = I,$$

d.h. I ist endlich erzeugt.
QED.

A2.9 Exakteheit des Übergangs zum Quotientenring

Seien A ein Ring, $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge und

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

eine exakte Sequenz von A-Moduln. Dann ist die induzierte Sequenz von $S^{-1}A$-Moduln

$$S^{-1}M' \xrightarrow{f_*} S^{-1}M \xrightarrow{g_*} S^{-1}M''$$

ebenfalls exatk.
Beweis. Da der Übergang zum Quotientenring ein Funktor ist, gilt mit $g \circ f = 0$ auch

$$g_* \circ f_* = 0,$$

also

$$\operatorname{Im} f_* \subseteq \operatorname{Ker} g_* .$$

Wir haben die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei also $\frac{m}{s} \in \operatorname{Ker} g_*$. Dann gilt in $S^{-1}M''$:

$$0 = g_*(\frac{m}{s}) = \frac{g(m)}{s}$$

d.h. $\frac{g(m)}{s} = \frac{0}{t}$ mit $t \in S$, d.h. es gibt ein $u \in S$ mit

$$0 = u \cdot (tg(m) - s \cdot 0) = ut \cdot g(m) = g(utm).$$

Es folgt $utm \in \operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Im}(f)$. Es gibt ein Element

$$m' \in M'$$

mit $utm = f(m')$. Damit gilt

$$v(f(m')s - ustm) = 0$$

für jedes $v \in S$, also

$$\frac{m}{s} = \frac{f(m')}{ust} = f_*(\frac{m'}{ust}) \in \operatorname{Im} f_*.$$

QED.

A2.10 Beispiel

Seien A ein Ring, $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, M ein A-Modul und

$$M' \subseteq M$$

ein Teilmodul. Dann besteht ein natürlicher Isomorphismus

$$S^{-1}M/S^{-1}M' \to S^{-1}(M/M'), \frac{m}{s} \bmod S^{-1}M' \mapsto \frac{m \bmod M'}{s}.$$

Beweis. Wir wenden den Funktor S^{-1} auf die exakte Sequenz

$$0 \to M' \to M \to M/M' \to 0$$

an und erhalten die exakte Sequenz

$$0 \to S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}(M/M') \to 0$$

und damit ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & S^{-1}M' & \to & S^{-1}M & \to & S^{-1}M'' & \to 0 \\
& || & & || & & & \\
0 \to & S^{-1}M' & \to & S^{-1}M & \to & S^{-1}M/S^{-1}M' & \to 0
\end{array}$$

Nach dem Homomorphiesatz für $S^{-1}A$-Moduln läßt sich ein Homomorphismus

$$h: S^{-1}M/S^{-1}M' \to S^{-1}M''$$

kommutativ in dieses Diagramm einfügen. Auf Grund der Kommutativität des rechten Vierecks gilt

$$h(\frac{m}{s} \bmod S^{-1}M') = \frac{m \bmod M'}{s}$$

Auf Grund er Exaktheit der beiden Zeilen dieses Diagramms ist der Homomorphismus bijektiv.

QED.

A2.11 Der Übergang zu Quotientenringen bzw. Faktorringen

Seien A ein Ring, $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein A-Modul. Dann ist die Abbildung

$$S^{-1}M / I \cdot S^{-1}M \to S^{-1}(M/IM), \frac{m}{s} \bmod I \cdot S^{-1}M \mapsto \frac{m \bmod IM}{s}$$

wohldefiniert und ein Isomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln

Beweis. 1. Schritt. Der Fall M = A.

Es reicht zu zeigen, ist $\tilde{A}$ einer der Ringe $S^{-1}A / I \cdot S^{-1}A$ bzw. $S^{-1}(A/IA)$ so gilt:

1. Die natürliche Abbildung

   $$A \to \tilde{A}, a \mapsto \frac{a}{1} \bmod I \cdot S^{-1}A \text{ bzw. } a \mapsto \frac{a \bmod I}{s},$$

   ist ein Ringhomomorphismus, der die Elemente von I in die Null und die von S in Einheiten überführt.
2. Jeder Ringhomomorphismus $A \to A'$, der die Elemente von I in die Null und die von S in Einheiten überführt, faktorisiert sich eindeutig über $\tilde{A}$.

Diese beiden Eigenschaften ergeben sich direkt aus den Universalitätseigenschaften der Quotientenringe und dem Homomorphiesatz.

2. Schritt. Allgemeiner Fall.

Wir tensorieren den Isomorphismus des ersten Schritts mit M über A und erhalten

$$S^{-1}A / I\cdot S^{-1}A\otimes_A M \to S^{-1}(A/I)\otimes_A M,\ \frac{a}{s} \bmod I\cdot S^{-1}A \otimes m \mapsto \frac{a \bmod I}{s} \otimes M$$

Weiter gilt

$$S^{-1}A / I\cdot S^{-1}A\otimes_A M = S^{-1}A\otimes_A M/I\cdot S^{-1}A\otimes_A M \quad = S^{-1}M/I\cdot S^{-1}M$$

$$\frac{a}{s} \bmod I\cdot S^{-1}A \otimes m \quad \mapsto \frac{a}{s}\otimes m \bmod I\cdot S^{-1}A\otimes_A M \mapsto \frac{am}{s} \bmod I\cdot S^{-1}M$$

und

$$S^{-1}(A/I)\otimes_A M = S^{-1}A\otimes_A A/I\otimes_A M \quad = S^{-1}A\otimes_A M/IM \qquad = S^{-1}(M/IM)$$

$$\frac{a \bmod I}{s}\otimes m \mapsto \frac{1}{s}\otimes (a \bmod I)\otimes m \mapsto \frac{1}{s}\otimes (am \bmod IM) \mapsto \frac{am \bmod IM}{s}$$

QED.

A3. Ganze Erweiterungen

A3.1 Definition

Seien A ein Ring und B eine A-Algebra[230]. Ein Element $b\in B$ heißt dann ganz über A, wenn es ein Polynom

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n \in A[x]$$

mit Koeffizienten aus A gibt mit dem höchsten Koeffizienten 1 und der Nullstelle b,

$$f(b) = 0 \text{ in } B.$$

Ein solches Polynom f heißt dann Ganzheitspolynom für b.
Die Algebra B heißt ganz über A, wenn jedes Element von B ganz ist über A. Sei heißt endlich über A, wenn B als A-Modul endlich erzeugt ist.

A3.2 Charakterisierung der Ganzheit eine Elements

Seien A ein Ring, B eine A-Algebra und $b \in B$ ein Element. Dann sind äquivalent.

(i) b ist ganz über A.
(ii) Die Teilalgebra A[b][231] von B ist als A-Modul endlich erzeugt.
(iii) Es gibt einen exakten[232] A[b]-Modul, der als A-Modul endlich erzeugt ist.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Sei

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$$

ein Ganzheitspolynom von b über A. Dann gilt in A[b],

(1) $$b^n = - a_1x^{n-1} - ... - a_n,$$

d.h. die n-te Potenz ist A-Linearkombination niedrigerer b-Potenzen. Durch Multiplikation von (1) mit b-Potenzen sieht man, jede b-Potenz mit einem Exponenten ≥ n ist A-Linearkombination niedrigerer b-Potenzen. Mit anderen Worten jedes Element von A[b] kann als Linearkombination von

$1, b, ... , b^{n-1}$

geschrieben werden. Es gilb also (ii).
(ii) ⇒ (iii). A[b] ist als Modul über sich selbst exakt (wegen $1\in A[b]$).
(iii) ⇒ (i). Sei M ein exakter A[b]-Modul, der als A-Modul endlich erzeugt ist,

---

[230] d.h. B ist ein Ring, und es gibt einen Homomorphismus $A \to B$ von Ringen mit 1, welcher Struktur-Homomorphismus heißt

[231] A[b] ist definiert, als der kleinste Teilring von B, welcher das Element b und das Bild von A beim Struktur-Homomorphismus enthält. Die Elemente von A[b] sind gerade die Polynome in b mit Koeffizienten aus A.

[232] Der R-Modul M heißt exakt, wenn der Annullator $Ann_R(M) = \{r\in R \mid r\cdot M = 0\}$ trivial ist.

$$M = A\cdot b_1 + ... + A\cdot b_n$$

Dann gilt

$$b\cdot b_i = a_{i1}b_1 + ... + a_{in}b_n \text{ mit } a_{ij}\in A,$$

also

(2) $$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \delta_{ij}\cdot b)b_j = 0.$$

Sei $d(x) := \det (a_{ij} - \delta_{ij}\cdot x)$. Durch Multiplikation von (2) mit adjungierten Unterdeterminanten von d(b) und Aufsummieren erhalten wir[233]

$$d(b)\cdot b_j = 0 \text{ für jedes } j,$$

d.h.

$$d(b)\cdot M = 0.$$

Da M als A[b]-Modul exakt ist, folgt

$$d(b) = 0 \text{ in } B.$$

Nun ist d(x) ein Polynom mit Koeffizienten aus A und dem höchsten Koeffizienten ±1. Mit anderen Worten, b besitzt ein Ganzheitspolynom, d.h. b ist ganz über A.
QED.

A3.3 Kriterium für die Endlichkeit einer endlich erzeugten Algebra

Seien A ein Ring und $B = A[b_1,...,b_n]$. Dann sind äquivalent.

(i) B ist endlich über A.
(ii) B ist ganz über A.
(iii) $b_1,...,b_n$ sind ganz über A.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Für jedes Element $b\in B$ ist B ein exakter A[b]-Modul (wegen $1\in B$), der nach Voraussetzung (i) endlich erzeugt ist. Wegen A3.2 ist b ganz über A.
(ii) ⇒ (iii). Nach Voraussetzung ist jedes Element von B ganz über A. Also sind es auch die b_i.
(iii) ⇒ (i).[234] Für jedes i ist b_i auch ganz über $A[b_1,...,b_{i-1}]$. Also ist

$$A[b_1,...,b_i] \text{ endlicher Modul über } A[b_1,...,b_{i-1}].$$

Für jedes i erhalten wir so ein Erzeugendensystem $b_{i1},...,b_{in_i}$. Die Produkte der Gestalt

$$b_{1i_1}b_{2i_2}\cdot...\cdot b_{ni_n}$$

bilden dann ein Erzeugendensystem von $B = A[b_1,...,b_n]$ als A-Modul, d.h. B ist endlich über A.
QED.

A3.4 Erweitungen von echten Idealen bei endlichen Erweiterungen

Seien B ein Ring, der endlich ist über dem Teilring

$$A \subseteq B,$$

und $I \subseteq A$ ein echtes Ideal von A (d.h. es gelte $I \ne A$). Dann ist auch IB ein echtes Ideal von B.
Beweis. Sei $b_1,...,b_n$ ein Erzeugendensystem von B als Modul über A,

$$B = Ab_1 + ... + Ab_n.$$

---

[233] Wir verwenden hier dieselben Argumente wie beim Beweis der Cramerschen Regel in der linearen Algebra.
[234] Wir wiederholen hier den Beweis für einen Satz über den Grad der Zusammensetzung von endlichen Körpererweiterungen.

Angenommen es gilt IB = B. Dann ist

$$B = Ib_1 + ... + Ib_n,$$

d.h. jedes b_i läßt sich in der Gestalt

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$$

schreiben mit $a_{ij} \in I$. Es folgt für jedes i,

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \delta_{ij}) b_j$$

also

$$db_i = 0 \text{ mit } d = \det(a_{ij} - \delta_{ij})$$

also $d\cdot B = 0$, also $d\cdot 1=0$, also

$$0 = d = \det(a_{ij} - \delta_{ij}) \text{ in } A,$$

also

$$0 \equiv \det(- \delta_{ij}) \bmod I$$

also $1\in I$, im Widerspruch zur Voraussetzung $I \ne A$.
QED.

A4. Garben

A4.1 Vereinbarung: topologische Räume als Kategorien

Sei X ein topologischer Raum. Ebenfalls mit X wollen wir dann die Kategorie bezeichnen, deren Objekte die offenen Mengen von X sind,

$$|X| := \text{Menge der offenen Teilmengen von } X,$$

und deren Morphismen die Inklusionsabbildungen zwischen diesen offenen Mengen sind. Für je zwei offene Mengen U', U" von X besteht also die Menge

$$\mathrm{Hom}(U', U")$$

der Morphismen $U' \to U"$ aus höchstens einem Element: sie ist leer wenn U' nicht in U" enthalten ist und enthätl die natürlich Inklusion

$$U' \to U", u \mapsto u,$$

andernfalls.

A4.2 Prägarben

Seien X ein topologischer Raum und $C \subseteq$ **Ens** eine Teilkategorie der Kategorie **Ens** der Mengen. Eine <u>Prägarbe</u> von X mit Werten in C ist ein kontravarianter Funktor $X \to C$, d.h. ein Funktor

$$P: X^0 \to C$$

der zu X dualen Kategorie X^0 mit Werten in C. Für jede offene Menge U von X heißen die Elemente von

$$P(U)$$

<u>Schnitte</u> von P über U. Für je zwei offene Mengen U',U" von X mit $U' \subseteq U"$ und jedes $s\in P(U")$ schreiben wir dann auch

$$s|_{U'},$$

für das Bild von s bei der Abbildung $P(U' \subseteq U"): P(U") \to P(U')$. Die Abbildungen der Gestalt

$$P(U") \to P(U'), s \mapsto s|_{U'},$$

heißen <u>Restriktionen</u> der Prägarbe P.
Bemerkung

Die Prägarben $X^0 \to C$ bilden eine Kategorie, deren Morphismen die natürlichen Transformationen zwischen den betrachteten Funktoren sind. Sie wird mit

$$\mathbf{P}(X, C)$$

bezeichnet.

A4.3 Beispiele für Prägarben

Stetige Funktionen

Seien X und Y topologische Räume. Für jede offene Menge U von X setzen wir

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{X,Y}(U) := \text{Menge der stetigen Abbildungen } U \to Y.$$

Für je zwei offene Mengen U',U" von X mit $U' \subseteq U''$ bezeichne

$$\mathbf{C}(U' \subseteq U''): \mathbf{C}(U'') \to \mathbf{C}(U'),\ f \mapsto f|U',$$

die Abbildung, die jeder stetigen Abbildung $f: U'' \to Y$ die Einschränkung auf U' zuordnet. Dann ist

$$\mathbf{C}_{X,Y}: X^0 \to \text{Ens}$$

eine Prägarbe auf X mit Werten in der Kategorie der Mengen.

Bemerkungen

(i) Ist Y eine topologische Gruppe, so ist $\mathbf{C}_{X,Y}$ eine Prägarbe mit Werten in der Kategorie der Gruppen.

(ii) Ist Y eine kommutative topologische Gruppe, so ist $\mathbf{C}_{X,Y}$ eine Prägarbe mit Werten in der Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen. Prägarben mit Werten in **Ab** wollen wir auch abelsche Prägarben nennen.

Stetige Schnitte

Sei $f.Y \to X$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Für jede offene Menge U von X setzen wir

$$\mathbf{C}_f(U) = \mathbf{C}_{Y/X}(U) = \{ s: U \to Y \mid s \text{ stetig und } f\circ s = Id_U \}.$$

Die Elemente von $\mathbf{C}_f(U)$ heißen stetige Schnitte von f über U. Die Einschränkung der Restriktionen der Prägarbe $\mathbf{C}_{X,Y}$ auf die stetigen Schnitte von f definieren Restriktionen von $\mathbf{C}_{Y/X}$ mit denen

$$\mathbf{C}_f = \mathbf{C}_{Y/X}: X^0 \to \mathbf{Ens}$$

zur Prägarben wird.

Differenzierbare Funktionen

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Teilmenge (bzgl. der gewöhnlichen reellen Topologie). Für jedes $r \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ und jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ setzen wir

$$\mathbf{C}^r_X(U) := \text{Menge der r-mal stetig differenzierbaren Abbildungen } U \to \mathbb{R}.$$

Die Einschränkung der Restriktionen der Prägarbe $\mathbf{C}_{X,\mathbb{R}}$ auf die r-mal stetig differenzierbaren Funktionen definieren Restriktionen von $\mathbf{C}^r_X$ mit denen

$$\mathbf{C}^r_X: X^0 \to \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}$$

zur Prägarben mit Werten in der Kategorie der $\mathbb{R}$-Algebren wird.

Analytische Funktionen

Seien $X \subseteq \mathbb{C}^N$ eine offene Teilmenge (bzgl. der gewöhnlichen komplexen Topologie). Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ setzen wir

$$\mathcal{O}_X(U) := \text{Menge der analytischen Funktionen } U \to \mathbb{C}.$$

Die Einschränkung der Restriktionen der Prägarbe $\mathbf{C}_{X,\mathbb{C}}$ auf die analytischen Funktionen definieren Restriktionen von $\mathcal{O}_X$ mit denen

$$\mathcal{O}_X: X^0 \to \mathbb{C}\text{-}\mathbf{Alg}$$

zur Prägarben mit Werten in der Kategorie der $\mathbb{C}$-Algebren wird.

A4.4 Garben

Seien X ein topologischer Raum, $C \subseteq \mathbf{Ens}$ eine Teilkategorie und

$$F: X^0 \to C$$

eine Prägarbe. Diese heißt Garbe, wenn für jede offenen Menge U von X und jede offene Überdeckung

$$U = \cup_{i\in I} U_i$$

die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. Zwei Schnitte $s', s'' \in F(U)$ sind genau dann gleich, wenn für jedes $i\in I$ gilt
$$s'|_{U_i} = s''|_{U_i}.$$
2. Für jede Familie von Schnitten $s_i \in F(U_i)$ mit
$$s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$$
für je zwei $i,j\in I$ gibt es einen Schnitt $s\in F(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für jedes $i\in I$.

Bemerkungen

(i) Die beiden Bedinungen, welche man auch Garben-Axiome nennt, sollte man als eine Art axiomatische Formulierung des Funktionenbegriffs schlechthin betrachten.

(ii) Genauer, jede vernünftig definierte Klasse von Funktionen sollte die Eigenschaft haben, daß durch Einschränken von Funktionen der Klasse wieder Funktionen dieser Klasse entstehen, und umgekehrt, sollten aus lokal definierten Funktionen der gegebenen Klasse, die auf den gemeinsamen Teilen ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen, global definierte Funktionen dieser Klasse entstehen.

(iii) Dies ist zum Beispiel für stetige Funktionen, differenzierbare Funktionen bzw. analytische Funktionen der Fall: die in A4.3 angegebene Beispiele sind sogar Beispiele für Garben.

(iv) Wir werden später sehen, jede Garbe kann als Garbe von stetigen Funktionen aufgefßt werden (auf allerdings recht exotischen topologishen Räumen). Wir benötigen dazu zunächst den Begriffe des Halms einer Garbe.

(v) Die Garben $X^0 \to C$ bilden eine volle Teilkategorie der Kategorie $\mathbf{P}(X,C)$ der Prägarben $X^0 \to C$. Sie wird mit
$$\mathbf{Sh}(X, C)$$
bezeichnet ('Sh' von englisch 'sheaves').

A4.5 Der Halm einer Prägarbe in einem Punkt

Seien

$$P: X^0 \to C \ (\subseteq Ens)$$
eine Prägarbe und $x \in X$ ein Punkt des topologischen Raums X. Wir betrachten die Paare
$$(s, U)$$
bestehend aus einer offenen Umgebung U von x und einem Schnitt $s \in P(U)$. Zwei solche Paare (s', U') und (s", U") heißen äquivalent in x, symbolisch
$$(s', U') \sim_x (s", U"),$$
wenn es eine offene Menge U gibt mit
$$x \in U \subseteq U' \cap U" \text{ und } s'|_U = s"|_U .$$
Auf diese Weise ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Paarre (s,U) definiert. Die Äquivalenzklasse des Paares (s,U) wird mit
$$s_x := [s,U]$$
bezeichnet und heißt <u>Keim</u> des Schnitts s im Punkt x. Die Menge aller Keime von Schnitten von P wird mit
$$P_x$$
bezeichnet und heißt <u>Halm</u> von P im Punkt $x \in X$.

Bemerkung

Der Begriff des Halms verallgemeinert den Begriff der Potenzreihenentwicklung.

Beispiel

Der Halm der Garbe der analytischen Funktionen auf dem Raum $\mathbb{C}^n$ in einem Punkt $z \in \mathbb{C}^n$ läßt sich identifizieren mit dem Ring der im Punkt z konvergenten Potenzreihen: zwei analytische Funktionen haben in einem Punkt genau dann dieselbe Potenzreihe, wenn sie in einer Umgebung dieses Punktes übereinstimmen.

A4.6 Der Etal-Raum et(P) einer Prägarbe P

Sei
$$P: X^0 \to C \ (\subseteq Ens)$$
eine Prägarbe auf dem topologischen Raum X. Wir bezeichnen mit
$$\mathbf{et}(P) := \vee_{x \in X} P_x$$
die disjunkte Vereinigung aller Halme von P und betrachten die Abbildung
$$\pi: \mathbf{et}(P) \to X, \ s_x \mapsto x,$$
die alle Elemente des Halms P_x in den Punkt x überführt.

Wir führen auf **et**(P) eine Topologie ein, bezüglich welcher π stetig ist. Mit dieser Topologie versehen heißt **et**(P) <u>Etal-Raum</u> von P und π heißt <u>natürliche Projektion</u> des Etal-Raums von P. Manchmal werden wir auch von π als vom Etal-Raum von P sprechen.

<u>Die Topologie von</u> **et**(P) :

Für jede offenen Menge U von X und jeden Schnitt $s \in P(U)$ bezeichne
$$\tilde{s} : U \to \mathbf{et}(P), \ x \mapsto s_x,$$
die Abbildung, welche jedem Punkt $x \in U$ den Keim von s in x zuordnet. Die Topologie von **et**(P) sei die stärkste Topologie bei der alle Abbildungen der Gestalt $\tilde{s}$ stetig sind, d.h. für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbf{et}(P)$ gilt
$$M \text{ ist offen in } \mathbf{et}(P) \Leftrightarrow \tilde{s}^{-1}(M) \text{ ist offen in } X \text{ für jedes } \tilde{s}.$$

Bemerkungen

(i) Für jede offene Menge $U \subseteq X$ und jedes $s \in P(U)$ gilt $\pi \circ \tilde{s} = Id_U$.

(ii) Die Abbildung π ist stetig bezüglich der oben eingeführten Topologie von **et**(P).

(iii) Die Mengen der Gestalt $\tilde{s}(U)$ mit $U \subseteq X$ offen und $s\in P(U)$ sind offen und bilden eine Topologie-Basis von **et**(P).

(iv) Die Abbildung π ist ein lokaler Homöomorphismus.

(v) Die stetigen Schnitte von π: **et**(P) $\to$ X, d.h. die stetigen Abbildung

$$f: U \to \mathbf{et}(P),\ U \subseteq X \text{ offen, mit } \pi\circ f = Id_U$$

sind gerade die Abbildungen f: U $\to$ **et**(P), welche lokal von der Gestalt $\tilde{s}$ sind, d.h. für jedes $u\in U$ gibt es ein offenes U' mit $u\in U'\subseteq U$ und ein $s'\in P(U')$ mit

$$f|_{U'} = \tilde{s}'$$

Beweis. Zu (i). Folgt unmittelbar aus den Definitionen von π und $\tilde{s}$.

Zu (ii). Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Wir haben zu zeigen,

$\tilde{s}^{-1}(\pi^{-1}(U))$ ist offen in X für jede offenes Menge $U'\subseteq X$ und jedes $s\in P(U')$.

Wegen (i) ist das äquivalent zur Aussage,

$$Id^{-1}_{U'}(U) \text{ ist offen in X für jedes offene } U' \subseteq X.$$

Wegen $Id^{-1}_{U'}(U) = U\cap U'$ ist letzteres aber trivial.

Zu (iii). Seien zwei offene Mengen U,U' und zwei Schnitte $s\in P(U)$ und $s'\in P(U')$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}\tilde{s}'^{-1}(\tilde{s}(U)) &= \{ x\in X \mid \tilde{s}'(x) \in \tilde{s}(U) \}\\ &= \{ x\in X \mid s'_x = \tilde{s}_u \text{ für ein } u \in U \}\\ &= \{ x\in X \mid s'_x = \tilde{s}_x \}\end{aligned}$$

Man beachte, aus $s'_x = \tilde{s}_u$ erhält man durch Anwenden von π, daß x = u sein muß. Damit ist

$$\tilde{s}'^{-1}(\tilde{s}(U)) = \{ x\in X \mid \text{es gibt eine Umgebung V von x mit } s'|_V = s|_V \}$$

Die Menge rechts ist offen in X. Damit ist $\tilde{s}'^{-1}(\tilde{s}(U))$ offen für jedes U' und jedes $s'\in P(U')$. Mit anderen Worten die Menge

$\tilde{s}(U)$ ist offen in **et**(P).

Dies beweist den ersten Teil der Aussagen von (iii). Seien jetzt $V \subseteq$ **et**(P) eine offene Menge und $s_x\in V$. Wir haben zu zeigen, es gibt eine offene Menge $U'\subseteq X$ und ein $s'\in P(U')$ mit

$$s_x \in \tilde{s}'(U') \subseteq V.$$

Das Element $s_x\in V$ ist Keim eines Schnittes $s\in P(U)$ von P in einem Punkt $x\in U$. Da V nach Voraussetzung offen ist, ist die Menge

$$U' := \tilde{s}^{-1}(V) \text{ offen in X.}$$

Und sie ist nicht leer, denn es gilt $\tilde{s}(x) = s_x \in V$, also

$$x \in U'.$$

Wir setzen $s' := s|_{U'}$ ($\in P(U')$). Dann gilt

$$\begin{aligned}\tilde{s}'(U') &= \{ s'_{u'} \mid u' \in U' \}\\ &= \{ s_{u'} \mid u' \in U' \}\end{aligned}$$

$= \tilde{s}(U')$
$\subseteq V$

und $s_x = s'_x = \tilde{s}'(x) \in \tilde{s}'(U')$.

Zu (iv). Sei $s_x \in \mathbf{et}(P)$ ein Punkt. Dann ist s_x der Keim im Punkt $x \in X$ eines Schnitts $s \in P(U)$ über einer offenen Umgebung $U \subseteq X$ von x. Die Teilmenge

$$\tilde{s}(U) \subseteq \mathbf{et}(P)$$

ist eine offene Umgebung von s_x. Es reicht zu zeigen, die Einschränkung

$$\pi|_{\tilde{s}(U)} : \tilde{s}(U) \to U$$

besitzt eine stetige Umkehrung. Nach (i) gilt

$$\pi \circ \tilde{s} = Id_U .$$

Insbesondere ist die Abbildung

$$\tilde{s}: U \to \tilde{s}(U)$$

bijektiv. Sie ist stetig auf Grund der Definition der Topologie von $\mathbf{et}(P)$, und sie ist gerade die Umkehrabbildung von $\pi|_{\tilde{s}(U)}$

Zu (v). Jede Abbildung $f: U \to \mathbf{et}(P)$, welche lokal von der Gestalt $\tilde{s}$ ist, ist stetig (auf Grund der Definition der Topologie von $\mathbf{et}(P)$) und sie ist ein Schnitt (wegen (i)). Sei jetzt umgekehrt

$$f: U \to \mathbf{et}(P)$$

eine stetige Abbildung mit $\pi \circ f = Id_U$ ($U \subseteq X$ offen). Wir haben zu zeigen, f ist lokal von der Gestalt $\tilde{s}$. Sei

$$u \in U$$

ein Punkt und sei

$$s_x := f(u) \in \mathbf{et}(P)$$

das Bild von u. Dann gilt

$$x = \pi(s_x) = \pi(f(u)) = u,$$

d.h. $s_x = s_u$ ist Keim eines Schnitts $s \in P(U')$ über einer offenen Umgebung U' von u. Wir können annehmen,

$$u \in U' \subseteq U.$$

Die Menge $\tilde{s}(U')$ ist eine offene Umgebung von $s_u = s_x = f(u)$, und da f stetig ist, ist die Menge

$$U'' := f^{-1}(\tilde{s}(U')) \text{ offene Umgebung von } u.$$

Es folgt

$$f(U'') \subseteq \tilde{s}(U').$$

Die Einschränkung von π auf die offene Menge $\tilde{s}(U')$ ist bijektiv mit der Umkehrung

$$\tilde{s}: U' \to \tilde{s}(U').$$

Da f ein Schnitt ist von π ist außerdem

$$\pi|_{\tilde{s}(U')} \circ f|_{U''} = Id_{U''}$$

also

$$f|_{U''} = (\pi|_{\tilde{s}(U')})^{-1} |_{U''} = \tilde{s} |_{U''} = \tilde{s}''$$

mit s” := $s|_{U”}$. Mit anderen Worten f ist lokal von der Gestalt $\tilde{s}$.

QED.

A4.7 Die Garbe der Schnitte des Etal-Raums

Seien P: $X^0 \to$ **Ens** eine Prägarbe und

$$\pi: \mathbf{et}(P) \to X$$

der Etal-Raum von F. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ betrachten wir die Abbildung

(1) $$\tilde{\ }:P(U) \to \mathbf{sh}(P)(U) := \mathbf{C}_{\mathbf{et}(P)/X}(U)\ ,\ s \mapsto \tilde{s}\ .$$

Dabei sei $\tilde{s}$ wie in A4.6 der Schnitt $u \mapsto s_u$ von π über U. Dann gilt:

(i) Die Abbildungen (1) sind wohldefiniert und verträglich mit den Restriktionsabbildungen, d.h sie setzen sich zusammen zu einem Morphismus
$$\tilde{\ }:P \to \mathbf{sh}(P)$$
von Prägarben.

(ii) Der Morphismus von (i) induziert auf allen Halmen Bijektionen.

(iii) Der Morphismus von (i) ist ein Isomorphismus, falls P eine Garbe ist.

(iv) Sei F eine Garbe und $f:P \to F$ ein Prägarben-Morphismus. Dann gibt es genau einen Garben-Morphismus $\tilde{f}$: $\mathbf{sh}(P) \to F$ derart, daß das Diagramm
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sim"'] & F \\ \mathbf{sh}(P) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Zu (i). Die Abbildung (1) ist wohldefiniert, denn nach Definition der Topologie des Etal-Raums sind die Abbildungen der Gestalt $\tilde{s}$ stetige Schnitte von π. Nach Definition der Abbildung $\tilde{s}$ mit $s \in F(U)$ gilt für jede offene Teilmenge $V \subseteq U$ die Relation

$$\tilde{s}|_V = (s|_V)^{\sim}.$$[235]

Die Abbildungen (1) sind also verträglich mit den Restriktionen.

Zu (ii). Sei $x \in X$ ein Punkt. Die durch den Morphismus von (i) induzierte Abbildung der Halme in x genügt der folgenden Abbildungsvorschrift.[236]

$$\tilde{\ }_x:P_x \to (\mathbf{sh}(P))_x,\ [s, U] \mapsto [\tilde{s}, U].$$

Die Abbildung ist surjektiv, denn jeder Schnitt von **sh**(P) ist lokal von der Gestalt $\tilde{s}$ (vgl. A4.6(v)). Also ist jeder Keim in x von der Gestalt $[\tilde{s},U]$ mit $s \in P(U)$. Wir haben noch zu zeigen, die Abbildung ist injektiv. Seien

$$[s’,U’] \text{ und } [s”, U”]$$

zwei Keime in x mit demselben Bild, d.h. mit

$$\tilde{s}’|_U = \tilde{s}”|_U$$

für eine Umgebung $U \subseteq U’ \cap U”$ des Punktes x. Dann gilt für die Halme in x

---

[235] Für $x \in V$ gilt $(\tilde{s}|_V)(x) = \tilde{s}(x) = s_x = (s|_V)_x = (s|_V)^{\sim}(x)$.

[236] Wir schreiben hier [s,U] für den Keim s_x von $s \in P(U)$ im Punkt x und $[\tilde{s}, U]$ für den Keim $\tilde{s}_x$ von $\tilde{s}$ $\in sh(P)(U)$ im Punkt x.

$$(s')_x = \tilde{s}'(x) = \tilde{s}''(x) = (s'')_x,$$
d.h. s' und s'' stimmen in einer Umgebung von x überein, $[s',U'] = [s'', U'']$.
Zu (iii). Wegen (ii) reicht es, die folgende Aussage zu beweisen.

Halm-Kriterium für die Isomorphie von Garben-Morphismen
Sei
$$f: F \to G$$
eine Morphismus von Garben $X^0 \to C$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $x\in X$ der auf den Halmen induzierte Morphismus
$$F_x \to G_x$$
ein Isomorphismus ist. Dann ist f ein Isomorphismus.

Beweis des Kriteriums. Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Wir haben zu zeigen, die zugehörige Abbildung
(*) $$f: F(U) \to G(U)$$
ist bijektiv.
Injektivität der Abbildung (*). Seien $s,s'\in F(U)$ zwei Schnitte mit $f(s) = f(s')$. Für jeden Punkt $x\in U$ gilt für die zugehörige Abbildung $f_x: F_x \to G_x$ der Halme
$$f_x(s_x) = f(s)_x = f(s')_x = f_x(s'_x).$$
Da f_x nach Voraussetzung injektiv ist, gilt
$$s_x = s'_x.$$
Mit anderen Worten, für jedes $x\in U$ gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von x mit
$$s|_V = s'|_V .$$
Da die Mengen V die Menge U überdecken, folgt auf Grund des ersten Garben-Axioms
$$s = s'.$$
Surjektivität der Abbildung (*). Sei $t\in G(U)$ vorgegeben. Für jedes $x\in U$ ist nach Voraussetzung die zugehörige Abbildung der Halme
$$f_x: F_x \to G_x$$
bijektiv. Insbesonder gibt es eine Umgebung $U_x \subseteq U$ und einen Schnitt $s^{(x)}\in F(U_x)$, dessen Keim in x das Bild
$$f_x((s^{(x)})_x) = t_x$$
hat. Damit gilt
$$t_x = f(s^{(x)})_x ,$$
d.h. die Einschränkungen von t und $f(s^{(x)})$ auf eine hinreichend kleine Umgebung von x sind gleich. Durch Verkleinern von U_x erreichen wir
$$t|_{U_x} = f(s^{(x)}).$$
Für jedes $y \in U_{x'}\cap U_{x''}$ gilt damit
$$f((s^{(x')})_y) = f_y (s^{(x')})_y = t_y = f_y (s^{(x'')})_y = f((s^{(x'')})_y).$$
Weil f_y nach Voraussetzung injektiv ist, folgt
$$(s^{(x')})_y = (s^{(x'')})_y.$$

Mit anderen Worten, für jedes $y \in U_{x'} \cap U_{x''}$ gibt es eine offene Umgebung V von y mit

$$V \subseteq U_{x'} \cap U_{x''} \text{ und } s^{(x')}|_V = s^{(x'')}|_V .$$

Auf Grund des ersten Garben-Axioms folgt

$$s^{(x')}|_{U_{x'} \cap U_{x''}} = s^{(x'')}|_{U_{x'} \cap U_{x''}}.$$

Da dies für je zwei Punkte $x', x'' \in U$ gilt, gibt es auf Grund des zweiten Garben-Axioms einen Schnitt

$$s \in F(U)$$

mit

$$s|_{U_x} = s^{(x)} \text{ für jedes } x \in U.$$

Damit gilt für jedes $x \in U$

$$f(s)|_{U_x} = f(s|_{U_x}) = f(s^{(x)}) = t|_{U_x} .$$

Da die U_x eine Überdeckung von U bilden, folgt

$$f(s) = t,$$

d.h. t liegt im Bild von (*).

Zu (iv). Eindeutigkeit des Morphismus $\tilde{f}$. Angenommen es gibt zwei Garben-Morphismen

$$\tilde{f}', \tilde{f}'': \textbf{sh}(P) \to F$$

mit $\tilde{f}' \circ \tilde{} = \tilde{f}'' \circ \tilde{} = f$. Seien $U \subseteq X$ offen und $\alpha \in \textbf{sh}(P)(U)$. Wir haben zu zeigen,

$$\tilde{f}'(\alpha) = \tilde{f}''(\alpha).$$

Nach A4.6(v) ist α lokal von der Gestalt $\tilde{s}$, d.h. es gibt eine offene Überdeckung

$$U = \cup_{i \in I} U_i$$

und für jedes $i \in I$ einen Schnitt $s_i \in P(U_i)$ mit

$$\alpha|_{U_i} = \tilde{s}_i.$$

Damit ist aber

$$\tilde{f}'(\alpha)|_{U_i} = \tilde{f}'(\alpha|_{U_i}) = \tilde{f}'(\tilde{s}_i) = (\tilde{f}' \circ \tilde{})(s_i) = f(s_i)$$

und analog mit $\tilde{f}''$ anstelle von $\tilde{f}'$. Zusammen gilt

$$\tilde{f}'(\alpha)|_{U_i} = \tilde{f}''(\alpha)|_{U_i}$$

für jedes i. Weil F eine Garbe ist, folgt $\tilde{f}'(\alpha) = \tilde{f}''(\alpha)$ wie gefordert.

Existenz von $\tilde{f}$. Seien $U \subseteq X$ offen und $\alpha \in \textbf{sh}(P)(U)$.

1. Schritt. Konstruktion eines Schnitts $\tilde{f}(\alpha) \in F(U)$.

Nach A4.6(v) ist α lokal von der Gestalt $\tilde{s}$. Sei $(U_i)_{i \in I}$ die Familie aller offenen Teilmengen $U_i \subseteq U$, auf denen α von dieser Gestalt ist,

$$\alpha|_{U_i} = \tilde{s}_i \text{ mit } s_i \in P(U_i).$$

Die Mengen U_i bilden dann eine Überdeckung von U,

$$U = \cup_{i\in I} U_i .$$

Für je zwei $i,j\in I$ gilt

$$\tilde{s}_i|_{U_i\cap U_j} = \alpha|_{U_i\cap U_j} = \tilde{s}_j|_{U_i\cap U_j},$$

d.h. für jedes $u\in U_i\cap U_j$ gilt für die Keime im Punkt u,

$$(s_i)_u = \tilde{s}_i(u) = \tilde{s}_j(u) = (s_j)_u.$$

Die Schnitte s_i und s_j stimmen also auf einer Umgebung $V\subseteq U_i\cap U_j$ von u überein. Damit gilt

$$f(s_i)|_V = f(s_i|_V) = f(s_j|_V) = f(s_j)|_V.$$

Da $u\in U_i\cap U_j$ beliebig gewählt war, gilt letzteres für jedes V aus einer Überdeckung von $U_i\cap U_j$. Aus dem ersten Garbenaxiom für F erhalten wir

$$f(s_i)|_{U_i\cap U_j} = f(s_j)|_{U_i\cap U_j}.$$

Dies gilt für beliebige $i,j \in I$. Also gibt es einen Schnitt

$$\tilde{f}(\alpha) \in F(U)$$

mit

$$\tilde{f}(\alpha)|_{U_i} = f(s_i) \text{ für jedes } i\in I. \tag{2}$$

Der Schnitt $\tilde{f}(\alpha)$ ist durch die Bedingungen (2) eindeutig festgelegt.

2. Schritt. Unabhängigkeit von $\tilde{f}(\alpha)$ der Wahl der s_i .

Sei $(s'_i)_{i\in I}$ eine zweite Familie von Schnitten $s'_i\in P(U_i)$ mit

$$\alpha|_{U_i} = \tilde{s}_i' .$$

Dann gilt

$$\tilde{s}_i' = \tilde{s}_i \text{ in } sh(P)(U_i)$$

für beliebige $i\in I$. Ist $u\in U_i$, so erhalten wir für die Keime in diesem Punkt

$$(s'_i)_u = \tilde{s}_i'(u) = \tilde{s}_i(u) = (s_i)_u ,$$

d.h. s'_i und s_i stimmen auf einer Umgebung $V \subseteq U_i$ von u überein. Damit gilt

$$f(s'_i)|_V = f(s'_i|_V) = f(s_i|_V) = f(s_i)|_V .$$

Da $u\in U_i$ beliebig war, gilt letzteres für alle V aus einer Überdeckung von U_i . Auf Grund des ersten Garbenaxioms für F folgt

$$f(s'_i) = f(s_i).$$

Die definierenden Bedingungen (2) sind damit unabhängig von der speziellen Wahl der Schnitte s_i .

3. Schritt. Verträglichkeit der Konstruktion von $\tilde{f}(\alpha)$ mit den Restriktionen.

Wir wiederholen die Konstruktion des ersten Schrittes mit einer offenen Teilmenge $V \subseteq U$ anstelle von U und mit $\alpha|_V$ anstelle von α. Wir erhalten auf diese Weise einen Schnitt

$$\tilde f(\alpha|_V) \in F(V).$$

Die Konstruktion von $\tilde f(\alpha|_V)$ unterscheidet sich von der Konstruktion von $\tilde f(\alpha)$ nur darin, daß wir die Familie der offenen Mengen U_i durch die Teilfamilie derjenigen U_i zu ersetzen haben, die ganz in V liegen. Insbesondere ist $\tilde f(\alpha|_V)$ eindeutig festgelegt durch die Bedingungen

(3) $$\tilde f(\alpha|_V)|_{U_i} = f(s_i) \text{ für jedes } i \in I \text{ mit } U_i \subseteq V.$$

Aus (2) folgt aber, daß (3) auch mit $\tilde f(\alpha)|_V$ anstelle von $\tilde f(\alpha|_V)$ gilt, d.h. es ist

$$\tilde f(\alpha)|_V = \tilde f(\alpha|_V),$$

d.h. die Konstruktion von $\tilde f(\alpha)$ ist verträglich mit den Restriktionen und definiert einen Garben-Morphismus

$$\tilde f: \mathbf{sh}(P) \to F.$$

Wir haben noch zu zeigen, $\tilde f \circ \sim = f$, d.h.

<u>4. Schritt</u>. $\tilde f(\tilde s) = f(s)$ für $s \in P(U)$.

Nach Definition von $\tilde f(\tilde s)$ gilt

$$\tilde f(\tilde s)|_{U_i} = f(s_i) \text{ für jedes } i \in I.$$

(vgl. (2)). Dabei ist $s_i \in P(U_i)$ irgendein Schnitt mit $\tilde s|_{U_i} = \tilde s_i$. Wir können zum Beispiel

$$s_i = s|_{U_i}$$

setzen. Die definierenden Bedingungen für $\tilde f(\tilde s)$ haben dann die Gestalt

$$\tilde f(\tilde s)|_{U_i} = f(s|_{U_i}) = f(s)|_{U_i}.$$

Da die U_i eine Überdeckung von U bilden und F eine Garbe ist, folgt

$$\tilde f(\tilde s) = f(s).$$

QED.

Bemerkungen

(i) Die Garbe **sh**(P) heißt <u>die zur Prägarbe gehörige Garbe</u>. Zusammen mit dem natürlichen Morphismus

$$P \to \mathbf{sh}(P)$$

ist sie bis auf natürliche Isomorphie durch die Eigenschaft (iii) festgelegt. Diese Eigenschaft besagt gerade, für jede Garbe F auf X ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X,\mathbf{Ens})}(\mathbf{sh}(P), F) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X,\mathbf{Ens})}(P, F),\ \tilde f \mapsto \tilde f \circ \sim,$$

bijektiv. Mit anderen Worten, die natürliche Einbettung

$$\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ens}) \to \mathbf{P}(X, \mathbf{Ens})$$

der Garbenkategorie in die Prägarbenkategorie besitzt einen linksadjungierten Funktor

$$\mathbf{sh}: \mathbf{P}(X, \mathbf{Ens}) \to \mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ens}).$$

(ii) Ist P eine Prägarbe mit Werten in der Kategorie der Gruppen, so sind die Halme von P, d.h. die Fasern der natürlichen Projektion des Etal-Raums

$$\pi: \mathbf{et}(P) \to X$$

Gruppen, so daß man die Schnitte von π addieren kann. Die Schnittmengen

$$\mathbf{C}_{\mathbf{et}(P)/X}(U) = \mathbf{sh}(P)(U)$$

haben also eine Gruppenstruktur und die Abbildungen (1) sind Gruppen-Homomorphismen. Man bekommt daher einen Morphismus

$$\tilde{}: P \to \mathbf{sh}(P)$$

von Prägarben mit Werten in der Kategorie der Gruppen. Analoge Betrachtungen gelten auch für andere Kategorien, zum Beispiel die Kategorie der Ringe.

A4.8 Garbenkonstruktion mit Hilfe von Topologiebasen (weglassen?)

Seien X ein topologischer Raum und **U** eine Topologie-Basis von X. Wir identifizieren **U** mit der vollen Teilkategorie von X, deren Objekte die offenen Mengen aus **U** sind. Dann gilt:

(i) Sei $F: X^0 \to \mathbf{C}$ eine Garbe auf X. Dann ist die Einschränkung

$$F' := F|_{\mathbf{U}}: \mathbf{U}^0 \to \mathbf{C}$$

von F auf **U** ein Funktor mit der Eigenschaft, daß für jede offene Menge $U \in \mathbf{U}$ und jede offfene Überdeckung

$$U = \cup_{i\in I} U_i$$

durch Mengen $U_i \in \mathbf{U}$ die beiden folgenden Bedinungen erfüllt sind.

1. Zwei Schnitte $s', s'' \in F'(U)$ sind genau dann gleich, wenn für jedes $i \in I$ gilt

$$s'|_{U_i} = s''|_{U_i}.$$

2. Für jede Familie von Schnitten $s_i \in F'(U_i)$ mit

$$s_i|_V = s_j|_V$$

für je zwei $i,j \in I$ und jedes $V \in \mathbf{U}$ mit $V \subseteq U_i \cap U_j$ gibt es einen Schnitt $s \in F(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für jedes $i \in I$.

(ii) Sei umgekehrt ein Funktor

$$F': \mathbf{U}^0 \to \mathbf{C}$$

gegeben, welcher den beiden Bedingungen 1 und 2 genügt. Dann gibt es bis auf natürliche Isomorphie genau eine Garbe

$$F: X^0 \to \mathbf{C}$$

mit $F|_{\mathbf{U}} = F'$.

Bemerkung

Bedingung 2 von Aussage (i) muß nicht für alle V erfüllt sein. Es reicht zu fordern, daß die Identität für eine Überdeckung von $U_i \cap U_j$ durch Teilmengen $V \in \mathbf{U}$ erfüllt ist. Mit Hilfe von Bedingung 1 zeigt man leicht, daß die so abgeschwächte Bedingung zur oben formulierten äquivalent ist.

Beweis. Zu (i). Bedingung 1 ist gerade das erste Garbenaxiom. Auf Grund des zweiten Garbenaxioms genügt es zu zeigen, in der Situation von Bedinung 2 gilt

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Da die $V \in U$ mit $V \subseteq U_i \cap U_j$ eine offenen Überdeckung von $U_i \cap U_j$ bilden, ist das aber der Fall auf Grund des ersten Garbenaxioms.

Zu (ii). Die Eindeutigkeit von F. Seien F und G zwei Garben mit $F|_{\mathbf{U}} = G|_{\mathbf{U}} = F'$ und U eine offene Menge von X. Weiter sei $\{U_i\}_{i\in I}$ die Familie der offenen Mengen aus **U**, die ganz in U enthalten sind. Da **U** eine Topologie-Basis ist, gilt

$$U = \cup_{i\in I} U_i .$$

Für jeden Schnitt $s\in F(U)$ gibt es genau einen Schnitt $\alpha(s)\in G(U)$ mit

(1) $$\alpha(s)|_{U_i} = s|_{U_i} \in F(U_i) = F'(U_i) = G(U_i)$$

(weil G eine Garbe ist). Für jede offene Menge U von X haben wir also eine Abbildung

$$\alpha = \alpha_U: F(U) \to G(U).$$

Aus der Konstruktion ergibt sich[237], daß die Familie der α_U mit den Garbenrestriktionen verträglich ist, d.h. ist V eine offene Teilmenge von U, so gilt

$$\alpha_U(s)|_V = \alpha_V(s|_V)$$

für jeden Schnitt $s\in F(U)$. Mit anderen Worten, die Familie der α_U definiert einen Morphismus

$$\alpha: F \to G$$

von Garben. Die definierenden Bedingungen (1) für α kann man auch wie folgt formulieren.

(2) α ist der einzige Morphismus $F \to G$, der über den offenen Mengen der Topologiebasis **U** identische Abbildungen induziert.

Wir vertauschen die Rollen von F und G und erhalten so einen Morphismus

$$\beta: G\to F$$

von Garben. Auf Grund der Eindeutigkeitsaussage (2) sind α und β invers zueinander, d.h. es handelt sich um Isomorphismen.

Existenz von F. Der Existenzbeweis besteht im wesentlichen in einer Wiederholung der Etal-Raum-Konstruktion im hier vorliegenden Kontext. Wie im Fall einer Prägarbe definieren wir den Begriff des Keims eines Schnitts

$$s \in F'(U'),\ U\in\mathbf{U},$$

in einem Punkt $x\in X$: ein Keim in x ist eine Äquivalenzklasse von Paaren

$$(U, s) \text{ mit } x\in U\in\mathbf{U} \text{ und } s\in F'(U),$$

wobei zwei Paare (U, s) und (U', s') als äquivalent angesehen werden, wenn es ein V gibt mit

$$x\in V \subseteq U\cap U',\ V\in\mathbf{U} \text{ und } s|_V = s'|_V.$$

Den Keim eines Schnitts $s\in F'(U)$ im Punkt x bezeichnen wir mit s_x.

Die Menge aller Keime von Schnitten von F' im Punkt x bezeichnen wir mit

$$F'_x$$

und nennen die Menge Halm von F' in x. Weiter sei

$$et(F') := \cup_{x\in X} F'_x$$

die disjunkte Vereinigung aller Halme von F' und

$$\pi: et(F') \to X,$$

die Abbildung, welche die Elemente von F'_x in den Punkt x abbildet. Jeder Schnitt

$$s \in F'(U),\ U\in\mathbf{U},$$

definiert eine Abbildung

---

[237] $\alpha(s)$ ist durch die Bedingung definiert, daß $\alpha(s)|_W = s|_W$ gilt für jedes $W\in\mathbf{U}$ mit $W\subseteq U$. Insbesondere gilt also

$$(\alpha(s)|_V)|_W = (s|_V)|_W$$

für jedes $W\in\mathbf{U}$ mit $W\subseteq V$, d.h. $\alpha(s)|_V$ erfüllt die definierende Bedingung für $\alpha(s|_V)$.

$$\tilde{s}: U \to et(F'),\ x \mapsto s_x,$$
mit
$$\pi\circ\tilde{s} = Id_U.$$
Wir definieren jetzt F als die Garbe
$$F: X^0 \to C$$
aller Schnitte von π, welche lokal von der Gestalt $\tilde{s}$ sind. Mit anderen Worte für jede offene Teilmenge
$$U \subseteq X$$
sei

$$F(U) := \{ \alpha:U\to X \mid \begin{array}{l} \pi\circ\alpha = Id_U \text{ und für jedes } x\in U \text{ gibt es ein } V\in\mathbf{U} \\ \text{mit } x\in V\subseteq U \text{ und ein } s\in F'(V) \text{ mit } \alpha|_V = \tilde{s} \end{array} \}$$

Auf diese Weise ist eine Garbe auf X definiert. Wir haben zu zeigen, die Einschränkung der Garbe F auf die Topologie-Basis **U** ist isomorph zu F'.
Für jede offene Menge $U\in\mathbf{U}$ betrachten wir die Abbildung

(3) $$F'(U) \to F(U),\ s \mapsto \tilde{s}.$$

Für jede offene Teilmenge $V \subseteq U$ mit $V\in\mathbf{U}$ gilt[238]
$$\tilde{s}|_V = (s|_V)^{\sim},$$
d.h. die Abbildungen (3) setzen sich zu einem Garben-Morphismus
$$F' \to F|_{\mathbf{U}},\ s \mapsto \tilde{s},$$
zusammen. Es reicht zu zeigen, dies ist ein Isomorphismus, d.h. die Abbildung (3) ist für jedes $U\in\mathbf{U}$ bijektiv.

Injektivität von (3). Seien $s,s' \in F'(U)$ derart, daß $\tilde{s} = \tilde{s}'$ gilt. Für jedes $x\in U$ gilt dann
$$s_x = \tilde{s}(x) = \tilde{s}'(x) = s'_x.$$
Für jedes $x\in X$ gibt es deshalb ein $V\in\mathbf{U}$ mit $x\in V$ und $s|_V = s'|_V$. Diese Mengen V bilden eine Überdeckung von U. Wegen Eigenschaft 1 von F' ist dann aber $s = s'$.

Surjektivität von (3). Sei $t \in F(U)$. Nach Definition von F ist t lokal von der Gestalt $\tilde{s}$, d.h. für jedes $x\in U$ gibt es ein $U_x\in\mathbf{U}$ und ein $s^{(x)}\in F'(U_x)$ mit
$$x\in U_x \subseteq U \text{ und } t|_{U_x} = \tilde{s}^{(x)} \text{ in } F(U_x).$$
d.h.
$$t(y) = \tilde{s}^{(x)}(y) = (s^{(x)})_y \text{ für } y\in U_x.$$
Für $y\in U_{x'}\cap U_{x''}$ ist damit
$$(s^{(x')})_y = t(y) = (s^{(x'')})_y\ ,$$
d.h. für jedes $y \in U_{x'}\cap U_{x''}$ gibt es ein $V\in\mathbf{U}$ mit

---

[238] Für $x\in V$ gilt $(\tilde{s}|_V)(x) = \tilde{s}(x) = s_x = (s|_V)(x) = (s|_V)^{\sim}(x)$.

$$s^{(x')}|_V = s^{(x'')}|_V ,$$
(Wegen Eigenschaft 1 von F' gilt diese Identität damit sogar für jedes V∈**U** mit $V \subseteq U_{x'} \cap U_{x''}$). Nach Eigenschaft 2 von F' gibt es ein
$$s \in F'(U)$$
mit
$$s|_{U_x} = s^{(x)} \text{ für jedes } x \in U.$$
Insbesondere gilt für $y \in U_x$
$$\tilde{s}(y) = s_y = (s^{(x)})_y = \tilde{s}^{(x)}(y) = t(y).$$
Da jedes y∈U in einem U_x liegt, folgt
$$\tilde{s} = t,$$
d.h. das Bild von s∈F'(U) bei der Abbildung (3) ist gerade der vorgebene Schnitt t.
QED.

Literatur

Waerden, van der Algebra

Index

Inhalt