Grundkurs Algebra

B. Herzog
Leipzig 2004/2005

0. Einleitung

Die Vorlesung behandelt die Lösung einiger klassischer Probleme die zum Teil bereits in der antiken Mathematik gestellt und erst in der Neuzeit gelöst wurden. Der grösste Teil der Vorlesung befasst sich mit der Bereitstellung der zur Lösung benötigten algebraischen Konstruktionen.

0.1 Die Probleme

Zu den betrachteten Problemen gehören die folgenden.

Die Dreiteilung eines Winkels
Die Qudratur des Kreises
Das Delische Problem
Die Frage nach der Lösungsformel für eine algebraische Gleichung eines Grades grösser als 4

Die Dreiteilung eines Winkels

Ein gegebener Winkel soll mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile geteilt werden.

Die Qudratur des Kreises

Zu einem gegebenen Kreis soll ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt konstruiert werden. Hat der Kreis in einer geeigneten Längeneinheit den Radius 1, so ist also ein Quadrat mit der Kantenlängen

$$\sqrt{\pi}$$

zu konstruieren.

Das Delische Problem

Als sich die Delier wegen einer überstandenen Pest an das Orakel von Delphi wandten, erhielten sie von Apollon den Auftrag, dessen Altar zu verdoppeln. Der Altar des Apollon ist ein Würfel aus Gold. Hat dieser Würfel in irgendeiner Längeneinheit die Kantenlänge 1, so besteht die Aufgabe also darin, einen Würfel mit dem Volumeninhalt 2 zu konstruieren, d.h. mit der Kantenlänge

$$\sqrt[3]{2}$$

zu konstruieren. Diese Konstruktion ist, wie bei den alten Griechen üblich, mit Zirkel und Lineal auszuführen.

Lösungsformeln für algebraische Gleichungen großen Grades

Wir wissen, eine quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

besitzt die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Das Problem besteht darin, eine ähnliche Lösungsformel für algebraische Gleichungen höheren Grades zu finden. Genauer: gesucht ist eine Formel für die Nullstellen eines Polynoms, in welcher außer den vier Grundrechenarten nur noch Wurzelausdrücke vorkommen. Ausdrücke dieser Gestalt nennt man auch Radikale. Man spricht deshalb auch von der Lösung algebraischer Gleichungen durch Radikale.

0.2 Der Lösungsansatz für die geometrischen Probleme

Alle genannten Aufgaben sind ohne Lösung. Das Problem besteht deshalb darin, zu beweisen, daß es keine Lösung gibt.

Bei den geometrischen Problemen läuft dies auf die Frage hinaus, welche Punkte in der reellen Ebene mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Genauer: es seien endlich viele Punkte

$$p_1 = (a_1, a_2), \dots, p_n = (a_{2n-1}, a_{2n}) \in \mathbb{R}^2$$

in der reellen Ebene gegeben (und eine Maßeinheit in Gestalt einer Strecke der Länge 1[1]. Zu entscheiden ist, ob ein gegebener Punkt p = (a', a") durch Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

Der Lösungsansatz besteht in der Betrachtung der Menge K aller Koordinaten aller Punkte, die aus den gegebenen Punkten $p_1, \dots, p_n$ konstruiert werden können. Es ist leicht zu sehen, ,daß die Menge K ein Körper ist (der die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ enthält). Bezeichne

$$k = \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_{2n})$$

den kleinsten Oberkörper von $\mathbb{Q}$, der die Koordinaten der Ausgangspunkte enthält und

$$L = k(a', a")$$

den kleinsten Körper, der außerdem die Koordinaten des gesuchten Punktes enthält.

$$\begin{array}{c} k \subseteq K \\ \cap \\ L \end{array}$$

Unser Problem besteht in der Charakterisierung aller Körpererweiterungen $k \subseteq L$, für welche $L \subseteq K$ gilt. Wir werden später zeigen, es gilt

$$L \subseteq K \Leftrightarrow L \text{ ergibt sich als eine Folge von Köpererweiterungen}$$

$$k = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_r = L$$

wobei in jedem Schritt der nächstgrößere Körper ein 2-dimensionaler Vektorraum über dem kleineren ist,

$$\dim_{L_i} L_{i+1} = 2 \text{ für alle i.}$$

Insbesondere ist also im Fall $L \subseteq K$ stets

$$\dim_k L = \text{eine Potenz von 2.}$$

Zur Lösung der geometrisdchen Probleme, wird es also ausreichen, zu zeigen, daß

$$\dim_k L$$

keine Potenz von 2 ist, wenn L der zum Problem gehörige Körper ist.

Als allgemeine Schlußfolgerung ergibt sich, wir müssen uns mit der Theorie der Körpererweiterungen befassen.

0.3 Lösungsansatz für das algebraische Problem

Sei

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

ein Polynom in einer Unbestimmten x mit Koeffizienten aus einem Körper k. Seien weiter

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r$$

---

[1] Diese kann man sich zum Beispiel dadurch gegeben denken, daß man dem ersten Punkt p_1 die Koordinaten $a_1 = 1$ und $a_2 = 0$ gibt.

die Nullstellen, die p (in irgendeinem Erweiterungskörper) hat und sei

$$L = k(\alpha_1,...,\alpha_r)$$

der kleinste Erweiterungskörper, der alle diese Nullstellen enthält.

Wir ignorieren hier einige grundlegende Fragen, wie etwa die, ob es überhaupt einen Erweiterungskörper gibt, der alle Nullstellen eines Polynoms enthält. Dies wird Gegenstand der allgemeinen Körpertheorie sein.

Abgesehen von solchen Grundfragen besteht unser Problem darin, zu entscheiden, wann die Elemente von L durch "Radikale" ausgedrückt werden können.

Die Grundidee besteht wieder darin, eine Invariante zu definieren, mit deren Hilfe man entscheiden kann, ob dies der Fall ist.

Das Problem ist diesmal schwieriger, weil die gesuchte Invariante nicht die Dimension ist (wie im Fall der geometrischen Probleme). Die gesuchte Invariante ist nicht einmal eine Zahl, es ist eine Gruppe, nämlich die Gruppe

$$G = \mathrm{Aut}_k\, L = \{ f: K \to K \mid f \text{ ist k-linear, } f(xy) = f(x)f(y) \text{ für } x \in L, f(c) = c \text{ für } c \in k\}$$

der (Körper-)Automorphismen von L, die die Elmente von k fest lassen. Wir werden zeigen, die Gruppe G ist endlich. Wir werden also den folgenden Weg gehen:

Polynom $\mapsto$ der zum Polynom gehörige Körper $\mapsto$ die zum Körper gehörige Gruppe

Unsere Aufgabe besteht dann darin, die Gruppen durch eine Eigenschaft zu charakterisieren, die im Fall $G = \mathrm{Aut}_k\, L$ gerade bedeutet, daß die α_i als Radikale geschrieben werden können. Gruppen, die diese Eigenschaft besitzen, werden wir auflösbare Gruppen nennen. Leider ist die Eigenschaft einer Gruppe, auflösbar zu sein, eine relativ komplizierte Eigenschaft. Wir verschieben ihre genaue Angabe auf später.

Als allgemeine Schlußfolgerung halten wir fest: wir haben uns mit Gruppentheorie zu beschäftigen und insbesondere mit der Theorie der auflösbaren Gruppen.

0.4 Zusammenfassung

Damit stehen zwei Bestandteile der Vorlesung fest:

Gruppentheorie
Körpertheorie

und außerdem der Bestandteil der sich mit dem Zusammenhang zwischen Gruppen und Körpern beschäftigt:

Galoistheorie

Um Körpertheorie zu betreiben braucht man noch einen weiteren vorbereitetenden Bestandteil: da Körper speziellen Ringe sind und Ringe bei der Konstruktion von Körpern eine Rollen spielen, müssen wir uns mit

Ringtheorie

beschäftigen. Damit steht der grobe Aufbau der Vorlesung fest:

1. Gruppen
2. Ringe
3. Körper

1. Gruppen

1.1. Definition und Beispiele

1.1.1 Gruppen und Gruppenhomomorphismen

Eine Gruppe G ist eine Menge zusammen mit einer Abbildung

$$G\times G \to G,\ (x,y) \mapsto xy,$$

genannt Gruppenoperation, mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Die Gruppenoperation ist assoziativ,

$$(xy)z = x(yz) \text{ für } x,y,z \in G.$$

(ii) Sie besitzt ein neutrales Element e,

$$ex = xe = x \text{ für } x \in G.$$

(iii) Jedes Element x der Gruppe besitzt ein Inverses x^{-1},

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e.$$

Die Gruppe heißt abelsch oder auch kommutativ, falls außerdem das Kommutativgesetz gilt,

$$xy = yx \text{ für } x,y \in G.$$

Ein (Gruppen-) Homomorphismus ist eine Abbildung

$$h: G \to G'$$

einer Gruppe G in eine Gruppe G' mit h(xy) = h(x)h(y). Ein (Gruppen-) Homomorphismus h: G→G', für welchen es einen (Gruppen-) Homomorphismus g: G'→ G gibt mit

$$h\circ g = Id \text{ und } g\circ h = Id,$$

heißt (Gruppen-) Isomorphismus. Ein Automorphismus der Gruppe G ist ein Isormorphismus G → G. Die Menge der Automorphismen von G wird mit

$$Aut(G)$$

bezeichnet.

Bemerkungen

(i) In nichtabelschen Gruppen schreibt man die Operation im allgemeinen als Multiplikation, in abelschen Gruppen als Addition. Das neutrale Element bezeichnet man im ersten Fall auch mit 1 und redet vom Einselement, und im letzteren Fall mit 0 und redet vom Nullelement. Im additiven Fall spricht man analog vom Negativen eines Elements x anstatt von dessen Inversen und schreibt -x anstelle von x^{-1},

(ii) Sind x und y Elemente mit

$$xy = e,$$

so sagt man, x ist linksinvers zu y und y ist rechtsinvers zu x. Anstelle von Gruppenaxiojm (iii) kann man auch fordern, jedes Element x besitzt ein Linksinverses x' und ein Rechtsinverses x". Es ist dann nämlich automatisch

$$x' = x'e = x'(xx") = (x'x)x" = ex" = x".$$

(iii) Ein Gruppenhomomorphismus h: G → G' überführt das neutrale Element ins neutrale Element,

$$h(e) = e'.$$

Wegen ee = e gilt nämlich h(e)h(e) = h(e), also

$$e' = h(e)h(e)^{-1} = h(e)h(e)h(e)^{-1} = h(e)e' = h(e).$$

(iv) Ein Homomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn er bijektiv ist.

(v) Die Anzahl der Elemente von G heißt Gruppenordnung und wird bezeichnet mit

$$\#\, G := \text{Anzahl der Elemente von } G.$$

(vi) Die Menge Aut G der Automorphismen ist eine Gruppe mit der Kompostion von Abbildungen als Gruppenoperation.

1.1.2 Permutationsgruppen

Sei M eine Menge und

$$S(M) = \{ f:M \to M \mid f \text{ bijektiv} \}$$

die Menge aller bijektiven Abbildungen $M \to M$. Dann ist S(M) ein Gruppe mit der Zusammensetzung von Abbildungen als Gruppenoperation. Diese Gruppe heißt symmetrische Gruppe. Im Fall

$$M = \{1,...,n\}$$

(= Menge der ersten n natürlichen Zahlen) schreibt man auch

$$S_n = S(M).$$

Gruppenordnung ist gleich

$$\# S_n = n!$$

Beispiel 1
$S_1 = \{(1)\}$ ist eine abelsche Gruppe.

Beispiel 2
$S_2 = \{ (1), (12)\}$ ist eine abelsche Gruppe.

Beispiel 3
$S_3 = \{ (1), (12), (13), (23), (123), (321) \}$ is eine nicht-abelsche Gruppe.

1.1.3 Die allgemeine lineare Gruppe

Seien n eine natürliche Zahl und K ein Körper. Dann ist die Menge

$$GL(n, K) = \{ A \in K^{n \times n} \mid A \text{ umkehrbar} \}$$

der umkehrbaren quadratische n-reihigen Matrizen zusammen mit der gewöhnlichen Matrizen-Multiplikation eine Gruppe. Sie heißt allgemeine lineare Gruppe über K. Analog definiert man

$$GL(V)$$

für jeden K-Vektorraum V als Menge der bijektiven K-linearen Abbildungen $V \to V$ mit der Zusammensetzung von Abbildungen als Gruppenoperation.

1.1.4 Die spezielle lineare Gruppe

Seien n eine natürliche Zahl und K ein Körper. Dann ist die Menge

$$SL(n, K) = \{ A \in K^{n \times n} \mid \det A = 1 \}$$

der quadratische n-reihigen Matrizen mit der Determinante 1 zusammen mit der gewöhnlichen Matrizen-Multiplikation eine Gruppe. Sie heißt spezielle lineare Gruppe über K. Analog definiert man

$$SL(V)$$

für jeden endlich-dimensionalen K-Vektorraum V.

1.1.5 Die Determinante als Gruppenhomomorphismus

Die Abbildung

$$\det: GL(n, V) \to GL(1, V), A \mapsto \det(A),$$

ist auf Grund des Multiplikationssatzes für Determinanten ein Gruppenhomomorphismus.

1.1.6 Die Orthogonale Gruppe

Sei V ein Vektorraum über dem Körper mit der nicht-entarteten symmetrischen Bilinearform $< , >$. $V \times V \to K$. Dann ist die Menge

$$O(V) := \{ f \in GL(V) \mid <f(x), f(y)> = <x,y> \text{ für } x,y \in V \}$$

zusammen mit der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation eine Gruppe. Im Fall $V = K^n$ schreibt man auch

$$O(n, K) := O(K^n).$$

Im Fall $V = \mathbb{R}^n$, $n = r + s$, und

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} > = x_1y_1 + \dots + x_ry_r - x_{r+1}y_{r+1} - \dots - x_ny_n$$

schreibt man auch

$$O(r,s) := O(K^n).$$

1.1.7 Die Symplektische Gruppe

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum (endlicher Dimension) mit einer nicht-entarteten schiefsymmetrischen Bilinearform

$$\omega: V \times V \to K.$$

Dann besitzt

$$Sp(V) := \{ f \in GL(V) \mid \omega(fx, fy) = \omega(x,y) \text{ für } x,y \in V\}$$

die Struktur einer Gruppe mit der Zusammensetzung von Abbildungen als Gruppenoperation. Die Gruppe heißt symplektische Gruppe von V.

1.1.8 Die Unitäre Gruppe

Seien V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum (endlicher Dimension) mit einem hermitischen Skalarprodukt

$$< , > : V \times V \to \mathbb{C}.$$

Dann besitzt

$$U(V) := \{ f \in GL(V) \mid <fx, fy> = <x, y> \text{ für } x,y \in V \}$$

die Struktur einer Gruppe mit der Zusammensetzung von Abbildungen als Gruppenoperation. Diese Gruppe heißt unitäre Gruppe von V. Im Fall

$$V = \mathbb{C}^n$$

und

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} > = x_1\overline{y}_1 + \dots + x_n\overline{y}_n$$

schreibt man auch

$$U(n) := U(V).$$

1.1.9 Einheitengruppen

Sei R ein Ring mit Einselement $1 \in R$. Ein Element $r \in R$ heißt Einheit von R, wenn es ein Element $r' \in R$ gibt mit

$$rr' = r'r = 1.$$

Die Menge der Einheiten von R ist bezüglich der Multiplikation von R eine Gruppe. Diese Gruppe wir mit

$$R^*$$

bezeichnet und heißt multiplikative Gruppe von R.

Beispiel 1

Für jeden Körper ist

$$GL(n, K) = (K^{n \times n})^*.$$

Insbesondere ist

$$GL(1, K) = K^*.$$

Beispiel 2

$$\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}.$$

Beispiel 3

Sei

$$\Gamma := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i := \{ a + bi \mid a,b \in \mathbb{Z} \}$$

die Menge der komplexen Zahlen im ganzzahligen Real- und Imaginärteil. Diese Menge ist ein Ring mit 1 , wobei die Ringoperationen gerade die gewöhnliche Addition bzw. Mujltiplikation komplexer Zahlen seien. Dieser Ring heißt Ring der ganzen Gaußschen Zahlen. Es gilt

$$\Gamma^* = \{ \pm 1, \pm i\}$$

1.1. 10 Das Zentrum einer Gruppe

Für jede Gruppe G ist

$$C(G) := \{ g \in G \mid gx = xg \text{ für jedes } x \in G \}$$

mit der Multiplikation von G eine Gruppe. Diese Gruppe heißt Zentrum von G.

1.1.11 Bilder und Kerne

Sei $h: G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist der Kern von h,

$$\text{Ker } h := \{ g \in G \mid h(g) = e' \}$$

mit der Multiplikation von G eine Gruppe. Außerdem ist das Bild von h,

$$\text{Im } h := \{ h(g) \mid g \in G \}$$

mit der Multiplikation von G' eine Gruppe.

Bemerkung

Ein Gruppenhomomorphismus $h: G \to G'$ ist genau dann injektiv, wenn dessen Kern trivial ist, d.h. Ker h = {e} gilt.

Beispiel

Für jede Gruppe G ist die Abbildung

$$G \to \text{Aut}(G),\ g \mapsto (x \mapsto gxg^{-1}),$$

ein Gruppenhomomorphismus. Das Bild dieses Homomorphismus heißt Gruppe der inneren Automorphismen von G. Die Abbildung

$$\sigma_g: G \to G,\ x \mapsto gxg^{-1},$$

heißt auch Konjugation mit g.

1.1.12 Direkte Produkte

Seien G' und G" zwei Gruppen. Dann ist

$$G' \times G'' = \{(x', x'') \mid x' \in G',\ x'' \in G''\}$$

bezüglich der Gruppenoperation

$$(x', x'') \cdot (y', y'') := (x'x'', y'y'')$$

eine Gruppe. Diese Gruppe heißt direktes Produkt von G' und G".

1.1.13 Endliche Gruppen, Multiplikationstabellen

Für jede endliche Gruppe

$$G = \{ g_1, \ldots, g_n \}$$

kann man die Gruppenstruktur vollständig durch eine Multiplikationstabelle bestimmen.

	...	g_i	...
...			
g_j		$g_j g_i$	
.....			

Mit Hilfe der Gruppentabelle lassen sich die letzten beiden Gruppenaxiome leicht überprüfen.

Das dritte Gruppenaxiom bedeutet im wesentlichen, in jeder Zeile und Spalte des linken unteren Teils der Tabelle kommt jedes Gruppenelement genau einmal vor.

Aufwändig gestaltet sich im allgemeinen die Überprüfung des ersten Gruppenaxioms. Fragen wir zum Beispiel nach Gruppen der Ordnung 4,

G = { e, a, b, c } (e das Einselement).

Die Grupentabellen hat die Gestalt

	e	*a*	*b*	*c*
e	*e*	*a*	*b*	*c*
a	*a*		*1*	
b	*b*			
c	*c*			

Die bereits eingetragenen Werte beschreiben, die Tatsache, daß e das Einselement sein soll. In der Position 1 kann weder a noch b stehen (da a bzw. b in der Zeile bzw. Spalte bereits vorkommt. Es gibt also nur die Möglichkeiten

1 = e bzw. 1 = c.

Betrachten wir den ersten Fall.

	e	*a*	*b*	*c*
e	*e*	*a*	*b*	*c*
a	*a*		*e*	
b	*b*		*2*	
c	*c*		*1*	

In der neuen Position 1 können e, b und c nicht vorkommen, d.h. es ist

1 = a

In der Position 2 muß dann aber c stehen,

2 = c.

Für alle übrigen Positionen stehen nach derselben Argumentation die Einträge auch fest:

	e	***a***	***b***	***c***
e	***e***	***a***	***b***	***c***
a	***a***	***c***	***e***	***b***
b	***b***	***e***	***c***	***a***
c	***c***	***b***	***a***	***e***

Dies ist gerade die Additionstabelle der Restklassen modulo 4 mit

e = 0, a = 1, b = 3, c = 2

	0	*1*	*3*	*2*
0	*0*	*1*	*3*	*2*
1	*1*	*2*	*0*	*3*
3	*3*	*0*	*2*	*1*
2	*2*	*3*	*1*	*0*

Betrachten wir den zweiten Fall. Wie wir gesehen haben erhalten wir im Fall, daß das Produkt von zwei verschiedenen Elementen $\neq$ e gleich e ist, die Restklassen modulo 4, also nichts neues. Wir schließen diesen Fall aus und erhalten:

	e	*a*	*b*	*c*
e	*e*	*a*	*b*	*c*
a	*a*		*c*	*b*
b	*b*	*c*		*a*
c	*c*	*b*	*a*	

Dieselbe Argumentationsweise wie oben liefert:

	e	*a*	*b*	*c*
e	*e*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*e*	*c*	*b*
b	*b*	*c*	*e*	*a*

c	*c*	*b*	*a*	*e*

Dies ist gerade die Multiplikationstabelle des direkten Produkt aus den Restklassen modulo 2 mit sich selbst

$$\{0, 1\}\times\{0,1\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

mit e = (0,0), a = (0,1), b = (1,0), c = (1,1). Diese Gruppe ist abelsch und heißt Kleinsche Vierergruppe.

1.1.14 Die Operation einer Gruppe auf einer Menge

Eine (Links-) Operation einer Gruppe G auf einer Menge M ist ein (Gruppen-) Homomorphismus

$$h: G \to S(M).$$

Bemerkungen

(i) Eine solche Operation definiert eine Abbildung

$$h':G\times M \to M, (g,m) \mapsto gm,$$

mit

1. $(g'g'')m = g'(g''m)$ für $g',g''\in G$ und $m\in M$
2. $em = m$ für $m\in M$.

Man kann nämlich

(1) $$gm = h(g)(m)$$

setzen. Die Relationstreue von h, d.h.

$$h(g'g'') = h(g')h(g'')$$

übersetzt sich dann gerade in Bedingung 1. Bedingung 2 ist die Übersetzung der Aussage h(e) = Id.

(ii) Jede Abbildung

$$h': G \times M \to M,$$

welche den Bedingungen 1 und 2 genügt, kommt von einer eindeutig bestimmten Operation

$$h: G \to S(M).$$

Die Eindeutigkeit von h ergibt sich aus (1). Interpretiert man (1) als Definition für h, so folgt

$h(g'g'')(m)$	$= (g'g'')m$	(nach Definition von h)
	$= g'(g''m)$	(nach Bedingung 1)
	$= h(g')(h(g'')(m))$	(nach Definition von h)

also

$$h(g'g'') = h(g')\circ h(g''),$$

d.h. h ist relationstreu. Wir haben nocht zu zeigen, h ist korrekt definert, d.h.

$$h(g): M \to M$$

ist eine bijektive Abbildung für jedes $g\in G$. Es gilt

$$h(g)h(g^{-1})(m) = h(gg^{-1})(m) = h(e)m = em = m$$
$$h(g^{-1})h(g)(m) = h(g^{-1}g)(m) = h(e)m = em = m$$

Es ist also

$$h(g)h(g^{-1}) = h(g^{-1})h(g) = Id,$$

d.h. h ist bijektiv.

.

(iii) Aus (i) und (ii) ergibt sich, die Angabe einer Operation von G auf M ist äquivalent zur Angabe einer Abbildung h', die den Bedingungen 1 und 2 genügt. Deshalb spricht man auch bei der Abbildung h' von einer (Links-) Operation.

(iv) Eine Rechtsoperation einer Gruppe G auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$M \times G \to M, (m, g) \mapsto mg,$$

mit
1. $m(g'g'') = (mg')g''$
2. $me = m$.

(v) Ist eine Rechtsoperation gegeben, so ist

$$G \times M \to M, (g,m) \mapsto mg^{-1},$$

eine Linksopertion. Ist umgekehrt

$$G \times M \to M, (g,m) \mapsto gm,$$

eine Linksoperation, so ist

$$M \times G \to M, (m,g) \mapsto g^{-1}m,$$

eine Rechtsoperation. Linksoperationen und Rechtsoperationen stehen also in einer eineindeutigen Korrespondenz. Deshalb werden wir uns im allgemeinen auf die Betrachtung von (Links-) Operationen beschränken.

(vi) Operiert G auf M und ist $m \in M$, so heißt

$$O(m) = Gm = \{ gm \mid g \in G \}$$

Orbit von m bezüglich der gegebenen Operation. Die Bezeichnung kann man mit der Vorstellung verbinden, daß die Zeit auf den Punkten einer Raketenbahn operiert und so die Rakete entlang des zugehörigen Orbits bewegt.

(v) Je zwei Orbits sind identisch oder disjunkt. Aus $m \in O(m') \cap O(m'')$ folgt nämlich die Existenz von Gruppenelementen $g', g'' \in G$ mit

$$g'm' = m = g''m''.$$

Für jedes $g \in G$ gilt deshalb

$$gm' = gg'^{-1}g'm' = gg'^{-1}g''m'' \in O(m''),$$

d.h. es gilt $O(m') \subseteq O(m'')$. Aus Symmetriegründen gilt dann aber auch die umgekehrte Inklusion, d.h. es ist

$$O(m') = O(m'').$$

Beispiele für Operationen

Sei G eine Gruppe. Dann Operiert G auf sich selbst durch Linkstranslationen,

$$G \times G \to G, (g,x) \mapsto gx,$$

durch Rechstranslationen,

$$G \times G \to G, (g, x) \mapsto xg^{-1},$$

und durch Konjugation,

$$G \times G \to G, (g,x) \mapsto gxg^{-1}.$$

Spezialfall

Die Gruppe G operiere von links oder rechts auf der Menge M durch Automorphismen und M sei ebenfalls eine Gruppe. Falls dann für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$M \to M, m \mapsto gm \text{ (bzw. } m \mapsto mg),$$

ein Gruppenautomorphismus ist, so sagt man, G operiert durch Automorphismen auf M (von links bzw. von rechts)

1.1.15 Halbdirekte Produkte

Seien G' und G'' zwei Gruppen und G' operiere auf G'' von rechts durch Automorphismen,

$$G'' \times G' \to G'', (x, g) \mapsto x^g,$$

Dann ist[2]

---

[2] Das Symbol

$$\rtimes$$

kann man sich als Zusammensetzung

$$\times \; i$$

aus einem Kreuz und einem 'i' enstanden denken, wobei das 'i' bedeuteden soll, daß der rechte Faktor des halbdirekten Produkts eine invariante Untergruppe ist. Analog bezeichnet

$$G' \rtimes G'' := \{ (x', x'') \mid x' \in G' \text{ und } x'' \in G'' \}$$

mit der folgenden Operation eine Gruppe. Diese Gruppe heißt halbdirektes Produkt von G' und G''.

$$(x', x'') \cdot (y', y'') := (x'y', (x'')^{y'} \cdot y'').$$

Bemerkungen

(i) Das Einselement des halbdirekten Produkts ist gerade (e', e'').

(ii) Das zu (x', x'') inverse Element (y', y'') genügt den Bedingungen

$$x'y' = e', \quad x''^{\,y'} \cdot y'' = e'',$$

d.h. es ist

$$y' = x'^{-1}$$

und

$$y'' = (x''^{\,y'})^{-1} = (x''^{-1})^{x'^{-1}}$$

d.h.

$$(x', x'')^{-1} = (x'^{-1}, (x''^{-1})^{x'^{-1}})$$

(iii) Wir betrachten den Fall

$$G'' = G,\ G' = \mathrm{Aut}\, G \text{ und } G \times \mathrm{Aut}(G) \to G,\ (g, \sigma) \mapsto \sigma^{-1}(g).$$

und identifizieren G mit einer Teilmenge des halbdirekten Produkts mittels

$$G \to \mathrm{Aut}\, G \rtimes G,\ x \mapsto (\mathrm{Id}, x).$$

Dann entspricht das Anwenden des Automorphismus $h \in \mathrm{Aut}\, G$ auf ein Element $x \in G$ gerade der Konjugation mit dem Element (h,e):

$$(h, e)(\mathrm{Id}, x)(h, e)^{-1} = (h, x)(h^{-1}, e) = (\mathrm{Id}, h(x))$$

Die Automorphismen von G lassen sich also zu inneren Automorphismen des halbdirekten Produkts fortsetzen.

1.2 Untergruppen und Normalteiler

1.2.1 Definitionen

Eine Teilmenge $U \subseteq G$ einer Gruppe heißt Untergruppe, wenn U mit den Operationen von G die Struktur einer Gruppe hat. Die Untergruppe U von G heißt Normalteiler oder auch invariante Untergruppe, wenn die folgende Implikation besteht.

$$u \in U \text{ und } g \in G \Rightarrow gug^{-1} \in U.$$

Bemerkungen

(i) Für jedes $g \in G$ setzen wir

$$gUg^{-1} := \{gug^{-1} \mid u \in U\}$$

Dann gilt für jede Untergruppe U von G,

$$U \text{ ist Normalteiler von } G \Leftrightarrow gUg^{-1} \subseteq U \text{ für jedes } g \in G.$$

(ii) Die Bedingung an U, Normalteiler zu sein, bedeutet gerade, alle inneren Automorphismen von G überführen die Elemente von U in Elemente von U, d.h. U ist invariant gegenüber inneren Automorphismen. Daher der Name "invariante Untergruppe".

(iii) Jede Untergruppe U einer abelschen Gruppe ist ein Normalteiler:

$$G' \ltimes G''$$

ein halbdirektes Produkt zweier Untergruppen, wobei jedoch diesmal der zweite Faktor auf dem ersten durch Automorphismen operiert (und entsprechend G' ein Normalteiler im halbdirekten Produkt $G' \ltimes G''$ ist).

$$gUg^{-1} = gg^{-1}U = eU = U.$$

Beispiel für einen Normalteiler

Der Kern eines Homomophismus h: G → G' ist eine invariante Untergruppe: für u∈Ker h und g∈G gilt

$$h(gug^{-1}) = h(g)h(u)h(g)^{-1} = h(g)e'h(g)^{-1} = h(g)h(g)^{-1} = e',$$

d.h. $gug^{-1} \in$ Ker h. Die Untergruppeneigenschaft von Ker h werden wir mit Hilfe des nachfolgenden Kriteriums nachweisen.

Beispiel

U := { (1), (12)} ist eine Untergruppe von S_3 = { (1), (12), (13), (23), (123), (321)}

jedoch kein Normalteiler:

$$(23)U(23)^{-1} = \{ (1), (13)\} \not\subseteq U.$$

Insbesondere kann U unmöglich der Kern eines auf S_3 definierten Homomorphismus sein.

1.2.2 Untergruppenkriterium

Seien G eine Gruppe und U ⊆ G eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) U ist eine Untergruppe von G.

(ii) U ist nicht leer und für je zwei Elemente x,y∈U gilt xy^{-1}∈U.

(iii) Es sind die folgenden drei Bedingungen erfüllt.
- (a) e∈U.
- (b) x,y∈U ⇒ xy∈U.
- (c) x∈U ⇒ x^{-1}∈U.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Da U eine Gruppe ist, enthält U das neutrale Element, ist also nicht leer. Sind x,y∈U Elemente von U, so muß auch

$y^{-1} \in U$

gilt (da U eine Gruppe ist), also xy^{-1}∈U.

(ii) ⇒ (iii). Nach Voraussetzung ist U nicht leer. Es gibt also ein Element x∈U. Dann git aber nach Voraussetzung auch

$$e = xx^{-1} \in U,$$

d.h. Bedingung (a) ist erfüllt. Mit x∈U gilt nach Voraussetzung auch

$$x^{-1} = ex^{-1} \in U,$$

d.h. Bedingung (c) ist erfüllt. Mit x, y∈U gilt, wie gerade gezeigt auch x, y^{-1}∈U, also

$$xy = x(y^{-1})^{-1} \in U,$$

d.h. Bedingung (b) ist erfüllt.

(iii) ⇒ (i). Auf Grund von Bedingung (b) definiert die Gruppenoperation von G eine Abbildung

$$U \times U \to U, (x,y) \mapsto xy.$$

Da die Gruppenoperation von G assoziativ ist, gilt dasselbe auch die auf U induzierte Operation. Nach Bedingung (a) gilt e∈U, d.h. U besitzt ein neutrales Element. Nach Bedingung (c) gilt mit x∈U auch x^{-1}∈U, d.h. jedes Element von U besitzt in U ein Inverses. Damit ist U eine Gruppe,

QED.

1.2.3 Beispiel: der Kern eines Homomorphismus

Sei h:G→G' ein Homomorphismus. Dann ist Ker h eine Untergruppe (also ein Normalteiler.

Beweis.

Wegen $e \in \operatorname{Ker} h$ ist $\operatorname{Ker} h$ nicht leer. Für $x,y \in \operatorname{Ker} h$ gilt

$$h(xy^{-1}) = h(x)h(y^{-1}) = h(x)h(y)^{-1} = e' \cdot e'^{-1} = e',$$

also $xy^{-1} \in \operatorname{Ker} h$.
QED.

1.2.4 Beispiel: endliche Untergruppen

Seien G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine nichtleere endliche Teilmenge mit

$$x, y \in U \Rightarrow xy \in U.$$

Dann ist U eine Untergruppe von G.
Beweis. Seien $x,y \in U$ zwei Elemente. Es reicht zu zeigen,

$$xy^{-1} \in U.$$

Nach Voraussetzung ist die Abbildung

$$\varphi: U \to U, \; u \mapsto uy,$$

wohldefiniert. Diese Abbildung ist injektiv, denn die Zusammensetzung mit der Abbildung

$$u \mapsto uy^{-1}$$

ist die identische Abbildung: $(uy)y^{-1} = u(yy^{-1})\, ue = u$. Das Bild der Abbildung φ besteht also aus genau so vielen Elementen wie U selbst, d.h.

$$\varphi \text{ ist bijektiv.}$$

Insbesondere gibt es ein $u \in U$ mit

$$x = \varphi(u) = uy.$$

Multiplikation von links mit y^{-1} liefert

$$xy^{-1} = u \in U.$$

QED.

1.2.5 Beispiel: Untergruppen der S_4

Die folgenden Teilmengen von
$S_4 = \{ (1),$

(12), (13), (14), (23), (24), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (Ordnung 2)
(123), (124), (134), (234), (Ordnung 3)
(321), (421), (431), (432),
(1234), (1342), (1423), (Ordnung 4)
(1432), (1243), (1324) }

sind Untergruppen.

Ordnung 1: {(1)}
Ordnung 2:
{ (1), (12)}, {(1), (13)} , {(1),(14)}, {(1), (23)}, {(1),(24)}, {(1), (34),}
{(1), (12)(34)}, {(1), (13)(24)}, {(1), (14)(23)}
Ordnung 3:
{ (1), (123), (321)}, { (1), (124),(421)}, { (1), (134),(431)}, { (1), (234), (432)}
Ordnung 4:
{ (1), (1234), (13)(24),(4321)}
{ (1), (1342), (14)(23),(2431)}
{ (1), (1423), (12)(34),(3241)}
{ (1),), (12)(34), (13)(24), (14)(23)} = V_4
Ordnung 6:
{ (1), (12), (13), (123), (321)} = S_3 (= <(12)>×|<(123)>)
{ (1), (12), (14), (124), (421)}
{ (1), (13), (14), (134), (431)}
{ (1), (23), (24), (234), (432)}

Ordnung 8:[3]
{ (1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (4321), (13), (24)}
{ (1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1342),(2431), (23), (14)}
{ (1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1423),(3241), (12), (34)}
Ordnung 12:
{ (1), (12)(34), (13)(24),(14)(23),
(123), (124), (134), (234),
(321), (421), (431), (432)} = A_4

Ordnung 24: S_4

Wir werden später sehen, es gibt noch keine weiteren Untergruppen. Die einzigen Normalteiler sind:

{(1)}, V_4 , A_4 , S_4

1.2.6 Beispiel: Durchschnitte von Untergruppen

Seien G ein Gruppe und $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ eine beliebige Familie von Untergruppen G_α von G. Dann ist

$$U := \cap_{\alpha\in I} G_\alpha$$

eine Untergruppe von G.

Beweis. Die Menge U ist nicht leer, denn $e \in G$ liegt in jedem G_α, also auch in U. Seien jetzt zwei Elemente $x,y\in U$ gegeben. Es reicht zu zeigen,

$$xy^{-1}\in U.$$

Zumindest gilt $x,y\in G_\alpha$ für jedes α, also $xy^{-1}\in G_\alpha$, da die G_α Untergruppen sind. Dann ist aber auch $xy^{-1}\in U$.

QED.

1.2.7 Endliche Gruppen als Untergruppen der endlichen symmetrischen Gruppen.

Seien G eine (endliche) Gruppe und

$$h: G \to S(G),\ g \mapsto (x \mapsto gx),$$

die Operation von G auf sich durch Linkstranslationen. Der Homomophismus h ist injektiv, d.h er identifiziert G mit dem Bild von h in S(G).

Insbesondere kann man jede (endliche) Gruppe mit einer Untergruppe einer (endlichen) Permultationsgruppe identifizieren.

Beweis (der Injektivität von h). Ist $g\in$ Ker(h), so ist die Abbildung

$$G \to G,\ x \mapsto gx,$$

die identische Abbildung, d.h. $gx = x$ für jedes x. Speziell für $x = e$ folgt

$$g = ge = e.$$

Wir haben gezeigt, Ker (h) = {e} ist trivial, d.h. h ist injektiv.

QED.

1.2.8 Erzeugendensysteme, zyklische Gruppen

Seien G eine Gruppe und $M \subseteq G$ eine Teilmenge von G. Dann wird der Durchschnitt aller Untergruppen von G, die die Menge M enthalten, mit

---

[3] Jede Untergruppe der Ordnung 4 liegt in einer 2-Sylow-Untergruppe. V_4 liegt deshalb in jeder 2-Sylow-Untergruppe. Die 2-Sylow-Untergruppen werden deshalb von V_4 und einer weiteren Untergruppe der Ordnung 4 erzeugt.

$$< M> := <m \mid m \in M> := \bigcap_{M \subseteq U \subseteq G, U \text{ Untergruppe}} U$$

bezeichnet und heißt die von M erzeugte Untergruppe von G. Falls <M> = G gilt, so heißt M auch Erzeugendensystem von G. Eine Gruppe mit einem einelementigen Erzeugendensystem heißt zyklisch. Eine Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem heißt endlich erzeugt.

Bemerkungen

(i) Sei G = <g> eine zyklische Gruppe. Dann ist

$$\{ g^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

eine Untergruppe, welche das Element g enthält. Da G die kleinste Gruppe ist mit dieser Eigenschaft, gilt

$$G = \{ g^n \mid n \in \mathbb{Z} \},$$

d.h. jede zyklische Gruppe besteht aus den Potenzen eines festen Elements. Insbesondere ist jede zyklische Gruppe abelsch.

(ii) Sei G eine Gruppe und g∈G ein Element. Dann ist

$$<g> = \{ g^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

die von g in G erzeugte zyklische Gruppe. Die Ordnung dieser Untergruppe heißt auch Ordnung von g,

$$\text{ord } g := \# \{ g^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

Beispiel

Für jede Gruppe G ist G ein Erzeugendensystem von G,

$$G = <G>.$$

Beispiel

Wie wir aus der linearen Algebra wissen, ist jede Permutation $\sigma \in S_n$ ein Produkt von Transpositionen der Gestalt

$$(12), (13), \ldots, (1n).$$

Anders ausgedrückt, diese Permutationen bilden ein Erzeugendensystem von S_n,

$$S_n = < (12), (13), \ldots, (1n) >$$

Man beachte, es gilt

$$(1i)(ij)(1i) = (1j)$$

d.h.

$$(ij) = (1i)(1j)(1i).$$

Beispiel

Die von $(12) \in S_n$, $n \geq 2$ erzeugte Gruppe besteht aus den Potenzen von (12),

$$< (12) > = \{ (1), (12) \},$$

d.h. (12) ist ein Element der Ordnung 2 von S_n.

Beispiel

Die von $(123) \in S_n$, $n \geq 3$ erzeugte Gruppe besteht aus den Potenzen von (123),

$$< (123)> = \{ (1), (123), (321)\},$$

d.h. (123) ist eine Element der Ordnung 2 von S_n.

Analog sieht man, ein r-Zyklus $(a_1 \ldots a_t)$ ist ein Element der Ordnung r.

Beipiel

$$S_3 = <(12), (13)>$$

Es gibt kein Erzeugendensystem aus weniger Elementen, denn dann wäre die Gruppe zyklisch, also abelsch, was nicht der Fall ist..

Beispiel

$\mathbb{Z}$ ist mit der gewöhnlichen Addition ganzer Zahlen eine zyklische Gruppe.

1.2.9 Untergruppen zyklischer Gruppen

Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist zyklisch.
Beweis. Sei G eine zyklische Gruppe,

$$G = \langle g \rangle = \{ g^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. O.B.d.A. sei $U \neq \{e\}$. Dann enthält U eine Potenz g^n von g mit $g^n \neq e$, d.h. $n \neq 0$,

$$e \neq g^n \in U,\ n \neq 0.$$

Weil U eine Untergruppe ist, liegt mit g^n auch $(g^n)^{-1} = g^{-n}$ in U, d.h. wir können annehmen,

$$n > 0.$$

Sei

$$n_0 := \min \{ n \in \mathbb{N} \mid g^n \in U \}.$$

Die Menge, deren Minimum wir nehmen, ist nicht leer, d.h. n_0 ist eine wohldefinierte natürliche Zahl. Nach Konstruktion gilt $g^{n_0} \in U$, also

$$U \supseteq \langle g^{n_0} \rangle.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, es gilt sogar "=". Sei also ein beliebiges Element von U gegeben,

$$g^m \in U.$$

Es reicht zu zeigen, g^m ist eine Potenz von g^{n_0}, d.h. es reicht zu zeigen, n_0 ist ein Vielfaches von m. Jedenfalls gilt

$$m = q \cdot n_0 + r$$

mit ganzen Zahlen q und r, wobei gilt

(1) $$0 \leq r < n_0.$$

Es gilt

$$g^r = g^{m - qn_0} = g^m (g^{n_0})^{-q} \in U.$$

Nach Definition von n_0 und wegen (1) muß dann aber r = 0 gelten, d.h. m ist ein Vielfaches von n_0.

QED.

1.2.10 Untergruppen abelscher Gruppen

Sei A eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe. Dann ist die Teilmenge

$$A_{tor} := \{a \in A \mid na = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

der Elemente endlicher Ordnung eine Untergruppe von A und heißt Torsionsuntergruppe von A. Sei n eine natürliche Zahl. Dann ist die Teilmenge

$$A_n := \{a \in A \mid n^r a = 0 \text{ für ein } r \in \mathbb{N}\}$$

der Elemente, die von einer n-Potenz annulliert werden, eine Untergruppe und heißt n-Torsionsuntergruppe.

1.3 Faktorgruppen, die Isomorphiesätze und Anwendungen

1.3.1 Nebenklassen

Seien G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Eine Linksnebenklasse von G modulo U ist eine Menge der Gestalt

$$gU := \{gu \mid u \in U\}.$$

Analog ist eine Rechtsnebenklasse von G modulo U eine Menge der Gestalt

$$Ug = \{ug \mid u \in U\}.$$

Die Menge der Rechtsnebenklassen von G modulo U wird mit

$$G/U := \{ gU \mid g \in G \}$$

bezeichnet, die Menge der Rechtsnebenklassen mit

$$U\backslash G := \{ Ug \mid g \in G \}.$$

Bemerkungen

(i) Je zwei Links- (bw. Rechts-) Nebenklassen sind identisch oder disjunkt.

(ii) Je zwei Nebenklassen modulo U lasen sich bijektiv aufeinander abbilden.

(iii) Für jede Untergruppe U von G sind folgende Aussagen äquivalent.

1. U ist ein Normalteiler.
2. $gUg^{-1} = U$ für jedes $g \in G$.
3. $G/U = U\backslash G$.

Falls diese Bedingungen erfüllt sind, schreibt man für jedes $g \in G$ auch

$$g \bmod U := gU = Ug$$

Beweis. Zu (i). Betrachten wir die Operation

$$U \times G \to G, (u, g) \mapsto ug,$$

von U auf G durch Linkstranslationen. Das Orbit von $g \in G$ bei dieser Operation ist gerade

$$O(g) = \{ug \mid u \in U\} = Ug$$

die Rechtsnebenklasse von g modulo U. Da Orbits identisch oder disjunkt sind (nach Bemerkung (v) von 1.1.14), gilt dies auch für Rechtsnebenklassen. Die Analoge Aussage für Linksnebenklassen erhält man durch Betrachtung der Rechtsoperation

$$G \times U \to G, (g, u) \mapsto gu,$$

von U auf G durch Rechtstranslationen.

Zu (ii). Die Abbildung

$$U \to Ug, u \mapsto ug,$$

ist wohldefiniert und bijektiv: die inverse Abbildung ist durch $u \mapsto ug^{-1}$ gegeben. Analog ist

$$U \to gU, u \mapsto gu,$$

bijektiv. Also laßt sich jede Nebenklasse modulo U bijektiv auf U abbilden. Also lassen sich je zwei Nebenklassen modulo U bijektiv aufeinander abbilden.

Zu (iii). $1 \Rightarrow 2$. Nach Voraussetzung gilt

(1) $$gUg^{-1} \subseteq U \text{ für jedes } g \in G.$$

Insbesondere gilt (1) auch für g^{-1} anstelle von g, d.h. es ist

$$g^{-1}Ug \subseteq U.$$

Multiplikation von links mit g und von rechts mit g^{-1} liefert

$$U \subseteq gUg^{-1},$$

d.h. es gilt in (1) sogar das Gleichheitszeichen.

$1 \Leftarrow 2$. trivial.

$2 \Rightarrow 3$. Nach Voraussetzung gilt $gUg^{-1} = U$ für jedes $g \in G$. Multiplikation von rechts mit g liefert

$$gU = Ug,$$

d.h. die Menge der Linksnebenklassen ist gleich der Menge der Rechtsnebenklassen.

$3 \Rightarrow 2$. Nach Voraussetzung gibt es für jedes $g \in G$ ein $g' \in G$ mit

$$gU = Ug'.$$

Durch Multiplikation von rechts mit g^{-1} folgt

$$gUg^{-1} = Ug'g^{-1}.$$

Rechts steht eine Rechtsnebenklasse, die das Element e enthält. Das ist aber auch der Fall für die Rechtsnebenklasse $Ue = U$. Also steht auf der rechten Seite U,

$$gUg^{-1} = U.$$

Dies gilt für jedes $g \in G$, d.h. es gilt 2.
QED.

1.3.2 Satz von Lagrange

Seien G eine endliche Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist die Ordnung von U ein Teiler der Ordnung von G.
Genauer gilt

$$\#G = \#U \cdot \#G/U = \#U \cdot \#U\backslash G.$$

Beweis. Nach 1.3.1 Bemerkung (i) ist G die disjunkte Vereinigung seiner Links-Nebenklassen, sagen wir

$$G = g_1U \vee g_2U \vee \dots \vee g_rU,\ G/U = \{ g_1U, g_2U, \dots, g_rU \}.$$

Damit ist

$$\#G = \#g_1U + \#g_2U + \dots + \#g_rU \text{ mit } r := \#G/U.$$

Nach 1.3.1 Bemerkung (ii) enthält jede Nebenklassen genau so viele Elemente wie U, d.h.

$$\#G = r \cdot \#U,\ r = \#G/U.$$

Die Aussage über die Rechtsnebenklassen wird analog bewiesen.
QED.
Bemerkung
Die Zahl

$$\#G/U = \#U\backslash G$$

heißt Index der Untergruppe U in G und wird mit

$$(G:U)$$

bezeichnet.

1.3.3 Produkte von Teilmengen

Seien G eine Gruppe und $A,B \subseteq G$ zwei Teilmengen. Wir setzen

$$A \cdot B := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

Ist $A = \{a\}$ eine einelementige Menge, so schreiben wir auch

$$aB = AB \text{ und } Ba = BA.$$

Diese Definition ist mit früheren Definitionen für Ausdrücke der Gestalt aB bzw. Ba bzw. aBc verträglich.
Bemerkungen
(i) Auf Grund des Assoziativgesetzes für die Gruppenoperation gilt für je drei Teilmenge $A,B,C \subseteq G$,

$$(AB)C = A(BC).$$

(ii) Ist A oder B ein Normalteiler von G, so gilt AB = BA.
Beweis von (ii). Sei zum Beispiel A ein Normalteiler. Dann gilt
$b^{-1}Ab = A$ für jedes $b \in B$,
also

$$Ab = bA.$$

Damit gilt aber

$$AB = \cup_{b \in B} Ab = \cup_{b \in B} bA = BA.$$

QED.

1.3.4 Die Gruppenstruktur von G/N im Fall eines Normalteilers N

Seien G eine Gruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler. Dann ist

$$G/N = N\backslash G$$

bezüglich der in 1.3.3 definierten Multiplikation von Mengen eine Gruppe. Bezüglich dieser Gruppenstruktur ist die natürliche Abbildung

$$\rho: G \to G/N,\ g \mapsto gN,$$

ein Gruppenhomomorphismus (und heißt deshalb auch natürlicher Homomorphismus). Es gilt

$$\mathrm{Ker}\ \rho = N.$$

Beweis. Für $g', g'' \in G$ gilt

(1) $$(g'N)(g''N) = g'NNg'' = g'Ng'' = g'g''N \in G/N,$$

d.h. die Multiplikation von Teilmengen definiert eine Abbildung

$$G/N \times G/N \to G/N,\ (g'N, g''N) \mapsto g'g''N.$$

Das Assoziativgesetz gilt auf Grund von Bemerkung (i) von 1.3.3. Die Menge N spielt die Rolle des neutralen Elements: für $g \in G$ gilt

$$N \cdot gN = gNN = gN$$
$$gN \cdot N = gN$$

Die Existenz des inversen Elements: für $g \in N$ gilt

$$gN \cdot g^{-1}N = gg^{-1}N = eN = N$$
$$g^{-1}N \cdot gN = g^{-1}gN = eN = N.$$

Auf Grund von (1) gilt

$$\rho(g'g'') = g'g''N = (g'N)(g''N) = \rho(g')\rho(g'').$$

Schließlich ist

$$g \in \mathrm{Ker}\ h \Leftrightarrow h(g) = h(e) \Leftrightarrow gN = eN \Leftrightarrow g \in N$$

QED.

Beispiel

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n\mathbb{Z}$ eine Untergruppe der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$ und

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\ \overline{g} := g + n\mathbb{Z} \mid g \in \mathbb{Z}\ \}$$

besteht gerade aus den Restklassen modulo n:

$\overline{g} = \overline{g'} \Leftrightarrow \overline{g} - \overline{g'} = \overline{0}$

$\Leftrightarrow \overline{g-g'} = n\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 0 \in \overline{g-g'} = g-g' + n\mathbb{Z}$ (Restkl. sind identisch oder disj.)

$\Leftrightarrow$ Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $0 = g-g' + nk$

$\Leftrightarrow$ Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $g'-g = nk$

$\Leftrightarrow g' \equiv g \pmod{n}$.

1.3.5 Normalteilereigenschaft und Gruppenstrukur

Seien G eine Gruppe, $U \subseteq G$ eine Untergruppe und

$$\rho: G \to G/U,\ g \mapsto gU,$$

die natürliche Abbildung. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.

(i) G/U besitzt eine solche Gruppenstruktur, daß ρ ein Homomorphismus ist.

(ii) U ist ein Normalteiler von G.

Die analoge Aussage gilt auch mit U\G anstelle von G/U.,

Beweis. (ii) ⇒ (i). Folgt aus 1.3.4.

(i) ⇒ (ii). Es gelte (i). Für jedes $g \in G$ gilt dann

$$gUg^{-1} \subseteq gUg^{-1}U = \rho(g)\rho(g^{-1}) = \rho(gg^{-1}) = \rho(e) = eU = U,$$

d.h.

$$gUg^{-1} \subseteq U.$$

Mit anderen Worten, U ist ein Normalteiler.

QED.

1.3.6 Der Homomorphiesatz

Seien G eine Gruppe, $N \subseteq G$ ein Normalteiler, $h: G \to G'$ ein Gruppen-Homomorphismus und

$$\rho: G \to G/N$$

der natürliche Homomorphismus. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent.

(i) $N \subseteq \operatorname{Ker} h$.

(ii) Es gibt einen Homomorphismus $\tilde{h}: G/N \to G'$ mit der Eigenschaft, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\ h\ } & G' \\ \rho\downarrow & \nearrow_{\tilde{h}} & \\ G/N & & \end{array}$$

Falls die beiden Bedingungen erfüllt sind, so gilt außerdem:

(iii) $\tilde{h}$ ist durch h eindeutig festgelegt. Es gilt $\tilde{h}(gN) = h(g)$ für jedes $g \in G$.

(iv) $\operatorname{Im} \tilde{h} = \operatorname{Im} h$.

(v) $\operatorname{Ker} \tilde{h} = \operatorname{Ker} h/N$.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i). Nach Voraussetzung gilt

$$h = \tilde{h} \circ \rho.$$

Für $g \in N$ gilt also

$$h(g) = \tilde{h}(\rho(g)) = \tilde{h}(gN) = \tilde{h}(eN).$$

Man beachte, wegen $g \in N$ gilt $g^{-1} \in N$, also $e = gg^{-1} \subseteq gN$, d.h. gN und eN haben das Element e gemeinsam, sind also identische Nebenklassen. Damit ist

$$h(g) = \tilde{h}(\rho(e)) = h(e) = e',$$

d.h.

$$g \in \operatorname{Ker}(h).$$

Zu (iii). Wir beweisen die Eindeutigkeit von $\tilde{h}$ unter der Voraussetzung, daß (ii) gilt. Wegen

$$h = \tilde{h} \circ \rho.$$

gilt für jedes $g \in G$:

$$\tilde{h}(gN) = \tilde{h}(\rho(g)) = h(g),$$

d.h. $\tilde{h}(gN)$ ist eindeutig festgelegt.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Wir haben die Existenz von $\tilde{h}$ zu beweisen. Wir definieren

$$\tilde{h}(gN) := h(g).$$

Diese Definition ist korrekt (d.h. unabhängig von der speziellen Wahl von g): mit

$$gN = g'N$$

gilt nämlich

$$g = ge \in gN = g'N,$$

d.h. $g = g'n$ für ein $n \in N$, d.h.

$$h(g) = h(g'n) = h(g')h(n) = h(g')$$

wegen $n \in N \subseteq \operatorname{Ker} h$. Damit ist $\tilde{h}$ korrekt definiert. Wir haben noch zu zeigen, $\tilde{h}$ hat alle geforderten Eigenschaften:

1. $\tilde{h}$ ist ein Homomorphismus.

2. $h = \tilde{h} \circ \rho$.

Zu 1:

$$\tilde{h}(g'N\cdot g''N) = \tilde{h}(g'g''N) = h(g'g'') = h(g')h(g'') = \tilde{h}(g'N)\,\tilde{h}(g''N).$$

Zu 2.

$$\tilde{h}(\rho(g)) = \tilde{h}(gN) = h(g).$$

Zu (iv).

$$\operatorname{Im}\tilde{h} = \{\, \tilde{h}(gN) \mid g\in G \,\} = \{\, h(g) \mid g\in G \,\} = \operatorname{Im} h.$$

Zu (v).

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\tilde{h} &= \{\, gN \mid \tilde{h}(gN) = e' \,\}\\ &= \{\, gN \mid h(g) = e' \,\}\\ &= \{\, gN \mid g\in \operatorname{Ker} h \,\}\\ &= \operatorname{Ker} h / N.\end{aligned}$$

QED.

1.3.7 Der 0-te Isomorphiesatz

Sei $h: G\to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist der zum Normalteiler

$$N := \operatorname{Ker} h$$

gehörige Homomorphismus

$$\tilde{h} : G/\operatorname{Ker} h \to G',\ gN \mapsto h(g),$$

injektiv, definiert also einen Isomorphismus

$$\tilde{h} : G/\operatorname{Ker} h \to \operatorname{Im} h,\ gN \mapsto h(g).$$

Beweis. Es gilt

$$\operatorname{Ker}\tilde{h} = \operatorname{Ker} h / \operatorname{Ker} h = \{\, gN \mid g\in N \,\} = \{N\} = \text{triviale Gruppe},$$

d.h. $\operatorname{Ker}\tilde{h}$ ist trivial, d.h. $\tilde{h}$ ist injektiv.
QED.

1.3.8 Der erste Isomorphiesatz

Seien G eine Gruppe, $N \subseteq G$ ein Normalteiler und $U\subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist

$$U\cap N$$

ein Normalteiler von U und die Abbildung

$$U/U\cap N \to UN/N,\ u\ U\cap N \mapsto uN,$$

ein Gruppen-Isomorphismus.
Beweis. Wir betrachten den natürlichen Homomorphismus

$$\rho: G \to G/N,\ g \mapsto gN.$$

Seine Einschränkung

$$h := \rho|_U : U \to G/N,\ u \mapsto uN,$$

auf die Untergruppe U ist ein Homomorphismus mit dem Bild

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(h) &= \{\, h(u) \mid u\in U\}\\ &= \{uN \mid u\in U\}\\ &= \{unN \mid u\in U,\ n\in N\}\\ &= \{\, xN \mid x\in UN \,\}\\ &= UN/N\end{aligned}$$

und dem Kern

$$\operatorname{Ker}(h) = \{u\in U \mid u\in \operatorname{Ker} h\,\} = \{u\in U \mid u\in N\,\} = U\cap N.$$

Insbesondere ist $U\cap N$ ein Normalteiler in U. Die Isomorphie-Aussage folgt jetzt aus dem 0-ten Isomorphiesatz.
QED.

1.3.9 Der zweite Isomorphiesatz

Seien G eine Gruppe und $N', N'' \subseteq G$ zwei Normalteiler mit

$$N' \subseteq N''.$$

Dann ist N”/N’ ein Normalteiler in G/N’ und die Abbildung

$$(G/N')/(N''/N') \to G/N'', \ \bar{g}(N''/N') \mapsto gN'',$$

(mit $\bar{g} := gN'$) ist ein Gruppen-Isomorphismus.

Beweis. Wir betrachten den natürlichen Homomorphismus

$$\rho: G \to G/N'', \ g \mapsto gN''.$$

Da N’ in dessen Kern N” liegt, gibt es nach dem Homomorphiesatz den Homomorphismus

$$\tilde{\rho}: G/N' \to G/N'', \ gN' \mapsto \rho(g) = gN''.$$

Mit ρ ist auch $\tilde{\rho}$ surjektiv. Für den Kern erhalten wir

$$\text{Ker } \tilde{\rho} = \text{Ker } \rho/N' = N''/N'.$$

Deshalb induziert $\tilde{\rho}$ (nach dem 0-ten Isomorphiesatz) einen Isomorphismus

$$(G/N')/\text{Ker } \tilde{\rho} \to \text{Im } \tilde{\rho} = G/N'', \text{ Restklasse von } gN' \mapsto \tilde{\rho}(gN') = \rho(g) = gN''.$$

Wegen $\text{Ker } \tilde{\rho} = N''/N'$ ist das gerade die Behauptung.

QED.

1.4. Zyklische Gruppen

1.4.1 Die Menge der zyklischen Gruppen bis auf Isomorphie

Jede zyklische Gruppe ist isomorph zu einer Gruppe der Gestalt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dabei bezeichne $\mathbb{Z}$ die additive Gruppe der ganzen Zahlen und

$$n\mathbb{Z} := \{ng \mid g \in \mathbb{Z}\}$$

den Normalteiler der durch n teilbaren ganzen Zahlen.

In einer multiplikativ geschriebenen zyklischen Gruppe $G = \langle g \rangle$ der Ordnung n gilt

1. $g'^n = e$ für jedes $g' \in G$.
2. $g^k = e \Leftrightarrow n \mid k$.

Bemerkungen

(i) Man beachte, es gilt $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

(ii) Umgekehrt sind alle additiven Gruppen der Gestalt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zyklisch,

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle 1 + n\mathbb{Z} \rangle = \{ g + n\mathbb{Z} \mid g \in \mathbb{Z} \}$$

Beweis. Sei $G = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe, d.h.

$$G = \{ g^n \mid n \in \mathbb{Z} \}.$$

Dann ist die Abbildung

$$h: \mathbb{Z} \to G, \ n \mapsto g^n,$$

ein sujektiver Homomorphismus der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$ auf die multiplikative Gruppe G,

$$h(a + b) = h(a)h(b)$$

und

$$\text{Im } h = G.$$

Auf Grund des 0-ten Isomorphiesatzes ist damit

$$\mathbb{Z}/\text{Ker } h \to G, \ g \cdot \text{Ker } h \mapsto h(g),$$

ein Isomorphismus. Es reicht also zu zeigen,

$$\text{Ker } h = n\mathbb{Z} \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}.$$

Im Fall $\text{Ker } h = \{0\}$ ist die Aussage trivial: $\text{Ker } h = 0\mathbb{Z}$. Sei also

$$\text{Ker } h \neq \{0\}.$$

Dann gibt es ein von Null verschiedenes Element

$$n \in \text{Ker } h - \{0\}.$$

Mit n liegt aber auch -n in Ker h. Wir können also annehmen,

$$n \in \mathbb{N}$$

ist eine natürliche Zahl. O.B.d.A sei n die kleinste natürliche Zahl, die in Ker h liegt,

$$n := \min \{ m \in \text{Ker } h \mid m > 0 \}.$$

Es reicht zu zeigen, daß dann

$$\text{Ker } h = n\mathbb{Z}$$

gilt. Wegen $n \in \text{Ker } h$ gilt zumindest

$$\text{Ker } h \supseteq n\mathbb{Z}.$$

Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Sei $x \in \text{Ker } h$. Wir schreiben x in der Gestalt

$$x = qn + r$$

mit ganzen Zahlen q mit

(1) $$0 \leq r < n.$$

Wegen $x \in \text{Ker } h$ und $n \in \text{Ker } h$ gilt

$$\begin{aligned} h(r) &= h(x) / h(qn) \\ &= h(x) / h(n)^q \\ &= e / e^q \\ &= e, \end{aligned}$$

d.h. $r \in \text{Ker } h$. Wegen (1) und der Minimalitätseigenschaft von n folgt $r = 0$, d.h.

$$x = qn,$$

d.h. $x \in n\mathbb{Z}$. Wir haben gezeigt, es besteht auch die umgekehrte Inklusion $\text{Ker } h \subseteq n\mathbb{Z}$.

Der zweite Teil der Behauptung ist eine direkte Übersetzung der entsprechenden (offensichtlichen) Eigenschaften von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Zum Beispiel entspricht Aussage 1 der Tatsache, daß in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ das n-fache jeden Elements gleich der Nullrestklasse ist.
QED.

1.4.2 Untergruppen zyklischer Gruppen zu vorgegebener Ordnung

Seien $n \in \mathbb{Z}$ eine natürliche Zahl und m ein Teiler von n,

$$n = q\,m \text{ für ein } q \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die Abbildung

(1) $$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ g \bmod m\mathbb{Z} \mapsto qg \bmod n\mathbb{Z},$$

ein wohldefinierter injektiver Homomorphismus.

Insbesondere besitzt die zyklische Gruppe der Ordnung n zu jedem Teiler m von n eine Untergruppe der Ordnung m.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ g \mapsto qg \bmod n\mathbb{Z}.$$

Diese Abbildung ist ein Homomorphismus,

$$\begin{aligned} h(g'+g'') &= (qg' + qg'') \bmod n\mathbb{Z} \\ &= (qg' \bmod n\mathbb{Z}) + (qg'' \bmod n\mathbb{Z}) \\ &= h(g') + h(g''). \end{aligned}$$

Berechnen wir den Kern von h. Für $g \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} g \in \text{Ker } h &\Leftrightarrow qg \bmod n\mathbb{Z} = 0 \bmod n\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow qg \cong 0 \bmod n \\ &\Leftrightarrow qm = n \mid qg \\ &\Leftrightarrow m \mid g \\ &\Leftrightarrow g \in m\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Es gilt also Ker h = m$\mathbb{Z}$. Nach dem 0-ten Isomorphiesatz ist die Abbildung

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\text{Ker } h \to \text{Im } h\ (\subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),\ g \pmod m \mapsto h(g) = qg \pmod n,$$

ein Isomorphismus, d.h. (1) ist ein injektiver Isomorphismus (wie behauptet).
QED.

1.4.3 Die Anzahl der Untergruppen einer zyklischen Gruppe

Seien G eine endliche zyklische Gruppe und m ein Teiler der Gruppenordnung

$$n := \#G.$$

Dann gibt es genau eine Untergruppe der Ordnung m von G.
Beweis. Sei

$$G = < g > = \{ g^x \mid x \in \mathbb{Z} \}\ (\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

und

$$n = m\,q.$$

Man beachte, es gilt dann

(1) $$g^x = e \Leftrightarrow n \mid x.$$

Nach 1.3.11 gibt es mindestens eine Untergruppe der Ordnung m, nämlich

$$U = < g^q >.$$

Sei jetzt U' eine beliebige Untergruppe der Ordnung m von G. Nach 1.2.5 ist U' zyklisch,

$$U' = < g^h >.$$

Als zyklische Gruppe der Ordnung m ist U' isomorph zu $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, d.h. es gilt

$$(g^h)^m = 1.$$

Wegen (1) ist damit

$$qm = n \mid hm$$

also

$$q \mid h.$$

Dann ist aber $g^h \in < g^q > = U$, also $U' \subseteq U$, also U' = U.
QED.

1.4.4 Produkte zyklischer Gruppen

Seien m und n teilerfremde ganze Zahlen,

$$ggT(m,n) = 1.$$

Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{Z}/(mn) \to \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(n),\ (a \pmod{mn}) \mapsto (a \pmod m,\ a \pmod n)$$

ein Isomorphismus.

Insbesondere ist das Produkt zweier zyklischer Gruppen mit teilerfremder (endlicher) Ordnung wieder zyklisch.
Beweis. Wir betrachten den Homomorphismus

$$h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(n),\ a \mapsto (a \pmod m,\ a \pmod n).$$

Nach dem 0-ten Isomorphiesatz reicht es zu zeigen,

1. Ker h = mn$\mathbb{Z}$.
2. Im h = $\mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(n)$.

Zu 1. Die Inklusion "$\supseteq$" ist trivial: Vielfache von mn sind durch m und durch n teilbar. Beweisen wir "$\subseteq$". Sei a$\in$ Ker h. Dann gilt

$$a \pmod m = 0 \pmod m \text{ und } a \pmod n = 0 \pmod n,$$

d.h. m | a und n | a. Da m und n teilerfremd sind, folgt

$$mn \mid a,$$

d.h. $a \in mn\mathbb{Z}$.

Zu 2. Seien $x,y \in \mathbb{Z}$ vorgegeben. Wir haben zu zeigen, es gibt ein a$\in$Z mit

$$a \pmod m = x \pmod m \text{ und } a \pmod n = y \pmod n.$$

Weil m und n teilerfremd sind, gibt es ganze Zahlen m' und n' mit

$$1 = m'm + n'n.$$

Wir setzen

$$a = m'my + n'nx.$$

Dann gilt

$$a \pmod m = n'nx \pmod m = x \pmod m$$

und

$$a \pmod n = m'my \pmod n = y \pmod m,$$

d.h. a hat die geforderten Eigenschaften.

Aternativer Beweis von 2. Anstelle elementarer Eigenschaften des größten gemeinsamen Teilers kann man zum Beweis von 2. auch den 0. Isomorphiesatz verwenden. Wegen 1. induziert h einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}/(mn) = \mathbb{Z}/\mathrm{Ker}(h) \xrightarrow{\tilde{h}} \mathrm{Im}(\tilde{h}) = \mathrm{Im}(h) \quad (\subseteq \mathbb{Z}/(m)\times\mathbb{Z}/(n)\ ).$$

Das Bild dieses Isomorphismus besteht also aus mn Elementen. Deshalb gilt

$$\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(\tilde{h}) = \mathbb{Z}/(m)\times\mathbb{Z}/(n).$$

QED.

1.5 Endlich erzeugte abelsche Gruppen, Elementarteilersatz

1.5.1 Erzeugendensysteme abelscher Gruppen

Seien A eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe und

$$\{a_i\}_{i\in I}$$

ein Erzeugendensystem von A. Dann gilt

$$A = \{ \sum_{i\in I} g_i a_i \mid g_i\in\mathbb{Z}, \text{ fast alle } g_i = 0 \}.$$

Beweis. Die Menge auf der rechten Seite ist eine Untergruppe von A, welche jedes a_i enthält.
QED.

Bemerkungen: elementare Operationen mit Erzeugendensystemen

(i) Wir denken uns im folgenden die Indexmenge I mit irgendeiner Ordnung versehen, d.h. die a_i seien in irgendeiner Reihenfolge gegeben. Die Eigenschaft, Erzeugendensystem zu sein hängt jedoch nicht von dieser Reihenfolge ab: durch Abänderung der Ordnung von I geht ein Erzeugendensystem in ein Erzeugendensystem von A über.

(ii) Ersetzt man ein a_i durch $a_i + ga_j$ mit $g\in\mathbb{Z}$ und $j\neq i$, so erhält man wieder ein Erzeugendensystem von A.

(iii) Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann bezeichnen wir mit

$$\mu(A)$$

die minimale Anzahl von Elementen, die ein Erzeugendensystem von A haben kann.

(iv) Beispiel: Ist p eine Primzahl und

$$A = \mathbb{Z}/(p) \oplus .... \oplus \mathbb{Z}/(p) \ (\text{n -mal})$$

eine direkte Summe von n Exemplaren von $\mathbb{Z}/(p)$, so gilt

$$\mu(A) = n.$$

(Beweis siehe unten).

(v) Die mininale Erzeugenzahl kann nicht größer werden, wenn man von A zu einer Faktorgruppe A/B übergeht,

$$\mu(A) \geq \mu(A/B),$$

denn aus jedem Erzeugendensystem von A erhält man durch Übergang zu den Restklassen modulo B ein Erzeugendensystem von A/B.

(vi) Seien p eine Primzahl und die Gruppe A eine direkte Summe von endlich vielen zyklischen Gruppen von p-Potenzordnung,

$$A = \mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/p^{n_r}\mathbb{Z} \text{ (alle } n_i > 0).$$

Dann ist

$$\mu(A) = r$$

gleich der Anzahl der direkten Summanden.

Beweis von (iv). Die Elemente von A lassen sich mit ganzen Zahlen $g \in \mathbb{Z}$ multiplizieren,

$$g\cdot(\bar{g}_1, ... , \bar{g}_n) = (g\bar{g}_1, ... , g\bar{g}_n),$$

wobei das Produkt Null ist, wenn g ein Vielfaches der Primzahl p ist. Das bedeutet, das Produkt hängt nicht von der ganzen Zahl g sondern nur von deren Restklasse modul p ab. Wir haben damit eine Multplikation der Elemente des Körpers

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$$

mit dem Elementen der Gruppe A definiert. Die Gruppe A wird dadurch zu einem $\mathbb{F}_p$-Vektorraum, und es gilt

$$\mu(A) = \dim_{\mathbb{F}_p} A = n.$$

QED.

Beweis von (v).

Sei

$$e_i \in A$$

das Element von A, dessen i-te Koordinate die Restklasse von 1 und dessen übrige Koordinaten Nullrestklassen sind. Dann ist jedes Element von A eine ganzzahlige Linearkombination von $e_1,...,e_r$, d.h. die e_i bilden ein Erzeugendensystem von A und es gilt

$$\mu(A) \leq r.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} A/pA &= \Big(\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/p^{n_i}\mathbb{Z}\Big)/p\cdot\Big(\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/p^{n_i}\mathbb{Z}\Big) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}/p^{n_i}\mathbb{Z}) / (p\mathbb{Z}/p^{n_i}\mathbb{Z}) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Damit ist aber auch

$$\mu(A) \geq \mu(A/pA) = r.$$

QED.

1.5.2 Die Gruppe der Relationen zu einem Erzeugendensystem

Seien A eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe und

$$a := \{a_i\}_{i\in I}$$

ein Erzeugendensystem von A. Dann ist die Menge

$$R(a) := \{ \{g_i\}_{i\in I} \mid g_i\in\mathbb{Z}, \text{ fast alle } g_i = 0, \sum_{i\in I} g_i a_i = 0 \}$$

eine abelsche Gruppe bezüglich der Operation

$$\{g'_i\}_{i\in I} + \{g''_i\}_{i\in I} := \{ g'_i + g''_i\}_{i\in I}.$$

Die Elemente von R(a) heißen Relationen von a.

Beweis. Die angegeben Operation definiert eine Abbildung

$$R(a) \times R(a) \to R(a).$$

Diese ist assoziativ, da in der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$ das Assoziativgesetz gilt. Die Familie

$$\{g_i\}_{i\in I} \text{ mit } g_i = 0 \text{ für alle } i$$

spielt die Rolle des Nullelements, die Familie

$$\{ - g_i\}_{i\in I}$$

die Rolle des Negativen von $\{g_i\}_{i\in I}$.

QED.

Bemerkungen

(i) Bezeichne $\mathbb{Z}^{(I)}$ die direkte Summe der Gruppen der Familie $\{\mathbb{Z}\}_{i\in I}$, d.h.

$$\mathbb{Z}^{(I)} = \{ \{g_i\}_{i\in I} \mid g_i\in\mathbb{Z}, \text{ fast alle } g_i = 0\}$$

mit koordinatenweiser Addition,

$$\{g'_i\}_{i\in I} + \{g''_i\}_{i\in I} := \{ g'_i + g''_i\}_{i\in I}.$$

Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{Z}^{(I)} \to A, \{g_i\}_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} g_i a_i ,$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit dem Kern R(a). Insbesondere ist

(1) $$A \cong \mathbb{Z}^{(I)}/R(a).$$

(ii) Unser Ziel ist es in diesem Abschnitt zu verschiedenen abelschen Gruppen A ein Erzeugendensystem zu finden, für welches R(a) eine möglichst einfache Gestalt besitzt. Der Isomorphismus liefert dann eine besonders einfache Beschreibung der Gruppe A.

(iii) Gruppen, die isomorph sind zu Gruppen der Gestalt $\mathbb{Z}^{(I)}$, heißen freie abelsche Gruppen

1.5.3 Das Verhalten der Gruppe R(a) bei elementaren Operationen

Seien A eine abelsche Gruppe und $a = \{a_i\}_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von A. Dann gilt:

(i) Für jede bijektive Abbildung $f: I \to I$ ist auch $a' := \{a_{f(i)}\}_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem und die Abbildung

$$f_*: R(a) \to R(a'), \{g_i\}_{i\in I} \mapsto \{g_{f(i)}\}_{i\in I},$$

ist ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

(ii) Seien $i_o, j_0 \in I$ verschieden und $g\in\mathbb{Z}$. Die Familie $a' := \{a'_i\}_{i\in I}$ entstehe aus a, indem man a_{i_0} durch $a_{i_o} + g a_{j_0}$ ersetzt, d.h.

$$a'_i := \begin{cases} a_i & \text{falls } i \neq i_o \\ a_{i_o} + g a_{j_o} & \text{falls } i = i_o \end{cases} .$$

Dann ist a' ein Erzeugendensystem und die Abbildung

$$f_*: R(a) \to R(a'),\ \{g_i\}_{i\in I} \mapsto \{g'_i\}_{i\in I},$$

mit

$$g'_i := \begin{cases} g_i & \text{falls } i \neq j_o \\ g_{j_o} - g g_{i_o} & \text{falls } i = j_o \end{cases}$$

ist ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

Beweis. Die Aussagen sind trivial. Man beachte im Fall (ii) gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I} g_i a_i &= \ldots + g_{i_o} a_{i_o} + \ldots + g_{j_o} a_{j_o} + \ldots \\ &= \ldots + g_{i_o} (a_{i_o} + g\, a_{j_o}) + \ldots + (g_{j_o} - g g_{i_o}) a_{j_o} + \ldots \\ &= \sum_{i\in I} g'_i a'_i \end{aligned}$$

QED.

Bemerkung zu Erzeugendensystemen bei Isomorphismen
Seien $h: G \to G'$ ein Isomorphismus von Gruppen und $\{g_i\}_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von G. Dann ist $\{h(g_i)\}_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von G'.

1.5.4 Elementarteilersatz

Sei A eine endlich erzeugte[4] abelsche Gruppe. Dann besitzt A ein endliches Erzeugendensystem

$$a = \{a_i\}_{i\in I},\ I = \{1,\ldots,n\},$$

mit endlich vielen Relationen

$$r_1, \ldots, r_s,\ (s \leq n),$$

so daß gilt

1. $R(a) = \langle r_1, \ldots, r_s \rangle = \mathbb{Z} r_1 + \ldots + \mathbb{Z} r_s$
2. $r_j = \{ r_{ji} \}_{i\in I}$ mit $r_{ji} = d_i \delta_{ji}$ und $d_i > 0$.
2. $d_i \mid d_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, s-1$.

Die d_i heißen Elementarteiler von A.

Die Folge der Elementarteiler hängt nur von der Gruppe A und nicht vom Erzeugendensystem a ab.
Insbesondere gilt

$$A \cong \mathbb{Z}^{n-s} \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}.$$

Bemerkung
Die letzte Isomorphie bedeutet gerade, es gibt ein Erzeugendensystem

$$e_i = (0 \bmod d_1, \ldots, 0 \bmod d_{i-1}, 1 \bmod d_i, 0 \bmod d_{i+1}, \ldots, 0 \bmod d_s)$$

---

[4] d.h. eine abelsche Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem

(i = 1, ... , s) von A mit der Eigenschaft, daß eine ganzzahlige Linearkombination genau dann gleich Null ist,

$$n_1 \cdot e_1 + n_2 \cdot e_2 + \ldots + n_s \cdot e_s = 0,$$

wenn für jedes i der i-te Koeffizient kongruent Null modulo d_i ist,

$$n_i \in d_i \mathbb{Z} \text{ für } i = 1, \ldots, s.$$

Beweis. Wir fixieren irgendein endliches Erzeugendensystem

$$a = \{a_i\}_{i \in I} \text{ von } A, I = \{1,\ldots,n\}$$

und ein Erzeugendensystem

$$r = \{r_j\}_{j \in J} \text{ von } R(a)$$

mit

$$r_j = \{r_{ji}\}_{i \in I}.$$

Das gesuchte Erzeugendensystem werden wir im wesentlichen durch elementare Operationen im Sinne von 1.5.3 aus dem gegebene Erzeugendensystem gewinnen.

Vorbemerkung 1: elementare Spaltenoperationen:
Auf Grund von 1.5.3 können wir das Erzeugendensystem a so abändern, daß sich dabei die Reihenfolge der Koordinaten der r_j in vorgegebener Weise abändert.

Außerdem können wir durch Abändern des Erzeugendensystems a erreichen, daß die r_{j,i_o} durch $r_{j,i_o} - g r_{j,j_0}$ ersetzt werden mit vorgegebenen $i_o, j_o \in I$ und $g \in \mathbb{Z}$. (mit $i_o \neq j_o$).

Mit anderen Worten, wenn wir uns die doppelt indizierte Familie

$$r := \{r_{ji}\}_{i \in I\, j \in J}$$

als Matrix vorstellen (mit eventuel überabzählbar vielen Zeilen und endlich vielen Spalten), so können wir

1. die Spalten von r permutieren.
2. ein ganzzahliges Vielfaches einer Spalte von r zu einer anderen addieren

ohne daß die Familie der r_j aufhört ein Erzeugendensystem eines R(a) zu einem endlichen Erzeugendensystem von A zu sein.

Vorbemerkung 2: elementare Zeilenoperationen:
Wir können natürlich auch die Reihenfolge der r_j abändern und ein ganzzahliges Vielfaches eines r_j zu einem anderen addieren, ohne daß die Familie der r_j aufhört, Erzeugendensystem eines R(a) zu sein. Mit anderen Worten, die oben angegebenen Operationen können wir auch mit den Zeilen von r anstelle der Spalten ausführen.

Beschreibung eines Algorithmus.

1. Falls alle $r_{ji} = 0$ sind, endet der Algorithmus: es ist dann n = s = 0. Die Zahl der Elementarteiler ist Null, R(a) = {0} ist trivial und A ist eine freie abelsche Gruppe.

2. Wir suchen in (r_{ji}) eine ganze Zahl $r_{j_o i_o} \neq 0$, deren Betrag minimal ist unter allen Beträgen aller von Null verschiedener r_{ji}. Durch Abziehen von ganzzahligen Vielfachen erreichen wir, daß alle Einträge in der j_0-ten Zeile und i_0-ten Spalte betragmäßig kleiner sind als $r_{j_o i_o}$. Wir können das Verfahren solang fortsetzen, wie wir auf diese Weise

betragskleinere von Null verschiedene Einträge gewinnen können. Nach endlich vielen Schritten finden wir einen Eintrag $r_{j_o i_o}$ mit:

a) $r_{j_o i_o}$ ist der einzige Eintrag in seiner Zeile und Spalte, der ungleich Null ist.

b) $r_{j_o i_o}$ ist betragmäßig minimal unter allen von Null verschiedenen Einträgen der "Matrix" r.

3. In der Situation von 2 können wir annehmen,

$$a = r_{j_o i_o}$$

befindet sich in der ersten Zeile und ersten Spalte von r (bezüglich einer geeigneten Ordnung von J). Falls es in r noch einen Eintrag

$$b = r_{ji}$$

gibt, der kein Vielfaches von $r_{j_o i_o}$ ist, so können wir die erste Spalte von r zur j-ten addieren und anschließend ein Vielfaches der ersten Zeile von der i-ten Zeile abziehen, so daß in der Position (j,i) ein Eintrag entsteht der betragskleiner ist als $r_{j_o i_o}$ und ungleich Null.

$$\begin{pmatrix} a & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & b & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & \dots & a & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & b & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & \dots & a & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -ga & \dots & b-ga & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Indem wir wie in 2. fortfahren erreichen wir die dort beschrieben Situation (mit verkleineten $r_{j_o i_o}$). Durch Wiederholtes Anwenden von 2 und 3 erhalten wir eine Matrix mit

a) einem Eintrag $d_1 := r_{j_o i_o} \neq 0$ in der Position (1,1)

b) Nullen in allen anderen Positionen der ersten Zeile bzw. Spalte.

c) Einträgen in allen anderen Positionen, die entweder 0 sind oder Vielfache von $d_1 = r_{j_o i_o}$.

4. In der Situation von 3 streichen wir die erste Zeile und erste Spalte und wiederholen das Verfahren mit der verbleibenden Matrix. Wir erhalten nacheinander ganze Zahlen

$$d_1 , d_2 , d_3 , \dots$$

mit

$$d_i \mid d_{i+1}$$

wobei alle weiteren Einträge r_{ji} durch alle d_i teilbar sind.

Da die Zahl der Spalten der "Matrix" r endlich ist, endet das Verfahren nach endlich vielen, sagen wir s, Schritten mit einem Gewissen Erzeugendensystem a und einer Familie von Relationen r_j mit $j \in J$ wobei gilt

$$r_j = \{ r_{ji} \}_{i \in I} \text{ mit } r_{ji} = d_j \delta_{ji} \text{ für } j = 1, \dots , s$$

und die Koordinaten aller weiteren r_j sind sämtlich Null. Insbesondere ist

$$R(a) = < r_j \mid j \in J > \; = < r_1 , \dots , r_s >.$$

Betrachten wir jetzt den surjektiven Homomorphismus

$$\varphi:\mathbb{Z}^n \to A, (g_1,...,g_n) \mapsto a_1 g_1 + ... + g_n a_n.$$

Nach Kontruktion ist

$$A \cong \mathbb{Z}^n/\mathrm{Ker}\,\varphi$$

mit

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \langle r_1,...,r_s \rangle = \mathbb{Z}r_1 + ... + \mathbb{Z}r_s = \mathbb{Z}d_1e_1 + ... + \mathbb{Z}d_se_s,$$

wobei e_i den i-ten "Einheitsvektor" bezeichne. Es folgt

$$\begin{aligned} A &\cong \mathbb{Z}^n/(\mathbb{Z}d_1e_1 + ... + \mathbb{Z}d_se_s) \\ &\cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}\oplus...\oplus\mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^{n-s} \end{aligned}$$

Beweis der Unabhängigkeit der Elementarteiler von der speziellen Wahl der Zerlegung in eine direkte Summe.

Wir haben noch die Eindeutigkeit der d_i zubeweisen. Genauer, wir haben zu zeigen, aus

(1) $$\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}\oplus...\oplus\mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^{n-s} \cong \mathbb{Z}/d'_1\mathbb{Z}\oplus...\oplus\mathbb{Z}/d'_s,\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^{n'-s'}$$
$$\text{mit } 1 < d_1|d_2|...|d_s \text{ und } 1 < d'_1|d'_2|...|d'_s$$

folgt

(2) $$n = n',\ s = s',\ d_1 = d'_1,...,d_s = d'_s,$$

Wir betrachten die Torsionsuntergruppe der abelschen Gruppe

$$A = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}\oplus...\oplus\mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^{n-s},$$

Es gilt

$$A_{tor} \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}\oplus...\oplus\mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}$$

und

$$A/A_{tor} \cong \mathbb{Z}^{n-s}.$$

Analog erhalten wir für

$$A' := \mathbb{Z}/d'_1\mathbb{Z}\oplus...\oplus\mathbb{Z}/d'_s,\mathbb{Z}^{n'-s'}$$

die Isomorphien

$$A_{tor} \cong \mathbb{Z}/d'_1\mathbb{Z}\oplus...\oplus\mathbb{Z}/d'_s,$$

und

$$A/A_{tor} \cong \mathbb{Z}^{n'-s'}.$$

Aus $A \cong A'$ folgt aber $A_{tor} \cong A'_{tor}$ und $A/A_{tor} \cong A'/A'_{tor}$, also insbesondere

$$\mathbb{Z}^{n-s} \cong \mathbb{Z}^{n'-s'}.$$

Indem wir uns $\mathbb{Z}^{n-s}$ in den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^{n-s}$ eingebettet denken, sehen wir, die Maximalzahl $\mathbb{Z}$-linear unabhängiger Elemente aus $\mathbb{Z}^{n-s}$ ist gleich n-s. Analog ist diese Zahl für $\mathbb{Z}^{n'-s'}$ gleich n' - s'. Also gilt

(4) $$n - s = n' - s'.$$

Damit haben wir den Eindeutigkeitsbeweis auf den Beweis der folgenden Aussage reduziert. Mit

$$\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}\oplus...\oplus\mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d'_1\mathbb{Z}\oplus...\oplus\mathbb{Z}/d'_s,\mathbb{Z}$$
$$\text{mit } 1 < d_1|d_2|...|d_s \text{ und } 1 < d'_1|d'_2|...|d'_s$$

gilt

$$n = n',\ s = s',\ d_1 = d'_1,...,d_s = d'_s,$$

Dazu beachten wir, jeder der obigen direkten Summanden hat die Gestalt

$$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \text{ mit } d = d_1,...,d_s,d'_1,...,d'_s,.$$

Ist

$$d = p_1^{n_1}\cdot...\cdot p_r^{n_r}$$

die Primfaktorzerlegung von d, so gilt

$$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(p_1^{n_1}) \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/(p_r^{n_r}).$$

Durch Einsetzen in die obigen direkten Summenzerlegungen erhalten wir Zerlegunen in zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung, wobei die auftretenden Primzahlpotenzen durch die d_i bzw. d'_j eindeutig bestimmt sind. Umgekehrt bestimmen die auftretenden Primzahlpotenzen die d_i bzw. d'_j: der größte Elementarteiler ist gerade das Produkt der höchsten Primzahlpotenzen, der zweitgrößte das der zweithöchsten, usw.
Wir haben damit den Beweis der Eindeutigkeitsaussage auf den Beweis der folgenden Implikation reduziert. Mit

$$\mathbb{Z}/(p_1^{n_1}) \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/(p_r^{n_r}) \cong \mathbb{Z}/(p'^{n'_1}_1) \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/(p'^{n'_r}_r)$$
$$\text{mit } n_i > 0 \text{ für jedes i und } n'_j > 0 \text{ für jedes j}$$

gilt

1. r = r' und
2. Die Folge der (p_i,n_i) mit i = 1,...,r ist bis auf die Reihenfolge gleich der Folge der (p'_i,n'_i), i = 1,...,r.

Mit

$$A = \mathbb{Z}/(p_1^{n_1}) \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/(p_r^{n_r}) \text{ und } A' = \mathbb{Z}/(p'^{n'_1}_1) \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/(p'^{n'_r}_r)$$

und Primzahlen p erhalten wir für die p-Torsionsuntergruppen:

$$A_p = \oplus_{p_i=p} \mathbb{Z}/(p^{n_i})$$

und

$$A_p = \oplus_{p'_i=p} \mathbb{Z}/(p^{n'_i}).$$

Mit $A \cong A'$ ist natürlich $A_p \cong A'_p$ für jede Primzahl p. Es reicht also, die obige Implikation unter der zusätzlichen Annahme zu beweisen, die alle auftretenden Primzahlen gleich sind. Genauer, es reicht die folgende Implikation zu beweisen. Mit

$$\mathbb{Z}/(p^{n_1}) \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/(p^{n_r}) \cong \mathbb{Z}/(p^{n'_1}) \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/(p^{n'_r})$$
$$\text{mit } 0 < n_1 \le ... \le n_r > 0 \text{ und } 0 < n'_1 \le ... \le n'_r,$$

gilt

1. r = r' und
2. $n_1 = n'_1, ..., n_r = n'_r$.

Wir setzen

$$A := \mathbb{Z}/(p^{n_1}) \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/(p^{n_r}) \text{ und}$$
$$A' := \mathbb{Z}/(p^{n'_1}) \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/(p^{n'_r})$$

Nach Bemerkung 1.5.1 (vi) gilt

$\mu(A) = r$ und $\mu(A') = r'$.
Wegen $A \cong A'$ ist damit aber $r = \mu(A) = \mu(A') = r'$, d.h. erste zu beweisende Identität besteht tatsächlich. Den Beweis der übrigen Identitäten führen wir durch Induktion nach r.

Im Fall r = 1 erhalten wir

$$A = \mathbb{Z}/(p^{n_1}) \text{ und } A = \mathbb{Z}/(p^{n'_1}),$$

also

$$p^{n_1} = \#A = \#A' = p^{n'_1}$$

also

$$n_1 = n'_1.$$

Behandeln wir jetzt den Fall r > 1. Dazu betrachten wir die Untergruppe

$$pA = p\mathbb{Z}/(p^{n_1}) \oplus \ldots \oplus p\mathbb{Z}/(p^{n_r}).$$

Nun hat der Homomorphismus

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},\ g \mapsto gp \bmod p^n,$$

das Bild $p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ und den Kern $p^{n-1}\mathbb{Z}$, d.h. es ist $p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}$. Die Untergruppe pA ist somit isomorph zu

$$pA \cong \mathbb{Z}/(p^{n_1-1}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(p^{n_r-1}).$$

Wir können erneut mit p multiplizieren und erhalten für $0 \le n \le n_1$ die Isomorphie

$$p^nA \cong \mathbb{Z}/(p^{n_1-n}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(p^{n_r-n}).$$

Nun ist der erste direkte Summand für $n = n_1$ gleich Null, d.h. es gilt

$$\mu(A) = \mu(pA) = \ldots = \mu(p^{n_1-1}A) > \mu(p^{n_1}A).$$

Damit können wir n_1 beschreiben als den ersten Exponenten, für den sich die Erzeugendenzahl verändert:

$$n_1 = \min \{n \in \mathbb{N} \mid \mu(p^{n-1}A) > \mu(p^nA).\}.$$

Außerdem ist

$$\delta(A) := \mu(p^{n_1-1}A) - \mu(p^{n_1}A) = \text{Anzahl der i mit } n_i = n_1$$

Insbesondere gilt

(5) $$n_1 = n'_1$$

Wir wenden jetzt die Induktionsvoraussetzung auf die Untergruppen

$$p^{n_1}A = \mathbb{Z}/(p^{n_1-n_1}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(p^{n_r-n_1}).$$

und

$$p^{n_1}A' = \mathbb{Z}/(p^{n'_1 - n_1}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(p^{n'_r, - n_1})$$

an und erhalten

$$n_1 - n_1 = n'_1 - n_1, \ldots, n_r = n'_r$$

zusammen in (5) erhalten wir Behauptung.
QED.

1.5.5 Zerlegung in direkte Summen zyklischer Gruppen von Primzahlpotenzordnung

Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gibt es (nicht notwendig verschiedene) Primzahlen $p_1,...,p_r$ und natürliche Zahlen $n_1, ... , n_r$ und s mit

$$A \cong \mathbb{Z}^s \oplus \oplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}$$

Beweis. Ergibt sich direkt aus 1.5.4 und 1.4.4.
QED.

Bemerkungen

(i) A ist genau dann endlich, wenn s = 0 ist, und es gilt dann

$$\#A = \prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i}$$

(ii) Die Potenzen $p_i^{n_i}$ sind durch die Elementarteiler d_i (bis auf die Reihenfolge) eindeutigbestimmt und damit durch die Gruppe A.

(iii) Umgekehrt sind die d_i durch die Potenzen $p_i^{n_i}$ festgelegt:

d_s ist das Produkt der $p_i^{n_i}$ mit n_i maximal zu gegebenen p_i und

d_{s-1} ist das Produkt der $p_i^{n_i}$ mit n_i maximal nachdem man ein maximales n_i gestrichen hat usw.

Beispiel

Wegen $12 = 2^2 \cdot 3$ sind die nachfolgend aufgezählten Gruppen bis auf Isomorphie die einzigen abelschen Gruppen der Ordnung 12.

$$\mathbb{Z}/(3)\oplus\mathbb{Z}/(2^2),\ \mathbb{Z}/(3)\oplus\mathbb{Z}/(2)\oplus\mathbb{Z}/(2),$$

Im ersten Fall hat man nur einen Elementartteiler

$$d_1 = 3\cdot 2^2 = 12$$

im zweiten Fall erhält man

$$d_2 = 3\cdot 2 = 6 \text{ und } d_1 = 2.$$

1.5.6 Untergruppen zu vorgegebener Ordnung

Seien A eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung n und m ein Teiler von n. Dann gibt es eine Untergruppe $U \subseteq A$ der Ordnung m von A.

Beweis. Nach 1.5.5 können wir annehmen, es ist

$$A = \oplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z} \text{ mit } n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i}.$$

Dann hat m die Gestalt

$$m = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i} \text{ mit } m_i \le n_i \text{ für jedes } i.$$

Es reicht deshalb zu zeigen, $\mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}$ hat eine Untergruppe U_i der Ordnung $p_i^{m_i}$ (die direkte Summe der U_i ist dann eine Untergruppe der gesuchten Ordnung). Wir können also annehmen

$$A = \mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}\ ,\ n = p^a\ ,\ m = p^b \text{ mit } b \le a.$$

Dann gilt aber die Behauptung auf Grund von 1.4.2.
QED.

1.6 Sylow-Gruppen

1.6.1 p-Gruppen, p-Untergruppen und Sylow-Untergruppen

Sei p eine Primzahl. Eine p-Gruppe ist eine endliche Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von p ist.

Sei G eine Gruppe. Ein p-Untergruppe von G ist eine Untergruppe von G von p-Potenzordnung. Eine p-Sylow-Untergruppe von G ist eine Untergruppe

$$U \subseteq G$$

mit $\# U = p^n$, wobei p^n die höchste Potenz von p ist, die die Ordnung von G teilt,

$$p^n \mid \#G \text{ und } p^{n+1} \nmid \#G.$$

Eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt Exponent der Gruppe G, wenn für jedes $g \in G$ gilt

$$g^m = e.$$

Bemerkungen

(i) Jede endliche Gruppe $G = \{ g_1,...,g_n \}$ besitzt (mindestens einen) Exponenten. Jedes Element g_i von G erzeugt nämlich eine zyklische Untergruppe von endlicher Ordnung m_i, und es ist

$$(g_i)^{m_i} = e.$$

Mit $m = m_1 \cdot ... \cdot m_n$ gilt dann aber $g^m = e$ für jedes $g \in G$.

(ii) Wir werden die Existenz der p-Sylow-Untergruppen nachweisen. Zunächst benötigen wir aber eine Beschreibung der Orbits von Gruppenoperationen.

1.6.2 Stabilisatoren und Orbits

Seien

$$G \times M \to M, (g,m) \mapsto gm,$$

eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge M und $m \in M$ ein Element. Dann ist der Stabilisator

$$G_m = \{ g \in G \mid gm = m \}$$

von m in G eine Untergruppe und die Abbildung

$$\varphi: G/G_m \to O(m), g \mapsto gm,$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. Die Untergruppeneigenschaft des Stabilisators. Es gilt $e \in G_m$. Mit $g', g'' \in G_m$ gilt

$$(g'g'')m = g'(g''m) = g'm = m,$$

also $g'g'' \in G_m$. Mit $g \in G_m$ gilt schließlich $gm = m$, also

$$m = em = (g^{-1}g)m = g^{-1}(gm) = g^{-1}m,$$

also $g^{-1} \in G_m$.

Die Korrektheit der Definition von φ. Sei $g'G_m = g''G_m$. Wir haben zu zeigen

$$g'm = g''m.$$

Wegen $g'G_m = g''G_m$ gilt $g'' \in g'G_m$, d.h.

$$g'' = g's \text{ mit } s \in G_m.$$

Es folgt

$$g''m = (g's)m = g'(sm) = g'm.$$

Bijektivität von φ. Surjektiv ist die Abbildung nach Definition des Orbits. Zeigen wir die Injektivität. Es gelte

$$\varphi(g' G_m) = \varphi(g'' G_m).$$

Dann ist $g'm = g''m$, also

$$(g'^{-1}g'')m = g'^{-1}(g''m) = g'^{-1}(g'm) = (g'^{-1}g')m = em = m,$$

also $g'^{-1}g'' \in G_m$, also $g'' \in g'G_m$, also $g''G_m = g'G_m$.

QED.

1.6.3 Konjugationsklassen

Seien G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element. Dann heißt die Menge

$$C(g) := \{x^{-1}gx \mid x \in G\}$$

Konjugationsklasse von g in G. Die Konjugationsklasse heißt trivial, wenn sie aus nur einem Element besteht.

Bemerkungen

(i) Die Konjugationsklassen der Gruppe G sind gerade die Orbit bezüglich der Operation

$$G \times G \to G, (x, g) \mapsto xgx^{-1},$$

von G auf sich durch innere Automorphismen.

(ii) Die Konjugationsklasse des Elements $g \in G$ ist genau dann trivial, wenn g im Zentrum

$$C(G) := \{g \in G \mid xg = gx \text{ für } x \in G\}$$

der Gruppe G liegt.

1.6.4 Die Klassenformel

Sei G eine endliche Gruppe mit dem Zentrum

$$C = C(G)$$

und den nicht-trivialen Konjugationsklassen

$$C_1 , \dots , C_r.$$

Dann gilt

$$\#G = \#C + \sum_{i=1}^{r} \#C_i .$$

Außerdem ist die Ordnung jeder Konjugationsklasse ein Teiler der Gruppenordnung,

$$\#C_i \mid \#G.$$

Beweis. Wir betrachten die Operation

$$G \times G \to G, (x, g) \mapsto xgx^{-1},$$

von G auf sich durch Konjugation. Seien

$$O_1,\dots,O_r,\dots,O_s$$

die Orbits dieser Operation, wobei die ersten r Orbits gerade nicht-trivialen Orbits seien, d.h. diejenigen mit mehr als einem Element. Dann gilt

$$\#G = \sum_{i=1}^{s} \#O_i = \sum_{i=r}^{r} \#O_i + \text{Anzahl der trivialen Orbits.}$$

Nach Bemerkung 1.6.3 (i) sind die nicht-trivialen Orbits aber gerade die nicht-trivialen Konjugationsklassen und nach 1.6.3(ii) ist die Anzahl der trivialen Orbits gerade die Ordnung des Zentrums. Die noch verbleibende Teilbarkeitsaussage ergibt sich aus der Tatsache, daß sich nach 1.6.2 jedes Orbit mit einer Menge der Gestalt

$$G/G_g$$

identifizieren läßt.

QED.

1.6.5 Die Existenz der p-Sylow-Untergruppen

Seien G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl, welche die Gruppenordnung teilt,

$$p \mid \#G.$$

Dann besitzt G eine p-Sylow-Untergruppe.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Gruppenordnung $n = \#G$.
Im Fall $n = 1$ ist die Aussage trivial. Falls n eine Primzahl ist, ist die Aussage ebenfalls trivial.
Nehmen wir jetzt an, die Aussage gilt für alle Gruppen mit einer Ordnung $< n$.
1. Fall: G enthält eine echte Untergruppe U mit #G/U teilerfremd zu p.

Nach Induktionsvoraussetzung besitzt U eine p-Sylow-Untergruppe. Diese ist aber auch eine p-Sylow-Untergruppe von G, d.h. eine solche existiert.

2. Fall: Jede Untergruppe U von G besitzt einen durch p teilbaren Index,

$$p \mid \#G/U.$$

Seien $C_1,...,C_r$ die nicht-trivialen Konjugationsklassen von G. Dann gilt nach der Klassenformel

$$\# G = \# C + \sum_{i=1}^{r} \# C_i .$$

Für jede Untergruppe U von G ist die Ordnung # G/U ein Vielfaches von p. Insbesondere sind die Ordnungen # G und $\# C_i$ Vielfache von p. Dasselbe muß also auch für die Ordnung des Zentrums gelten,

$$p \mid \# C.$$

Insbesondere ist das Zentrum von G nicht trivial (und abelsch). Nach 1.5.6 gibt es eine Untergruppe der Ordnung p in C(G),

$$U \subseteq C(G), \#U = p.$$

Weil U ganz im Zentrum von G liegt, ist U ein Normalteiler. Betrachten wir den natürlichen Homomorphismus

$$h: G \to G/U.$$

Sei p^n die höchste p-Potenz, die #G teilt. Dann ist p^{n-1} die höchste p-Potenz, die #G/U teilt. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine p-Sylow-Untergruppe von G/U,

$$\overline{S} \subseteq G/U, \# \overline{S} = p^{n-1}.$$

Es reicht zu zeigen,

$$S := h^{-1}(\overline{S})$$

ist eine p-Sylow-Untergruppe von G.

Aus der Untergruppeneigenschaft von $\overline{S}$ (und dem Untergruppenkriterium) ergibt sich sofort die Untergruppeneigenschaft von S. Es reicht also zu zeigen,

$$\# S = p^n.$$

Die Einschränkung des natürlichen Homomorphismus h auf S ist nach Definition von S ein surjektiver Homomorphismus

$$h': S \twoheadrightarrow \overline{S}.$$

Nach Definition von S liegt der Kern U von h ganz in S, d.h. es gilt

$$\text{Ker } h' = U.$$

Damit ist nach dem 0-ten Isomorphiesatz

$$p^{n-1} = \# \overline{S} = \# \text{ Im } h' = \# S/\text{Ker } h' = \# S/U = \# S / \#U = \#S / p.$$

Also gilt $\#S = p^n$.

QED.

1.6.6 Eigenschaften von Sylow-Untergruppen

Seien G eine endliche Gruppe und p ein Primteiler der Gruppenordnung. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Jede p-Untergruppe von G liegt ganz in einer p-Sylow-Untergruppe.

(ii) Je zwei p-Sylow-Untergruppen S und S' von G sind konjugiert, d.h. es gibt ein $g \in G$ mit $S' = gSg^{-1}$.

(iii) Für die Anzahl n der p-Sylow-Untergruppen von G gilt $n \equiv 1 \pmod p$.

Beweis. Bezeichne

$$S$$

die Menge der p-Sylow-Gruppen. Die Gruppe G operiert durch Konjugation auf S,

(1) $$G \times S \to S, (g, P) \mapsto gPg^{-1},$$

denn Konjugation mit $g \in G$ ist ein Isomorphismus von G, d.h. das Konjugierte einer p-Sylow-Gruppe von G ist wieder einer p-Sylow-Untergruppe. Wir fixieren ein Element von S, sagen wir

$$P \in S.$$

Sei

$$G_P = \{ g \in G \mid gPg^{-1} = P \}$$

der Stabilisator von P und

$$O(P) := \{gPg^{-1} \mid g \in G\}$$

das Orbit von P. Dann gilt

$$P \subseteq G_P,$$

d.h. G/G_P läßt sich mit einer Faktorgruppe von G/P identifizieren. Insbesonder ist

$$\# O(P) = \#G/G_P \mid \#G/P .$$

Die Ordnung ganz rechts ist aber teilerfremd zu p (da P eine p-Sylow-Untergruppe ist, d.h.

(2) $$\#O(P) = \#G/G_P \text{ ist teilerfremd zu p.}$$

Die Orbits der Operation (1) besitzen also eine zu p teilerfremde Ordnung.

Zu (i). Sei U eine p-Untergruppe von G. Wir können annehmen,

$$\#U > 1.$$

Die Untergruppe U operiert durch Konjugation auf dem Orbit von P,

$$U \times O(P) \to O(P), (u, gP\,g^{-1}) \mapsto ugPg^{-1}u^{-1} = (ug)P(ug)^{-1}.$$

Für jedes $x \in O(P)$ haben wir eine Bijektion

$$U/U_x \to Ux.$$

Da die Ordnung von U eine p-Potenz ist, gilt dasselbe von $\#U/U_x = \#Ux$. Die Ordnungen der Orbits von U auf O(P) sind also p-Potenzen. Wegen (2) sind diese Ordnungen aber nicht alle durch p teilbar, d.h. mindestens ein Orbit hat die 0-te p-Potenz zur Ordnung ,

$$\# Ux = 1 \text{ für mindestens ein } x \in O(P).$$

Sei $x = gPg^{-1} =: P'$ ein solches x. Dann gilt

(3) $$uP'u^{-1} = P' \text{ für jedes } u \in U.$$

also $uP' = P'u$ für jedes $u \in U$, also

(4) $$UP' = P'U.$$

Insbesondere ist

$$UP' := \{ ug \mid u \in U, g \in P' \}$$

eine Untergruppe von G:

1. $e = ee \in UP'$, d.h. $UP' \neq \emptyset$.
2. Mit $ug, u'g' \in UP'$ gilt

$$ug(u'g')^{-1} = ugg'^{-1}u'^{-1} \in UPU = UUP' \text{ (wegen (4)}$$
$$= UP'.$$

Wegen (3) ist P' ein Normalteiler in UP', und es ist

$$UP'/P' \cong P'/U \cap P',$$

d.h. die Faktorgruppe hat p-Potenzordnung. Dann hat aber auch UP' eine p-Potenzordnung. Da P' maximale p-Potenzordnung hat und ganz in UP' liegt, folgt

$$P' = UP',$$

$$\text{also } U \subseteq P'.$$

Zu (ii). Die obigen Betrachtungen kann man insbesondere für den Fall machen, wenn U eine p-Sylow-Untergruppe ist. Aus der Inklusion $U \subseteq P'$ ergibt sich dann aber, weil U maximale p-Potenzordnung hat,

$$U = P' = gPg^{-1},$$

d.h. U ist konjugiert zu der fest gewählten p-Sylow-Gruppe P.

Zu (iii). Die obigen Betrachtungen gelten auch für den Spezialfall U = P. Insbesondere gibt es ein Orbit von U = P auf O(P) mit nur einem Element,

$$Px = \{x\}.$$

Alle anderen Orbits besitzen jedoch mehr als ein Element[5]. Alle anderen Orbits haben also eine durch p teilbare Ordnung. Damit gilt

$$\#\, O(P) \cong 1 \pmod p.$$

Nach (ii) ist aber O(P) = S die Menge aller p-Sylow-Untergruppen, d.h. es gilt

$$\#\, S \cong 1 \pmod p.$$

QED.

1.6.7 Beispiel

S_5 ist von der Ordnung $5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, besitzt aber keine Untergruppe der Ordnung 15.

Beweis. Sei $H \subseteq S_5$ eine Untergruppe der Ordnung 15. Dann besitzt H Untergruppen H_3 und H_5 der Ordnungen 3 bzw. 5 (die Sylow-Untergruppen).

$$H_3 \subseteq H, H_5 \subseteq H.$$

Diese Untergruppen sind von Primzahlordnung, also zyklisch. Wir können annehmen,

$$H_5 = <(12345)>$$

und es gilt

$$H_3 = <(abc)>.$$

Der Dreierzyklus entsteht aus (12345) durch Streichen von zwei Elementen. Wir können annehmen, eins der gestrichenen Elemente ist 5, d.h.

$$\{a,b,c\} \subseteq \{1,2,3,4\}$$

1. Fall: $4 \notin \{a,b,c\}$

Wir können annehmen, (abc) = (123). Konjugation mit (12345) liefert

$$(234) \in H$$

also liegt (234)(123) = (13)(24) in H, d.h. H enthält ein Element der Ordnung 2, was nicht möglich ist.

2. Fall: $3 \notin \{a,b,c\}$

Wir können annehmen, (abc) = (124). Konjugation mit (12345) liefert

$$(235), (341) \in H$$

also liegt (124)(134) = (13)(24) in H, d.h. H enthält ein Element der Ordnung 2, was nicht möglich ist.

---

[5] Wir haben in (i) gezeigt aus # Ux = 1 mit $x = gPg^{-1} = P'$ folgt $U \subseteq P'$ (also U = P').

3. Fall: $2 \notin \{a,b,c\}$

Wir können annehmen, $(abc) = (134)$. Konjugation mit $(12345)^{-1}$ liefert

$$(523), (412) \in H$$

also liegt $(124)(134) = (13)(24)$ in H, d.h. H enthält ein Element der Ordnung 2, was nicht möglich ist.

4. Fall: $1 \notin \{a,b,c\}$

Wir können annehmen, $(abc) = (234)$. Konjugation mit $(12345)^{-1}$ liefert

$$(123) \in H$$

also liegt $(234)(123) = (13)(24)$ in H, d.h. H enthält ein Element der Ordnung 2, was nicht möglich ist.

QED.

1.7 Auflösbare Gruppen

1.7.1 Definitionen

Sei G eine Gruppe. Ein Gruppenturm von G ist eine echt absteigende Folge von Untergruppen,

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_m .$$

Dabei heißt m Länge des Turms. Eine Verfeinerung eines Gruppenturms ist ein Gruppenturm, der durch Einfügen einer endlichen Anzahl von Untergruppen entsteht zwischen schon vorhandene Gruppen.

Der Turm heißt normal oder auch Normalreihe, wenn G_{i+1} Normalteiler ist in G_i für jedes i. Eine Normalreihe heißt abelsch, wenn G_i/G_{+1} abelsch ist für jedes i. Sie heißt zyklisch, wenn G_i/G_{+1} zyklisch ist. Die Gruppen der Gestalt G_i/G_{+1} heißen Faktoren der Normalreihe.

Eine Kompositionsreihe ist eine Normalreihe, die trivial endet (d.h. $G_m = \{e\}$) und für welche est keine Normalreihe gibt, die eine (echte) Verfeinerung ist.

Eine Gruppe heißt auflösbar, wenn es eine abelsche Normalreihe gibt , die trivial endet.
Eine Gruppe heißt nilpotent, wenn es eine abelsche Normalreihe gibt, die trivial endet und die aus lauter Normalteilern von G besteht.
Seien zwei trivial endende Normalreihen gegeben.

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_r = \{e\} .$$
$$G = H_0 \supset H_1 \supset ... \supset H_s = \{e\}.$$

Diese Normalreihen heißen äquivalent, wenn gilt

1. $r = s$
2. Es gibt eine Permutation $\sigma \in S_{r-1}$ mit

$$G_i/G_{i+1} \cong H_{\sigma(i)}/H_{\sigma(i)+1}$$

für $i = 1,...,r-1$.

Eine Gruppe G heißt einfach, wenn sie nicht-trivial ist und außer G und {e} keine Normalteiler besitzt.

Bemerkungen

(i) Seien $h: G \to G'$ ein Homomorphismus und

$$G' = G'_0 \supset G'_1 \supset ... \supset G'_m$$

eine Normalreihe von G'. Dann ist

$$G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_m$$

mit $G_i := h^{-1}(G_i)$ eine Normalreihe von G. Ist die urprüngliche Reihe abelsch oder zyklisch, so gilt dasselbe auch für die neue Reihe.

(ii) Jede abelsche Normalreihe einer endlichen Gruppe besitzt eine zyklische Verfeinerung.

Beweis. Zu (i). Die Abbildung

$$\varphi: G_i \to G'_i/G'_{i+1}\ ,\ g \mapsto h(g) \bmod G'_{i+1}\ ,$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit

$$g \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow h(g) \in G'_{i+1} \Leftrightarrow g \in h^{-1}(G'_{i+1}) \Leftrightarrow g \in G\,G'_{i+1}\ ,$$

d.h. es gilt $\operatorname{Ker}\varphi = G_{i+1}$. Nach dem 0-ten Isomorphiesatz gilt

$$G_i/G_{i+1} = G_i/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi \subseteq G'_i/G'_{i+1}\ .$$

Mit der Faktorgruppe rechts ist also auch die Faktorgruppe links abelsch bzw. zyklisch.

Zu (ii): Sei

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_m$$

eine abelsche Normalreihe. Es reicht für fest vorgegebenes i zu zeigen, zwischen G_i und G_{i+1} gibt es Untergruppen H_j, sagen wir

(1) $$G_i = H_1 \supset \ldots \supset H_{n+1} = G_{i+1}$$

mit H_j/H_{j+1} zylisch für jedes j. Wir betrachten den natürlichen Homomorphismus

$$\rho: G_i \to G_i/G_{i+1}.$$

Weil G_i/G_{i+1} endlich und abelsch ist, besitzt diese Gruppe eine Zerlegung in eine direkte Summe zyklischer Gruppen,

$$G_i/G_{i+1} = Z_1 \oplus Z_2 \oplus \ldots \oplus Z_n\ ,\ Z_j \text{ zyklisch und nicht-trivial.}$$

Eigentlich besteht nur eine Isomorphie. Wir wollen der Einfachheit halber G_i/G_{i+1} mit der direkten Summe rechts identifizieren. Wir setzen

$$\overline{H}_j := \{\ (0,\ldots,0,a_j,\ldots,a_n) \in Z_1 \oplus Z_2 \oplus \ldots \oplus Z_r \mid a_j \in Z_j\ ,\ \ldots\ ,\ a_n \in Z_n\ \}$$

$$H_j := \rho^{-1}(\overline{H}_j).$$

Dann gilt (1) (wobei die Inklusionen zunächst nicht notwendig echt sind - wir werden das später sehen) und der Homomorphismus

$$\varphi: H_j \to \overline{H}_j/\overline{H}_{j+1}\ ,\ g \mapsto \rho(g) \bmod \overline{H}_{j+1}\ ,$$

ist surjektiv. Für seinen Kern gilt

$$g \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \rho(g) \in \overline{H}_{j+1} \Leftrightarrow g \in H_{j+1}\ ,$$

d.h. $\operatorname{Ker}\varphi = H_{j+1}$. Damit ist

$$H_j/H_{j+1} = H_j/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi = \overline{H}_j/\overline{H}_{j+1}.$$

Es reicht zu zeigen, die Faktorgruppe rechts ist zyklisch (und nicht-trivial, d.h. die Inklusionen in (1) sind echt). Um das zu beweisen, betrachten wir den Homomorphismus

$$\varphi_j: Z_j \to \overline{H}_j/\overline{H}_{j+1}\ ,\ a \mapsto (0,\ldots,a,0,\ldots,0) \bmod \overline{H}_{j+1},$$

wobei der Eintrag a sich in der j-ten Koordinate des n-Tupels befinden soll. Es reicht zu zeigen, diese Abbildung ist ein Isomorphismus, d.h.

1. Im $\varphi_j = \overline{H}_j/\overline{H}_{j+1}$.
2. Ker $\varphi_j = \{0\}$.

Zu 1. Jedes Element von $\overline{H}_j/\overline{H}_{j+1}$ hat die Gestalt

$$(0,...,0, a_j,...,a_n) \bmod \overline{H}_{j+1} = (0,...,0, a_{j+1},...,a_n) \bmod \overline{H}_{j+1} + (0,...,0,a_j,0,...,0) \bmod \overline{H}_{j+1}$$
$$= (0,...,0,a_j,0,...,0) \bmod \overline{H}_{j+1}$$
$$= \varphi_j (a_j)$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt dabei wegen $(0,...,0, a_{j+1},...,a_n) \in \overline{H}_{j+1}$.

Zu 2. Sei $a \in \text{Ker } \varphi_j$. Dann gilt $(0,...,a,0,...,0) \in \overline{H}_{j+1}$, also a = 0.
QED.

1.7.2 Nilpotenz der p-Gruppen

Sei G eine endliche p-Gruppe. Dann ist G nilpoten (also insbesondere auch auflösbar). Falls G nicht-trivial ist, so hat G einen nicht-triviales Zentrum.
Beweis. 1. Schritt. Falls $G \neq \{e\}$ ist, ist auch $C:=C(G) \neq \{e\}$.
Wir lassen G durch Konjugation auf sich selbst operieren,

$$G \times G \to G,\ (g,x) \mapsto gxg^{-1}$$

und schreiben G als disjunkte Vereinigung von Orbits,

(1) $$G = O(g_1) \cup ... \cup O(g_r) \text{ (disjunkte Vereinigung).}$$

Nach 1.6.2 gilt

(2) $$\#O(g_i) = [G/G_{g_i}] = \text{Teiler von } \#G = \text{p-Potenz.}$$

Wegen (1) ist die Summe dieser p-Potenzen gleich #G, also durch p teilbar,

(3) $$p \mid \sum_{i=1}^{r} \#O(g_i)$$

Ist $O(g_i)$ das Orbit des neutralen Elements, so gilt

$$\#O(g_i) = \#O(e) = \#\{geg^{-1} \mid g \in G\} = \#\{e\} = 1.$$

Es gibt also mindestens einen Summanden auf der rechten Seite von (3), der nicht durch p teilbar ist. Dann muß es aber noch einen weiteren Summanden geben, der ebenfalls nicht durch p teilbar ist. Wegen (2) ist dieser Summand gleich 1. Es gibt also ein $g \in G$ mit

$$1 = \#O(g) = \#\{xgx^{-1} \mid x \in G\},\ g \neq e,$$

d.h. es ist

$$xgx^{-1} = x \text{ für jedes } x \in G \text{ und } g \neq e,$$

d.h.

$$e \neq g \in C(G).$$

Mit anderen Worten, das Zentrum von G ist nicht trivial.
2. Schritt. Auflösbarkeit von G.
Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Gruppenordnung

$$n = \#G.$$

Im Fall n = 1 ist die Aussage trivial. Sei also n > 1. Nach dem ersten Schritt ist das Zentrum

$$C := C(G)$$

eine nicht-triviale (abelsche) Untergruppe von G,

$$\#C > 1.$$

Auf Grund der Defintion von C ist C sogar ein Normalteiler von G, d.h.

$$G/C$$

ist eine Gruppe der Ordnung

$$\#G/C = \#G / \#C < n.$$

Insbesondere ist die Ordnung von C ein Teiler der Ordnung von G, also eine p-Potenz. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine abelsche Normalreihe von G/C, die trivial endet,

$$G/C = \overline{G}_0 \supset \overline{G}_1 \supset ... \supset \overline{G}_m = \{ \overline{e} \}$$

und die aus lauter Normalteilern von G/C besteht.
Bezeichne

$$\rho: G \to G/C$$

den natürlichen Homomorphismus und sei

$$G_i = \rho^{-1}(\overline{G}_i).$$

das Urbild des Normalteilers $\overline{G}_i$. Man beachte, G_i ist ein Normalteiler von G.

Dann ist

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_m \ (= C) \supset \{e\}$$

eine abelsche Normalreihe von G, die trivial endet (nach Bemerkung (i) von 1.7.1 und wegen $C/\{e\} \cong C$ abelsch).
QED.

1.7.3 Das Schmetterlingslemma (von O. Schreier)

Seien G eine Gruppe,

$$U, V \subseteq G$$

zwei Untergruppen von G und

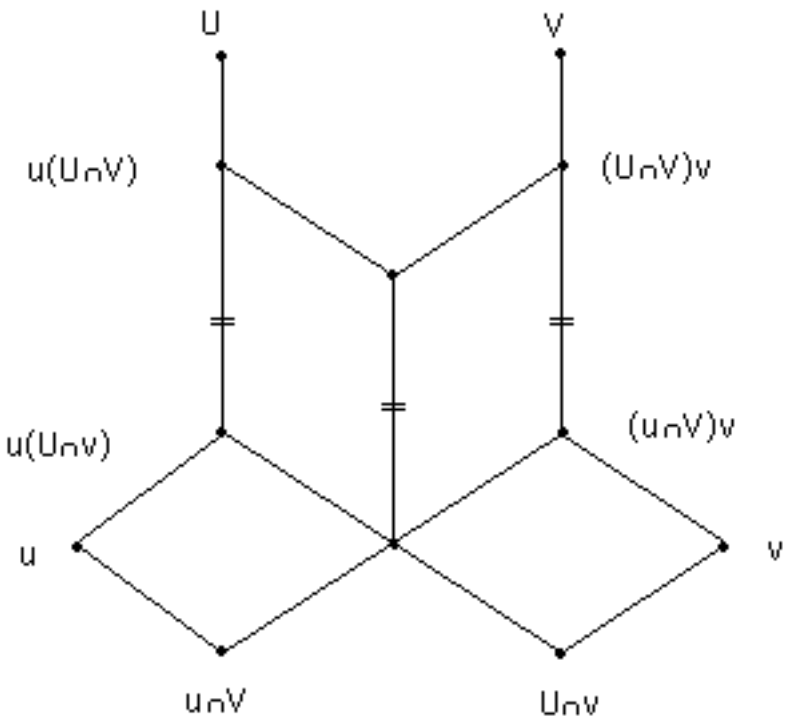
$$u \subseteq U \text{ und } v \subseteq V$$

Normalteiler in U bzw. V. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $u(U \cap v)$ ist Normalteiler in $u(U \cap V)$.
(ii) $(u \cap V)v$ ist Normalteiler in $(U \cap V)v$
(iii) Die zu (i) und (ii) gehörigen Faktorgruppen sind isomorph:

$$u(U \cap V)/ u(U \cap v) \cong (U \cap V)v/(u \cap V)v.$$

Die in der Formulierung des Lemmas auftretenden Gruppen und Faktorgruppen lassen sich durch die folgende Skitze illustrieren, von der das Lemma seinen Namen hat.


U
V
u(U∩V)
(U∩V)v
u(U∩v)
(u∩V)v
u
v
u∩V
U∩v

Beweis (nach Zassenhaus). Wir beschränken uns auf eine Beweisskitze. In der obigen Zeichnung sind U, V, u, v vorgegeben. Die gekennzeichneten Ecken sollen für die angegebenen Untergruppen stehen.

Die übrigen Ecken stehen für Untergruppen, welche durch die folgenden beiden (generell geltenden) Regeln definiert sind.

Der Schnitt von zwei Kanten, die nach unten verlaufen steht für den Durchschnitt der beiden Gruppen an deren oberen Ende.

Der Schnitt zweier Kanten, die nach oben verlaufen steht für das Produkt der beiden Gruppen an deren untern Ende (d.h. für die kleinste Untergruppe, die beide enthält).

Betrachten wir die beiden oberen Parallelogramme, die die Flügel des Schmetterlings bilden. Wir wollen zeigen, gegenüberliegende Seiten der Parallelogramme stehen für isomorphe Faktorgruppen.

Die vertikale Seite, die beiden Parallelogrammen gemeinsam ist, hat $U\cap V$ als oberes Ende und $(u\cap V)(U\cap v)$ als unteres Ende. Es gilt

$$U\cap V/ (u\cap V)(U\cap v) \cong u(U\cap V)/u(U\cap v)$$

nach dem ersten Isomorphiesatz, d.h.

$$H/H\cap N \cong HN/N$$

mit $H = U\cap V$ und $N = u(U\cap v)$. Der Faktor zur Kante in der Mitte ist somit isomoph zum Faktor der Kante links. Aus Symmetriegründen gilt dasselbe bezüglich der Kante rechts.

Damit ist der Faktor zur linken Seite isomorph zum Faktor der rechten Seite, d.h. es gilt die Behauptung.

QED.

1.7.4 Satz von Schreier

Sei G eine Gruppe. Dann lassen sich je zwei Normalreihen von G, die trivial enden, so verfeinern, daß die entstehenden Normalreihen äquivalent sind.

Beweis. Seien zwei Normalreihen der beschriebenen Art gegeben, sagen wir

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_r = \{e\} .$$
$$G = H_0 \supset H_1 \supset ... \supset H_s = \{e\}.$$

Vorbemerkung

Bei den zu konstruierenden Verfeinerungen können wir zulassen, daß benachbarte Gruppen nicht notwendig verschieden sind. Auf Grund der paarweise isomorphen Faktoren hat die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der einen Reihe die eines Gleichheitszeichens in der anderen zur Folge. Wenn wir also in der einen Reihe eine Gruppe weglassen können, so gilt dasselbe in der anderen. Nach dem Weglassen doppelt auftretender Untergruppen sind die konstruierten Reihen weiter äquivalent.

Wir setzen für $i = 1,...,r-1$ und $j = 1,..., s-1$

$$G_{ij} := G_{i+1}(H_j\cap G_i).$$

Dann gilt

$$G_{i0} = G_i \,,\; G_{ij} \supseteq G_{ij+1} \,,\; G_{is} = G_{i+1}$$

und wir erhalten die folgende Verfeinerung des ersten Gruppenturms,

$$\ldots \supseteq G_{i-1,s}\ (= G_i\ ) = G_{i0} \supseteq G_{i2} \supseteq \ldots \supseteq G_{is}\ (= G_{i+1}\ ) = G_{i+1,0} \supseteq \ldots$$

Analog setzen wir

$$H_{ji} := H_{j+1}(G_i \cap H_j)$$

und erhalten so eine Verfeinerung des zweiten Gruppenturms. Jede der beiden Verfeinerungen besteht aus (r+1)(s+1) Gruppen. Auf Grund des Schmetterlingslemmas bestehen die Isomorphismen

$$G_{ij}/G_{i,j+1} \cong H_{ji}/H_{j,i+1}\,,$$

d.h. die beiden verfeinerten Normalreihen sind äquivalent.
QED.

1.7.5 Satz von Jordan-Hölder

Sei G eine Gruppe. Dann sind je zwei Normalreihen von G, welche trivial enden und einfache Faktoren haben,

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_m = \{e\},\ G_i/G_{i+1} \text{ einfach},$$

äquivalent.
Beweis. Wegen der Einfachheit der Faktoren besitzen die Normalreihen keine Verfeinerungen, die von den Ausgangsreihen verschieden sind. Nach dem Satz von Schreier besitzen sie aber äquivalente Verfeinerungen. Also sind sie selbst schon äquivalent.
QED.

1.7.6 Beispiel: die Normalreihen von S_4

Die Gruppen in der Reihe

$$S_4 \supset A_4 \supset V_4 \supset \{\ (1),\ (12)(34)\ \} \supset \{(1)\}$$

haben die Ordnungen 24, 12, 4, 2 und 1, die sykzessiven Faktoren haben also die Ordnungen

$$2,\ 3,\ 2,\ 2,$$

d.h. sie haben Primzahlordnungen, sind also zyklisch.
Die Reihe ist ein Normalreihe:
A_4 hat den Index 2 in S_4, ist also Normalteiler.
V_4 enthält alle Doppel-Zweier-Zyklen von S_4, ist also Normalteiler in S_4, also erst recht in A_4.
Da V_4 abelsch ist, sind alle Untergruppen Normalteiler.
Insbesondere sehen wir, S_4 ist auflösbar.

Nach dem Satz von Jordan-Hölder sind die Faktoren jeder Normalreihe von S_4 mit einfachen Faktoren zyklisch von der Ordnung 2 oder 3. Es ist nicht schwer, zu zeigen, die Untergruppen von S_4 sind gerade die in 1.25 angebenen.

Der einzige Normalteiler N vom Index 2 in S_4 ist A_4. Es gilt

$$\#N = \#A_4 / 2 = 12 = 2^2 \cdot 3$$

enthält N eine 3-Sylow-Untergruppe, welche die Ordnung 3 besitzt und insbesondere zyklisch ist. Die einzigen Elemente der Ordnung 3 von S_4 sind die Dreierzyklen, d.h. U enthälten einen Dreierzyklus. Als Normalteiler enthält damit N alle 8 Dreierzyklen und damit 8 gerade Permutationen.

Wäre $N \neq A_4$, so enthielte N eine ungerade Permutation σ und die Abbildung

$$N \to N,\ x \mapsto \sigma x,$$

wäre eine Bijektion, die gerade in ungerade und ungerade in gerade Permutionen überführt, Insbesondere enthielte N genau 12/2 = 6 gerade und 6 ungerade Permutationen, was nicht möglich ist.

S_4 besitzt keine Normalteiler N vom Index 3. Angenommen doch. Dann gilt

$$\#N = \# A_4 / 3 = 8,$$

d.h. N ist eine 2-Sylow-Untergruppe. Die Zahl der Sylow-Untergruppen ist aber 3 (jede wird von V_4 und einer zyklischen Gruppe der Ordnung 4 erzeugt). Je zwei 2-Sylow-Untergruppen sind aber konjugiert, also keine Normalteiler.

Wir haben damit gezeigt, jede Normalreihe von S_4 mit einfachen Faktoren beginnt wie folgt.

$$S_4 \supset A_4.$$

Die nächste Untergruppe hat den Index 2 oder 3 in A_4, also die Ordnung 6 oder 4.
Der einzige Normalteiler N vom Index 3 in A_4 ist V_4. Es gilt

$$\#N = \#A_4/3 = 12/3 = 4.$$

Insbesondere ist N eine 2-Sylow-Untergruppe von A_4. Das gilt insbesondere für $N=V_4$, d.h. N ist konjugiert zu V_4. Weil V_4 Normalteiler ist, folgt $N = V_4$.
A_4 besitzt keine Normalteiler N vom Index 3. Angenommen doch. Dann gilt

$$\#N = 12/2 = 6.$$

Insbesondere besitzt N Sylow-Untergruppen der Ordnungen 2 und 3, und enthält somit einen Zweier-Zyklus und einen Dreier-Zyklus. Durch geeignete Wahl der Bezeichnungen können wir annehmen

$$(123) \in N,$$

Durch Konjugation mit $(12)(34) \in A_4$ ergibt sich

$$(124) \in N.$$

Damit enthält N alle Dreierzyklen der Gestalt (12k). Da diese A_4 erzeugen, folgt $N=A_4$ im Widerspruch zu #N = 6.

Damit haben wir gezeigt, jede Kompositionsreihe von S_4 hat die Gestalt

$$S_4 \supset A_4 \supset V_4 \supset U \supset \{e\}$$

mit einer Untergruppe U der Ordnung 2 von $V_4 = \{ e, a, b, c\}$. Für U gibt es die folgenden Möglichkeiten.

$$U = \langle a \rangle\ ,\ U = \langle b \rangle,\ U = \langle c \rangle.$$

Es gibt also insgesamt drei Normalreihen von S_4 mit einfachen Faktoren.

1.7.7 Beispiel: A_n ist einfach für $n \geq 5$

Die alternierende Gruppe A_n ist für $n \geq 5$ einfach. Insbesondere ist

$$S_n \supset A_n \supset \{e\} \quad (n \geq 5)$$

die einzige Normalreihe mit einfachen Faktoren. Die Gruppen S_n und A_n sind für $n \geq 5$ nicht auflösbar.

Beweis. Es reicht, die Einfachheit von A_n zu beweisen. Jede Normalreihe mit einfachen Faktoren beginnt dann nämlich wie folgt

$$S_n \supseteq N$$

mit einem Normalteiler N der Ordung 12 oder 2. Die Untergruppen der Ordnung 2 werden von einem Zweierzyklus und der identischen Abbildung gebildet und sind keine Normalteiler. Wäre N ein von A_n verschiedenener Normalteiler der Ordnung 12, so enthielte N mindestens eine ungerade Permutation. Multiplikation mit dieser überführt gerade Permutationen in ungerade und ungerade in gerade. Also besteht N zu Hälfte aus geraden und zur anderen Hälfte aus ungerade Permutationen, d.h.

$$A_n \cap N$$

wäre eine Untergruppe aus n!/4 Elementen und es wäre ein Normalteiler von A_n im Widerspruch zur Einfachheit von A_n.

Beweis der Einfachheit von A_n.

1. Schritt. Wenn ein Normalteiler N von A_n (n>2) einen Dreizyklus enthält, so gilt $N = A_n$.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen $(123) \in N$. Dann gilt auch

$$(321) = (123)^2 \in N$$

und

$$\sigma \cdot (321) \cdot \sigma^{-1} \in N \text{ für jedes } \sigma \in A_n .$$

Für $\sigma = (12)(3k)$ erhalten wir

$$(12k) \in N$$

(mit k > 3 beliebig). Die Zyklen der Gestalt (12k) erzeugen aber A_n, d.h. es gilt $N = A_n$.

2. Schritt. Abschluß des Beweises.
Sei $N \subseteq A_n$ ein von {e} verschiedener Normalteiler von A_n, Wir wollen zeigen, $N = A_n$.
Wir wählen ein

$$\tau \in N - \{e\},$$

und zwar derart, daß τ eine maximale Anzahl von Elementen von [1,n] := {1,2,...,n} in sich abbildet.

1. Fall. τ bildet genau vier Elemente [1,n] nicht in sich ab.
Wir können o.B.d.A. annehmen, die Elemente, die von τ nicht festgelassen werden, sind gerade 1, 2, 3 und 4, d.h.

$$\tau \in S_4.$$

Die einzigen geraden Permutationen von S_4, die kein Element von S_4 fest lassen sind aber die Doppel-Zweier-Zyklen (vgl. Beispiel 1.2.5)[6]. Durch geeignete Wahl der Bezeichnung können wir erreichen,

$$\tau = (12)(34).$$

Wegen $n \geq 5$ können wir τ mit (345) konjugieren und erhalten

$$\tau' = (12)(45) \in N,$$

also

$$N \ni \tau\tau' = (345).$$

Das steht aber im Widerspruch zu der Annahme des ersten Falls, daß jedes Element von N mindestens 4 Elemente nicht fest läßt.

2. Fall. τ bildet mehr als vier Elemente [1,n] nicht in sich ab.
Wir schreiben τ als Produkt von elementfremden Zyklen, wobei wir mit dem längsten Zyklus anfangen. Durch geeignete Wahl der Bezeichnungen erreichen wir,

---

[6] A_4 besteht aus den 3 Doppel-Zweier-Zyklen, alle 8 Dreierzyklen und (1).

(a) $\tau = (1234...)...$

oder, wenn der längste Zyklus ein Dreierzyklus ist,

(b) $\tau = (123)(456)...$

(c) $\tau = (123)(45)...$

oder, wenn nur Zweierzyklen vorkommen,

(d) $\tau = (12)(34)(56)...$

Wir konjugieren τ mit $\sigma = (234)$ und erhalten in den beschriebenen drei Fällen

(a) $\tau' = (1342...)...\in N$

(b) $\tau' = (134)(256)...\in N$

(c) $\tau' = (134)(25)...\in N$

(d) $\tau' = (13)(42)(56)...\in N.$

In allen drei Fällen gilt $\tau \neq \tau'$, also

$$\tau^{-1}\tau' \neq (1).$$

Im ersten und im letzten Fall gilt

$$\tau'(k) = \tau(k) \text{ für jedes } k > 4$$

also $\tau^{-1}\tau'(k) = k$ für jedes $k > 4$, d.h. $\tau^{-1}\tau'$ läßt genau 4 Elemente nicht fest, was nach dem 1. Fall nicht möglich ist. Verbleiben die Fälle (b) und (c). Es gilt

$$\tau^{-1}\tau' = (12435) \text{ im Fall (b)}$$

$$\tau^{-1}\tau' = (12436) \text{ im Fall (c).}$$

Da aber, wie eben gesehen, der Fall (a) nicht möglich ist, sind auch diese beiden Fällen nicht möglich.

3. Fall. τ bildet höchsten drei Elemente nicht in sich ab.

Dann muß τ aber genau drei Elemente nicht in sich abbilden, denn $\tau \neq (1)$ und τ kann als gerade Permutation kein Zweierzyklus sein. Also ist τ ein Dreierzyklus. Nach dem ersten Schritt gilt dann aber $N = A_n$.

QED.

2. Ringe

2.1 Definitionen und Beispiele

2.1.1 Definitionen

Ein Ring ist eine Menge R zusammen mit zwei Abbildungen

$$+: R \times R \to R,\ (r,s) \mapsto r+s,$$

$$\cdot: R \times R \to R,\ (r,s) \mapsto rs,$$

genannt Addition und Multiplikation von R, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) R ist mit der Operation eine + eine abelsche Gruppe.

(ii) Die Multiplikation ist assoziativ, d.h.

$$a(bc) = (ab)c \text{ für } a,b,c \in R.$$

(iii) Es gelten die Distributivgesetze, d.h.

$$a(b+c) = ab + ac \text{ und } (a+b)c = ac + bc \text{ für } a,b,c \in R.$$

Ein Ring-Homomorphismus ist eine Abbildung

$$h: R \to R'$$

eines Rings R in einen Ring R', welche die Addition und die Multiplikation von respektiert, d.h.

$$h(a+b) = h(a) + h(b) \text{ und } h(ab) = h(a)h(b) \text{ für } a,b \in R.$$

Im Fall R'=R sagt man auch, h ist ein Ring-Endomorphismus.

Ein Ring-Isomorphismus ist ein bijektiver Ring-Homomorphismus (dessen Umkehrung dann automatisch auch ein Ring-Homomorphismus ist). Im Fall R' = R spricht man auch von einem Ring-Automorphismus.
Der Ring heißt kommutativ, wenn gilt

$$ab = ba \text{ für beliebige } a,b \in R.$$

Ein Element e eines Rings R heißt Einselement oder einfach nur Eins und wird mit

$$e = 1$$

bezeichnet, wenn gilt

$$1 \cdot r = r \cdot 1 = r \text{ für jedes } r \in R.$$

Ein Ring mit Einselement (oder auch Ring mit 1) ist ein Ring R, welcher ein Einselement besitzt.

Ein Homomorphismus von Ringen mit 1 ist ein Ring-Homomorphismus

$$h: R \to R',$$

wobei R und R' Ringe mit 1 sind, für welchen zusätzlich gilt

$$h(1) = 1',$$

wenn 1 und 1' die Einselemente von R bzw. R' bezeichnen. Man sagt in dieser Situation auch, R' ist eine R-Algebra. (mit dem Struktur-Homomorphismus h).
Analog werden die Begriffe Isomorphismus, Endomorphismus und Automorphismus von Ringen mit 1 definiert.
Sei R ein Ring mit 1. Eine Einheit ist ein Element $e \in R$, für welches es ein Element $e' \in R$ gibt mit

$$ee' = e'e = 1.$$

Das Element e' heißt dann zu e inverses Element.
Sei R ein Ring. Ein Element $n \in R-\{0\}$ heißt Linksnullteiler, falls es ein $n' \in R - \{0\}$ gibt mit

$$nn' = 0$$

und es heißt Rechtsnullteiler, falls es ein $n' \in R - \{0\}$ gibt mit

$$n'n = 0.$$

Ein Element heißt Nullteiler, falls es Linksnullteiler oder Rechtsnullteiler ist. Ein Ring R heißt nullteilerfrei, falls es in R keine Nullteiler gibt.
Ein Integritätsbereich ist ein kommutativer und nullteilerfreier Ring mit 1. Ein Körper ist ein kommutativer Ring mit 1, indem jedes von 0 verschiedene Element eine Einheit ist.

Sei R ein Ring. Ein Teilring von R ist eine nicht-leere Teilmenge von R, die mit den Operationen von R ein Ring ist.

Bemerkungen

(i) Sind 1 und 1' Einselemente von R, so gilt

$$1 = 1 \cdot 1' = 1'.$$

(ii) Sind e' und e" zu e inverse Elemente, so gilt

$$e' = e' \cdot 1 = e'ee" = 1 \cdot e" = e".$$

(iii) Falls es zu $e \in R$ ein Linksinverse e' und ein Rechtsinverses e" gibt, d.h.

$$e'e = 1 = ee",$$

so gilt (auf Grund der Rechnung von (ii)) e' = e", d.h. e' = e" invers zu e.

2.1.2 Beispiele

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ sind Integritätsbereiche.

Jeder Körper ist ein Integritätsbereich.

2.1.3 Matrizenringe

Für jeden Ring R (mit 1) ist die Menge

$$R^{n \times n}$$

der n×n-Matrizen mit Einträgen aus R ein Ring (mit 1) bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von Matrizen. Im Fall $n > 1$ ist dieser Ring nicht kommutativ und besitzt sowohl Links- als auch Rechtnullteiler.

2.1.4 Polynomalgebren

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Dann ist die Menge

$$R[x] := \{ r_0 + r_1x^2 + ... + r_nx^n \mid r_0, r_1, ..., r_n \in R, n = 0,1,2,... \}$$

$$= \{ \sum_{i=0}^{\infty} r_ix^i \mid r_i \in R, \text{ fast alle } r_i = 0 \}$$

der Polynome in der Unbestimmten x mit Koeffizienten aus R mit den folgenden Operationen ein kommutativer Ring mit 1.

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_ix^i + \sum_{i=0}^{\infty} s_ix^i := \sum_{i=0}^{\infty} (r_i+s_i)x^i$$

$$(\sum_{i=0}^{\infty} r_ix^i)\cdot(\sum_{i=0}^{\infty} s_ix^i) := \sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{j+k=i} r_j s_k)x^i.$$

Man sagt auch R[x] entsteht aus R durch Adjunktion der Unbestimmten x.

Bemerkungen

(i) Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn alle einander entsprechenden Koeffizienten gleich sind. Man kann deshalb R[x] mit der Menge der Familien

$$\{r_i\}_{i=0}^{\infty} \text{ mit } r_i \in R \text{ und } r_i = 0 \text{ für fast alle } i$$

identifizieren.

(ii) Die r_i heißen Koeffizienten und r_0 heißt Absolutglied des Polynoms $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} r_ix^i$.

Im Fall $f \neq 0$ heißt der Index des höchsten von Null verschiedenen Koeffizienten Grad von f und wird mit

$$\deg \sum_{i=0}^{\infty} r_ix^i = \max \{ i \mid r_i \neq 0 \}$$

bezeichnet. Der Grad von $f = 0$ ist nach Vereinbarung 0.

(iii) Sei $f(x) = r_0 + r_1x^2 + ... + r_nx^n$ ein Polynom des Grades n. Dann heißt

$$l(f) := r_n$$

höchster Koeffizient von f. Es gilt

$$l(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Falls R ein Integritätsbereich ist, gilt außerdem für je zwei Polynom f und g,

$$l(fg) = l(f)\cdot l(g).$$

(iv) Ist R ein Integritätsbereich, so gilt dasselbe für R[x], denn aus $f \neq 0$ und $g \neq 0$ folgt $l(f) \neq 0$ und $l(g) \neq 0$, also $0 \neq l(f)l(g) = l(fg)$, also $fg \neq 0$.

(v) Die Abbildung

$$R \to R[x], r \mapsto r,$$

die jedem Element r von R das Polynom des Grades 0 mit dem Absolutglied r zuordnet, ist ein injektiver Ringhomomorphismus. Der Polynomring R[x] ist auf diese Weise eine Algebra über R. Wegen der Injektivität des Struktur-Homomorphismus kann man R mit dem Teilring der Polynome des Grades 0 identifizieren.

(vi) Durch wiederholtes Adjungieren von Unbestimmten, sage wir $x_1, \dots, x_n$ erhält man aus R eine Polynomalgebra in diesen Unbestimmten, welche auch mit

$$R[x_1, \dots, x_n] = R[x_1][x_2] \dots [x_n]$$

bezeichnet wird. Diese Bezeichnung betont, daß es bei der Adjunktion (bis auf Isomorphie) nicht auf die Reihenfolge der Unbestimmten ankommt. Man identifiziert alle so entstehenden Ringe und schreibt

$$R[x_1, \dots, x_n] = \{ \sum_I r_I x^I \mid r_I \in R,\ r_I = 0 \text{ für fast alle } I\}$$

Die Summation wird hier über alle n-Tupel $I = (i_1,\dots,i_n)$ nicht-negativer ganzer Zahlen erstreckt und wir benutzen hier die folgende Multi-Index-Schreibweise.

$$x^I = x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}.$$

Die Polynome der Gestalt $r_I x^I$ heißen Monome, die Zahl

$$|I| = i_1 + \dots + i_n$$

heißt ihr Grad. Der maximale Grad der Monome von $f = \sum_I r_I x^I$ mit von Nullverschiedenen Koeffizienten heißt Grad von f und wird mit

$$\deg f = \max \{ |I| : r_I \neq 0 \}.$$

bezeichnet. Das Nullpolynom hat wieder nach Vereinbarung den Grad 0. Ein Polynom heißt homogen, wenn es Summe von Monomen desselben Grades ist.

(vi) Ist

$$f(x) = \sum_I r_I x^I$$

und $a = (a_1,\dots,a_n)$ ein Tupel von Elementen aus R, so sei

$$f(a) = \sum_I r_I a^I$$

das Element von R, welches man erhält, indem man in dem Rechenausdruck $\sum_I r_I x^I$ die Unbestimmte x_i überall durch a_i ersetzt. Die so definierte Abbildung

$$R[x_1, \dots, x_n] \to R,\ f(x) \mapsto f(a),$$

ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1 und heißt Auswertungsabbildung an der Stelle a.

2.1.5 Der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen

Die Menge

$$\Gamma = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}i := \{a+bi \in \mathbb{C} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$$

ist ein Teilring des Körpers der komplexen Zahlen und heißt Ring der ganzen Gaußschen Zahlen. Als Teilring von $\mathbb{C}$ ist Γ ein Integritätsbereich. Er enthält die ganzen Zahlen als Teilring und ist eine $\mathbb{Z}$-Algebra.

2.1.6 Der Ring $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt[3]{2}+\mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})^2$

Die Menge

$$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt[3]{2}+\mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})^2 := \{a+b\sqrt[3]{2}+c(\sqrt[3]{2})^2 \in \mathbb{R} \mid a,b,c \in \mathbb{Z}\}$$

ist ein Teilring des Körpers der reellen Zahlen. Man beachte, es gilt zum Beispiel

$\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt[3]{2})^2 = 2$

$(\sqrt[3]{2})^2\cdot(\sqrt[3]{2})^2 = 2\cdot\sqrt{2}$

Als Teilring von $\mathbb{R}$ ist dies ein Integritätsbereich. Er enthält die ganzen Zahlen als Teilring und ist eine $\mathbb{Z}$-Algebra.

2.1.7 Erzeugendensysteme für Teilalgebren

Seien S ein kommutativer Ring mit 1, $R \subseteq S$ ein Teilring mit $1 \in R$ und

$$a_1,...,a_n \in S$$

endlich viele Elemente. Dann ist

$$R[a_1,...,a_n] := \{ f(a_1,...,a_n) \mid f \in R[x_1, ... , x_n] \text{ (=Polynomring)}\}$$

ein Teilring von S , welcher R als Teilring enthält (also eine R-Algebra). Es ist der kleiste Teilring von S, welcher R und die Elemente $a_1,...,a_n$ enthält und heißt deshalb die von

$$a_1,...,a_n$$

über R erzeugte Teilalgebra von S.

Ist $M \subseteq S$ eine beliebige Teilmenge von S, so ist

$$R[M] := \cup \{R[a_1,...,a_n] : a_1,...,a_n \in M, n = 1,2,3, ...\}$$

ein Teilring von S, welche R und alle Elemente von M enthält. Es ist der kleinste Teilring von S mit dieser Eigenschaft und heißt deshalb die von M über R erzeugte Teilalgebra von S.

Beispiel 1

Γ ist die von i über $\mathbb{Z}$ erzeugte Teilalgebra von $\mathbb{C}$,

$$\Gamma = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}i = \mathbb{Z}[i].$$

Beispiel 2

$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt[3]{2}+\mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})^2$ ist die von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Z}$ erzeugte Teilalgebra von $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt[3]{2}+\mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})^2 = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}].$$

Beispiel 3

Seien S kommutativer Ring mit 1, $R \subseteq S$ ein Teilring mit $1 \in R$, $\alpha \in S$ ein Element, welches Nullstelle eines normierten Polynoms

$$f(x) = x^n + r_1x^{n-1}+...+r_0 \in R[x]$$

mit Koeffizienten aus R ist (d.h. der höchst Koeffizient ist 1). In dieser Situation sagt man, α ist ganz über R. Es ist dann

$$R\cdot 1+ R\cdot\alpha + ... + R\cdot\alpha^{n-1} = R[\alpha]$$

Dabei sind zwei "Polynome des Grades <n in α" genau dann gleich, wenn einander entsprechende Koeffizienten gleich sind (d.h. $1, \alpha , ... , \alpha^{n-1}$ sind "linear unabhängig" über R)

Dieses Beispiel verallgemeinert die beiden ersten Beispiele. In Beispiel 1 ist

$$R = \mathbb{Z}, S = \mathbb{C}, f(x) = x^2+1,$$

in Beispiel 2 ist

$$R = \mathbb{Z}, S = \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2.$$

Beispiel 4

Seien R ein kommutiver Ring mit 1 und $M \subseteq R$ eine Teilmenge von R. Dann ist

$$I := \{ r_1m_1+...+r_nm_n \mid r_1,..., r_n \in R , m_1,..., m_n \in R, n = 1,2,3,... \}$$

ein Ideal von R. Es ist das kleinste Ideal von R, welches M enthält und heißt das von M erzeugte Ideal. Bezeichnung:

$$(M) = (M)R = I.$$

Im Fall $M = \{ m_1,..., m_n \}$ scheibt man auch

$$(m_1,..., m_n) = (m_1,..., m_n)R = (M).$$

2.2 Faktorringe

2.2.1 Ideale und Restklassen-Mengen

Seien R ein Ring. Ein Linksideal von ist eine nicht-leere Teilmenge I von R mit

1. $x-y \in I$ für beliebige $x,y \in I$
2. $rx \in I$ für beliebige $r \in R$ und $x \in I$

Ein Rechtsideal von R ist eine nicht-leere Teilmenge I von R mit

1. $x-y \in I$ für beliebige $x,y \in I$
2. $xr \in I$ für beliebige $r \in R$ und $x \in I$

Ein Ideal von R oder auch zweiseitiges Ideal von R ist eine Teilmenge von R, die sowohl Linksideal als auch Rechtsideal ist.

Bemerkungen

(i) Ist R kommutativ, so sind die Begriffe Linksideal, Rechtsideal und Ideal äquivalent.

(ii) Ist R ein Ring mit 1, so kann man die beiden ersten Bedingungen durch die folgende ersetzen.

1' $x+y \in I$ für beliebige $x,y \in I$

Gilt nämlich 1' und $x,y \in I$, so gilt (im Fall der Linksideale) auch $-y = (-1)y \in I$, also auch

$$x-y = x + (-y) \in I.$$

Gilt umgekehrt 1. und $x,y \in I$, so gilt auch $-y = (-1)y \in I$, also auch

$$x + y = x - (-y) \in I.$$

Analog argumentiert man im Fall der Rechtsideale.

Beispiel 1

Für jede ganze Zahl g ist $g\mathbb{Z}$ ein Ideal von $\mathbb{Z}$. Jedes Ideal von $\mathbb{Z}$ hat diese Gestalt, denn jedes Ideal ist insbesondere auch eine Untergruppe der additiven Gruppe von $\mathbb{Z}$.

Beispiel 2

Sei K ein Körper. Dann sind {0} und K die einzigen Ideale von K.

Ist nämlich I ein von {0} verschiedenes Ideal, so gibt es ein $x \in I-\{0\}$. Wegen $x^{-1} \in K$ folgt $1 \in I$, d.h. für jedes $c \in K$ gilt

$$c = c \cdot 1 \in I,$$

d.h. es gilt I = K.

Beispiel 3

Seien K ein Körper, $R = K^{n \times n}$ der Ring der n×n-Matrizen und $l \leq n$ eine natürliche Zahl. Weiter sei

$$I := \{ (a_{ij}) \in K^{n \times n} \mid a_{ij} = 0 \text{ für } j = l+1,...,n\}$$

die Menge der Matrizen, die nur in den ersten l Spalten von 0 verschiedene Einträge haben können. Dann ist I ein Linkideal, denn Multiplikation von links mit Matrizen liefert Matrizen, deren Zeilen Linearkombinationen der Zeilen der Ausgangsmatrix sind.

Analog sei

$$I' := \{ (a_{ij}) \in K^{n \times n} \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i = l+1,...,n\}$$

die Menge der Matrizen, die nur in den ersten l Zeilen von 0 verschiedene Einträge haben können. Dann ist I ein Rechtsideal.

Aufgabe: man beschreibe die zweiseitigen Ideale von $K^{n\times n}$.

Beispiel 4

Sei h: R → R' ein Ringhomomorphismus. Dann ist

$$\text{Ker } h := \{x\in R \mid h(x) = 0\}$$

ein zweiseitiges Ideal.

Wegen h(0) = 0 gilt 0∈ Ker h, d.h. Ker h ist nicht leer. Mit x,y∈ Ker h gilt

$$h(x-y) = h(x) - h(y) = 0 - 0 = 0,$$

also x-y∈ Ker h. Mit r∈R und x∈ Ker h gilt

$$h(rx) = h(r)h(x) = h(r)\cdot 0 = 0$$

und

$$h(xr) = h(x)h(r) = 0\cdot h(r) = 0$$

also rx∈ Ker h und xr ∈ Ker h.

2.2.2 Die Ringstruktur von R/I

Seien R ein Ring und I ein zweiseitiges Ideal von R. Dann gilt

(i) Die Menge

$$R/I := \{ r + I \mid r\in R \}$$

der Restklassen modulo I ist ein Ring bezüglich der Operationen

$(r + I) + (s + I) := (r+s) + I$

$(r + I) \cdot (s + I) := (r\cdot s) + I$

(ii) Die natürliche Abbildung

$$\rho: R \to R/I,\ r \mapsto r + I,$$

ist ein Ringhomomorphismus.

(iii) Ist R ein Ring mit 1, so gilt dasselbe für R/I und ρ ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1.

(iv) Ist R kommutativ, so gilt dasselbe für R/I.

Beweis. Zu (i). Mit der angegebene Addition ist R/I eine abelsche Gruppe, denn I ist ein Normalteiler der additiven Gruppe von R. Die Definition der Multiplikation von R/I ist korrekt, denn aus

$$r + I = r' + I \text{ und } s + I = s' + I$$

folgt

$$r-r'\in I \text{ und } s-s'\in I$$

also

$$rs - r's' = (r-r')s + r'(s-s') \in I$$

also

$$rs + I = r's' + I.$$

Die Ringaxiome überprüft man durch direktes Nachrechnen (bzw. unter Verwendung der Relationstreu der natürlichen Abbildung von (ii).

Zu (ii). Es gilt

$$\rho(r+s) = (r+s)+I = (r+I)+(s+I) = \rho(r) + \rho(s)$$

$$\rho(r\cdot s) = (r\cdot s)+I = (r+I)\cdot(s+I) = \rho(r) \cdot \rho(s),$$

d.h. ρ ist relationstreu. Man beachte, daraus (und aus der Surjektivität von ρ) ergeben sich die bisher noch nicht bewiesenen Ringaxiome, zum Beispiel das Assoziativitätsgesetz der Multiplikation:

$$((r+I)\cdot(s+I))\cdot(t+I) = \rho(rs)\cdot\rho(t) = \rho((rs)t) = \rho(r(st)) = \rho(r)\cdot\rho(st) = (r+I)((s+I)\cdot(t+I)).$$

Analog beweist man die Distributivgesetze, zum Beispiel:

$$(r+I)((s+I)+(t+I)) = \rho(r)\rho(s+t) = \rho(r(s+t)) = \rho(rs+rt) = \rho(rs)+\rho(rt)$$

$$= (r+I)(s+I) + (r+I)(s+I).$$

Zu (iii). Es gilt

$$(1+I)\ (r+I) = 1\cdot r + I = r+I$$

und

$$(r+I)(1+I) = r\cdot 1+ I = r+I,$$

d.h. 1+I ist ein Einselement von R.
Zu (iv). Es gilt

$$(r+I)(s+I) = rs + I = sr +I = (s+I)(r+I).$$

QED.
Beispiel
Sei K eine Körper. Dann ist der Polynomring R = K[x] nullteilerfrei, $I = x^2K[x]$ ist eine Ideal und R/I ist nicht nullteilerfrei.

Weil nämlich x nicht in I liegt, wohl aber x^2, so ist $\overline{x} := x + I$ ein von Nullverschiedenes Element von R/I. Das Quadrat jedoch,

$$\overline{x}^2 = (x+I)(x+I) = x^2 + I = I,$$

ist Null. Die Eigenschaft der Nullteilerfreiheit bleibt also nicht erhalten beim Übergang zu einem Faktorring.

2.2.3 Der Homomorphiesatz

Seien R ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und $h: R \to R'$ ein Ring-Homomorphismus und

$$\rho: R \to R/I, r + I,$$

der natürliche Homomorphismus. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) $I \subseteq \text{Ker } h$.

(ii) Es gibt einen Homomorphismus $\tilde{h}: R/I \mapsto R'$ mit der Eigenschaft, daß daas folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{h} & R' \\ \rho\downarrow & \nearrow \tilde{h} & \\ R/I & & \end{array}$$

Falls die beiden Bedingungen erfüllt sind, so gilt außerdem:

(iii) $\tilde{h}$ ist durch h eindeutig festgelegt. Es gilt $\tilde{h}(r+I) = h(r)$ für jedes $r \in R$.

(iv) $\text{Im } \tilde{h} = \text{Im } h$.

(v) $\text{Ker } \tilde{h} = \text{Ker } h/I$.
Beweis. Man benutzt dieselben Argumente wie beim Beweis des Homomorphiesatzes für Gruppen.
QED.

2.2.4 Der 0-te Isomorphiesatz

Sei $h: R \to R'$ ein Ring-Homomorphismus. Dann ist der zum Ideal

$$I := \text{Ker } h$$

gehörige Homomorphismus

$$\tilde{h} : R/\text{Ker } h \to R', g+I \mapsto h(g),$$

injektiv, definiert also einen Isomorphismus

$$\tilde{h} : G/\text{Ker } h \to \text{Im } h, gN \mapsto h(g).$$

Beweis. Vgl. den Beweis von 1.3.7.
QED.

2.2.5 Der erste Isomorphiesatz

Seien R ein Ring,, und $I \subseteq R$ ein Ideal und $S \subseteq R$ ein Teilring. Dann ist

$$I \cap S$$

ein Ideal von S und die Abbildung

$$S/S\cap I \to S+I/I, s + S\cap I \mapsto s+I,$$

ein Ring-Isomorphismus.

Beweis. vgl. 1.3.8
QED.

2.2.6 Der zweite Isomorphiesatz

Seien R ein Ring und I, J ⊆ R zwei Ideale von R mit I ⊆ J. Dann ist J/I ein Ideal von R/I und die Abbildung

$$R/J \to (R/I)/(J/I),\ r + J \mapsto (r + I) + J/I.$$

ist wohldefiniert und ein Isomorphismus von Ringen.
Beweis. vgl. 1.3.9. Die hier angegebene Abbildung ist gerade die inverse Abbildung zu der in 1.3.9.
QED.

2.2.7 Maximale Ideale und Primideale

Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und I ein echtes Ideal von R (d.h. $I \neq R$). Dann heißt I Primideal von R, wenn die folgende Implikation besteht.

$$x,y \in , xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ oder } y \in I.$$

Das Ideal I heißt maximal, wenn für jedes echte Ideal J von R die folgende Implikation besteht.

$$I \subset J \Rightarrow I = J.$$

2.2.8 Existenz maximaler Ideale

Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und I ein echtes Ideal von R. Dann gibt es ein maximales Ideal M von R mit I ⊆ M.
Beweis. Wir betrachten die Menge

$$\mathfrak{M} := \{ J \subseteq R \mid J \text{ ist echtes Ideal von R mit } I \subseteq J\}.$$

Diese Menge ist nicht leer, denn es gilt

$$I \in \mathfrak{M}.$$

Sie ist halbgeordnet bezüglich der Inklusion '⊆' von Mengen (d.h. '⊆' ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv). Es reicht zu zeigen, M besitzt ein bezüglich dieser Halbordnung maximales Element. Dazu reicht es zu zeigen, $\mathfrak{M}$ genügt den Bedingungen des Zornschen Lemmas. Sei also

(1) $$\{J_i\}_{i \in A}$$

eine linear geordnete Kette in $\mathfrak{M}$. Es reicht zu zeigen,

$$J := \cup_{i \in A} J_i$$

ist wieder ein Element von $\mathfrak{M}$. Für jedes $i \in A$ gilt

$$I \subseteq J_i \subseteq J.$$

Es reicht also zu zeigen, J ist ein echtes Ideal von R. Weil jedes der Ideale J_i echt ist, gilt

$$1 \notin J_i$$

(denn andernfalls wäre $R = R \cdot 1 \subseteq J_i$, d.h. $R = J_i$ und J_i nicht echt). Also gilt auch

$$1 \notin J.$$

Es reicht also zu zeigen, J ist ein Ideal. Seien

$$x, y \in J$$

zwei vorgegebene Elemente von J. Nach Definition von J gibt es $i,j \in A$ mit

$$x \in J_i \text{ und } y \in I_j .$$

Da (1) eine Kette ist, gilt $J_i \subseteq J_j$ oder $J_i \supseteq J_j$. O.B.d.A. bestehe die erste Inklusion. Dann gilt

$x-y \in J_j \subseteq J$

$$\text{also } x - y \in J.$$

Seien $x \in I$ und $r \in R$ vorgegeben. Dann gibt es ein $i \in A$ mit $x \in J_i$. Dann ist aber auch

$$rx = xr \in J_i \subseteq J$$

also $rx = xr \in J$. Wir haben gezeigt, J ist ein Ideal von R.
QED.

2.2.9 Charakerisierung der maximalen Ideale

Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und I ein echtes Ideal von R. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.
(i) I ist ein maximales Ideal von R.
(ii) R/I ist ein Körper.
Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $x + I$ ein von Null verschiedenes Element von R. Wir haben zu zeigen, $x + I$ besitzt ein Inverses. Da $x + I$ ungleich Null sein soll, gilt

$$x \notin I.$$

Dazu betrachten wir die Menge

$$I' := I + xR := \{ i + rx \mid i \in I, r \in R \}.$$

Diese Menge ist ein Ideal und enthält I als echte Teilmenge. Weil I maximal sein soll, folgt

$$I' = R.$$

Es gibt also ein $i \in I$ und ein $r \in R$ mit

$$i + r x = 1.$$

Damit ist aber

$$1 + I = (i + I) + (r+I)(x+I) = (r+I)(x+I).$$

Mit anderen Worten $r + I$ ist invers zu $x+I$.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei J ein Ideal von R, welches I als echte Teilmenge enthält. Wir haben zu zeigen,

$$J = R.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein Element

$$x \in J - I.$$

Dann ist die Restklasse $x + I$ ungleich Null in R/I, d.h. es gibt ein zu $x+I$ inverses Element $y + I$ in R/I, d.h.

$$1 + I = (x+I)(y+I) = xy + I.$$

Insbesondere ist $1 - xy \in I \subseteq J$. Wegen $x \in J$ folgt

$$1 = (1-xy) + xy \in J.$$

Damit gilt aber auch für jedes $r \in R$,

$$r = r \cdot 1 \in J,$$

d.h. $R \subseteq J$, d.h. $R = J$.
QED.

2.2.10 Charakerisierung der Primideale

Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und I ein echtes Ideal von R. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.
(i) I ist ein Primideal von R.
(ii) R/I ist ein Integritätsbereich.
Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Weil R kommutativ mit 1 ist, gilt dasselbe für R/I. Wir haben noch zu zeigen, R/I besitzt keine Nullteiler. Seien $x + I$ und $y+I$ von Null verschiedene Elemente. Wir haben zu zeigen,

(1) $$(x+I)(y+I) = xy + I$$

ist von Null verschieden. Nach Voraussetzung gilt $x \notin I$ und $y \notin I$. Da I Primideal ist, folgt $xy \notin I$, also ist das Element (1) ungleich Null.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Seien $x,y \in R$ Element mit $xy \in I$. Wir haben zu zeigen, einer der Faktoren liegt in I. Wegen $xy \in I$ gilt in R/I.

$$(x + I)(y+I) = xy + I = I = \text{Nullelement von } R/I.$$

Weil R/I ein Integritätsbereich ist, folgt

$$x + I = I \text{ over } y+I = I,$$

d.h. $x \in I$ oder $y \in I$.

QED.

Beispiel 1

Sei R ein Integritätsbereich. Dann ist das Nullideal $(0) = \{0\}$ ein Primideal von R.

Beispiel 2.

Seien R ein Integritätsbereich und $S := R[x]$ ein Polynomring über R und $I = xS$ die Menge der Vielfachen von x. Dann ist I ein Ideal von S mit

$$S/I \cong R.$$

Insbesondere ist I ein Primideal von R. Falls R kein Körper ist, so ist I kein maximales Ideal.

Im Fall

$$R = K[x,y] \text{ und } I = (x)$$

(und K ein Körper) ist

$$K[x,y]/(x) \cong K[y],$$

d.h. (x) ist Primideal aber nicht maximales Ideal.

2.3 Quotientenringe

2.3.1 Vorbemerkung

In diesem Abschnitt wollen wir zu einen gegebenen kommutativen Ring R (mit 1) neue Ringe konstruieren, deren Elemente die Gestalt

$$\frac{a}{b} \text{ mit } a,b \in R,\ b \neq 0,$$

haben. Wir haben zu diesem Zweck vor allem die Frage zu klären, was man unter dem Symbol a/b zu verstehen hat. Wir halten zunächst fest:

(i) Für je zwei Quotienten $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ sollte auch

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$$

ein Element des betrachteten Rings sein. Mit anderen Worten, falls b und b' als Nenner auftreten, so sollte auch das Produkt bb' ein Nenner sein, d.h. die Menge der Nenner ist multiplikativ abgeschlossen.

(ii) Zwei Quotienten $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ sollten gleich sein, falls gilt ab' = a'b,

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ falls } ab' = a'b \text{ gilt.}$$

Außerdem sollte gelten

$$\frac{a}{b} = \frac{as}{bs}$$

für jeden Nenner s. Man beachte, mit $\frac{as}{bs}$ sollte auch $\frac{b}{1} \cdot \frac{as}{bs} = \frac{abs}{bs} = \frac{as}{s}$ ein Element des betrachteten Rings sein, d.h. s ist ein Nenner.

(iii) Die beiden Bedingungen von (ii) kann man zu einer Bedingung zusammenfassen:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ falls es einen Nenner s gibt mit } s(ab' - a'b) = 0.$$

(iv) Zur formalen Konstruktion der Quotienten brauchen wir die Begriffe der Äquivalenzrelation und der Äquivalenzklasse.

2.3.2 Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen

Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M ist eine Relation R auf M mit folgenden Eigenschaften.

(i) R ist reflexiv, d.h. xRx für jedes x∈M.
(ii) R ist symmetrisch, d.h. mit xRy gilt auch yRx.
(iii) R ist transitive, d.h. mit xRy und yRz gilt auch xRz.

Eine Äquivalenzklasse bezüglich der gegebenen Äquivalenzrelation R ist eine Menge der Gestalt

$$[x] = \{ y \in M \mid yRx \} \text{ mit } x \in M.$$

Diese Menge heißt auch Äquivalenzklasse des Elements x. Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich R wird mit

$$M/R = \{ [x] \mid x \in M \}$$

bezeichnet.

Beispiel 1

Die Gleichheit ist eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge. Die Äquivalenzklassen sind einelementig, d.h. man kann M/R mit M identifizieren.

Beispiel 2

Seien G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Wir definieren für Elemente g,h∈G:

$$g \sim h \text{ falls } g^{-1}h \in U.$$

Dann ist '~' eine Äquivalenzrelation auf G und die Äquivalenzklassen sind gerade die Linksnebenklassen,

$$G/\sim = G/U.$$

Analoge Aussagen gelten auch für die Rechtsnebenklassen bzw. für die Restklassen eines Rings bezüglich eines Ideals.

Beispiel 3

Die Gruppe G operiere auf der Menge M. Wir definieren für die Elemente m',m"∈M:

$$m' \sim m'' \text{ falls es ein } g \in G \text{ gibt mit } m'' = gm'.$$

Dann ist '~' eine Äquivalenzrelation auf M und die Äquivalenzklassen sind gerade die die Orbits der gegebenen Gruppenoperation..

Bemerkungen

(i) Je zwei Äquivalenzklassen sind identisch oder disjunkt.
(ii) Insbesondere ist M disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen bezüglich einer gegebenen Äquivalenzrelation.

Beweis von (i). Seien [x'] und [x"] nicht disjunkt, d.h. es existiere ein $x \in [x'] \cap [x"]$. Für jedes y∈[x'] gilt dann

$$yRx' \text{ und } x'Rx \text{ und } xRx".$$

Also gilt auch yRx", d.h. y∈[x"]. Wir haben gezeigt,

$$[x'] \subseteq [x"].$$

Die umgekehrte Inklusion folgt analog.

QED.

2.3.3 Konstruktion

Sei R ein kommutativer Ring. Eine nicht-leere Teilmenge $S \subseteq R$ heißt multiplikativ abgeschlossen, wenn die folgende Implikation besteht.

$$a \in S \text{ und } b \in S \Rightarrow ab \in S.$$

Seine R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Ein Quotient

$$\frac{a}{s} \text{ mit } a \in R \text{ und } s \in S$$

von Elementen aus R bezüglich der Nennermenge S ist definiert als die Äquivalenzklasse des Paares

$$(a,s) \in R \times S$$

in der Menge R×S bezüglich der folgenden Äquivalenzrelation '~'.

$$(a',s') \sim (a'',s'') \text{ falls es ein } t\in S \text{ gibt mit } t(a's'' - a''s') =^{7} 0.$$

Die zugehörige Menge der Äquivalenzklassen wird mit

$$S^{-1}A := A_S := \{ \frac{a}{s} \mid a\in R, s\in S \}$$

bezeichnet und heißt Quotientenring von R bezüglich S.

Bemerkungen

(i) '~' ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation.

(ii) A_S ist mit den folgenden (wohldefinierten) Operationen ein kommutativer Ring mit 1..

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} := \frac{as' + a's}{ss'}$$
$$\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$$

(iii) Die Abbildung

$$A \to A_S , a \mapsto \frac{as}{s},$$

ist unabhängig von der speziellen Wahl von s und ist ein Homomorphismus von Ringen. Sie heißt natürlicher Homomorphismus in den Quotientenring.

Beweis. Zu (i). Reflexivität: Es gilt $s(a's' - a's') = 0$, also

$$(a',s') \sim (a',s')$$

Symmetrie: Aus $(a',s') \sim (a'',s'')$ folgt $t(a's'' - a''s') = 0$ für eine $t\in S$, also auch

$$t(a''s' - a's'') = 0,$$

also $(a'',s'') \sim (a',s')$.

Transitivität: Aus $(a,s) \sim (a',s')$ und $(a',s') \sim (a'',s'')$ folgt

$$t(as' - a's) = 0$$

und

$$t'(a's'' - a''s') = 0$$

für gewisse $t,t' \in S$. Wir multiplizieren die erste Identität mit $t's''$ und die zweite mit ts und bilden die Summe. Wir erhalten

$$0 = t's''tas' - tst'a''s' = tt's'(as'' - a''s).$$

Wegen $tt's'\in S$ folgt $(a,s) \sim (a'',s'')$.

Zu (ii). Die Ringaxiome von A_S bezüglich der angegebenen Operationen sind leicht nachzuweisen und folgenen aus den Ringaxiomen von A. Wir beschränken uns hier auf den Nachweis, daß die Operationen korrekt definiert sind. Aus den Definitionen folgt dann auch, das s/s die Rolle eines Einselements in A_S spielt.

Korrektheit der Addition. Seien $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ und $\frac{a'}{s'} = \frac{b'}{t'}$. Dann gibt es Elemente $u,u'\in S$ mit

(1) $u(at - bs) = 0$

und

(2) $u'(a't' - b's') = 0.$

Wir haben zu zeigen, es gilt $\frac{as' + a's}{ss'} = \frac{bt' + b't}{tt'}$, d.h. es gibt ein $v\in S$ mit

(3) $v(as'tt' + a'stt' - bt'ss' - b'tss') = 0$

Wir multiplizieren (1) mit $u's't'$ und (2) mit uts und bilden die Summe. Wir erhalten

$$0 = uu'ats't' - uu'bss't' + uu'a't'ts - uu'b's'ts$$
$$= uu'(as'tt' + a'stt' - bt'ss' - b'tss'),$$

d.h. (3) gilt mit $v := uu'$.

---

[7] Ohne den Faktor t auf der rechten Seite dieser Identät wäre '~' im allgemeinen keine Äquivalenzrelation. Im Fall von Integritätsbereichen kann man jedoch diesen Faktor weglassen.

Korrektheit der Multiplikation. Seien $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ und $\frac{a'}{s'} = \frac{b'}{t'}$, d.h. es gebe Elemente u,u'∈S, so daß die Identitäten (1) und (2) bestehen. Wir haben zu zeigen, $\frac{aa'}{ss'} = \frac{bb'}{tt'}$, d.h. es gibt ein w∈S mit

(4) $w(aa'tt' - bb'ss') = 0$.

Wir multiplizieren (1) mit u'a't' und (2) mit ubs und bilden die Summe. Wir erhalten

$$0 = uu'ata't' - uu'b's'bs = uu'(aa'tt' - bb'ss'),$$

d.h. (4) gilt mit w = uu'.

Zu (iii). Die Relationstreue der Abbildung folgt unmittelbar aus den Definitionen der Ringoperationen von A_S. Für je zwei Elemente s,s'∈S gilt

$$as/s = as'/s'$$

(wegen s(ass' - as's) = 0), d.h. die Abbildung ist unabhängig von der speziellen Wahl von s∈S.

QED.

2.3.4 Beispiel: der volle Quotientenring, Quotientenkörper

Sei R ein kommutativer Ring. Dann ist die Menge

$$S := \{ s \in R \mid \text{für jedes } x \in R - \{0\} \text{ gilt } sx \neq 0 \}$$

der Nicht-Nullteiler von R eine multiplikativ abgeschlossene Menge. Der zugehörige Quotientenring

$$Q(R) := S^{-1}R$$

heißt voller Quotientenring.

Bemerkungen

(i) Ist R ein nullteilerfrei, so ist Q(R) ein Körper.

(ii) Der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$ ist $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$.

(iii) Für jeden Körper K ist der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X_1,...,X_n]$ gerade der Körper

$$Q(K[X_1,...,X_n]) = K(X_1,...,X_n)$$

der rationalen Funktionen mit Koeffizienten aus K.

Beweis. Zu (i). Ist R nullteilerfrei, so ist die Menge der Nicht-Nullteiler von R gerade gleich

$$S = R - \{0\},$$

d.h.

$$Q(R) = \{ \frac{a}{b} \mid a \in R, b \in R - \{0\} \}.$$

Ist $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{b}$ ungleich dem Nullelement, d.h. $a \neq 0$, so ist $\frac{b}{a}$ ein Element von Q(R), d.h. $\frac{a}{b}$ ist eine Einheit.

Zu (ii). Das gilt nach Definition von $\mathbb{Q}$.

Zu (ii). Das gilt nach Definition des Begriffs der rationalen Funktion.

QED.

2.3.5 Die Universalitätseigenschaft der Quotientenringe

Seine R ein kommutativer Ring und S⊆R eine multiplikativ abgeschlossene Menge. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) Der natürliche Homomorphismus $\rho: R \to S^{-1}R$, $r \mapsto (rs)/s$ überführt jedes Element von R in eine Einheit von $S^{-1}R$.

(ii) Für jeden Homomorphismus $h: R \to R'$ mit Werten in einem kommutativen Ring R' mit 1, der die Elemente von S in Einheiten abbildet, gibt es genau einen Homomorphismus

$$\tilde{h}: S^{-1}R \to R'$$

von Ringen mit 1 derart, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{h} & R' \\ \rho\downarrow & \nearrow \tilde{h} & \\ S^{-1}R & & \end{array}$$

Beweis. Zu (i). Für jedes $s \in S$ besitzt $\rho(s) = s^2/s$ ein Inverses, nämlich s/s^2, ist also eine Einheit.

Zu (ii). Eindeutigkeit von $\tilde{h}$. Falls $\tilde{h}$ exisitiert, so gilt für jedes Element a/s aus $S^{-1}R$:

$$h(s)\tilde{h}(a/s) = \tilde{h}(\rho(s))\,\tilde{h}(a/s) = \tilde{h}(s^2/s \cdot a/s) = \tilde{h}((as^2)/(s^2)) = \tilde{h}(\rho(a)) = h(a).$$

Das h(s) eine Einheit in R' ist, folgt

(1) $\tilde{h}(a/s) = h(s)^{-1}h(a)$.

Diese Formel zeigt, $\tilde{h}$ ist durch h eindeutig festgelegt.

Existenz von $\tilde{h}$. Wir definieren $\tilde{h}$ durch die Formel (1) und zeigen zunächst, daß diese Definition korrekt ist. Sei also

$$a/s = a'/s'.$$

Wir haben zu zeigen, dann gilt

(2) $$h(s)^{-1}h(a). = h(s')^{-1}h(a').$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $t \in S$ mit

$$t(as' - a's) = 0.$$

Wir wenden h an und erhalten

$$h(t)(h(a)h(s') - h(a')h(s)) = 0.$$

Da h(t) eine Einheit ist, können wir mit deren Inversen multiplizieren und erhalten

$$h(a)h(s') = h(a')h(s).$$

Multiplikation mit dem $h(s')^{-1}h(s)^{-1}$ liefert (2) (da R' ein kommutativer Ring ist).
QED.

2.3.6 Lokale Ringe

Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und $P \subseteq R$ ein Primideal. Dann ist

$$S := R - P$$

eine multiplikative abgeschlossene Menge und

$$R_P := S^{-1}R$$

ein Ring mit genau einem maximalen Ideal. Solche Ringe heißen lokale Ringe.
Bezeichne

$$\gamma: R \to R_P$$

den natürlichen Homomorphismus. Dann ist das maximale Ideal von R_P gleich

$$m(R_P) := PR_P \text{ (:= das von } \gamma(P) \text{ in } R_P \text{ erzeugte Ideal).}$$

Beweis. Die Multiplikativität der Menge S folgt unmittelbar aus der Primidealeigenschaft von P. Betrachten wir die Teilmenge

$$M := \{ \frac{r}{s} \mid r \in P,\ s \in S \}$$

von R_P. Diese Menge ist ein Ideal:

1. Für $\frac{r}{s}, \frac{r'}{s'} \in M$, d.h. $r,r' \in P$ und $s,s' \in S$, gilt

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs'+r's}{ss'} \in M.$$

2. Fur $\frac{r}{s} \in R_P$ und $\frac{r'}{s'} \in M$, d.h. $r \in R$, $r' \in P$, $s,s' \in S$, gilt

$$\frac{r}{s}\cdot\frac{r'}{s'}=\frac{rr'}{ss'}\in M.$$

Weiter ist M ein echtes Ideal: läge das Einselement von R_P in M, $\frac{s}{s}=\frac{r}{s}$ für ein $r\in P$ und ein $s\in S$, so gäbe es ein $t\in S$ mit $t(s^2 - rs) = 0$, d.h. $ts^2 = trs\in P$. Weil P Primideal ist und sowohl s als auch t nicht in P liegen, ist dies nicht möglich.

Zeigen wir, M ist das einzige maximale Ideal von R_P. Dazu reicht es zu zeigen, jedes echte Ideal von R_P liegt ganz in M. Sei I ein Ideal, welches nicht ganz in M liegt. Es reicht zu zeigen, I ist der ganze Ring. Weil I nicht ganz in M liegt, gibt es ein Element

$$\frac{r}{s}\in I \text{ mit } r\notin P,\ s\in S,$$

Es gilt dann $r\in R-P = S$, d.h. $\frac{s}{r}$ ist ein Element von R_P. Dann ist aber

$$\frac{s}{r}\cdot\frac{r}{s}=\frac{sr}{rs}$$

ein Element von I. Dieses Element ist aber das Einselement von R_P. Deshalb gilt $I = R_P$.
Wir haben noch zu zeigen, das maximale Ideal M wird von $\gamma(P)$ erzeugt. Für jedes $p\in P$ gilt

$$\gamma(p)=\frac{ps}{s}\in M.$$

Deshalb gilt $\gamma(P)\subseteq M$ und das von $\gamma(P)$ erzeugte Ideal liegt ganz in M,

$$PR_P \subseteq M.$$

Umgekehrt läßt sich jedes Element von M in der Gestalt

$$\frac{r}{s}=\frac{rs}{s}\cdot\frac{1}{s}=\gamma(r)\cdot\frac{1}{s}\in\gamma(r)R_P \text{ mit } r\in P,\ s\in S,$$

schreiben. Deshalb besteht auch die umgekehrte Inklusion.
QED.

Bemerkung
Der Name "lokaler Ring" kommt daher, daß man Ringe dieser Art benutzen kann, um geometrische Objekte in der Umgebung eines Punkt zu beschreiben, d.h. "lokal" zu beschreiben.

*2.4 Noethersche Ringe und Moduln

2.4.1 Moduln

Sei R ein Ring mit 1. Ein (linker unitärer) R-Modul ist eine abelsche Gruppe M zusammen mit einer Abbildung

$$R\times M \to M,\ (r,m)\mapsto rm,$$

mit
(i) $(r'r'')m = r'(r''m)$ für $r',r''\in R$ und $m\in M$
(ii) $1_R\cdot m = m$ für $m\in M$
(i) $r(m'+m'') = rm'+rm''$.
Ein Homomorphismus von R-Moduln ist eine Abbildung

$$h: M \to M'$$

eines R-Moduls M in einen R-Modul M' mit
$h(r'm'+r''m'') = r'h(m') + r''h(m'')$ für $r',r''\in R$ und $m'm''\in M$,
mit anderen Worten, h ist eine R-lineare Abbildung.
Ein Teilmodul N von M ist eine nicht-leere Teilmenge von M, welche mit den Operationen von M ein R-Modul ist.

2.4.2 Teilmodul-Kriterium

Seien R ein Ring mit 1, M ein R-Modul und N⊆M eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) N ist ein Teilmodul von M.

(ii) N ist nicht-leer und es gilt

$$r'm'+r''m' \in N \text{ für } r',r'' \in R \text{ und } m',m'' \in N.$$

Beweis. Übungsaufgabe.
QED.

2.4.3 Beispiele

Beispiel 1: Körper

Falls R ein Körper ist, so fällt der Begriff des R-Moduls mit dem Begriff des R-Vektorraumszusammen.

Beispiel 2: abelsche Gruppen

Jede (additiv geschriebene) abelsche Gruppe A ist ein $\mathbb{Z}$-Modul mit

$2 \cdot a = a+a$, $3 \cdot a = a+a+a$, usw.

$0 \cdot a = 0$

$(-1)a = -a$, $(-2)a = (-a)+(-a)$, $(-3a) = (-a)+(-a)+(-a)$ usw.

für jedes a∈A.,

Beispiel 3: Kerne und Bilder

Seien R ein Ring mit 1 und h: M → M' eine R-lineare Abbildung. Dann ist

$$\text{Ker } h := \{ m \in M \mid h(m) = 0 \}$$

ein Teilmodul von M und

$$\text{Im } h := \{ h(m) \mid m \in M \}$$

ein Teilmodul von M'.

Beispiel 4: Erzeugendensysteme

Seien R ein Ring mit 1, M ein R-Modul und U ⊆ M eine Teilmenge. Dann ist

$$\text{span} \langle U \rangle := \langle U \rangle := \sum_{u \in U} Ru := \{ r_1 u_1 + ... + r_n u_n \mid r_i \in R, u_i \in U, n = 1,2,3,... \}$$

ein Teilmodul von M. Es ist der kleinste[8] Teilmodul von M, welcher die Menge U enthält, und heißt der von U <u>erzeugte Teilmodul</u>. Die Menge U heißt dann <u>Erzeugendensystem</u> von <U>.

Beispiel 5: Faktormoduln

Seien R ein Ring mit 1, M ein R-Modul und N⊆M ein Teilmodul. Dann besitzt die Faktorgruppe

$$M/N := \{ m + N \mid m \in M \}$$

die Struktur eines R-Moduls mit

$$r(m + N) = (rm) + N.$$

M/N mit dieser R-Modul-Struktur heißt Faktormodul von M modulo N. Die natürliche Abbildung

$$M \to M/N,\ m \mapsto m + M,$$

ist R-linear.

2.4.4 Komplexe und exakte Sequenzen

Sei R ein Ring mit 1. Ein Komplex von R-Moduln ist eine (endliche oder unendliche) Folge linearer Abbildungen

$$... \to M_n \xrightarrow{d^n} M_{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} M_{n+2} \to ...$$

mit $d^{n+1} \circ d^n = 0$ für alle n. Ein Komplex heitß <u>azyklisch</u> (bzw. azyklisch an der Stelle M_{n+1}), wenn

---

[8] d.h. der Durchschnitt aller Teilmoduln N⊆M mit U⊆N.

$$\text{Im } d^n = \text{Ker } d^{n+1}$$

für alle n (bzw. für das gegebene n). Statt von azyklischen Komplexen spricht man auch von exakten Sequenzen.

Bemerkungen

(i) Ein endlicher Komplex kann zu einem unendliche ergänzt werden, indem lauter 0-Moduln und 0-Abbildungen hinzufügt. Endliche Komplexe können also als spezielle unendliche Komplexe aufgefaßt werden. Wir betrachten deshalb im folgenden oft nur noch (in beiden Richtungen) unendliche Komplexe.

(ii) Ein Komplex heißt nach oben beschränkt, wenn es ein n_0 gibt mit

$$M_n = 0 \text{ für } n_0 \leq n.$$

(iii) Ein Komplex heißt nach unten beschränkt, wenn es ein n_0 gibt mit

$$M_n = 0 \text{ für } n \leq n_0.$$

Beispiel 1: kurze exakte Sequenzen

Sei R ein Ring mit 1 und sei ein Komplex von R-Moduln der folgenden Gestalt gegeben.

(1) $$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0.$$

Der Komplex ist exakt an der Stelle M' genau dann, wenn f injektiv ist.
Der Komplex ist exakt an der Stelle M", wenn g surjektiv ist.
Ein azyklischer Komplex der Gestalt (1) heißt auch kurze exakte Sequenz.

Beispiel 2

Seien R ein Ring mit 1, M ein R-Modul und N ein Teilmodul. Dann ist

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\rho} M/N \to 0$$

ein kurze exakte Sequenz. Dabei sei

$$i: N \to M,\ n \mapsto n,$$

die natürliche Einbettung und

$$\rho: M \to N/N,\ m \mapsto m+M,$$

die natürliche Abbildung auf den Faktormodul.

Beispiel 3

Seien R ein Ring mit 1 und M', M" zwei R-Moduln. Dann ist

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M' \oplus M'' \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

mit f(m') = (m',0) und g(m',m") = m" eine kurze exakte Sequenz.

2.4.5 Noethersche Moduln und Ringe

Seien R ein Ring mit 1 und M ein R-Modul. Dann heißt M noethersch, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

(i) Jeder Teilmodul von M ist endlich erzeugt, d.h. besitzt ein endliches Erzeugendensystem.

(ii) Jede aufsteigende Kette von Teilmoduln

$$M_0 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq \ldots$$

von M ist stationär, d.h. von einem bestimmten n ab gilt das Gleichheitszeichen.

(iii) Jede Familie $\{M_i\}_{i \in I}$ von Teilmoduln von M besitzt ein bezüglich $\subseteq$ maximales Element, d.h. ein M_i, daß in keinem Teilmodul der Familie echt enthalten ist.

Der Ring R heißt noethersch, wenn er als Modul über sich selbst noethersch ist, d.h. jedes Ideal von R ist endlich erzeugt.

Beweis der Äquivalenz der angegebenen Bedingungen.

(i) ⇒ (ii). Die Menge

$$M := \cup_{n=0}^{\infty} M_n$$

ist ein Teilmodul von M und als solcher endlich erzeugt. Sei

$$U = \{m_1, \ldots, m_r\}$$

ein Erzeugendensystem von M. Dann liegt jedes m_i in einem M_n, und da die Zahl der m_i endlich ist, gibt es ein n mit

$$m_1, \ldots, m_r \in M_n.$$

Dann gilt aber

$$M \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq M,$$

d.h. von der hier gefundenen Stelle n gilt das Gleichheitszeichen.

(ii) ⇒ (iii). Sei $\mathfrak{M}$ eine Familie von Teilmoduln von M. Angenommen $\mathfrak{M}$ besitzt kein maximales Element. Wir wählen ein $M_1 \in \mathfrak{M}$. Dann ist M_1 nicht maximal in $\mathfrak{M}$, d.h. es gibt ein $M_2 \in \mathfrak{M}$, welches M_1 echt enthält. Aber auch M_2 ist kein maximales Element von $\mathfrak{M}$. Indem wir an der angegebenen Weise fortfahren erhalten wir eine echt aufsteigende Kette

$$M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq \ldots$$

von Teilmoduln von M, die insbesondere nicht stationär ist. Das ist ein Widerspruch zu (ii). Also gilt (iii).

(iii) ⇒ (i). Angenommen, es gibt einen Teilmodul N von M, welcher nicht endlich erzeugt ist. Sei $\mathfrak{M}$ die Familie der endlich erzeugten Teilmoduln von N. Nach Voraussetzung (iii) gibt es in $\mathfrak{M}$ ein maximales Element, sagen wir

$$N' = Rn_1 + \ldots + Rn_r \subseteq N.$$

Da N' endlich erzeugt ist, gilt $N' \neq N$. Es gibt also ein Element

$$n_{r+1} \in N - N'.$$

Insbesondere ist

$$N'' := Rn_1 + \ldots + Rn_{r+1}$$

ein endlich erzeugter Teilmodul von N und enthält N' also echte Teilmenge. Das steht aber im Widerspruch zur Maximalität von N'. Also gilt (i).

QED.

Beispiel 1

Endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper sind noethersch.

Beispiel 2

Jedes Ideal von $\mathbb{Z}$ hat die Gestalt $n\mathbb{Z}$, ist also endlcih erzeugt. Mit anderen Worten, $\mathbb{Z}$ ist ein noetherscher Ring.

2.4.6 Noethersche Moduln und kurze exakte Sequenzen

Seien R ein Ring mit 1 und

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) M ist noethersch.

(ii) M' und M'' sind noethersch.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Nach Voraussetzung ist f injektiv, wir können also M' mit einem Teilmodul von M identifizieren. Jede aufsteigende Kette von Teilmoduln in M' ist dann auch eine aufsteigende Kette von Teilmoduln in M, also stationär. Insbesondere ist

M' noethersch.

Sei jetzt $\{M_i''\}_{i=1,2,3,...}$ ein aufsteigende Kette von Teilmoduln von M". Weil g surjektiv ist, gilt

$$g(g^{-1}(M_i'')) = M_i'' \tag{1}$$

und die $g^{-1}(M_i'')$ bilden eine aufsteigende Kette von Teilmoduln von M. Letztere Kette ist somit stationär. Wegen (1) ist es auch die ursprüngliche Kette der M_i''. Wir haben gezeigt,

M" ist noethersch.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $N \subseteq M$ ein Teilmodul. Es reicht zu zeigen, N ist endlich erzeugt. Da M' und M" noethersch sind, gilt dies zumindest für

$$f^{-1}(N) \text{ und } g(N).$$

Es gibt also Elemente

$$a_1, \dots, a_r \in f^{-1}(N) \text{ und } b_1,\dots,b_s \in N$$

mit

$$f^{-1}(N) = Ra_1 + \dots + Ra_r \text{ und } g(N) = Rg(b_1)+\dots+Rg(b_s).$$

Es reicht zu zeigen,

$$N = Rf(a_1)+ \dots +R(a_r) + Rb_1+\dots+Rb_s.$$

Nach Wahl der a_i und b_j liegen die $f(a_i)$ und b_j in N, d.h. es gilt "$\supseteq$". Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Sei $n \in N$. Dann gilt $g(n) \in g(N)$, d.h. des es gibt Koeffizienten $d_i \in R$ mit

$$g(n) = d_1g(b_1) + \dots + d_sg(b_s).$$

Dann ist aber

$$g(n - \sum_{j=1}^{s} d_jb_j) = g(n) - \sum_{j=1}^{s} d_jg(b_j) = 0,$$

d.h.

$$n - \sum_{j=1}^{s} d_jb_j \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f).$$

Es gibt ein $m' \in M'$ mit

$$f(m') = n - \sum_{j=1}^{s} d_jb_j \in N.$$

Insbesondere ist $m' \in f^{-1}(N)$, d.h. es gibt Koeffizienten $c_i \in R$ mit

$$m' = c_1a_1+\dots+c_ra_r,$$

also

$$n - \sum_{j=1}^{s} d_jb_j = f(m') = f(\sum_{i=1}^{r} c_ia_i) = \sum_{i=1}^{r} c_if(a_i).$$

Wir haben gezeigt, das vorgegebene Element $n \in N$ ist

$$n = \sum_{i=1}^{r} c_if(a_i) + \sum_{j=1}^{s} d_jb_j$$

ein Linearkombination der $f(a_i)$ und b_j . Die $f(a_i)$ und b_j bilden also ein endliches Erzeugendensystem von N.
QED.

2.4.7 Endlich erzeugte Moduln über noetherschen Ringen

Sei R ein noetherscher Ring und

$$M = Rm_1+...+Rm_r$$

ein endlch erzeugter R-Modul. Dann ist M noethersch.
Beweis. Wir schreiben

$$R^r = R\oplus...\oplus R$$

für die r-fache direkte Summe des R-Moduls R. Die R-lineare Abbildung

$$R^r \to M,\ (x_1,...,x_r) \mapsto x_1m_1+...+x_rm_r,$$

ist surjektiv und definiert deshalb eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to Ker(\varphi) \to R^r \to M \to 0$$

Nach 2.4.6 reicht es zu zeigen, R^r ist noethersch. Um Letzteres zu beweisen, betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \to R^{r-1} \xrightarrow{f} R^r \xrightarrow{g} R \to 0$$

mit $f(x_1,...,x_{r-1}) = (x_1,...,x_{r-1},0)$ und $g(x_1,...,x_r) = x_r$. Weil der R-Modul R nach Voraussetzung noethersch ist, gilt auf Grund von 2.4.6,

$$R^r \text{ ist noethersch} \Leftrightarrow R^{r-1} \text{ ist noethersch.}$$

Für r = 1 ist aber $R^r = R$ nach Voraussetzung noethersch. Also ist R^r für jedes r noethersch.
QED.

2.4.8 Hilbertscher Basissatz

Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist auch der Polynomring R[x] ein noetherscher Ring.
Beweis. Sei I ein Ideal von R[x]. Es reicht zu zeigen, I besitzt ein endliches Erzeugendensystem. Wir können annehmen,

$$I \neq \{0\}.$$

Wir betrachten die Menge

$$J := \{ r\in R \mid r \text{ ist Höchser Koeffizient eines Elements von } I\}\cup\{0\}$$
$$= \{l(p(x)) \mid p(x)\in I\}\cup\{0\}.$$

Diese Menge ist ein Ideal von R, also endlich erzeugt, sagen wir

$$J = Ra_1+...+Ra_s$$

Für jedes i wählen wir ein Element

(1) $$f_i \in I \text{ mit } l(f_i) = a_i .$$

Sei

$$m := \max \{\deg f_1 , ... , \deg f_s \}$$

und bezeichne

$$R[x]_{<m} := \{ f(x) \in R[x] \mid \deg f(x) < d \}$$

die Menge aller Polynome von R[x] des Grades < m. Dies ist ein noetherscher R-Modul, denn man kann ihn mit einer direkten Summe von m Exemplaren von R identifizieren. Deshalb ist der Teilmodul

$$I\cap R[x]_{<m}$$

ein endlich erzeugter R-Modul, d.h. es gilt

(2) $$I\cap R[x]_{<m} = Rg_1+...+Rg_t$$

mit geeignet gewählten Polynomen g_i. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, das Ideal I wird von den f_i zusammen mit den g_j erzeugt,

(3) $$I = R[x]f_1 + ... + R[x]f_s + R[x]g_1 + ... + R[x]g_t .$$

Nach Konstruktion liegen die f_i und die g_j sämtlich in I. Deshalb gilt dasselbe auch für beliebige R[x]-Linearkombinationen dieser Polynome, d.h,. es gilt "$\supseteq$". Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Sei

$$f(x) \in I.$$

Wir haben zu zeigen, f(x) ist Linearkombination der f_i und g_j (mit Koeffizienten aus R[x]). Wir beweisen dies durch Induktion nach dem Grad

$$d := \deg f.$$

Im Fall $d < m$ ist f(x) sogar R-Linearkombination der g_j allein (nach (2)), d.h. es ist nichts zu beweisen.

Sei jetzt $m \leq d$. Nach Induktionsvoraussetzung können wir annehmen, jedes Polynom aus I eines Grades <d ist Linearkombination der f_i und g_j (mit Koeffizienten aus R[x]). Betrachten wir den höchsten Koeffizienten l(f) von f. Nach Definition des Ideals J von R gilt

$$l(f) \in J = Ra_1 + ... + Ra_s,$$

d.h. es gibt Elemente $r_i \in R$ mit

$$l(f) = r_1a_1 + ... + r_sa_s$$

Nach Definition ist $f_i \in I$ ein Polynom eines Grades

$$d_i := \deg f_i \leq m \leq d$$

mit den höchsten Koeffizienten a_i. Also ist

$$x^{d-d_i} f_i(x) \in I$$

ein Polynom des Grades $d = \deg f(x)$ mit den höchsten Koeffizienten a_i. Damit ist aber

$$\sum_{i=1}^{s} r_i x^{d-d_i} f_i(x) \in I$$

ein Polynom mit demselben Grad d wie f(x) und demselben höchsten Koeffizienten l(f) wie f(x). Mit anderen Worten,

$$f(x) - \sum_{i=1}^{s} r_i x^{d-d_i} f_i(x) \in I$$

ist ein Polynom eines Grades < d. Nach Induktionsvoraussetzung ist dieses Polynom eine R[x]-Linearkombination der f_i und g_j . Dann ist aber auch f(x) eine solche Linearkombination.
QED.

2.4.9 Folgerung
Sei K ein Körper. Dann ist der Polynomring $K[x_1,...,x_n]$ noethersch.

Beweis. Der Körper K ist noethersch, denn er besitzt nur die Ideale

$$(0) = K\cdot 0 \text{ und } K = K\cdot 1.$$

Nach 2.4.8 ist dann aber auch $K[x_1,...,x_n]$ noethersch für jedes n.

QED.
Bemerkung

Die Theorie der noetherschen Ringe und Moduln ist mit den obigen Sätzen nicht annähernd erschöpft, vgl. Lehrbücher über kommutative Algebra und homologische Algebra und algebraische Geometrie.

2.5 Euklidische Ringe

2.5.1 Definition

Ein wohlgeordnete Menge ist eine Menge, die mit einer reflexiven[9], anti-symmetrischen[10], transitiven[11] und linearen[12] Relation "≤" versehen ist, mit der Eigenschaft, daß jede Teilmenge von M ein kleinstes Element besitzt.

Beispiel

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist bezüglich der gewöhnlichen ≤-Relation wohlgeordnet. Dasselbe gilt für die Menge

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0 \}$$

der nicht-negativen ganzen Zahlen.

Ein Integritätsbereich R heißt euklidischer Ring, wenn es eine Abbildung

$$N: R - \{0\} \to M$$

mit Werten in einer wohlgeordneten Menge so daß folgendes gilt.

Für je zwei Elemente $x, y \in R - \{0\}$ gibt es Element $q,r \in R$ mit

$$x = qy + r,$$

wobei entweder $r = 0$ oder $N(r) < N(y)$ gilt.

Bemerkungen

(i) Mit anderen Worten, ein Euklidischer Ring ist ein Integritätsbereich, in welchem Division mit Rest möglich ist.

(ii) Die in der Definition auftretende Abbildung N wird manchmal auch als Höhenfunktion oder auch als Norm des Euklidischen Rings bezeichnet.

2.5.2 Beispiel: $\mathbb{Z}$

Der Ring der ganzen Zahlen ist mit der Höhenfunktion

$$N: \mathbb{Z} - \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}, \; n \mapsto |n|,$$

ein euklidischer Ring. Dabei bezeichne $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen mit der gewöhnlichen "≤"-Beziehung als Wohlordnung.

2.5.3 Beispiel: der Polynomring K[X] über einem Körper K

Seien K ein Körper und X eine Unbestimmte. Dann ist der Polynomring K[X] ein euklidischer Ring bezüglich der Höhenfunktion

$$K[X] - \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}, \; f(x) \mapsto \deg f(x).$$

2.5.4 Beispiel: Ring der ganzen Gaußschen Zahlen

Der Ring $\Gamma = \mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ ($\subseteq \mathbb{C}$) ist ein euklidischer Ring bezüglich der Höhenfunktion

$$N: \Gamma - \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}, \; a + bi \mapsto a^2+b^2 = (a+bi)(a-bi) = |a+bi|^2.$$

---

[9] es gilt $x \leq x$ für jedes $x \in M$

[10] Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$.

[11] Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq y$.

[12] Je zwei Elemente $x,y \in M$ sind vergleichbar, d.h. es gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Beweis. Seien zwei ganze Gaußsche Zahlen $z, w \in \Gamma - \{0\}$ gegeben. Wir wollen zeigen, wir können in Γ die Division von z durch w mit Rest durchführen. Dazu betrachten wir die komplexe Zahl

$$\frac{z}{w} = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$$

und wählen eine ganze Gaußsche Zahl $q \in \Gamma$, die möglichst nahe bei z/q liegt. Wir können auf jeden Fall erreichen, daß Real- und Imaginärteil von q um höchstens den Wert 1/2 vom Real- bzw. vom Imaginärteil von z/w abweicht, d.h. es gibt ein

$$q = q' + q''i \in \Gamma \text{ mit } \left|\frac{z}{w} - q\right| = \sqrt{(\alpha - q')^2 + (\beta - q'')^2} \leq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Wir setzen

$$r := z - qw \in \Gamma.$$

Dann gilt

$$z = qw + r$$

und

$$|r| = |z - qw| = |w| \cdot \left|\frac{z}{w} - q\right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}\,|w| < |w|,$$

also

$$|r|^2 < |w|^2.$$

Im Fall $r \neq 0$ ist somit $N(r) < N(w)$.
QED.

2.5.5 Der Euklidische Algorithmus

Seien R ein euklidischer Ring mit der Höhenfunktion

$$H: R - \{0\} \to M$$

und $a,b \in R - \{0\}$ zwei Elemente. Wir setzen

$$a_0 := a,\ a_1 = b.$$

Angenommen, wir hätten bereits die Elemente

$$a_0, \ldots, a_n \in R - \{0\}$$

konstruiert. Nach Voraussetzung gibt es Elemente $q,r \in R$ mit

$$a_{n-1} = q \cdot a_n + r,$$

wobei $r = 0$ oder

$$N(r) < N(a_n).$$

Falls $r = 0$ ist, so endet der Algorithmus. Im Fall $r \neq 0$ setzen wir

$$a_{n+1} := r,$$

so daß gilt

(1) $$a_{n-1} = q \cdot a_n + a_{n+1} \text{ und } N(a_{n+1}) < N(a_n).$$

Bemerkungen

(i) Weil M wohlgeordnet ist, bricht der euklidische Algorithmus nach endlich vielen Schritten ab, denn andernfalls erhielten wir eine unendliche Teilmenge

$$\{ N(a_i) \mid i = 1,2,3, \ldots \}$$

von M, die kein kleinstes Element besitzt.

(ii) Für zwei Elemente $a,b \in R$ bedeute

$$a \mid b$$

(in Worten: a teilt b), daß es ein Element $c \in R$ gibt mit

$$b = a \cdot c.$$

2.5.6 Der größte gemeinsame Teiler

Seien R ein euklidischer Ring und

$$a,b \in R - \{0\}.$$

Dann gibt es ein Element $d \in R - \{0\}$ mit folgenden Eigenschaften.

(i) $d \mid a$ und $d \mid b$.
(ii) Für jedes Element $d' \in R$ mit $d' \mid a$ und $d' \mid b$ gilt $d' \mid d$.

Dieses Element ist bis auf Multiplikation mit Einheiten aus R eindeutig bestimmt und heißt größter gemeinsamer Teiler von a und b. Es gilt außerdem:

(iii) Es gibt Elemente $a', b' \in R$ mit

$$d = aa' + bb'.$$

Beweis. Wir wenden auf a und b den Euklidischen Algorithmus an und erhalten Elemente

$$a_0, \dots, a_n \in R - \{0\}$$

Wir werden zeigen, $d = a_n$ hat die Eigenschafen (i) und (ii). Den Beweis führen wir durch Induktion nach n.

Im Fall n = 1 endet der Algorithmus bereits nach dem 0-ten Schritt, d.h. es gilt

$$a = qb + r \text{ mit } r = 0,$$

Dann hat aber $d = b = a_1$ tatsächlich die geforderten Eigenschaften.

Sei jetzt $n > 1$. Wir schreiben

(1) $$a = qb + r$$

mit ($a = a_0$, $b = a_1$ und) $r = a_2$. Durch Anwenden des Euklidischen Algorithmus auf b und r erhalten wir die Folge

$$a_1, \dots, a_n \in R - \{0\}.$$

Diese Folge besteht aus einem Element weniger als die ursprüngliche Folge (denn a_0 fehlt). Nach Induktionsvoraussetzung genügt $d = a_n$ den beiden folgenden

(i') d teilt b und r
(ii') Jeder gemeinsame Teiler von b und r ist ein Teiler von d.

Es reicht zu zeigen, d genügt auch den Bedinungen (i) und (ii).

Zu (i). Wegen (i') gilt

$$d \mid a = qb + r \text{ und } d \mid b.$$

Zu (ii). Ist d' ein gemeinsamer Teiler von a und b, so gilt

$$d' \mid b \text{ und } d' \mid r = a - qb.$$

Nach (ii') gilt $d' \mid d$.

Zur Eindeutigkeit von d. Sei d' ein Element von $R-\{0\}$, das denselben Bedingungen wie d genügt. Weil d ein gemeinsamer Teiler von a und b ist, gilt dann

$$d' \mid d$$

und weil d' ein gemeinsamer Teiler von a und b ist, gil

$$d \mid d'.$$

Es gibt also Elemente $e, f \in R$ mit

$$d' = ed \text{ und } d = fd'.$$

Damit gilt

$$(1 - ef)d = d - fd' = d - d = 0,$$

also $1 - ef = 0$, also $ef = 1$. Die Element e und f sind somit zueinander inverse Einheiten.

Zu (iii). Wir wenden auf a und b den Euklidischen Algorithmus an und erhalten Elemente

$$a_0, \dots, a_n \in R - \{0\}.$$

wobei $d = a_n$ größter gemeinsamer Teiler von a und b ist.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach n.

n = 1: Es gilt $a = qb$ und $d = b$. Dann ist aber

$$d = b = a \cdot 0 + b \cdot 1.$$

Die Behauptung gilt mt $a' = 0$ und $b' = 1$.

$n > 1$. Wir schreiben

$$a = qb + r$$

mit ($a = a_0$, $b = a_1$ und) $r = a_2$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Elemente b",r"∈R mit

$$d = bb" + rr" = bb" + (a - qb)r" = ar" + b(b"-qr").$$

Die Behauptung gilt mit a' = r" und b' = b"-qr".
QED.
Bemerkungen
(i) Für je zwei größte gemeinsame Teiler d', d" von a und b gibt es, wie eben gezeigt, eine Einheit e∈R mit

$$d" = ed' \text{ und } d' = e^{-1}d".$$

Wir führen die Bezeichnung

$$ggT(a,b)$$

für irgendeinen dieser größten gemeinsamen Teiler ein.
(ii) Die Definition von ggT ist zugegebenermaßen etwas ungenau. Eine fomal korretke (aber unbequeme) Definition wäre die folgende.

$$ggT(a,b) = dR^* \in R/R^*.$$

Dabei sei d irgendein größter gemeinsamer Teiler von a und b,

$$R/R^*$$

bezeichne die Menge der Orbits bezüglich der Operation

$$R^* \times R \to R,\ (e,r) \mapsto er,$$

und

$$dR^* = R^*d = \{ed \mid e \in R^*\}$$

das Orbit des Elements d.
Beweis. Zu (i). trivial.
Zu (ii). Seien d' und d" zwei größte gemeinsame Teiler von a und b. Dann gibt es eine Einheit e mit

$$d" = ed'.$$

Also gilt

$$d"R^* = d'eR^* = d'R^*,$$

denn für Einheiten e gilt $eR^* = R^*$. Wir haben gezeigt, das Bild der Abbildung ggT von (ii) sind unabhängig von der Wahl des speziellen größten gemeinsamen Teilers.
QED.

2.6 Hauptidealringe

2.6.1 Definition

Ein Hauptideal in einem kommutativen Ring R mit 1 ist ein Ideal, welches von nur einem Element erzeugt wird, d.h. ein Ideal von der Gestalt

$$I = aR \text{ mit } a \in R.$$

Ein Hauptidealring ist ein Integritätsbereich, dessen sämtliche Ideale Hauptideale sind.

2.6.2 Beispiel: Euklidische Ringe

Jeder Euklidische Ring ist ein Haupidealring.
Beweis. Sei R ein Euklidischer Ring mit der Höhenfunktion

$$H: R-\{0\} \to M$$

und sei $I \subseteq R$ ein Ideal von R. Wir haben zu zeigen, I ist ein Hauptideal. O.B.d.A. sei I nicht das Nullideal,

$$I \neq \{0\}\ (= 0R).$$

Wir betrachten die Teilmenge

$$\{ H(x) \mid x \in I - \{0\} \}$$

von M. Da I nicht das Nullideal ist, ist diese nicht leer. Auf Grund der Definition des Euklidischen Rings besitzt diese Menge ein kleinstes Element, d.h. es gibt ein Element

(1) $$a \in I - \{0\} \text{ mit } H(a) \leq H(x) \text{ für jedes } x \in I - \{0\}.$$

Es reicht zu zeigen,

$$I = aR.$$

Wegen $a \in I$ gilt trivialerweise $I \supseteq aR$. Angenommen die umgekehrte Inklusion wäre falsch, d.h. es gibt ein Element in

$$I - aR.$$

Dann ist die Teilmenge

$$\{ H(x) \mid x \in I - aR \}$$

von M nicht-leer, enthält also ein kleinstes Element. Es gibt also ein Element

(2) $a' \in I-aR$ mit $H(a') \leq H(x)$ für jedes $x \in I - aR$.

Nach Definition des Euklidischen Rings gibt es Elemente $q, r \in R$ mit

$$a' = qa + r \text{ mit } r = 0 \text{ oder } H(r) < H(a).$$

Nach Konstruktion gilt

$$r = a' - qa \in I.$$

Nach Wahl von a nimmt H in allen Elementen von $I-\{0\}$ einen Wert $\geq H(a)$ an (vgl. (1)). Wäre $r \neq 0$, so wäre der Wert von H in r aber kleiner. Also ist

$$r = 0.$$

also $a' = qa \in aR$ im Widerspruch zu (2). Diese Widerspruch zeigt, I- aR muß leer sein, d.h. es gilt

$$I = aR.$$

QED.

2.6.3 Beispiel: $K[X_1,...,X_n]$ mit $n \geq 2$

Sei K ein Körper. Dann ist der Polynomring

$$R := K[X_1,...,X_n]$$

im Fall $n \geq 2$ kein Hauptidealring, also auch nicht Euklidisch.

Beweis. Es reicht zu zeigen,

$$I := (X_1,X_2) = X_1R + X_2R$$

ist kein Hauptideal. Angenommen, doch, d.h.

$$I = pR$$

mit einem Polynom $p \in R - \{0\}$. Dann gilt

$$X_1 , X_2 \in I = pR,$$

d.h. es gibt Polynome $q_1, q_2 \in R$ mit

$$X_1 = pq_1 \text{ und } X_2 = pq_2.$$

Als Polynom in X_i mit $i > 1$ hat X_1 den Grad 0, also auch pq_1, d.h. p hat in X_i den Grad 0,
d.h.

$$\deg_{X_i} p = 0 \text{ für } i = 2,...,n.$$

Aus der zweiten Identität liest man in analoger Weise ab, daß p auch als Polynom in X_1 den Grad 0 hat. Insgesamt erhalten wir

$$p \in K - \{0\}$$

ist ein konstantes Polynom. Die Polynome von

$$I := (X_1,X_2) = X_1R + X_2R$$

sind aber sämtlich Polynome mit dem Absolutglied 0, d.h.

$$p \notin I.$$

Das steht aber im Widerspruch zu $I = pR$.
QED.

Bemerkung

Der Nachweis der Existenz von Hauptidealringen, die nicht Euklidisch sind, ist schwieriger und wird hier nicht erbracht.

Elementarteilersatz: Teilmoduln freier Moduln

2.7 ZPE-Ringe

2.7.1 Definitionen

Sei R ein Integritätsbereich. Eine Nicht-Einheit $r \in R - \{0\}$ heißt zerlegbar oder auch reduzibel, wenn sie Produkt von zwei Nichteinheiten ist ,

$$r = ab \text{ mit } a,b \in R - R^*.$$

Andernfalls heißt r unzerlegbar oder auch irreduzibel. Eine Nicht-Einheit $r \in R- \{0\}$ heißt prim in R oder auch Primelement von R, wenn für beliebige Elemente $a,b \in R$ die folgende Implikation besteht.

$$r \mid ab \Rightarrow r \mid a \text{ oder } r \mid b.$$

Dabei bedeute die Relation $a \mid b$ für zwei Elemente $a,b \in R$, daß es ein Element $c \in R$ gibt mit $b = ac$.

Zwei Primelemente $a,b \in R$ heißen assoziiert, wenn es eine Einheit $e \in R^*$ gibt mit

$$a = eb.$$

Ein Integritätsbereich R heißt ZPE-Ring, wenn jede Nicht-Einheit von $R-\{0\}$ Produkt von endlich vielen Primelementen ist. Die Bezeichnung ZPE kommt von " Zerlegung in Primelemente".

Bemerkungen

(i) Jedes Primelement ist unzerlegbar.

(ii) Ist R ein ZPE-Ring, so ist auch umgekehrt jedes unzerlegbare Element ein Primelement.

(iii) Eine Nicht-Einheit $r \in R - \{0\}$ eines Rings R ist genau dann ein Primelement, wenn das von r erzeugte Ideal $(r) = rR$ ein Primideal ist.

(iv) Seien zwei Zerlegungen einer Nicht-Einheit $r \in R-\{0\}$ in Produkte von Primelementen gegeben,

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_r = r = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s .$$

Dann gilt $r = s$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in S_r$ mit

$$q_i \text{ assoziiert zu } p_{\sigma(i)} \text{ für } i = 1,\ldots,r.$$

Die Zerlegung in Primfaktoren ist somit, falls sie existiert, eindeutig bis auf die Reihenfolge der Primfaktoren und bis auf den Übergang zu assoziierten Primelementen.

(v) In ZPE-Ringen kann man die Begriffe des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (eindeutig bis auf die Multiplikation mit Einheiten) definieren. Es ist jedoch im allgemeinen nicht richtig, daß der größte gemeinsame Teiler zweier Elemente a, b Linearekombination von a und b ist.

Beweis Zu (i). Sei p Primelement und $p = ab$ in R. Dann teilt p einen der Faktoren a oder b, sagen wir

$$p \mid a,$$

d.h.

$$a = pa' \text{ mit } a' \in R.$$

Es folgt

$$(1-a'b)p = p - pa'b = p - ab = 0.$$

Wegen $p \neq 0$ folgt $1 - a'b = 0$, d.h. $a'b = 1$, d.h. b ist Einheit.

Zu (ii). Sei a ein unzerlegbares Element. Da R ZPE-Ring sein soll, gibt es eine Zerlegung von a in Primfaktoren,

$$a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r.$$

Da a unzerlegbar ist, müssen alle Faktoren rechts mit höchstens einer Ausnahme Einheit sein. Das ist aber nur möglich im Fall r = 1, denn Primelemente sind niemals Einheiten. Es gilt also

$$a = p_1 ,$$

d.h. a ist ein Primelement.
Zu (iii). Die Nicht-Einheit $r \in R - \{0\}$ ein Primelement, wenn die folgende Implikation besteht (für Elemente aus R):

$$r \mid ab \Rightarrow r \mid a \text{ oder } r \mid b.$$

Nun ist aber $x \mid y$ gleichbedeutend mit $y \in xR$. Die Implikation läßt sich also in der folgenden Gestalt schreiben.

$$ab \in rR \Rightarrow a \in rR \text{ oder } b \in rR.$$

In dieser Gestalt bedeutet die Implikation aber gerade, daß rR ein Primideal ist.

Zur Eindeutigkeitsaussage von (iv). Wir führen den Beweis durch Induktion nach r. Im Fall r = 1 , d.h.

$$p := p_1 = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$$

teilt p eines der q_i rechts, sagen wir $q = q_1$, d.h.

$$q = ap \text{ für ein } a \in R.$$

Kürzen des gemeinsamen Faktors p liefert

$$1 = a \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s .$$

Da Primzahlen keine Einheiten sind, folgt s = 1 und $p_1 = q_1$, und die Behauptung ist trivial.
Sei jetzt r > 1. Die Primzahl p_r teilt einen Faktor auf der rechten Seite, sagen wir $p_r \mid q_s$, d.h.

$$q_s = ap_r .$$

Da q_s als Primelement unzerlegbar ist, ist
$a \in R^*$
eine Einheit. Kürzen des gemeinsamen Faktors liefert

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_{r-1} = q_1 \cdot \ldots \cdot q_{s-2}(aq_{s-1}).$$

Der letzte Faktor aq_{s-1} rechts ist eine Primzahl. Nach Induktionsvoraussetzung gilt
r - 1 = s - 1
und die Primelemente $p_1, \ldots , p_{r-1}$ sind assoziiert zu einer Permutation der Primelemente

$$q_1 , \ldots , q_{s-2}(aq_{s-1}),$$

also auch zu einer Permutation der Primelemente $q_1 , \ldots , q_{s-1}$. Mit anderen Worten, es gilt die Behauptung.
QED.

2.7.2 Beispiel: Hauptidealringe

Jeder Hauptidealring ist ein ZPE-Ring.

Beweis. Sei R ein Hauptidealring.

1. Schritt. Jedes unzerlegbare Element von R ist Primelement.
Angenommen, die Aussage ist falsch. Dann gibt es eine Nicht-Einheit

$$r \in R - \{0\},$$

die unzerlegbar ist aber kein Primelement. Insbesondere ist
rR
kein Primideal, d.h. es gibt Elemente $a,b \in R$ mit

$$ab \in rR,\ a \notin rR,\ b \notin rR.$$

Die Ideale

$$I := (r,a) = rR + aR \text{ und } J := (r,b) = rR + bR$$

enthalten rR als echte Teilmenge. Keines dieser beiden größeren Ideale ist gleich R, denn im Fall J = R wäre zum Beispiel IJ = IR = I. Auf jeden Fall wäre

$$IJ = \text{eines der beiden Ideale I oder J} \supset rR \text{ (echte Inklusion).}$$

Es gilt aber

$$IJ = (r,a)(r,b) = (r^2, ar, rb, ab) \subseteq rR.$$

Wir haben damit gezeigt,

$$rR \subset I \subset R \text{ und } rR \subset J \subset R.$$

Da R ein Hauptidealring ist, gilt

$$I = sR \text{ für ein } s \in R,$$

d.h.

$$rR \subset sR,$$

und

$$r = sx \text{ für ein } x \in R.$$

Das Element s ist keine Einheit, denn das Ideal sR = I ist von R verschieden. Das Element x ist keine Einheit, denn rR = sxR ist von sR verschieden. Damit ist aber r kein unzerlegbares Element. Dieser Widerspruch beweist die Aussage des ersten Schritts.

2. Schritt. Jede Nicht-Einheit ist Produkt von endlich vielen Primelementen.

Auf Grund des ersten Schritts reicht es zu zeigen, jede Nicht-Einheit ist das Produkt von endlich vielen unzerlegbaren Elementen. Wir führen die folgende Bezeichnung ein.

Ein schlechtes Element von R sei eine Nicht-Einheit, welche nicht als Produkt von endlich vielen unzerlegbaren Elementen geschrieben werden kann.

Wir haben zu zeigen, es gibt in R keine schlechten Elemente. Angenommen doch. Sei

$$r_1$$

ein schlechtes Element. Wir betrachten das Ideal

(1) $$r_1R$$

von R. Das Element r_1 muß zerlegbar sein (andernfalls wäre es Produkt unzerlegbarer Elemente, wobei die Anzahl der Faktoren gleich 1 ist),

(2) $$r_1 = ab \text{ mit } a,b \in R\text{-}R^*.$$

Mindestens einer der Faktoren a , b muß wieder schlecht sein. Sagen wir

$$r_2 = a$$

ist schlecht. Wegen $r_1 = ab = r_2b$ gilt

$$r_1R \subseteq r_2R.$$

Die Inklusion ist echt, denn andernfalls gibt es ein $c \in R$ mit

$$r_2 = r_1c = abc = r_2bc,$$

d.h. $0 = r_2 (1 - bc)$, d.h. $0 = 1 - bc$, d.h. b wäre eine Einheit im Widerspruch zu (2). Es gilt also

$$r_1R \subset r_2R.$$

Wir haben gezeigt, für jedes schleichte Element r_1 gibt es ein schleichtes Element r_2 mit

$$r_1R \subset r_2R.$$

Wir wenden diese Tatsache wiederholt an und erhalten eine unendliche echt aufsteigenden Kette von Idealen von R,

$$r_1R \subset r_2R \subset \ldots \subset r_iR \subset \ldots$$

Sei

$$I := \cup_i^{\infty} r_i R.$$

Diese Menge ist ein Ideal von R, also von der Gestalt

$$I = rR.$$

Das Element r liegt in der Vereinigung der $r_i R$, d.h. es gibt ein i mit

$$r \in r_i R.$$

Damit gilt

$$I = rR \subseteq r_i R \subset r_{i+1} R \subseteq I.$$

Dies ist ein Widerspruch: I kann nicht echte Teilmenge von sich selbst sein. Dieser Widerpruch beweist, es gibt keine schlechten Elemente in R, d.h. R ist ein ZPE-Ring., **QED**.

2.7.3 Beispiel: $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{-5}$

Der Ring

$$R = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{-5} \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 5).$$

ist kein ZPE-Ring, also auch kein Hauptidealring und insbesondere kein Euklidischer Ring.

Beweis. Es gilt in R

(*) $$6 = 2\cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}).$$

2 ist keine Einheit von R. Es gilt

$$R/2R = \mathbb{Z}[X]/(2, X^2 + 5) = \mathbb{F}_2[X]/(X^2+\overline{5}),$$

und $X^2+\overline{5}$ ist als Polynom positiven Grades keine Einheit von $\mathbb{F}_2[X]$.

3 ist keine Einheit von R.

$$R/3R = \mathbb{Z}[X]/(3, X^2 + 5) = \mathbb{F}_3[X]/(X^2+\overline{5}),$$

und $X^2+\overline{5}$ ist als Polynom positiven Grades keine Einheit von $\mathbb{F}_3[X]$.

Unzerlegbarkeit von 2. Angenommen

$$2 = (a+b\sqrt{-5})(c - d\sqrt{-5}) \text{ mit } a,b,c,d \in \mathbb{Z}.$$

Dann gilt

$$2 = ac + 5bd$$
$$0 = bc - ad$$

.Insbesondere sind die Paare (a,b) und (c,d) proportional,

$$(c,d) = q(a,b) \text{ mit } q \in \mathbb{Q},$$

d.h.

$$2 = q\,(a^2 + 5b^2) \text{ und } 2q = c^2 + 5d^2$$

Wir wir schreiben q als Quotient teilerfremder ganzer Zahlen. Aus der ersten Identität folgt, der Zähler von q ist 1 oder 2.Aus der zweiten Identität folgt, der Nenner von q ist 1 oder 2. Für q gibt es also nur folgende Möglichkeiten.

$$q = 2,\ q = 1,\ q = 1/2.$$

Im ersten Fall folgt

$$1 = a^2 + 5b^2$$

also b = 0, a = ±1, d.h. $a+b\sqrt{-5}$ ist Einheit.

Im zweiten Fall folgt

$$2 = a^2 + 5b^2,$$

also b = 0, $2 = a^2$ was nicht möglich ist.

Im dritten Fall folgt

$$1 = c^2 + 5d^2,$$

also d = 0, c = ±1, d.h. c - d$\sqrt{-5}$ ist Einheit.
Unzerlegbarkeit von 3 (weglassen?). Angenommen

$$3 = (a+b\sqrt{-5})(c - d\sqrt{-5}) \text{ mit } a,b,c,d \in \mathbb{Z}.$$

Dann gilt
(1) $3 = ac + 5bd$
(2) $0 = bc - ad$
.Insbesondere sind die Paare (a,b) und (c,d) proportional,

$$(c,d) = q(a,b) \text{ mit } q \in \mathbb{Q},$$

d.h.

$$3 = q\,(a^2 + 5b^2) \text{ und } 3q = c^2 + 5d^2$$

Wir wir schreiben q als Quotient teilerfremder ganzer Zahlen. Aus der ersten Identität folgt, der Zähler von q ist 1 oder 3.Aus der zweiten Identität folgt, der Nenner von q ist 1 oder 3. Für q gibt es also nur folgende Möglichkeiten.

$$q = 3,\ q = 1,\ q = 1/3.$$

Im ersten Fall folgt

$$1 = a^2 + 5b^2$$

also b = 0, a = ±1, d.h. a+b$\sqrt{-5}$ ist Einheit.
Im zweiten Fall folgt

$$3 = a^2 + 5b^2,$$

also b = 0, $3 = a^2$ was nicht möglich ist.
Im dritten Fall folgt

$$1 = c^2 + 5d^2,$$

also d = 0, c = ±1, d.h. c - d$\sqrt{-5}$ ist Einheit.
Abschluß des Beweises.
Angenommen R ist ein ZPE-Ring. Dann sind 2 und 3 Primelemente. Insbesondere müßte einer der Faktoren auf der rechten Seite von (*) durch 2 teilbar sein, d.h.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-5} \text{ oder } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-5}$$

würde in $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$ liegen, was offensichtlich[13] nicht der Fall ist.
QED.
Bemerkung
Unser nächstes Ziel ist der Beweis der ZPE-Eigenschaft für Polynomringe in mehreren Unbestimmten über einem Körper. Wir werden die allgemeinere Aussage beweisen, daß für jeden ZPE-Ring R auch die Polynom-Algebra R[X] ein ZPE-Ring ist.

Der Beweis erfordert einige Vorbereitungen. Wir werden dabei ganz wesentlich benutzen, daß Q(R)[X] euklisch, also insbesodere eine ZPE-Ring ist.

2.7.4 Die Ordnung eines Elements des Quotientenkörpers

Seien R ein ZPE-Ring, K = Q(R) dessen Quotientenkörper und

p

eine Primelement von R. Da R ein ZPE-Ring ist, also nullteilerfrei, so ist die natürliche Abbildung

$$R \to K,\ r \mapsto r/1,$$

injektiv, d.h. R läßt sich mit einem Teilring des Körpers K identifizieren (was wir im folgenden tun werden). Da R ein ZPE-Ring ist, läßt jedes Element $x \in K-\{0\}$ in der Gestalt

---

[13] Eine komplexe Zahl a + b$\sqrt{-5}$ liegt genau dann in R, wenn a und b ganze Zahlen sind (denn 1 und $\sqrt{-5}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{Z}$.

$$x = e \cdot p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$$

mit einer Einheit $e \in R^*$, paarweise nicht-assoziierten Primelementen p_i und ganzen Zahlen $n_i \in \mathbb{Z}$. Dabei sind die p_i bis auf die Reihenfolge und bis auf den Übergang zu assoziierten Primelementen eindeutig bestimmt. Für gegebenes p_i ist der Exponent n_i eindeutig festgelegt. Diese Aussagen folgen unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen über die Elemente von R.
Ist p ein Primelement von R, welche zu p_i assoziert ist, so schreiben wir

$$\mathrm{ord}_p(x) = n_i$$

und nennen diese ganze Zahl auch Ordnung von x bezüglich p. Im Fall $x = 0$ setzen wir

$$\mathrm{ord}_p(x) = \infty.$$

Bemerkungen

(i) Nach für jedes $x \in R$ ist $\mathrm{ord}_p(x)$ die größte ganze Zahl n mit $p^n \mid x$,

$$\mathrm{ord}_p(x) = \sup \{ n \in \mathbb{Z} \mid p^n \mid x \}.$$

(ii) Nach Definiton gilt

$$\mathrm{ord}_p(xy) = \mathrm{ord}_p(x) + \mathrm{ord}_p(y).$$

(iii) Durch die beiden Eigenschaften (i) und (ii) ist die Ordnungsfunktion eindeutig bestimmt. Sei bieten also die Möglichkeit einer alternativen Definiton.

(iv) Die Ordnungsfunktionen zu assoziierten Primelementen sind gleich,

$$\mathrm{ord}_p(x) = \mathrm{ord}_{p'}(x)$$

falls p und p' assoziierte Primideale sind.

(v) Bezeiche $\mathbb{P}(R)$ die Menge der Primelemente von R. Dann kann man die Ordnungsfunktion für gegebenes $x \neq 0$ als Abbildung

$$\mathbb{P}(R) \to \mathbb{Z},\ x \mapsto \mathrm{ord}_p(x),$$

betrachten. Wegen (iv) läßt sie sich aber auch als Funktion

$$\mathbb{P}(R)/\sim \to \mathbb{Z},\ \mathfrak{p} = [p] \mapsto \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, x := \mathrm{ord}_p(x)$$

auf der Menge der Klassen assoziierter Primelemente auffassen: $p \sim q$ bedeute, die Elemente $p,q \in \mathbb{P}(R)$ sind assoziiert, d.h. $q = ep$ mit einer Einheit $e \in R^*$.

(vi) Für jedes Element $x \in K - \{0\}$ gilt

$$x = e \cdot \prod_{\mathfrak{p}=[p] \in \mathbb{P}(R)/\sim} p^{\mathrm{ord}_p x}.$$

Dabei durchlaufe $\mathfrak{p}$ die Menge der Klassen äquivalenter Primelemente von R und p bezeichne ein irgendwie gewähltes Element von $\mathfrak{p}$. Der Faktor e bezeichne eine Einheit von R (die von der speziellen Wahl der Repräsentanten p von $\mathfrak{p}$ abhängt.

(v) Die Formel von (vi) kann man auch auf den Fall $x = 0$ verallgemeinern, wenn man vereinbart

$$p^\infty = 0.$$

2.7.5 Der größte gemeinsame Teiler

Seien R ein ZPE-Ring, $K = Q(R)$ dessen Quotientenkörper und

$$x_1, \ldots, x_r \in K$$

endlich viele Elemente. Wir schreiben jedes x_i in der Gestalt

$$x_i = e \cdot \prod_{\mathfrak{p}=[p]\in\mathbb{P}(R)/\sim} p^{\operatorname{ord}_p x_i}.$$

und definieren

$$n(p) := \min \{\operatorname{ord}_p x_i \mid i = 1,...,r\}.$$

Das Element

$$(1) \qquad ggT(x_1, \dots, x_r) := \prod_{\mathfrak{p}=[p]\in\mathbb{P}(R)/\sim} p^{n(p)}$$

Heißt dann <u>größter gemeinsamer Teiler</u> von $x_1, \dots, x_r$.

Bemerkungen

(i) Die Definition des größten gemeinsamen Teilers hängt von der Wahl der Repräsentanten p der Klassen $\mathfrak{p}$ im Produkt (1) ab.

(ii) Eine korrektere Definiton wäre

$$(1) \qquad ggT(x_1, \dots, x_r) := \prod_{\mathfrak{p}=[p]\in\mathbb{P}(R)/\sim} p^{n(p)} \bmod R^*$$

Dabei bezeichne der Ausdruck recht gerade das Orbit des Elements (1) bei der Operation

$$R^* \times K \to K,\ (e, x) \mapsto ex.$$

(iii) Wenn man sich auf die Definition des ggT von Elementen aus der multiplikativen Gruppe $K^* := K-\{0\}$ beschränkt, so kann man den ggT auch definieren als das Bild von (1) beim natürlichen Gruppen-Homomorphismus

$$K^* \to K^*/R^*.$$

(iv) Wir werden hier die naive Definiton (1) benutzen, müssen aber stets beachten, der ggT ist nur bis auf Multiplikation mit einer Einheit festgelegt. Wir geben hier noch einige (offensichtliche) Eigenschaften des größten gemeinsamen Teilers an.

(v) Nach Konstruktion gilt, falls mindestens ein x_i von Null verschieden ist:

1. $ggT(x_1, \dots, x_r) \neq 0$.
2. $x_i / ggT(x_1, \dots, x_r) \in R$ für $i = 1,...,r$.

(vi) $ggT(x_1, \dots, x_r)$ liegt in R, falls jedes x_i in R liegt.

(vii) $ggT(cx_1, \dots, cx_r) = c \cdot ggT(x_1, \dots, x_r)$.

(viii) $ggT(x_1, \dots, x_r)$ ist im allgemeinen keine Linearkombination der $x_1, \dots, x_r$.

2.7.6 Der Inhalt eines Polynoms

Seien R ein ZPE-Ring, $K := Q(R)$ dessen Quotientenkörper und

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$$

ein Polynom mit Koeffizienten aus K. Dann heißt

$$I(f) := ggT(a_0,...,a_n) \in K$$

<u>Inhalt</u> des Polynoms f.

Bemerkungen

(i) Der Inhalt eines Polynom ist nur bis auf einen Faktor aus R^* festgelegt.

(ii) Für jedes von Null verschiedene Polynom $f(X) \in K[X]$ gilt

$$f(X)/I(f) \in R[X]$$

2.7.7 Lemma von Gauß

Seien R ein ZPE-Ring, K := Q(R) dessen Quotientenkörper und

$$f, g \in K[X]$$

zwei Polynome einer Unbestimmten mit Koeffizienten aus K. Dann gilt

$$I(fg) = I(f)\cdot I(g).$$

Bemerkungen

(i) Die Aussage ist so zu interpretiern, daß die beiden Seiten sich nur um einen Faktor aus R* unterscheiden.

(ii) Alternativ können man auch sagen, die Definition von einem der drei auftretenden Inhalt läßt sich so um einen Faktor aus R* abändern, daß die behauptete Gleichheit gilt.

Beweis des Lemmas. Wir schreiben

$$f = \alpha f_1 \text{ und } g = \beta g_1 \text{ mit } \alpha = I(f) \text{ und } \beta = I(g).$$

Dann gilt

$$I(f_1) = 1 = I(g_1)$$

und

$$I(fg) = I(\alpha\beta f_1 g_1) = \alpha\beta\cdot I(f_1 g_1).$$

Es reicht also zu zeigen, daß $f_1 g_1$ den Inhat 1 hat. Wir können also annehmen, die Polynome

$$f(X) = a_n X^n + \ldots + a_0 \quad \text{mit } a_n \neq 0$$

$$g(X) = b_m X^m + \ldots + b_0 \text{ mit } b_m \neq 0$$

haben den Inhalt 1 (und liegen damit insbesondere in R[X]). Wir haben zu zeigen fg hat den Inhalt 1, d.h. es gibt kein Primelement p, die alle Koeffizienten von fg teilt.

Angenommen, es gibt doch ein solches Primelement $p \in R$. Wir führen folgende Bezeichnungen ein.

$$r := \max \{ i \mid a_i \neq 0 \text{ und } p \nmid a_i \}$$

$$s := \max \{ j \mid b_j \neq 0 \text{ und } p \nmid b_j \}$$

Da f den Inhalt 1 hat, also nicht alle Koeffizienten Vielfache von p sind, ist r wohldefiniert. Analog ist auch s wohldefiniert. Betrachten wir den Koeffizienten c_{r+s} von X^{r+s} in fg. Es gilt

$$c_{r+s} = \ldots + a_{r-1}b_{s+1} + a_r b_s + a_{r+1}b_{s-1} + \ldots$$

Nach Konstruktion sind alle Summanden rechts durch p teilbar, ausgenommen der Summand $a_r b_s$.[14] Deshalb ist c_{r+s} nicht durch p teilbar, im Widerspruch zur Wahl von p.

QED.

2.7.8 Faktorzerlegung von Polynomen über R und über Q(R)

Seien R ein ZPE-Ring, K:=Q(R) dessen Quotientenkörper und

$$f(X) \in R[X] - \{0\}$$

ein Polynom. Besitzt f(X) eine Zerlegung in Faktoren kleineren Grades über K, $f(X) = g(X)h(X)$ mit $g(X), h(X) \in K[X]$, so besitzt f(X) auch eine Zerlegung über R. Genauer:

$$f(X) = c\cdot g_1(X)h_1(X)$$

---

[14] Alle Summanden links von $a_r b_s$ sind durch p teilbar, weil der erste Faktor es ist. Alle Summanden rechts von $a_r b_s$ sind durch p teilbar, weil der zweite Faktor es ist.

mit

$g_1(X) := g(X)/I(g) \in R[X]$

$h_1(X) := h(X)/I(h) \in R[X]$

$c := I(g)I(h) \in R.$

Beweis. Die einzige nicht-triviale Aussage ist die Aussage, daß c in R liegt. Diese folgt aber aus dem Lemma von Gauß, nach welchem c bis auf einem Faktor aus R* gleich

$$I(gh) = I(f)$$

ist. Der Inhalt eines Polynoms über R liegt aber in R.
QED.

2.7.9 Die ZPE-Eigenschaft beim Übergang zu Polynomringen

Sei R ein ZPE-Ring mit dem Quotientenkörper K = Q(R).Dann ist auch der Ring

$$R[X]$$

der Polynome über R in einer Unbestimmten X ein ZPE-Ring. Die Primelemente von R[X] sind gerade die Primelement von R zusammen mit den Polynomen

$$p(X) \in R[X]$$

die den folgenden beiden Bedingungen genügen..

1. $I(p) = 1$.
2. p ist als Element von K[X] irreduzibel.

Beweis. Sei f(X) ein Element von R[X]. Unter Verwendung der Zerlegung in Primfaktoren in K[X] erhalten wir eine Zerlegung

(1) $$f(X) = c \cdot p_1(X) \cdot \ldots \cdot p_r(X).$$

mit $c \in K$ und Primelementen $p_i(X)$ von K[X]. Indem wir $p_i(X)$ durch $p_i(X)/I(p_i)$ und c durch $cI(p_i)$ ersetzen, erreichen wir, daß gilt

$$I(p_i) = 1$$

also insbesondere

$$p_i(X) \in R[X].$$

Nach dem Lemma von Gauß gilt dann in der Zerlegung (1) auch

$$c = I(\text{RHS von (1)}) = I(\text{LHS von (1)}) = I(f) \in R,$$

d.h. (1) ist eine Faktorzerlegung über R. Da R ein ZPE-Ring ist, können wir c nach als Produkt von Primelementen aus R schreiben.
Wir haben gezeigt, jedes Element von R[X] - {0} ist Produkt von endlich vielen Elementen, die nach der Aussage des Satzes Primelement sind.
Zum Abschluß des Beweises reicht es also zu zeigen, die angegebenen Elemente sind Primelemente und es gibt keine weiteren. Zu zeigen sind also folgende Aussagen:

1. Jedes Primelement von R ist auch eines von R[X].
2. Jedes irreduzible Polynom $p \in K[X]$ mit dem Inhalt 1 ist ein Primelement von R[X].
3. Es gibt keine weiteren Primelemente in R[X].

Zu 1. Sei p ein Primelement von R und sei $p \mid fg$ mit $f,g \in R[X]$. Dann gilt

$$p \mid I(fg) = I(f)I(g)$$

(nach dem Lemma von Gauß), also $p \mid I(f)$ oder $p \mid I(g)$, also $p \mid f$ oder $p \mid g$.
Zu 2. Da K[X] ein ZPE-Ring ist, ist p ein Primelement von K[X]. Wegen $I(p) = 1$ gilt außerdem

$$p \in R'[X].$$

Sei jetzt

$$p \mid fg \text{ mit } f,g \in R[X].$$

Dann gilt, weil p Primelement von K[X] ist,

$$p \mid f \text{ oder } p \mid g \text{ (in K[X])},$$

d.h. f oder g hat eine Faktorzerlegung über K, wobei einer der Faktoren gleich p ist. Nach 2.7.8 gibt es dann aber auch eine Faktorzerlegung von f bzw. g über R, wobei einer der Faktoren p ist. Mit anderen Worten,

$$p \mid f \text{ oder } p \mid g \text{ (in } R[X]).$$

Also ist p ein Primelement von R[X].
Zu 3. Sei p ein Primelement von R[X], wie wir oben gezeigt haben, gibt es dann eine Darstellung von p als Produkt von Primelementen der in 1 und 2 beschriebenen Typen. Weil p selbst Primelement ist, muß die Anzahl der Faktoren in dieser Zerlegung gleich 1 sein, d.h. p ist Primelement eines in 1 oder 2 beschriebenen Typs.
QED.

2.7.10 Polynomringe über einem Körper

Für jeden Körper K ist der Polynomring

$$K[X_1,...,X_n]$$

ein ZPE-Ring.
Beweis. Das folgt unmittelbar aus 2.7.9 und der Tatsache, daß Polynomring in einer Unbestimmten über K Euklidische Ring sind.
QED.

Bemerkung
Da wir dies später benötigen, beschäftigen wir uns jetzt noch etwas mit der Frage, wie man entscheidet, ob ein gegebenes Polynom irreduzibel ist.

2.7.11 Eisenstein-Polynome

Seien R ein ZPE-Ring,

$$p \in \mathbb{P}(R)$$

ein Primelement von R und

$$f(X) = a^nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_0 \in R[X]$$

ein Polynom des Grades n mit Koeffizienten aus R. Dann heißt R Eisenstein-Polynom bezüglich p,
wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. $p^2 \nmid a_0$.
2. $p \mid a_i$ für $i = 0, 1, ... , n-1$.
3. $p \nmid a_n$,

Ein Polynom von R[X] heißt Eisenstein-Polynom, wenn es Eisensten-Polynom bezüglich irgendeines Primelements von R ist.

2.7.12 Irreduzibilitätskriterium von Eisenstein

Sei R ein ZPE-Ring mit dem Quotientenkörper K = Q(R). Dann ist jedes Eisenstein-Polynom von R[X] irreduzibel in K[X].
Beweis. Sei

$$f(X) = a^nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_0 \in R[X]$$

ein Eisenstein-Polynom des Grades n bezüglich des Primelements

$$p \in \mathbb{P}(R).$$

Wir können f durch den Inhalt I(f) teilen und somit annehmen, daß f den Inhalt

$$I(f) = 1$$

besitzt. Wenn f(X) über K in Faktoren eines Grades < n zerfällt, so gilt nach 2.7.8 dasselbe über R,

$$f(X) = g(X)\cdot h(X) \text{ mit } g(X), h(X) \in R[X], \deg g < n, \deg h < n.$$

Wir schreiben

$$g(X) = b_uX^u+...+b_0,\ b_u \neq 0,\ u > 0,$$

$$g(X) = c_vX^v+...+c_0,\ c_v \neq 0,\ v > 0.$$

Sei

$$\rho: R \to R/(p),\ a \mapsto a + pR$$

der natürliche Homomorphismus. Er definiert einen Homomorphismus

$$: R[X] \to (R/(p))[X],\ p(X) \mapsto p^{\rho}(X),$$

der in jedem Polynom $p(X) \in R[X]$ alle Koeffizienten durch deren Bilder bei ρ ersetzt. Mit $f = g \cdot h$ gilt dann auch

$$f^{\rho} = g^{\rho} \cdot h^{\rho} \text{ in } (R/(p))[X] \qquad (\subseteq Q(R/(p))[X])$$

Man beachte, (p) ist ein Primideal von R, d.h. Q(R/(p)) ein Körper. Da f ein Eisenstein-Polynom bezüglich p ist, gilt

$$f^{\rho} = \rho(a_n)X^n$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung in Primfaktoren im Ring

$$Q(R/(p))[X]$$

sind somit alle Primteiler von f^{ρ} assoziiert zu X. Also gilt

$$g^{\rho}(X) = \rho(b_u)X^u \text{ und } h^{\rho} = \rho(c_v)X^v,$$

also

$$b_0 \equiv 0 \pmod{p} \text{ und } c_0 \equiv 0 \pmod{p}$$

also

$$a_0 = b_0 c_0 \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Letzteres steht aber im Widerspruch zu der Annahme, daß f ein Eisenstein-Polynom bezüglich p sein soll. Also ist f irreduzibel in K[X].
QED.
Beispiel 1
$f(X) = X^2 - 2 \in \mathbb{Z}[X]$ ist ein Eisenstein-Polynome bezüglich 2, also irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.
Beispiel 2
$f(X) = X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ ist reduzibel in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$.

2.7.13 Reduktionskriterium der Irreduzibilität

Seien R und S Integritätsbereiche mit den Quotientenkörpern

$$K = Q(R) \text{ und } L = Q(S)$$

und

$$h: R \to S$$

ein Homomorphismus von Ringen mit 1. Weiter sei

$$f(X) \in R[X]$$

ein Polynom mit

$$f^h(X) \neq 0,\ \deg f^h(X) = \deg f(X),\ f^h(X) \text{ irreduzibel in } L[X]$$

wenn f^h das Bild von f beim Homomorphismus

$$R[X] \to S[X],\ p(X) \mapsto p^h(X),$$

bezeichnet, der in jedem Polynom von R[X] die Koeffizienten durch deren Bilder bei h ersetzt.

Dann läßt sich f(X) über R nicht in ein Produkt von Polynomen kleineren Grades zerlegen.
Beweis. Aus der Existenz einer solchen Zerlegung, sagen wir

$$f(X) = g(X) \cdot h(X) \text{ in } R[X],$$

folgte

$$f^h(X) = g^h(X) \cdot h^h(X) \text{ in } L[X],$$

was nicht möglich ist, da f^h irreduzibel sein soll.
QED.
Beispiel 1

Das Polynom

$$f(X) = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$$

ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Beweis. Wir betrachten den natürlichen Homomorphismus

$$h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(2) = \mathbb{F}_2.$$

Wäre f(X) reduzibel, so würde dasselbe für

$$f^h(X) = X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X].$$

gelten. Das Polynom wäre über $\mathbb{F}_2$ das Produkt von zwei linearen Polynomen, würde also in $\mathbb{F}_2$ eine Nullstelle besitzen. Das ist aber nicht so:

$f^h(0) = 1 \neq 0$

$f^h(1) = 1 + 1 + 1 = 1 \neq 0.$

QED.

Beispiel 2 (weglassen)

Das Polynom

$$f(X) = X^5 - 5X^4 - 6X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$$

ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Beweis. Wir betrachten den natürlichen Homomorphismus

$$h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(2) = \mathbb{F}_2.$$

Es gilt

$$f^h(X) = X^5 + X^4 + 1 \in \mathbb{F}_2[X].$$

Falls f^h in ein Produkt von Faktoren kleineren Grades zerfällt, so hat einer der Faktoren einen Grad ≤ 2. Der Grad 1 ist nicht möglich, denn dann hättte f^h in $\mathbb{F}_2$ ein Nullstelle. Bleibt noch der Fall, daß f in einen quadratischen Faktor und einen Faktor dritten Grades zerfälllt (über $\mathbb{Q}$, also über $\mathbb{Z}$):

$$f(X) = (X^2+aX + b)(X^3+cX^2+dX+e),\ a,b,c,d,e \in \mathbb{Z}.$$

Wegen be = -1 folgt

$$b = -e = \pm 1,$$

sagen wir

$$b = \varepsilon \text{ und } e = -\varepsilon.$$

d.h.

$$\begin{aligned} f(X) &= (X^2+aX + \varepsilon)(X^3+cX^2+dX-\varepsilon) \\ &= X^5 + X^4(c+a) + X^3(\varepsilon+ac+d) + X^2(-\varepsilon+ad+\varepsilon c) + X(-\varepsilon a+\varepsilon d) - 1. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} a + c &= -5 \\ \varepsilon+ac+d &= 0 \\ -\varepsilon+ad+\varepsilon c &= 0 \\ -\varepsilon a+\varepsilon d &= -6 \end{aligned}$$

Aus der ersten und letzten Gleichung folgt c = -5-a und d = -6ε+a, also

$$\begin{aligned} \varepsilon-5a-a^2-6\varepsilon+a &= 0 \\ -\varepsilon-6a\varepsilon+a^2-5\varepsilon-a\varepsilon &= 0 \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} &\text{(I)} \quad a^2+4a+5\varepsilon = 0 \\ &\text{(II)} \quad a^2-7a\varepsilon-6\varepsilon = 0 \end{aligned}$$

d.h. (Differenz):

$$(4+7\varepsilon)a + 11\varepsilon = 0$$

Der Fall $\varepsilon = +1$: $11a + 11 = 0$ liefert $a = -1$ (keine Lösung von (I) ist nicht möglich.
Der Fall $\varepsilon = -1$: $-3a - 11 = 0$ ist nicht möglich (3 ist kein Teiler von 11).
QED.

Bemerkung

Die nachfolgenden Ergebnisse stehen nicht unmittelbar in Zusammenhang mit ZPE-Ringen, werden jedoch später benötigt.

2.7.14 Die Ableitung eines Polynoms

Für jeden kommutativen Ring R mit 1 definieren wir die Abbildung

$$D = \partial/\partial X: R[X] \to R[X],\ f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto f'(X) := \sum_{i=0}^{n} i a_i X^{i-1}.$$

Wie in der reellen Analysis heißt Df Ableitung von f nach X. Es gelten die üblichen Rechenregeln:

1. $D(f+g) = Df + Dg$
2. $D(fg) = (Df)\cdot g + f\cdot Dg$
3. $Df(g_1(X),...,g_n(X)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial Y_i}(g_1(X),...,g_n(X))\cdot\frac{\partial g}{\partial X}(X)$ für $f \in R[Y_1,...,Y_n]$

Insbesondere ist D eine R-lineare Abbildung (nach 1. und 2. mit deg f = 0).

Beweis. Zu 1: trivial.

Zu 2: beide Seiten sind Linear in f und g. Es reicht den Spezialfall $f(X) = X^a$, $g(X) = X^b$ zu betrachten, in welchem die Behauptung trivial ist.

Zu 3: Beide Seiten sind trivial in f. Es reicht den Fall

$$f = Y_1^{k_1}\cdot...\cdot Y_n^{k_n}$$

zu betrachten, in welchem die Behauptung unmittelbar aus 2. folgt.

QED.

2.7.15 Ableitungen und mehrfache Nullstellen

Seien K ein Körper, $f(X) \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$ eine Nullstelle von f. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) a ist eine mehrfache Nullstelle von f(X), d.h. es gilt

$f(X) = (X-a)^m g(X)$ mit $m > 1$ und $g(X) \in K[X]$.

(ii) $f'(a) = 0$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Aus

$$f(X) = (X-a)^m g(X)$$

folgt

$$\frac{\partial f}{\partial X}(X) = m(X-a)^{m-1}g(X) + (X-a)^m g'(X)$$

also

$$(1)\qquad f'(a) = \frac{\partial f}{\partial X}(a) = m(a-a)^{m-1}g(a) + (a-a)^m g'(a).$$

Wegen $m > 1$ steht auf der rechten Seite Null.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Wegen $f(a) = 0$ gilt

$$f(X) = f(X) - f(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i(X^i - a^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i(X-a)(X^{i-1}+aX^{i-2}+a^2X^{i-3}+...+a^{i-1})$$

$= (X-a)\cdot$Polynom aus K[X].

Wir können also schreiben

$f(X) = (X-a)^m g(X)$ mit $m \geq 1$ und $g(X) \in K[X]$.

Wir können damit m so groß wählen, daß $g(a) \neq 0$ gilt. Es reicht zu zeigen,

$m > 1$.

Wie oben gezeigt, gilt (1). Nach Voraussetzung ist die linke Seite gleich Null, d.h.

$0 = m(a-a)^{m-1} g(a) + (a-a)^m g'(a)$.

Wegen $m \geq 1$ ist der zweite Summand Null, also ist es auch der erste. Wäre m = 1, so würden wir erhalten

$0 = g(a)$,

im Widerspruch zur Wahl von g.

QED.

*2.8 Ganze Erweiterungen

2.8.1 Moduln

Sei R ein Ring mit 1. Ein R-Modul ist eine abelsche Gruppe M zusammen mit einer Abbildung

$$R \times M \to M, (r,m) \mapsto r \cdot m,$$

genannt Modul-Multiplikation, welche folgenden Bedingen genügt.

1. $(r'r'')\cdot m = r'(r''\cdot m)$ für beliebige $r', r'' \in R$ und beliebige $m \in M$.
2. $1 \cdot m = m$ für beliebige $m \in M$.
3. $(r'+r'')\cdot m = r'\cdot m + r''\cdot m$ für beliebige $r', r'' \in R$ und beliebige $m \in M$.
4. $r\cdot(m'+m'') = r\cdot m' + r\cdot m''$ für beliebige $r \in R$ und $m', m'' \in M$.

Ein R-Modul M heißt endlich oder genauer endlich erzeugt, wenn es endliche viele Elemente

$$m_1,...,m_n \in M$$

gibt mit der Eigenschaft, daß jedes Element eine R-Linearkombination dieser endlich vielen Elemente ist,

$$M = R\, m_1 + ... + R m_n := \{ r_1 m_1 + ... + r_n m_n \}$$

Ein Teilmodul von eines R-Moduls M ist eine Teilmenge von M, die mit den Operationen von M ein R-Modul ist.

Bemerkungen

(i) Die ersten beiden Eigenschaften könnte man beschreiben, indem sagt die Abbildung definiert ein Operation der multiplikativen Halbgruppe von R auf M.

(ii) Die letzten beiden Eigenschaften besagen, die Abbildung ist biadditiv.

(iii) Ist R ein Körper, so ist ein R-Modul dasselbe wie ein Vektorraum über R. Mit anderen Worten, ein R-Modul ist ein Vektorraum, dessen Grundkörper nur ein Ring ist.

(iv) Das Unterraumkriterium für Vektorräume gilt auch für Moduln (der Beweis ist derselbe): eine nicht-leere Teilmenge $N \subseteq M$ ist genau dann ein Teilmodul, wenn für je zwei Elemente $n, n' \in N$ und je zwei Elementen $r, r' \in R$ auch

$$rm + r'm' \in N$$

gilt.

2.8.2 Ganze Ringhomomorphismen (“Erweiterungen”)

Sei $h: R \to S$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1. Ein Element $x \in S$ heißt ganz über R (bezüglich h), wenn es ein Polynom $f \in R[X]-\{0\}$ mit dem höchsten Koeffizienten 1 gibt mit

$$f^h(x) = 0.$$

Der Homomorphismus $h: R \to S$ heißt ganz, wenn jedes Element von S ganz ist über R bezüglich h.

Bemerkung

Sei h: R → S ein Homomorphismus von kommutativen Ring mit 1. Dann ist S ein R-Modul bezüglich der Modul-Multiplikation

$$R\times S \to S,\ (r,s) \mapsto h(r)\cdot s.$$

2.8.3 Kriterium für die Ganzheit eines Elements

Seien h:R → S ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit und x∈S ein Element. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) x ist ganz über R bezüglich h.
(ii) Der Ring h(R)[x] ist ein endlich erzeugter R-Teilmodul von S.
(iii) Es gibt einen endlich erzeugten Teilmodul M⊆S mit

$$xM \subseteq M \text{ und } 1\in M.$$

Beweis. (i) ⇒ (ii). Nach Voraussetzung besteht eine Relation der Gestalt

(1) $$x^n + h(a_1)x^{n-1} + ... + h(a_n) = 0 \text{ mit } a_i \in R.$$

Sei

$$M := R\cdot x^0 + R\cdot x + R\cdot x^2 + ... + R\cdot x^{n-1}$$

Dann ist M ein endlich erzeugter R-Modul mit

$$h(R)\cup\{x\} \subseteq M \subseteq h(R)[x].$$

Es reicht zu zeigen, rechts gilt das Gleichheitszeichen. Der Ring

$$h(R)[x]$$

ist der kleinste Teilring von S, der h(R) und x enthält. Deshalb reicht es zu zeigen,

$$M \text{ ist ein Teilring von } S.$$

Offensichtlich ist M eine additive Untergruppe von S. Es reicht also zu zeigen, die Produkt von zwei Elementen aus M liegt wieder in M. Da M ein R-Modul ist, reicht es zu zeigen, das Produkt von je zwei der Erzeugenden x^i liegt wieder in M,

$$x^i\cdot y^j \in M \text{ für } i,j = 0,...,n-1.$$

Zum Beweis kann man annehmen, i = 1. Dann ist die Aussage aber für j=0,..., n-2 trivial:

$$x\cdot x^j = x^{j+1} \in M.$$

Sei also h = n-1. Wir haben zu zeigen $x^n \in M$. Das gilt aber wegen (1).
(ii) ⇒ (iii). trivial: M = h(R)[x] ist ein solcher Modul.
(iii) ⇒ (i). Sei

$$M = Rm_1 + ... + Rm_s$$

ein Teilmodul von S mit xM ⊆ M und 1∈M. Wegen xM⊆M gilt

$$xm_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}m_j \text{ mit } a_{ij}\in R,$$

d.h.

$$0 = \sum_{j=1}^{s} (x\delta_{ij} - a_{ij})m_j \text{ für } i = 1,...,s,$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol bezeichne. Wir fixieren jetzt einen Index l betrachten die s×s- Matrix $(x\delta_{ij} - a_{ij})$, multiplizieren die i-te Gleichung mit dem Minor A_{il} und bilden die alternierende Summe. Nach dem Entwicklungssatz für Determinanten erhalten wir

$$0 = \det(x\delta_{ij} - a_{ij})\cdot m_l.$$

Diese Relation gilt für jedes m_l und, da die m_l den Modul M erzeugen, für jedes Element von m,

$$\det(x\delta_{ij} - a_{ij})\cdot m = 0 \text{ für jedes } m\in M.$$

Wegen 1∈M ist damit auch

$$\det(x\cdot h(\delta_{ij}) - h(a_{ij})) = 0.$$

Nun ist

$$f(x) = \det(\delta_{ij}\cdot X - a_{ij}) \in R[X]$$

ein Polynom vom Grad s mit dem höchsten Koeffizienten 1 und es gilt

$$f^h(x) = \det(x\cdot h(\delta_{ij}) - h(a_{ij})) = 0.$$

Mit anderen Worten x ist ganz über R.
QED.

2.8.4 Beispiele

(i) Dei Ring der ganzen Gaußschen Zahlen ist ganz über $\mathbb{Z}$ (weil er als $\mathbb{Z}$-Modul endliche erzeugt wird).

(ii) Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ von 2.1.7 ist ganz über $\mathbb{Z}$ (aus demselben Grund).

(iii) Die Ringe von 2.1.8 Beispiel 3 sind ganz über R (aus demselben Grund).
Explizit: ist S ein kommutativer Ring mit 1,

$$R \subseteq S$$

ein Teilring mit 1 und $x \in S$ ein über R ganzes Element, so ist

$$R[x] \text{ ganz über } S.$$

Denn R[x] ist dann ein endlich erzeugter R-Modul der die 1 enthält und jedes Element y von R[x] hat die Eigenschaft

$$y\cdot R[x] \subseteq R[x]$$

2.8.5 Die ganze Abschließung

Sei $h: R \to S$ ein Homomorphismus von Ringen mit 1. Dann ist die Menge

$$\overline{R} := \{ x \in S \mid x \text{ ist ganz über R bezüglich h} \}$$

ein Teilring von S. Er heißt <u>ganze Abschließung</u> von R in S.

Ist R ein Teilring von S und h die natürliche Einbettung $R \to S$, so sagt man, R ist <u>ganz abgeschlossen</u> in S, falls $R = \overline{R}$ gilt.

Beweis. Wir können R durch $h(R) \subseteq S$ ersetzen und deshalb annehmen,

$$R \subseteq S$$

(und h ist die natürliche Einbettung). Wir haben zu zeigen, mit je zwei Elementen

$$x,y \in \overline{R}$$

liegt auch das Produkt und die Summe in $\overline{R}$. Weil x ganz ist über R, ist R[x] ein endlich erzeugter R-Modul,

$$R[x] = R\omega_1 + \ldots + R\omega_s$$

Weil das Element y ganz ist über R, ist es auch ganz über R[x], d.h.
R[x,y] ist ein endlich erzeugter R[x]-Modul,

$$R[x, y] = R[x]\eta_1 + \ldots + R[x]\eta_s.$$

Zusammen erhalten wir, daß R[x,y] als Modul über R von den endlich vielen Produkten

$$\omega_i\eta_j$$

erzeugt wird. Deshalb ist jedes Element von R[x,y] ganz über R, inbesondere also auch xy und x+y.
QED.

2.8.6 Beispiel für einen ganz abgeschlossenen Teilring

Sei R ein ZPE-Ring mit dem Quotientenkörper K. Dann ist R ganz abgeschlossen in K.
Beweis. Sei $x \in K$ ganz über K. Wir haben zu zeigen,

$$x \in R.$$

Wir schreiben x in der Gestalt

$$x = a/b \text{ mit } a,b \in R \text{ und } a,b \text{ teilerfremd.}$$

Nach Voraussetzung gilt für x eine Identität der Gestalt

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \text{ mit } a_i \in R.$$

Wir multiplizieren diese Identität mit b^n und erhalten

$$a^n + a_1 a^{n-1} b + a_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + a_n b^n = 0.$$

Dies ist eine Identität in R. Es gilt also

$$b \text{ teilt } a^n.$$

Das ist aber nur möglich, wenn b eine Einheit ist, denn a und b sind nach Wahl teilerfremd. Also ist x = a/b ein Element von R.
QED.

3. Körper

3.1Körper, Teilkörper, Körpererweiterungen

3.1.1 Definitionen

Ein Körper ist eine kommutativer Ring mit 1, dessen von Null verschiedene Elemente Einheiten sind. Ein Teilkörper eines Körpers K ist eine Teilmenge

$$k \subseteq K,$$

die mit den Operationen von K ein Körper ist. Man sagt in dieser Situation auch, K/k ist eine Körpererweiterung oder auch, K ist ein Erweiterungskörper von k.

Bemerkungen

(i) Ist K/k eine Körpererweiterung, so besitzt K die Struktur eines k-Vektorraums und die einer k-Algebra mit dem Struktur-Homomorphismus

$$k \to K,\ x \mapsto x.$$

(ii) Besitzt ein Körper K die Struktur einer Algebra über einem Körper k, so ist der Strukturhomomorphismus

$$h: k \to K$$

injektiv, d.h. k kann mit seinem Bild bei h identifiziert und damit als Teilkörper von K aufgefaßt werden. Mit anderen Worten, K/k ist eine Körpererweiterung. Die Injektivität von h folgt aus der Tatsache, daß Ker h ein Ideal von k ist und k als Körper nur die Ideale (0) und k besitzt. Der Fall Ker h = k ist nicht möglich, denn dann wäre h identisch Null, im Widerspruch dazu, daß $h(1) = 1 \neq 0$ ist.

(iii) Seien K/k und K'/k Körpererweiterungen. Ein k-Homorphismus $K \to K'$ ist ein Homomorphismus von k-Algebren

$$h: K \to K'.$$

Wegen $k \subseteq K$ und $k \subseteq K'$ bedeutet dies insbesondere, daß h jedes Element von k in sich abbildet, also nicht die Null-Abbildung ist, also injektiv ist. Wir sprechen in dieser Situation daher auch von h als von einer k-Einbettung oder einer Einbettung über k. Ist h bijektiv, so heißt h auch k-Isomorphismus oder Isomorphismus über k.

3.1.2 Beispiele: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind Körper.

3.1.3 Beispiel: $\mathbb{F}_p$

$\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist für jede Primzahl ein Körper mit endlich vielen (nämlich p) Elementen.

3.1.4 Beispiel: Rationale Funktionenkörper

Für jeden Körper K und beliebige Unbestimmte $X_1,...,X_n$ ist

$$K(X_1,...,X_n) := Q(K[X_1,...,X_n])$$

ein Körper.

3.1.5 Beispiel: Durchschnitte von Teilkörpern

Seien K ein Körper und $\{K_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Teilkörpern von K. Dann ist

$$k := \cap_{i\in I} K_i$$

ein Teilkörper von K: mit je zwei Elementen aus k liegt auch deren Summe, deren Produkt und - falls defniert - deren Quotient in k. Die Körperaxiome für K übertragen sich auf k.

3.1.6 Beispiel: der von einer Menge erzeugte Teilkörper

Seien K ein Körper, $k \subseteq K$ ein Teilkörper und $M \subseteq K$ eine Teilmenge. Dann ist der Durchschnitt

$$k(M) := \cap_{k\subseteq K'\subseteq K,\ M\subseteq K'} K'$$

aller Teilkörper K' von K, welche den Körper k und die Menge M enthalten, wieder ein Körper. Er heißt der von M über k erzeugte Teilkörper von K. Ist M endlich, sagen wir

$$M = \{m_1,...,m_r\}$$

so schreibt man auch

$$k(m_1,...,m_r) = k(M).$$

Ein Körper der Gestalt

$k(m_1,...,m_r)$

heißt endlich erzeugte Körpererweiterung von k und im Fall r = 1 auch einfache Körpererweiterung.

Bemerkungen

(i) Sind $m_1,...,m_r$ endlich viele Elemente auf M, $f,g\in k[X_1,...,X_r]$ Polynome mit

$$g(m_1,...,m_r) \neq 0,$$

so liegt auf Grund der Körperaxiome das Element

(1) $f(m_1,...,m_r)/g(m_1,...,m_r)$ in k(M)

(ii) Umgekehrt bilden die Elemente der Gestalt (1) einen Körper,

$$\{ f(m_1,...,m_r)/g(m_1,...,m_r) \mid m_1,...,m_r \in M,\ f,g\in k[X_1,...,X_r],\ g(m_1,...,m_r) \neq 0\}$$

der den Körper k und die Menge M enthält. Nach Definition von k(M) liegt k(M) ganz in diesem Körper. Nach (i) ist dieser Körper aber auch ganz in k(M) enthalten, d.h. es ist

$$k(M) = \{ f(m_1,...,m_r)/g(m_1,...,m_r) \mid m_1,...,m_r \in M,\ f,g\in k[X_1,...,X_r],\ g(m_1,...,m_r) \neq 0\}$$

(iii) Es gilt

$$k(M) = Q(k[M]).$$

Beweis von (iii). Nach Definition ist k[M] der kleinste Ring, der k und die Menge M enthält. Da k(M) ebenfalls ein solcher Ring ist, folgt

$$k[M] \subseteq k(M).$$

Da jedes Element von k[M] - {0} eine Einheit von k(M) ist, gilt auf Grund der Universalitätseigenschaft der Quotientenringe,

$$Q(k[M]) \subseteq k(M).$$

Schließlich ist Q(k[M]) ein Körper, der k und die Menge M enthält. Also gilt

$$k(M) \subseteq Q(k[M]).$$

QED.

3.1.7 Das Kompositum, ausgezeichnete Klassen

Seien K' und K" zwei Körper, welche Teilkörper eines gemeinsamen Erweiterungskörpers K sind. Dann heißt der Durchschnitt

$$K'K" := \bigcap_{K'\cup K"\subseteq L\subseteq K} L$$

über alle Teilkörper L von K, welche sowohl K' als auch K" enthalten, Kompositum von K' und K". Wir sagen in dieser Situation (d.h. wenn es einen gemeinsamen Erweiterungskörper von K' und K" gibt), daß K'K" definiert ist.
Eine Kette

$$...\subseteq K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq ...$$

von ineinanderliegenden Teilkörpern heißt auch Körperturm.

Eine Klasse $\mathcal{K}$ von Körpererweiterungen heißt ausgezeichnet, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt.

1. Für jeden Körperturm $k \subseteq F \subseteq K$ gilt

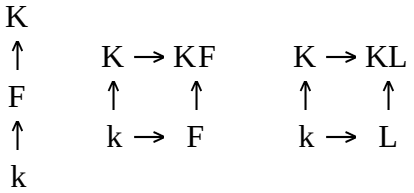
$$K/k \in \mathcal{K} \Leftrightarrow K/F \in \mathcal{K} \text{ und } F/k \in \mathcal{K}.$$

2. Für jede Körpererweiterung F/k gilt

$$K/k \in \mathcal{K} \text{ und } KF \text{ ist definiert} \Rightarrow KF/F \in \mathcal{K}.$$

3. $K/k \in \mathcal{K}$ und $L/k \in \mathcal{K}$ und KL ist definiert $\Rightarrow KL/k \in \mathcal{K}$.

Die in 1., 2. und 3. beschriebenen Situationen kann man durch die folgenden Diagramme illustrieren.



Bemerkung

Falls für eine Klasse $\mathcal{K}$ von Körpererweiterungen die ersten beiden Bedingungen erfüllt sind, so ist es auch die drittte, d.h. $\mathcal{K}$ ist ausgezeichnet.

Beweis. Betrachten wir das rechte Diagramm. Wegen 2 steht dann jeder Pfeil für ein Element aus $\mathcal{K}$. Dasselbe gilt daher auch für die Zusammensetzung zweier Pfeile dieses Diagramms (wegen 1).
QED.

3.1.8 Beispiel: Erzeugendensysteme beim Übergang zum Kompositum

Seien K/k und L/k Körpererweiterungen mit folgenden Eigenschaften.

1. KL ist definiert.
2. $K = k(\alpha_i \mid i \in I)$.

Dann gilt

$$KL = L(\alpha_i \mid i \in I).$$

Beweis. (Übungsaufgabe ?) Wir setzen

$$K' := L(\alpha_i \mid i \in I).$$

Weil L in KL liegt und alle α_i in K also in KL liegen, gilt dann

$$K' \subseteq KL.$$

Außerdem gilt

$$K = k(\alpha_i \mid i \in I) \subseteq K' \text{ und } L \subseteq K'.$$

Es reicht also zu zeigen, K' ist ein Körper. Das ist aber der Fall: nach Definition ist K' der kleinste Körper, der L und alle α_i enthält.

QED.

3.2 Endliche und algebraische Körpererweiterungen

3.2.1 Definitionen

Sei K/k eine Körpererweiterung. Ein Element

$$x \in K$$

heißt algebraisch über k, wenn es ein Polynom $f(X) \in k[X] - \{0\}$ gibt mit

$$f(x) = 0.$$

Anderfalls heißt x transzendent über k. Ist $x \in K$ algebraisch über k so heißt das Polynom

$$f_\alpha(X) \in k[X]$$

kleinsten Grades mit der Nullstelle α und dem höchsten Koeffizienten 1 Minimalpolynom von α über k.

Seien

$$x_1,...,x_n \in K$$

endlich viele Elemente. Diese Elemente heißen algebraisch abhängig über k, wenn es ein Polynom

$$f(X_1,...,X_n) \in k[X_1,...,X_n] - \{0\}$$

gibt mit

$$f(x_1,...,x_n) = 0.$$

Andernfalls heißen die Elemente algebraisch unabhängig über k.

Eine beliebige Familie

$$\{x_i\}_{i \in I} \ , \ x_i \in K$$

von Elementen aus K heißt algebraisch abhängig über k, falls endlich viele der x_i algebraisch abhängig sind über k. Andernfall heißt die Familie algebraisch unabhängig über k.

Eine Körpererweiterung K/k heißt rein transzendent, wenn es eine Familie

$$\{x_i\}_{i \in I} \ , \ x_i \in K$$

von Elementen aus K gibt, die algebraisch unabhängig über k ist, mit der Eigenschaft, daß die Menge der x_i der Körper K über k erzeugt:

$$K = k(x_i \mid i \in I)$$

Eine Körpererweiterung K/k heißt algebraisch, falls jedes Element von K algebraisch ist über k. Andernfalls heißt die Körpererweiterung transzendent. Eine Körpererweiterung K/k heißt endlich, wenn K als Vektorraum über k endich-dimensional ist. Die Dimension

$$[K:k] = \dim_k K$$

heißt in dieser Situation auch Körpergrad von K über k.

3.2.2 Beispiel: Rein transzendente Körpererweiterungen

(i) Seien k ein Körper, $X_1,...,X_n$ Unbestimmte und

$$K := k(X_1,...,X_n)$$

der Körper der rationalen Funktionen in $X_1,...,X_n$ über k. Dann sind die

$$X_1,...,X_n$$

algebraisch unabhängig über k und K/k ist eine rein transzendente Körpererweiterung.

(ii) Seien K/k eine algebraische Körpererweiterung und
$$x_1,...,x_n \in K$$
Elemente, die algebraisch unabhängig über k sind. Dann ist die rein transzendente Körpererweiterung
$$k(x_1,...,x_n)$$
als k-Algebra isomorph zum rationalen Funktionenkörper
$$k(X_1,...,X_n).$$

Beweis. Zu (i). Es reicht zu zeigen, die $X_1,...,X_n$ sind algebraisch unabhängig über k. Andernfalls gibt es ein Polynom $f \neq 0$ in n Unbestimmten mit
$$f(X_1,...,X_n) = 0 \text{ in } K = Q(k[X_1,...,X_n]).$$
Weil $k[X_1,...,X_n]$ nullteilerfrei ist, gilt dann sogar
$$f(X_1,...,X_n) = 0 \text{ in } k[X_1,...,X_n],$$
im Widerspruch dazu, daß das Polynom f ungleich Null sein soll.
Zu (ii). Betrachten wir den Homomorphismus von k-Algebren
$$\varphi: k[X_1,...,X_n] \to K,\ f(X_1,...,X_n) \mapsto f(x_1,...,x_n).$$
Sein Bild ist gerade
$$Im(\varphi) = k[x_1,...,x_n]$$
(nach Definiton von $k[x_1,...,x_n]$). Ist $f(X_1,...,X_n)$ ein Element aus dem Kern, so gilt
$f(x_1,...,x_n) = 0$,
was auf Grund der algebraischen Unabhängigkeit der $x_1,...,x_n$ nur möglich ist im Fall $f = 0$. Also gilt
$$Ker(\varphi) = \{0\}.$$
Wir haben gezeigt, die Abbildung
$$k[X_1,...,X_n] \to k[x_1,...,x_n],\ f(X_1,...,X_n) \mapsto f(x_1,...,x_n),$$
ist ein Isomorphismus von k-Algebren. Wir setzen diesen Isomorphismus mit der natürlichen Abbildung der rechten Rings in dessen Quotientenkörper zusammen,
$$k[X_1,...,X_n] \to k[x_1,...,x_n] \subseteq k(x_1,...,x_n),\ f(X_1,...,X_n) \mapsto f(x_1,...,x_n).$$
Bei dieser Abbildung geht jedes von Null verschiedene Polynom in eine Einheit über. Auf Grund der Universalitätseigenschaft der Quotientenringe, gibt es eine Abbildung
$$k(X_1,...,X_n) \to k(x_1,...,x_n),\ \frac{f(X_1,...,X_n)}{g(X_n,...,X_n)} \mapsto g(x_1,...,x_n)^{-1} f(x_1,...,x_n).$$
Auf Grund der Beschreibung von $k(x_1,...,x_n)$ in 3.1.6 Bemerkung (ii) ist diese Abbildung surjektiv. Auf Grund der algebraischen Unabhängigkeit der x_i ist sie auch injektiv, also ein Isomorphismus.
QED.

3.2.3 Beispiel: einfache algebraische Körpererweiterungen

Seien K/k eine Körpererweiterung, $\alpha \in K$ ein über k algebraisches Element und
$$f_\alpha(X) = c_o + c_1 X + ... + c_{n-1} X^{n-1} + X^n \in k[X]$$
das Minimalpolynom von α über k. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $[k(\alpha):k] = \deg f_\alpha = n\ (< \infty)$. Insbesondere ist K/k eine endliche Körpererweiterung.

(ii) $1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}$ ist eine k-Vektorraumbasis von $k(\alpha)$.

(iii) Die Abbildung

$$k[X]/(f_\alpha) \to k(\alpha),\ p(X) \bmod (f_\alpha) \mapsto p(\alpha),$$

ist wohldefiniert und ist ein Isomorphismus von k-Algebren (kurz k-Isomorphismus).

Bemerkung

Durch das Minimal-Polynom f_α ist die multiplikative Struktur des k-Vektorraum

$$V := k\cdot 1 + k\cdot\alpha + ... + k\cdot\alpha^{n-1}$$

vollständig festgelegt: bei der Berechnung des Produkts zweier Elemente auf V reicht es auf Grund des Distributivgesetzes zu wissen, wie man die Produkte

$$\alpha^i\cdot\alpha^j \text{ für } i,j = 1,...,n-1$$

als Linearkombination der $1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}$ schreiben kann. Dazu wiederum reicht es die Produkte der Gestalt

$$\alpha\cdot\alpha^j,\ j = 1,...,n-1.$$

als Linearkombination der $1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}$ zu schreiben. Für $j < n-1$ ist das klar:

$$\alpha\cdot\alpha^j = \alpha^{j+1}$$

und für $j = n-1$ erhält man mit Hilfe des Minimalpolynoms

$$\alpha\cdot\alpha^{n-1} = \alpha^n = -(c_o + c_1\alpha + ... + c_{n-1}\alpha^{n-1})$$

Beweis. Zu (i) und (ii). Zumindest gilt

(1) $$V := k\cdot 1 + k\cdot\alpha + ... + k\cdot\alpha^{n-1} \subseteq k(\alpha).$$

Außerdem sind die $1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}$ linear unabhängig über k, denn andernfalls würde es ein Polynom über k des Grades $\le n-1$ geben mit der Nullstelle α (und dem höchsten Koeffizienten 1). Das steht aber im Widerspruch zur Definiton des Minimalpolynoms. Zum Beweis der Aussagen von (i) und (ii) reicht es also zu zeigen, in (1) gilt das Gleichheitszeichen.

Nach Definiton ist $k(\alpha)$ der kleinste Körper zwischen k und K, der das Element α enthält.

Der Vektorraum V liegt ebenfalls zwischen k und K und enthält das Element α. Es reicht also zu zeigen, V ist ein Körper.

1. Schritt. Das Produkt zweier Elemente V liegt wieder in V, d.h. V ist eine k-Algebra.

Es reicht zu zeigen,

(2) $$\alpha\cdot v \in V \text{ für jedes } v\in V.$$

Denn dann gilt auch

$$\alpha^i\cdot v \in V \text{ für jedes } v\in V,$$

also auch

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\alpha^i\right)\cdot v \in V \text{ für beliebige } a_i\in k.$$

Beweisen wir also (2). Sei

$$v = d_0 + d_1\alpha + ... + d_{n-1}\alpha^{n-1}.$$

Dann gilt

$$\alpha\cdot v = d_0\alpha + d_1\alpha^2 + ... + d_{n-2}\alpha^{n-1} + d_{n-1}\alpha^n$$

Wir ziehen von der rechten Seite

$$-d_{n-1}\cdot f_\alpha(\alpha) = -d_{n-1}\cdot 0 = 0$$

ab und erhalten, da der höchste Koeffizient von $d_{n-1}\cdot f_\alpha(X)$ gerade $d_{n-1}X^n$ ist,

$$\alpha\cdot v = \text{k-Linearkombination von } 1, \alpha, ..., \alpha^{n-1} \in V.$$

2. Schritt: Das Inverse jedes Elements von V-{0} liegt in V, d.h. V ist ein Körper.
Sei

$$v \in V - \{0\}.$$

Nach dem ersten Schritt liegen die (n+1) Vektoren

$$v^0 = 1, v^1 = 1, v^2, \ldots, v^n$$

sämtlich in V. Da V die Dimension n hat, sind sie linear abhängig über k, d.h. es gibt Koeffizienten $a_i \in k$, die nicht sämtlich gleich Null sind, mit

(3) $$a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \ldots + a_n v^n = 0$$

Wir wählen r derart, daß gilt

$$0 = a_0 = \ldots = a_{r-1}, 0 \neq a_r.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{1}{v^r} \in k(\alpha)$ erhalten wir eine Identität derselben Gestalt wie (3) mit $a_0 \neq 0$. Wir können also annehmen in (3) gilt $a_0 \neq 0$. Durch Multiplikation mit dem Inversen von a_0 können wir weiter erreichen

$$a_0 = 1.$$

Dann gilt aber

$$1 + v \cdot (a_1 + a_2 v + \ldots + a_n v^{n-1}) = 0$$

d.h.

$$v \cdot (-a_1 - a_2 v - \ldots - a_n v^{n-1}) = 1.$$

Mit anderen Worten, das Inverse von v liegt in V,

$$-a_1 - a_2 v - \ldots - a_n v^{n-1} \in V.$$

Zu (iii). Betrachten wir den k-Algebra-Homomorphismus

$$k[X] \to k(\alpha), f(X) \mapsto f(\alpha).$$

Wegen (ii) ist dieser surjektiv, d.h. man hat einen Isomorphimus von Ringen mit 1,

$$k[X]/(\operatorname{Ker} \varphi) \to k(\alpha), f(X) \bmod \operatorname{Ker} \varphi \mapsto f(\alpha).$$

Nun gilt aber

$$f \in \operatorname{Ker} \varphi \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f_\alpha \mid f \text{ in } k[X] \Leftrightarrow f \in (f_\alpha),$$

mit anderen Worten, es ist

$$\operatorname{Ker} \varphi = (f_\alpha).$$

und wir haben einen wohldefinierten Isomorphismus

(4) $$k[X]/(f_\alpha) \to k(\alpha), f(X) \bmod (f_\alpha) \mapsto f(\alpha).$$

Es ist noch zu zeigen, (4) ist ein Homomorphismus von k-Algebren. Dazu müssen wir dem Ring auf der linken Seite zunächst mit der Struktur einer k-Algebra versehen. Wir tun dies mit Hilfe der Komposition

(5) $$k \to k[X] \to k[X]/(f_\alpha), c \mapsto c \mapsto c \bmod (f_\alpha),$$

aus der natürlichen Einbettung von k in den Polynomring k[X] und dem natürlichen Homomorphismus auf den Faktorring. Das Bild von $c \in k$ bei der Zusammensetzung von (5) mit (4) ist gerade c (da der Wert des konstanten Polynoms c an der Stelle α gleich c ist). Mit anderern Worten, (4) ist ein Homomorphismus von k-Algebren.
QED.

3.2.7 Beispiel: K[X]/(f) mit f irreduzibel

Für jeden Körper k und jedes irreduzible Polynom $f \in k[X]$ ist

$$K := k[X]/(f)$$

ein Körper.

Bezeichne c den höchsten Koeffizienten von f. Dann ist die Restklasse der Unbestimmten

$$\alpha := X \bmod (f)$$

ein über k algebraisches Element mit dem Minimalpolynom f/c und es gilt

$$K = k(\alpha).$$

Insbesondere gibt es für jedes nicht-konstante Polynom von k[X] eine endliche algebraische Körpererweiterung K/k , welche eine Nullstelle von f enthält.

Beweis. Weil k[X] ein ZPE-Ring ist, ist (f) ein Primideal. Wir müssen zeigen, (f) ist sogar maximal. Angenommen nicht. Dann gibt es ein Ideal I mit

(1) $$(f) \subset I \subset k[X] \text{ (echte Inklusionen).}$$

Da k[X] ein Hauptidealring ist, gilt

$$I = (g) \text{ mit } g \in k[X].$$

Wegen $(f) \subseteq (g)$ gilt

$$f = g \cdot h \text{ mit } h \in k[X].$$

Weil f irreduzibel ist, muß einer der Faktoren g oder h eine Einheit sein.

Ist g eine Einheit, so gilt $I = (g) = k[X]$ im Widerspruch zu (1).

Ist h eine Einheit, so gilt

$$(f) = (gh) = ghk[X] = gk[X] = I.$$

im Widerspruch zu (1).

Insgesamt erhalten wir einen Widerspruch, d.h. (f) ist maximal und

$$K = k[X]/(f)$$

ein Körper.

Betrachten wir jetzt die Restklasse der Unbestimmten,

$$\alpha = X \bmod (f) = X + f(X)k[X].$$

Bezeichne

$$\rho: k[X] \to K = k[X]/(f)$$

den natürlichen Homomorphismus. Wir schreiben

$$\alpha = \rho(X).$$

Mit $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \rho(X)^i \\ &= \rho\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) \quad (\rho \text{ ist ein Homomorphismus von k-Algebren}) \\ &= \rho(f) \\ &= 0 \quad (\text{wegen } \operatorname{Ker} \rho = (f)). \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, α ist über k algebraisch und ist Nullstelle von f(X). Deshalt ist das Minimalpolynom f_α von α ein Teiler von f. Da f/c irreduzibel mit dem höchsten Koeffizienten 1 ist, folgt

$$f/c = f_\alpha.$$

Wir haben noch zu zeigen,

$$k(\alpha) = K = k[X]/(f).$$

Wegen $\alpha \in K$ gilt zumindest "$\subseteq$". Beweisen wir "$\supseteq$". Jedes Element von K hat die Gestalt

$$g(X) \bmod (f)$$

mit einem Polynom $g(X) = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \in k[X]$. Deshalb ist

$$g(X) \bmod (f) = \rho\left(\sum_{i=0}^{m} b_i X^i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} b_i \rho(X)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{m} b_i \alpha^i \in k(\alpha).$$

Es bleibt noch die letzte Aussage zu beweisen, daß jedes nicht-konstante Polynom $f(X) \in k[X]$ in einer endlichen Körpererweiterung eine Nullstelle besitzt. Das ist klar im Fall f irreduzibel, denn dann ist

$$K = k[X]/(f)$$

eine solche Köpererweiterung. Ist f nicht irreduzibel, so zerlege man f in ein Produkt irreduzibler Polynome und suche für einen der irreduziblen Faktoren eine Nullstelle.
QED.

3.2.8 Endliche Körpererweiterungen sind algebraisch

Sei K/k eine endliche Körpererweiterung. Dann ist K/k algebraisch.
Beweis. Nach Voraussetzung ist K als Vektorraum über k endlich-dimensional, sagen wir

(1) $$\dim_k K = n < \infty.$$

Sei $x \in K$. Wir haben zu zeigen, x ist algebraisch über k. Wegen (1) sind die n+1 Vektoren

$$x^0 = 1, x^1 = x, x^2, x^3, ..., x^n$$

linear abhängig über k, sagen wir

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n = 0,$$

wobei die $c_i \in k$ nicht alle gleich Null sind. Mit anderen Worten, x ist Nullstelle des Polynoms

$$f(X) = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + ... + c_n X^n \in k[X] - \{0\}$$

und damit algebraisch über k.
QED.

3.2.9 Eigenschaften endlicher Erweiterungen und Körpergrad

(i) Die endlichen Körpererweiterungen bilden eine ausgezeichnete Klasse.
(ii) Für jeden Turm

$$k \subseteq F \subseteq K$$

von endlichen Körpererweiterungen gilt

$$[K:k] = [K:F] \cdot [F:k].$$

(iii) Ist K/k endlich, sagen wir

$$K = k \cdot \omega_1 + ... + k \cdot \omega_n ,$$

und ist das Kompositum KF definiert, so gilt

$$KF = F \cdot \omega_1 + ... + F \cdot \omega_n .$$

Beweis. Zu (ii). Wir wählen Vektorraumbasen von L über K und von K über k, sagen wir

$$L = K\omega_1 + ... + K\omega_r \text{ mit } r = [L:K]$$

und

$$K = k\eta_1 + ... + k\eta_s \text{ mit } s = [K:k].$$

Dann gilt

$$L = \sum_{i=1}^{r} K\omega_i = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} k\eta_j\omega_i ,$$

d.h. die $\eta_j\omega_i$ bilden ein Erzeugendensystem des Vektorraums L über k. Insbesondere ist L/k eine endliche Erweiterung und es gilt

$$[L:k] \leq rs = [L:K]\cdot[K:k].$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, die $\eta_j\omega_i$ sind linear unabhängig über k. Sei also

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} c_{ji}\eta_j\omega_i = 0 \text{ mit } c_{ji} \in k.$$

Mit

$$d_i = \sum_{j=1}^{s} c_{ji}\eta_j \in K$$

gilt dann

$$\sum_{i=1}^{r} d_i\omega_i = 0,$$

also $d_i = 0$ für alle i, dann die ω_i sind linear unabhängig über K. Mit

$$0 = d_i = \sum_{j=1}^{s} c_{ji}\eta_j$$

gilt aber auch $c_{ji} = 0$ für alle i und alle j, denn die η_j sind linear unabhängig über k.

Zu (iii). Wir setzen

$$K' := F\cdot\omega_1+\ldots+F\cdot\omega_n .$$

Dann gilt nach Definition von KF zumindest

$$K' \subseteq KF,\ F \subseteq K' \text{ und } K \subseteq K'.$$

Es reicht also zu zeigen, K' ist ein Teilkörper von KF. Beachten wir, Addition und Multiplikation von KF definieren eine Abbildungen

$$K'\times K' \rightarrow K'.$$

Für die Addition ist das trivial. Bei der Multiplikatioin beachten wir, das Produkt von je zwei ω_i's ist eine k-Linearkombination von ω_i's, also erst recht eine F-Linearkombination. Damit ist K' zumindest eine F-Algebra mit 1. Wir haben zu zeigen, das Inverse eines jeden Elements $\alpha \in K'-\{0\}$ liegt in K'. Da K' ein endlich-dimensionaler F-Vektorraum ist, sind die (unendlich vielen) Potenzen von α linear abhängig über F, d.h. es besteht eine Relation

$$f_0+f_1\alpha+\ldots+f_r\alpha^r = 0,$$

wobei die $f_i \in F$ nicht alle gleich Null sind. Falls $f_0 = 0$ ist, können wir, da KF ein Körper ist, durch α teilen und erhalten eine Relation desselben Typs (und kleinern Grades). Wir können deshalb annehmen, $f_0 \neq 0$. Indem wir durch f_0 teilen, erreichen wir,

$$f_0 = 1.$$

Dann gilt aber

$$1 = \alpha(-f_1 - f_2\alpha -\ldots+f_r\alpha^{r-1}),$$

d.h. das Inverse

$$-f_1 - f_2\alpha -\ldots+f_r\alpha^{r-1} \in F\cdot\omega_1+\ldots+F\cdot\omega_n = K'$$

von α liegt in K'.

Zu (i). Eigenschaft 1: sie

$$k \subseteq F \subseteq K$$

ein Körperturm. Falls K/k endlich ist, d.h.

$$K = k\cdot\omega_1+...+k\cdot\omega_n ,$$

so hat F als linearer Unterraum von K eine endliche Dimension, d.h. F/k ist endlich. Weiter gilt wegen k⊆F auch

$$K \subseteq F\cdot\omega_1+...+F\cdot\omega_n \subseteq K,$$

d.h. K/F ist endlich. Umgekehrt folgt aus der Endlichkeit von K/F und F/k auch die von K/k (nach (iii)).

Eigenschaft 2: Seien K/k endlich, L/k beliebig und sei KL definiert. Dann gibt es eine endliche Basis von K über k, sagen wir

$$K = k\cdot\omega_1+...+k\cdot\omega_n .$$

Nach (iii) folgt

$$KL = L\cdot\omega_1+...+L\cdot\omega_n ,$$

d.h. KL/L ist endlich.

QED.

3.2.10 Endlich erzeugte algebraische Erweiterungen sind endlich

Sei K/k eine endlich erzeugte Körperweiterung, sagen wir

$$K = k(\alpha_1,...,\alpha_n).$$

Wir nehmen weiter an, jedes α_i ist algebraisch über k. Dann ist die Erweiterung K/k endlich.

Insbesondere sind endlich erzeugte algebraische Körpererweiterungen endlich.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Im Fall n = 0 gilt

$$K = k$$

und die Aussage ist trivial. Sei jetzt n > 0. Wir setzen

$$k' := k(\alpha_n).$$

Dann ist jedes der α_j nicht nur algebraisch über k sondern auch über k'. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$K/k' \text{ endliche Körpererweiterung.}$$

Nach 3.3.9 reicht es zu zeigen,

$$k'/k \text{ ist endliche Körpererweiterung.}$$

Nach 3.2.3 ist aber k'= k(α_n) ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum der Dimension

$$[k':k] = \deg f_{\alpha_n} \quad (< \infty),$$

wenn f_{α_n} das Minimalpolynom von α_n über n bezeichnet.

QED.

3.2.11 Eigenschaften algebraischer Körpererweiterungen

Die algebraische Körpererweiterungen bilden eine ausgezeichnete Klassse.

Beweis (Aufgabe?). Eigenschaft 1.

Sei

$$k \subseteq F \subseteq K$$

ein Körperturm. Falls K/k algebraisch ist, so ist jedes Element von K algebraisch über k, also auch über F, d.h.

$$K/F \text{ ist algebraisch.}$$

Außerdem ist insbesondere jedes Element von F algebraisch über k, d.h.

$$F/k \text{ ist algebraisch.}$$

Seien jetzt umgekehrt F/k und K/F algebraisch und sei

$$\alpha \in K.$$

Wir haben zu zeigen, α ist algebraisch über k. Nach Voraussetzung ist α algebraisch über F. Seien

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_r \in K$$

die Koeffizienten des Minimalpolynoms von α über F. Dann ist α algebraisch über $k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$, d.h.

$$k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha)/k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \text{ ist endliche Körpererweiterung.}$$

Da F/k algebraisch ist, ist jedes α_i algebraisch über k, d.h.

$$k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)/k \text{ ist eine endliche Körpererweiterung}$$

(nach 3.3.10). Damit ist aber auch

$$k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha)/k \text{ endliche (also algebraische) Körpererweiterung,}$$

d.h. α ist algebraisch über k.

Eigenschaft 2. Seien K/k und L/k Körpererweiterungen mit folgenden Eigenschaften.
1. K/k ist algebraisch.
2. KL ist definiert.

Wir haben zu zeigen, KL/L ist algebraisch. Wegen 1 können wir K in der Gestalt

$$K = k(\alpha_i \mid i\in I)$$

schreiben mit einer Familie von Elementen $\alpha_i \in K$, die algebraisch über k sind. Nach 3.1.8 gilt damit

$$KL = L(\alpha_i \mid i\in I).$$

Jedes Element

$$\alpha\in KL$$

ist somit ein rationaler Ausdruck in endlich vielen der α_i, sagen wir $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ mit Koeffizienten aus L, d.h.

$$\alpha\in L' := L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Da jedes der α_i algebraisch ist über k (also erst recht über L), ist

$$L'/L \text{ endlich}$$

(vgl. 3.2.10) und damit erst recht algebraisch (vgl. 3.2.8). Also ist α algebraisch über L. Wir haben gezeigt KL/L ist algebraisch.
QED.

3.2.12 Existenz von Nullstellen von Polynomen in Erweiterungskörpern

Seien k ein Körper und $f_1,\ldots,f_r \in k[X]$ endlich viele nicht-konstante Polynome. Dann gibt es eine endliche Körpererweiterung K/k derart, daß jedes f_i über K in Linearfaktoren zerfällt.
Beweis. Ergibt sich durch Wiederholtes Anwenden aus 3.2.7.
QED.

3.2.13 Fortsetzung von Einbettungen

Seien K/k und K'/k zwei Körpererweiterungen, F ein Körper zwischen k und K und

$$h: F \to K'$$

ein k-Homomorphismus, d.h. das folgende Diagramm sein kommutativ.

$$\begin{array}{ccccc} k & \subseteq & F & \subseteq & K \\ & & \cap & \swarrow_{h} & \\ & & K' & & \end{array}$$

Weiter sei $\alpha\in K$ ein über F algebraisches Element mit dem Minimalpolynom

$$f_\alpha(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in F[X].$$

Das Polynom

$$f_\alpha^h(X) = \sum_{i=0}^{n} h(a_i) X^i \in K'[X]$$

habe eine Nullstelle α' in K'.

Dann gibt es genau eine Fortsetzung

$$h': F(\alpha) \to K'$$

von h zu einem k-Homomorphismus mit $h'(\alpha) = \alpha'$.

Beweis. Existenz von h'.Wir betrachten den Homomorphismus von k-Algebren

$$F[X] \to K',\ p(X) \mapsto p^h(\alpha').$$

Wegen $f_\alpha^h(\alpha') = 0$ liegt f_α im Kern und nach dem Homomorphiesatz gibt es einen Homomorphismus

$$F[X]/(f_\alpha) \to K',\ p(X) \bmod (f_\alpha) \mapsto p^h(\alpha').$$

Nach 3.2.3 ist aber der Definitionsbereich dieses Homomorphismus isomorph zu $F(\alpha)$. Genauer, es gibt einen F-Isomorphismus

$$F(\alpha) \to F[X]/(f_\alpha),\ p(\alpha) \mapsto p(X) \bmod (f_\alpha).$$

Durch Zusammensetzen erhalten wir also einen Homomorphismus

$$h': F(\alpha) \to K',\ p(\alpha) \mapsto p^h(\alpha').$$

Wählt man für p ein Polynom des Grades 0, so sieht man, daß die Einschränkung dieses Homomorphismus auf F gerade h ist,

$$h'|_F = h.$$

Insbesondere ist $\tilde{h}$ ein k-Homomorphismus. Und für $p(X) = X$ erhält man,

$$h'(\alpha) = \alpha'.$$

Eindeutigkeit von h'. Falls h' existiert, so gilt für jedes Polynom

$$p(X) = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \in F(X),$$

daß das Bild von $p(\alpha)$ bei h' feststeht:

$$h'(p(\alpha)) = h'\left(\sum_{i=0}^{m} b_i \alpha^i\right) = \sum_{i=0}^{m} h'(b_i) h(\alpha)^i = \sum_{i=0}^{m} h(b_i) \alpha'^i = p^h(\alpha).$$

Jedes Element von $F(\alpha)$ hat aber die Gestalt $p(\alpha)$, d.h. h' ist eindeutig bestimmt.
QED.

3.3 Die algebraische Abschließung

3.3.1 Definitionen

Ein Körper k heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht-konstante Polynom

$$f(X) \in k[X]$$

mit Koeffizienten aus k mindestens eine Nullstelle in k besitzt. Eine algebraische Abschließung des Körpers k ist ein algebraisch abgeschlossener Körper K, welcher den Körper k als Teilkörper enthält und welcher algebraisch ist über k.

Bemerkung

Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, jeder Körper k besitzt eine algebraische Abschließung und diese ist bis auf k-Isomorphie eindeutig bestimmt.

3.3.2 Zerlegung in Linearfaktoren

Sei k ein Körper. Dann sind folgende Aussage äquivalent.
(i) k ist algebraisch abgeschlossen.
(ii) Jedes nicht-konstante Polynom von k[X] ist über k Produkt linearer Polynome.

Beweis. (ii) ⇒ (i). Trivial, da jedes lineare Polynom von k[X] in k eine Nullstelle besitzt.
(i) ⇒ (ii). Sei

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in k[X],\ a_n \neq 0,$$

ein nicht-konstantes Polynom. Wir haben zu zeigen, f ist Produkt linearer Polynome aus k[X]. Im Fall n = 1 ist das trivial. Sei jetzt n > 0. Nach Voraussetztung hat f in k eine Nullstelle

$$a \in k.$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} f(X) = f(X) - f(a) &= \sum_{i=0}^{n} a_i (X^i - a^i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i (X-a)(X^{i-1} + aX^{i-2} + a^2X^{i-3} + \ldots + a^{i-1}) \\ &= (X-a)g(X) \end{aligned}$$

mit $g(X) \in k[X]$. Nach Induktionsvoraussetzung ist g(X) Produkt linearer Polynome aus k[X]. Also gilt dasselbe auch für f(X).
QED.

3.3.3 Fortsetzung von k-Einbettungen

Seien K/k und K'/k zwei Körpererweiterungen, F ein Körper zwischen k und K und

$$h: F \to K'$$

ein k-Homomorphismus, d.h. das folgende Diagramm sein kommutativ.

$$\begin{array}{ccccc} k & \subseteq & F & \subseteq & K \\ & & \cap & \swarrow_{h} & \\ & & K' & & \end{array}$$

Ist K' algebraisch abgeschlossen und K algebraisch über F, so gibt es eine Fortsetzung

$$h': K \to K'$$

von h zu einem k-Homomorphismus.

Mit anderen Worten, jeder k-Homomorphismus mit Werten in einem algebraisch abgeschlossenen Köper läßt sich auf jede algebraische Erweiterung fortsetzen.

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$\mathfrak{M} = \{ (L, \varphi_L : L \to K') \mid F \subseteq L \subseteq K,\ \varphi_L|_F = h,\ \varphi_L \text{ ist k-Homomorphismus} \}$$

aller Fortsetzungen von h zu einem k-Homomorphismus auf einen Körper L zwischen F und K. Wir versehen diese Mengen mit der folgenden Halbordnung.

$$(L, \varphi_L : L \to K') \leq (L', \varphi_{L'} : L' \to K') \Leftrightarrow L \subseteq L' \text{ Teilkörper und } \varphi_{L'}|_L = \varphi_L$$

Man beachte, "≤" ist tatsächlich reflexiv, antisymmetrisch und transitiv. Zeigen wir, die halbgeordnete Menge $\mathfrak{M}$ genügt den Bedingungen des Zornschen Lemmas. Sei also

$$\{(L_i, \varphi_i L_i \to K') \mid i \in I\}$$

eine linear geordnete Teilmenge von $\mathfrak{M}$, d.h. für je zwei φ_i seien die Definitionsbereiche ineinander enthalten und das eine φ_i ist Fortsetzung des anderen. Wir setzten

$$L := \cup_{i \in I} L_i$$

und definieren $\varphi: L \to K'$ durch $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ falls $x \in L_i$.

Die Definition von φ ist korrekt, da je zwei φ_i die in einem $x \in L$ definiert sind, dort denselben Wert haben. Die Menge L ist ein Körper zwischen F und K,

$$F \subseteq L \subseteq K,$$

denn für je endlich viele Elemente von L gibt es ein i, so daß L_i diese Elemente enthält.

Nach Konstruktion ist (L, φ) ein Element von $\mathfrak{M}$ und eine obere Schranke der gegebenen linear geordneten Teilmenge.

Wir haben gezeigt, $\mathfrak{M}$ genügt den Bedinungen des Zornschen Lemmas. Also besitzt $\mathfrak{M}$ ein maximales Element, sagen wir

(1) $$(L';: \varphi': L' \to K').$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, L' = K: Angenommen, das ist nicht so. Dann gibt es ein Element

$$\alpha \in K' - L'.$$

Bezeichne $f_\alpha \in L'[X]$ das Minimalpolynom von α über L' Wir haben dann eine Situation wie in 3.3.12:

$$\begin{array}{ccccc} k & \subseteq & L' & \subseteq & K \\ \cap & & \swarrow \varphi' & & \\ K' & & & & \end{array} \qquad \text{(mit } F=L', h=\varphi')$$

Weiter hat das Bild $f_\alpha^{\varphi'} \in K'[X]$ von f_α eine Nullstelle in K' (weil K' algebraisch abgeschlossen ist). Nach 3.2.13 gibt es also eine Fortsetzung von φ' zu einem k-Homomorphismus $L'(\alpha) \to K'$. Das steht aber im Widerspruch zur Maximalität von (1). Also gilt L' = K.

QED.

3.3.4 Die Existenz eines algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörpers

Jeder Körper k ist Teilkörper eines algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörpers.

Beweis. Wir betrachten die folgende Aussage

(*) Jeder Köper K ist Teilkörper eines Körpers K' mit der Eigenschaft, daß jedes nicht-konstante Polynom von K[X] eine Nullstelle in K' hat.

1. Schritt: Reduktion auf den Beweis von Aussage (*).
Wir beweisen die Aussage des Satzes unter der Annahme, daß Aussage (*) richtig. Dazu betrachten wir eine Folge von Körpererweiterungen

$$k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq \ldots \subseteq k_i \subseteq k_{i+1} \subseteq \ldots$$

derart, daß jedes nicht-konstante Polynom mit Koeffizienten aus k_i ein Nullstelle in k_{i+1} besitzt. Eins solche Folge von Körpererweiterungen existiert wegen (*). Wir setzen

$$K := \cup_{i=0}^{\infty} k_i$$

Diese Menge K hat die Eigenschaft, daß es für je endlich viele Elemente

$$c_1, \ldots, c_r \in K$$

ein i gibt mit

$$c_1, \ldots, c_r \in k_i .$$

Insbesondere liegen dann alle Elemente, die man durch Körperoperationen aus diesen gewinnen kann, wieder in k_i , also auch in K. Das Ergebniss dieser Körperoperationen

hängt damit nicht von der speziellen Wahl von i ab, da für je zwei i der eine Körper k_i ein Teilkörper des anderen ist. Mit anderen Worten,

$$K$$

ist ein Körper, der sämtliche k_i also Teilkörper enthält. Sei jetzt

$$f(X) \in K[X]$$

ein nicht-konstantes Polynom. Dann gibt es ein i derart, daß die endlich vielen Koeffizienten von f in k_i liegen, d.h. es gilt

$$f(X) \in k_i[X].$$

Nach Konstruktion besitzt f eine Nullstelle in k_i und damit auch in K. Mit anderen Worten, K ist algebraisch abgeschlossen (und enthält k als Teilkörper).

2. Schritt: Beweis der Aussage (*).

Bezeichne F die Menge der nicht-konstanten Polynome von K. Für jedes $f \in F$ wählen wir eine Unbestimmte X_f und betrachten den Polynomring

(1) $$K[X_f \mid f \in F]$$

in den unendlich vielen Unbestimmten. Ein Element dieses Rings ist ein Polynom mit Koeffizienten aus K in jeweils endlich vielen der Unbestimmten X_f. Je endlich viele Elemente von (1) liegen deshalb bereits in einem Polynomring in endlich vielen Unbestimmten und die Ringoperationen finden bereits in diesem Teilring statt. Betrachten wir das Ideal

(2) $$I := (f(X_f) \mid f \in F)$$

von (1), das von allen Polynomen der Gestalt $f(X_f)$ erzeugt wird. Zeigen wir, I ist ein echtes Ideal von (1). Angenommen, I ist nicht echt, Dann gilt $1 \in I$, d.h. es gibt Polynome $g_1,...,g_r \in K[X_f \mid f \in F]$ und Polynome $f_1,...,f_r \in F$ mit

$$1 = g_1 f_1(X_{f_1}) + ... + g_r f_r(X_{f_r}).$$

Wir schreiben im folgenden einfach X_i für X_{f_1}. In der obigen Identität kommen insgesamt nur endlich viele der Unbestimmten X_f vor. Bezeichnen wir diese mit $X_1,...,X_N$ (mit $N \geq r$). Dann bekommt die Identität die Gestalt

(3) $$1 = \sum_{i=1}^{r} g_i(X_1,...,X_N) f_i(X_i)$$

und sie läßt sich als Identität im Polynomring

$$K[X_1,...,X_N]$$

auffassen. Nach 3.3.11 gibt es eine endliche Körpererweiterung

$$K'/K$$

die für jedes $i = 1,...,r$ eine Nullstelle α_i von f_i enthält. Wir setzen diese Nullstellen in (3) ein ($X_i = \alpha_i$ für $i = 1,...,r$ und $X_i = 0$ für $i > r$) und erhalten

$$1 = 0 \text{ in } K'.$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß das Ideal I ein echtes Ideal ist. Wir wählen ein maximales Ideal von (1), welches I enthält,

$$m \subseteq K[X_f \mid f \in F] \text{ maximal mit } I \subseteq m,$$

und setzten

$$K' := K[X_f \mid f \in F]/m.$$

Weil m maximal ist, ist K' ein Körper. Betrachten wir die Komposition

$$K \hookrightarrow K[X_f \mid f \in F] \xrightarrow{\rho} K', c \mapsto c \bmod m,$$

aus der natürlichen Einbettung von K in $K[X_f \mid f \in F]$ und dem natürlichen Homomorphismus ρ. Der Körper K' wird so zur K-Algebra und damit zu einer Körpererweiterung von K. Es reicht zu zeigen, jedes f∈F besitzt in K' eine Nullstelle. Mit

$$\alpha_f := \rho(X_f) \in K'$$

gilt

$$f(\alpha_f) = f(\rho(X_f)) = \rho(f(X_f)) = 0.$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt dabei wegen

$$f(X_f) \in I \subseteq m = \mathrm{Ker}(\rho).$$

QED.

3.3.5 Die Existenz einer algebraischen Abschließung

Seien k ein Körper und K/k eine Körpereweiterung mit K algebraisch abgeschlossen. Wir setzten

$$\overline{k} := \{ x \in K \mid x \text{ algebraisch über } k \}.$$

Dann ist $\overline{k}$ ein Teilkörper von K und eine algebraische Abschließung im Sinne von 3.3.1. Insbesondere besitzt jeder Körper eine algebraische Abschließung.

Beweis. Seien $x,y \in \overline{k}$. Dann ist x algebraisch über k und y ist algebraisch über k, also auch über k(x). Dann sind

$$k(x)/k \text{ und } k(x,y)/k(x)$$

endliche algebraische Körpererweiterungen, also ist auch

$$k(x,y)/k$$

eine solche. Insbesondere sind die folgenden Elemente algebraisch über k:

$$x+y,\ x \cdot y \in k(x,y)$$

im Fall $y \neq 0$ auch

$$x/y \in k(x,y).$$

Die Köperoperationen von K führen also nicht aus $\overline{k}$ heraus und $\overline{k}$ ist mit diesen Operationen ein Körper. Nach Konstruktion gilt

$$k \subseteq \overline{k} \subseteq K$$

und $\overline{k}$ ist algebraisch über k. Wir haben noch zu zeigen, $\overline{k}$ ist algebraisch abgeschlossen. Sei

$$f(X) \in \overline{k}[X]$$

ein nicht-konstantes Polynom. Dann gibt es in K eine Nullstelle von f, sagen wir

$$\alpha \in K,\ f(\alpha) = 0.$$

Es reicht zu zeigen, α liegt sogar in $\overline{k}$. Nach Konstruktion ist α algebraisch über $\overline{k}$, d.h.

$$\overline{k}\,(\alpha)/\overline{k}$$

ist eine algebraische Körpererweiterung. Da $\overline{k}/k$ algebraisch ist, ist es auch $\overline{k}\,(\alpha)/k$ (nach 3.2.11). Also ist α algebraisch über k, d.h. es gilt $\alpha \in \overline{k}$.
QED.

3.3.6 Die Eindeutigkeit der algebraischen Abschließung

Seien k ein Körper und $\overline{k}$ eine algebraische Abschließung. Dann gilt:

(i) Die natürliche Abbildung $\varphi: k \to \overline{k}$ ist ein k-Homomorphismus mit Werten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper.

(ii) Für jeden k-Homomorphimus $\rho: k \to K$ mit Werten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper K gibt es einen (nicht notwendig eindeutig bestimmten) k-Homomorphismus $\tilde{\varphi}: \overline{k} \to K$, für welchen das folgenden Diagramm kommutativ wird.

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\varphi} & K \\ \rho\downarrow & \nearrow_{\tilde{\varphi}} & \\ \overline{k} & & \end{array}$$

(iii) Ist K algebraisch über k, so ist jeder k-Homomorphismus $\tilde{\varphi}$ wie in (ii) ein k-Isomorphismus.

Bemerkung
Je zwei algebraische Abschließungen sind also isomorph. Der Isomorphismus ist jedoch im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt (es gibt keinen "natürlichen" Isomorphismus).

Beweis. Zu (i). Trivial.
Zu (ii). Folgt aus 3.3.3 mit F= k und h = $\varphi: k \to K$..
Zu (iii). Als k-Homomorphismus ist

$$\tilde{\varphi}: \overline{k} \to K$$

injektiv. Es reicht also, die Surjektivität zu beweisen. Sei

$$\alpha \in K$$

vorgegeben. Nach Voraussetzung ist K algebraisch über k. Sei

$$f_\alpha(X) \in k[X]$$

das Minimalpolynom von α über k. Da sowohl $\overline{k}$ also auch K algebraisch abgeschlossen sind, zerfällt das Polynom über beiden Körpern in Linearfaktoren:

$$f_\alpha(X) = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)...(X-\alpha_r) \text{ mit } \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \in K, \alpha = \alpha_1,$$

und

$$f_\alpha(X) = (X-\beta_1)(X-\beta_2)...(X-\beta_r) \text{ mit } \beta_1, \beta_2, ..., \beta_r \in \overline{k}.$$

Für jedes i gilt

$$\begin{aligned} f_\alpha(\tilde{\varphi}(\beta_i)) &= \tilde{\varphi}(f_\alpha(\beta_i)) \quad \text{(weil } \tilde{\varphi} \text{ ein k-Homomorphismus ist)} \\ &= \tilde{\varphi}(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, $\tilde{\varphi}(\beta_i) \in K$ ist eine der Nullstellen α_i von f_α. Es gilt also

$$\tilde{\varphi}(\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r\}) \subseteq \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\}.$$

Da $\tilde{\varphi}$ injektiv ist und es genauso viele α_i wie β_i gibt, gilt nicht nur das Inklusionszeichen, sondern sogar das Gleichheitszeichen. Insbesondere ist

$$\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\}. \subseteq \mathrm{Im}(\tilde{\varphi}),$$

d.h. α liegt im Bild von $\tilde{\varphi}$.
QED.

3.4 Zerfällungskörper und normale Erweiterungen

3.4.1 Definition: Zerfällungskörper

Seien K/k eine Körpererweiterung und $\{f_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Polynomen aus k[X]. Jedes der f_i zerfalle in Linearfaktoren über K. Sei

$$M = \{\alpha\in K \mid f_i(\alpha) = 0 \text{ für ein } i\in I\}$$

die Menge der Nullstellen aller f_i in K.

Dann zerfallen die $f_i(X)$ auch über

$$K' := k(M)$$

in Linearfaktoren, und K' der kleinste Körper zwischen k und K mit dieser Eigenschaft.[15] Er heißt Zerfällungskörper der f_i über k (in K).

Bemerkung
Ziel dieses Abschnitts ist es, die Eindeutigkeit des Zerfällungskörpers bis auf k-Isomorphie zu beweisen und dessen grundlegende Eigenschaften zu behandeln.

3.4.2 Charakterisierung der Zerfällungskörper

Seien k ein Körper, $\overline{k}$ eine algebraische Abschließung von k und K ein Körper zwischen k und $\overline{k}$,

$$k \subseteq K \subseteq \overline{k}.$$

Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) K/k ist Zerfällungskörper einer Menge von Polynomen aus k[X].

(ii) Jeder k-Homomorphismus $h:K \to \overline{k}$ ist ein k-Automorphismus K→K, d.h. es gilt h(K) = K.

(iii) Jedes irreduzible Polynom f(X)∈k[X] mit einer Nullstelle in K zerfällt über K in Linearfaktoren.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Sei K Zerfällungskörper der Familie $\{f_i\}_{i\in I}$ von Polynomen

$$f_i\in k[X]$$

über k. Wegen $K \subseteq \overline{k}$ wird dann K von den Nullstellen der f_i in $\overline{k}$ über k erzeugt;

$$K = k(\ \alpha\in K \mid f_i(\alpha)=0 \text{ für ein } i\in I).$$

Sei jetzt $h: K \to \overline{k}$ ein h-Homomorphismus. Weil f_i Koeffizienten in k hat, wird bei h jede Nullstelle von f_i in eine Nullstelle von f_i abgebildet. Mit anderen Worten, h permutiert für jedes i die Nullstellen von f_i. Damit induziert h auf dem Erzeugendensystem

$$\{\ \alpha\in K \mid \mid f_i(\alpha)=0 \text{ für ein } i\in I\ \}$$

des Körpers K über k eine Bijektion. Deshalb gilt aber

$$h(K) = K,$$

d.h. h ist ein k-Automorphismus von K.

(ii) ⇒ (iii): Sei f∈k[X] ein irreduzibles Polynom mit der Nullstelle α in K. Weiter sei $\beta\in \overline{k}$ eine weitere Nullstelle von f. Dann gibt es einen k-Isomorphismus

---

[15] d.h. jeder Körper zwischen k und K, über dem die f_i in Linearfaktoren zerfallen, enthält K' als Teilkörper.

$$k(\alpha) \to k(\beta),$$

der α in β abbildet. Wir setzen diesen zu einem k-Homomorphismus

$$K \to \overline{k}.$$

Nach Voraussetzung (ii) wird dabei K vollständig in K abgebildet. Insbesondere liegt β in K. Wir haben gezeigt, alle Nullstellen, die f in $\overline{k}$ besitzt, liegen sogar in K. Insbesondere ist die Zerlegung von f in Linearfaktoren über $\overline{k}$ sogar eine Zerlegung über K. Wir haben gezeigt, es gilt (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Für jedes $\alpha \in K$ zerfällt das Mininmalpolynom f_α von α über k in Linearfaktoren über K, d.h. die Nullstellen von f_α in $\overline{k}$ liegen sogar in K. Damit ist K Zerfällungskörper der Familie

$$\{f_\alpha\}_{\alpha \in K}$$

in K.

QED.

3.4.3 Definition: normale Körpererweiterungen

Eine algebraische Körpererweiterung K/k, die den äquivalenten Bedingungen von 3.4.2 genügt, heißt normal.

Beispiel 1

Sei $\zeta = e^{2\pi i/n}$ eine primitive Einheitswurzel. Dann ist die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$$

normal.

Beweis. ζ ist Nullstelle des Polynoms

$$f(X) = X^n - 1.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind aber gerade die n-ten Einheitswurzeln

$$\zeta^i, \; i = 0,1,...,n-1.$$

Diese liegen in $\mathbb{Q}(\zeta)$. Mit anderen Worten $\mathbb{Q}(\zeta)$ ist Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.

QED.

Beispiel 2

Jede Quadratische Erweiterung, d.h. jede Erweiterung K/k des Grades 2 ist normal.

Beweis. Für jedes $\alpha \in K\text{-}k$ gilt

$$1 < [k(\alpha):k] \mid [K:k] = 2$$

d.h. es ist

$$K = k(\alpha)$$

und das Minimalpolynom f_α von α über k hat den Grad 2. Damit gilt

$$f_\alpha(X) = (X-\alpha)(X+\alpha),$$

d.h. K ist der Zerfällungskörper von f_α über k.

QED.

Beispiel 2

Die Erweiterung

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$$

ist nicht normal.

Beweis. $\sqrt[3]{2}$ ist Nullstelle des über $\mathbb{Q}$ irreduziblen Polynoms

$$f(X) = X^3 - 2.$$

Der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ liegt ganz in den reellen Zahlen. Das Polynom hat aber auch komplexe Nullstellen, zum Beispiel

$$\sqrt[3]{2}\cdot e^{2\pi i/3}.$$

Deshalb zerfällt f(X) über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nicht in Linearfaktoren, d.h. die Körpererweiterung ist nicht normal.
QED.

3.4.4 Eindeutigkeit des Zerfällungskörpers

Seien K/k und K'/k zwei Körpererweiterungen und
(1) $$\{f_i\}_{i\in I}$$
eine Familie von Polynomen aus k[X], von denen jedes über K und über K' in Linearfaktoren zerfalle. Wir bezeichnen mit
$$L \text{ bzw. } L'$$
den Zerfällungskörper von über k in K bzw. in K'. Dann gibt es einen (nicht notwendig eindeutig bestimmten) k-Isomorphismus
$$L \to L'.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $\overline{L}$ bzw. $\overline{L}'$ eine algebraische Abschließung von L bzw. L'. Weil $\overline{L}'$ algebraisch abgeschlossen ist, läßt sich die natürliche Einbettung
$$k \to \overline{L}'$$
fortsetzen zu einem k-Homomorphismus
$$\sigma: K \to \overline{L}'$$
(nach 3.3.3). Analog läßt sich die natürliche Einbettung
$$k \to \overline{L}$$
fortsetzen zu einem k-Homomorphismus
$$\tau: K' \to \overline{L}.$$
Da σ und τ Homomorphismen über k sind, überführen sie die Nullstellen der f_i in Nullstellen der f_i. Da diese Nullstellen die Körper K bzw. K' erzeugen, folgt
$$\sigma(K) \subseteq K' \text{ und } \tau(K') \subseteq K,$$
d.h. σ und τ sind k-Homomorphismen
$$\sigma: K \to K' \text{ bzw. } \tau: K' \to K.$$
Die beiden Zusammensetzungen
$$\tau\circ\sigma: K \to K \text{ und } \sigma\circ\tau: K' \to K'$$
sind nach 3.4.2 Automorphismen über k. Insbesondere sind σ und τ surjektiv. Als k-Homomorphismen sind sie injektiv, d.h. σ und τ sind k-Isomorphismen
$$K \to K' \text{ bzw. } K' \to K.$$
QED.

3.4.5 Eigenschaften normaler Körpererweiterungen

Seien K/k und L/k Körpererweiterungen.
(i) Ist K/k normal und liegen K und L in einem gemeinsamen Oberkörper, so ist auch
$$KL/L \text{ normal.}$$
(ii) Ist K/k normal und F ein Körper zwischen k und K,
$$k \subseteq F \subseteq K.$$
dann ist K/F normal.
(iii) Sind K' und K" Körper zwischen k und K so besteht die folgende Implikation:
$$K'/k \text{ und } K"/k \text{ normal} \Rightarrow K'K"/k \text{ normel und } K'\cap K"/k \text{ normal.}$$
Beweis. Übungsaufgabe
QED.

3.5 Separabilität

3.5.1 Separabilitätsgrad

Seien K/k eine endliche Körpererweiterung und $\overline{k}$ eine algebraische Abschließung des Körpers k. Dann heißt die Anzahl der k-Einbettungen von K in $\overline{k}$ Separabilitätsgrad von K über k und wird mit

$$[K:k]_s := \#\{\sigma: K \to \overline{k} \mid \sigma \text{ ist eine k-Einbettung}\}$$

bezeichnet. Die Bilder eines Elements $\alpha \in K$ bei diesen k-Einbettungen heißen die zu α über k konjugierten Elemente.

Bemerkungen

(i) Da je zwei algebraische Abschließungen k-isomorph sind (nach 3.3.6), ist die Definition des Separabilitätsgrads unabhängig von der speziellen Wahl von $\overline{k}$.

(ii) Der Separabilitätsgrad ist endlich. Um das einzusehen, wählen wir eine k-Vektorraumbasis von K über k, sagen wir

$$K = k\cdot\omega_1 + \ldots + k\cdot\omega_n.$$

Zum Beweis der Endlichkeit des Separabilitätsgrades reicht es zu zeigen, daß es für das Bild jedes Basiselementes ω_i bei einer k-Einbettung nur endlich viele Möglichkeiten gibt.

Jedes der Basiselemente ω_i ist nach Voraussetzung algebraisch über k. Sei

$$f_{\omega_i}(X) \in k[X]$$

das Minimalpolynom von ω_i über k. Dann gilt für jede k-Einbettung $\sigma: K \to \overline{k}$:

$$f_{\omega_i}(\sigma(\omega_i)) = \sigma(f_{\omega_i}(\omega_i)) = \sigma(0) = 0,$$

d.h. $\sigma(\omega_i)$ ist eine Nullstelle von f_{ω_i} in $\overline{k}$. Die Anzahl dieser Nullstellen ist aber endlich.

3.5.2 Beispiel: $[k(\alpha):k]_s$

Seien K/k eine einfache algebraische Körpererweiterung, sagen wir

$$K = k(\alpha),$$

und bezeichne f_α das Minimalpolynom von α über k. Dann ist der Separabilitätsgrad gerade die Anzahl

$$[k(\alpha):k]_s = \#\{\beta \in \overline{k} \mid f_\alpha(\beta) = 0\} \; \# \{\text{die zu } \alpha \text{ über k konjugierten Elemente}\}$$

der paarweise verschiedenen Nullstellen von f_α in einer algebraischen Abschließung $\overline{k}$ von k. Insbesondere gilt

$$[k(\alpha):k]_s \leq [k(\alpha):k]$$

Beweis. Für jede Nullstelle $\beta \in \overline{k}$ von f_α gibt es einen k-Isomorphismus

$$k(\alpha) \to k[X]/(f_\alpha) \to k(\beta),\ p(\alpha) \mapsto p(X) \bmod (f_\alpha) \mapsto p(\beta),$$

d.h. eine k-Einbettung

$$\sigma: k(\alpha) \to \overline{k} \text{ mit } \sigma(\alpha) = \beta.$$

Der Separabilitätsgrad ist als mindestens so groß wie die Anzahl der Nullstellen von f_α in $\overline{k}$. Umgekehrt bildet jede k-Einbettung

$$\sigma: k(\alpha) \to \overline{k}$$

die Nullstelle α von f_α in eine Nullstelle von f_α ab. Und die k-Einbettung ist durch das Bild von α eindeutig festgelegt (weil $k(\alpha)$ von den Potenzen von α erzeugt wird).
QED.

3.5.3 Verhalten beim Zusammensetzen von Körpererweiterungen

Seien K/k eine endliche Körpererweiterung und F ein Körper zwischen k und K,

$$k \subseteq F \subseteq K.$$

Dann gilt

$$[K:k]_s = [K:F]_s \cdot [F:k]_s.$$

Beweis. Bezeiche

$$\overline{F}$$

eine algebraische Abschließung von F. Da F algebraisch ist über k , ist $\overline{F}$ auch eine algebraische Abschließung von k und kann damit zur Berechnung der Separabilitätsgrade $[K:k]_s$ und $[F:k]_s$ verwendet werden. Für je zwei Körpererweiterungen K'/k und K"/k bezeichne

$$Hom_k(K', K")$$

die Menge der k-Einbettungen von K' in K".
Wir betrachten die Abbildung

$$\psi: Hom_k(K, \overline{F}) \to Hom_k(F, \overline{F}), \sigma \mapsto \sigma|_F.$$

Es gilt

$$Hom_k(K, \overline{F}) = \cup_{\tau \in Hom_k(F,\overline{F})} \psi^{-1}(\tau).$$

Die Vereinigung auf der rechten Seite ist dabei disjunkt. Es gilt also

$$[K:k]_s = \# Hom_k(K, \overline{F}) = \sum_{\tau \in Hom_k(F;\overline{F})} \# \psi^{-1}(\tau).$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen

(1) $$\# \psi^{-1}(\tau) = [K:F]_s \text{ für jedes } \tau \in Hom_k(F, \overline{F})$$

denn dann ist

$$[K:k]_s = [K:F]_s \cdot \# Hom_k(F, \overline{F}) = [K:F]_s \cdot [F:k]_s.$$

Beweisen wir also (1). Für fest vorgegebenes $\tau \in Hom_k(F, \overline{F})$ wählen wir eine Fortsetzung

$$\tilde{\tau}: \overline{F} \to \overline{F}$$

von τ zu einer k-Einbettung von $\overline{F}$. Eine solche Fortsetzung existiert nach 3.3.3 (da der Definitionsbereich algebraisch über F und der Wertebereich algebraisch abgeschlossen ist). Nach 3.3.6(iii) ist $\tilde{\tau}$ ein Isomorphismus.

Betrachten wir die Abbildung

$$Hom_F(K, \overline{F}) \to \psi^{-1}(\tau) \ (\subseteq Hom_k(K, \overline{F})), \ \sigma \mapsto \tilde{\tau} \circ \sigma.$$

Sie ist wohldefiniert, da σ auf F die identische Abbildung und $\tilde{\tau}$ die Abbildung τ induziert. Die Abbildung ist injektiv, da $\tilde{\tau}$ ein k-Isomorphismus ist. Es reicht zu zeigen, die Abbildung ist auch surjektiv, denn dann gilt

$$\#\,\psi^{-1}(\tau) = \#\,\mathrm{Hom}_F(K, \overline{F}) = [K:F]_s$$

Zeigen wir also die Surjektivität der Abbildung. Für

$$\sigma \in \psi^{-1}(\tau) \subseteq \mathrm{Hom}_k(K, \overline{F})$$

gilt

$$\sigma|_F = \tau = \tilde{\tau}|_F$$

d.h.

$$\tilde{\tau}^{-1}\,\sigma|_F = \mathrm{Id},$$

d.h.

$$\tilde{\tau}^{-1}\,\sigma \in \mathrm{Hom}_F(K, \overline{F}).$$

Das Element $\tilde{\tau}^{-1}\,\sigma$ ist gerade das gesuchte Urbild von σ.
QED.

3.5.4 Vergleich mit dem Körpergrad

Für jede endliche Körpererweiterung K/k gilt

$$[K:k]_s \leq [K:k].$$

Beweis. Als endliche Körpererweiterung ist K/k endlich erzeugt, sagen wir

$$K = k(\alpha_1,...,\alpha_n)$$

Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Im Fall n = 1 gilt die Behauptung auf Grund von Beispiel 3.5.2. Sei jetzt n > 1.Wir setzen

$$F := k(\alpha_1)$$

und bezeichnen mit $\overline{F}$ eine algebraische Abschließung von F. Dann ist $\overline{F}$ algebraisch abgeschlossen und algebraisch über F, also auch über k (nach 3.2.11). Insbesondere ist $\overline{F}$ auch eine algebraische Abschließung von k und kann daher zur Berechnung des Separabilitätsgrades von K/k benutzt werden. Nach Konstruktion gilt

$$K = F(\alpha_2,...,\alpha_n).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$[K:F]_s \leq [K.F].$$

Auf Grund von Beispiel 3.5.2 ist außerdem

$$[F:k]_s \leq [F:k].$$

Zusammen erhalten wir

$$[K:k]_s = [K:F]_s.[F:k]_s \leq [K:F]\cdot[F:k] = [K:k].$$

QED.

3.5.5 Separabilität: Polynome, Elemente und Erweiterungen

Sei k ein Körper. Ein nicht-konstantes Polynom $f(X) \in k[X]$ heißt <u>separabel</u> über k, wenn es in keinem Erweiterungskörper K von k eine mehrfache Nullstelle besitzt. Andernfalls heißt f <u>inseparabel</u>.
Sei K/k eine algebraische Körpererweiterung. Ein Element $\alpha \in K$ heißt <u>separabel</u> über k, wenn das Minimalpolynom f_α von α über k separabel ist.

Eine algebraische Körpererweiterung K/k heißt <u>separabel</u>, wenn jedes Element von K separabel ist über k.

Bemerkungen
(i) Ist K/k eine separable algebraische Erweiterung und F ein Körper zwischen k und K, so ist (trivialerweise) auch F/k separabel.
(ii) In der Situation von (i) ist aber auch K/F separabel.

Beweis von (ii). Sei $\alpha \in K$. Seien

$$f_\alpha \in k[X] \text{ und } g_\alpha \in F[X]$$

die Minimalpolynome von α über k bzw. über F. Wegen $k \subseteq F$ ist dann das Polynom g_α ein Teiler von f_α,

$$g_\alpha \mid f_\alpha.$$

Nach Voraussetzung ist ist α separabel über k, d.h. f_α hat keine mehrfachen Nullstellen. Dann hat aber g_α ebenfalls keine, d.h. α ist separabel über F.

QED.

3.5.6 Beispiel: eine inseparable Körpererweiterung vom Grad p

Seien p eine Primzahl k der rationale Funktionenkörper

$$k = \mathbb{F}_p(T)$$

in einer Unbestimmten T über dem Körper $\mathbb{F}_p$ aus p Elementen. Das Polynom

$$f(X) := X^p - T \in \mathbb{F}_p[T]$$

ist ein Eisenstein-Polynom bezüglich T, also irreduzibel über k. Sei

$$K/k$$

eine Körpererweiterung, die eine Nullstelle

$$x \in K$$

von f(X) enthält.
Weiter gilt

$$f(X) = X^p - T = X^p - x^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} X^i(-x)^{p-i} = (X-x)^p \text{ über K.}$$

Man beachte, die Binomialkoeffizienten $\binom{p}{i}$ sind außer für $i = 0$ und $i = p$ Vielfache von p. Da K die Charakteristik p hat, sind also alle Summanden der obigen Summe mit

$$i \neq 0, p$$

gleich Null. Wir sehen damit, in jeder Erweiterung K/k, die eine Nullstelle von f enthält ist diese Nullstelle eine p-fache Nullstelle.
Insbesondere ist

$$f(X) := X^p - T$$

inseparabel über k. Jede Nullstelle dieses Polynoms (in einer Körpererweiterung K von k ist inseparabel über k und jede Körpererweiterung von, die eine Nullstelle dieses Polynoms enthält ist inseparabel. Insbesondere ist der Körper

$$F := k[X]/(X^p - T)$$

inseparabl, normal und vom Grad p über k.

Bemerkung
Der nachfolgende Satz zeigt, daß separable Erweiterung eine besonders einfache Struktur besitzen: sie sind alle vom Typ des in 3.2.3 berschriebenen Beispiels.

3.5.7 Der Satz vom primitiven Element

Sei K/k eine endliche separable Körpererweiterung. Dann besitzt K über k ein primitives Element, d.h. ein Element $\alpha \in K$ mit

$$K = k(\alpha).$$

Beweis. Wir führen den Beweis hier nur für den Fall,, daß k unendlich viele Elemente enthält,

$$\# k = \infty.$$

Den Fall endlicher Körper behandeln wir im nächsten Abschnitt (vgl. 3.6.5). Weil K/k endlich ist, gilt

$$K = k(\alpha_1,...,\alpha_r).$$

Wir führen den Beweis durch Induktion nach r. Der Fall r = 1. ist trivial. Sei jetzt r > 1. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt dann

$$k(\alpha_1,...,\alpha_{r-1})/k$$

ein primitives Element, sagen wir x, d.h.

$$k(\alpha_1,...,\alpha_{r-1}) = k(x)$$

und es gilt

$$K = k(x, y)$$

mit $y = \alpha_r$. Seien $f = f_x$ und $g = f_y$ die Minimalpolynome von x bzw. y über k. In einer algebraischen Abschließung

$$\overline{k}$$

von k, die K enthält, zerfallen f und g in Linearfaktoren, sagen wir

$$f(X) = (X-x_1)\cdot...\cdot(X-x_r) \text{ mit } x = x_1$$
$$f(X) = (X-y_1)\cdot...\cdot(X-y_s) \text{ mit } y = y_1$$

Weil K/k separabel ist, sind die x_i paarweise verschieden und dasselbe gilt für die y_j. Die Gleichungen

$$x_i + Xy_j = x + Xy \quad (i=1,...,r,\ j = 2,...,r)$$

haben jede höchstens eine Lösungen. Da k unendlich ist, gibt es ein

$$c \in k - \{0\}$$

das von allen diesen Lösungen verschieden ist, d.h. es gilt

(1) $$x_i + cy_j \neq x + cy \quad (i=1,...,r,\ j = 2,...,r).$$

Wir setzen

$$\theta := x + cy.$$

Es reicht zu zeigen, θ ist ein primitives Element, d.h.

$$K = k(\theta).$$

Nach Konstruktion gilt

$$\theta \in k(x,y) = K.$$

Es reicht zu zeigen

(2) $$x,y \in k(\theta).$$

Zu Beweis beachten wir, y ist Nullstelle der Polynome

$$f(\theta - cX)\ ,\ g(X) \in k(\theta).$$

Es gilt nämlich

$$f(\theta - cy) = f(x) = 0.$$

Die Polynome $f(\theta - cX)$, $g(X)$ haben also einen größten gemeinsamen Teiler positiven Grades

$$\deg ggT(f(\theta - cX)\ ,\ g(X)) > 0.$$

Außer y haben die beiden Polynome keine weiteren gemeinsamen Nullstellen: für jede Nullstelle y_j von g mit j>1 gilt $\theta - cy_j = x + cy - cy_j \neq x_i$ (wegen (1)) also

$$f(\theta - cy_j) \neq 0.$$

Wegen der Separabilität von K/k besitzt g keine mehrfachen Nullstellen und der ggT ist ´linear,

$$ggT(f(\theta - cX)\ ,\ g(X)) = X - y.$$

Nun hat der größte gemeinsame Teiler Koeffizienten im selben Körper wie die Ausgangspolynome, d.h. es gilt

$$X - y \in k(\theta)[X],$$

also

$$y \in k(\theta).$$

Analog zeigt man, daß auch x in k(θ) liegt. Man verwende, daß die Polynome

$$f(X)\ ,\ g((\theta - X)/c) \in k(\theta)[X]$$

die gemeinsame Nullstelle x haben, also als größten gemeinsamen Teiler das lineare Polynom

$$ggT(f(X)\ ,\ g((\theta - X)/c)) = X - x.$$

QED.

3.5.8 Kriterium für die Separabilität eines Elements

Seien K/k eine Körpererweiteung und $\alpha \in K$ ein über k algebraisches Element mit dem Minimalpolynom

$$f_\alpha(X) \in k[X]$$

über k. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) α ist inseparabel über k.

(ii) $\frac{\partial f_\alpha}{\partial X}(\alpha) = 0$ (d.h. f_α hat in $k(\alpha)$ die mehrfache Nullstelle α).

(iii) $\frac{\partial f_\alpha}{\partial X}(X) = 0.$

Insbesondere ist jedes algebraische Element über einem Körper der Charakteristik 0 separabel.[16]

Bemerkung

Bedingung (iii) bedeutet, f_α ist ein Polynom der Gestalt $g(X^p)$ mit $g \in k[X]$, wobei $p > 0$ die Charakteristik von k bezeichne.

Beweis. <u>(i) ⇒ (ii)</u>. Nach Voraussetzung hat

$$f = f_\alpha$$

in einem Erweiterungskörper L von k eine mehrfache Nullstelle, sagen wir

$$\beta \in L.$$

Es gilt somit

(1) $$f(X) = (X-\beta)^2 g(X) \text{ mit } g(X) \in L[X].$$

Nun gilt

$$\beta \in k(\beta)$$

und g(X) erhält man aus f(X) indem man durch das Polynom

$$(X-\beta)^2 \in k(\beta)[X].$$

teilt. Aus dem Divisionsalgorithmus für Polynome ergibt sich, daß damit auch $g(X) \in k(\beta)[X]$ gilt. Wir können also annehmen,

$$L = k(\beta).$$

Da α und β Nullstellen desselben irreduziblen Polynoms f_α sind, gibt es nach 3.2.3(iii) einen k-Isomorphismus

$$k(\beta) \to k[X]/(f_\alpha) \to k(\alpha),\ p(\beta) \mapsto p(X) \bmod (f_\alpha) \mapsto p(\alpha),$$

d.h. einen k-Isomorphismus

$$h: k(\beta) \to k(\alpha) \text{ mit } h(\beta) = \alpha.$$

Dieser Definiert einen Isomorphismus von Polynomalgebren

$$k(\beta)[X] \to k(\alpha)[X],\ p(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto p^h(X) := \sum_{i=0}^{n} h(a_i) X^i.$$

Wir wenden letzteren auf (1) an und erhalten

---

[16] denn die Ableiung eines nicht-konstanten Polynoms ist in der Charakteristik 0 stets ≠ 0.

$$f(X) = f^h(X) = (X-\alpha)^2 g^h(X) \text{ mit } g^h(X) \in k(\alpha)[X].$$

Man beachte, das erste Gleichheitszeichen gilt, weil die Koeffizienten von f in k liegen. Mit anderen Worten, f(X) hat in $k(\alpha)$ die mehrfache Nullstelle α. Nach 2.7.15 ist das äquivalent zu

$$f'(\alpha) = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Angenommen es ist

$$f'(X) \neq 0.$$

Nach Voraussetzung haben die Polynome

$$f' , f \in k[X]$$

die gemeinsame Nullstelle α. Betrachten wir den größten gemeinsamen Teiler d(X) von f und f'. Da k[X] ein euklidischer Ring ist, hat d die Gestalt

$$d(X) := ggT(f,f') = f(X)g(X) + f'(X)h(X)$$

mit $g(X),h(X) \in k[X]$. Da f und f' eine gemeinsame Nullstelle haben, hat auch d(X) eine Nullstelle. Also hat d einen Grad > 0. Die einzigen Teiler des irreduziblen Polynoms f sind aber 1 und f (bis auf Multiplikation mit Elementen aus k*). Deshalb gilt

$$d(X) = f(X)$$

und damit f(X) | f'(X). Letzteres ist aber nicht möglich, da f' einen kleineren Grad hat als f.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Nach 2.7.15 bedeutet die Bedingung gerade, α ist eine mehrfache Nullstelle von f_α in $k(\alpha)$.

QED.

3.5.9 Charakterisierung der separablen Erweiterungen

Sei K/k eine algebraische Körpererweiterung. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) K/k ist separabel.

(ii) K wird über k von separablen Elementen erzeugt, d.h.

$$K = k(\alpha_i \mid i \in I)$$

mit einer Familie $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ von Elementen $\alpha_i \in K$, die separabel über k sind.

Falls K/k endlich ist, sind diese Bedingungen auch äquivalent zur folgenden.

(iii) $[K:k]_s = [K:k]$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) im Fall K/k endlich.

Weil K/k endlich ist, wird K bereits von endlich vielen der α_i erzeugt[17], sagen wir

$$K = k(\alpha_1,...,\alpha_n).$$

Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Im Fall n = 1 gilt nach 3.5.2

$$[K:k]_s = \text{Anzahl der Nullstellen des Minimalpolynoms } f_{\alpha_i} = \deg f_{\alpha_i} = [K:k].$$

Sei jetzt n > 1. Wir setzen

$$F := k(\alpha_n).$$

Dann gilt

$$K = F(\alpha_1,...,\alpha_{n-1}).$$

---

[17] Wegen $\dim_k K < \infty$ ist jede aufsteigende Kette von k-linearen Unterräumen stationär.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$[K:F]_s = [K:F]$$

und nach Beispiel 3.5.2 ist

$$[F:k]_s = [F:k].$$

Zusammen erhalten wir (nach 3.5.3 und 3.2.9)

$$[K:k]_s = [K:F]_s\,[F:k]_s = [K:F]\cdot[F:k] = [K:k].$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) im Fall K/k endlich.
Sei $\alpha \in K$. Wir haben zu zeigen, α ist separabel über k, d.h. wir haben zu zeigen, das Minimalpolynom

$$f_\alpha(X) \in k[X]$$

von α über k hat in keinem Erweiterungskörper von k mehrfache Nullstellen. Falls es doch irgendwo mehrfache Nullstellen hätte, so würde auf Grund von Beispiel 3.5.2

$$[k(\alpha):k]_s < \deg f_\alpha = [k(\alpha):k].$$

gelten. Es reicht also zu zeigen,

(1) $$[k(\alpha):k]_s \geq [k(\alpha):k].$$

Nach Voraussetzung (iii) gilt

$$[K:k(\alpha)]_s\cdot[k(\alpha):k]_s = [K:k]_s = [K:k] = [K:k(\alpha)]\cdot[k(\alpha):k],$$

also

$$[k(\alpha):k]_s = \frac{[K:k(\alpha)]}{[K:k(\alpha)]_s}\cdot[k(\alpha):k] \geq [k(\alpha):k],$$

wobei die Abschätzung rechts besteht wegen 3.5.4. Also gilt tatsächlich (1).
(ii) $\Rightarrow$ (i) im allgemeinen Fall.
Sei

$$\alpha \in K.$$

Wir haben zu zeigen, α ist separabel. Das Element α kann als rationale Funktion in endlich vielen der α_i, $i \in I$, mit Koeffizienten aus k geschrieben werden. Also liegt α in einem von endlich vielen α_i erzeugten Körper, sagen wir

$$\alpha \in k(\alpha_1,...,\alpha_n).$$

Da die α_i nach Voraussetzung (ii) separabel sind über k, genügt die Körpererweiterung

(3) $$k(\alpha_1,...,\alpha_n)/k$$

der Bedingung (ii) des zu beweisenden Satzes. Die Körpererweiterung ist endlich erzeugt und algebraisch, also endlich. Auf Grund der im endlichen Fall bereits bewiesenen Implikationen

$$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$$

ist die Körpererweiterung (3) separabel. Insbesondere ist $\alpha \in k(\alpha_1,...,\alpha_n)$ separabel über dem Körper k.
QED.

3.5.10 Eigenschaften separabler Körpererweiterungen

Die separablen Körpererweiterungen bilden eine ausgezeichnete Klasse.
Beweis. Eigenschaft 1. Sei

$$k \subseteq F \subseteq K$$

ein Körperturm algebraischer Erweiterungen. Wir haben die folgenden Implikationen zu beweisen.
1. K/k separabel $\Rightarrow$ F/k separabel.
2. K/k separabel $\Rightarrow$ K/F separabel.

3. K/F und F/k separabel $\Rightarrow$ K/k separabel.
Zu 1. Nach Voraussetzung ist jedes Element von K separabel über k. Also gilt das auch für jedes Element von $F \subseteq K$.
Zu 2. Sei $\alpha \in K$. Wir haben zu zeigen,

$$\alpha \text{ ist separabel über F.}$$

Seien

$$f_\alpha \in k[X] \text{ und } g_\alpha \in F[X]$$

die Minimalpolynome von α über k bzw. über F. Da α separabel ist über k, besitzt f_α in keinem Erweiterungskörper von k mehrfache Nullstellen. Als auch nicht in den Erweiterungskörpern von F. Es reicht also zu zeigen,

$$g_\alpha \mid f_\alpha \text{ in } F[X],$$

denn dann hat auch g_α keine solchen Nullstellen und α ist separábel über F. Nun ist aber f_α ein Polynom mit Koeffizienten aus k, also aus F, mit

$$f_\alpha(\alpha) = 0$$

und ist deshalb durch das Minimalpolynom g_α teilbar.

Zu 3. Sei $\alpha \in K$. Wir haben zu zeigen,

$$\alpha \text{ ist separabel über k.}$$

Nach Voraussetzung ist α separabel über F, d.h. die Abbleitung des Minimalpolynoms

$$f_\alpha \in F[X]$$

von α über F ist nicht Null an der Stelle α,

$$f_\alpha'(\alpha) \neq 0$$

(vgl. 3.5.8). Seien

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_r \in F$$

die Koeffizienten von f_α. Dann ist f_α auch das Minimalpolynom von α über

$$F' := k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r).$$

Nach 3.5.8 ist α separabel über F' und nach 3.5.9 ist die Körpererweiterung

$$F'(\alpha)/F' \text{ separabel}$$

(da von separablen Elementen erzeugt). Ebenfalls nach 3.5.9 ist auch

$$F'/k \text{ separabel}$$

(da die $\alpha_i \in F$ separabel über k sind). Die beiden letzten Erweiterungen sind endlich (da sie von endlich vielen algebraisdchen Elementen erzeugt werden). Die Separabilität dieser Erweiterungen ist nach 3.5.9 äquivalent zu

(1) $\quad [F'(\alpha):F']_s = [F'(\alpha):F']$ und $[F':k]_s = [F':k]$.

Damit gilt

$$\begin{aligned} [F'(\alpha):k]_s &= [F'(\alpha):F']_s \cdot [F':k]_s && \text{(nach 5.3.5)} \\ &= [F'(\alpha):F'] \cdot [F':k] && \text{(wegen (1))} \\ &= [F'(\alpha):k]. && \text{(nach 3.2.9)} \end{aligned}$$

Nach 3.5.9 ist

$$F'(\alpha)/k \text{ separabel,}$$

also

$$\alpha \text{ separabel über k.}$$

Eigenschaft 2. Seien K/k und L/k Körpererweiterungen mit

$$K/k \text{ separabel (und algebraisch).}$$

Weiter sei KL definiert. Wir haben zu zeigen,

$$KL/L \text{ ist separabel.}$$

Sei

$$\alpha \in KL.$$

Wir haben zu zeigen,

$$\alpha \text{ ist separabel über } L.$$

Dazu schreiben wir K in der Gestalt

$$K = k(\alpha_i \mid i \in I)$$

mit einer Familie von Elementen $\alpha_i \in K$. Dann gilt

$$KL = L(\alpha_i \mid i \in I)$$

und $\alpha \in KL$ ist eine rationale Funktion in endlich vielen der α_i , sagen wir $\alpha_1,...,\alpha_n$, mit Koeffizienten aus L, d.h.

(2) $$\alpha \in L(\alpha_1,...,\alpha_n).$$

Wegen $\alpha_i \in K$ sind die α_i separabel über k, d.h. die Minimalpolynome

$$f_{\alpha_i} \in k[X]$$

der α_i über k sind separabel. Das Minimalpolynom

$$g_{\alpha_i} \in L[X]$$

von α_i über dem Erweiterungskörper L ist ein Teiler des Minimalpolynoms f_{α_i} (über L). Dann ist aber auch g_{α_i} separabel über L, d.h. α_i ist separabel über L. Nach 3.5.9 ist dann aber

$$L(\alpha_1,...,\alpha_n)/L \text{ separabel.}$$

Wegen (2) ist α separabel über L.
QED.

3.5.11 Die separable Abschließung, rein inseparable Erweiterungen

Seien K/k eine algebraische Körpererweiterung und $\overline{k}$ eine algebraische Abschließung von k, welche K enthält[18],

$$K \subseteq \overline{k}.$$

Dann heißt

$$k_{sep} := \{ \alpha \in \overline{k} \mid \alpha \text{ separabel über } k \}$$

<u>separable Abschließung</u> von k in $\overline{k}$ und

$$K \cap k_{sep} = \{ \alpha \in K \mid \alpha \text{ separabel über } k \}$$

<u>separable Abschließung</u> von k in K.
Eine algebraische Körpererweiterung K/k heißt <u>rein inseparabel</u>, wenn

$$K \cap k_{sep} = k$$

gilt, d.h. wenn jedes Element von K - k inseparabel ist über k.
Bemerkungen

(i) k_{sep} und $K \cap k_{sep}$ sind Teilkörper von $\overline{k}$ bzw. K.

(ii) k_{sep} ist bis auf k-Isomorphie ein deutig bestimmt.

(iii) Eine algebraische Körpererweiterung K/k ist genau dann rein inseparabel, wenn es für jedes Element $\alpha \in K$ ein $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gibt mit

$$\alpha^{p^i} \in k.$$

---

[18] sei $\overline{k}$ zum Beispiel eine algebraische Abschließung von K

Dabei bezeichne p die Charakteristik von k (bzw. p sei gleich 1 fall die Charakteristik von k gleich Null ist).

(iv) Der Separatilitätsgrad rein inseparabler (endlicher) Erweiterungen ist 1.

(v) Ist K/k eine endliche Körpererweiterung, so gilt

$$[K:k]_s = [K\cap k_{sep}:k] \text{ und } [K:K\cap k_{sep}]_s = 1.$$

Insbesondere ist $[K:k]_s$ ein Teiler von $[K:k]$. Der Quotient

$$[K:k]_i := [K:k]/[K:k]_s = [K:K\cap k_s]$$

heißt Inseparabilitätsgrad. Mit anderen Worten: jede endliche Erweiterung ist die Zusammensetzung einer separablen und einer rein inseparablen Erweiterung. Der Separabilitätsgrad mißt den Grad des separablen Teils der Erweiterung und der Inseparabilitätsgrad den des rein inseparablen Teils.

Beweis. Zu (i). , Nach 3.5.9 bestehen die von k_{sep} bzw. $K\cap k_{sep}$ über k erzeugten Körper aus lauter Elementen, die separabel sind über k, d.h. es gilt

$$k(k_{sep}) \subseteq k_{sep}$$

und

$$k(K\cap k_{sep}) \subseteq K\cap k_{sep}$$

Trivialerweise gilt auch "$\supseteq$", d.h. rechts stehen Körper.

Zu (ii). Ist k_{sep}' eine weitere separable Abschließung, sagen wir in der algebraischen Abschließung $\overline{k}'$, so gibt es einen k-Isomorphismus

$$h: \overline{k} \to \overline{k}'$$

(nach. 3.3.6). Dieser überführt separable Elemente in separable Elemente (da er deren Minimalpolynome über k nicht ändert), also gilt

$$h(k_{sep}) \subseteq k_{sep}'$$

und analog

$$h^{-1}(k_{sep}') \subseteq k_{sep}.$$

Also induziert h einen k-Isomorphismus $k_{sep} \to k_{sep}'$.

Zu (iii). Wir können annehmen

$$p := \text{char}(k) > 0.$$

Sei K/k ist rein inseparabel. Wir betrachte ein Element

$$\alpha\in K$$

und dessen Minimalpolynom

$$f_\alpha \in k[X]$$

über k. Wir beweisen durch Induktion nach

$$d = \deg f_\alpha,$$

daß es ein i gibt mit $\alpha^{p^i}\in k$. Im Fall d = 1 liegt α selbst schon in k und die Aussage gilt mit i = 0. Sei jetzt d > 1.

Weil α inseparabel ist über k ist nach 3.5.8 die Ableitung von f_α identisch Null, d.h. die Exponenten aller in f_α vorkommenden Glieder sind Vielfache von p,

$$f_\alpha(X) = g_\alpha(X^p) \text{ mit } f_\alpha \in k[X].$$

Das Polynom g_α ist Minimalpolynom von α^p über k: es gilt $g_\alpha(\alpha^p) = 0$ und gäbe es ein Polynom kleineren Grades mit dieser Nullstelle, so gäbe es ein Polynom eines Grades < deg f_α mit der Nullstelle α, d.h. f_α wäre kein Minimalpolynom.

Wegen

$$\deg g_\alpha < \deg f_\alpha$$

gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein i mit $(\alpha^p)^{p^i} \in k$.

Wir nehmen umgekehrt an, für jedes $\alpha \in K$ existiert ein $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit

$$\alpha^{p^i} \in k.$$

Wir haben zu zeigen, jedes

$$\alpha \in K\text{-}k$$

ist inseparabel über k. Wegen

$$a := \alpha^{p^i} \in k \text{ für ein } i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

ist α Nullstelle des Polynoms

$$f(X) := X^{p^i} - a \in k[X].$$

Das Minimalpolynom f_α von α über k ist deshalb ein Teiler von f,

$$f_\alpha \mid f \text{ in } k[X].$$

Nun gilt

$$f(X) = X^{p^i} - \alpha^{p^i} = (X-\alpha)^{p^i},$$

d.h.

$$f_\alpha(X) = (X-\alpha)^n \text{ mit } 0 \le n \le p^i.$$

Wegen $\alpha \notin k$ gilt $n = \deg f_\alpha > 1$, d.h. α ist inseparabel über k. Wir haben gezeigt, jedes Element von K-k ist inseparabel, d.h. K/k ist rein inseparabel.

Zu (iv). Sei K/k eine rein inseparable endliche Erweiterung. Dann hat Gestalt

$$K = k(\alpha_1,...,\alpha_r),$$

Wir setzen

$$K_i := k(\alpha_1,...,\alpha_i).$$

Es reicht zu z eigen, für jedes i gilt

$$[K_{i+1}:K_i]_s = 1.$$

Es gilt

$$K_{i+1} = K_i(\alpha_{i+1}).$$

Nach (iii) ist $\alpha = \alpha_{i+1}$ Nullstelle eine Polynoms der Gestalt

$$X^{p^i} - a \in k[X]$$

mit $a = \alpha^{p^i}$. Dieses Polynom hat außer α keine weiteren Nullstellen. Das Minimalpolynom f_α von α über K_i teilt dieses Polynom, d.h. auch f_α hat nur eine Nullstelle. Damit gilt aber

$$[K_{i+1}:K_i]_s = 1$$

(nach 3.5.2).

Zu (v). Nach Definition von $K \cap k_{sep}$ ist

$$K \cap k_{sep}/k \text{ separabel}$$

und

$$K/\ K\cap k_{sep} \text{ rein inseparabel}$$

(jedes über $K\cap k_{sep}$ separable Element $x\in K$ ist nach 3.5.10 separabel über k also in $K\cap k_{sep}$). Damit gilt

$$[K\cap k_{sep}:k]_s = [K\cap k_{sep}:k]$$

(nach 3.2.9) und

$$[K: K\cap k_{sep}] = 1$$

(nach (Iv)). Wir gehen zu den Produkten über und erhalten

$$[K:k]_s = [K\cap k_{sep}:k].$$

QED.

3.6 Endliche Körper

3.6.1 Charakteristik, Primkörper, Körpergrad und Ordnung endlicher Körper

Sei F ein endlicher Körper. Dann gilt

(i) Die Charakteristik von F ist eine Primzahl

$$p = \mathrm{char}(F)$$

(ii) Der Primkörper[19] von F ist bis auf Isomorphie gleich

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p).$$

(iii) Der Körper F ist eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{F}_p$, d.h. der Körpergrad

$$n = \dim_{\mathbb{F}_p} F = [F: \mathbb{F}_p] < \infty$$

von F ist endlich.

(iv) Der Körper F besteht aus

$$\#\ F = p^n$$

Elementen.

Bemerkung

Die Ordnung eines endlichen Körpers ist also eine Primzahlpotenz.

Beweis. Zu (ii). Wir betrachten den Homomorphismus von Ringen mit 1,

$$\varphi:\mathbb{Z} \to F,\ g \mapsto g\cdot 1_F\ .$$

Nach dem 0-ten Isomorphiesatz gilt

(1) $$\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi) \subseteq F.$$

Dabei ist $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ein Ideal von $\mathbb{Z}$, also von der Gestalt

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = m\mathbb{Z}.$$

Wegen (1) können wir

$$\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z}/(m)$$

mit einem Teilring von F identifizieren. Dieser Teilring ist als Teilring eines Körpers nullteilerfrei, d.h.

$$m = p \text{ ist eine Primzahl}$$

und

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p) \cong \mathrm{Im}(\varphi) \subseteq F$$

ist ein Körper. Nach Konstruktion liegt $\mathbb{F}_p$ in jedem Teilkörper von F, ist also lder Primkörper von F.[20]

---

[19] d.h. der Durchschnitt aller Teilkörper von F

[20] Jeder Teilkörper von F enthält 1_F also auch $\mathbb{F}_p$.

Zu (i). Folgt aus (ii) da $p \cdot 1 = 0$ gilt in $\mathbb{F}_p$, also auch in F.

Zu (iii). Da F endlich ist, wird F als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum endlich erzeugt, hat also eine endliche Dimension

$$n = \dim_{\mathbb{F}_p} F.$$

Zu (iv). Als n-dimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum ist F isomorph zu

$$F \cong (\mathbb{F}_p)^n.$$

Also gilt

$$\# F = (\# \mathbb{F}_p)^n = p^n$$

(Ein Element von F ist durch n Koordinaten festgelegt, und für jede Koordinate gibt es p Möglichkeiten).
QED.

3.6.2 Existenz und Eindeutigkeit der endlichen Körper

Seien p eine Primzahl, n eine natürliche Zahl und

$$q = p^n.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(i) Es gibt bis auf $\mathbb{F}_p$-Isomorphie genau einen Körper der Ordnung q. Dieser wird mit

$$\mathbb{F}_q$$

bezeichnet und heißt Galois-Feld der Ordnung q.

(ii) In jedem Körper K der Charakteristik p gibt es höchstens einen Teilkörper der Ordnung q und mindestens einen falls K algebraisch abgeschlossen ist (und jeder Körper, der einen Körper der Ordnung q enhält, hat trivialerweise die Charakteristik p).

(iii) Der Körper $\mathbb{F}_q$ ist der Zerfällungskörper des Polynoms

$$f(X) = X^q - X$$

über dem Körper $\mathbb{F}_p$. Ist $\overline{\mathbb{F}}_p$ eine algebraische Abschließung von $\mathbb{F}_p$, die den Körper $\mathbb{F}_q$ enthält, so gilt

$$\mathbb{F}_q = \{ x \in \overline{\mathbb{F}}_p \mid f(x) = 0 \} = \mathbb{F}_q^* \cup \{0\}$$

$$\mathbb{F}_q^* = \{x \in \overline{\mathbb{F}}_p \mid x^{q-1} = 1 \}.$$

Der Körper $\mathbb{F}_q$ ist normal und separabel über $\mathbb{F}_p$.

Beweis. Existenz von $\mathbb{F}_q$. Sei

$$K := \overline{\mathbb{F}}_p$$

eine algebraische Abschließung des Körpers $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ und

$$F := \{x \in K \mid x^q = x\}.$$

Das Polynom

$$f(X) = X^q - X \in K[X]$$

hat höchstens q Nullstellen in K und zerfällt über K in Linearfaktoren (weil K algebraisch abgeschlossen ist). Wegen

$$f'(X) = q \cdot X^{q-1} - 1 = -1 \neq 0$$

hat f in K keine mehrfachen Nullstellen. Die Anzahl der Nullstellen ist also gleich q. Damit besteht die Menge F aus q Elementen,

$$q = \#F.$$

Es reicht also zu zeigen, daß F ein Körper ist. Sind $x,y \in F$ so gilt

$$(xy)^q = x^q \cdot y^q = xy$$

also $xy \in F$. Außerdem gilt, weil K die Charakteristik p hat[21]

$$(x-y)^p = x^p - y^p$$

also auch

$$(x-y)^q = (x-y)^{p^n} = x^q - y^q,$$

also $x-y \in F$. Die Ring-Operationen des Körpers K definieren also Operationen

$$F \times F \to F.$$

und F ist, wie gerade gezeigt, eine Untergruppe der Additiven Gruppe des Körpers K. Übrigen Ringaxiome für F gelten auf Grund der Ringaxiome für K. Wir haben noch zu zeigen, jedes Element

$$x \in F - \{0\}$$

ist in F eine Einheit. Da K ein Körper ist, gilt $x^{-1} \in K$. Außerdem gilt wegen $x \in F$:

$$(x^{-1})^q = \frac{1}{x^q} = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

d.h. $x^{-1} \in F$. Also ist F ein Körper mit q Elementen. Bezeichnung

$$F = \mathbb{F}_q.$$

Abschluß des Beweises.
Wir haben bisher gesehen:

1. Die Formeln von (iii) definieren tatsächlich einen Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen.
2. Nach Konstruktion ist $\mathbb{F}_q$ der Zerfällungskörper des Polynoms $f(X) = X^q - X$, also insbesondere ist $\mathbb{F}_q$ normal.
3. Weil $f(X) = X^q - X$ keine mehrfachen Nullstellen besitzt ist die Körpererweiterung
$$\mathbb{F}_q / \mathbb{F}_p$$
separabel.

Es reicht deshalb die Eindeutigkeitsaussagen von (i) und (ii) zu beweisen.
Eindeutigkeitsaussage von (i). Sei F ein Körper mit q Elementen. Dann hat die multiplikative Gruppe F* die Ordnung q-1, d.h. es gilt

$$x^{q-1} = 1 \text{ für jedes } x \in F^*,$$

d.h.

$$x^q = x \text{ für jedes } x \in F.$$

Also ist F der Zerfällungskörper von des Polynoms $X^q - X$ (über $\mathbb{F}_p$) und als solcher bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
Eindeutigkeitsaussage von (ii). Seien K ein Körper und $F \subseteq K$ ein Körper von der Ordnung q. Wie gerade gezeigt, gilt dann

$$F \subseteq \{x \in K \mid x^q - x = 0\}.$$

Da beide Mengen dieselbe Anzahl q von Elementen besitzten (denn $X^q - X$ hat höchsten q Nullstellen in K), gilt sogar das Gleichheitszeichen,

---

[21] Das Minuszeichen rechts ist für ungerade Primzahlen p offensichtlich. Für p = 2 gilt in K aber -1 = +1.

$$F = \{x \in K \mid x^q - x = 0\},$$

d.h. F ist eindeutig bestimmt.
QED.

3.6.3 Einheitswurzeln

Sei K ein Körper und n ein natürliche Zahl. Ein Element

$$x \in K$$

heißt n-te Einheitswurzel von K, wenn gilt

$$x^n = 1.$$

Es heißt primitive n-te Einheitswurzel, wenn außerdem gilt

$$x^m \neq 1 \text{ für } m = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Beispiel 1

Die komplexe Zahl $e^{2\pi i/n}$ ist eine primitive n-te Einheitswurzel von $\mathbb{C}$.

Beispiel 2

Die von Null verschiedenen Elemente des endlichen Körpers $\mathbb{F}_q$ sind (q-1)-te Einheitswurzeln:

$$x^{q-1} = 1 \text{ für jedes } x \in \mathbb{F}_q^*$$

(da $\mathbb{F}_q^*$ eine multiplikative Gruppe der Ordnung q-1 ist): Auf Grund des nachfolgenden Satzes gibt es unter diesen auch eine primitive.

Bemerkungen

(i) Die n-ten Einheitswurzeln bilden eine Untergruppe

$$\mu_{K,n} \subset K^*$$

der multiplikativen Gruppe des Körpers K.

(ii) Ist ζ eine primitive n-te Einheitswurzel, so sind deren Potenzen

$$\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \ldots, \zeta^n$$

paarweise verschieden und ebenfalls n-te Einheitswurzeln. Diese Potenzen sind damit aber alle n-ten Einheitswurzeln in dem gegebenen Körper.

(iii) Ein n-te Einheitswurzel ζ von K ist genau dann primitiv, wenn gilt

$$\mu_{K,n} = \langle\zeta\rangle \text{ und } \#\,\mu_{K,n} = n.$$

(iv) Ist ζ primitive n-te Einheitszwurzel, so sind die Potenzen mit zu n teilerfremden Exponenten,

$$\zeta^i \text{ mit } ggT(i, n) = 1,\ i = 1,\ldots,n-1,$$

gerade die übrigen primitiven n-ten Einheitswurzeln.

(v) Falls eine primitive n-te Einheitswurzel in K existiert, so ist die Anzahl dieser primitiven n-ten Einheitswurzeln gleich der Anzahl

$$\varphi(n) = \#(\mathbb{Z}/(n))^*$$

der primen Restklassen modulo n.

Beweis. Zu (i). der Quotient zweier n-ten Einheitswurzeln ist eine n-te Einheitswurzel.

Zu (ii). Die ζ^i sind trivialerweise wieder n-te Einheitswurzeln. Wären zwei von ihnen gleich, so würde ein Quotient von ihnen eine zu niedrige Potenz von ζ liefern, die gleich 1 ist. Es kann keine weiteren n-ten Einheitswurzeln in K geben, da X^n-1 höchstens n Nullstellen hat.

Zu (iii). Ist ζ eine n-te primitive Einheitswurzel, so gilt wegen (ii)

$$\mu_{K,n} = \langle\zeta\rangle \text{ und } \#\,\mu_{K,n} = n.$$

Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so hat das erzeugende Element ζ von $\mu_{K,n}$ die Ordnung n, d.h. die n-te Potenz von ζ ist 1 und keine frühere Potenz hat diese Eigenschaft.
Zu (iv). Sei i teilerfremd zu n. Dann gibt es ganze Zahlen i' und n' mit

$$i \cdot i' + n \cdot n' = 1.$$

Damit gilt

$$(\zeta^i)^{i'} = \zeta^{i \cdot i + n \cdot n'} = \zeta$$

Damit gilt

$$< \zeta^i > = < \zeta > = \mu_K \text{ (und } \# \mu_{K,n} = n).$$

Also ist ζ^i primitive n-te Einheitswurzel. Hat i einen gemeinsamen Teiler > 1 mit n, sagen wir

$$d \mid i \,,\, d \mid n,\, d > 1$$

so gilt $i = d \cdot j$, also

$$(\zeta^i)^{n/d} = \zeta^{n \cdot j} = 1,$$

d.h. ζ^i ist nicht primitiv.

Zu (v). Da ζ^j nur von der Restklasse von j in $\mathbb{Z}/(n)$ abhängt, folgt die Behauptung aus (iv).
QED.

3.6.4 Existenz primitiver Einheitswurzeln

Seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper und n eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, eine der beiden folgenden Bedingungen ist erfüllt.
1. Die Charakteristik von K ist Null.
2. Die Charakteristik von K ist p>0 und p ist kein Teiler von n.

Dann gibt es in K eine primitive n-te Einheitswurzel.
Bemerkung:
Auf Grund der Voraussetzungen ist $n \cdot 1_K$ ist in K eine Einheit.

Beweis. Es reicht zu zeigen, die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln ist zyklisch von der Ordnung n,
(1) $\mu_{K,n}$ ist zyklisch von der Ordnung n.
Die n-ten Einheitswurzeln sind die Nullstellen des Polynoms

$$f(X) = X^n - 1$$

Hättte dieses Polynom eine mehrfache Nullstelle, so hätte es einen gemeinsamen Teiler eines Grades > 0 mit

$$f'(X) = n \cdot X^{n-1}$$

was nicht der Fall ist. Also hat f im algebraisch abgeschlosseen Körper K genau n paarweise verschiedene Nullstellen, d.h.

$$\# \mu_{K,n} = n.$$

Es reicht zu zeigen
(2) $\mu_{K,n}$ ist zyklisch.

Wir schreiben n als Produkt teilerfremder Primzahlpotenzen,

$$n = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i und natürlichen Zahlen n_i.

Fall 1: r = 1.
Es gilt

$$n = p',^{m}$$

mit einer Primzahl p' und einer natürlichen Zahl m
Im Fall m = 1 hat die Gruppe $\mu_{K,n}$ Primzahlordnung, ist also zyklisch. Sei jetzt m > 1. Wir setzen

$$n' = p',^{m-1}$$

Wäre $\mu_{K,n}$ nicht zyklisch, so hätte jedes Element $x \in \mu_{K,n}$ eine Ordnung, die ein echter Teiler von n ist, d.h. es wäre $x^{n'} = 1$, also $x \in \mu_{K,n'}$, Damit wäre
$\mu_{K,n} \subseteq \mu_{K,n'}$, , also

$$p',^{m} = n = \# \mu_{K,n} \leq \# \mu_{K,n'} = n' = p',^{m-1}$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß $\mu_{K,n}$ von der Ordnung n ist.

Fall 2: r beliebig.
Auf Grund des ersten Falls ist

$$\mu_i = \mu_{K,p_i^{n_i}}.$$

für jedes i zyklisch von der Ordnung $p_i^{n_i}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mu_1 \times \mu_2 \times ... \times \mu_r \to \mu := \mu_{K,n}\ ,\ (\zeta_1,...,\zeta_r) \mapsto \zeta_1 \cdot ... \cdot \zeta_r\ .$$

Da jedes $\zeta_i \in \mu_i$ eine n-te Einheitswurzel ist, ist auch das Produkt solcher ζ_i ein solche, d.h. die Abbildung ist wohldefiniert. Nach Definiton ist es ein Gruppen-Homomorphismus. Es reicht zu zeigen, φ ist ein Isomorphismus, denn auf der linken Seite steht ein direktes Produkt zyklischer Gruppen mit teilerfremden Ordnungen, also eine zyklische Gruppe.
Zeigen wir also, φ ist ein Isomorphismus. Die Gruppen auf beiden Seiten haben dieselben Ordnung

$$p_1^{n_1} \cdot ... \cdot p_r^{n_r} = n.$$

Es reicht also zu zeigen, φ ist injektiv. Sei also

$$\varphi(\zeta_1,...,\zeta_r) = 1,$$

d.h.

$$\zeta_1 \cdot ... \cdot \zeta_r = 1.$$

Es reicht zu zeigen,

$$\zeta_i = 1 \text{ für } i = 1,...,r.$$

Sei $u = n/p_i^{n_i}$. Dann ist u für jedes $j \neq i$ ein Vielfaches von $p_j^{n_j}$, d.h. es ist $(\zeta_j)^u = 1$ für jedes $j \neq i$ und damit auch

$$(\zeta_i)^u = 1.$$

Weil u teilerfremd ist zu $v := p_i^{n_i}$ gibt es ganze Zahlen u', v' mit uu'+vv' = 1, also

$$\zeta_i = (\zeta_i)^{uu'+vv'} = ((\zeta_i)^u)^{u'} \cdot ((\zeta_i)^v)^{v'} = 1^{u'} \cdot 1^{v'} = 1.$$

QED.

3.6.5 Die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers

Sei F ein endlicher Körper. Dann ist die multiplikative Gruppe F* von F zyklisch,

$$F^* = <\zeta>.$$

Bemerkung
Insbesondere gilt

$$F = k(\zeta)$$

für jeden Teilkörper k von F, d.h. für Erweiterungen endlicher Körper gilt der Satz vom primitiven Element.
Beweis. Seien

$$q = p^s = \#F$$

die Ordnung von F, $\overline{F}$ eine algebraische Abschließung von F und

(1) $$n = \#F^*.$$

Dann ist $n = p^s - 1$ teilerfremd zur Charakteristik p von $\overline{F}$. Also gibt es nach 3.6.4 in $\overline{F}$ eine primitive n-te Einheitswurzel

$$\zeta \in \overline{F}.$$

Die davon erzeugte multiplikative Gruppe

$$<\zeta> = \mu_{\overline{F},n}$$

hat die Ordnung n und besteht gerade aus allen n-ten Einheitwurzeln von $\overline{F}$. Wegen (1) sind die Elemente von F* lauter n-te Einheitswurzeln, d.h. es gilt

$$F^* \subseteq \mu_{\overline{F},n}.$$

Da beide Gruppen aus derselben Anzahl n von Elementen bestehen, gilt sogar

$$F^* = \mu_{\overline{F},n} = <\zeta>.$$

QED.

3.6.6 Die Automorphismengruppe eines endlichen Körpers

Seien p eine Primzahl und $q = p^n$ eine Potenz von p. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Die Gruppe der Automorphismen von $\mathbb{F}_q$ besteht aus lauter $\mathbb{F}_p$-Automorphismen,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_q),$$

(ii) Die Ordnung dieser Gruppe ist

$$\#\,\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q) = n.$$

(iii) Die Gruppe wird vom Frobenius-Automorphismus

$$F: \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q,\ x \mapsto x^p,$$

erzeugt,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q) = <F>.$$

Sie ist also zyklisch, abelsch, auflösbar.

Beweis. Zu (i). Sei $f: \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ ein Automorphismus. Dann gilt

$f(1) = 1$
$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$
...

also

$f(x) = x$ für jedes $x \in \mathbb{F}_p$.

Zu (ii). Sei K ein algebraische Abschließung von $\mathbb{F}_q$,

$$\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_q \subseteq K.$$

Dann ist K auch eine algebraische Abschließung von $\mathbb{F}_p$ und die Zahl der $\mathbb{F}_p$-Einbettungen von $\mathbb{F}_q$ in K ist gleich dem Separabilitätsgrad

$$[\mathbb{F}_q:\mathbb{F}_p]_s = [\mathbb{F}_q:\mathbb{F}_p] = n.$$

Man beachte, $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ ist nach 3.6.2 eine normale separable Körpererweiterung. Inbesondere induziert jede der $\mathbb{F}_p$-Einbettungen einen $\mathbb{F}_p$-Automorphismus von $\mathbb{F}_q$. Umgekehrt liefert jeder solche $\mathbb{F}_p$-Automorphismus eine $\mathbb{F}_p$- Einbettung. Damit gilt

$\#\,\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_q) = n.$

Zusammen mit (i) folgt die Behauptung.

Zu (iii). Weil $\mathbb{F}_q$ die Charakteristik p hat, gilt

$$(x+y)^p = x^p+y^p \text{ und } (xy)^p = x^p y^p \text{ für } x,y\in\mathbb{F}_q,$$

d.h.

$$F: \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$$

ist ein Automorphismus.

$$F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q).$$

Man beachte $F(0) = 0 \neq 1 = F(1)$, d.h. F ist nicht die Nullabbildung. Sei $\zeta\in\mathbb{F}_q$ eine primitive (q-1)-Einheitswurzel. Eine solche existiert nach 3.6.5. Dann gilt

$$\zeta = F^l(\zeta) = \zeta^{p^l} \Leftrightarrow \zeta^{p^l-1} = 1 \Leftrightarrow p^n-1 \mid p^l - 1$$

Insbesondere ist

$$F^l(\zeta) \neq \zeta \text{ für } l = 1,...,n-1,$$

d.h.

$$F^l \neq \mathrm{Id} \text{ für } l = 1,...,n-1.$$

Die von F erzeugte zyklische Untergruppe

$$\langle F\rangle \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$$

hat eine Ordnung $\geq$ n. Zusammen mit (ii) ergibt sich, daß die Ordnung gleich n sein muß und

$$\langle F\rangle = \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$$

gilt.
QED.

3.7 Hauptsatz der Galois-Theorie

3.7.1 Galois-Erweiterungen

Eine Körper-Erweiterung K/k heißt Galois-Erweiterung, wenn sie algebraisch, separabel und normal ist. Die Gruppe der k-Automorphismen von K heißt in dieser Situation auch Galois-Gruppe von K über k und wird mit

$$\mathrm{Gal}(K/k) = G(K/k) := \mathrm{Aut}_k(K).$$

bezeichnet.
Seien K ein Körper und

$$G \subseteq \mathrm{Aut}(K)$$

eine Gruppe von Automorphismen von K. Dann heißt die Menge

$$K^G := \{ x\in K \mid \sigma(x) = x \text{ für alle } \sigma\in G \}$$

der Elemente von K, die bei den Automorphismen von G in sich abgebildet werden, Fixkörper von G in K.

Bemerkungen

(i) K^G ist ein Teilkörper von K.

(ii) Seien K/k eine Galois-Erweiterung und $\bar{k}$ eine algebraische Abschließung von k, welche den Körper K enthält. (zum Beispiel eine algebraische Abschließung von K). Dann fällt Gal(K/k) mit der Menge der k-Einbettungen von K in $\bar{k}$ zusammen,

$$\text{Gal}(K/k) = \text{Menge der k-Einbettungen } K \to \bar{k}.$$

Beweis. Zu (i). Für je zwei Elemente $x,y \in K^G$ und jedes $\sigma \in G$ gilt

$$\sigma(x-y) = \sigma(x) - \sigma(y) = x-y \text{ d.h. } x-y \in K^G$$

und

$$\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) = xy \text{ , d.h. } xy \in K^G,$$

d.h. K^G ist ein Teilring von K (mit 1). Außerdem gilt mit $x \in K^G - \{0\}$ und $\sigma \in G$ auch

$$\sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1} = x^{-1},$$

d.h. K^G ist ein Teilkörper von K.

Zu (ii). Das gilt, weil Galois-Erweiterungen normal sind.
QED.

3.7.2 Hauptsatze der Galois-Theorie (für endliche Erweiterungen)

Sei K/k eine endliche Galois-Erweiterung mit der Galois-Gruppe

$$G = \text{Gal}(K/k)$$

Dann sind die folgenden beiden Abbildungen zueinaner inverse Bijektionen

$$\{\text{Untergruppen von G}\} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \{\text{Körper zwischen k und K}\}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Gal}(K/F) & \hookleftarrow & F \\ U & \mapsto & K^U \end{array}$$

mit folgenden Eigenschaften.

(i) $[K:F] = \#\,\text{Gal}(K/F)$ für jeden Körper F zwischen k und K.

(ii) $\#\,U = [K:K^U]$ für jede Untergruppe U von G.

(iii) Für jede Untergruppe U von G und jedes Element $\sigma \in G$ gilt

$$K^{\sigma U \sigma^{-1}} = \sigma K^U$$

(iv) Ein Körper F zwischen K und k ist genau dann normal über k, wenn Gal(K/F) ein Normalteiler in G ist.

(v) Für je zwei Körper F' und F'' zwischen k und K gilt

$$\text{Gal}(K/F'F'') = \text{Gal}(K/F') \cap \text{Gal}(K/F'').$$

(vi) Für je zwei Körper F' und F'' zwischen k und K gilt

$$\text{Gal}(K/F' \cap F'') = \langle \text{Gal}(K/F'), \text{Gal}(K/F'') \rangle.$$

Dabei steht rechts die von den beiden Galois-Gruppen erzeugte Untergruppe.

(vii) Für je zwei Untergruppe U' und U'' von G gilt

$$K^{U' \cap U''} = K^{U'} \cdot K^{U''}$$

(viii) Für je zwei Untergruppen U' und U'' von G gilt

$$K^{\langle U', U'' \rangle} = K^{U'} \cap K^{U''}$$

Dabei bezeichnet $\langle U', U'' \rangle$ die von U' und U'' erzeugte Untergruppen.

Bemerkung

Als direkte Folge der Existenz der Bijektion ergibt sich, daß die Menge

$$\{ F \mid F \text{ Körper zwischen k und K } \}$$

der Körper zwischen k und K endlich ist.

Beweis des Hauptsatzes. Wir fixieren eine algebraische Abschließung $\overline{k}$ von k, die K enthält,

$$k \subseteq K \subseteq \overline{k}.$$

und beginnen mit zwei (trivialen) Bemerkungen.

1. Für jeden Körper F zwischen k und K ist auch K/F eine Galois-Erweiterung.
2. $\#Gal(K/k) = \#\{k\text{-Einbettungen } K \to \overline{k}\} = [K:k]_s = [K:k]$
3. Beim Anwenden von α und β kehren sich alle Inklusionen um, d.h. große Untergruppen haben kleine Fixkörper und die Galois-Gruppen großer Zwischenkörper sind klein.

Zu (i). Die Aussage gilt für F = k auf Grund von Bemerkung 2 und für beliebige F damit auf Grund von Bemerkung 2.

Zu (ii). Mit $F = K^U$ gilt

$$U \subseteq G(K/F)$$

also

$$\#U \leq \#G(K/F) = [K:F] \quad \text{(nach (i))}, \tag{3}$$

Wir haben noch die umgekehrte Ungleichung zu beweisen, d.h.

$$[K:F] \leq \#U. \tag{4}$$

Nach Bemerkung 2 ist K/F eine Galois-Erweiterung. Nach dem Satz vom primitiven Element gilt

$$K = F(\alpha)$$

für ein α. Sei

$$r$$

die größte natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß es Elemente

$$\sigma_1,...,\sigma_r \in U$$

gibt, so daß

$$\sigma_1(\alpha),...,\sigma_r(\alpha) \text{ paarweise verschieden}$$

sind. Dann gilt

$$r \leq \#U.$$

Für die wie oben gewählten $\sigma_1,...,\sigma_r$ und beliebige $\tau \in U$ sind dann die Elemente

$$\tau\sigma_1(\alpha),...,\tau\sigma_r(\alpha)$$

nur eine Permutation der $\sigma_1(\alpha),...,\sigma_r(\alpha)$, denn andernfalls könnte man die Zahl r vergrößern. Mit anderen Worten, das Polynom

$$f(X) = (X - \sigma_1(\alpha))\cdot...\cdot(X - \sigma_r(\alpha))$$

ist invariant bei jedem $\tau \in U$,

$$f^\tau = f \text{ für jedes } \tau \in U$$

und hat (tirivialerweise) die Nullstelle α. Wegen $f^\tau = f$ gilt

$$f(X) \in K^U[X] = F[X]$$

und wegen $f(\alpha) = 0$ ist

$$[K:F] = [F(\alpha):F] \leq \deg f = r \leq \#U,$$

d.h. es gilt (4).

Beweis von $\alpha \circ \beta = Id$.

Mit (4) gilt aber in der Abschätzung (3) das Gleichheitszeichen, d.h. es ist

$$U = G(K/K^U) = \alpha(K^U) = \alpha(\beta(U))$$

für jede Untergruppe U von G.

Beweis von $\beta \circ \alpha = Id$.

Wir haben zu zeigen, für jeden Körper F zwischen k und K gilt

$$K^{G(K/F)} = F.$$

Da die Abbildungen von G(K/F) die Elemente von F fest lassen, gilt jedenfalls

(1) $$F' := K^{G(K/F)} \supseteq F.$$

Angenommen, die Inklusion ist echt. Dann gilt

$$[F':F] > 1,$$

und da F'/F als Teilerweiterung der Galois-Erweiterung K/F separabel ist, auch

$$[F':F]_s > 1.$$

Es gibt also eine F-Einbettung

$$\sigma: F' \to \overline{k}$$

die von der identischen Abbildung verschieden ist:

(2) $$\sigma(x) \neq x \text{ für ein } x \in F'.$$

Wir setzen σ fort zu einer F-Einbettung

$$\sigma: K \to \overline{k}.$$

Weil K normal ist, gilt $\sigma(K) \subseteq K$, d.h. σ ist ein Element der Galois-Gruppe G(K/F). Wegen (2) liegt dann x nicht im Fixkörper von G(K/F), d.h.

$$x \notin K^{G(K/F)} = F'.$$

das steht aber im Widerspruch zur Wahl von x. Deshalb gilt in (1) das Gleichheitszeichen.

Zu (iii). Es gilt

$$\begin{aligned} K^{\sigma U \sigma^{-1}} &= \{x \mid x \in K \text{ und } \sigma g \sigma^{-1}(x) = x \text{ für alle } g \in U\} \\ &= \{x \mid \sigma^{-1}(x) \in \sigma^{-1}K \text{ und } g\sigma^{-1}(x) = \sigma^{-1}(x) \text{ für alle } g \in U\} \\ &= \{\sigma(y) \mid y \in \sigma^{-1}K \text{ und } gy = y \text{ für alle } g \in U\} && (y = \sigma^{-1}(x)) \\ &= \sigma(\{y \mid y \in K \text{ und } gy = y \text{ für alle } g \in G\}) && (\sigma \text{ ist bijektiv}) \\ &= \sigma(\{y \mid y \in K^U\}) \\ &= \sigma(K^U). \end{aligned}$$

Zu (iv). Es gilt

$$F = K^U \text{ mit } U = \mathrm{Gal}(K/F),$$

also

$$\begin{aligned} &U \text{ normal} \Leftrightarrow \sigma U \sigma^{-1} = U \text{ für alle } \sigma \in G \\ &\Leftrightarrow \alpha(\sigma U \sigma^{-1}) = \alpha(U) \text{ für alle } \alpha \in G && (\text{weil } \alpha \text{ bijektiv ist}) \\ &\Leftrightarrow K^{\sigma U \sigma^{-1}} = K^U \text{ für alle } \sigma \in G && (\text{Definition von } \alpha) \\ &\Leftrightarrow \sigma(K) = K \text{ für alle } \sigma \in G && (\text{nach (iii)}) \\ &\Leftrightarrow K \text{ normal} && (\text{nach Bemerkung 2}) \end{aligned}$$

Zu (v). Weil die beim Anwenden von α alle Inklusionen umkehren, gilt

$$\mathrm{Gal}(K/F'F'') \subseteq \mathrm{Gal}(K/F') \cap \mathrm{Gal}(K/F'').$$

Wir haben "$\supseteq$" zu zeigen. Sei $g \in \mathrm{Gal}(K/F') \cap \mathrm{Gal}(K/F')$, d.h. g lasse alle Elemente von F' und von F" fest. Dann bleiben aber auch alle rationalen Ausdrücke in solchen Elementen (mit Koeffizienten aus k) fest bei g. Also bleiben alle Elemente von F'F" fest.

Zu (vi). s.u.

Zu (vii). Wir setzen

$$F' = K^{U'} \text{ und } F'' = K^{U''}.$$

Nach (v) gilt

$$U' \cap U'' = \mathrm{Gal}(K/F') \cap \mathrm{Gal}(K/F'') = \mathrm{Gal}(K/F'F''),$$

also

$$K^{U' \cap U''} = K^{\mathrm{Gal}(K/F'F'')} = F'F'' = K^{U'} \cdot K^{U''}.$$

Zu (viii). Da sich beim Anwenden von β die Inklusionen umkehren, gilt

$$K^{<U',U''>} \subseteq K^{U'} \cap K^{U''}.$$

Es reicht "$\supseteq$" zu beweisen. Sei $x \in K^{U'} \cap K^{U''}$. Dann bleibt x bei allen Elementen von U' und bei allen Elementen von U" fest. Also auch bei allen endlichen Produkten solcher Elemente, also bei <U', U">.

Zu (vi). Wir setzen

$$U' = \mathrm{Gal}(K/F') \text{ und } U'' = \mathrm{Gal}(K/F'').$$

Dann gilt nach (viii)

$$K^{<U',U''>} = K^{U'} \cap K^{U''} = F' \cap F'' = K^{\mathrm{Gal}(K/F' \cap F'')},$$

also

$$<U', U''> = \mathrm{Gal}(K/F' \cap F'').$$

QED.

3.8. Symmetrische Polynome

3.8.1 Die elementarsymmetrischen Funktionen

Ein Polynom heißt symmetrisch, wenn es sich bei einer beliebigen Permutation der Unbestimmten nicht ändert.

Seien $X_1,...,X_n$ Unbestimmte. Weiter sei

$$f(T) := (T-X_1)\cdot...\cdot(T-X_n).$$

Wir betrachten f als Polynom mit Koeffizienten aus

$$\mathbb{Z}[X_1,...,X_n],$$

d.h.

$$f(T) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \sigma_{n-i}(X_1,...,X_n)\cdot T^i$$

mit

$$\sigma_i(X_1,...,X_n) := \sum_{1 \le j_1 < ... < j_i \le n} X_{j_1} \cdot ... \cdot X_{j_i}.$$

Das Polynom

$$\sigma_i \in \mathbb{Z}[X_1,...,X_n]$$

heißt i-tes elementarsymmetrisches Polynom von $X_1,...,X_n$.

Bemerkungen

(i) Für jeden kommutativen Ring R mit 1 können wir den natürlichen Homomorphismus

$$h: \mathbb{Z} \to R,\ g \mapsto g\cdot 1_R,$$

benutzen um S_i auf ein Polynom $\sigma_i^h \in R[X_1,...,X_n]$ abzubilden. Dieses Polynom werden wir, falls keine Verwechslungen möglich sind, ebenfalls mit σ_i bezeichnen und i-tes elementarsymmetrisches Polynom nennen.

(ii) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann ist die Abbildung

$$k^n \to k^n,\ x = (x_1,...,x_n) \mapsto (\sigma_1(x),...,\sigma_n(x)),$$

surjektiv.

(iii) Seien k ein Körper und $X_1,...,X_n$. Dann sind die elementarsymmetrischen Funktionen

$$\sigma_i(X_1,...,X_n) \in k[X_1,...,X_n] \text{ , } i = 1,...,n$$

algebraisch unabhängig über k.

Beweis von (ii). Sei $(a_1,...,a_n) \in k^n$ vorgegeben. Das Polynom

$$f(X) = X^n - a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} - + ... + (-1)^n a_n$$

zerfällt über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k in Linearfaktoren,

$$f(X) = (X-x_1)\cdot...\cdot(X-x_n) \text{ mit } x_i \in k.$$

Dann gilt aber

$$\sigma_i(x_1,...,x_n) = a_i \text{ für jedes i,}$$

d.h. $(a_1,...,a_n)$ liegt im Bild der Abbildung von (ii).

QED.

Beweis von (iii). Angenommen, die σ_i sind algebraisch abhängig. Dann gibt es ein Polynom

$$g(Y_1,...,Y_n) \in k[Y_1,...,Y_n] - \{0\}$$

derart, daß $g(\sigma_1,...,\sigma_n) \in k[X_1,...,X_n]$ das Nullpolynom ist,

(1) $$g(\sigma_1,...,\sigma_n) = 0.$$

Bezeichne

$$\overline{k}$$

eine algebraische Abschließung von k. Da g nicht identisch Null ist und $\overline{k}$ unendlich viele Elemente besitzt, gibt es ein n-Tupel

$$(a_1,...,a_n) \in \overline{k}^n$$

mit

(2) $$g(a_1,...,a_n) \neq 0.$$

Wegen (ii) gibt es ein n-Tupel

$$(x_1,...,x_n) \in \overline{k}^n$$

mit

$$\sigma_i(x_1,...,x_n) = a_i \text{ für jedes i,}$$

Das steht aber im Widerspruch zu (1) und (2).

QED.

3.8.2 Die Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf $k(X_1,...,X_n)$

Seien k ein Körper und $X_1,...,X_n$ Unbestimmte. Wir betrachten die folgende Operation von S_n auf dem Körper der rationalen Funktionen in $X_1,...,X_n$ über k.

$$S_n \times k(X_1,...,X_n) \to k(X_1,...,X_n),\ (\sigma, r) \mapsto \sigma\cdot r\ ,$$

mit

$$(\sigma\cdot r)(X_1,...,X_n) := r(X_{\sigma^{-1}(1)},...,X_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Man beachte, für $\sigma,\tau \in S_n$ gilt

$$\begin{aligned}((\sigma\cdot\tau)\cdot r)(X_1,...,X_n) &= r(X_{\tau^{-1}\sigma^{-1}(1)},...,X_{\tau^{-1}\sigma^{-1}(n)}) \\ &= (\tau\cdot r)(X_{\sigma^{-1}(1)},...,X_{\sigma^{-1}(n)}) \\ &= (\sigma\cdot(\tau\cdot r))(X_1,...,X_n),\end{aligned}$$

d.h. $(\sigma\cdot\tau)\cdot r = \sigma\cdot(\tau\cdot r)$, d.h. es handelt sich tatsächlich um eine Operation. Sei

$$F := k(X_1,...,X_n)^{S_n} := \{ r\in k(X_1,...,X_n) \mid \sigma\cdot r = r \text{ für jedes } \sigma\in S_n\}$$

der Fixköper dieser Operation. Dann gilt:

(i) S_n operiert durch Automorphismen auf $k(X_1,...,X_n)$.

(ii) $F = k(\sigma_1,...,\sigma_n)$,
wobei die σ_i die elementarsymmetrischen Polynome in $X_1,...,X_n$ seien.

(iii) K/F ist eine Galois-Erweiterung vom Grad n! und der Galois-Gruppe
$$Gal(K/F) = S_n.$$

(iv) $f(T) := (T-X_1)\cdot...\cdot(T-X_n)$ ist Minimalpolynom der X_i über F.

*(v) Ein Polynom $p\in k[X_1,...,X_n]$ ist genau dann symmetrisch, d.h. es gilt
$$\sigma\cdot p = p \text{ für jedes } \sigma\in S_n ,$$

wenn es als Polynom in den elementarsymmetrischen Funktionen geschrieben werden kann,
$$p(X_1,...,X_n) = q(\sigma_1,...,\sigma_n) \text{ mit } q\in k[X_1,...,X_n].$$
Das Polynom q ist durch p eindeutig bestimmt.

Beweis. Zu (i). Für jedes $\sigma\in S_n$ ist die Abbildung

$k(X_1,...,X_n) \to k(X_1,...,X_n)$, $r \mapsto \sigma\cdot r$,

ein k-Automorphismus, d.h. das Bild von
$$S_n \to S(k(X_1,...,X_n)),\ \sigma \mapsto (r \mapsto \sigma\cdot r),$$
liegt sogar in der Untergruppe $Aut_k(k(X_1,...,X_n))$ der k-Automorphismen.

Zu (ii) und (iii). Die elementarsymmetrischen Funktionen sind zumindest invariant bei den Elementen von S_n,
$$F' := k(\sigma_1,...,\sigma_n) \subseteq F \subseteq L := k(X_1,...,X_n).$$
Jedes X_i ist Nullstelle von $f\in F'[T]$, also algebraisch über F'. Damit ist
$$L/F' \text{ endliche Körpererweiterung.}$$
Das Minimalpolynom von X_1 über F' ist ein Teiler von f, also vom Grad $\le n$,
$$[F'(X_1):F'] \le n.$$
Das Minimalpolynom von X_2 über $F'(X_1)$ ist ein Teiler von $f/(T-X_1)$, also vom Grad $\le$ n-1. Indem wir auf diese Weise fortfahren, erhalten wir
$$[F'(X_1,...,X_{i+1}):F'(X_1,...,X_i)] \le n-i,$$
d.h.
$$[L:F'] \le n! .$$
Die X_i sind sämtlich separabel über F', denn die Ableitung von f ist gleich

$$f'(T) = \sum_{i=1}^{n} (T-X_1)\cdot...\cdot(T-X_{i-1})\cdot(T-X_{i+1})\cdot...\cdot(T-X_n),$$

also $f(X_i) = (X_i-X_1)\cdot...\cdot(X_i-X_{i-1})\cdot(X_i-X_{i+1})\cdot...\cdot(X_i-X_n) \neq 0$, d.h.f hat X_i nicht als mehrfache Nullstelle (was damit auch für das Minimalpolynom von X_i gilt). Außerdem ist L der Zerfällungskörper von f, also normal über F'. Wir haben damit gezeigt,
$$L/F' \text{ ist eine Galois-Erweiterung vom Grad } \le n!.$$
Wegen $F' \subseteq F \subseteq L$ gilt dasselbe auch für L/F,

L/F ist eine Galois-Erweiterung vom Grad ≤ n!.

Nach Konstruktion gilt

$$S_n \subseteq \mathrm{Gal}(L/F') \subseteq \mathrm{Gal}(L/F)$$

also

(1) $$n! = \#S_n = \#\mathrm{Gal}(L/F') \leq \#\mathrm{Gal}(L/F) = [L:F] \leq n!$$

In der letzten Abschätzung gilt überall das Gleicheitszeichen. Insbesondere gilt $\mathrm{Gal}(L/F') = \mathrm{Gal}(L/F)$ also

$$F = F' = k(\sigma_1,...,\sigma_n).$$

Damit sind (ii) und (iii) bewiesen.

Zu (iv). Da in (1) überall das Gleichheitszeichen gilt, ist dies auch der Fall für alle vorangehenden Abschätzungen. Insbesondere gilt

$$[F(X_i) : F] = n,$$

d.h. das Minimalpolynom von X_i über F hat den Grad n = deg f. Wegen $f(X_i) = 0$ ist damit f das Minimalpolynom, d.h. es gilt (iv).

*Zu (v). Ein Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen ist trivialerweise symmetrisch. Nehmen wir umgekehrt an, p ist symmetrisch

$$\sigma \cdot p = p \text{ für jedes } \sigma \in S_n$$

Dann gilt nach (ii)

$$p \in k(X_1,...,X_n)^{S_n} \cap k[X_1,...,X_n] = k(\sigma_1,...,\sigma_n) \cap k[X_1,...,X_n].$$

Es reicht also zu zeigen,

(2) $$k(\sigma_1,...,\sigma_n) \cap k[X_1,...,X_n] \subseteq k[\sigma_1,...,\sigma_n].$$

Jedes X_i ist Nullstelle des normierten Polynoms

$$f(T) := (T-X_1)\cdot...\cdot(T-X_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\sigma_{n-i}(X_1,...,X_n)\cdot T^i$$

also ganz über $k[\sigma_1,...,\sigma_n]$. Also liegen die X_i und damit alle Elemente von $k[X_1,...,X_n]$ in der ganzen Abschließung von $k[\sigma_1,...,\sigma_n]$ in $k(X_1,...,X_n)$, d.h. alle

Damit sind aber alle Elemente von

(3) $$k(\sigma_1,...,\sigma_n) \cap k[X_1,...,X_n]$$

ganz über $k[\sigma_1,...,\sigma_n]$. Das die σ_i algebraisch unabhängig sind, ist $k[\sigma_1,...,\sigma_n]$ ein ZPE-Ring und damit ganz-abgeschlossen in $k(\sigma_1,...,\sigma_n)$. Die Elemente von (3) liegen daher sämtlich in $k[\sigma_1,...,\sigma_n]$, d.h. es besteht die Inklusion (2).

QED.

3.9 Lineare Unabhängigkeit der Charaktere

3.9.1 Definitionen

Seien G eine Gruppe und K ein Körper. Ein Charakter von G in K ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\chi: G \to K^*.$$

Der triviale Charakter ist die Funktion von G in K ist die Funktion

$$G \to K^*,\ g \mapsto 1,$$

die an allen Stellen den Wert 1 annimmt. Eine Familie von Funktionen

$$f_i: G \to K\ ,\ i = 1,...,n$$

heißt linear unabhängig über K, wenn eine Relation der Gestalt

$$a_1 f_1 + ... + a_n f_n = 0 \text{ mit } a_1,...,a_n \in K$$

nur im Fall $a_1 = ... = a_n = 0$ besteht, d.h. nur die triviale Linearkombination ist die "identisch verschwindende" Funktion.

3.9.2 Satz von Artin

Seien G eine Gruppe, K ein Körper und

$$\chi_1,...,\chi_n: G \to K^*$$

paarweise verschiedene Charaktere von G in K. Dann sind $\chi_1,...,\chi_n$ linear unabhängig über K.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Der Fall n = 1 ist trivial. Sei jetzt n > 1. Angenommen, es gibt eine endliche Familie von n linear abhängigen paarweise verschiedenen Charakteren, d.h. die Linearkombination

(1) $$a_1\chi_1 + ... + a_n\chi_n = 0 \text{ (mit } a_1,...,a_n \in K, \text{ nicht alle } a_i = 0)$$

ist auf ganz G Null. Der Fall, daß ein a_i gleich Null ist, ist nach Induktionsvoraussetzung nicht möglich, d.h. es gilt

$$a_1,...,a_n \in K - \{0\}.$$

Da χ_1 und χ_2 verschieden sind, gibt es ein $g \in G$ mit

$$\chi_1(g) \neq \chi_2(g).$$

Für jedes $x \in G$ erhalten wir aus (1), indem wir als Argument gx einsetzen:

$$a_1 \chi_1(g) \chi_1(x) + ... + a_n \chi_n(g) \chi_n(x) = 0,$$

d.h. es ist

(2) $$a_1 \chi_1(g) \chi_1 + ... + a_n \chi_n(g) \chi_n = 0.$$

Andererseits erhalten wir aus (1) durch Multiplikation mit $\chi_1(g)$:

(3) $$a_1 \chi_1(g) \chi_1 + ... + a_n \chi_1(g) \chi_n = 0.$$

Wir bilden die Differenz aus (2) und (3) und erhalten

$$a_2 (\chi_2(g) - \chi_1(g)) \chi_2 + ... + a_n (\chi_n(g) - \chi_1(g)) \chi_n = 0.$$

Dies ist eine nicht-triviale Relation zwischen n-1 Charakteren, die nach Induktionsvoraussetzung nicht möglich ist.

QED.

3.10 Spur und Norm

3.10.1 Definitionen (separabler Fall)

Seien K/k eine endliche separable Körpererweiterung und $\alpha \in K$ ein Element. Wir setzen

$$N_{K/k}(\alpha) = \prod_{\sigma: K \hookrightarrow \bar{k}} \sigma(\alpha)$$

$$Tr_{K/k}(\alpha) = \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \bar{k}} \sigma(\alpha)$$

Dabei werden Summe bzw Produkt über alle k-Einbettungen $\sigma: K \hookrightarrow \bar{k}$ erstreckt. Auf diese Weise sind Abbildungen

$$N_{K/k}: K \to k$$

$$Tr_{K/k}: K \to k$$

definiert, welche Norm bzw. Spur von K über k heißen.

Beweis. Zunächst nehmen diese Abbildungen nur Werte in $\overline{k}$ an. Wir müssen zeigen, die Bilder dieser Abbildungen liegen in k. Dazu wählen wir eine Galois-Erweiterung

$$L/k$$

mit $K \subseteq L$ und der Galois-Gruppe

$$G := Gal(L/k).$$

Wir betrachten die Untergruppe

$$U := Gal(L/K)$$

und zerlegen G in Nebenklassen modulo U,

$$G = g_1U \cup ... \cup g_rU.$$

Jedes Element $\sigma \in G$ hat eine Einschränkung auf K, die eine k-Einbettung von K in $\overline{k}$ definiert,

$$\sigma|_K: K \to L \subset \overline{k},$$

und man erhält auf diese Weise alle k-Einbettungen von K in $\overline{k}$. Für zwei Elemente $\sigma,\tau \in G$ gilt

$$\sigma|_K = \tau|_K \Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau|_K = Id \Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau \in U \Leftrightarrow \sigma U = \tau U,$$

d.h. sie definieren dieselbe k-Einbettung von K, genau dann wenn sie zur selben Restklasse modulo U gehören. Mit anderen Worten, die Eischränkungen

$$g_1|_K , ... , g_r|_K$$

sind gerade die k-Einbettungen von K in $\overline{k}$. Damit gilt für jedes $\alpha \in K$,

(1) $$N_{K/k}(\alpha) = \prod_{i=1}^{r} g_i(\alpha) \in L$$

(2) $$Tr_{K/k}(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} g_i(\alpha) \in L$$

Nach Definition von U gilt $L^G = K$. Es reicht also zu zeigen, die rechten Seiten von (1) und (2) sind invariant bei den Elementen von G.Sei $g \in G$. Nach Definition der g_i gibt es dann eine Permutation $\sigma \in S_r$ Elemente $u_i \in U$ mit

$$gg_i = g_{\sigma(i)}u_i$$

Man beachte, die Abbildung σ ist injektiv: aus $g_{\sigma(i)} = g_{\sigma(j)}$ folgt $gg_iu_i^{-1} = gg_ju_j^{-1}$, also $g_i \in g_jU$ also $g_i = g_j$.
Es folgt

$$g(N_{K/k}(\alpha)) = \prod_{i=1}^{r} gg_i(\alpha)$$

$$= \prod_{i=1}^{r} g_{\sigma(i)}{}^{u_i}(\alpha)$$

$$= \prod_{i=1}^{r} g_{\sigma(i)}(\alpha) \qquad \text{(wegen } u_i \in U = Gal(L/K) \text{ und } \alpha \in K)$$

$$= \prod_{i=1}^{r} g_i(\alpha) \qquad \text{(weil L kommutativ ist)}$$

$$= N_{K/k}(\alpha)$$

Dieselbe Rechnung kann man auch mit der Summe anstellte des Produkts durchführen. Wir haben gezeigt, $N_{K/k}(\alpha)$ und $Tr_{K/k}(\alpha)$ sind invariant bei den Elementen von G, liegen also in k.

QED.

Bemerkung

Der obige Beweis zeigt, für jede endliche Galois-Erweiterung L/k, jede Teilerweiterung K/k und jedes Element $\alpha \in K$ gilt

$$N_{K/k}(\alpha) = \prod_{[g] \in Gal(L/k)/Gal(K/k)} g(\alpha).$$

$$Tr_{K/k}(\alpha) = \sum_{[g] \in Gal(L/k)/Gal(K/k)} g(\alpha).$$

Dabei bezeichne [g] die (Links-) Nebenklasse von $g \in Gal(L/k)$ modulo Gal(K/k).

3.10.2 Eigenschaften der Norm

Sei K/k eine separable Körpererweiterung vom Grad $n = [K:k] < \infty$. Dann gilt

(i) $N_{K/k}(\alpha \cdot \beta) = N_{K/k}(\alpha)\, N_{K/k}(\beta)$ für $\alpha, \beta \in K$.

(ii) $N_{K/k}(\alpha) = \alpha^n$ für $\alpha \in k$.

(iii) $N_{K/k} = N_{F/k} \circ N_{K/F}$ für jeden Körper F zwischen k und K.

(iv) $N_{K/k}(\alpha) = (-1)^n f_\alpha(0)$ falls $K = k(\alpha)$.

(v) $N_{K/k}(\alpha) = \det(mult_\alpha)$.

Dabei bezeichne f_α das Minimalpolynom von α über k und $mult_\alpha$ die k-lineare Abbildung

$$mult_\alpha : K \to K,\ x \mapsto \alpha x.$$

Beweis. Zu (i). Für jede k-Einbettung $\sigma: K \to \bar{k}$ gilt

$$\sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta).$$

Da $\bar{k}$ kommutativ ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus der definierenden Formel von $N_{K/k}$.

Zu (ii). Für $\alpha \in k$ gilt $\sigma(\alpha) = \alpha$ für jede k-Einbettung $\sigma: K \to \bar{k}$. Die Behauptung ergibt sich damit aus der Definiton von $N_{K/k}$.

Zu (iii). Wir wählen eine endliche Galois-Erweiterung L/k mit $K \subseteq L$ und setzen

$G := Gal(L/k)$
$U := Gal(L/F)$
$V := Gal(L/K)$.

Nach der Bemerkung von 3.12.2 gilt dann für jedes $\alpha \in K$:

$$\beta := N_{K/F}(\alpha) = \prod_{[g] \in U/V} g(\alpha)$$

und

$$N_{F/k}(N_{K/F}(\alpha)) = N_{F/k}(\beta) = \prod_{[h] \in G/U} h(\beta)$$

$$= \prod_{[h]\in G/U} h\Big(\prod_{[g]\in U/V} g(\alpha)\Big)$$

$$= \prod_{[h]\in G/U}\ \prod_{[g]\in U/V} hg(\alpha)$$

Durchlaufe jetzt h ein Repräsentantensystem von G/U,

$$G = h_1U \cup ... \cup h_rU$$

und g ein Repräsentantensystem vom U/V,

$$U = g_1V \cup ... \cup g_sV.$$

Dann bilden die h_ig_j ein Repräsentantensystem von G/V,

$$G = \cup_{i=1}^{r} \cup_{j=1}^{s} h_ig_jV.$$

Das obige Doppelprodukt läßt sich damit wie folgt schreiben.

$$N_{F/k}(N_{K/F}(\alpha)) = \prod_{[g]\in G/V} g(\alpha) = N_{K/k}(\alpha).$$

Zu (iv). Die Nullstellen des Minimalpolynoms von α sind gerade die zu α konjugierten Elemente von $\overline{k}$, d.h. es gilt

$$f_\alpha(X) = \prod_{\sigma:K\subset\overline{k}} (X-\sigma(\alpha)),$$

also

$$f_\alpha(0) = \prod_{\sigma:K\subset\overline{k}} (-\sigma(\alpha)) = (-1)^n \prod_{\sigma:K\subset\overline{k}} \sigma(\alpha) = (-1)^n N_{K/k}(\alpha)$$

Das ist aber gerade die Behauptung.

Zu (v). Seien $\alpha\in K$,

$$f_\alpha(X) = c_0+c_1X + ... + c_{n-1}X^{n-1} + X^n \in k[X]$$

das Minimalpolynom von α über k und

$$F = k(\alpha).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} N_{K/k}(\alpha) &= N_{F/k}(N_{K/F}(\alpha)) && \text{(nach (iii))}\\ &= N_{F/k}(\alpha^{[K:F]}) && \text{(nach (ii) wegen } \alpha\in F = k(\alpha))\\ &= N_{F/k}(\alpha)^{[K:F]} && \text{(nach (i))}\\ &= ((-1)^{[F:k]}c_0)^{[K:F]} && \text{(nach (iv))} \end{aligned}$$

d.h.

$$(1)\qquad N_{K/k}(\alpha) = (-1)^{[K:k]}c_0^{[K:F]}$$

Es reicht zu zeigen, der Ausdruck auf der rechten Seite ist die Determinante der Multiplikationsabbildung mult_α bezüglich einer geeignet gewählten Basis von K/k. Sei irgendeine Basis von K über F gegeben, sagen wir

$$K = F\omega_1+...+F\omega_r \text{ mit } r = [K:F].$$

Wegen

$$F = k\cdot 1+k\cdot\alpha + ... + k\cdot\alpha^{s-1} \text{ mit } s = \deg f_\alpha = [F:k].$$

ist dann

(2) $$\omega_1, \alpha\omega_1, ..., \alpha^{s-1}\omega_1, \omega_2, \alpha\omega_2, ..., \alpha^{s-1}\omega_2, ..., \omega_r, \alpha\omega_r, ..., \alpha^{s-1}\omega_r$$

eine Basis von K über k. Bei Multiplikation mit α gehen die Basiselemente

$$\omega_j, \alpha\omega_j, ..., \alpha^{s-1}\omega_j$$

in eine Linearkombination dieser Basiselemente über:

$$\alpha^s\omega_j = (-c_0 - c_1\alpha + ... - c_{s-1}\alpha^{s-1})\omega_j.$$

Deshalb zerfällt die Matrix vom mult_α bezüglich der Basis (2) in r Blöcke,

$$M(\text{mult}_\alpha) = \begin{pmatrix} B & 0 & ... & 0 \\ 0 & B & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & B \end{pmatrix} \text{ (r Blöcke)}$$

wobei jeder Block die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & -c_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -c_{s-1} \end{pmatrix}$$

hat. Durch (s-1) Nachbartausche kann man die erste Zeile von B in die letzte überführen. Deshalb gilt

$$\det B = (-1)^{s-1}(-c_0) = (-1)^s c_0$$

also

$$\det(\text{mult}_\alpha) = (\det B)^r = (-1)^{rs} c_0^r.$$

Wegen r = [K:F] , s = [F:k], also rs = [K:k], erhalten wir durch Vergleich mit (1) die Behauptung.
QED.

3.10.3 Eigenschaften der Spur

Sei K/k eine separable Körpererweiterung vom Grad $n = [K:k] < \infty$. Dann gilt

(i) $\text{Tr}_{K/k}(\alpha+\beta) = \text{Tr}_{K/k}(\alpha) + \text{Tr}_{K/k}(\beta)$ für $\alpha,\beta \in K$.

(ii) $\text{Tr}_{K/k}(\alpha) = n$ für $\alpha \in k$.

(iii) $\text{Tr}_{K/k} = \text{Tr}_{F/k} \circ \text{Tr}_{K/F}$ für jeden Körper F zwischen k und K.

(iv) $\text{Tr}_{K/k}(\alpha) = -a_{n-1}$ falls $K = k(\alpha)$ ist und a_{n-1} den Koeffizienten von X^{n-1} im Minimalpolynom f_α von α über k bezeichnet.

(v) $\text{Tr}_{K/k}(\alpha) = \text{Tr}(\text{mult}_\alpha)$:= Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen einer Matrix von mult_α.

Dabei bezeichne mult_α die k-lineare Abbildung

$$\text{mult}_\alpha : K \to K,\ x \mapsto \alpha x.$$

Beweis. Ist analog zum Beweis von 3.12.2.
QED.

3.11 Zyklische Erweiterungen

3.11.1 Definition
Eine endliche Galois-Erweiterung K/k heißt abelsch bzw. zyklisch, wenn die Galois-Gruppe

$$Gal(K/k)$$

abelsch bzw. zyklisch ist.
Beispiel 1
Seien k ein Körper der eine n-te primitive Einheitswurzel

$$\zeta \in k$$

enthält und

$$K = k(\alpha) \text{ mit } a := \alpha^n \in k,$$

d.h. α ist eine n-te Wurzel aus einem Element von k. Es gelte

$$n \cdot 1_k \neq 0$$

(d.h. n sei teilerfremd zur Charakteristik). Dann ist

$$k(\alpha)/k$$

eine zyklische Galois-Erweiterung.
Beweis. Wir können annehmen , α ist nicht Null .Das Element α ist Nullstelle des Polynoms

$$f(X) = X^n - a,$$

Die n Nullstellen des Polynoms f sind gerade die folgenden:

$$\zeta^i\alpha \text{ , } i = 1,...,n.$$

Diese sind paarweise verschieden und liegen in K. Also ist K/k separabel und gerade der Zerfällungskörper von f über k, d.h. K/k ist normal. Damit ist

$$K/k \text{ eine Galois-Erweiterung.}$$

Sei

$$G = G(K/k)$$

die Galois-Gruppe. Für jedes $\sigma \in G$ ist $\sigma(\alpha)$ eine Nullstelle von f, also von der Gestalt

$$\sigma(\alpha) = \omega_\sigma \alpha$$

mit einer n-ten Einheitswurzel ω_σ. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: G \to <\zeta> \subseteq k^*, \ \sigma \mapsto \omega_\sigma.$$

Es reicht zu zeigen,
1. φ ist injektiv.
2. φ ist ein Gruppen-Homomorphismus.
Denn dann kann man G als Untergruppe der zyklischen Gruppe $<\zeta>$ auffassen, d.h. G ist selbst zyklisch.
Zu 2 Für $\sigma, \tau \in G$ gilt

$$\omega_{\sigma\tau}\alpha = \sigma\tau(\alpha) = \sigma(\omega_\tau \alpha) = \omega_\tau \sigma(\alpha) = \omega_\tau \omega_\sigma \alpha,$$

$$\text{also } \varphi(\sigma\tau) = \omega_{\sigma\tau} = \omega_\tau \omega_\sigma = \varphi(\sigma)\varphi(\tau).$$

Zu 1. Weil K von α erzeugt wird, ist σ durch das Bild

$$\sigma(\alpha) = \omega_\sigma \alpha$$

bereits vollständig festgelegt, d.h. durch $\varphi(\sigma) = \omega_\sigma$.

QED.

Beispiel 2
Sei K/k eine Körpererweiterung und $\zeta \in K$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Dann ist

$$k(\zeta)/k$$

eine abelsche Galois-Erweiterung.
Beweis. $k(\zeta)$ ist der Zerfällungskörper des Polynoms

$$f(X) = X^n - 1,$$

also normal und separabel über k, d.h. die $k(\zeta)/k$ ist endliche Galois-Erweiterung. Sei

$$G = G(k(\zeta)/k)$$

die Galois-Gruppen. Jedes $\sigma \in G$ bildet ζ in eine primitive n-te Einheitswurzel ab, d.h.

$$\sigma(\zeta) = \zeta^i \text{ mit } ggT(i,n) = 1.$$

Der Exponent $i = i(\sigma)$ ist dabei modulo n eindeutig festgelegt. Auf diese Weise ist also eine Abbildung

$$h: G \to (\mathbb{Z}/(n))^*, \sigma \mapsto i(\sigma) \bmod n,$$

definiert. Für $\sigma, \tau \in G$ gilt

$$\zeta^{i(\sigma\tau)} = (\sigma\tau)(\zeta) = \sigma(\zeta^{i(\tau)}) = (\sigma(\zeta))^{i(\tau)} = \zeta^{i(\sigma)i(\tau)}$$

d.h. h ist ein Gruppen-Homomorphismus. Weil $k(\zeta)$ von ζ erzeugt wird ist jedes $\sigma \in G$ durch das Bild von $\sigma(\zeta)$ (und damit durch $i(\sigma)$ mod n) bereits eindeutig festgelegt. Mit anderen Worten h ist injektiv und wir können G als Untergruppe der abelschen Gruppe

$$(\mathbb{Z}/(n))^*$$

auffassen. Insbesondere ist G abelsch.

QED.

Bemerkung

Im Fall $k = \mathbb{Q}$ und n = 12 kann man zeigen, daß die obige Erweiterung nicht abelsch ist. Es ist dann G eine Untergruppe von

$$(\mathbb{Z}/(12))^* = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\}$$

Jedes Element dieser Gruppe hat das Quadrat $\overline{1}$, d.h. es handelt sich um die Kleinsche Vierergruppe, d.h. um eine Gruppe, die nicht zyklisch ist. Es reicht also zu zeigen,

$$G = (\mathbb{Z}/(12))^*.$$

Angenommen, es gilt nicht das Gleichheitszeichen. Dann hat G die Ordnung

$$\# G = 2,$$

also $\mathbb{Q}(\zeta)$ den Grad

$$[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}] = \# G = 2,$$

d.h. ζ würde einer Gleichung zweiten Grades über $\mathbb{Q}$ genügen. Nun ist aber ζ^3 eine 4 .te primitive Einheitswurzel[22], d.h. $\zeta^3 = \pm i$, also gilt $i \in \mathbb{Q}(\zeta)$, also aus Gradgründen

(1) $$\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} + i\cdot\mathbb{Q}.$$

Weiter ist ζ^4 eine 3-te primitive Einheitswurzel[23], also $\zeta^4 = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2}$, also gilt

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\zeta),$$

also aus Gradgründen

(2) $$\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\cdot\mathbb{Q}.$$

Die Identitäten (1) und (2) sind aber unvereinbar: nach (2) liegt $\mathbb{Q}(\zeta)$ ganz in den reellen Zahlen.

3.11.2 Hilberts Satz 90

Seien K/k eine (endliche) zyklische Erweiterung mit der Galois-Gruppe G, σ ein erzeugendes Element von G,

$$G = \langle\sigma\rangle$$

und $\alpha \in K$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) $N_{K/k}(\alpha) = 1$.

(ii) Es gibt ein Element $\beta \in K - \{0\}$ mit $\alpha = \beta/\sigma(\beta)$.

---

[22] Wäre ζ^3 nicht primitiv, so wäre $\zeta^3 = \pm 1$, also $\zeta^6 = 1$, d.h. ζ wäre nicht primitiv.

[23] Wäre ζ^4 nicht primitiv, so wäre $\zeta^4 = 1$, d.h. ζ wäre nicht primitiv.

Beweis. Wir schreiben $N := N_{K/k}$ für die Normabbildung $K \to k$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Es gilt

$$N(\alpha) = N(\beta)/N(\sigma(\beta)).$$

Nach Definiton der Norm ist

$$N(\sigma(\beta)) = \prod_{\tau \in G} \tau(\sigma(\beta)) = \prod_{\tau \in G} \tau\sigma(\beta)$$

Da die Multiplikation von links mit τ eine bijektive Abbildung $G \to G$ definiert, folgt

$$N(\sigma(\beta)) = \prod_{\tau \in G} \tau(\beta) = N(\beta)$$

also $N(\alpha) = N(\beta)/N(\sigma(\beta)) = 1$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Wir setzen

$$n := \# G = [K:k]$$

Nach Voraussetzung gilt $N_{K/k}(\alpha) = 1$, also

$$\alpha \neq 0.$$

Die Abbildungen

$$\sigma^i: K^* \to K^*, \; i = 0,1,...,n$$

sind paarweise verschiedene Charaktere von K^* in K, also K-linear unabhängig (nach dem Satz von Artin, 3.9.2). Insbesondere ist die folgende Abbildung $K \to K$ nicht identisch Null.

$$\mathrm{Id} + \alpha\cdot\sigma + \alpha\cdot\sigma(\alpha)\cdot\sigma^2 + \alpha\cdot\sigma(\alpha)\cdot\sigma^2(\alpha)\cdot\sigma^3 + ... + \alpha\cdot\sigma(\alpha)\cdot...\cdot\sigma^{n-2}(\alpha)\cdot\sigma^{n-1}$$

Es gibt also ein Element $\theta \in K$ mit der Eigenschaft, daß das wie folgt definierte Element $\beta \in K$ nicht Null ist.

$$\beta := \theta + \alpha\cdot\sigma(\theta) + \alpha\cdot\sigma(\alpha)\cdot\sigma^2(\theta) + \alpha\cdot\sigma(\alpha)\cdot\sigma^2(\alpha)\cdot\sigma^3(\theta) + ... + \alpha\cdot\sigma(\alpha)\cdot...\cdot\sigma^{n-2}(\alpha)\cdot\sigma^{n-1}(\theta)$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} .\beta_r \text{ mit } \beta_r := (\prod_{i=0}^{r-1} \sigma^i(\alpha))\sigma^r(\theta)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sigma(\beta_r) &= \sigma((\prod_{i=0}^{r-1} \sigma^i(\alpha))\sigma^r(\theta)) \\
&= (\prod_{i=0}^{r-1} \sigma^{i+1}(\alpha))\sigma^{r+1}(\theta) \\
&= (\prod_{i=1}^{r} \sigma^i(\alpha))\sigma^{r+1}(\theta) \\
&= \beta_{r+1}/\alpha
\end{aligned}$$

für $r < n-1$ und

$$\begin{aligned}
\sigma(\beta_{n-1}) &= (\prod_{i=0}^{n-2} \sigma^{i+1}(\alpha))\sigma^n(\theta) \\
&= (\prod_{i=0}^{n-2} \sigma^{i+1}(\alpha))\cdot\theta \qquad (\text{wegen } \sigma^n = \mathrm{Id}) \\
&= (\prod_{i=0}^{n-1} \sigma^i(\alpha))).\theta/\alpha \\
&= N_{K/k}(\alpha)\cdot\theta/\alpha
\end{aligned}$$

$$= \theta/\alpha \qquad \text{(wegen } N_{K/k}(\alpha) = 1\text{)}$$

Einsetzen in die Definition von β liefert

$$\sigma(\beta) = \sum_{r=0}^{n-1} .\sigma(\beta_r)$$

$$= \sum_{r=0}^{n-2} \beta_{r+1}/\alpha + \theta/\alpha$$

$$= \beta/\alpha$$

also

$$\alpha = \beta/\sigma(\alpha)$$

QED.

3.11.3 Satz über die zyklischen Erweiterungen

Seien k ein Körper und n eine natürliche Zahl, die im Fall char $k \neq 0$ teilerfremd zu Charakteristik von k ist. Der Körper k enthalte eine primitive n-te Einheitswurzel. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) Jede zyklische Erweiterung K von k des Grades n hat die Gestalt

$$K = k(\alpha),$$

wobei α Nullstelle eines Polynoms der Gestalt

$$f(X) = X^n - a \in k[X]$$

ist.

(ii) Sei α aus einer Körpererweiterung von k und Nullstelle eines Polynoms der Gestalt

$$f(X) = X^n - a \in k[X]$$

Dann ist $k(\alpha)/k$ eine zyklische Körpererweiterung, deren Grad d ein Teiler von n ist. Außerdem gilt $\alpha^d \in k$.

Beweis. Zu (i). Seien K/k eine zyklische Erweiterung des Grades n mit der Gruppe

$$G = \langle\sigma\rangle$$

und

$$\zeta \in k$$

eine n-te Einheitswurzel. Es gilt

$$N_{K/k}(\zeta^{-1}) = (\zeta^{-1})^n \qquad \text{(wegen } \zeta \in K \text{ und 3.10.2)}$$

$$= 1.$$

Nach Hilberts Satz 90 gibt es ein $\alpha \in K$ mit $\zeta^{-1} = \alpha/\sigma(\alpha)$, d.h.

$$\sigma(\alpha) = \zeta\alpha.$$

Wegen $\zeta \in k$ folgt

$$\sigma^i(\alpha) = \zeta^i\alpha \text{ für } i = 1,...,n.$$

Die Elemente $\zeta^i a$ sind die (paarweise verschiedenen) zu α über k konjugierten Elemente. Es folgt

$$[k(\alpha):k] = [k(\alpha):k]_s \qquad \text{(weil K/k galoisch, also separabel ist)}$$

$$= n \qquad \text{(nach 3.5.2).}$$

Damit ist

$$K = k(\alpha)$$

und

$$\sigma(\alpha^n) = \sigma(\alpha)^n = (\zeta\alpha)^n = (\zeta)^n(\alpha)^n = \alpha^n,$$

d.h. α^n bleibt fest bei α und damit bei allen Potenzen von σ, d.h bei $\langle\sigma\rangle = G$. Es folgt

$$a := \alpha^n \in K^G = k,$$

d.h. α ist Nullstelle von $X^n - a \in k[X]$.

Zu (ii). Sei $\overline{k}$ eine algebraische Abschließung von k und $\alpha \in \overline{k}$ Nullstelle von

$$f(X) = X^n - a \in k[X].$$

Dann sind die Elemente

$$\zeta^i\alpha \text{ , } i = 1,...,n.$$

ebenfalls Nullstellen von f(X). Wegen $\zeta \in k$ sind es alles Elemente von $k(\alpha)$,

$$\zeta^i\alpha \in k(\alpha).$$

Damit liegen alle Nullstellen von f (in $\overline{k}$) in $k(\alpha)$, d.h. $k(\alpha)$ ist Zerfällungskörper von f über k. Insbesondere ist

$k(\alpha)/k$ normale Körpererweiterung.

Die n Nullstellen von f in $\overline{k}$ sind paarweise verschieden, d.h.

$k(\alpha)/k$ ist separable Köpererweiterung.

Zusammen sehen wir,

$k(\alpha)/k$ ist eine Galois-Erweiterung.

Sei

$$G := G(k(\alpha)/k)$$

deren Galois-Gruppe. Für jedes $\sigma \in G$ ist $\sigma(\alpha)$ eine Nullstelle von f(X), d.h.

$$\sigma(\alpha) = \omega_\sigma \cdot \alpha$$

Nach Beispiel 1 von 3.1.11 ist die Abbildung

$$\varphi: G \to <\zeta> = \mu_{k,n} \text{ , } \alpha \mapsto \omega_\sigma,$$

ein injektiver Gruppen-Homomorphismus. Wir können G als Untergruppe der zyklischen Gruppe

$$\mu_{k,n} = <\zeta>$$

der Ordnung n auffassen. Insbesondere ist

G zyklisch von der Ordnung $d = \#\,\mathrm{Im}(\varphi)$ mit $d \mid n$.

Sei σ jetzt ein erzeugendes Element von G,

$$G = <\sigma>.$$

Dann ist ω_σ eine primitive d-te Einheitswurzel und es gilt

$$\sigma(\alpha^d) = (\sigma(\alpha))^d = (\omega_\sigma \alpha)^d = \alpha^d,$$

d.h. α^d bleibt fest bei σ, also auch bei allen Abbildungen von $<\sigma> = G$, d.h.

$$\alpha^d \in k(\alpha)^G = k.$$

QED.

3.12 Auflösbare Erweiterungen (in der Charakteristik 0)

3.12.1 Definitionen

Seien k ein Körper der Charakteristik Null und

$$K/k$$

eine endliche Körper-Erweiterung.

Die Erweiterung K/k heißt auflösbar, wenn sie ganz in einer Galois-Erweiterung L/k mit auflösbarer Galois-Gruppe liegt.

Die Erweiterung K/k heißt auflösbar durch Radikale, wenn es einen Körperturm

$$k = K_0 \subset K_1 \subset ... \subset E_r = K$$

gibt mit

$$K_{i+1} = K_i(\alpha_i),$$

wobei eine Potenz von α_i in K_i liegen soll,

$$(\alpha_i)^{n_i} \in K_i .$$

3.12.2 Eigenschaften auflösbarer Erweiterungen

Die Auflösbaren Körpererweiterungen bilden eine ausgezeichnete Klasse.
Beweis. Übungsaufgabe.
QED.

3.12.3 Auflösbarkeit und Auflösbarkeit durch Radikale

Seien k ein Körper der Charakteristik Null und

$$E/k$$

eine endliche Galois-Erweiterung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) E/k ist auflösbar.
(ii) E/k ist auflösbar durch Radikale.
Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i). Wir müssen die Existenz einer Galois-Erweiterung

$$L/k$$

mit

$$K \subseteq L \text{ und } G(L/k) \text{ auflösbar}$$

beweisen. Dazu können wir K bei Bedarf vergrößern.
1. Schritt. Reduktion auf den Fall, daß K/k Galois-Erweiterung ist.
Sei $\bar{k}$ eine algebraische Erweiterung von k, die K enthält. Für jede k-Einbettung

$$\sigma: K \to \bar{k}$$

ist auch $\sigma(K)/k$ auflösbar durch Radikale. Dasselbe gilt für das Kompositum aller $\sigma(K)$.
Wir können also annehmen K ist normal über k, d.h.

$$K/k \text{ ist eine endliche Galois-Erweiterung.}$$

Nach Voraussetzung entsteht K durch Adjunktion von endlich vielen Nullstellen von Polynomen der Gestalt

$$X^n - a.$$

Wir bezeichnen jetzt mit

$$N$$

eine natürliche Zahl, die von allen dabei auftretenden Graden n geteilt wird.
2. Schritt: Reduktion auf den Fall, daß k eine primitive N-te Einheitswurzel enthält.

Bezeichne

$$\zeta$$

eine primitive N-te Einheitswurzel. Wir setzen

$$F = k(\zeta).$$

Dann ist G(F/k) abelsch, also auflösbar. Es reicht zu zeigen,

$$G(KF/F) \text{ ist auflöbar,}$$

denn wegen der kurzen exakten Sequenz

$$1 \to G(KF/F) \xrightarrow{f} G(KF/k) \xrightarrow{g} G(F/k) \to 1$$

mit $f(\sigma) = \sigma$ und $g(\sigma) = \sigma|_F$ ist G(KF/k) auflösbar und es gibt eine Surjektion

$$G(KF/k) \to G(K/k), \sigma \mapsto \sigma|_K ,$$

d.h. K/k ist auflösbar.
3. Schritt. Abschluß des Beweises.
Nach Voraussetzung gibt es einen Körperturm

$$k = K_0 \subset K_1 \subset ... \subset E_r = K$$

gibt mit

$$K_{i+1} = K_i(\alpha_i) , (\alpha_i)^{n_i} \in K_i , n_i \mid N.$$

Nach Voraussetzung enthält k eine primitive N-te Einheitswurzel. Also enthält K_i ein primitive n_i-te Einheitswurzel. Nach 3.11.1 Beispiel 1 ist

$$K_{i+1}/K_i \text{ zyklische Galois-Erweiterung.}$$

Aus der kurzen exakten Sequenz

$$1 \to G(K_{i+1}/K_i) \to G(K_{i+1}/k) \to G(K_i/k) \to 1$$

sehen wir, mit $G(K_i/k)$ ist auch $G(K_{i+1}/k)$ auflösbar. Also ist G(K/k) auflösbar.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Wird so ähnlich bewiesen: man reduziert die Aussage auf den Fall, daß K/k Galois-Erweiterung ist und k eine primitive n-te Einheitswurzel enthält mit n = [K:k] und benutzt dann 3.11.3(i).
QED.

3.13 Die Galois-Gruppe eines Polynoms

3.13.1 Definition
Seien k ein Körper und

$$f(X) \in k[X]$$

ein Polynom ohne mehrfache Nullstellen (in einem Erweiterungskörper von k). Weiter sei K der Zerfällungskörper von f über k. Dann heißt
G(f) = G(K/k)
Galois-Gruppe von f über k.

3.13.2 Beispiel
Seien $\sigma_1,...,\sigma_n$, T Unbestimmte und

$$f(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + - ... + (-1)^n \sigma_n \in K := k(\sigma_1,...,\sigma_n)$$

das "allgemeine" Polynom n-ten Grades. Dann hat f die Galois-Gruppe S_n. Insbesondere ist die Galois-Gruppe im Fall $n \geq 5$ nicht auflösbar und die Nullstellen von f lassen sich nicht als Radikale in den Koeffizienten $\sigma_1,...,\sigma_n$ von f ausdrücken.

3.13.3 Beispiel
Man kann zeigen, der Zerfällungkörper von

$$X^5 - X - 1$$

hat über $\mathbb{Q}$ die Galois-Gruppe

$$G = S_5.$$

Insbesondere lassen sich die Nullstellen dieses Polynoms nicht durch Radikale ausdrücken.

Zum Beweis dieser Aussage brauchen wir einige allgemeine Sätze zur Berechnung der Galois-Gruppe eines Polynoms.

3.13.4 Konstruktion
Seien

$$f(X) \in k[X]$$

ein Polynom ohne mehrfachen Nullstellen,

$$\alpha_1,...,\alpha_n \in \bar{k}$$

dessen Nullstellen in einer algebraischen Abschließung $\bar{k}$ von k. Wir führen Unbestimmte

$$u_1,...,u_n$$

ein und setzen

$$\theta := u_1\alpha_1 + \ldots u_n\alpha_n$$

und

$$F(z, u) := \prod_{s\in S_n} (z - s\cdot\theta)$$

Dabei operiere $s\in S_n$ auf den Polynomen in den u_i durch Permutation der Unbestimmten u_i. Wir zerlegen F in irreduzible Faktoren

$$F(z,u) = F_1(z, u)\cdot\ldots\cdot F_r(z,u) \text{ in } k[u,z].$$

Die Permutationen von S_n, die F_1 in sich abbilden, bilden eine Untergruppe von S_n,

$$G' = \{s\in S_n \mid sF_1 = F_1\}$$

Bemerkungen

(i) Die Elemente der Galois-Gruppe G := G(f) von f permutieren die Nullstellen

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$$

von f. Wir haben also einen wohldefinierten Gruppen-Homomorphismus

$$G \to S_n,\ \sigma \mapsto \sigma|\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$$

wenn wir S_n als Gruppe der Permutation von $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ auffassen. Diese Abbildung ist injektiv, weil die α_i den Zerfällungskörper von f erzeugen. Wir können also G als Untergruppe der S_n auffassen.

(ii) Der nachfolgende Satz besagt, daß man die beiden eben beschriebenen Untergruppen der S_n identifizieren kann.

3.13.5 Eine alternative Beschreibung der Galois-Gruppe eines Polynoms

Mit den Bezeichnungen von 3.23.4 gilt

$$G(f) = \{s\in S_n \mid sF_1 = F_1\}.$$

Beweis. Sei K der Zerfällungskörper von f über k,

$$K = k(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Über K[u] zerfällt F also auch F_1 in die Linearfaktoren

$$z - s\theta = z - u_1\alpha_{s^{-1}(1)} + \ldots u_n\alpha_{s^{-1}(n)} \qquad (s\in S_n).$$

Wir wählen die Bezeichnungen so, daß F_1 den Faktor

$$z - \theta$$

enthält. Wie schon angemerkt können wir die $s\in S_n$ zum Permutieren der u_i benutzen, aber auch zum Permutieren der α_i. Je nachdem, welcher Fall vorliegt, wollen wir $s = s_u$ oder $s = s_\alpha$ schreiben. Dann gilt

(1) $$F_1(z, u) \mid \sum_{s\in G(f)} (z - s_\alpha\theta) \text{ in } k[z, u]$$

denn rechts steht ein Polynom mit Koeffizienten auf K, welches bei den Elementen von G(f) unverändert bleibt, d.h. die Koeffizienten von liegen in $K^{G(f)} = k$. Die

Teilbarkeitsrelation besteht, weil F_1 irreduzibel ist und mit dem Polynom rechts die Nulstelle $z - \theta$ gemeinsam hat.[24]

1.Schritt: $s_\alpha\theta = s_u^{-1}\theta$

Das Produkt

$$s_u s_\alpha$$

läßt den Ausdruck

$$\theta := u_1\alpha_1 + \ldots u_n\alpha_n$$

unverändert, d.h. es gilt

$$s_u s_\alpha \theta = \theta,$$

d.h.

$$s_\alpha\theta = s_u^{-1}\theta.$$

2. Schritt: $G' := \{s \in S_n \mid s_u F_1 = F_1\}$ ist gleich $\{ s \in S_n \mid s_u(z-\theta) \mid F_1\}$

Beweis von "$\supseteq$". Sei

$$\sigma \in \{ s \in S_n \mid s_u(z-\theta) \mid F_1\}$$

Nach Definition von $F(z,u)$ bleibt dieses Polynom unverändert bei σ_u. Jeder Linearfaktor L von F_1 wird von σ_u in einen Linearfaktor $\sigma_u L$ von $\sigma_u F_1$ überführt. Speziel für $L = z-\theta$ sehen, daß

$$\sigma_u L$$

ein Linearfaktor von $\sigma_u F_1$ und (nach Wahl von σ auch) von F_1 ist. Also haben $\sigma_u F_1$ und F_1 einen nicht-trivialen gemeinsamen Faktor. Da beide Polynome irreduzibel sind, müssen sie gleich sein, d.h. es gilt

$$\sigma_u F_1 = F_1,$$

also $\sigma \in G'$.

Beweis von "$\subseteq$". Sei $\sigma \in G'$.

Dann überführt σ_u jeden Linearfaktor von F_1 in einen Linearfaktor von F_1. Dies gilt insbesondere für $z - \theta$.

3.Schritt. $G' = G(f)$.

Die Permutationen $s_\alpha \in G(f)$ überführen

$$\theta := u_1\alpha_1 + \ldots u_n\alpha_n$$

in die Konjugierten von θ, d.h. sie überführen den Linearfaktor $z-\theta$ von F_1 in einen Linearfaktor von F_1. Wegen $s_\alpha\theta = s_u^{-1}\theta$ gilt dasselbe auch für s_u, d.h. es gilt $s \in G'$. Wir haben gezeigt:

$$G(f) \subseteq G'.$$

Ist umgekehrt $s \in G'$, so überführt s_u nach dem zweiten Schritt $z - \theta$ in einen Linearfaktor von F_1. Wegen $s_\alpha\theta = s_u^{-1}\theta$ überführt s_α das Element θ in ein zu θ konjugiertes Element. Die zu θ konjugierten Elemente erhält man aber, indem man auf die α_i ein Element $\sigma \in G(f)$ anwendet (wegen (1)), d.h. es gilt

---

[24] Zunächst besteht die Teilbarkeitsbeziehung in $k(u)[z]$. Nun ist aber $k[u]$ ein ZPE-Ring und beide Polynome haben den Inhalt 1.

$$s_\alpha = \sigma \in G(f).$$

QED.

3.13.6 Einige Untergruppen der Galois-Gruppe

Sei R ein ZPE-Ring mit dem Primideal P und

$$f(X) = X^n + \ldots \in R[X]$$

ein Polynom. Bezeichne

$$h: R \to R/P$$

den natürlichen Homomoprhismus. Es gelte:

f und f^h haben keine mehrfachen Nullstellen.

Bezeichne

$$G$$

die Galois-Gruppe des Zerfällungskörpers von f über Q(R) und

$$\overline{G}$$

die Galois-Gruppe des Zerfällungskörpers von f^h über Q(R/P).

Dann kann man $\overline{G}$ als Untergruppe von G auffassen,

$$\overline{G} \subseteq G.$$

Beweis. Sei

$$F(z,u) = F_1(z,u) \cdot \ldots \cdot F_r(z,u)$$

die Zerlegung von F in irreduzible Faktoren über Q(R). Weil R ein ZPE-Ring ist, können wir annehmen,

$$F_i(z,u) \in R[z,u]$$

für alle i, und wir erhalten eine Zerlegung

$$F^h(z,u) = F_1^h(z,u) \cdot \ldots \cdot F_r^h(z,u)$$

über Q(R/P). Die Elemente von $G \subseteq S_n$ sind nach 3.12.5 gerade die Permuationen die F_1 in sich überführen:

$$G = \{s \in S_n \mid s_u F_1 = F_1\}$$

Sie überführen jedes der F_i in sich und damit auch jedes der F_i^h in sich.[25]

Die Elemente der Galois-Gruppe (des Zerfällungskörpers) von F^h überführen jeden irreduziblen Faktor von F_1^h in sich und damit auch F_1^h in sich. Als Elemente von S_n liegen sie also in der Untergruppe $G(f) \subseteq S_n$.

QED.

3.13.7 Zur Berechnung der Galois-Gruppe von $f(X) = X^5 - X - 1$

Bezeichne

$$G$$

die Galois-Gruppe von f über $\mathbb{Q}$. Jedes Element von G permutiert die fünf Nullstellen von f und ist durch seine Werte auf diesen Nullstellen bestimmt. Wir können also G wie bisher als Untergruppe der S_5 auffassen,

---

[25] Es ist egal, ob man erst die Nullstellen permutiert und dann h auf die Koeffizienten anwendet, oder ob man dies in umgekehrter Reihenfolge tun.

$$G \subseteq S_5$$

1. Schritt: Modulo 2 ist f zerlegbar in

$$f(X) = (X^2+X+1)(X^3+X^2+1)$$

Die Galois-Gruppe des ersten Faktors (modulo 2) ist von der Ordnung 2, und vertauscht die beiden Nullstellen dieses Faktors[26]. Nach 3.13.6 enthält also die Galois-Gruppe von f einen Zweier-Zyklus. Bei geeigneter Nummerierung der Nullstellen von f können wir annehmen

$$(12) \in G.$$

2. Schritt: Modulo 3 ist f irreduzibel:

Hätte f modulo 3 einen linearen oder quadratischen Faktor, so hätte f eine Nullstelle in einer quadratischen Erweiterung von $\mathbb{F}_3$, d.h. in $\mathbb{F}_9$. Die Elemente von $\mathbb{F}_9$ sind aber Nullstellen von X^9-X, d.h. f hätte mit X^9-X einen Faktor gemeinsam, also auch mit

$$X^{10}-X^2 = (X^5-X)(X^5+X),$$

also mit

$$X^5-X \text{ oder } X^5+X,$$

was offensichtlich nicht der Fall ist. Damit definiert f eine Erweiterung des Grades 5 von $\mathbb{F}_3$. Die Galois-Gruppe dieser Erweiterung ist $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Jedes Erzeugende Element dieser Gruppe bewirkt eine zyklische Vertauschung der Nullstellen von f. Nach 3.13.6 ergibt sich:

$$G \subseteq S_5 \text{ enthält einen Fünfer-Zyklus.}$$

Wir können O.B.d.A. annehmen[27],

$$(12345) \in G.$$

Wiederholte Konjugation von (12) mit (12345) liefert weitere Zweier-Zyklen, die in G liegen:

---

[26] Die Galois-Gruppe des zweiten Faktors ist von der Ordnung 6: Die Diskriminante von $f = X^3+X^2+1$ ist nämlich kein Quadrat:

$$\Delta(f) = \mathrm{Res}(f, f') = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 4 + 27$$

$$= 31,$$

d.h. die Galois-Gruppe von f ist die S_3

[27] Jeder Fünfer-Zyklus operiert transitiv auf den Elementen, die er permutiert.Es gibt also eine Potenz des Fünfer-Zyklus, die 1 in 2 überführt sind. Durch Umbenennen der übrigen Elemente erreichen wir, daß der Fünfer-Zyklus die Gestalt (12345) bekommt.

$$(12), (23), (34), (45), (51) \in G$$

Konjugation von (12) mit (23) liefert

$$(13) \in G.$$

Konjugation von (13) mit (34) liefert

$$(14) \in G.$$

Damit gilt

$$(12), (13), (14), (15) \in G.$$

Da (12), (13), (14), (15) die S_5 erzeugen, folgt

$$G = S_5.$$

Index

—H—

—I—

—K—

—L—

—M—

—N—

—O—

—P—

—Q—

—R—

Bezeichnungen

A_n	alternierende Gruppe, vgl. Aufgaben zu 1.3
Aut(G)	Gruppe der Automorphismen der Gruppe G, vgl. 1.1.1
C(G)	Zentrum der Gruppe G, vgl. 1.1.10
det A	Determinante der quadratischen Matrix A, vgl. 1.1.5
G(K/k)	Galois-Gruppe der Galois-Erweiterung K/k, vgl. 3.7.1
GL(n, K)	allgemeine lineare Gruppe der umkehrbaren n×n-Matrizen über dem Körper K, vgl. 1.1.3
GL(V)	allgemeine lineare Gruppe des Vektorraums V, vgl. 1.1.3
Im(h)	Bild des Homomorphismus h, 1.1.11
Ker(h)	Kern des Homomorphismus h, 1.1.11
O(V)	orthogonale Gruppe des Vektorraums V mit Bilinearform, vgl. 1.1.6
S(M)	Gruppe der Permutationen der Menge M, vgl. 1.1.2
S_n	Gruppe der Permutationen der Menge {1,2,...,n}, vgl. 1.1.2
SL(n,K)	spezielle lineare Gruppe über dem Körper K, vgl. 1.1.4
SL(V)	spezielle lineare Gruppe des Vektorraums V, vgl. 1.1.4
Sp(V)	symplektische Gruppe des symplektischen Vektorraums V, vgl. 1.1.7
U(n)	unitäre Gruppe, vgl. 1.1.8
U(V)	unitäre Gruppe des hermitischen Vektorraums V, vgl. 1.1.8
G'×G"	direktes Produkt der Gruppen G' und G", vgl. 1.1.12
$[K:k]_s$	Separabilitätsgrad der endlichen Körpererweiterung K/k, vgl. 3.5.1
#M	Anzahl der Elemente der Menge M, vgl. 1.1.2
R*	Gruppe der Einheiten des Rings R mit Eins, vgl. 1.1.9
<M>	die von der Menge M erzeugte Untergruppe, vgl. 1.2.4

<g>	die vom Element g erzeugte zyklische Gruppe, vgl. 1.2.5
G/U	die Menge der Linksnebenklassen von G modulo U, vgl. 1.3.1 und 1.3.4
U\G	die Menge der Rechtsnebenklassen von G modulo U, vgl. 1.3.1 und 1.3.4
G_m	Stabilisator des Elements m bei der Operation der Gruppe G, vgl. 1.6.2

Inhalt