Abelsche Varietäten

frei nach

Abelian varieties
David Mumford
in collaboration with C.P. Ramanujam

Lectures In Tata Institute
of Fundamental Research

Bombay 1968

Bezeichnungen

$c_1(L)$	erste Chern-Klasse des holomorphen Geradenbündels L, vgl. 1.2.7
$\mathbb{C}_1^*$	die komplexen Zahlen vom Betrag 1, vgl. 1.2.16
$H^* := H^0(V, \mathcal{O}_V^*)$	multiplikative Gruppe der holomorphen Funktionen auf dem komplexen Vektorraum V, die keine Nullstelle besitzen, vgl. 1.2.3.
$K(L)$	der Kern des Gruppen-Homomorphismus $\varphi_L : X \to \mathrm{Pic}\, X$ zum Geradenbündel L auf einer abelschen Varietät X, vgl. 2.3.10
$L(H,\alpha)$	das Geradenbündel auf dem komplexen Torus $X = V/\Gamma$ zur hermitischen Form $H: V\times V \to \mathbb{C}$ und zum Multiplikator $\alpha:\Gamma \to \mathbb{C}_1^*$, vgl. 1.2.17.
$m_{X,x}$	maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$, vgl. 2.4.1
$\mathcal{O}_{X,x}$	lokaler Ring von X im Punkt x.
Pic X	die Gruppe der Isomorphie-Klassen holomorpher Geraden-Bündel auf X, vgl. 1.2.18
$\mathrm{Pic}^0\, X$	die Gruppe der Isomorphie-Klassen holomorpher Geraden-Bündel auf X mit trivialer erster Chern-Klasse, vgl. 1.2.18
φ_L	die zum Geradenbündel L auf der abelschen Varietät X gehörige Abbildung $X \to \mathrm{Pic}\, X$, vgl. 2.3.9
λ_x	Linksmultiplikation mit x für die Gruppe X, $X \to X, y \mapsto xy$. Ab 2.1.5 die Verschiebungsabbildung mit x, $X \to X, y \mapsto y + x$, für die additive Gruppe X.
$\hat{G}$	Gruppe der Charaktere von G, vgl. 2.4.8

Literatur

Mumford, D.: Abelian Varieties, Tata Institut of Fundamental Research, Bombay 1968
Lang, S.: Abelian Varieties, Interscience New York 1959
Hartshorne, R.: Algebraic Geometry, Springer Berlin 1977
Matzumura, H.: Commutative Algebra, Benjamin, New York 1970
Warner, F.W.: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer Berlin 1983

Vorbemerkungen

Abelsche Varietäten sind projektive Varietäten mit Gruppenstruktur. Beispiele sind die Tori bzw. projektive Varietäten mit der affinen Gleichung

$$y^2 = x(x - 1)(x - \lambda) \text{ mit } \lambda \neq 0, 1.$$

Abelsche Varietäten treten im Zusammenhang mit diophantischen Gleichungen mit unendlich vielen Lösungen auf.

1. Analytische Theorie

1.1 Die kompakten komplexen Lie-Gruppen: komplexe Tori

1.1.1 Definition: Komplexe Lie-Gruppe

Eine komplexe Lie-Gruppe ist eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit X, deren Punktmenge die Struktur einer Gruppe besitzt, wobei die Abbildungen

$$X \times X \to X, (x,y) \mapsto xy,$$
$$X \to X, x \mapsto x^{-1},$$

holomorph (=komplex analytisch) sind.

1.1.2 Die Expontentialabbildung

Sei X eine komplexe Lie-Gruppe und

$$V = T_e X$$

der Tangentialraum an X im neutralen Element. Dann gibt es für jeden Tangentialvektor

$$v \in V$$

genau einen holomorphen Gruppen-Homomorphismus

$$\varphi_v : \mathbb{C} \to X$$

mit der Eigenschaft[1]

$$(d\varphi_v)(\frac{\partial}{\partial t}) = v,$$

d.h. der tangentiale Einheitsvektor $\frac{\partial}{\partial t}$ von $\mathbb{C}$ im Piunkt 0 wird in den vorgegebenen Vektor v abgebildet. Wir nennen φ_v Einparameter-Untergruppe von X mit dem Geschwindigkeitsvektor v.[2] Die Abbildung

$$\mathbb{C} \times V \to X, (t,v) \mapsto \varphi_v(t),$$

ist dabei holomorph[3]. Die Exponentialabbildung

$$\exp: V \to X$$

---

[1] d.h. in lokalen Koordinaten ist $\frac{\partial}{\partial t}\varphi_v(t) |_{t=0} = v$.

[2] Für jedes $x \in X$ definiert die Multiplikation mit x eine holomorphe Abbildung

$$L_x : X \to X, y \mapsto xy,$$

die das neutrale Element in x abbildet. Durch

$$X \to TX, x \mapsto (dL_x)(v)$$

ist ein holomorphes Vektorfeld definiert (das invariant ist gegenüber Linksmultiplikation). Die Abbildung φ_v ist gerade die Integralkurve dieses Vektorfelds durch das neutrale Element e. Die Existenz und Eindeutigkeit von φ_v folgt daher im wesentlichen aus dem Existenz und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen.

[3] Die Lösungen holomorpher Differentialgleichungen hängen holomorph von holomorphen Parametern ab.

der Lie-Gruppe X ist definiert durch die Formel

$$\exp(v) = \varphi_v(1).$$

Bemerkungen

(i) Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen sorgt dafür, daß die Exponentialfunktion lokal existiert. Die Gruppenstruktur von X hat dann die globale Existenz zur Folge.

(ii) Auf Grund der Eindeutigkeitsaussage für φ_v gilt

$$\varphi_{sv}(t) = \varphi_v(st),$$

denn beide Seiten erfüllen die definierende Bedingung für φ_v mit sv anstelle von v.

Insbesondere ist

$$\varphi_v(t) = \exp(tv).$$

(iii) Für jeden analytischen Homomorphismus

$$h\colon X' \to X''$$

von komplexen Lie-Gruppen ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} T_eX' & \xrightarrow{d_eh} & T_eX'' \\ \exp\downarrow & & \downarrow\exp \\ X' & \xrightarrow{h} & X'' \end{array}$$

Das folgt ebenfalls aus der Eindeutigkeitsaussage für die Funktion φ_v.[4]

(iv) Nach Definition gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp(tv)|_{t=0} = d\varphi_v\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = v$$

für jedes $v \in V = T_eX$. Läßt man v eine Basis des Vektorraums V durchlaufen, so sieht man, die Funktional-Matrix der Abbildung $V \to X$, $v \mapsto \exp(v)$, im Ursprung ist die Einheitsmatrix. Mit anderen Worten,

$$d_0\exp : V = T_0V \to V$$

ist die identische Abbildung (bei einer geeigneten Identifikation des Tangentialraums von V im Ursprung mit V). Daraus ergibt sich insbesondere, daß exp ein lokaler Diffeomorphismus ist.[5]

(v) Beweisen wir jetzt eine einschneidende Konsequenz unserer Kompaktheitsforderung.

---

[4] Aus

$$(d\varphi_v)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = v$$

folgt

$$d(h\circ\varphi_v)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = (dh\circ(d\varphi_v))\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = dh(v),$$

also $h\circ\varphi_v = \varphi_{dh(v)}$, also $h\circ\exp = \exp\circ dh$.

[5] In $0 \in T_eX$ ist das klar. Für $x \in \mathrm{Im}(\exp)$ kann man X so mit der Struktur einer Lie-Gruppe X' versehen, daß

$$L_x : X \to X', y \mapsto xy,$$

ein analytischer Homomorphismus ist. Das kommutative Diagramm von (iii) zeigt dann, daß exp in den Punkten von $\exp^{-1}(x)$ ebenfalls ein lokaler Diffeomorphismus ist.

1.1.3 Der Fall der kompakten komplexen Lie-Gruppen

Sei X eine kompakte komplexe Lie-Gruppe. Dann ist X als Gruppe kommutativ und die Exponentialabbildung

$$\exp: T_eX \to X$$

ist ein surjektiver Gruppen-Homomorphismus.

Beweis. Für jedes $x \in X$ betrachten wir die Abbildung

$$C_x: X \to X, y \mapsto xyx^{-1}.$$

Dies ist ein analytischer Gruppen-Homomorphismus, d.h. es gilt nach 1.1.2(iii)

(1) $$C_x \circ \exp = \exp \circ\, dC_x .$$

Das Differential dC_x ist ein linearer Automophismus des endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Raumes

$$V = T_eX,$$

und die Abbildung

$$X \to \mathrm{Aut}(V), x \mapsto dC_x$$

ist holomorph. Eine holomorphe Funktion auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit ist aber konstant (nach dem Satz von Liouville)[6]. Also gilt

$$dC_x = dC_e = \mathrm{Id}$$

für jedes $x \in X$, also nach (1)

$$C_x \circ \exp = \exp.$$

Mit anderen Worten, jedes Element im Bild von exp kommutiert mit jedem $x \in X$. Insbesondere kommutieren je zwei Elemente aus dem Bild von exp. Für $v', v'' \in V$ ist die Abbildung

$$\mathbb{C} \to X, t \mapsto \exp(tv')\exp(tv''),$$

damit ein analytischer Gruppen-Homomorphismus mit dem Differential[7]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\exp(tv')\exp(tv''))|_{t=0} \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial t}(\exp(tv')\cdot\exp(0\cdot v''))|_{t=0} + \frac{\partial}{\partial t}(\exp(0\cdot v')\cdot \exp(tv''))|_{t=0} \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial t}(\exp(tv'))|_{t=0} + \frac{\partial}{\partial t}(\exp(tv''))|_{t=0} \\
&\quad = v' + v''
\end{aligned}$$

im Punkt $0 \in V$. Also gilt

$$\exp(tv')\exp(tv'') = \varphi_{v'+v''}(t) = \exp(t(v'+v'')).$$

Für t = 1 erhalten wir, exp ist ein Gruppen-Homomorphismus. Insbesondere ist

$$\mathrm{Im}(\exp) \subseteq X \text{ eine Untergruppe.}$$

Nach 1.1.2(iv) ist nun

$$\exp: V \to X$$

ein lokaler Diffeomorphismus. Insbesondere ist das Bild von exp offen in X, d.h. Im(exp) ist eine offene Untergruppe von X. Das Komplement ist als Vereinigung von Nebenklassen modulo Im(exp) ebenfalls offen, d.h.

---

[6] Eine nicht-konstante holomorphe Funktion einer Variablen hat in geeignet gewählten Koordinaten die Gestalt $z \mapsto z^n$. Insbesondere ist das Bild einer offenen Menge bei einer solchen Funktion wieder offen. Wenn sie auf einer kompakten zusammenhängenden Menge definiert ist, muß das Bild aber kompakt und zusammenhängend sein. In der komplexen Ebene gibt es aber keine offenen Teilmengen, die außerdem noch kompakt und zusammenhängend sind.

[7] Man rechne in lokalen Koordinaten, betrachte die Multiplikationsabbildung als vektor-wertige Funktion in zwei Gruppen von Variablen und wende die Ketten-Regel an.

$$\mathrm{Im}(\exp) \subseteq X$$
ist offene und abgeschlossene Untergruppe von X. Da X zusammenhängend ist, folgt
$$\mathrm{Im}(\exp) = X,$$
d.h. exp ist surjektiv. Weil die additive Gruppe von V kommutativ ist, ist auch
$$\exp(V) = X$$
kommutativ.
QED.

Vereinbarung
Das Gruppengesetz auf X wird ab jetzt additiv geschrieben.

1.1.4 Begriff des komplexen Torus

Seien V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension d ($<\infty$). Eine Gitter maximalen Rangs in V ist eine Untergruppe
$$\Gamma \subseteq V,$$
die von einer reellen Vektorraumbasis von V erzeugt wird. Die Faktorgruppe
$$V/\Gamma$$
hat dann die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit, bezüglich welcher die natürliche Abbildung
$$V \to V/\Gamma$$
lokal biholomorph ist. Gruppen-Operationen sind bezüglich diesser Struktur holomorphe Abbildungen, d.h. V/Γ ist eine Lie-Gruppe. Eine Lie-Gruppe dieser Gestalt heißt komplexer Torus der Dimension d.
Bemerkung
Wir können unter Vernachlässigung der komplexen Stuktur durch die Wahl einer reellen Vektorraumbasis das Gitter Γ mit $\mathbb{Z}^{2d}$ und V mit $\mathbb{R}^{2d}$ identifizieren und erhalten
$$V/\Gamma = \mathbb{R}^{2d}/\mathbb{Z}^{2d} = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2d} = S^1.$$
Mit anderen Worten, eine kompakte komplexe Lie-Gruppe der Dimension d ist topologisch das Produkt von 2d Exemplaren des Einheitskreises, also ein topologischer Torus (der Dimension 2d).

1.1.5 Die Struktur der kompakten komplexen Lie-Gruppen

Sei X eine kompakte komplexe Lie-Gruppe. Dann ist der Kern der Exponential-Abbildung
$$\exp: V := T_e X \to X$$
ein Gitter
$$\Gamma \subseteq V$$
maximalen Rangs in V (d.h. es gibt eine reelle Vektorraumbasis von V, welche Γ als Gruppe erzeugt) und die Exponentialabbildung induziert einen Isomorphismus komplexer Lie-Gruppen
$$V/\Gamma \xrightarrow{\cong} X.$$
Mit anderen Worten, jede kompakte komplexe Lie-Gruppe ist ein komplexer Torus.
Beweis. Sei
$$\Gamma = \mathrm{Ker}(\exp: V \to X)$$
der Kern der Exponentialabbildung. Da exp ein lokaler Homöomorphismus ist, gibt es eine offene Menge,
$$0 \in U \subseteq V$$
mit $\exp|_U: U \to X$ injektiv, d.h.

(1) $$\Gamma \cap U = \{0\}.$$

Die natürliche Abbildung
$$\pi: V \to V/\Gamma$$

ist auf auf jeder der Mengen x + U injektiv. Die Einschränkungen von π auf die Mengen der Gestalt x + U definieren ein System von holomorphen Karten auf V/Γ und damit die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit auf V/Γ. Insbesondere ist π lokal biholomorph.
Nach Konstruktion ist die induzierte Abbildung

$$V/\Gamma \to X$$

bijektiv. Da π und exp lokal biholomorph sind, gilt dasselbe auch für diese Abbildung. Insgesamt ist dies also ein biholomorpher Isomorphismus.
Insbesondere ist V/Γ kompakt. Deshalb erzeugen die Vektoren von Γ den Raum V über $\mathbb{R}$.[8] Also enthält Γ ein maximales Gitter Γ'. Wäre der Faktor Γ/Γ' unendlich, so würden dessen Elemente im kompakten Raum V/Γ' einen Häufungspunkt besitzen. Da Γ/Γ' eine Gruppe ist, ist dann auch $0\in \Gamma/\Gamma'$ ein Häufungspunkt. Dann ist aber auch $0\in V$ ein Häufungspunkt von Γ im Widerspruch zu (1). Damit hat Γ' endlichen Index in Γ, Γ ist endlich erzeugt und es gilt

$$\Gamma \subseteq \Gamma'\cdot\mathbb{Q}.$$

Da Γ endlich erzeugt ist, gilt damit sogar

$$\Gamma \subseteq \frac{1}{n}\cdot\Gamma'$$

für geeignet gewähltes hinreichend großes $n\in\mathbb{Z} - \{0\}$. Als Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist Γ aber selbst eine freie abelsche Gruppe, also ein Gitter maximalen Rangs.
QED.

1.1.6 Die n-Teilungspunkte

Sei X eine kompakte komplexe Lie-Gruppe. Dann ist X als abstrakte Gruppe teilbar (d.h. $n\cdot X = X$ für jedes $n\in\mathbb{Z} - \{0\}$). Bezeichne

$$X_n := \{ x\in X \mid n\cdot x = 0 \}$$

die Gruppe der n-Teilungspunkte. Dann gilt

$$X_n \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2d} \text{ mit } d = \dim X.$$

Beweis. Wie wir oben gesehen haben, ist X als reelle Lie-Gruppe isomorph zu

$$X \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2d}.$$

QED.

1.1.7 Die ganzzahlige Kohomologie

Sei $X = V/\Gamma$ eine kompakte komplexe Lie-Gruppe. Dann gibt es natürliche Isomorphismen

$$H^r(X, \mathbb{Z}) \cong \{\text{alternierende r-Formen } \Gamma\times...\times\Gamma \to \mathbb{Z}\}.$$

Beweis. <u>1. Der Fall r = 1</u>. Die natürliche Abbildung

$$\pi: V \to X$$

ist gerade die universelle Überlagerung (siehe zum Beispiel: Forster: Riemannsche Flächen) von X.[9] Also ist

$$\Gamma = \pi^{-1}(e)$$

natürlich Isomorph zur Homotopie-Gruppe von X in e,

$$\pi_1(X, e) = \Gamma.$$

---

[8] Wäre $\Gamma\cdot\mathbb{R}$ ein echter Unterraum von V, so hätte $X = V/\Gamma$ den nicht-kompakten Faktor $V/\Gamma\cdot\mathbb{R}$, wäre also nicht kompakt.

[9] V ist einfach zusammenhängende und jeder Punkt $x\in X$ besitzt eine Umgebung U mit der Eigenschaft, daß $\pi^{-1}(U)$ in eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen zerfällt auf denen π einen Homöomorphismus mit U induziert.

Nach dem Satz von Hurewicz ist dann aber (weil die Homotopie-Gruppe abelsch ist)

$$H_1(X) = \pi_1(X, e) = \Gamma.$$

Da die 0-te Homologie von X mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist, gibt es nach dem Satz über universelle Koeffizienten einen Isomorphismus[10]

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}).$$

Damit ist die Behauptung im Fall r = 1 bewiesen.

2. Der Fall r > 1. Es reicht zu zeigen, für jedes r induziert das Cup-Produkt einen Isomorphismus

(1) $$\wedge^r H^1(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup} H^r(X, \mathbb{Z}).$$

Dazu reicht es anzumerken, ist für zwei Räume X' und X" die Abbildung (1) ein Isomorphismus, wobei die Kohomologie der Räume endlich erzeugt und frei sei, so ist (1) auch ein Isomorphismus für den Raum X'×X". Letzteres folgt aus der Künneth-Formel

$$\begin{array}{ccc}
\wedge^r H^1(X' \times X'', \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cup} & H^r(X' \times X'', \mathbb{Z}) \\
\| \kappa & & \kappa \| \\
\wedge^r (H^1(X', \mathbb{Z}) \oplus H^1(X'', \mathbb{Z})) & & \oplus_{p+q=r} H^p(X', \mathbb{Z}) \otimes H^q(X'', \mathbb{Z}) \\
\| \lambda & \nearrow \oplus_{p+q=r}(\cup \otimes \cup) & \\
\oplus_{p+q=r}(\wedge^p H^1(X', \mathbb{Z}) \otimes \wedge^q H^1(X'', \mathbb{Z})) & &
\end{array}$$

Dabei steht κ für den Künneth-Isomorphismus und λ für den natürlichen Isomorphismus (der für das äußere Produkt einer beliebigen direketn Summen besteht). Die Behauptung folgt jetzt aus der Tatsache, daß $X = V/\Gamma$ homöomorph zum Produkt von Exemplaren von S^1 ist.

QED.

1.1.8 Die Hodge-Gruppen

Sei $X = V/\Gamma$ eine kompakte komplexe Lie-Gruppe. Dann gibt es natürliche Isomorphismen

$$H^q(X, \mathcal{O}_X) \cong \wedge^q \overline{T}$$

und

$$H^q(X, \Omega^p) \cong \wedge^p T \otimes \wedge^q \overline{T}.$$

Dabei bezeichne $\mathcal{O}_X$ die Garbe der Holomorphen Funktionen auf X, Ω^p die Garbe der holomorphen p-Formen,

$$T := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$$

den komplexen Kotangentialraum und

$$\overline{T} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-antilinear}}(V, \mathbb{C})$$

den Raum der Antilinearformen auf V.

Zum Beweis dieser Aussage benötigen wir einige Vorbereitungen.

Wiederholung:

Garben und Garben-Kohomologie

Die Garben-Bedingungen

Die Garben-Bedingung als exakte Sequenz

[10] In jeder Dimension q ist dieser Homomorphismus surjektiv und hat den Kern $\mathrm{Ext}(H_{q-1}(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$.

Garben und Kommutieren mit direkten Limiten
Halme
Kohomologie als höhere abgeleitete Funktoren (Hartshorne III)
Azyklische Garben, feine Garben
Vektorraumbündel und Garben
$H^q(X, \Omega^p)$ und der Laplace-Operator

1.1.9 Eine Beschreibung der holomorphen p-Formen

Seien $X = V/\Gamma$ eine kompakte komplexe Lie-Gruppe. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^p T \to \Omega^p_X .$$

Dabei sei $T = \mathrm{Hom}_X(V, X)$ der Raum der Kovektoren im Punkt $0 \in X$, $\mathcal{O}_X$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf X und Ω^p_X die Garbe der holomorphen p-Formen auf X.

Beweis. Wir konstruieren zunächst eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\wedge^p T \to \Omega^p_X.$$

Sei $\alpha \in \wedge^p T$. Dann ist ω eine alternierende p-Linearform

$$\alpha: V \times \ldots \times V \to \mathbb{C}.$$

Für jedes $x \in X$ betrachten wir die Translation mit x,

$$\tau_x : X \to X, y \mapsto y + x.$$

Dies ist eine biholomorphe Abbildung mit der Inversen

$$\tau_{-x}: X \to X.$$

Das Differential letzterer Abbildung im Punkt x ist eine Abbildung

$$d_x \tau_{-x}: T_x X \to T_e X = V.$$

Für jedes n-Tupel von Vektoren

$$X_1, \ldots, X_p \in T_x X$$

setzen wir

$$\omega_\alpha(X_1, \ldots, X_p) = \alpha(d_x \tau_{-x}(X_1), \ldots, d_x \tau_{-x}(X_p)).$$

Mit anderen Worten, wir verschieben die Vektoren X_i in den Urprung und wenden dann die Multilinearform α an.

Dann ist ω_α für jedes x eine alternierende p-Linearform auf $T_x X$, d.h. ein globaler Schnitt von Ω^p_X. Genauer: ω_α ist eine p-Form mit “konstanten” Koeffizienten und als solche insbesondere holomorph. Konstant bedeutet hier, die Form ist invarianten gegenüber den Verschiebungen τ_x , $x \in X$. Die Abbildung

$$\wedge^p T \to \Omega^p_X , \alpha \mapsto \omega_\alpha ,$$

ist wohldefiniert und $\mathbb{C}$-linear. Da das Produkt aus einer holmorphen p-Form und einer holomorphen Funktion eine holomorphe p-Form ist, induziert diese Abbildung eine Garben-Abbildung

$$\varphi: \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^p T \to \Omega^p_X , (f, \alpha) \mapsto f \cdot \omega_\alpha .$$

Als Bündelabbildung ist dies nach Konstruktion in den Fasern über $0 \in X$ gerade die identische Abbildung, also ein Isomorphismus. Für Vektoren

$$X_1, \ldots, X_p \in T_x X$$

gilt außerdem

$$\begin{aligned}\varphi((f,\alpha)(X_1,\dots,X_p) &= f(x)\cdot \omega_\alpha(X_1,\dots,X_p)\\ &= f(x)\cdot \alpha(d\tau_{-x}(X_1),\dots, d\tau_{-x}(X_p))\\ &= \varphi(f\circ\tau_x,\alpha)(d\tau_{-x}(X_1),\dots, d\tau_{-x}(X_p))\end{aligned}$$

d.h. die Abbildung der Fasern im Punkt x unterscheidet sich von der im Punkt 0 nur um die Isomorphismen τ_x und $d\tau_{-x}\times\dots\times d\tau_{-x}$. Also induziert φ auf allen Fasern einen Isomorphismus, d.h. φ selbst ist ein Isomorphismus.

QED.

Bemerkung

Auf Grund der obigen Aussage gilt

$$H^q(X,\Omega^p) = H^q(X, \mathcal{O}_X\otimes\wedge^p T) \cong H^q(X,\mathcal{O}_X)\otimes\wedge^p T.$$

Die Aussage von 1.1.8 ist damit auf die Berechnung von $H^q(X,\mathcal{O}_X)$ reduziert.

1.1.10 Eine Beschreibung der glatten Formen vom Typ (p,q)

Seien $X = V/\Gamma$ eine kompakte komplexe Lie-Gruppe. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\varphi_{pq}: \mathcal{E}_X\otimes_{\mathbb{C}}(\wedge^p T\otimes\wedge^q \overline{T}) \to \mathcal{E}_X^{p,q}.$$

Dabei seien[11]

$T = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, X)$ der Raum der Kovektoren vom Typ (1,0)[12] im Punkt $0\in X$,

$\overline{T} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-antilinear}}(V, X)$ der Raum der Kovektoren vom Typ (0,1)[13].

$\mathcal{E}_X^{p,q}$ die Garbe der glatte Differentialformen des Typs (p,q) auf X und $\mathcal{E}_X = \mathcal{E}_X^{0,0}$ die Garbe der glatten Funktionen auf X.

Beweis. Erfolgt im selben Stil wie der Beweis von 1.1.9. Dabei bildet φ_{pq} das Tensorprodukt $\sum_i f_i\otimes\alpha_i$ ab in

$$\varphi_{pq}(\sum_i f_i\otimes\alpha_i) = \sum_i f_i\otimes\omega_{\alpha_i}.$$

Wie oben bezeichne ω_α die globale invariante Differentialform auf X, welche im Punkt $0\in X$ gleich α.

QED.

Bemerkung

Die invarianten Differentialformen ω_α sind geschlossen,

$$d\,\omega_\alpha = 0 \text{ für jedes } \alpha\in\wedge^p T\otimes\wedge^q\overline{T}.$$

---

[11] T und $\overline{T}$ lassen sich als Unterräume des komplexifizierten reellen Kotangentialraums

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$$

auffassen. Es sind dann gerade die Eigenräume der komplexen Konjugation

$$f(?) \text{ a } i\cdot f(i^{-1}\,?)$$

zu den Eigenwerten +1 bzw. -1.

[12] dies ist der holomorphe Kotangentialraum.

[13] dies ist der antiholomorphe Kotangentialraum.

Beweis. Wegen

$$\omega_{\alpha\wedge\beta} = \omega_\alpha \wedge \omega_\beta$$

reicht es, die Behauptung für den Fall von Kovektoren des Typs (1,0) und (0,1) zu beweisen. Nun ist

$$\exp: V \to X$$

ein lokaler Diffeomorphismus. Deshalb reicht es zu zeigen

$$d(\exp^*(\omega_\alpha)) = 0.$$

Wenn wir

$$\alpha \in T \oplus \overline{T} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$$

als Funktion auf V betrachten, so können wir die äußere Ableitung von α bilden. Bezüglich einer reellen Basis von V haben wir

$$V = \mathbb{R}^{2d}$$

$$\alpha(x_1,\dots,x_{2d}) = \sum_i a_i x_i \ ,\ a_i \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt

$$\exp^*(\omega_\alpha) = \sum_i a_i\, dx_i = d\alpha,$$

also

$$d \exp^*(\omega_\alpha) = dd\alpha = 0.$$

QED.

1.1.11 Berechnung der $H^q(X, \mathcal{O}_X)$ mit Hilfe der Dolbeault-Auflösung

Sei $X = V/\Gamma$ eine kompakte komplexe Lie-Gruppe. Dann gilt

$$H^q(X, \mathcal{O}_X) = H^q(C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^*).$$

Dabei seien

$C^\infty(X)$ der Vektorraum der glatten Funktionen auf X

$\wedge^* = \oplus_{q=0}^{\infty} \wedge^q \overline{T}$ die Graßmann-Algebra über $\overline{T}$.

Zur Beschreibung der rechten Seite der obigen Identität müssen wir noch ein Differential auf Tensorprodukt $C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^*$ definieren. Dieses sei durch die folgende Formel gegeben.

$$\overline{\partial}\,(f \otimes \alpha) := (\overline{\partial} f) \otimes \alpha.$$

Dabei sei $\overline{\partial} f$ der Summand des Typs (0,1) der äußeren Ableitung df der Funktion f. Wegen $d^2 = 0$ gilt dann auch $\overline{\partial}^2 = 0$.Nach Definition ist dann

$$H^q(C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^*) = \mathrm{Ker}\ \overline{\partial}^q \,/\, \mathrm{Im}\ \overline{\partial}^{q-1}$$

mit $\overline{\partial}^q = \overline{\partial} |\, C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^q$.

Beweis. Wir betrachten den Dolbeault-Komplex

(1) $$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}_X^{0,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}_X^{0,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \dots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}_X^{0,q} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}_X^{0,q+1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \dots$$

Dabei ist $\overline{\partial}\omega$ für jede Differentialform $\omega \in \mathcal{E}_X^{0,q}$ der Summand von

$$d\omega \in \mathcal{E}_X^{1,q} \oplus \mathcal{E}_X^{0,q+1}$$

welcher in $\mathcal{E}_X^{0,q+1}$ liegt. Wegen $d^2 = 0$ gilt auch $\bar\partial^2 = 0$, d.h. (1) ist tatsächlich ein Komplex. Eine Aussage, die analog zum Lemma von Poincaré ist, besagt gerade, dieser Komplex ist exakt. Da die Garben $\mathcal{E}_X^{1,q}$ fein sind, kann man diesen Komplex zur Berechnung der Kohomologie von $\mathcal{O}_X$ benutzen: es gilt

$$H^q(X, \mathcal{O}_X) = H^q((1)) = \mathrm{Ker}(\mathcal{E}_X^{0,q}(X) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_X^{0,q+1}(X))/\bar\partial\mathcal{E}_X^{0,q-1}(X).$$

Mit anderen Worten, wir gehen in (1) zum Komplex der globalen Schnitte über und nehmen die q-Kohomologie-Gruppe des entstehenden Komplexes. Der weitere Beweis besteht darin,, zu zeigen daß der Komplex der globalen Schnitte von (1) isomorph ist zum Komplex der auf der rechten Seite der zu beweisenen Identität auftritt. Dazu betrachten wir die Isomorphismen

$$\varphi_{pq}: \mathcal{E}_X \otimes_{\mathbb{C}} (\wedge^p T \otimes \wedge^q \bar T) \to \mathcal{E}_X^{p,q}.$$

von 1.1.10 für den Spezialfall $p = 0$ und gehen zu den globalen Schnitt über. Wir erhalten Isomorphismen

(2) $$\varphi_{0q}: C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^q \bar T = \mathcal{E}_X(X) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^q \bar T \to \mathcal{E}_X^{0,q}(X).$$

Die Definition der Differentiale von $C^\infty(X) \otimes \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^*$ ist nun gerade so gewählt, daß diese bei den Isomorphismen (2) gerade den Differentialen des Dolbeault-Komplexes entsprechen. Wir können also die beiden Komplexe identifizieren und die Kohomologie in der angegebenen Weise berechnen.

QED.

Bemerkung

Die natürliche Einbettung

$$\wedge^* \to C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^*$$

Respektiert die Graduierung der beiden Algebren. Das Differential der rechten Seite hat als Einschränkung links die Nullabbilung. Wir können also die Algbra links ebenfalls als Komplex auffassen, wobei dessen Differentiale alle gleich Null sind. Die natürlichen Einbettungen

$$\wedge^q \to C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^q$$

definieren dann einen Komplex-Morphismus und dieser induziert lineare Abbildungen auf der Kohomologie der Komplexe

$$\wedge^q = H^q(\wedge^*) \to H^q(C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^q) = H^q(X, \mathcal{O}_X).$$

Das Gleichheitszeichen rechts kommt von der Tatsache, daß alle Differentiale von $\wedge^*$ identisch Null sind. Zum Abschluß des Beweises von Theorem 1.1.8 reicht es also die folgende Aussage zu beweisen.

1.1.12 Abschluß des Beweises von Theorem 1.1.8

Sei $X = V/\Gamma$ eine kompakte komplexe Lie-Gruppe. Dann induziert die natürliche Einbettung

$$\wedge^* \to C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^*$$

Isomorphismen auf den Kohomologien.

Beweis. Sei $d\mu$ das Maß auf X, welches vom euklischen Maß des komplexen Vektorraumes V induziert wird und welches durch die Bedingung

$$\mu(X) = 1$$

normiert ist.[14] Wir betrachten die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\mu: C^\infty(X) \to \mathbb{C}, f \mapsto \mu(f) = \int_X f d\mu .$$

Für jeden $\mathbb{C}$-Vektorraum induziert diese eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\mu_W = \mu \otimes id_W : C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} W \to W, f\otimes w \mapsto (\int_X f d\mu)\cdot w$$

(koordinatenweise Integration). Speziell für $W = \wedge^*$ erhalten wir eine $\wedge^*$-lineare Abbildung

$$\mu_{\wedge^*}: C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^* \to \wedge^*.$$

Nach Konstruktion gilt[15]

$$\mu_{\wedge^*} \circ i = id_{\wedge^*} .$$

<u>Zwischenbemerkung</u>
Wenn wir auch

$$i\circ \mu_{\wedge^*} = id_{C^\infty(X)\otimes\wedge^*}$$

zeigen könnten, so wären wir fertig. Denn dann würden i und $\mu_{\wedge^*}$ auf den Kohomologien zueinander inverse Abbildungen induzieren, d.h. die Kohomologien wären isomorph. Wir können leider nur eine etwas schwächere Aussage beweisen, die aber für unser Zwecke ausreicht. Genauer, wir zeigen die Existenz $\mathbb{C}$-linearer Abbildungen

$$k: C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^q \to C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^{q-1}$$

mit

(*) $$\bar\partial \circ k + k\circ \bar\partial = id_{C^\infty(X)\otimes\wedge^*} - i\circ \mu_{\wedge^*} .$$

Mit anderen Worten, die Komplex-Abbildungen i und $\mu_{\wedge^*}$ sind homotopie-invers. Daraus ergibt sich sofort, daß die durch i und $\mu_{\wedge^*}$ induzierten Abbildungen auf den Homologie-Gruppen zueinander inverse Abbildungen induzieren.[16] Zur Konstruktion der Abbildungen k und zum Beweis der Identität (*) benötigen wir einige Vorbereitungen.

---

[14] Bis auf ein konstantes Vielfaches gibt es auf der lokal kompakten Gruppe V nur ein Haarsches Maß (welches invariant gegenüber Verschiebungen ist). Zur Bestimmung des Maßes einer Teilmenge von X zerlege man diese in so kleine Teil, daß jedes von ihnen diffeomorphes Bild einer Teilmenge von V ist. Diese Urbilder messe man in V und bilde die Summe von deren Maßen.

[15] Für $\alpha\in\wedge^*$ ist

$$\mu(i(\alpha)) = \mu(1\otimes\alpha) = \mu(1)\cdot\alpha = \int_X d\mu\cdot\alpha = 1\cdot\alpha = \alpha.$$

[16] Auf Ker $\bar\partial$ bekommt (*) die Gestalt

$$\bar\partial \circ k = id_{C^\infty(X)\otimes\wedge^*} - i\circ \mu_{\wedge^*} .$$

d.h. es gilt

$$id_{C^\infty(X)\otimes\wedge^*} \equiv i \pmod{\mathrm{Im}(\bar\partial)}.$$

1.1.12.1 Lemma

Für jedes $\omega\in C^\infty(X)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^*$ gilt $\mu_{\wedge^*}(\bar\partial\omega) = 0$.

Beweis (des Lemmas). Da die Abbildung

$$\mu_{\wedge^*}: C^\infty(X)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^* \to \wedge^*$$

$\wedge^*$-linear ist, können wir annehmen,

$$\omega = f = f\otimes 1 \in C^\infty(X)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^0 = C^\infty(X)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}.$$

Nach Definition von $\bar\partial$ gilt

$$\bar\partial f \in C^\infty(X)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^1 = C^\infty(X)\otimes_{\mathbb{C}}\bar{T}.$$

Wir wählen eine Basis

$$\omega_1,\dots,\omega_d\in\bar{T}$$

von $\bar{T} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{antillinear}}(V, \mathbb{C})$ über $\mathbb{C}$ und schreiben $\bar\partial f$ in der Gestalt

$$\bar\partial f = \sum_{i=1}^{d} D_i(f)\otimes\omega_i$$

mit eindeutig bestimmten glatten Funktionen $D_i(f)\in C^\infty(X)$. Auf Grund der Produktregel für $\bar\partial$,

$$\bar\partial(fg) = f\cdot\bar\partial(f) + \bar\partial(f)\cdot g$$

und der Eindeutigkeit der Koeffizienten, gilt auch die Produktregel für die $D_i(f)$, d.h.

$$D_i(fg) = f\cdot D_i(g) + D_i(f)\cdot g.$$

Das bedeutet, die D_i sind glatte Vektorfelder auf X. Da $\bar\partial$ und die ω_i invariant sind gegenüber Verschiebungen

$$T_a: X \to X,\ y \mapsto y + a,\ a\in X,$$

gilt dasselbe auch für die Vektorfelder D_i, d.h. für jedes $a\in X$ ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{D_i} & TX \\ T_a\downarrow & & \downarrow dT_a \\ X & \xrightarrow{D_i} & TX \end{array}$$

(das um a verschobene Vektorfeld D ist gerade $(dT_a)^{-1}\circ D\circ T_a$).[17] Zum Beweis der Aussage reicht es somit, zu zeigen:

---

[17] Die Invarianz von $\bar\partial$: zu zeigen ist $\bar\partial(f\circ T_a) = (\bar\partial f)\circ dT_a$. Zum Beweis können wir annehmen, a liegt in einer so kleinen Umgebung von $0\in X$, daß man diese Umgebung mit einer offenen Umgebung von V identifizieren kann (jedes a ist endliche Summe von solchen kleinen a). Wir können also die Rechnung in V ausführen. Zu diesme Zweck verwenden wir eine eine $\mathbb{C}$-Vektroraumbasis von V und zugehörige (holomorphe) Koordinaten $z_1,\dots, z_d$. Es gilt

(*) Es gilt $\int_{V/\Gamma} D(f)dx = 0$ für jede glatte Funktione f: $V/\Gamma \to \mathbb{C}$ und jedes verschiebungsinvariante Vektorfeld D: $V/\Gamma \to T(V/\Gamma)$.

Für den Beweis von (*) können wir die komplexe Struktur von V/Γ ignorieren, also annehmen

$$V/\Gamma = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2d}$$

Wir betrachten jetzt f als periodische Funktion auf $\mathbb{R}^{2d}$, identifizieren $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit dem halboffenen Einheitsintervall [0, 1) und erhalten

$$\int_{V/\Gamma} D(f)dx = \int_{I^{2d}} D(f)dx .$$

Bezeichne x_i die i-te Koodinate des $\mathbb{R}^{2d}$ und habe D die Gestalt

$$D = \sum_{i=1}^{2d} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Da D invariant ist gegenüber Verschiebungen, sind die Koeffizienten $a_i(x)$ unabhängig von x. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_{V/\Gamma} D(f)dx &= \int_{x_1=0}^{1} \dots \int_{x_{2d}=0}^{1} \sum_{i=1}^{2d} a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_{2d}\cdot\ldots\cdot dx_1\\ &= \sum_{i=1}^{2d} \int_{x_1=0}^{1} \dots \int_{x_{2d}=0}^{1} a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_{2d}\cdot\ldots\cdot dx_1\end{aligned}$$

und

$$\int_{x_i=0}^{1} a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i = a_i(f(x)|_{x_i=1} - f(x)|_{x_i=0}) = 0$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt weil zwei Punkte von x von V, deren Koordinaten sich nur um ganze Summanden unterscheiden, demselben Punkt von $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2d}$ entsprechen, so daß f in diesen Punkten denselben Wert annimmt.

QED (Lemma).

$$\bar\partial(f\circ T_a)(z) = \bar\partial(f(z+a)) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f(z+a)}{\partial \bar z_i} d\bar z_i = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f(z+a)}{\partial\, \overline{z_i+a}} d(\overline{z_i+a}) = (\bar\partial f\circ T_a)(z) = (\bar\partial f\circ dT_a)(z)$$

(im linearen Raum V können wir die Abbildung T_a mit deren Linearisierung dT_a identifizieren). Wegen der Invarianz der ω_i ergibt sich damit für das "antiholomorphe Gradienten-Vektorfeld":

$$\begin{aligned}(dT_a)^{-1}\circ\bar\partial f\circ T_a &= \sum_{i=1}^{d} (dT_a)^{-1}\circ(D_i(f)\otimes\omega_i)\circ T_a = \sum_{i=1}^{d} (dT_a)^{-1}\circ D_i(f)\circ T_a\otimes\omega_i\\ \| \qquad & \\ \bar\partial f \qquad &= \sum_{i=1}^{d} D_i(f)\otimes\omega_i\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich sehen wir $(dT_a)^{-1}\circ D_i(f)\circ T_a = D_i(f)$, d.h. die D_i sind invariant.

1.1.12.2 Die Fourier-Entwicklung einer Γ-periodischen Funktion auf V

Wie wir wissen, läßt sich jede (komplexwerige) stetige Funktion auf der Einheitskreislinie

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

in eine Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx}$$

Die Fourier-Koeffizienten a_n lassen sich dabei als Integrale über f schreiben. Die analoge Aussage gilt für direkte Produkte

$$V/\Gamma$$

von 2d Exemplaren von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Die Summe ist dann über 2d-Tupel ganzer Zahle n zu erstrecken. Ein 2d-Tupel ganzer Zahlen entspricht aber gerade einem Element von

$$\Gamma^* = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$$

(wenn man eine Basis des Gitters Γ fixiert).

Sei jetzt wie bisher V ein komplexer Vektorraum der Dimension $d < \infty$ und

$$\Gamma \subseteq V$$

ein Gitter maximalen Rangs von V. Wir betrachten glatte Funktionen

$$f.\ X := V/\Gamma \to \mathbb{C}.$$

Für jedes

$$\lambda \in \Gamma^* = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$$

setzen wir λ fort zu einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung

$$\lambda: V \to \mathbb{R},$$

die wir ebenfalls mit λ bezeichnen (es gibt genau eine solche Fortsetzung). Wir betrachten die zugehörige Abbildung

$$e'_\lambda: V \to \mathbb{C},\ v \mapsto e^{2\pi i\lambda(v)}.$$

Diese Abbildung nimmt in je zwei Punkten v',v" mit $v'-v'' \in \Gamma$ denselben Wert an. Sie hat also die Gestalt

$$e'_\lambda = e_\lambda \circ \pi$$

mit einer eindeutig bestimmten glatten Funktion

$$e_\lambda: X = V/\Gamma \to \mathbb{C}.$$

Dabei sei

$$\pi: V \to V/\Gamma$$

die natürliche Abbildung. Die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$Q_\lambda: C^\infty(X) \to \mathbb{C},\ f \mapsto \mu(e_{-\lambda} f) = \iint_X e_{-\lambda} f\, d\mu$$

heißt λ-ter Fourier-Koeffizient. Jedes $f \in C^\infty(X)$ besitzt dann eine Fourier-Reihen-Entwicklung

$$f = \sum_{\lambda \in \Gamma^*} Q_\lambda(f) e_\lambda\ .$$

Allgemeiner hat man für jeden $\mathbb{C}$-Vektorraum W eine Abbildung

$$Q_\lambda: C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} W \to W,\ f \otimes w \mapsto \mu(e_{-\lambda} f) \otimes w$$

und für jede vektorwertige glatte Funktion $f \in C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} W$ eine Fourier-Entwicklung

$$f = \sum_{\lambda \in \Gamma^*} e_\lambda \otimes Q_\lambda(f).$$

Bemerkungen

(i) Die Operatoren Q_λ verhalten sich funktoriell bezüglich des $\mathbb{C}$-Vektorraums W, d.h. für jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\alpha: W \to W'$ hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(X)\otimes W & \xrightarrow{Q_\lambda} & W \\ \mathrm{id}\otimes\alpha\downarrow & & \alpha\downarrow \\ C^\infty(X)\otimes W' & \xrightarrow{Q_\lambda} & W' \end{array}$$

(ii) $Q_\lambda : C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^* \to \wedge^*$ ist eine $\wedge^*$-lineare Abbildung.

1.1.12.3 Fixierung eines Hermitischen Skalarprodukts

Auf dem komplexen Vektorraum V fixieren wir ein hermitisches Skalarprodukt und bezeichnen die zugehörige Norm mit

$$||?||: V \to \mathbb{R}.$$

Auf diese Weise wird, wie gewöhnlich, eine Norm[18]

$$||?||: \bar{T} \to \mathbb{R}$$

und damit eine Norm[19]

$$||?||: \wedge^* \to \mathbb{R}$$

definiert. Wir definieren weiter die Abbildung

$$\bar{C}: \Gamma^* \to \bar{T}$$

als Komposition der Abbildungen

$$\Gamma^* \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) \cong T \oplus \bar{T} \to \bar{T}.$$

Dabei sei die erste Abbildung die $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung auf V und die letzte die Projektion auf den zweiten Faktor.

Bemerkungen

(i) Die Abbildung $\bar{C}$ ist additiv und ihr Bild ist ein Gitter maximalen Rangs von $\bar{T}$.[20]

---

[18] Man wähle eine Orthonormalbasis auf V und fordere, die duale Basis sei eine Orthonormalbasis von $\bar{T}$.

[19] Man wähle eine Orthonormalbasis $e_1,...,e_{2d}$ von $\bar{T}$ und fordere, die äußeren Produkte

$$e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_r}$$

mit $1 \le i_1 < ... < i_r \le 2d$ sollen eine Orthonormalbasis von $\wedge^*$ bilden.

[20] Die Additivität ist trivial. Zum Beweis der zweiten Aussage wählen wir eine Basis $e_1,...,e_{2d}$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums V, welche Γ erzeugt. Die zugehörige duale Basis $f_1,...,f_{2d}$ liegt dann in Γ^* (und bildet ein Erzeugendensytem des $\mathbb{Z}$-Moduls Γ^*). Diese duale Basis erzeugt $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$,

(ii) Die Norm ||?|| auf $\overline{T}$ definiert durch Einschränken eine Norm auf Γ^*. Diese wird ebenfalls mit ||?|| bezeichnet.

1.1.12.4 Lemma: Eigenschaften der Fourier-Entwicklung

(i) Die Abbildung

$$C^\infty(X) \to \{Q: U^* \to \mathbb{C} : |Q(\lambda)| = o(\|\lambda\|^{-n})| \text{ für jedes } n\in\mathbb{N}\},\ f\ a\ (\lambda a Q_\lambda(f)),$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

(ii) Für jedes $\omega\in C^\infty(X)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^*$ gilt

$$Q_\lambda(\overline{\partial}\omega) = 2\pi i\cdot Q_\lambda(\omega)\wedge\overline{C}(\lambda).$$

Beweis (des Lemmas).Die erste Aussage ist ein Fakt aus der Fourier-Analysis (und charakterisiert gerade die glatten Funktionen unter denen, die eine Fourier-Entwicklung besitzen)[21]. Die zweite Aussage entspricht gerade der Aussage, daß das Differenzieren

---

also $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$ über $\mathbb{C}$. Nach Konstruktion ist diese Basis außerdem auch invariant bei der komplexen Konjugation von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$. Wir schreiben

$$f_i = f'_i + f''_i \text{ mit } f'_i \in T \text{ und } f''_i\in\overline{T}.$$

Wegen der Invarianz der f_i bei der komplexen Konjugation gilt

$$\overline{f'}_i = f''_i \text{ und } \overline{f''}_i = f'_i.$$

Zum Beweis der Aussage reicht es zu zeigen, die f''_i sind $\mathbb{R}$-linear unabhängig. Sei also

$$\sum_i c_i f''_i = 0 \text{ mit } c_i \in \mathbb{R}.$$

Wir konjugieren und erhalten

$$\sum_i c_i f'_i = 0.$$

Übergang zur Summe der beiden letzten Summen liefert

$$\sum_i c_i f_i = 0.$$

Wegen den linearen Unabhängigkeit der f_i über $\mathbb{R}$ folgt $c_i = 0$ für alle i.

[21] $f = o(g)$ bedeutet $f/g \to 0$.
Eine glatte Funktion f auf V/Γ ist jedenfalls quadratisch summierbar,

$$\int_X |f|^2 d\mu < \infty,$$

d.h. für die Fourier-Koeffizienten von

$$f(x) = \sum_n a_n e^{2\pi i n x}$$

gilt

$$\sum_n |a_n|^2 < \infty.$$

Die Konvergenz der Reihe für f ist insbesondere absolut und gleichmäßig, und es gilt nach der Fourier-Transformation gerade dem Multiplizieren mit einer Variablen entspricht.

Genauer ergibt sich die zweiten Aussage wie folgt.
Bezeichne

$$\pi: V \to X = V/\Gamma$$

die natürliche Abbildung. Dann gilt

$$\pi^*(\bar\partial e_{-\lambda}) = \bar\partial(e^{-2\pi i\lambda}) = -2\pi i e^{-2\pi i\lambda}\bar\partial\lambda =^{22} \pi^*(-2\pi i e_{-\lambda}\otimes\bar C(\lambda)).$$

Damit ist

$$\bar\partial e_{-\lambda} = -2\pi i e_{-\lambda}\otimes\bar C(\lambda).$$

Nach Lemma 1.1.12.1 ist damit für jedes $\omega\in C^\infty(X)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^*$

$$\begin{aligned}0 &= \mu_{\wedge^*}(\bar\partial(e_{-\lambda}\omega))\\ &= -2\pi i\ \mu_{\wedge^*}(e_{-\lambda}\omega\wedge\bar C(\lambda)) + \mu_{\wedge^*}(e_{-\lambda}\bar\partial\omega)\\ &= -2\pi i\ \mu_{\wedge^*}(e_{-\lambda}\omega)\wedge\bar C(\lambda) + \mu_{\wedge^*}(e_{-\lambda}\bar\partial\omega) \quad (\mu \text{ ist } \wedge^*\text{-linear})\\ &= -2\pi i\ Q_\lambda(\omega)\wedge\bar C(\lambda) + Q_\lambda(\bar\partial\omega).\end{aligned}$$

QED (Lemma).

1.1.12.5 Verjüngung von äußeren Potenzen von Vektoren mit Kovektoren

Seien W ein komplexer Vektorraum und

$$D \in \mathrm{Hom}(W, \mathbb{C}).$$

Dann induziert D für jedes $p\in\mathbb{N}$ eine lineare Abbildung

$D\lrcorner : \wedge^p W \to \wedge^{p-1} W$,

welche innere Multiplikation mit D heißt und durch die folgenden Bedingungen definiert ist.

1. $D\lrcorner(X_1\wedge\ldots\wedge X_p) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} D(X_k) X_1\wedge\ldots\wedge\hat{X}_k\ldots\wedge X_p$
2. Insbesondere gilt im Fall $D(X_0) = 1$ für alle $\omega\in\wedge^*W$

$$D\lrcorner(\omega\wedge X_0) + (D\lrcorner\omega)\wedge X_0 = \omega.$$

Beweis: einfach, siehe Bücher über Differentialgeometrie.
QED.

$$|a_n| \to 0$$

Differenziert man gliedweise nach x, so sieht man, bei Konvergenz der Ableitung müssen auch die

$$|a_n \cdot n|$$

gegen Null gehen. Auf $X = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2d}$ entspricht das der Aussage $|a_\lambda|\cdot\|\lambda\| \to 0$. Beim Bilden n-facher Ableitungen erhält man $|a_\lambda|\cdot\|\lambda\|^n \to 0$.

[22] Man denke sich λ in der Gestalt

$$\lambda(z) = \sum_i a_i z_i + \sum_i b_i \bar z_i$$

geschrieben und wende $\bar\partial$ an.

1.1.12.6 Konstruktion der Abbildungen k, Abschluß des Beweises

Für jedes

$$\lambda\in\Gamma^* = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$$

definieren wir ein

$$\lambda^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{T}, \mathbb{C})$$

indem wir setzen

$$\lambda^*(x) = \frac{\langle x,\overline{C}(\lambda)\rangle}{2\pi i\cdot\|\overline{C}(\lambda)\|^2}$$

für jedes $x\in\overline{T}$. Dann gilt

$$2\pi i\lambda^*(\overline{C}(\lambda)) =^{23} 1$$

und

$$\begin{aligned}\|\lambda^*\| &= \sup \{ |\lambda^*(x)| : \|x\| = 1 \} \\ &= (2\pi)^{-1}\|\lambda\|^{-2}\cdot\sup \{|\langle x, \overline{C}(\lambda)\rangle| : \|x\| = 1 \} \\ &=^{24} (2\pi)^{-1}\|\lambda\|^{-1}\end{aligned}$$

Für jedes $\omega\in C^\infty(X)\otimes\wedge^p$ definieren wir den Wert der Homotopie

$$k:C^\infty(X)\otimes\wedge^p \to C^\infty(X)\otimes\wedge^{p-1}$$

indem wir die Koeffizienten der Fourier-Reihe von $k(\omega)$ angeben:

$$Q_\lambda(k(\omega)) := \frac{1}{2\pi i}\lambda^*\lrcorner\, Q_\lambda(\omega) \text{ für } \lambda\neq 0$$
$$Q_\lambda(k(\omega)) := 0 \text{ für } \lambda= 0.$$

Wir haben zunächst zu zeigen, die so definierte Funktion $k(\omega)$ ist glatt, d.h.

$$Q_\lambda(k(\omega)) = o(\|\lambda\|^{-n}).$$

Das folgt aber daraus[25], daß die entsprechende Aussage für die $Q_\lambda(\omega)$ gilt (da ω glatt ist). Wir haben noch zu zeigen,

$$(*) \qquad \overline{\partial}k + k\overline{\partial} = \mathrm{id}_{C^\infty(X)\otimes\wedge^*} - i\circ\mu_{\wedge^*}.$$

Wir beweisen (*) indem wir die Fourier-Koeffizienten der vektorwertigen Funktionen auf beiden Seiten berechnen.

Für $\lambda\neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}Q_\lambda(\overline{\partial}k\omega + k\overline{\partial}\omega) &= Q_\lambda(\overline{\partial}k\omega) + Q_\lambda(k\overline{\partial}\omega) \\ &= 2\pi i\cdot Q_\lambda(k\omega)\wedge\overline{C}(\lambda) + Q_\lambda(k\overline{\partial}\omega) && \text{(nach 1.1.12.4 (ii))} \\ &= 2\pi i\cdot Q_\lambda(k\omega)\wedge\overline{C}(\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\cdot \lambda^*\lrcorner\, Q_\lambda(\overline{\partial}\omega) && \text{(nach Definition von k)} \\ &= (\lambda^*\lrcorner\, Q_\lambda(\omega))\wedge\overline{C}(\lambda) + \lambda^*\lrcorner\, (Q_\lambda(\omega)\wedge\overline{C}(\lambda))\end{aligned}$$

(nach Definition bzw. nach 1.1.12.4.)

---

[23] Identifiziert man Γ^* mit einem Gitter maximalen Rangs von $\overline{T}$ (mit Hilfe von $\overline{C}$), so ist

$$2\pi i\cdot\lambda^*(x)\cdot\lambda$$

gerade to Projektion von x auf die Gerade in Richtung λ.

[24] Man erhält das Supremum, wenn man für x einen Einheitsvektor in Richtung $\overline{C}(\lambda)$ einsetzt.

[25] Anwenden von $\lambda^*\lrcorner$ bedeutet in lokalen Koordinaten im wesentlichen Multiplikation mit den Koordinaten von von λ.

$= Q_\lambda(\omega)$ (nach 1.1.12.5)

$= Q_\lambda(id_{C^\infty(X)\otimes\wedge^*}(\omega))$

und

$$Q_\lambda(i\circ\mu_{\wedge^*}(\omega)) = \mu(e_{-\lambda}\mu_{\wedge^*}(\omega)) = \mu(e_{-\lambda})\cdot\mu_{\wedge^*}(\omega) = 0\cdot\mu_{\wedge^*}(\omega) = 0$$

Zur Erinnerung, $i : \wedge^* \to C^\infty(X)\otimes\wedge^*$ ist die natürliche Einbettung $\alpha \mapsto 1\otimes\alpha$. und μ ist $\wedge^*$-linear. Die beiden letzten Gleichheitszeichen kommen von der Tatsache, daß die konstante Funktion $1: X \to \mathbb{C}$ nur einen von Null verschiedenen Fourier-Koeffizienten hat.
Wir haben noch den Fall $\lambda = 0$ zu betrachten. Es gilt

$Q_0(k\bar\partial\omega) = 0$ (nach Definition von k)

$Q_0(\bar\partial k\omega) = 2\pi i\cdot Q_0(k\omega)\wedge\bar{C}(0) = 0$ (nach 1.1.12.4)

$Q_0(id_{C^\infty(X)\otimes\wedge^*}(\omega)) = Q_0(\omega)$

$Q_0(i\circ\mu_{\wedge^*}(\omega)) = \mu(e_{-0}\mu_{\wedge^*}(\omega)) = \mu(e_{-0})\mu_{\wedge^*}(\omega)) = 1\ Q_0(\omega).$

Damit ist (*) und damit auch 1.1.12 bewiesen.
QED.

1.1.13 Bemerkung 1

Beim konstruierten Isomorphismus

$$\wedge^q\bar{T} \to H^q(X, \mathcal{O}_X)$$

entspricht die Multiplikation

$$H^{q'}(X, \mathcal{O}_X) \times H^{q''}(X, \mathcal{O}_X) \to H^{q'+q''}(X, \mathcal{O}_X)$$

des Kohomologie-Rings gerade der äußeren Multiplikation

$$\wedge^{q'}\bar{T} \times \wedge^{q''}\bar{T} \to \wedge^{q'+q''}\bar{T}.$$

Beweis. Das folgt aus der allgemeinen Garben-Theorie, denn wir haben zur Berechnung der Kohomologie die Auflösung der Garbe $\mathcal{O}_X$ durch die Garben der glatten graduierten Algebra $\{\mathcal{E}^{0,q}\}$ mit dem Differential $\bar\partial$ verwendet. In diesem Fall kommt die Multiplikation des Kohomologie-Rings von der Multiplikation der Resolvente (vgl. Godement).
QED.

1.1.14 Folgerung

Sei $X = V/\Gamma$ eine kompakte komplexe Lie-Gruppe. Dann ist die natürliche Abbildung

$$\wedge^q H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^q(X, \mathcal{O}_X),$$

die von der Multiplikation des Kohomologie-Rings kommt, ein Isomorphismus.

1.1.15 Bemerkung 2

1. <u>Der De-Rham-Komplex</u>. In derselben Weise, wie wir oben die Kohomologie des Dolbeault-Komplexes berechnet haben, kann man auch die Kohomologie des De-Rham-Komplexes ausrechnen. Sei

$$\mathcal{E}^n = \oplus_{p+q=n}\ \mathcal{E}^{p,q}$$

die Garbe der glatten n-Formen. Dann ist

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \dots$$

eine feine Auflösung der konstanten Garbe $\mathbb{C}$. Deshalb gilt

$$H^n(X, \mathbb{C}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{E}^n(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{n+1}(X))/d\mathcal{E}^{n-1}(X).$$

2. Die Kohomologie der konstanten Garbe. Dieselben Argumente wie die für (0,q)-Formen liefern die folgende Aussage.

Für jede d-abgeschlossene n-Form ω,

$$d\omega = 0$$

existiert genau eine invariante n-Form

$$\omega_\alpha \text{ , } \alpha \in \wedge^n \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}),$$

sodaß die Differenz die Gestalt

$$\omega - \omega_\alpha = d\eta$$

hat mit einer glatten (n-1)-Form η auf X. Mit anderen Worten, es gilt

$$H^n(X, \mathbb{C}) \cong \wedge^n \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}).$$

Bei diesem Isomorphismus entspricht wie oben die Multiplikation des Kohomologie-Rings gerade der äußeren Multiplikation.
3. Die Hodge-Zerlegung. Wegen

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) = T \oplus \overline{T}$$

erhalten wir damit

$$H^n(X, \mathbb{C}) = \wedge^n(T \oplus \overline{T}) = \oplus_{p+q=n} \wedge T^p \otimes \wedge^q \overline{T}$$
$$= \oplus_{p+q=n} H^q(X, \Omega^p).$$

Dies ist eine explizite Variante der berühmten Hodge-Zerlegung.

1.1.16 Bemerkung 3

Sei $X = V/\Gamma$ eine komplexe Lie-Gruppe. Dann haben wir auf X die drei ineinander liegenden Garben

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathcal{O}_X$$

(die beiden ersten Symbole sollen die konstanten Garben bezeichnen). Wir haben für die Kohomologie-Gruppen dieser Garben voneinander unabhängige Beschreibungen gefunden:

$$H^1(X, \mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) = \Gamma^* \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{mit Hilfe des Isomorphismus} \\ H^1(Y,\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}(\pi_1(Y),\mathbb{Z}) \\ \text{für beliebige wegeweise zusammenhängende Räume} \end{array} \right.$$

$$\alpha \downarrow$$

$$H^1(X,\mathbb{C}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) = T \oplus \overline{T} \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{mit Hilfe der exakten Sequenz} \\ 0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1_{\text{geschlossen}} \to 0 \\ \text{und der Einbettung} \\ T \oplus \overline{T} \hookrightarrow H^0(\mathcal{E}^1_{\text{geschlossen}}) \end{array} \right.$$

$$\beta \downarrow$$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \overline{T} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{mit Hilfe der exakten Sequenz} \\ 0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}^{0,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{0,1}_{\text{geschlossen}} \\ \quad \text{und der Einbettung} \\ \quad \overline{T} \hookrightarrow H^0(\mathcal{E}^{0,1}_{\text{geschlossen}}) \end{array} \right.$$

Es ist naheliegend anzunehmen, daß die vertikalen Morphismen, die diese Gruppen ineinander abbilden, bei diesen Isomorphismen gerade den folgenden natürlichen Abbildungen entsprechen.

a) α entspricht der Abbildung $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$

b) β entspricht der Projektion $T \oplus \overline{T} \to \overline{T}$.

Beweis. Zu b). Die Abbildung

$$\beta: H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

kann man berechnen, indem man die beiden Resolventen vergleicht, durch welche wir die Kohomologie-Gruppen berechnet haben. Bezeichne

$$C_{0,1}: \mathcal{E}^1 = \mathcal{E}^{1,0} \oplus \mathcal{E}^{0,1} \to \mathcal{E}^{0,1}$$

die Projektion auf den zweiten direkten Summanden. Sie überführt d-geschlossene Formen in $\overline{\partial}$-geschlossene Formen. Deshalb besteht ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathbb{C} & \to & \mathcal{E}^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^1_{\text{geschl.}} & \to 0 \\ & \downarrow & & \| & & C_{0,1} & \\ 0 \to & \mathcal{O}_X & \to & \mathcal{E}^{0,0} & \xrightarrow{\overline{\partial}} & \mathcal{E}^{0,1}_{\text{geschl.}} & \to 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Wir gehen zu den langen Kohomologie-Sequenzen über und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} T \oplus \overline{T} & \hookrightarrow & H^0(X, \mathcal{E}^1_{\text{geschl.}}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathbb{C}) \\ \text{Projektion}\downarrow & & \downarrow C_{0,1} & & \downarrow \beta \\ \overline{T} & \hookrightarrow & H^0(X, \mathcal{E}^{0,1}_{\text{geschl.}}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathcal{O}_X) \end{array}.$$

Damit ist die erste Aussage bewiesen.

Zu a). Betrachten wir die Abbildung

$$\alpha: H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathbb{C}).$$

Sei

$$a \in H^1(X, \mathbb{Z}).$$

Wir bezeichnen mit

$$\tilde{a}: \pi_1(X) \to \mathbb{Z}$$

den zugehörigen Gruppen-Homomorphismus bezüglich des Hurewicz -Isomorphismus

$$\pi_1(X) \to H_1(X, \mathbb{Z}), [\varphi] \mapsto [\varphi']$$

der jedem geschlossenen Weg $\varphi: S^1 \to X$ den zugehörigen Zyklus

$$\varphi': I \to S^1 \xrightarrow{\varphi} X$$

zuordnet. Es gilt

$\tilde{a}([\varphi])$ $=$[26] a(Homologie-Klasse von ω')
$=$[27] $\varepsilon(\varphi^*(a))$

Dabei sei ε der natürliche Isomorphismus

$$\varepsilon\colon H^1(S^1, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(H_1(X,\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z},\ h \mapsto h([id:S^1 \to S^1])$$

(Auswertung im erzeugenden Element von H_1). Für jedes Element

$$\gamma \in \Gamma$$

bezeichnen wir mit

$$\varphi_\gamma\colon S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to X = V/\Gamma$$

den geschlossenen Weg mit

$$\varphi_\gamma(t) = t\cdot\gamma \bmod \Gamma \in X.$$

Das Element a definiert damit ein Element

$$\tilde{a} \in \Gamma^* = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$$

mit

(1) $$\tilde{a}(\gamma) = \varepsilon(\varphi_\gamma^*(a)).$$

Betrachten wir jetzt das Bild von a in der Kohomologie mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$,

$$\alpha(a) \in H^1(X, \mathbb{C}).$$

Wie wir oben gesehen haben, ist $H^1(X, \mathbb{C})$ isomorph zu $T \oplus \overline{T}$. Genauer: es gibt genau ein Element

$$b \in T \oplus \overline{T}$$

derart, daß die zugehörige invariante 1-Form

$$\omega_b \in H^0(X, \mathcal{E}^1_{geschl})$$

beim Zusammenhangs-Homomorphismus

$$H^0(X, \mathcal{E}^1_{geschl}) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathbb{C})$$

in $\alpha(a)$ übergeht,

(2) $$\delta(\omega_b) = \alpha(a).$$

Wir haben zu zeigen, $\tilde{a}$ ist gerade die Einschränkung der Abbildung b auf $\Gamma \subseteq V$.

Da sich der Zusammenhangshomomorphismus δ funktoriel bezüglich X verhält, erhalten wir mit Hilfe der stetigen Abbildung $\varphi_\gamma\colon S^1 \to X$,

(3) $\delta(\varphi_\gamma^*(\omega_b)) = \varphi_\gamma^*(\delta(\omega_b))$ (Funktorialität von δ)
$= \varphi_\gamma^*(\alpha(a))$ (nach (2))

---

[26] Wir identifizieren hier $H^1(X, \mathbb{Z})$ mit $\mathrm{Hom}(H_1(X,\mathbb{Z}), \mathbb{Z})$

[27] Die Abbildung $\varphi^*: H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(S^1, \mathbb{Z})$ ist gerade die Verflanzungsabbildung mit der durch $\varphi: S^1 \to X$ induzierten Abbildung

$$H_1(S^1, \mathbb{Z}) \to H_1(X, \mathbb{Z}),$$

d.h. $\varphi^*(a)([c]) = a([\varphi\circ c])$ für jeden Zyklus c von S^1. Mit $[c] = [id]$ gilt also

$$a([\varphi]) = a([\varphi\circ id]) = \varphi^*(a)([id]) = \varepsilon(\varphi^*(a))$$

$= \alpha(\varphi_\gamma^*(a))$ (Funktorialität von $\alpha: H^1(Y, \mathbb{Z}) \to H^1(Y, \mathbb{C})$ bzgl. Y)

Sei jetzt η eine beliebige 1-Form auf S^1 (sie ist automatisch geschlossen),

$$\delta(\eta) \in H^1(S^1, \mathbb{C})$$

deren Bild beim De-Rham-Isomorphismus und

$$\varepsilon(\delta(\eta)) \in \mathbb{C}$$

das Bild beim natürlichen Isomorphismus $H^1(S^1, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\varepsilon(\delta(\eta)) = \int_{S^1} \eta.$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\gamma) &= \varepsilon(\varphi_\gamma^*(a)) && \text{(nach (1))} \\
&= \varepsilon(\alpha(\varphi_\gamma^*(a))) && \text{(Verträglichkeit von } H^1(S^1,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \text{ und } H^1(S^1, \mathbb{C}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}) \\
&= \varepsilon(\delta(\varphi_\gamma^*(\omega_b))) && \text{(nach (3))} \\
&= \int_{S^1} \varphi_\gamma^*(\omega_b)
\end{aligned}$$

Hat $b \in T \oplus \overline{T}$ in geeigneten Koordinaten von V die Gestalt

$$b = \sum_i b'_i z_i + \sum_i b''_i \overline{z}_i ,$$

so gilt für die Anhebung von ω_b auf V,

$$\omega_b = \sum_i b'_i dz_i + \sum_i b''_i d\overline{z}_i .$$

Also ist

$$\tilde{a}(\gamma) = \int_{t=0}^{1} \omega_b(t\gamma) = b(\gamma) - b(0) = b(\gamma).$$

Mit anderen Worten, $\tilde{a}$ ist tatsächlich die Einschränkung der Abbildung b auf Γ.

QED.

1.1.17 Folgerung

Der Homomorphismus β von 1.1.16 ist surjektiv.

Beweis. Folgt direkt aus der Interpretation von β als Projektion $T \oplus \overline{T} \to \overline{T}$.
QED.

1.1.18 Der Fall der höheren Kohomologie-Gruppen

Unter Verwendung unserer Identifikationen mit der Multiplikation der betrachteten Kohomologie-Ringe ergeben sich die folgenden weiteren Identifikationen.

$$
\begin{tikzcd}
H^n(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d] & \wedge^n\Gamma^* \arrow[d, "\wedge^n \text{ von der Einbettung } \Gamma^*\subset T\oplus\overline{T}"] & \\
H^n(X,\mathbb{C}) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d] & \wedge^n(T\oplus\overline{T}) \arrow[r, phantom, "="] & \oplus_{p+q=n}\wedge^pT\otimes\wedge^q\overline{T} \arrow[d, "\text{Projektion}"] \\
H^n(X;\mathcal{O}_X) & & \wedge^n\overline{T}
\end{tikzcd}
$$

1.2 Geradenbündel auf komplexen Tori

1.2.1 Theorem: die Kohomologie des affinen Raums mit Koeffizienten in $\mathcal{O}$

Für jede ganze Zahl $p > 0$ gilt $H^p(\mathbb{C}^N, \mathcal{O}) = 0$.
Beweis. Siehe Gunning und Rossi [9], S.232.
QED.
Bemerkungen
(i) Die Aussage besagt, die globalen Schnitte des Dolbeault-Komplexes bilden für den $\mathbb{C}^N$ eine exakte Sequenz, d.h. das Poincaré-Lemma gilt für den $\bar\partial$-Operator auf dem $\mathbb{C}^N$ global.
(ii) Vergleich auch Hartshorne: Algebraic geometry, Kapitel III: dort wird das analoge Ergebnis für die Garbe der regulären Funktionen (und beliebige affine Schemata) bewiesen.

1.2.2 Folgerung: Trivialität der Geradenbündel auf $\mathbb{C}^N$

Für jede ganze Zahl $p > 0$ gilt

$$H^p(\mathbb{C}^N, \mathcal{O}^*) = \{e\}.$$

Insbesondere sind alle holomorphen Geradenbündel über dem $\mathbb{C}^N$ trivial.
Beweis. Wir verwenden die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi i ?}} \mathcal{O}^* \to 0.$$

Die Behauptung folgt dann aus der zugehörigen langen Kohomologie-Sequenz

$$\dots \to H^p(\mathbb{C}^N, \mathbb{Z}) \to H^p(\mathbb{C}^N, \mathcal{O}) \to H^p(\mathbb{C}^N, \mathcal{O}^*) \to H^{p+1}(\mathbb{C}^N, \mathbb{Z}) \to \dots$$

und der Tatsache, daß gilt

$$H^p(\mathbb{C}^N, \mathcal{O}) = 0 \text{ für } p > 0$$
$$H^p(\mathbb{C}^N, \mathbb{Z}) = 0 \text{ für } p > 0.$$

Die zweite Identität gilt, weil $\mathbb{C}^N$ kontrahierbar ist.
QED.
Bemerkungen
Unser Ziel besteht jetzt darin, eine direkte geometrische Beschreibung aller Geradenbündel L auf einem komplexen Torus

$$X = V/\Gamma$$

anzugeben. Dazu betrachten wir die universelle Überlagerung

$$\pi: V \to X$$

und verwenden die Tatsache, daß π^*L trivial ist.

1.2.3 Beschreibung der Geradenbündel durch Multiplikatoren

Seien $X = V/\Gamma$ ein komplexer Torus,

$$\pi\colon V \to X,\ v \mapsto v \bmod \Gamma,$$

dessen unverselle Überlagerung und

$$f\colon L \to X$$

ein holomorphes Geradenbündel auf X. Wir fixieren einen Isomorphismus

$$\chi\colon \pi^*L =^{28} L\times_X V \xrightarrow{\ \cong\ } \mathbb{C}\times V$$

(ein solcher existiert nach 1.2.2)[29]. Die Gruppe

$$\Gamma := \mathrm{Ker}(\pi)$$

Operiert auf V,

$$\Gamma\times\pi^*L \to \pi^*L,\ (\gamma, (\ell, v)) \mapsto (\ell, v + \gamma),$$

wobei gilt

$$\pi^*L/\Gamma = L.$$

Mit anderen Worten, das Bündel L ist eindeutig festgelegt, wenn wir das triviale Bündel π^*L und die Operation von Γ auf diesem Bündel kennen.

Jedes $\gamma\in\Gamma$ definiert so eine holomorphe Abbildung

$$\gamma_*\colon\pi^*L \to \pi^*L,\ (\ell, v) \mapsto (\ell, v+\gamma),$$

die auf der Basis die Verschiebung mit γ induziert, d.h.

$$\begin{array}{ccc} \pi^*L & \xrightarrow{\ \gamma_*\ } & \pi^*L \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{\ \tau_\gamma\ } & V \end{array}$$

ist kommutativ. Auf Grund des Isomorphismus χ induziert diese Operation von Γ eine Operation auf dem trivialen Bündel $\mathbb{C}\times V$,

$$\Gamma \times \mathbb{C}\times V \to \mathbb{C}\times V,\ (\gamma, (a, v)) \mapsto \varphi_\gamma(a,v),$$

welche auf der Bündelbasis V ebenfalls die Verschiebungen mit den Elementen aus Γ induziert, d.h.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times V & \xrightarrow{\ \varphi_\gamma\ } & \mathbb{C}\times V \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{\ \tau_\gamma\ } & V \end{array}$$

ist kommutativ für jedes $\gamma\in\Gamma$. Auf jeder Faser des trivialen Bündels induziert φ_γ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung (weil γ_* diese Eigenschaft bezüglich π^*L hat), ist also gerade die Multiplikation mit einer von Null verschiedenen komplexen Zahl,

(A) $$\varphi_\gamma(a, v) = (e_\gamma(v)\cdot a,\ v+\gamma) \text{ für } \gamma\in\Gamma,\ a\in\mathbb{C},\ v\in V,$$

wobei $e_\gamma(v)$ in holomorpher Weise von v abhängt, d.h.

$$e_\gamma \in H^* := H^0(V, \mathcal{O}_V^*)$$

für beliebige $\gamma\in\Gamma$. Da es sich um eine Gruppen-Operation handelt, gilt

---

[28] Als Menge ist $L\times_X V = \{ (\ell, v)\in L\times V \mid f(\ell) = \pi(v)\}$

[29] d.h. die Abbildung ist eine Bündelabbildung: sie überführt jede Faser in eine Faser und induziert auf jeder Faser eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung die in holomorpher Weise vom Basispunkt abhängt. Und sie besitzt eine inverse Bündelabbildung.

$$\varphi_\gamma(\varphi_{\gamma'}(a,v)) = \varphi_{\gamma+\gamma'}(a,v)$$

für beliebige $v\in V$, $a\in\mathbb{C}$, $\gamma,\gamma'\in\Gamma$. Das bedeutet für die $e_\gamma(v)$, es gilt

$$e_{\gamma+\gamma'}(v) = e_\gamma(v+\gamma')e_{\gamma'}(v) \text{ für } v\in V,\ \gamma,\gamma'\in\Gamma.$$

1.2.4 Systeme von Multiplikatoren

Sei $X = V/\Gamma$ ein komplexer Torus. Eine Familie

$$\{e_\gamma: V \to \mathbb{C}^*\}_{\gamma\in\Gamma}$$

von holomorphen Funktionen

$$e_\gamma \in H^* := H^0(V, \mathcal{O}_V^*)$$

auf V ohne Nullstellen mit

(1) $$e_{\gamma+\gamma'}(v) = e_\gamma(v+\gamma')e_{\gamma'}(v) \text{ für } v\in V,\ \gamma,\gamma'\in\Gamma.$$

heißt System von Multiplikatoren auf X.

Bemerkungen

(i) Wir haben oben zu jedem Geradenbündel L auf X und jeder Trivialisierung von π^*L ein System von Multiplikatoren gefunden. Die definierende Bedingung bedeutet gerades die Familie $\{e_\gamma\}$ ist ein 1-Kozyklus von Γ mit Koeffizienten in H^*, d.h. das Multiplikatorsystem definiert ein Element[30]

---

[30] Für jedes Gruppe G ist der Funktor

$$G\text{-Mod} \to Ab,\ M \mapsto \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) = M^G,$$

wobei $\mathbb{Z}$ der G-Modul mit der trivialen Operation sei, ein linksexakter Funktor. Die zugehörigen rechtsabgeleiteten Funktoren werden mit

$$H^q(G, ?): G\text{-Mod} \to Ab,$$

bezeichnet. Insbesondere ist

$$H^0(G, M) = M^G \text{ und } H^q(G,M) = \mathrm{Ext}^q_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M).$$

Zur berechnung kann man die freie Resolvente

$$P_* \to \mathbb{Z} \to 0$$

benutzen mit

$$P_n = \mathbb{Z}[G^{n+1}]$$

und den Differentialen $d: P_n \to P_{n-1}$ mit

$$d(g_0,\dots,g_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i(g_0,\dots,\hat{g}_i,\dots,g_n)$$

für alle $g_i\in G$. Die Gruppe G operiert auf den P_n durch koordinatenweise Multiplikation der Basiselemente $(g_0,\dots,g_n)$. Damit ist also

$$H^q(G, M) = H^q(\mathrm{Hom}_G(P_*, M)).$$

Man beachte, Abbbildungen von

$$\mathrm{Hom}_G(P_n, M)$$

sollen $\mathbb{Z}$-linear sein. Sie sind also bereits durch ihre Werte auf der Menge G^{n+1} der Erzeugenden eindeutig festgelegt. Da es G-Homomorphismen sein sollen, sind sie sogar schon durch die Werte auf $\{e\}\times G^n$ bestimmt (und diese können beliebig sein). Man hat deshalb eine Identifikation

$$[\{e_\gamma\}] \in H^1(\Gamma, H^*).$$

(ii) Je zwei Trivialisierungen

$$\chi: \pi^*L = L\times_X V \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}\times V$$

von π^*L unterscheiden sich nur durch die Multiplikation mit einer holomorphen Funktion

$$f: V \to \mathbb{C}^*,$$

d.h. ist χ' eine zweite solche Trivialisierung, so ist diese gerade die Zusammensetzung von χ mit der Abbildung

$$(a, v) \mapsto (f(v)a, v).$$

für ein geeignetes f.[31] Das Multiplikatorsystem $\{e'_\gamma\}$ zur neuen Trivialisierung unterscheidet sich vom alten nur durch die Multiplikation mit dieser Funktion,[32]

$$e'_\gamma(v)f(v) = f(v + \gamma)e_\gamma(v)$$

für $v\in V$ und $\gamma\in\Gamma$. Es gilt also

$$e'_\gamma(v) = e_\gamma(v)f(v + \gamma)f(v)^{-1}$$

Das bedeutet aber, die beiden Multiplikatorensyteme unterscheiden sich gerade durch die Multiplikation mit dem Korand des 0-Kozyklus $f:X \to \mathbb{C}^*$.[33] Mit anderen Worten,

$$[\{e_\gamma\}] \in H^1(\Gamma, H^*)$$

hängt nicht von der speziellen Wahl der Trivialisierung χ ab.

(iii) Wir haben damit eine Abbildung

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^1(\Gamma, H^*)$$

$$\mathrm{Hom}_G(P_n, M) = \mathrm{Hom}_{Ens}(G^n, M).$$

Auf die Elemente der Menge rechts wirkt der Korand-Operator des Komplexes

$$\mathrm{Hom}_G(P_*, M)$$

wie folgt: für $f\in\mathrm{Hom}_{Ens}(G^n, M)$ ist $\delta f \in \mathrm{Hom}_{Ens}(G^{n+1}, M)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\delta f(g_0,...,g_n) \quad = \quad & g_0 f(g_1,...,g_n) \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} f(g_0,...,g_i g_{i+1},...,g_n) \\ & + (-1)^{n+1} f(g_0,...g_{n-1}).\end{aligned}$$

Für jede Paarung $*:M\times N \to P$ von abelschen Gruppen hat man ein $\cup$-Produkt

$$H^p(G, M)\times H^q(G, N) \to H^{p+q}(G,P), ([\alpha], [\beta]) \mapsto [\alpha\cup\beta],$$

mit

$$(\alpha\cup\beta)(g_1,...,g_{p+q}) = \alpha(g_1,...,g_p)*\beta(g_{p+1},...,g_{p+q}).$$

[31] Der Übergang $\chi'\circ\chi^{-1}:\mathbb{C}\times V \to \mathbb{C}\times V$ von den alten Koordinaten (bezüglich der alten Trivialisierung) zu den neuen ist eine Bündel-Abbildung, d.h. in der ersten Koordinaten gerade die Multiplikation mit einer komplexen Zahl und in der zweiten Koordinate die identische Abbildung.

[32] Ausgehend von einem Element (a, v) von $\mathbb{C}\times V$ in alten Koordinaten (d.h. bezüglich der alten Trivialisierung) ist es egal ob man erst zu den neuen Koordinaten übergeht und dann das Element $\gamma\in\Gamma$ operieren läßt - vgl. linke Seite der Identität - oder erst γ operieren läßt und dann zu den neuen Koordinaten übergeht - vgl. die rechte Seite.

[33] f hängt von 0 Argumenten, die in der Gruppe Γ varieiren, ab.

von der Gruppe der Isomorphie-Klassen von holomorphen Geradenbündeln auf X in die erste Kohomologie der Gruppe Γ mit Werten in H* konstruiert. Es ist leicht zu sehen, daß dabei das Tensorprodukt von Geradenbündeln gerade dem Produkt der zugehörigen Kohomologie-Klassen entspricht,[34] d.h. diese Abbildung ist ein Gruppen-Homomorphismus.

(iv) Sei jetzt ein beliebigen Multiplikatorensystem $\{e_\gamma\}$ auf X gegeben, d.h. ein System von homomorphen Funktionen aus H* das den Bedingungen (1) genügt. Dann operiert Γ wie folgt auf dem trivialen Bündel.

$$\Gamma\times\mathbb{C}\times V \to \mathbb{C}\times V, (\gamma, a, v) \mapsto (e_\gamma(v), v + \gamma).$$

Durch Faktorisieren des trivialen Bündels nach dieser Operation erhalten wir ein holomorphes Geradenbündel

$$L = \mathbb{C}\times V/\Gamma$$

auf $V/\Gamma = X$. Es ist leicht zu sehen, $\{e_\gamma\}$ ist ein Multiplikatorsystem zum Bündel L. Die angegebene Konstruktion definiert gerade eine Abbildung

$$\psi: H^1(\Gamma, H^*) \to H^1(X, \mathcal{O}),$$

die invers ist zur Abbildung von (iii). Insbesondere sind die beiden Kohomologie-Gruppen isomorph.

(v) Allgemeiner kann man für jede Garbe F auf $X = V/\Gamma$ einen Gruppen-Homomorphismus

$$\psi: H^1(\Gamma, H^0(X, \pi^*F)) \to H^1(X, F)$$

konstruieren. Wir werden hier zunächst die Konstruktion dieses Homomorphismus angeben. Im nächsten Abschnitt beweisen wir, daß diese Konstruktion korrekt ist, und untersuchen einige Eigenschafftten dieses Homomorphismus. Zum Beispiel werden wir sehen, daß diese Homomorphismen Isomorphismen sind, wenn

$$H^q(X, \pi^*F)) = 0$$

ist für alle $q > 0$, daß sie sich funktoriell verhalten und verträglich sind mit den Zusammenhangshomomorphismen zu kurzen exakten Sequenzen der Garben F. Für $F = \mathcal{O}^*$ erhält man die oben konstruierte Abbildung.

1.2.5 Der Homomorphismus ψ: $H^1(\Gamma, H^0(V, \pi^*F)) \to H^1(X, F)$

Sei $X = V/\Gamma$ ein komplexer Torus. Bezeichne

$$\pi: V \to X, v \mapsto v \bmod \Gamma,$$

die universelle Überlagerung. Wir wählen eine Überdeckung

$$X = \cup_{i\in I} V_i$$

des Torus durch hinreichend kleine zusammenhängende offene Teilmengen, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

a) $\pi^{-1}(V_i)$ ist die Vereinigung von paarweise disjunkgen offenen Mengen der Gestalt

$$\gamma + W_i , \gamma\in\Gamma.$$

b) Die Einschränkung π_i: $W_i \to V_i$ von π auf W_i ist ein Homöomorphismus.

c) Ist $V_i \cap V_j \ne \emptyset$, so existiert ein $v_{ij}\in V$ mit

$$\pi_j^{-1}(V_i \cap V_j) = \pi_i^{-1}(V_i \cap V_j) + v_{ij}$$

---

[34] $\gamma\in\Gamma$ operiert auf jedem Bündel durch Multiplikation mit zugehörigen Funktionen e_γ, auf einem Tensorprodukt also durch Multiplikation mit dem Produkt der zugehörigen e_γ.

Man beachte, die letzte Relation gilt dann sogar elementweise, und die v_{ij} sind eindeutig bestimmte Elemente von Γ.

Sei jetzt ein Element von $H^1(\Gamma, H^0(V, \pi^*F))$ durch den 1-Kozyklus

$$\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$$

gegeben. Wir betrachten den 1-Čech-Kozyklus

$$f = \{f_{ij}\}\ , f_{ij}\in H^0(V_i\cap V_j\ , F),$$

mit

$$f_{ij}(v) := e_{v_{ij}}(\pi_i^{-1}(v)).$$

Wegen

(*) $$e_{\gamma+\gamma'}(v) = e_\gamma(v+\gamma')e_{\gamma'}(v) \text{ für } v\in V, \gamma,\gamma'\in\Gamma.$$

erhalten wir für die ijk-Komponente des Korands von f den Wert

$$\begin{aligned}(f_{jk}f_{ik}^{-1}f_{ij})(v) &= e_{v_{jk}}(\pi_j^{-1}(v))\cdot e_{v_{ik}}(\pi_i^{-1}(v))^{-1}\cdot e_{v_{ij}}(\pi_i^{-1}(v)) \\ &= e_{v_{jk}}(\pi_j^{-1}(v))\cdot(e_{v_{ik}}(\pi_i^{-1}(v))\cdot e_{v_{ij}}(\pi_i^{-1}(v)))^{-1} \\ &= e_{v_{jk}}(\pi_j^{-1}(v))\cdot(e_{v_{ik}-v_{ij}}(\pi_i^{-1}(v)+v_{ij}))^{-1} \text{ (vgl. (*))}\end{aligned}$$

Nach Definition der u gilt

$$v_{ik}-v_{ij} = v_{ji}+v_{ik} = v_{jk}$$

$$\pi_i^{-1}(v)+u_{ij} = \pi_j^{-1}(v)$$

Der obige Ausdruck ist also identisch 1, d.h. f ist tatsächlich ein Čech-Kozyklus.

1.2.6 Das Geradenbündel zum Ĉech-Kozyklus f

Die obige Konstrukion

$$\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \mapsto f$$

definiert gerade die erwähnte Abbildung

$$\psi: H^1(\Gamma, H^0(V, \pi^*F)) \to H^1(X, F)$$

Wir wollen jetzt untersuchen in welchem Zusammenhang diese mit der in 1.2.3 und 1.2.4 konstruierten Abbildung

$$\psi: H^1(\Gamma, H^*) \to H^1(X, \mathcal{O}^*),$$

(im Fall $F = \mathcal{O}^*$) steht.

Der 1-Čech-Kozyklus f definiert im Fall $F = \mathcal{O}^*$ ein Geradenbündel L auf X, das gerade durch Verheften der trivialen Bündel

$$\mathbb{C}\times V_i \to V_i\ ,$$

indem man diese über den Durchschnittten $V_i\cap V_j$ wie folgt identifiziert.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times V_i & & \mathbb{C}\times V_j \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{C}\times(V_i\cap V_j) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}\times()V_i\cap V_j \\ (a;v) & a & (f_{ij}(v)\cdot a,v) \end{array}$$

Weiterhin definiert π_i einen Isomorphismus $\mathbb{C}\times W_i \to \mathbb{C}\times V_i$, so daß man das Bündel L auch als Bündel beschreiben kann, das durch Verheften der $\mathbb{C}\times W_i$ entsteht, indem man diese über den Durchschnitten der W_i wie folgt identifiziert.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times W_i & & \mathbb{C}\times W_j \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{C}\times\pi_i^{-1}(V_i\cap V_j) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}\times\pi_j^{-1}(V_i\cap V_j) \\ (a;v) & a & (f_{ij}(v)\cdot a,v+u_{ij}) \end{array}$$

Mit den Bezeichnungen von 1.2.3 (A) können wir schreiben

$$(f_{ij}(v)\cdot a,\ v+u_{ij}) = (e_{u_{ij}}(\pi_i^{-1}(v))\cdot a,\ v+u_{ij}) = \varphi_{u_{ij}}(a,v).$$

Die Vereinigung der $\mathbb{C}\times W_i$ ist gerade die Einschränkung von $\mathbb{C}\times V$ auf $\cup W_i$ und die Beschreibung der obigen Verheftung liefert gerade auf $\cup W_i$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}\times V$, die durch die Operation der Gruppe Γ gegeben ist. Deshalb ist das konstruierte Bündel L gerade gleich

$$L = \mathbb{C}\times V/\Gamma,$$

d.h. es ist dasselbe wie das in 1.2.3 und 1.2.4 konstruierte.

1.2.7 Die Chern-Klasse eines Geradenbündels

Sei X ein komplex analytischer Raum. Dann definiert die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{e^{2\pi i\,?}} \mathcal{O}_X^* \to 0$$

einen Zusammenhangs-Homomorphismus

$$\delta\colon H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z}).$$

Entspricht das Geradenbündel L auf X gerade der Kohomologie-Klasse

$$\lambda\in H^1(X, \mathcal{O}_X^*),$$

so heißt $\delta(\lambda)$ erste Chern-Klasse von L und wird mit

$$c_1(L) := \delta(\lambda)$$

bezeichnet.

1.2.8 Eine Beschreibung der Chern-Klasse des Bündels zu einem Multiplikatorsystem

Seien $X = V/\Gamma$ ein komplexer Torus, $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ein System von Multiplikatoren auf X und $L \to X$ das zugehörige Geradenbündel.

Die Homomorphismen

$$\psi\colon H^q(U, \mathbb{Z}) = H^q(U, H^0(V, \mathbb{Z})) \to H^q(X, \mathbb{Z})$$

von 1.2.3 und 1.2.4 (mit $F = \mathbb{Z}$) sind, wie wir in 1.3 sehen werden, wegen $H^q(V,\mathbb{Z}) = 0$ für $q > 0$ sämtlich Isomorphismen. Bezeichne

$$H := H^0(V, \mathcal{O})$$

den Ring der holomorphen Funktionen auf V. Dann hat man eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \to H \xrightarrow{e^{2\pi i\,?}} H^* \to 0$$

von abelschen Gruppen[35], auf denen Γ (durch Translationen) operiert. Die zugehörige lange Kohomologie-Sequenz liefert einen Zusammenhangshomomorphismus

$$\delta: H^1(\Gamma, H^*) \to H^2(\Gamma, \mathbb{Z}).$$

In 1.3 werden wir sehen, die Isomorphismen φ sind mit den Zusammenhangshomomorphismen verträglich, d.h. man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Gamma,H^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(\Gamma,\mathbb{Z}) \\ \varphi\downarrow\cong & & \cong\downarrow\varphi \\ H^1(X,\mathcal{O}_X^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(X,\mathbb{Z}) \end{array}$$

Man beachte, der linke Isomorphismus φ ist der in 1.2.3 und 1.2.4 konstruierte, der rechte ist der, den wir in 1.3 konstruieren werden. Damit erhalten wir die folgende Beschreibung der erstten Chern-Klasse des Bündels L zum Multiplikatorsystem $\{e_\gamma\}$:

$$c_1(L) = \varphi(\delta([\{e_\gamma\}])).$$

Bemerkung

Schreiben wir die e_γ in der Gestalt

$$e_\gamma(v) = e^{2\pi i f_\gamma(v)}$$

mit holomorphen Funktionen

$$f_\gamma : V \to \mathbb{C}.$$

Dann ist die Kohomologie-Klasse

$$\delta([\{e_\gamma\}]) \in H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$$

durch den 2-Kozyklus $F : \Gamma\times\Gamma \to \mathbb{Z}$ gegeben mit

(*) $$F(\gamma', \gamma'') = f_{\gamma''}(v + \gamma') - f_{\gamma'+\gamma''}(v) + f_{\gamma'}(v) \in \mathbb{Z}$$

gegeben. Man beachte, der erste Summand rechts steht für $\gamma' f_{\gamma''}$: da Γ auf dem Wertevorrat $\mathbb{C}$ der f_γ trivial operiert, geschieht die Operation auf den Abbildungen allein durch die auf dem Definitionbereich V der f_γ.

Um diese Aussage möglichst einfach formulieren zu können (vgl. 1.2.11) müssen wir noch einige Identifikation zwischen verschiedenen hier auftretenden Gruppen vornehmen.

1.2.9 Lemma

Wir betrachten die Antisymmetrisierungsabbildung

$$A: \mathrm{Hom}_{Ens}(\Gamma\times\Gamma, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{Ens}(\Gamma\times\Gamma, \mathbb{Z}),\ F \mapsto (\gamma',\gamma'') \mapsto (F(\gamma',\gamma'') - F(\gamma'',\gamma')).$$

Für jedes Element

---

[35] Weil V einfach zusammenhängend ist, gilt $H^1(V, \mathbb{Z}) = 0$. Die lange Homologie-Sequenz zur Exponentialsequenz liefert damit die Exaktheit rechts.

$$F\in Z^2(\Gamma, \mathbb{Z})$$

aus der Gruppe der 2-Kozyklen von Γ mit Werten in $\mathbb{Z}$ ist dann

$$A(F)$$

eine schiefsymmetrische Bilinearform $\Gamma\times\Gamma \to \mathbb{Z}$. Außerdem induziert A einen Isomorphismus

$$A: H^2(\Gamma, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(\wedge^2\Gamma, \mathbb{Z}) \cong \wedge^2\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}).$$

Weiterhin gilt

$$A(\xi\cup\eta) = \xi\wedge\eta$$

für je zwei Elemente $\xi, \eta\in\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) = H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$.

Beweis. 1.Schritt: $E := A(F)$ ist bilinear und schiefsymmetrisch für $F\in Z^2(\Gamma, \mathbb{Z})$.
Nach Voraussetzung ist F ein Kozyklus, d.h. es gilt

(1) $\quad 0 = F(\gamma_2, \gamma_3) - F(\gamma_1+\gamma_2, \gamma_3) + F(\gamma_1, \gamma_2+\gamma_3) - F(\gamma_1, \gamma_2).$

Wir schreiben diese Identität mit $\gamma_3, \gamma_1, \gamma_2$ und $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_2$ anstelle von $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ auf und erhalten:

(2) $\quad 0 = F(\gamma_1, \gamma_2) - F(\gamma_3+\gamma_1, \gamma_2) + F(\gamma_3, \gamma_1+\gamma_2) - F(\gamma_3, \gamma_1).$

(3) $\quad 0 = F(\gamma_3, \gamma_2) - F(\gamma_1+\gamma_3, \gamma_2) + F(\gamma_1, \gamma_2+\gamma_3) - F(\gamma_1, \gamma_3).$

Wir bilden (1) + (2) - (3):

$$\begin{aligned}
0 = \; & F(\gamma_2, \gamma_3) - F(\gamma_1+\gamma_2, \gamma_3) + F(\gamma_1, \gamma_2+\gamma_3) - F(\gamma_1, \gamma_2) \\
& + F(\gamma_1, \gamma_2) - F(\gamma_1+\gamma_3, \gamma_2) + F(\gamma_3, \gamma_1+\gamma_2) - F(\gamma_3, \gamma_1) \\
& - F(\gamma_3, \gamma_2) + F(\gamma_1+\gamma_3, \gamma_2) - F(\gamma_1, \gamma_2+\gamma_3) + F(\gamma_1, \gamma_3). \\
= \; & F(\gamma_2, \gamma_3) - F(\gamma_1+\gamma_2, \gamma_3) - F(\gamma_1, \gamma_2) \\
& + F(\gamma_1, \gamma_2) + F(\gamma_3, \gamma_1+\gamma_2) - F(\gamma_3, \gamma_1) \\
& - F(\gamma_3, \gamma_2) + F(\gamma_1, \gamma_3). \\
= \; & - F(\gamma_1, \gamma_2) \\
& + F(\gamma_1, \gamma_2) + E(\gamma_3, \gamma_1+\gamma_2) - E(\gamma_3, \gamma_1) \\
& - E(\gamma_3, \gamma_2) \\
= \; & E(\gamma_3, \gamma_1+\gamma_2) - E(\gamma_3, \gamma_1) - E(\gamma_3, \gamma_2).
\end{aligned}$$

Nach Definition ist E außerdem schiefsymmetrisch und damit auch linear im ersten Argument, also insgesammt eine schiefsymmetrische Bilinearform.

2. Schritt: A induziert einen Homomorphismus

(4) $$A: H^2(\Gamma, Z) \to \mathrm{Hom}(\wedge^2\Gamma, \mathbb{Z}) \cong \wedge^2\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{Z}).$$

Sei $F \in B^2(\Gamma, \mathbb{Z})$ eine Korand, d.h. $F = \delta G$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
AF(\gamma_1, \gamma_2) &= (\delta G)(\gamma_1, \gamma_2) - (\delta G)(\gamma_2, \gamma_1) \\
&= G(\gamma_2) - G(\gamma_1+\gamma_2) + G(\gamma_1) \\
&\quad - G(\gamma_1) + G(\gamma_1+\gamma_2) - G(\gamma_2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit induziert A tatsächlich den angegebenen Homomorphismus.

3. Schritt. Der Homomorphismus des 2. Schrittes ist ein Isomorphismus.
Wie bereits mehrfach erwähnt zeigen wir in 1.3, daß es im Fall eines komplexen Torus $X = V/\Gamma$ einen Isomorphismus

$$\varphi: H^*(\Gamma, \mathbb{Z}) \to H^*(X, \mathbb{Z})$$

von Kohomologie-Algebren gibt (der im Grad Null gerade $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$ in natürlicher Weise mit $H^1(X, \mathbb{Z})$ identifiziert). Wie wir gesehen haben ist $H^*(X, \mathbb{Z})$ die äußere Algebra über $H^1(X, \mathbb{Z})$. Also ist $H^*(\Gamma, \mathbb{Z})$ die äußere Algebra über $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{Z})$, d.h. jedes Element von $H^2(\Gamma, Z)$ ist eine Summe von Elementen der Gestalt

$$\xi\cup\eta \text{ mit } \xi,\eta\in H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{Z}).$$

Zum Beweis der Bijektivität von (*) reicht es zu zeigen, nach Identifikation von

$$H^*(\Gamma, \mathbb{Z}) \text{ mit } \wedge^*\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{Z})$$

entspricht (4) gerade der Komponente des Grades 2 der identischen Abbildung. Es reicht also zu zeigen[36],

$$A(\xi\cup\eta) = \xi\wedge\eta.$$

Mit anderen Worten, es reicht, den letzten Teil der Behauptung zu beweisen.

4. Schritt: Abschluß des Beweises.

Seien $\xi,\eta\in H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{Z})$. Dann ist $\xi\cup\eta$ durch den Kozyklus c mit

$$c(\gamma',\gamma'') = \xi(\gamma')\eta(\gamma'')$$

gegeben (vgl. Godement: Theorie de faisceaux oder Cassels & Fröhlich: Algebraic Number Theory). Es gilt also

$$A(\xi\cup\eta)(\gamma',\gamma'') = \xi(\gamma')\eta(\gamma'') - \xi(\gamma'')\eta(\gamma') = (\xi\wedge\eta)(\gamma',\gamma'').$$

QED.

1.2.10 Bemerkungen

(i) Wir haben damit einen Isomorphismus

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \xleftarrow[\cong]{\psi} H^2(\Gamma, \mathbb{Z}) \xrightarrow[\cong]{A} \wedge^2 \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$$

konstruiert. Er stimmt überein mit dem in 1.1 konstruierten Isomorphismus

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \xleftarrow{\cong} \wedge^2 \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$$

(mit Hilfe der Multiplikation in der Kohomologiegruppe $H^*(X, \mathbb{Z})$ und mit Hilfe des Isomorphismus $H^1(X, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$). Denn ψ respektiert die Multiplikation und A überführt die Multiplikation im Kohomologie-Ring in die äußere Multiplikation.

(ii) Außerdem ist

$$\psi: H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathbb{Z})$$

gerade invers zum Isomorphismus von 1.1. Das kann man leicht mit Hilfe der Natürlichkeit von ψ nachprüfen.

(iii) Im folgenden können wir deshalb die $H^q(X, \mathbb{Z})$ mit $\wedge^q\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$ identifizieren, ohne jedesmal die Verträglichkeit der verwendeten Isomorphismen überprüfen zu müssen.

1.2.11 Proposition: Die Chern-Klasse des Bündels zu einem Multiplikatorsystem

Seien $X = V/\Gamma$ ein komplexer Torus,

$$\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \in Z^1(\Gamma, H^*), H^* := H^0(X, \mathcal{O}^*),$$

ein Multiplikatorsystem auf X und

$$L \to X$$

das zugehörige Geradenbündel. Dann ist die erste Chern-Klasse

---

[36] Als Element der äußeren Algebra über $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{Z})$ entspricht $\xi\cup\eta$ gerade dem äußeren Produkt von ξ und η.

$$E = c_1(L) = H^2(X, \mathbb{Z}) = \wedge^2\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$$
gerade die alternierenden Bilinearform
$$E: \Gamma\times\Gamma \to \mathbb{Z}.$$
mit
(**) $$E(\gamma',\gamma'') := f_{\gamma''}(v + \gamma') - f_{\gamma'}(v + \gamma'') + f_{\gamma'}(v) - f_{\gamma''}(v) \ , v \in V,$$
wobei die f_γ gegeben sind durch
$$e_\gamma(v) = e^{2\pi i f_\gamma(v)}$$
Beweis. Die Aussagen ergeben sich aus den vorangehenden Bemerkungen und Sätzen. Die Formel für E erhält man aus der Formel
(*) $$F(\gamma', \gamma'') = f_{\gamma''}(v + u') - f_{\gamma'+\gamma''}(v) + f_{\gamma'}(v) \in \mathbb{Z}$$
der Bemerkung von 1.2.8 durch Antisymmetrisierung.
QED.

1.2.12 Folgerung
Seien $X = V/\Gamma$ ein komplexer Torus und
$$E: \Gamma\times\Gamma \to \mathbb{Z}.$$
die erste Chern-Klasse eines holomorphen Geradenbündels auf X. Dann gilt für die $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung
$$V\times V \to \mathbb{R}$$
von E, die wir ebenfalls mit E bezeichnen wollen,
$$E(iv', iv'') = E(v', v'') \ , v',v'' \in V.$$
Beweis. Die Bilinearform E repräsentiert ein Element aus dem Bild von
$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}).$$
Die von E repräsentierte Kohomologie-Klasse hat also das Bild Null bei
$$H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X).$$
Letztere Abbildung faktorisiert sich aber wie folgt:
$$H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} H^2(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{j} H^2(X, \mathcal{O}_X).$$
Dabei ist i die $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung
$$i: \wedge^2\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) \to \wedge^2\mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}) = \wedge^2 T \oplus (T\otimes\overline{T}) \oplus \wedge^2\overline{T}$$
und j ist die Projektion
$$\wedge^2 T \oplus (T\otimes\overline{T}) \oplus \wedge^2\overline{T} \to \wedge^2\overline{T}$$
auf den letzen direkten Summanden. Wir bezeichnen i(E) wieder mit E und schreiben
$$E = E_1 + E_2 + E_3 \text{ mit } E_1\in\wedge^2 T, E_2 \in T\otimes\overline{T}, E_3 \in \wedge^2\overline{T},$$
Weil E reell ist, folgt
$$E_1 = \overline{E}_3.$$
Wegen $j(E) = 0$ gilt $E_3 = 0$, also $E_1 = 0$, also
$$E = E_2.$$
Da die Funktionen von T linear sind über $\mathbb{C}$ und die von $\overline{T}$ anti-linear sind, genügen aber die von $T\otimes\overline{T}$ gerade der für E behaupteten Bedingung (wegen $i(-i) = 1$).
QED.
Bemerkungen

(i) Wie bereits ausgeführt besteht unser Ziel in einer möglichst expliziten Beschreibung aller Geradenbündel auf einem komplexen Torus. Mit anderen Worten, wir wollen die Kozyklen $\{e_\gamma\}$ der einfachsten Art finden, die sämtliche Kohomologie-Klassen von

$$H^1(U, H^*)$$

repräsentieren. Das wiederum ist äquivalent zur Bestimmung aller $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, welche der Bedingung (*) von 1.2.8 genügen.

(ii) Wir gehen deshalb jetzt von einer festgewählten alternierenden Bilinearform

$$E: \Gamma\times\Gamma \to \mathbb{Z}$$

aus mit

$$E(iv', iv'') = E(v', v'')$$

und versuchen alle Familien $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ holomorpher Funktionen zu bestimmen, die den Bedingungen (*) von 1.2.8 und (**) von 1.2.11 genügen (welche nicht notwendig Null sind im Ursprung). Dabei verwenden wir das folgende einfache Lemma.

1.2.13 Lemma

Sei V ein komplexer Vektorraum. Dann gibt es eine 1-1-Korrespondenz

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Hermitische Formen}\\ H:V\to\mathbb{C}\\ \text{auf } V\end{array}\right\} \rightleftarrows \left\{\begin{array}{c}\text{Schiefsymmetrische}\\ \mathbb{R}\text{-lineare Formen}\\ E:V\to\mathbb{R}\\ \text{mit } E(ix,iy)=E(x,y)\end{array}\right\}$$

mit

$$E(x,y) = \operatorname{Im} H(x,y)$$
$$H(x,y) = E(ix,y) + iE(x,y).$$

Beweis: einfach.
QED.

1.2.14 Bestimmung aller $\{f_\gamma\}$ zu gegebenen E mit $f_\gamma(v)$ linear für jedes γ, so daß (**) gilt

Sei $E: V\times V \to \mathbb{R}$ eine schiefsymmetrische Bilinearform mit $E(ix, iy) = E(x,y)$. Dann sind die Systeme linearer Funktionen

$$f_\gamma : V \to \mathbb{C},$$

mit

(**) $$E(\gamma',\gamma'') := f_{\gamma''}(v + \gamma') - f_{\gamma'}(v + \gamma'') + f_{\gamma'}(v) - f_{\gamma''}(v)$$

für beliebige $v \in V'$, γ, $\gamma''\in\Gamma$ gerade die Systeme der folgenden Gestalt.

$$f_\gamma(v) := \frac{1}{2i} H(v, \gamma) + \beta_\gamma + s(v, \gamma),$$

mit beliebig gewählten Konstanten $\beta_\gamma\in\mathbb{C}$, und einer beliebigen symmetrischen Bilinearform

$$s: V \times V \to \mathbb{C}.$$

Beweis. Die angegebenen $f_\gamma(v)$ sind jedenfalls Lösungen von (**):

$$f_{\gamma''}(v + \gamma') - f_{\gamma'}(v + \gamma'') + f_{\gamma'}(v) - f_{\gamma''}(v) =$$

$$\frac{1}{2i} H(v+ \gamma', \gamma'') + \beta_{\gamma''} + s(v+ \gamma', \gamma'')$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{2i} H(v+\gamma'', \gamma') - \beta_{\gamma'} - s(v+\gamma'', \gamma') \\
&+ \frac{1}{2i} H(v, \gamma') + \beta_{\gamma'} + s(v, \gamma') \\
&- \frac{1}{2i} H(v, \gamma'') + \beta_{\gamma''} - s(v, \gamma'')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i} H(\gamma', \gamma'') - \frac{1}{2i} H(\gamma'', \gamma') \\
&= \mathrm{Im}\, H(\gamma', \gamma'') \\
&= E(\gamma', \gamma'')
\end{aligned}
$$

Umgekehrt erhält man auf diese Weise alle $\mathbb{C}$-linearen Lösungen von (**): es reicht zu zeigen:

$$0 = f_{\gamma''}(v + \gamma') - f_{\gamma'}(v + \gamma'') + f_{\gamma'}(v) - f_{\gamma''}(v)$$

hat als lineare Lösungen nur die symmetrischen Bilinearformen. Aus den äquivalenten Bedingungen

(1) $\quad 0 = f_{\gamma''}(\gamma') - f_{\gamma'}(\gamma'')$

liest man ab, die Abbildung

$$\Gamma \times V \to \mathbb{C},\ (\gamma, v) \mapsto f_\gamma(v),$$

ist additiv im ersten Argument und symmetrisch in den beiden Argumenten. Sie setzt sich also auf genau eine Weise fort zu einer symmetrischen $\mathbb{R}$-Bilinearform

$$V \times V \to \mathbb{C}.$$

Da sie sogar $\mathbb{C}$-linear ist im zweiten Argument, ist sie es in beiden.
QED.

1.2.15 Vereinbarung

Wir wählen im folgenden zu gegebenen E solche f, für die die Bilinearform s identisch Null ist, d.h. wir nehmen an,

$$s = 0.$$

1.2.16 Bestimmung aller $\{f_\gamma\}$ zu gegebenen E mit $f_\gamma(v)$ linear für jedes γ, so daß (**) und (*) gilt

Wir setzen die in 1.2.14 gewonnene Formel

$$f_\gamma(v) := \frac{1}{2i} H(v, \gamma) + \beta_\gamma$$

(mit s = 0) in Bedingung (*) von 1.2.8 ein und erhalten

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z} \ni \quad F(\gamma', \gamma'') &= f_{\gamma''}(v + \gamma') - f_{\gamma'+\gamma''}(v) + f_{\gamma'}(v) \\
&= \frac{1}{2i} H(v + \gamma', \gamma'') + \beta_{\gamma''} \\
&\qquad - \frac{1}{2i} H(v, \gamma'+\gamma'') - \beta_{\gamma'+\gamma''} \\
&\qquad + \frac{1}{2i} H(v, \gamma') + \beta_{\gamma'} \\
&= \frac{1}{2i} (H(v, \gamma'') + H(\gamma', \gamma'') - H(v, \gamma') - H(v, \gamma'') + H(v, \gamma')) \\
&\qquad + \beta_{\gamma''} - \beta_{\gamma'+\gamma''} + \beta_{\gamma'} \\
&= \frac{1}{2i} H(\gamma', \gamma'') + \beta_{\gamma''} - \beta_{\gamma'+\gamma''} + \beta_{\gamma'}
\end{aligned}
$$

d.h.

$$\frac{1}{2} H(\gamma', \gamma'') + i\beta_{\gamma''} + i\beta_{\gamma'} - i\beta_{\gamma'+\gamma''} \in i\mathbb{Z}.$$

Wir führen neue Konstanten $\delta_\gamma \in \mathbb{C}$ ein mit $i\beta_\gamma = \delta_\gamma + \frac{1}{4} H(\gamma, \gamma)$ und erhalten

$$i\mathbb{Z} \ni \frac{1}{2} H(\gamma', \gamma'') + \delta_{\gamma''} + \frac{i}{4} H(\gamma'', \gamma'') + \delta_{\gamma'} + \frac{i}{4} H(\gamma', \gamma')$$
$$- \delta_{\gamma'+\gamma''} - \frac{i}{4} H(\gamma'+\gamma'', \gamma'+\gamma'')$$
$$= \frac{i}{2} \operatorname{Im} H(\gamma', \gamma'') + \delta_{\gamma''} + \delta_{\gamma'} - \delta_{\gamma'+\gamma''},$$

d.h.

$$\frac{i}{2} E(\gamma', \gamma'') + \delta_{\gamma''} + \delta_{\gamma'} - \delta_{\gamma'+\gamma''} \in i\mathbb{Z}.$$

Diese Bedingung bedeutet insbesondere, daß der Realteil der Funktion

$$\Gamma \to \mathbb{C}, \gamma \mapsto \delta_\gamma$$

additiv ist. Wir können diesen Realteilteil somit zu einer $\mathbb{R}$-Linearform

$$\lambda: V \to \mathbb{R}$$

fortsetzen.

Von den if_γ kann man nun den Korand einer beliebigen $\mathbb{C}$-Linearform $L: V \to \mathbb{C}$ abziehen,

$$if_\gamma(v) \mapsto if_\gamma(v) - L(\gamma),$$

ohne daß sich das Geradenbündel zum 1-Kozyklus der $e_\gamma(v) = e^{2\pi i f_\gamma(v)}$ ändert. Dabei wird $i\beta_\gamma$ durch $i\beta_\gamma - L(\gamma)$ ersetzt und δ_γ durch $\delta_\gamma - L(\gamma)$. Insbesondere können wir für L die die eindeutig bestimmte $\mathbb{C}$-Linearform wählen, deren Realteil gerade λ ist (d.h. $L(v) := \lambda(v) - i\lambda(iv)$). Indem wir diese Substitution durchführen, erreichen wir, daß die δ_γ rein imaginär werden. Mit

$$\alpha(\gamma) = e^{2\pi\delta_\gamma}$$

gilt

$$|\alpha(\gamma)| = 1$$
$$\frac{\alpha(\gamma'+\gamma'')}{\alpha(\gamma')\alpha(\gamma'')} = e^{i\pi E(\gamma',\gamma'')}$$

Bemerkung

Man kann zeigen, für jede hermitische Form $H: V \times V \to \mathbb{C}$ mit dem Imaginärteil E,, für welche $E(\Gamma\times\Gamma) \subseteq \mathbb{Z}$ gilt, gibt es eine solche Abbildung $\alpha:\Gamma\to\mathbb{R}$ (d.h. es gibt eine Abbildung $\delta': \Gamma \to \mathbb{R}$ mit $\delta'(\gamma'+\gamma'') - \delta'(\gamma') - \delta'(\gamma'') \equiv \frac{1}{2} E(\gamma', \gamma'') \bmod \mathbb{Z}$)[37]. Wir haben hier gezeigt, daß dann E gerade die Chern-Klasse des zum entsprechenden 1-Kozyklus gehörigen Geradenbündels ist. Wir formulieren diese Aussage zusammenfassend als Lemma:

---

[37] Modulo $\mathbb{Z}$ ist $\frac{1}{2} E(\gamma', \gamma'')$ eine symmetrische Bilinearform $\Gamma\times\Gamma \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, kann also durch eine symmetrische Matrix beschrieben wirden. Man definiere δ' als zugehörige quadratische Form zu dieser symmetrische Matrix. Die Polarisierung $\delta'(\gamma'+\gamma'') - \delta'(\gamma') - \delta'(\gamma'')$ ist dann die symmetrische Bilinearform selbst.

1.2.16 Lemma
Seien $X = V/\Gamma$ ein komplexer Torus,
$$H: V \times V \to \mathbb{C}$$
eine hermitische Form mit dem Imaginarteil $E = \mathrm{Im}\, H$, für welche
$$E(\Gamma\times\Gamma) \subseteq \mathbb{Z}$$
gilt. Dann gibt es eine Abbildung
$$\alpha: \Gamma \to \mathbb{C}_1^* := \{z\in\mathbb{C} : |z| = 1\}$$
mit
$$\alpha(\gamma'+\gamma'') = e^{i\pi E(\gamma',\gamma'')}\alpha(\gamma')\alpha(\gamma'') \text{ für } \gamma', \gamma''\in\Gamma.$$
Die Familie der $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ mit
$$e_\gamma(v) = \alpha(\gamma)e^{\pi H(v,\gamma)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)} \text{ für } v\in V$$
ist dann ein 1-Kozyklus auf Γ mit Koeffizienten in $H^* = H^0(X, \mathcal{O}_X^*)$. Die erste Chern-Klasse des zugehörigen Geradenbündels ist gerade gleich
$$E \in H^2(X, \mathbb{Z}) = \wedge^2\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}).$$
Beweis. s.o.
QED.

1.2.17 Definition: die Geradenbündel L(H, α)
Seien $X = V/\Gamma$ ein komplexer Torus,
$$H: V \times V \to \mathbb{C}$$
eine hermitische Form, für deren Imaginärteil $E = \mathrm{Im}\, H$ gilt
$E(\Gamma\times\Gamma) \subseteq \mathbb{Z}$, und
$$\alpha: \Gamma \to \mathbb{C}_1^*$$
eine Abbildung mit

(1) $$\alpha(\gamma'+\gamma'') = e^{i\pi E(\gamma',\gamma'')}\alpha(\gamma')\alpha(\gamma'') \text{ für } \gamma', \gamma''\in\Gamma.$$

Dann bezeichne

(2) $$L(H, \alpha) = \mathbb{C}\times V/\Gamma$$

das holomorphe Geradenbündel auf X bezüglich der folgenden Gruppenoperation von Γ auf dem trivialen Bündel $\mathbb{C}\times V$.
$$\Gamma\times\mathbb{C}\times V \to \mathbb{C}\times V, (\gamma, z, v) \mapsto (\alpha(\gamma)e^{\pi H(v,\gamma)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}z, v + \gamma).$$
Bemerkungen

(i) In 1.2.16 haben wir gesehen, aus Bedingung (1) folgt, daß die
$$e_\gamma(v) = \alpha(\gamma)e^{\pi H(v,\gamma)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)} \text{ für } v\in V$$
einen 1-Kozyklus auf Γ mit Werten in $H^*:= H^0(X, \mathcal{O}_X^*)$ bilden. Deshalt ist durch (2) tatsächlich ein holomorphes Geradenbündel auf X definiert.

(ii) Die hermitischen Bilinearformen H mit $E(\Gamma\times\Gamma) \subseteq \mathbb{Z}$ bilden offensichtlich eine additive Gruppe. Aus (1) liest man ab, daß auch die Paare
$$(H, \alpha)$$
eine Gruppe bilden mit der Gruppenoperation

(3) $$(H', \alpha') + (H'', \alpha'') = (H'+H'', \alpha'\alpha'').$$

(iii) Das Geradenbündel zum Paar (3) ist gerade das Bündel zum Multiplikatorsystem $\{e'_\gamma e''_\gamma\}$, wenn $\{e'_\gamma\}$ und $\{e''_\gamma\}$ die Multiplikatorsysteme zu den Bündeln L(H', α') und L(H", α") sind. Mit anderen Worten, es gilt

$$L(H', \alpha')\otimes L(H'', \alpha'') \cong L(H'+H'', \alpha'\alpha''),$$

d.h. die Abbildung

μ:{Gruppe der (H, α)} $\to H^1(X, \mathcal{O}^*)$, $(H, \alpha) \mapsto$ Isomorphieklasse von $L(H, \alpha)$,

ist ein Gruppenhomomorphismus.

1.2.18 Satz von Appell

Sei $X = V/\Gamma$ ein komplexer Torus. Dann ist jedes holomorphe Geradenbündel auf X isomorph zu einem Bündel der Gestalt

$$L(H, \alpha)$$

mit eindeutig bestimmten H und α, welche den in 1.2.17 gegebenen Bedingungen genügen.

Genauer, es gibt ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen, dessen vertikale Pfeile Isomorphismen bezeichnen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}(\Gamma;\mathbb{C}^*_1) & \to & \left\{\begin{array}{c}\text{Gruppe der}\\ \text{Paare }(H,\alpha)\end{array}\right\} & \to & \left\{\begin{array}{c}\text{Gruppe der hermitischen}\\ \text{Formen H mit}\\ (\mathrm{Im})(\Gamma\times\Gamma)\subseteq\mathbb{Z}\end{array}\right\} & \to 0\\
 & \cong\downarrow\lambda & & \cong\downarrow\mu & & \cong\downarrow\nu & \\
0 \to & \mathrm{Pic}^0 X & \to & \mathrm{Pic}\, X & \xrightarrow{c_1} & \mathrm{Ker}(H^2(X,\mathbb{Z})\to H^2(X,\mathcal{O})) & \to 0
\end{array}$$

Dabei bezeichne

$$\mathrm{Pic}\, X := H^1(X, \mathcal{O}^*)$$

die Gruppe der Isomorphie-Klassen der holomorphen Geradenbündel auf X,

$$\mathrm{Pic}^0 X := \mathrm{Ker}(c_1: H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^2(X, \mathbb{Z}))$$

die Untergruppe der holomorphen Geradenbündel, welche topologisch trivial sind[38],

$$\nu: \left\{\begin{array}{c}\text{Gruppe der hermitischen}\\ \text{Formen H mit}\\ (\mathrm{Im}\, H)(\Gamma\times\Gamma)\subseteq\mathbb{Z}\end{array}\right\} \to \mathrm{Ker}(H^2(X,\mathbb{Z})\to H^2(X,\mathcal{O}))$$

ist gerade die in 1.2.11 beschriebene Identifikation

$$H \mapsto \mathrm{Im}\, H$$

der Chern-Klassen mit den alternierenden Bilinearformen $E: \Gamma\times\Gamma\to\mathbb{Z}$ mit $E(ix,iy) = E(x,y)$, wobei $H^2(X, \mathbb{Z})$ mit den alternierenden Bilinearformen $\Gamma\times\Gamma\to\mathbb{Z}$ identifiziert wird. Die Abbildung μ ist der in 1.2.17 konstruierte Homomorphismus

$$(H, \alpha) \mapsto L(H, \alpha),$$

(und λ ist dessen Einschränkung).

Beweis. 1. Schritt: ν ist ein Isomorphismus.

Wir haben bereits gezeigt, eine alternierende Bilinearform

$$E: \Gamma\times\Gamma \to \mathbb{Z},$$

aufgefaßt als Element von

$$H^2(X,\mathbb{Z}) = \wedge^2\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$$

liegt genau dann im Kern der Abbildung $H^2(X,\mathbb{Z})\to H^2(X,\mathcal{O})$, wenn für die Fortsetzung von E auf V gilt

---

[38] Die Isomorphie-Klasse eines topologischen Geradenbündels ist durch dessen Chern-Klasse festgelegt (denn die stetigen Funktionen bilden eines feine Garbe - stetige Funktionen kann man mit glatten Funktionen multiplizieren).

$$E(ix, iy) = E(x,y) \text{ für alle } x,y \in V$$
(vgl.1.2.12). Diese Bedingung bedeutet aber gerade, daß E von der Gestalt
$$E = \mathrm{Im}\, H$$
ist, d.h. im Bild von ν liegt. Also ist ν surjektiv. Die Injektivität folgt aus Lemma 1.2.13.
2. Schritt. Exaktheit der beiden Zeilen.
Die Exaktheit der unteren Zeile ergibt sich aus der der langen Kohomologie-Sequenz zur Exponentialsequenz auf X.
Die Exaktheit der oberen Zeile ergibt sich aus deren Definition und der Aussage von Lemma 1.2.16, daß es zu jedem H ein α gibt (also auch zu H = 0).
3. Schritt. λ ist ein Isomorphismus.

Zunächst beachte man, λ ist wohldefiniert, d.h. bildet $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}_1^*)$ in ein Element von $\mathrm{Pic}^0 X$ ab, weil das rechte Viereck des Diagramms kommutativ ist (vgl. 1.2.8). Sei jetzt
$$\alpha \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}_1^*)$$
aus dem Kern von λ. Dann ist das Geradenbündel
$$L(0, \alpha)$$
trivial, d.h. der durch α definierte Čech-Kozyklus ist ein Korand: es gibt eine Funktion
$$g \in H^0(V, \mathcal{O}^*)$$
mit
$$\alpha(\gamma) = \frac{g(v+\gamma)}{g(v)} \text{ für } v \in V. \tag{1}$$
Wir wählen eine kompakte Teilmenge
$$K \subset V$$
mit
$$K + \Gamma = V$$
(zum Beispiel einen Fundamentalbereich, eine "Gittermasche"). Wegen (1) und $|\alpha(\gamma)| = 1$ für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt dann
$$|g(v)| \le \sup_K |g|$$
für jedes $v \in V$. Als beschränkte holomorphe Funktion auf V ist g dann aber konstant. Nach (1) ist damit
$$\alpha(\gamma) = 1 \text{ für jedes } \gamma \in \Gamma,$$
d.h. α ist das neutrale Element der Gruppe $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}_1^*)$. Wir haben gezeigt, λ ist injektiv.
Beweisen wir die Surjektivität von λ. Dazu betrachten wir das folgende kommutative Diagramm
$$\begin{array}{ccccc}
H^1(\Gamma,\mathbb{C}) & \to & H^1(\Gamma,H) & \xrightarrow{e^{2\pi i ?}} & \mathrm{Ker}(H^1(\Gamma,H^*)\to H^2(\Gamma,\mathbb{Z})) \\
\cong\downarrow\psi & & \cong\downarrow\psi & & \cong\downarrow \\
H^1(X,\mathbb{C}) & \to & H^1(X,\mathcal{O}) & \xrightarrow{e^{2\pi i ?}} & \mathrm{Ker}(H^1(X,\mathcal{O}^*)\to H^2(X,\mathbb{Z}))=\mathrm{Pic}^0 X
\end{array}$$
Die vertikalen Pfeile bezeichnen Isomorphismen[39]. Die durch die Exponential-Funktion definierten horizontalen Abbildungen sind surjektiv[40]. Nach Folgerung 1.1.17 ist die Abbildung

---

[39] Die ersten beiden sind gerade die Isomorphismen ψ zu den Garben $\mathbb{C}$ und $\mathcal{O}$ auf X, denn es ist $H^q(V, \pi^*F) = 0$ für alle $q > 0$ und $F = \mathbb{C}$ bzw. $\mathcal{O}$. Sie sind Teil eines Morphismus von langen exakten Sequenzen, bei dem zwei von drei Morphismen Isomorphismen sind, so daß nach dem Fünfer-Lemma alle Morphismen Isomorphismen sind. Der rechte Morphismus unseres Diagramms ist gerade die Einschränkung eines solchem dritten Morphimus auf die Kerne der exakten Sequenzen.

$$\beta: H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathbb{O})$$
surjektiv. Deshalb besitzt jedes Geradenbündel
$$L \in \mathrm{Pic}^0 X$$
ein Urbild in der linken oberen Gruppe, sagen wir
$$[f] \in H^1(\Gamma, \mathbb{C})$$
mit einem Homomorphismus[41]
$$f: \Gamma \to \mathbb{C}.$$
Wir betrachten das Bild
$$\alpha = e^{2\pi i f}$$
von f als 1-Kozyklus mit Koeffizienten in H*. Das zugehörige Geradenbündel ist gerade
$$L \cong \mathbb{C}\times V/\Gamma$$
bezüglich der Gruppen-Operation
$$\Gamma\times\mathbb{C}\times V \to \mathbb{C}\times V, (\gamma, z, v) \mapsto (\alpha(\gamma)z, v+\gamma).$$
Wir haben zu zeigen, α läßt zu einem Homomorphismus
$$\alpha: \Gamma \to \mathbb{C}_1^*$$
abändern, ohne daß sich die Isomorphie-Klasse des zugehörigen Geradenbündels ändert. Da wir f um den Rand eines 0-Kozyklus abändern können,
$$f(\gamma) \mapsto f(\gamma) - L(\gamma)$$
mit einer $\mathbb{C}$-Linearform (siehe 1.2.16), können wir erreichen, daß die f reellwertige Funktionen sind, d.h. für die α können wir tatsächlich erreichen, daß ihre Werte auf dem Einheitskreis liegen.

<u>4. Schritt</u>. μ ist ein Isomorphismus.
Folgt aus der Bijektivität von λ und ν und dem Fünfer-Lemma.
QED.

1.3 Ergänzungen

1.3.1 Die Situation

Wir haben vor, das Verhalten der Garben-Kohomologie in der folgenden Situation zu untersuchen. Seien

X ein "guter"[42] topologischer Raum

und

G eine diskrete Gruppe,

die auf X frei und diskret operiert,
$$G\times X \to X.$$
Das soll bedeuten,

für jedes $x\in X$ gibt es eine Umgebung $U_x \subseteq X$ von x mit $U_x \cap g(U_x) = \emptyset$ für jedes $g\in G - \{e\}$. Wir setzen

Y := X/G

und bezeichnen mit
$$\pi: X \to Y$$
die natürliche Abbildung. Das von uns im vorangehenden Abschnitt 1.2 verwendete Ergebnis läßt sich dann wie folgt formulieren.

---

[40] Das folgt aus der Exaktheit der langen Kohomologie-Sequenzen zur Exponentialsequenz bzgl. der Gruppen-Kohomologie im oberen Fall und bzgl. der Garbenkohomologie im unteren.

[41] f ist ein 1-Kozyklus, d.h. es gilt $0 = (\delta f)(\gamma',\gamma'') = f(\gamma'') - f(\gamma'+\gamma'') + f(\gamma')$, d.h. f ist ein Gruppen-Homomorphismus.

[42] X sei wegeweise zusammnenbängend und parakompakt.

1.3.2 Die Existenz der natülichen Transformation ψ

Für jede Garbe F abelscher Gruppen auf Y gibt es einen natürlichen Homomorphismus

$$\psi: H^p(G, H^0(X, \pi^*F)) \to H^p(Y, F)$$

mit folgenden Eigenschaften.

(a) Sei

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz abelscher Garben auf Y mit der Eigenschaft, daß auch

$$0 \to H^0(X, \pi^*F') \to H^0(X, \pi^*F) \to H^0(X, \pi^*F'') \to 0$$

exakt ist. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm von Kohomologie-Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc}
..\to H^p(G,H^0(X,\pi^*F')) & \to & H^p(G,H^0(X,\pi^*F)) & \to & H^p(G,H^0(X,\pi^*F'')) & \to & H^{p+1}(G,H^0(X,\pi^*F')) & \to \\
\downarrow\psi & & \downarrow\psi & & \downarrow\psi & & \downarrow\psi & \\
...\to H^p(Y,F') & \to & H^p(Y,F) & \to & H^p(Y,F'') & \to & H^{p+1}(Y,F') &
\end{array}$$

(b) Die Abbildungen ψ kommutieren mit dem ∪-Produkt.

(c) Ist $H^q(G, \pi^*F) = 0$ für jedes q>0, so ist

$$\psi: H^p(G, H^0(X, \pi^*F)) \to H^p(Y, F)$$

ein Isomorphismus.

1.3.3 Konstruktion von ψ

Zur Konstruktion von ψ wählen wir eine offene Überdeckung

$$Y = \cup_{i\in I} V_i$$

durch offene Mengen mit:

(i) Für jedes i∈I gilt

$$\pi^{-1}(V_i) = \cup_{g\in G}\, g(U_i)$$

mit einer offenen Menge $U_i \subseteq X$, für welche die Einschränkung $U_i \to V_i$ von $\pi: X\to Y$ auf U_i ein Homöomorphismus ist.

(ii) Für je zwei i,j∈I gibt es höchstens ein Element g∈G mit $U_i \cap g(U_j) \ne \emptyset$. Falls das Element existiert, bezeichnen wir es mit

$$g_{ij}.$$

Wir definieren jetzt einen Homomorphismus

$$\psi_p: C^p(G, H^0(X, \pi^*F)) \to \check{C}^p(\{V_i\}, F)$$

von der Gruppe der Gruppen-p-Koketten in die Gruppe der Čech-p-Koketten bezüglich der gegebenen Überdeckung. Für jede Gruppen-p-Kokette

$$f \in C^p(G, H^0(X, \pi^*F)) = \mathrm{Hom}(G^p, H^0(X, \pi^*F))$$

setzen wir

$$(\psi_p f)_{i_0 \dots i_p} = \mathrm{res}\circ(\pi^*)^{-1}_{i_0}[f(g_{i_0 i_1}, g_{i_1 i_2}, \dots, g_{i_{p-1} i_p})]$$

Dabei bezeichne für i∈I die Abbildung $(\pi^*)^{-1}_i$ die Komposition

$$H^0(X, \pi^*F) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^0(U_i, \pi^*F) \xleftarrow[\pi^*]{\cong} H^0(V_i, F)$$

aus der Garben-Restriktion res auf U_i und dem Inversen des durch den Homöomorphismus $U_i \to V_i$ induzierten Isomorphismus der globalen Schnitt von $F|_{V_i}$

mit den globalen Schnitten von $(\pi^*F)|_{U_i}$. Die andere Abbildung res sei die Garben-Restriktion auf $U_{i_0} \cap ... \cap U_{i_p}$.

Es ist leicht zu sehen, daß die so definierten Abbildungen ψ_p mit den Korand-Operatoren verträglich sind, d.h.

$$\delta\psi_p = \psi_{p+1}\delta.$$

Wir erhalten damit Gruppen-Homomorphismen

$$\psi: H^p(G, H^0(X, \pi^*F)) \to H^p(Y, F).$$

1.3.4 Beweis von 1.3.2

Die Eigenschaften (a) und (b) zeigt man durch direktes Nachrechnen. Eigenschaft (c) beweisen wir durch Induktion nach p.

Der Fall $p = 0$.

Im Fall $p = 0$ besagt die Behauptung gerade, die natürliche Abbildung

$$H^0(X, \pi^*F)^G \to H^0(Y, F)$$

ist ein Isomorphismus. Ist F zum Beispiel die Garbe der stetigen Funktionen auf Y, d.h. π^*F ist die Garbe der stetigen Funktionen auf X,[43] so bedeutet dies, eine stetige Funktion auf X kommt genau dann von einer stetigen Funktion auf Y, wenn sie invariant bei der Operation von G ist. Für die Garbe der stetigen Funktionen ist die Behauptung also richtig[44]. Der allgemeine Fall ergibt sich aus dem eben betrachteten Spezialfall, denn zu jeder Garbe F auf Y gibt es eine stetige Abbildung

$$e: Y' \to Y$$

derart, daß man F mit der Garbe der stetigen Schnitte identifizieren kann. Das inverse Bild π^*F identifiziert sich dann gerade mit der Garbe der Schnitte von

$$X\times_Y Y' \to X$$

und die Behauptung ergibt sich aus dieser Interpretation nach derselben Argumentation.

$$\begin{array}{ccc} X\times_Y Y' & \to & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array}$$

Der Fall $p > 0$ (Induktionsschritt).

Sei F eine abelsche Garbe auf Y mit

(1) $$H^q(X, \pi^*F) = 0 \text{ für jedes } q > 0.$$

Wir betten F in eine injektive Garbe F' ein und erhalten eine kurze exakte Sequenz

(2) $$0 \to F \to F' \to F'' \to 0 \text{ mit } F' \text{ injektiv.}$$

Da π ein lokaler Homöomorphismus ist, ist dann auch

$$0 \to \pi^*F \to \pi^*F' \to \pi^*F'' \to 0$$

eine exakte Sequenz und damit auch

$$0 \to H^0(X, \pi^*F) \to H^0(X, \pi^*F') \to H^0(X, \pi^*F'') \to H^1(X, \pi^*F).$$

Die Gruppe rechts ist nach (1) gleich Null, d.h. wir erhalten wieder eine kurze exakte Sequenz und damit nach Eigenschaft (a) folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen.

---

[43] Das gilt zunächst lokal, weil $\pi:X \to Y$ ein lokaler Homöomorphismus ist, also gilt das auch global (da eine Garbe durch ihre Halme festgelegt ist).

[44] Lokal kann man jede stetige Funktion auf X zu einer stetigen Funktion auf Y verpflanzen. Wenn die Ausgangsfunktion G-invariant ist, sind alle so entstehenden lokalen Verpflanzungen verträglich und verkleben sich zu einer global definierten Funktion auf Y.

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{p-1}(G,H^0(\pi^*F')) & \to & H^{p-1}(G,H^0(\pi^*F'')) & \to & H^p(G,H^0(\pi^*F)) & \to & H^p(G,H^0(\pi^*F')) \\
\psi_1\downarrow & & \psi_2\downarrow & & \psi_3\downarrow & & \downarrow \\
H^{p-1}(Y,F') & \to & H^{p-1}(Y,F'') & \to & H^p(Y,F) & \to & H^p(Y,F')=0
\end{array}$$

Die Gruppe rechts unten ist Null, weil F' injektiv ist. Wir haben zu zeigen, ψ_3 ist ein Isomorphismus. Dazu reicht es zu zeigen,

(3) $H^0(\pi^*F')$ ist ein injektiver G-Modul.

(4) $H^q(X, \pi^*F') = 0$ für $q > 0$.

Denn dann ist auch die rechte obere Gruppe Null (nach (3)) und es reicht nach dem Fünfer-Lemma zu zeigen, daß ψ_1 und ψ_2 Isomorphismen sind. Der Homomorphismus ψ_2 ist aber nach Induktionsvoraussetzung (bezüglich p) ein Isomorphismus (wegen (1)). Dasselbe gilt für ψ_1 (wegen (4)). Es reicht also tatsächlich, (3) und (4) zu beweisen. Das reduziert den Beweis der Behauptung auf den Beweis des nachfolgenden Lemmas.

QED.

1.3.5 Lemma

Sei F eine injektive Garbe auf Y. Dann gilt:

(i) π^*F ist eine welke[45] Garbe auf X

(ii) $H^0(\pi^*F)$ ist ein injektiver G-Modul.

Beweis. Zu (i). Weil F injektiv ist, ist F welk.[46] Also ist auch π^*F welk.[47]

Zu (ii). Für jeden G-Modul M bezeichnen wir mit

$$M$$

auch die zugehörige konstante Garbe auf M.[48] Die direkte Bildgarbe

$$\pi_*M$$

ist gegeben durch

$$\pi_*M(V) = \{\alpha: \pi^{-1}(V) \to M \mid \alpha \text{ lokal konstant }\}.$$

Die Operattion von G auf X läßt $\pi^{-1}(V)$ invariant, d.h. durch

$$G \times \pi_*M \to \pi_*M, (g, \alpha) \mapsto (g\circ\alpha\circ g^{-1})$$

---

[45] d.h. für jede offene Menge $U \subseteq X$ ist die Restriktion $(\pi^*F)(X) \to (\pi^*F)(U)$ surjektiv.

[46] Für jede offene Teilmenge $i:V \subseteq Y$ sei $\mathbb{Z}_V = i_!(\mathbb{Z}|_V)$ die Fortsetzung durch Null der Einschränkung von $\mathbb{Z}$ auf V (beliebiges F auf V betrachtet man die Prägarbe auf X mit

$$U \mapsto \begin{cases} F(U) & \text{für } U\subseteq V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist $i_!F$ die zugehörige Garbe).

Für $V'\subseteq V''$ hat man Injektionen $\mathbb{Z}_{V'} \to \mathbb{Z}_{V''}$ und es gilt

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_V , F) = F(V), f \mapsto f(1_V).$$

Aus der Exaktheit von $0 \to \mathbb{Z}_{V'} \to \mathbb{Z}_{V''}$ und der Injektivität von F folgt die Exaktheit von $F(V'') \to F(V') \to 0$, d.h. F ist welk.

[47] Sei s ein Schnitt von π^*F über der offenen Menge $U\subseteq X$. Dann wird s repräsentiert durch einen Schnitt t von F über einer Umgebung von $\pi(U)$. Dieser Schnitt kommt aber von einem globalen Schnitt von F. Also kommt s von einem globalen Schnitt von π^*F.

[48] d.h. die Garbe der lokal konstanten Funktionen mit Werten in M.

ist eine Operation von G auf π_*M gegeben. Betrachten wir die Teilgarbe

$$(\pi_*M)^G$$

Ihre Schnitte über $V \subseteq Y$ sind gerade die lokal konstanten Funktionen

$$m: \pi^{-1}(V) \to M$$

mit

(1) $\quad m(gu) = gm(u)$ für alle $g \in G$ und alle $u \in \pi^{-1}(V)$.

Betrachten wir den wie folgt definierten natürlichen Homomorphismus

(2) $$\mathrm{Hom}_G(M, H^0(\pi^*F)) \to \mathrm{Hom}_Y(\pi_*M^G, F).$$

Ein Element der linken Hom-Menge ist ein Gruppen-Homomorphismus

$$\alpha: M \to F(Y)$$

mit

(3) $$\alpha(gm) = \alpha(m)$$

(die Schnitte von F sind G-invariant). Für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ haben wir damit einen Homorphismus von G-Moduln

(4) $$M(\pi^{-1}(V)) = \oplus M \to F(V) \xrightarrow{\text{res}} F(V).$$

der auf den einzelnen direkten Summanden M (die den Zusammenhangskomponenten von $\pi^{-1}(V)$ entsprechen) gleich α ist. Die Abbildungen (4) definieren einen Garben-Homomorphismus

$$\pi_*M \to F.$$

Durch Einschränken auf $(\pi_*M)^G$ erhalten wir ein Element

$$\tilde{\alpha}: \pi_*M^G \to F$$

der rechten Hom-Menge von (2). Der ursprüngliche Homomorphismus α ist durch diese Einschränkung bereits vollständig bestimmt: jedes Element $m \in M$ definiet einen globalen Schnitt von $(\pi_*M)^G$ dessen Bild bei $\tilde{\alpha}$ gerade

$$\tilde{\alpha}(m) = \alpha(m)$$

ist. Umgekehrt hat jedes Element der rechten Hom-Menge die Gestalt $\tilde{\alpha}$. Mit anderen Worten (2) ist ein Isomorphismus.

Wir können jetzt die Injektivität von $H^0(\pi^*F)$ beweisen. Für zwei G-Moduln M', M'' mit

$$M' \subseteq M''$$

hat man Injektionen

$$\pi_*M' \subseteq \pi_*M''$$

und

$$\pi_*M'^G \subseteq \pi_*M''^G,$$

also, wegen der Injektivität von F, eine Surjektion

$$\mathrm{Hom}(\pi_*M''^G, F) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_*M'^G, F),$$

und wegen (2) eine Surjektion

$$\mathrm{Hom}_G(M'', H^0(\pi^*F)) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_G(M', H^0(\pi^*F)).$$

Mit anderen Worten, $H^0(\pi^*F)$ ist injektiver G-Modul.

QED.

1.4 Algebraische Tori

1.4.1 Wiederholung und Formulierung des nächsten Ziels

Wir haben gezeigt, jedes holomorphe Geradenbündel L auf einem komplexen Torus X = V/Γ ist isomorph zu einem Geradenbündel der Gestalt

$$L(H, \alpha)$$

mit eindeutig betimmten H und α, wobei

$$H: V \times V \to \mathbb{C}$$

eine hermitische Form ist, für deren Imaginärteil E gilt

$$E(\Gamma\times\Gamma) \subseteq \mathbb{Z},$$

und α eine Abbildung

$$\alpha: \Gamma \to \mathbb{C}_1^*$$

mit

$$\alpha(\gamma'+\gamma'') = e^{i\pi E(\gamma',\gamma'')}\alpha(\gamma')\alpha(\gamma'').$$

Das Geradenbündel L(H,α) erhält man durch Faktorisieren,

$$L(H,\alpha) = \mathbb{C}\times V/\Gamma$$

des trivialen Bündels $\mathbb{C}\times V$ nach der Gruppen-Operation

$$\Gamma\times\mathbb{C}\times V \to \mathbb{C}\times V, (\gamma, z, v) \mapsto \varphi_\gamma(z,v),$$

mit

$$\varphi_\gamma(z,v) := (e_\gamma(v)\cdot z, v + \gamma)$$

$$e_\gamma(v) := \alpha(\gamma)\cdot e^{\pi H(v,\gamma)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}$$

1.4.2 Zum weiteren Vorgehen: ample Geradenbündel

(i) Unser nächstes Ziel besteht in der Untersuchung der Schnitte der Bündel

$$L(H, \alpha).$$

Insbesondere suchen wir nach Geradenbündeln L, deren globale Schnitte wie folgt eine Einbettung von X in den projektive Raum gestatten.

(ii) Sei

$$H^0(X, L) = \mathbb{C}s_0+...+\mathbb{C}s_n$$

mit einer minimalen Anzahl globaler holomorpher Schnitte $s_0,...,s_n$ von L (weil X kompakt ist und L kohärent[49], hat dieser Vektorraum eine endliche Dimension)[50]. Wir sagen, L wird von globalen Schnitten erzeugt, wenn es zu jedem Punkt x∈X einen globalen Schnitt s von L gibt, mit

$$s(x) \ne 0.$$

Dann gibt es zu jedem Punkt x insbesondere ein i mit

$$s_i(x) \ne 0$$

(und jeder Schnitt von L ist in einer Umgebung von x ein Vielfaches von s_i).

(iii) Da L ein Geradenbündel ist, gibt es zu jedem x∈X eine offene Umgebung U,

$$x \in U \subseteq X$$

---

[49] d.h. L ist lokal der Kokern von Abbildungen $\mathcal{O}_X$-linearen Garben-Morphismen der Gestalt

$$\mathcal{O}^r \to \mathcal{O}^s.$$

[50] das ist ein Spezialfall des Propper-Mapping-Theorems, vgl. Grauert, H., Remmert, R.: Coherent analytic sheaves, Springer Berlin 1984, Theorem 10.4.6 (oder im Kontext der algebraische Geometrie: Hartshorne, R.: Theorem III, 8.8

mit

$$L|_U = \mathcal{O}_X|_U ,$$

d.h. die Schnitte von L lassen sich über dieser Umgebung mit den holomorphen Funktionen auf U identifizieren. Insbesondere können wir auf U die s_i als holomorphe Funktionen $U \to \mathbb{C}$ betrachten.

(vi) Diese Identifikation mit holomorphen Funktionen ist nicht eindeutig: sie hängt von der Wahl der lokalen Trivialisierung von L ab. Beim Übergang zu einer anderen Trivialisierung multiplizieren sich alle s_i mit ein und derselben von Null verschiedenen holomorphen Funktion,

$$s_i \mapsto f \cdot s_i ,$$

insbesondere sind die Verhältnisse

$$s_i : s_j$$

wohldefiniert und unabhängig von der Trivialisierung.

(v) Die Abbildung

$$\varphi = \varphi_L : X \to \mathbb{P}^n,\ x \mapsto (s_0(x) : s_1(x) : \ldots : s_n(x)),$$

ist somit eine wohldefiniert holomorphe Abbildung (vorausgesetzt, L wird von globalen Schnitten erzeugt). Diese Abbildung hängt nur unwesentlich von der speziellen Wahl der Basis

$$s_0, \ldots, s_n \in H^0(X, L)$$

ab: beim Übergang zu einer anderen Basis ändert sie sich nur um eine lineare Transformation des projektiven Raums. Wir werden deshalb oft von “der Abbildung φ_L sprechen und keinen Unterschied zwischen den verschiedenen Abbildungen der Gestalt φ_L machen[51] und als ein im wesentlichen nur von L abhängiges Konstrukt betrachten.

(vi) Man kann leicht zeigen, jede holomorphe Abbildung

$$X \to \mathbb{P}^n$$

kommt auf diese Weise von einem Geradenbündel auf X.

(vii) Das Geradenbündel L heißt sehr ample, wenn die zugehörige Abbildung

$$\varphi_L : X \to \mathbb{P}^n$$

eine abgeschlossene Einbettung ist, d.h. φ_L ist ein injektive Immersion (d.h. injektiv und lokal von der Gestalt $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, $z \mapsto (z, 0)$, - bei geeigneter Wahl der Koordinaten).

(viii) Ein Geradenbündel L heißt ample, wenn eine Tensorpotenz von L sehr ample ist. Man kann zeigen, auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit ist das äquivalent zu der folgenden Bedingung:

Für jede kohärente Garbe F auf X gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $F \otimes L^n$ von globalen Schnitten erzeugt wird.

(ix) Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, ein Kriterium für die Existenz einer amplen Garbe zu beweisen. Man beachte, die Existenz einer solchen Garbe impliziert, daß X eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{P}^n$ ist, und damit eine algebraische projektive Mannigfaltigkeit, d.h. definiert durch Polynome.

---

[51] Indem man $\mathbb{P}^n$ durch die Projektivierung des $\mathbb{C}$-Vektorraums $H^0(X, L)^*$ ersetzt, kann man φ_L invariant definieren:

$$X \to \mathbb{P}(H^0(X, L)^*),\ x \mapsto \text{(der von } s \mapsto s(x) \text{ erzeugte lineare Unterraum)}$$

1.4.3 Begriff der Theta-Funktion

Seien $X = V/\Gamma$ ein komplexer Torus und L ein Geradenbündel der Gestalt

$$L = L(H, \alpha).$$

Ein Schnitt von L heißt dann Theta-Funktion zur hermitischen Form H und dem Multiplikator α.

Bemerkung

Wir werden im folgenden die Schnitte von $L = L(H, \alpha)$ identifizieren mit den Schnitten des trivialen Geradenbündels

$$\mathbb{C}\times V$$

auf V, welche invariant sind bei der Operation

$$\Gamma\times\mathbb{C}\times V \to \mathbb{C}\times V,\ (\gamma, z, v) \mapsto \varphi_\gamma(z,v),$$

(Bezeichnungen wie in 1.4.1) der Gruppe Γ auf $\mathbb{C}\times V$. Mit anderen Wort, wir identifizieren sie mit den holomorphen Funktionen

$$\theta: V \to \mathbb{C},$$

welche den folgenden Bedingungen genügen.

$$\theta(v+\gamma) = \alpha(\gamma)\cdot e^{\pi H(v,\gamma)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}\cdot\theta(v) \text{ für alle } v\in V \text{ und } \gamma\in\Gamma.$$

1.4.4 Reduktion auf den nicht-entarteten Fall

Seien $X = V/\Gamma$ ein komplexer Torus und L ein Geradenbündel der Gestalt

$$L = L(H, \alpha).$$

mit mindestens einen nicht-trivialen globalen Schnitt. Falls die hermitische Form entartet ist, d.h.

$$N := N(H) := \{v\in V \mid H(v,v') = 0 \text{ für alle } v'\in V\}$$

ist $\ne 0$, dann gibt es einen komplexen Torus kleinerer Dimenion

$$\bar{X} = \bar{V}/\bar{\Gamma},$$

einen surjektiven Homomorphismus komplexer Lie-Gruppen

$$f: X \to \bar{X}$$

und ein Geradenbündel

$$\bar{L} = L(\bar{H},\bar{\alpha})$$

auf $\bar{X}$ mit $\bar{H}$ nicht entartet und

$$L \cong f^*\bar{L}$$

$$H = \bar{H}\circ g$$

$$\alpha = \bar{\alpha}\circ g|_\Gamma$$

Dabei bezeichne

$$g: V \to \bar{V}$$

den durch f induzierten surjektiven Homomorphismus der universellen Überlagerungen (welcher $\mathbb{C}$-linear ist).

Beweis. Nach Definition ist N ein komplexer linearer Unterraum von V. Wir setzen

$$\bar{V} := V/N,$$

und definieren

$$g: V \to \bar{V},\ v \mapsto v + N,$$

als die natürliche Abbildung. Dann enthält die Untergruppe

$$\bar{\Gamma} := g(\Gamma) = (\Gamma + N)/N = \Gamma/\Gamma\cap N$$

von $\bar{V}$ trivialerweise eine reelle Vektorraumbasis von $\bar{V}$. Sie ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ohne Torsion, also eine freie abelsche Gruppe, d.h.

(1) $\overline{\Gamma} \subseteq \overline{V}$ ist ein Gitter maximalen Rangs,

(2) $\overline{X} = \overline{V}/\overline{\Gamma}$ ist ein komplexer Torus

und die natürliche Abbildung induziert einen surjektiven Homomorphismus komplexer Lie-Gruppen

$$f: X \to \overline{X}.$$

Wir haben noch zu zeigen, L, H und α entstehen durch das Anheben entsprechender Daten auf $\overline{X}$. Nach Defintion von N ist das für H der Fall, d.h. H entsteht durch Anheben entlang g aus einer hermitischen Form

$$\overline{H}: \overline{V}\times\overline{V} \to \mathbb{C}.$$

1. Schritt: Der Kern von f ist ein komplexer Torus X' := V'/Γ' (mit V' = N).

Nach Konstruktion von

$$f: V/\Gamma \to (V/N)/(\Gamma+N)/N = V/(\Gamma+N)$$

ist

$$\text{Ker } f = (\Gamma+N)/\Gamma = \Gamma/N\cap\Gamma.$$

Sei E = Im H die zu H gehörige schiefsymmetrische Bilinearform. Dann gilt

$$H(x,y) = E(ix,y) + iE(x,y).$$

Der komplexe Vektorraum N = N(H) läßt sich also auch wie folgt schreiben.

$$N = \{v\in V \mid E(v,v') = 0 \text{ für jedes } v'\in V\}.$$

Aus dieser Beschreibung und der Ganzzahligkeit von $E|_{\Gamma\times\Gamma}$ folgt[52],

(3) $\Gamma' := \Gamma\cap N$ ist eine Gitter maximalen Rangs in $V' := N$.

2. Schritt:

Sei $\theta: V \to \mathbb{C}$ eine Theta-Funktion zum Paar (H, α), welche nicht identisch Null ist. Dann gilt nach Defintion von N,

(4) $\theta(v+\gamma) = \alpha(\gamma)\theta(v)$ für beliebige $\gamma\in\Gamma' = \Gamma\cap N$.

Wir wählene eine kompakte Teilmenge

$$K \subseteq N \text{ mit } K+\Gamma' = N.$$

Dann gilt für fest gewähltes $v\in V$ und beliebiges $n\in N$

$$|\theta(v+n)| \le \sup_{\zeta\in K} |\theta(v+\zeta)|$$

(da sich $n \in N = K+\Gamma'$ in der Gestalt $n = \zeta + \gamma$ mit $\zeta\in K$ und $\gamma\in\Gamma'$ schreiben läßt und der Summand γ den Betrag nicht beeinflußt). Als holomorphe Funktion von $n\in N$ ist θ beschränkt und damit konstant, d.h.

$$\theta(v+n) = \theta(v) \text{ für } v\in V, n\in N,$$

d.h. θ ist konstant auf den Restklassen modulo N. Falls also θ einen von Null verschiedenen Wert besitzt, so gilt nach (4)

$$\alpha(\gamma) = 1 \text{ für alle } \gamma\in\Gamma'.$$

Daher entsteht α durch das Anheben einer Funktion

---

[52] Die Ganzzahligkeit von E bedeutet, bezüglich einer Basis $v_1,...,v_{2d}$ von Γ hat die Matrix von E genzzahlige Einträge, d.h. die Bedingungen

$$E(v, v_i) = 0 \text{ für } i = 1,...,2d$$

kann man als lineares homogenes Gleichungssystem mit ganzzahligen Koeffizienten auffassen. Die Lösungsmenge dieses Systems ist deshalb ein linearer Unterraum, der von gewissen Vektoren mit rationalen Koordinaten erzeugt wird. Mit anderen Worten, der (als reell aufgefaßte komplexe) Vektorraum N besitzt eine Basis

$$n_1, ..., n_l \in N$$

mit $m\cdot n_i \in \Gamma$ für eine gewissen natürliche Zahl m (und alle i). Mit anderen Worten, $\Gamma' := \Gamma\cap N$ enthält ein reelles Erzeugendensystem von N. Dann ist aber Γ' ein Gitter maximalen Rangs in V':= N und

$$X' := V'/\Gamma'$$

ist ein komplexer Torus

$$\bar{\alpha}: \bar{\Gamma} = \Gamma/\Gamma\cap N = \Gamma/\Gamma' \to \mathbb{C}_1^*$$

und θ durch das Anheben einer Funktion

$$\bar{\theta}: \bar{V} = V/N \to \mathbb{C},$$

welche Theta-Funktion zum Paar $(\bar{H},\bar{\alpha})$ ist. Nach Konstruktion ist $\bar{\theta}$ ein nicht-trivialer globaler holomorpher Schnitt des Geraden-Bündels

$$L(\bar{H},\bar{\alpha})$$

und $f^*\bar{\theta}$ ein solcher von $L = L(H, \alpha)$. Dann muß aber

$$L(H, \alpha) = f^* L(\bar{H},\bar{\alpha})$$

gelten.[53]
QED.

1.4.5 Die Bündel zu nicht-entarteten hermitischen Formen mit nicht-trivialen Schnitten

Seien $X = V/\Gamma$ ein komplexer Torus und L ein Geradenbündel der Gestalt

$$L = L(H, \alpha).$$

mit einer nicht-entarteten hermitischen Form H. Falls L mindestens einen nicht-trivialen globalen holomorphen Schnitt besitzt, ist die hermitische Form positiv definit.
Beweis. Wir nehmen an, H ist nicht positiv definit und zeigen, es gilt

$$H^0(X, L) = 0.$$

Wir nehmen also an, es gibt einen nicht.-trivialen $\mathbb{C}$-linearen Unterraum W,

$$0 \ne W \subseteq V$$

mit

$$H(w,w) < 0 \text{ für } w \in W - \{0\}.$$

Wir wählen eine kompakte Teilmenge

$$K \subseteq V \text{ mit } V = \Gamma + K.$$

Wir fixieren ein $v\in V$ und schreiben ein vorgegebenes $w\in W$ in der Gestalt

$$w = c + \gamma \text{ mit } c\in K \text{ und } \gamma\in\Gamma.$$

Es gilt für jede Theta-Funktion θ zum Paar (H, α)

$$(1) \qquad |\theta(v+w)| = |\theta(v+c+\gamma)| = |\theta(v+c)|\cdot e^{\pi \operatorname{Re} H(v+c,\gamma)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}$$

Weiter ist wegem $\gamma = w - c$:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} H(v+c, \gamma) + \tfrac{1}{2}H(\gamma,\gamma)\\
&\quad = \operatorname{Re} H(v+c,w) - \operatorname{Re} H(v+c, c)\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}H(w,w) + \tfrac{1}{2}H(c,c) - \operatorname{Re} H(w,c)\\
&\quad = \tfrac{1}{2}H(w,w) + \operatorname{Re} H(v, w) + \text{Funktion in v und c}
\end{aligned}$$

Der erste Summand rechts ist eine negativ definite quadratische Form. Der zweite Summand ist linear in w und der dritte hängt nicht von w ab. Bei fest gewählten v und $w\to\infty$ geht deshalb dieser Ausdruck gegen $-\infty$ (da $c\in K$ in einem Kompaktum liegt, spielt der Beitrag von c dabei keine Rolle). Wir sehen daher, der Ausdruck (1) bleibt für jedes fest gewählte v beschränkt und geht für $w \to \infty$ gegen Null. Als beschränkte holomorphe Funktion in $w\in W$ ist $\theta(v+w)$ aber konstant. Sie muß daher gleich Null sein,

$$\theta(v+w) = 0 \text{ für } v\in V \text{ und } w\in W.$$

[53] Jeder nicht-triviale globale holomorphe Schnitt legt die Übergangsfunktionen des Bündels bezüglich eines gegebenen Systems von lokalen Trivialisierungen fest.

Wir haben gezeigt, jede Theta-Funktion zum Paar (H, α) ist identisch Null. Das steht aber im Widerspruch zu unserer Annahme, daß L einen nicht-trivialen holomorphen Schnitt haben soll. Also muß H positiv definit sein.
QED.
Bemerkung
Für jede ample Garbe der Gestalt $L(H, \alpha)$ muß somit H positiv definit sein.[54]

1.4.6 Proposition: die Dimension des Raums der Theta-Funktionen
Seien $X = V/\Gamma$ ein komplexer Torus und

$$H: V \times V \to \mathbb{C}$$

eine positiv definite hermitische Form mit $E(\Gamma\times\Gamma) \subseteq \mathbb{Z}$ ($E := \mathrm{Im}\, H$). Dann gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, L(H, \alpha)) = \sqrt{\det E}$$

Dabei bezeichne $\det E$ die Determinante der Matrix von E bezüglich einer $\mathbb{Z}$-Basis von Γ.
Beweis. Beweis-Idee. Wir suchen zunächst nach einer quadratischen Form

$$Q(v) : V \to \mathbb{C},$$

für welche die abgeänderten Theta-Funktionen

$$\theta^*(v) := \theta(v)\cdot e^{Q(v)}$$

periodisch sind bezüglich eines Teilgitters

$$\Gamma' \subseteq \Gamma$$

(vom halben Rang). Auf Grund der Periodizität kann man diese Funktion in eine Fourier-Reihen entwickeln. Die definierende Bedingung für die Theta-Funktionen,

(1) $\theta(v+\gamma) = e_\gamma(v)\cdot\theta(v)$ für alle $v\in V$ und $\gamma\in\Gamma$,

(2) $e_\gamma(v) := \alpha(\gamma)\cdot e^{\pi H(v,\gamma)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}$,

übersetzt sich dann in eine lineare Bedingung an die Fourier-Koeffizienten. Wir werden ein maximales linear unabhängiges System von Lösungen des entsprechenden Gleichungssytems beschreiben und so eine Information über die Dimension des Lösungsraumes bekommen.
1. Schritt: Die Funktionalgleichung der abgeänderten Theta-Funktion.
Sei $\theta: V \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\theta(v+\gamma) = e_\gamma(v)\cdot\theta(v)$ und

$$B: V\times V \to \mathbb{C}$$

eine symmetrische Bilinearform über $\mathbb{C}$.Dann genügt die holomorphe Funktion

(3) $\theta^*(v) := e^{-\frac{\pi}{2}B(v,v)}\theta(v), v\in V$,

der Bedingung

(4) $\theta^*(v+\gamma) = \alpha(\gamma)\cdot e^{\pi(H-B)(v,\gamma)+\frac{\pi}{2}(H-B)(\gamma,\gamma)}\theta^*(v)$ für alle $v\in V$ und $\gamma\in\Gamma$.

Das sieht man durch direktes Nachrechnen:

$$e^{-\frac{\pi}{2}B(v+\gamma,v+\gamma)} = e^{-\frac{\pi}{2}B(v,v)}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}(2B(v,\gamma)+B(\gamma,\gamma))}.$$

2. Schritt: Konstruktion des Teilgitters $\Gamma' \subseteq \Gamma$ (halben maximalen Rangs).
Sei

[54] Die globalen holomorphen Schnitte dürfen nicht alle identisch Null sein auf einem nicht-trivialen linearen Unterraum von V, d.h. H darf nicht entartet sein. Es muß aber außerdem nicht-triviale globale Schnitte geben, d.h. H muß positiv definit sein.

$$d := \dim_{\mathbb{C}} V.$$

Dann gibt es ein Teilgitter

$$\Gamma' \subseteq \Gamma$$

von Rang

$$d := \dim_{\mathbb{Q}} \Gamma' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

mit

(5) $E(\Gamma' \times \Gamma') = \{0\}$.

(6) $\Gamma' = W \cap \Gamma$ mit $W := \Gamma' \cdot \mathbb{R}$.

Zum Beweis wählen wir ein beliebiges von Null verschiedenes Element

$$\gamma'_1 \in \Gamma - \{0\}$$

Dann ist die Linearform $E(?, \gamma'_1)$ nicht identisch Null (da E nicht entartet ist), d.h.es gibt ein

$$\gamma''_1 \in \Gamma - \{0\}$$

mit $E(\gamma''_1, \gamma'_1) \neq 0$. Für das orthogonale Komplement Γ_1 von γ'_1, γ''_1 in Γ gilt[55]

$$\Gamma \cdot \mathbb{Q} = (\gamma'_1 \mathbb{Q} + \gamma''_1 \mathbb{Q}) \oplus (\Gamma_1 \cdot \mathbb{Q})$$

Insbesondere hat E auf Γ_1 den Rang 2d-2 und ist nicht entartet. Wir können die obige Argumentation mit Γ_1 anstelle von Γ wiederholen und erhalten so ein System von linear unabhängigen Vektoren

$$\gamma''_1, \gamma'_1, \ldots, \gamma''_d, \gamma'_d \in \Gamma.$$

Das Teilgitter

$$\Gamma'' := \mathbb{Z}\gamma'_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma'_d$$

von Γ hat dann den Rang d und genügt der Bedingung (5). Insbesondere hat der Vektorraum

$$W := \Gamma'' \cdot \mathbb{R}$$

die reelle Dimension d[56] und es gilt $E(W,W) = \{0\}$. Damit genügt auch

$$\Gamma' := W \cap \Gamma$$

der Bedingung (5), und Bedingung (6) ist trivialerweise erfüllt. Der Rang von Γ' ist mindestens so groß wie der von Γ'' und höchstens so groß wie die Dimension von W.

3. Schritt: Eine direkte Zerlegung von V: es gilt

$$V = W \oplus iW = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma' = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W.$$

Die Bilinear-Form W ist identisch Null auf W, also auch auf iW (wegen $E(ix,iy) = E(x,y)$). Deshalb ist

$$W \cap iW$$

ein komplexer Vektorraum, auf dem $H(x,y) = E(ix,y) + iE(x,y)$ identisch Null ist. Weil H nicht entartet ist, folgt

$$W \cap iW = \{0\}.$$

Also bestehen die angegebenen Zerlegungen.

4. Schritt: Konstruktion der symmetrischen Bilinearform $B: V \times V \to \mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$.

Auf dem reellen Vektorraum W ist der Imaginärteil der hermitischen Form H gleich Null, d.h.

$$B := H|_W$$

---

[55] d.h. das orthogonale Komplement von $\gamma'_1 \mathbb{Q} + \gamma''_1 \mathbb{Q}$ in $\Gamma \cdot \mathbb{Q}$ wird von Elementen aus Γ erzeugt (weil alle Vektoren von $\Gamma \cdot \mathbb{Q}$ ein $\mathbb{Q}$-Vielfaches von Vektoren aus Γ sind).

[56] Die Konstruktion der γ'_i kann man als Konstruktion im reellen Vektorraum V auffassen.

ist eine symmetrische Bilinearform. Wir bezeichen die Fortsetzung[57] von B zu einer symmetrischen Bilinearform

$$B: V\times V \to \mathbb{C}$$

über $\mathbb{C}$ ebenfalls mit B. Nach Definition gilt

$$H(w, w') = B(w, w') \text{ für } w,w'\in W.$$

Da beide Seiten $\mathbb{C}$-linear sind im ersten Argument, gilt sogar

(7) $H(v, w) = B(v,w)$ für $v\in V$ und $w\in W$.

5. Schritt: die Γ'-Periodizität der abgeänderten Theta-Funktion

Betrachten wir die Einschränkung von α auf Γ'. Wegen

$$\alpha(\gamma'+\gamma'') = e^{i\pi E(\gamma',\gamma'')}\alpha(\gamma')\alpha(\gamma'').$$

(vgl. 1.4.1) und $E(\Gamma'\times\Gamma') = 0$ ist

$$\alpha|_{\Gamma'}: \Gamma'\to \mathbb{C}_1^*$$

ein Gruppen-Homomorphismus. Deshalb gibt es eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung[58]

$$\lambda: V \to \mathbb{C} \text{ mit } \lambda(W) \subseteq \mathbb{R} \text{ und } \alpha(\gamma) = e^{2\pi i\lambda(\gamma)} \text{ für } \gamma\in\Gamma'.$$

Aus der Funktionalgleichung (4) für θ^* lesen wir ab, wegen (7) gilt

$$\theta^*(v+\gamma) = \alpha(\gamma)\cdot\theta^*(v) \text{ für alle } v\in V \text{ und } \gamma\in\Gamma'.$$

d.h.

$$\theta^*(v+\gamma) = e^{2\pi i\lambda(\gamma)}\cdot\theta^*(v) \text{ für alle } v\in V \text{ und } \gamma\in\Gamma'.$$

d.h.

$$e^{-2\pi i\lambda(v+\gamma)}\cdot\theta^*(v+\gamma) = e^{-2\pi i\lambda(v)}\cdot\theta^*(v) \text{ für alle } v\in V \text{ und } \gamma\in\Gamma'.$$

Mit anderen Worten,

(8) $e^{-2\pi i\lambda(v)}\cdot\theta^*(v)$ ist Γ'-periodisch.

6. Schritt: Es bestehen die folgenden Relationen zwischen den Fourier-Koeffizienten von θ^*:

$$c_\chi = \alpha(\gamma)\cdot e^{\pi i\hat{\gamma}(\gamma)-2\pi i(\chi(\gamma)+\lambda(\gamma))}c_{\chi-\hat{\gamma}} \quad \text{mit} \quad \hat{\gamma}(\gamma') = E(\gamma',\gamma)$$

für $\chi\in\hat{\Gamma}'$, $\gamma\in\Gamma$, $\gamma'\in\Gamma'$.

Beweis. Wir schreiben

$$\hat{\Gamma}' := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma', \mathbb{Z}) \subseteq^{59} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}).$$

Die Fourier-Entwicklung von (8) liefert

(9) $$\theta^*(v) = \sum_{\chi\in\hat{\Gamma}'} c_\chi\cdot e^{2\pi i(\chi(v)+\lambda(v))}$$

Für beliebige $v\in V$ und $w\in W$ gilt

$$\begin{aligned}(H-B)(w,v) &= \overline{H}(v,w) - B(v,w) = -2i\cdot \mathrm{Im}(H)(v,w) \qquad \text{(nach (7))}\\ &= 2i\cdot E(w,v).\end{aligned}$$

Für jedes $v\in V$ definieren wir eine $\mathbb{C}$-Linearform

$$\hat{v}: V \to \mathbb{C} \text{ mit } \hat{v}(\gamma') = E(\gamma',v) \text{ für jedes } \gamma'\in\Gamma'.$$

---

[57] Man wählt eine Matrix von B bezüglich irgendeiner (reellen) Basis von W und definiert die Fortsetzung als die Bilinearform mit derselben Basis.

[58] Man fixiere eine Basis von W, die das Gitter Γ' erzeugt und definiere λ zunächst auf diesen Basis-Elementen derart, daß die angegebene Relation zwischen α und λ für die Basiselemente besteht. Dann setze man λ $\mathbb{R}$-linear auf W fort. Dann besteht die Relation für alle $\gamma\in\Gamma'$. Schließlich setze man λ $\mathbb{C}$-linear auf V fort.

[59] Nach dem dritten Schritt ist $V = \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}\Gamma'$.

Da E $\mathbb{R}$-linear im ersten Argument ist, ist auf diese Weise zumindest ein Gruppen-Homomorphismus auf Γ' definiert. Wegen des 3.Schrittes (d.h. $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}\Gamma' = V$) setzt dieser sich $\mathbb{C}$-linear auf V fort. Nach Konstruktion gilt dann

$$(H-B)(\gamma',v) = 2i\cdot\hat{v}(\gamma').$$

Da Γ' eine $\mathbb{C}$-Vektorraumbasis von V enthält, folgt

$$(H-B)(z,v) = 2i\cdot\hat{v}(z) \text{ für beliebige } z, v \in V.$$

Wir setzen die Fourier-Entwicklung (9) von θ* in die Funktionalgleichung (4) von θ* ein und erhalten

$$\sum_{\chi\in\hat{\Gamma}'} c_\chi\cdot e^{2\pi i(\chi(\gamma)+\lambda(\gamma))}e^{2\pi i(\chi(v)+\lambda(v))}$$

$$= \alpha(\gamma)\cdot e^{\pi(H-B)(v,\gamma)+\frac{\pi}{2}(H-B)(\gamma,\gamma)} \sum_{\chi\in\hat{\Gamma}'} c_\chi\cdot e^{2\pi i(\chi(v)+\lambda(v))}$$

$$= \alpha(\gamma)\cdot e^{\frac{\pi}{2}(H-B)(\gamma,\gamma)} \sum_{\chi\in\hat{\Gamma}'} c_\chi\cdot e^{2\pi i(\chi(v)+\lambda(v)+\hat{\gamma}(v))}$$

$$= \alpha(\gamma)\cdot e^{i\pi\hat{\gamma}(\gamma)} \sum_{\chi\in\hat{\Gamma}'} c_\chi\cdot e^{2\pi i(\chi(v)+\lambda(v)+\hat{\gamma}(v))}$$

$$= \alpha(\gamma)\cdot e^{i\pi\hat{\gamma}(\gamma)} \sum_{\chi\in\hat{\Gamma}'} c_{\chi-\hat{\gamma}}\cdot e^{2\pi i(\chi(v)+\lambda(v))}$$

Koeffizienten-Vergleich liefert

$$c_\chi\cdot e^{2\pi i(\chi(\gamma)+\lambda(\gamma))} = \alpha(\gamma)\cdot e^{i\pi\hat{\gamma}(\gamma)}c_{\chi-\hat{\gamma}}$$

d.h.

$$c_\chi = \alpha(\gamma)\cdot e^{\pi i\hat{\gamma}(\gamma)-2\pi i(\chi(\gamma)+\lambda(\gamma))}c_{\chi-\hat{\gamma}}$$

Das ist gerade die Behauptung des 6. Schritts.

Bemerkungen

(i) Bezeichne

$$M := \{\hat{\gamma} \mid \gamma\in\Gamma\}$$

das Bild von Γ bei der Abbildung

$$\Gamma \to \hat{\Gamma}', \gamma \mapsto \hat{\gamma}.$$

Wir haben gezeigt, die Fourier-Koeffizienten der transformierten θ-Funktion θ* sind vollständig festgelegt, wenn man sie für eine volles Repräsentantensystem von

$$\hat{\Gamma}'/M$$

kennt.

(ii) Zwei Elemente $\gamma_1, \gamma_2\in\Gamma$ haben genau dann dasselbe Bild in $\hat{\Gamma}'$ wenn gilt

$$E(\gamma',\gamma_1) = E(\gamma',\gamma_2) \text{ für jedes } \gamma'\in\Gamma',$$

d.h.

$$E(\Gamma', \gamma_1-\gamma_2) = 0,$$

d.h.[60]

$$\gamma_1 - \gamma_2 \in \Gamma'.$$

7. Schritt. Jedes System $\{c_\chi\}_{\chi\in\hat{\Gamma}'}$ von komplexen Zahlen, welches den Relationen des 6. Schrittes genügt, definiert eine transformierte Theta-Funktion θ^*.

Wir haben zu zeigen, die Funktion (9),

$$\theta^*(v) = \sum_{\chi\in\hat{\Gamma}'} c_\chi \cdot e^{2\pi i(\chi(v)+\lambda(v))},$$

Konvergiert absolut und gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von V (dann ist der Limes holomorph)[61].

Die im 6.Schritt bewiesenen Relationen zwischen den c_χ sind linear in c_χ. Die Familien

$$\{c_\chi\}_{\chi\in\hat{\Gamma}'},$$

, die diesen Relationen genügen, bilden eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition. Es reicht deshalb, die Konvergenz-Aussage für ein Erzeugendensystem dieser abelschen Gruppe zu beweisen. Außerdem sind die c_χ fesgelegt, wenn man sie für die χ eines Repräsentantensystems von $\hat{\Gamma}'/M$ kennt. Wir können deshalb annehmen, von den c_χ, die zu einem Repräsentantensystem von $\hat{\Gamma}'/M$ gehören, ist nur eines ungleich Null. Sei also ein

$$\chi_0 \in \hat{\Gamma}'$$

fixiert und sei

$$c_\chi = 0$$

für jedes χ, das nicht in derselben Restklasse modulo M liegt wie χ_0. Für

$$\chi \in \hat{\Gamma}' + M$$

schreiben wir

$$\chi = \chi_0 - \hat{\gamma}\ , \gamma\in\Gamma.$$

Die Reihe bekommt dann die Gestalt

$$\theta^*(v) = \sum_{\hat{\gamma}\in M} c_{\chi_0 - \hat{\gamma}} \cdot e^{2\pi i(\chi_0(v) - \hat{\gamma}(v) + \lambda(v))}$$

mit (vgl. 6.Schritt)

$$c_{\chi_0} = \alpha(\gamma)\cdot e^{\pi i\hat{\gamma}(\gamma)-2\pi i(\chi_0(\gamma)+\lambda(\gamma))} c_{\chi_0 - \hat{\gamma}}$$

d.h.

$$\theta^*(v) = \sum_{\hat{\gamma}\in M} c_{\chi_0} \alpha(\gamma)^{-1}\cdot e^{-3\pi i\hat{\gamma}(\gamma)}\cdot e^{2\pi i(2\chi_0(v)+2\lambda(v))}$$

Für v aus einer kompakten Teilmenge von V, sagen wir

$$v\in K \subseteq V,$$

---

[60] Es ist $E(W, \gamma_1-\gamma_2) = 0$, da Γ' den Raum W erzeugt (nach (6)). Nun hat W die halbe Dimension von V und das orthogonale Komplement von W enthält W (nach (5) und (6)). Da E nicht entartet ist, muß das orthogonale Komplement gleich W sein, d.h. $\gamma_1-\gamma_2 \in W\cap\Gamma = \Gamma'$ (nach (6)).

[61] λ ist durch E festgelegt.

wird dann die Reihe $e^{-2\pi i\lambda(z)}\theta^*(v)$ majorisiert durch

$$C\cdot \sum_{\hat\gamma\in M} |c_{\chi_0}|\cdot|e^{-3\pi i\hat\gamma(\gamma)}|,$$

also durch

$$C\cdot|c_{\chi_0}|\cdot \sum_{\hat\gamma\in M} e^{-3\pi \operatorname{Im}\hat\gamma(\gamma)},$$

Wegen $V = W\oplus iW$ können wir jedes $v\in V$ in der Gestalt

$$v = \varphi(v) + i\psi(v)$$

schreiben mit $\mathbb{R}$-linearen Funktionen

$$\varphi, \psi: V \to W.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\hat\gamma(v) &= \operatorname{Im}\hat\gamma(\varphi(v) + i\psi(v)) \\
&= \operatorname{Im}\hat\gamma(\varphi(v)) + i\hat\gamma(\psi(v))) && (\hat\gamma \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear auf V}) \\
&= \hat\gamma(\psi(v)) && (\hat\gamma \text{ ist reellwerting auf W}) \\
&= E(\psi(v), \gamma) && (\text{Definition von } \hat\gamma) \\
&= E(\psi(v), \varphi(\gamma) + i\psi(\gamma)) \\
&= E(\psi(v), i\psi(\gamma)) && (\text{wegen } E(W\times W) = 0) \\
&= - E(i\psi(\gamma), \psi(v)) && (\text{E ist schiefsymmetrisch})
\end{aligned}$$

Speziell für $v = \gamma$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\hat\gamma(\gamma) &= - \operatorname{Im} H(i\psi(\gamma), \psi(\gamma)) \\
&= - \operatorname{Im} iH(\psi(\gamma), \psi(\gamma)) \\
&= - \operatorname{Re} H(\psi(\gamma), \psi(\gamma)) \\
&= - H(\psi(\gamma), \psi(\gamma)) && (H(v,v) \text{ ist reell})
\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\psi(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma = \varphi(\gamma) \Leftrightarrow \gamma\in W \Leftrightarrow \hat\gamma = 0.$$

Mit anderen Worten, $\operatorname{Im}\hat\gamma(\gamma)$ ist eine negativ definite quadratische Form in γ. Die obige Majorante geht also sehr schnell gegen Null.

Bemerkung

Wir haben damit gezeigt, der Raum der Theta-Funktionen zum Paar (H, α) ist gleich der Ordnung von

$$\hat\Gamma'/M.$$

Es reicht daher, die folgende Aussage zu beweisen.

QED.

1.4.7 Lemma

Seien Γ eine freie abelsche Gruppe vom Rang 2d, $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ein direkter Summand von Γ des Rangs d,

$$E: \Gamma\times\Gamma \to \mathbb{Z}$$

eine nicht-entartete schiefsymmetrische Bilinerform mit

$$E(\Gamma'\times\Gamma') = 0.$$

Dann gilt

$$|\det E| = n^2$$

wenn n die Ordnung des Kokerns der Abbildung

$$\Gamma \to \hat\Gamma' = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma', \mathbb{Z}), \gamma \mapsto E(?, \gamma)$$

bezeichnet.

Beweis. 1. Schritt: Sei f: $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ eine injektive lineare Abbildung, welche bezüglich der Standard-Basis von $\mathbb{Z}^n$, die (ganzzahlige) Matrix A hat. Dann gilt

$$\# \text{ Koker } f = |\det A|.$$

Nach dem Elementarteilersatz gibt es ganzzahlige n×n-Matrizen B, C mit der Determinante ±1 mit

$$BAC = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Bezeichne f_B, f_C die Multiplikation mit der Matrix B bzw. C. Dann gilt, da f_B und f_C Isomorphismen sind,

$$\# \text{ Koker } f = \# \text{ Koker } (f_B \circ f \circ f_C) = \# \mathbb{Z}/(d_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(d_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} d_i = \det BAC = |\det A|$$

2. Schritt. Beweis der Behauptung.
Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Gamma' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \Gamma/\Gamma' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\Gamma/\Gamma')^\wedge \arrow[r] & \hat{\Gamma} \arrow[r] & \hat{\Gamma}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Die Exaktheit der oberen Zeile ist offensichtlich. Die der unteren ergibt sich daraus, weil Hom(? , $\mathbb{Z}$) exakt ist auf den freien abelschen Gruppen[62]. Die vertikalen Abbildungen sind induziert durch E, d.h. von der Gestalt

$$x \mapsto (y \mapsto E(y, x)).$$

Die Abbildung γ ist wohldefiniert, weil $E(\Gamma' \times \Gamma') = 0$ gilt. Die Kommutativität des rechten Vierecks ergibt sich trivialerweise. Die Abbildung α kann man jetzt als Einschränkung von β auf Γ' definierten. Das Bild von α liegt dann wegen der Kommutativität der rechten Vierecks ganz im Kern von $\hat{\Gamma} \to \hat{\Gamma}'$, also in $(\Gamma/\Gamma')^\wedge$.

Die Injektivität von β ergibt sich aus der Voraussetzung, daß E nicht entartet sein soll. Die von α ergibt sich aus der von β. Die Zusammensetzung

$$\Gamma \xrightarrow{\beta} \hat{\Gamma} \to \hat{\Gamma}'$$

hat als Bild eine Gruppe von Rang[63]

$$\text{rk } \Gamma - \text{rk } (\Gamma/\Gamma')^\wedge = \text{rk } \hat{\Gamma} - \text{rk } (\Gamma/\Gamma')^\wedge = 2d - d = d.$$

und damit als Kern eine Gruppe vom Rang

$$\text{rk } \Gamma - \text{rk } \hat{\Gamma}' = 2d - d.$$

Die Untergruppe Γ' liegt in diesem Kern. Deshalb ist

$$\Gamma/\text{Ker}(\Gamma \xrightarrow{\beta} \hat{\Gamma} \to \hat{\Gamma}')$$

---

[62] Freie abelsche Gruppen sind projektiv. Das ist offensichtlich für freie abelsche Gruppen vom Rang 1, Hom($\mathbb{Z}$, ?) ist als Funktor isomorph zum identischen Funktor. Der allgemeine Fall ergibt sich daraus, da Hom bezüglich der ersten Variablen direkte Summen in direkte Produkte überführt.

[63] Man betrachte die zugehörigen $\mathbb{Q}$-Vektorräume.

eine Faktorgruppe von Γ/Γ', die den Rang d hat. Als freie abelsche Gruppe vom Rang d ist aber Γ/Γ' selbst die einzige solche Faktorgruppe, d.h. es gilt

$$\Gamma/\mathrm{Ker}(\Gamma \xrightarrow{\beta} \hat{\Gamma} \to \hat{\Gamma}') = \Gamma/\Gamma',$$

d.h. $\mathrm{Ker}(\Gamma \xrightarrow{\beta} \hat{\Gamma} \to \hat{\Gamma}') = \Gamma'$, d.h. γ ist injektiv. Wir haben damit gezeigt, die Zeilen und Spalten des obigen kommutativen Diagramms sind exakt.
Betrachten wir die zu γ duale Abbildung

$$\hat{\gamma}: \hat{\hat{\Gamma}}' \to (\Gamma/\Gamma')^{\wedge} \subseteq \hat{\Gamma}, (\mathrm{l} : \hat{\Gamma}' \to \mathbb{Z}) \mathrm{~a~} (\gamma \mathrm{~a~l~} (\gamma'' \mathrm{a~} E(\gamma'', \gamma)).$$

Identifiziert man Γ' mit seinem doppelten Dual, vermittels

$$\Gamma' \to \hat{\hat{\Gamma}}', \gamma' \mathrm{~a~} (\mathrm{l~~a~l~} (\gamma')),$$

so bekommt $\hat{\gamma}$ die Gestalt

$$\hat{\gamma} : \Gamma' \to \hat{\Gamma}, \gamma' \mathrm{~a~} (\gamma \mathrm{~a~l~}_{\gamma'}(\gamma'' \mathrm{a~} E(\gamma'', \gamma)),$$

wenn $\mathrm{l}_{\gamma'}$ die Auswertung an der Stelle γ' bezeichnet, d.h. es ist

$$\hat{\gamma} : \Gamma' \to \hat{\Gamma}, \gamma' \mathrm{~a~} (\gamma \mathrm{~a~} E(\gamma', \gamma) = - E(\gamma, \gamma')).$$

Mit anderen Worten, $\hat{\gamma}$ ist bis aufs Vorzeichen gerade die Abildung α, d.h. α und γ sind dual zueinander. Bezüglich geeigneter Basen sind sie durch zueinander transponierte (quadratische) Matrizein gegeben. Insbesondere haben α und γ dieselbe Determinante. Damit gilt nach dem 1. Schritt und dem Schlangen-.Lemma

$$|\det E| = \#\ \mathrm{Koker}\ \beta = \#\ \mathrm{Koker}\ \alpha \cdot \#\ \mathrm{Koker}\ \gamma = (\#\ \mathrm{Koker}\ \gamma)^2$$
$$= (\#\ \mathrm{Koker}\ \Gamma \xrightarrow{\beta} \hat{\Gamma} \to \hat{\Gamma}')^2.$$

Das ist aber gerade die Behauptung.
QED.
Wir sind jetzt in der Lage, das Hauptergebnis dieses Kapitels zu beweisen.

1.4.8 Satz von Lefschetz

Seien $X = V/\Gamma$ ein komplexer Torus, $H: V \times V \to \mathbb{C}$ eine hermitische Form, deren Imaginärteil $E = \mathrm{Im}\ H$ der Bedingung

$$E(\Gamma\times\Gamma) \subseteq \mathbb{Z}$$

genügt,,

$$\alpha: U \to \mathbb{C}_1^*$$

eine Abbildung mit

$$\alpha(\gamma'+\gamma'') = \alpha(\gamma')\alpha(\gamma'')\cdot e^{i\pi E(\gamma',\gamma'')}$$

und $L = L(H,\alpha)$ das zugehörige holomorphe Geradenbündel auf X. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) Für jeden komplexen Teiltorus $Y \subset X$ existieren eine natürliche Zahl N, ein Schnitt

$$\sigma \in H^0(X, L^{\otimes N})$$

und zwei Punkte $x', x'' \in X$ mit

$$x'-x'' \in Y, \sigma(x') = 0, \sigma(x'') \neq 0.$$

(ii) Die hermitische Form H ist positiv definit.

(iii) Für jedes $n \geq 3$ definieren die holomorphen Schnitte von $L^{\otimes n}$ eine Einbettung von X in einen projektiven Raum.

Beweis. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) wurde bereits bewiesen (vgl. 1.4.4 und 1.4.5). Die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i) ist trivial. Es bleibt also

$$\text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}$$

zu beweisen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall

$$n = 3.$$

Der Fall n > 3 ist vollkommen analog. Wie bisher unterscheiden wir nicht zwischen den Schnitten des Bündels

$$L = L(H, \alpha)$$

und den Theta-Funktionen $V \to \mathbb{C}$ zum Paar (H, α).

1. Schritt: Für jeden Schnitt θ von $L(H,\alpha)$ und beliebige Punkte $a,b\in V$ ist durch

$$\theta^*(v) = \theta(v-a)\theta(v-b)\theta(v+a+b),\ v\in V,$$

ein Schnitt von $L^{\otimes 3}$ gegeben.

Für $\gamma\in\Gamma$ gilt

$$\theta^*(v+\gamma) = \alpha^3(\gamma)\cdot e^{\pi H(v-a,\gamma)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}\, e^{\pi H(v-b,\gamma)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)} e^{\pi H(v+a+b,\gamma)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}\theta^*(v)$$

$$= \alpha^3(\gamma)\cdot e^{\pi 3H(v,\gamma)+\frac{3\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}\theta^*(v).$$

QED.

2. Schritt: die globalen Schnitte von $L^{\otimes 3}$ definieren eine holomorphe Abbildung

$$X \to \mathbb{P}^N, N := \dim H^0(X, L^{\otimes 3}) - 1.$$

Weil H nach Voraussetzung (ii) positiv definit ist, ist $N \ge 0$ (nach 1.4.6). Also gibt es einen von Null verschiedenen Schnitt

$$\theta\in H^0(X, L) - \{0\}.$$

Sei $v_0\in V$ vorgegebener Punkt. Nach Wahl von θ gibt es ein $a\in V$ mit

$$\theta(v_0 - a) \ne 0.$$

Diese Bedingung bleibt erhalten, wenn man a um hinreichend kleine Werte abändert, d.h. für b aus einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 gilt auch

$$\theta(v_0 - a - b) \ne 0.$$

Außerdem kann θ nicht in einer ganzen Umgebung von v_0 identisch Null sein (als holomorphei Funktioen wäre dann θ auf ganz X gleich Null). Wir können also b noch so wählen, daß

$$\theta(v_0 - b) \ne 0$$

ist. Dann ist aber

$$\theta^*(v) = \theta(v-a)\theta(v-b)\theta(v+a+b)$$

ein globaler Schnitt von $L^{\otimes 3}$, welcher im vorgegebenen Punkt v_0 ungleich Null ist. Die Abbildumg

$$\varphi:X \to \mathbb{P}^N, x \mapsto [\theta_0(x):...:\theta_N(z)]$$

mit $H^0(X, L^{\otimes 3}) = \mathbb{C}\theta_0+...+\mathbb{C}\theta_N$ wohldefiniert (und holomorph).

3. Schritt. Die Abbldung φ ist injektiv.

Andernfalls gibt es zwei Punkte $v', v''\in V$ mit

(1) $$v' - v'' \notin \Gamma$$

und

$$\varphi(v') = \varphi(v''),$$

d.h. es gibt ein

$$c\in\mathbb{C}^*$$

mit

$$\theta_i(v') = c\cdot\theta_i(v'') \text{ für } i = 0, ... , N.$$

Letzteres bedeutet,

$$\theta^*(v') = c\cdot\theta^*(v'') \text{ für jedes } \theta^*\in H^0(X, L^{\otimes 3}).$$

Insbesondere besteht diese Relation für alle Funktionen der Gestalt

$$\theta^*(v) = \theta(v-a)\theta(v-b)\theta(v+a+b)$$

mit $a,b \in V$ und $\theta \in H^0(X, L)$. Wir fixieren b und betrachten θ^* als Funktion in a. Wir setzen

$$\omega := \frac{d\theta}{\theta},$$

gehen zur logarithmischen Ableitung (bezüglich a) über und erhalten eine Identität, in der c nicht mehr vorkommt:

$$-\omega(v'-a) + \omega(v'+a+b) = -\omega(v''-a) + \omega(v''+a+b) \text{ für alle } a,b \in V,$$

d.h.

$$\omega(v''-a) - \omega(v'-a) = \omega(v''+a+b) - \omega(v'+a+b).$$

Mit anderen Worten,

$$\omega(v'' + v) - \omega(v' + v),\ v \in V,$$

ist invariant gegenüber Verschiebungen mit beliebigen Elementen aus V, d.h. diese 1-Form hat konstante Koeffizienten, d.h. sie ist von der Gestalt

$$\omega(v'' + v) - \omega(v' + v) = dl(v)$$

mit einer $\mathbb{C}$-Linearform

$$l : V \to \mathbb{C}.$$

Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned} dl(v) &= \frac{d\theta}{\theta}(v''+v) - \frac{d\theta}{\theta}(v'+v) = d\log\theta(v''+v) - d\log\theta(v'+v) \\ &= d\log\frac{\theta(v''+v)}{\theta(v'+v)} \end{aligned}$$

d.h.

$$d\left(l(v) - \log\frac{\theta(v''+v)}{\theta(v'+v)}\right) = 0,$$

d.h.

$$l(v) - \log\frac{\theta(v''+v)}{\theta(v'+v)} = \text{const.}$$

d.h.

$$e^{l(v)} = \frac{\theta(v''+v)}{\theta(v'+v)} \cdot A_1$$

d,h,

$$\theta(v+v'') = A_1 \cdot \theta(v+v') \cdot e^{l(v)}$$

mit einer Konstanten

$$A_1 \in \mathbb{C}^*.$$

Wir führen eine lineare Variablen-Transformation durch und erhalten

$$(2) \qquad \theta(v+\sigma) = A \cdot \theta(v) \cdot e^{l(v)}$$

mit

$$\sigma := v''-v' \notin \Gamma$$

(vgl. (1)) und einer Konstanten

$$A \in \mathbb{C}^*.$$

Wir haben zu zeigen, die Relation (2) führt zu einem Widerspruch zu unseren Voraussetzungen. Die Beweis-Idee besteht darin, zu zeigen, aus (2) folgt, θ ist auch eine Theta-Funktion bezüglich des echt größeren Gitters

$$\Gamma' := \Gamma + \sigma\mathbb{Z}$$

(vom selben Rang) bezüglich des Paares (H, α'), wobei

$$\alpha' : \Gamma' \to \mathbb{C}_1^*$$

eine Fortsetzung von $\alpha: \Gamma \to \mathbb{C}_1^*$ ist. Dies kann aber unmöglich für alle Theta-Funktionen

$$\theta \in H^0(X, L)$$

der Fall sein, denn der Raum dieser Theta-Funktionen hat die Dimension

$$N+1 := \dim H^0(X, L(H, \alpha)) = \sqrt{\det_\Gamma E}$$

während der der Theta-Funktionen bezüglich Γ' die kleinere Dimension

$$N'+1 := \dim H^0(X, L(H, \alpha')) = \sqrt{\det_{\Gamma'} E} <^{64} \sqrt{\det_\Gamma E}$$

hat. Das ist nur möglich, wenn nicht alle θ zum selben Multiplikator α' gehören. Der Raum

(3) $$\dim H^0(X, L(H, \alpha)) = \cup W_{\alpha'},$$

zerfällt daher in eine Vereinigung linearer Unterräume $W_{\alpha'}$, einer Dimension

$$\dim W_{\alpha'} \le N'+1 < N+1$$

mit

$$W_{\alpha'} \subseteq H^0(X', L(H, \alpha')), X' := V/\Gamma',$$

wobei die Vereinigugng über die verschiedenen Fortsetzungen α' von α erstreckt wird. Der komplexe Vektorraum (3) kann nicht Vereinigung endlich vieler Unterräume kleinerer Dimension sein. Die Anzahl der Fortsetzungen

$$\alpha': \Gamma' \to \mathbb{C}_1^*$$

von

$$\alpha: \Gamma \to \mathbb{C}_1^*$$

muß also unendlich sein. Das ist aber nicht der Fall: Γ hat in Γ' endlichen Index und die Werte von α' auf der Nebenklasse γ'+Γ sind durch den Wert α'(γ') bereits eindeutig festgelegt.[65]

Wir haben damit den Beweis des 3. Schrittes auf den Beweis der Aussage zurückgeführt, mit (2) ist die Funktion θ eine Theta-Funktion bezüglich des Gitters

$$\Gamma' = \Gamma + \sigma\mathbb{Z}$$

und bezüglich eines Paares (H, α'), wobei α' eine Fortsetzung von α ist. Dazu reicht es zu zeigen, es gilt

(4) $\quad E(\Gamma' \times \Gamma') \subseteq \mathbb{Z}$ und

(5) $\quad \theta(v+\sigma) = A' \cdot e^{\pi H(v,\sigma) + \frac{\pi}{2} H(\sigma,\sigma)} \theta(v)$ für $v \in V$

mit einer Konstanten $A' \in \mathbb{C}^*$.[66]

Zum Beweis ersetzen wir in (2) v durch v + γ mit γ∈Γ und erhalten

---

[64] Nach dem Elementarteilersatz besitzt das größere Gitter Γ' eine Basis $e_1, \dots, e_{2d}$ mit

$$\Gamma = a_1 e_1 + \dots + a_{2d} e_{2d},$$

d.h.

$$\det_\Gamma E = \det(E(a_i e_i, a_j e_j)) = (\prod_{i=1}^{2d} a_i)^2 \det(E(e_i, e_j)) = (\prod_{i=1}^{2d} a_i)^2 \det_{\Gamma'} E > \det_{\Gamma'} E$$

[65] Wegen $\alpha'(\gamma'+\gamma'') = \alpha'(\gamma') \cdot \alpha'(\gamma'') \cdot e^{i\pi E(\gamma', \gamma'')}$.

[66] Eigentlich müßten wir noch zeigen, daß A' betragsmäßig gleich 1 iat. Das erreicht man jedoch in der üblichen Weise, indem man H um einen Korand abändert (d.h. um eine Linearform die gerade die gewünschte Änderung des Realteils von H zur Folge hat).

$$A\cdot\theta(v+\gamma)\cdot e^{\ell(v+\gamma)} = \theta(v+\sigma+\gamma) = \alpha(\gamma)\cdot e^{\pi H(v+\sigma,\gamma)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}\theta(v+\sigma)$$
$$= Ae^{\ell(v)}\cdot\ \alpha(\gamma)\cdot e^{\pi H(v+\sigma,\gamma)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}\theta(v)$$
$$= A\cdot e^{\ell(v)}\cdot e^{\pi H(\sigma,\gamma)}\theta(v+\gamma),$$
also
$$e^{\ell(\gamma)} = e^{\pi H(\sigma,\gamma)},$$
also
$$\pi H(\sigma,\gamma) - \ell(\gamma) \in 2\pi i\mathbb{Z} \text{ für jedes } \gamma\in\Gamma.$$
Die Funktion (in γ) hat also nur rein imaginäre Werte:
$$\pi H(\sigma,\gamma) - \ell(\gamma) = \pi H(\gamma,\sigma) - \ell(\gamma) + \pi(H(\sigma,\gamma) - H(\gamma,\sigma))$$
$$= \pi H(\gamma,\sigma) - \ell(\gamma) + 2\pi i\, E(\sigma,\gamma)$$

Also hat auch
$$\pi H(v,\sigma) - \ell(v),\ v\in V,$$
rein imaginäre Werte auf dem Gitter $\Gamma\subseteq V$. Da Γ über $\mathbb{R}$ den Raum V erzeugt, hat sie sogar in allen Punkten von V rein imaginäre Werte. Da die Funktion $\mathbb{C}$-linear in v ist, folgt
$$\pi H(v,\sigma) - \ell(v) = 0 \text{ für jedes } v\in V.$$
Damit gilt
$$2\pi i\, E(\sigma,\gamma) \in 2\pi i\mathbb{Z} \text{ für } \gamma\in\Gamma.$$
also
$$E(\Gamma'\times\Gamma') \subseteq \mathbb{Z},$$
d.h. es gilt (4). Weiter ist nach (2)
$$\theta(v+\sigma) = A\cdot\theta(v)\cdot e^{\ell(v)} = A\cdot\theta(v)\cdot e^{\pi H(v,\sigma)} = A'\ \theta(v)\cdot e^{\pi H(v,\sigma)+\frac{\pi}{2}H(\sigma,\sigma)},$$
d.h. es gilt (5).

4. Schritt: Die Abbildung φ ist eine Immersion (induziert auf den Tangentialräumen injektive Abbildungen.

Angenommen, das ist nicht so. Dann gibt es einen einen Punkt $x_0\in X$ und Tangentialvektor D mit dem Fußpunkt in x_0 mit

(6) $$d\varphi(D) = 0.$$

Wir identifizieren eine Umgebung von $x\in X = V/\Gamma$ mit einer offenen Mengen von V, x_0 mit einem Punkt $v_0\in V$ und schreiben
$$D = \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial}{\partial v_i}$$
in geeigneten komplexen Koordinaten $(v_1,\dots,v_d)$ auf V. Wir haben zunächst die Bedinung (6) mit Hilfe der eingeführten lokalen Koordinaten auszudrücken. Falls die i-te Koordate des Bildes von v_0 bei der Abbildung
$$\varphi: X \to \mathbb{P}^N,\ x \mapsto [\theta_0(x):\dots:\theta_N(z)]$$
ungleich Null ist, so hat sie lokal in einer Umgebung von v_0 die (affine Gestalt
$$V \to \mathbb{A}^N,\ v \mapsto \left(\frac{\theta_0(v)}{\theta_i(v)},\dots,\widehat{\left(\frac{\theta_i(v)}{\theta_i(v)}\right)},\dots,\frac{\theta_N(v)}{\theta_i(v)}\right)$$

Nach Voraussetzung gilt für jedes j,

$$0 = D(\theta_j/\theta_i) = \frac{1}{\theta_i^2(v_0)}(D(\theta_j)\cdot\theta_i(v_0) - D(\theta_i)\cdot\theta_j(v_0)).$$

Da der Ausdruck rechts $\mathbb{C}$-linear in θ_j ist, derhalten wir damit

$$0 = (D(\theta^*)\cdot\theta_i(v_0) - D(\theta_i)\cdot\theta^*(v_0))$$

für jedes $\theta^*\in H^0(X, L^{\otimes 3})$. Also ist

$$D(\log\theta^*) = D(\mathrm{Log}\,\theta_i) = -\ a_0 \in \mathbb{C}$$

eine von θ^* unabhängige Konstante. Dies gilt insbesondere für alle Thetafunktionen der Gestalt

$$\theta^*(v) = \theta(v-a)\theta(v-b)\theta(v+a+b), \text{ mit } a,b\in V, \theta\in H^0(X, L).$$

Mit

(7) $$f(v) := D(\log\theta)(v)$$

erhalten wir

$$f(v_0 - a) + f(v_0 - b) + f(v_0 + a + b) = -a_0$$

für alle $a,b\in V$. Durch Differenzieren nach der i-ten Koordinaten von a erhält man

$$-\frac{\partial f}{\partial v_i}(v_0 - a) + \frac{\partial f}{\partial v_i}(v_0 + a + b) = 0,$$

d.h. die ersten Ableitungen von f sind konstant, d.h. f ist ein Polynom vom Grad ≤ 1.

Wir lösen jetzt (7) nach θ auf. Dazu setzen wir

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_d \end{pmatrix} \text{ und } g(v) = \log\theta(v).$$

Dann ist

$$f(v) = Dg(v) = \frac{\partial g(v+\lambda\alpha)}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}$$

also für jedes $\lambda\in\mathbb{C}$:

$$f(v+\lambda\alpha) = \frac{\partial g(v+\lambda\alpha)}{\partial\lambda}$$

Es folgt

$$g(v+\lambda\alpha) - g(v) = \int_{\lambda=0}^{\lambda}\frac{\partial g(v+\lambda\alpha)}{\partial\lambda}d\lambda = \int_{\lambda=0}^{\lambda} f(v+\lambda\alpha)d\lambda$$

Für jedes fest gewählte v hat $f(v+\lambda\alpha)$ die Gestalt

$$f(v+\lambda\alpha) = a\lambda + b \text{ (mit } b = f(v)).$$

Damit ist

$$g(v+\lambda\alpha) - g(v) = \int_{\lambda=0}^{\lambda}(a\lambda + b)d\lambda = [\frac{a}{2}\lambda^2 + b\lambda]_0^\lambda = [\frac{a}{2}\lambda^2 + b\lambda = c\,\lambda^2 + \lambda f(v)$$

mit

$$c = \frac{1}{2}D(f) \in\mathbb{C},$$

also

$$\log\theta(v+\lambda\alpha)/\theta(v) = c\,\lambda^2 + \lambda f(v)$$

also

$$\theta(v+\lambda\alpha) = e^{c\lambda^2+\lambda f(v)}\theta(v) \text{ für alle } v\in V, \lambda\in\mathbb{C}.$$

Diese ist eine zur Identität (2) des vorigen dritten Schrittes analoge Identität (mit denselben Konsequenzen): Indem wir für beide Seiten dieser Identität die Funktionalgleichung für θ (bezüglich einer Verschiebung $v \mapsto v + \gamma$ mit $\gamma\in\Gamma$) aufschreiben und die Ergebnisse vergleichen, sehen wir, für jedes $\lambda\in\mathbb{C}$ ist

$$E(\gamma, \lambda\alpha) \in \mathbb{Z}. \text{ für jédes } \gamma\in\Gamma \text{ und jedes } \lambda\in\mathbb{C}.$$

d.h. $\lambda\alpha$ liegt im Gitter

$$\{v\in V \mid E(\gamma, v) \in \mathbb{Z} \text{ für jedes } \gamma\in\Gamma\}.$$

Das ist offensichtlich nicht möglich für alle $\lambda\in\mathbb{C}$. Man beachte α ist gerade der (von Null verschiedenen Tangentialvektor, der bei $d\varphi$ in die Null gehen sollte.

QED.

Bemerkung

Bevor wir auf einige Konsequenzen des Satzes von Lefschetz eingehen, erinnern wir an einige allgemeine Fakten aus der algebraischen Geometrie.

1.4.9 Algebraisierbare analytische Räume

Sei X eine algebraische Varietät über $\mathbb{C}$.[67] Die Punktmenge X besitzt dann in kanonischer Weise die Struktur eines analytischen Raumes.[68] Wir bezeichnen diesen Raum mit

$$X_{hol}$$

und dessen Strukturgarbe mit

$$\mathcal{O}_{X,hol}.$$

Der Einfachheit halber werden wir oft einfach von den holomorphen Funktionen auf X sprechen und von den holomorphen Abbildungen auf X oder mit Werten in X, usw.

Ein analytischer Raum X heißt algebraisch oder algebraisierbar, wenn es eine algebraische Varietät Y gibt mit

$$X \cong Y_{hol}.$$

Bemerkung

Die vollständigkeit der algebraischen Mannigfaltigkeit X ist äquivalent zur Kompaktheit von X_{hol}. Das folgt aus dem Lemma von Chow (eine Aufblasung einer vollständigen Varietät X ist abgeschlossene Teilvarietät eines projektiven Raums).

1.4.10 Satz von Chow

Seien X eine vollständige algebraische Varietät über $\mathbb{C}$ und Y eine abgeschlossene analytische Teilmenge[69] von X_{hol}. Dann ist Y in X abgeschlossen bezüglich der Zariski-Topologie.

Bemerkung

Chow hat diesen Satz für $X = \mathbb{P}^N$ bewiesen. Die allgemeine Aussage ergibt sich aus diesem Spezialfall mit Hilfe des Lemmas von Chow.[70]

---

[67] d.h. lokal ist X Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ und wird dort durch Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ definiert.

[68] d.h. auf X ist der Begriff der holomorphen Funktion definiert: lokal sind das solche Funktionen die durch Einschränkung holomorpher Funktionen des $\mathbb{C}^n$ entstehen (in welchem X lokal durch Polynome definiert ist). Diese Definition hängt nicht von der Wahl der lokalen Einbettung von X in den $\mathbb{C}^n$ ab, da der Koordinatenwechsel in beiden Richtungen durch polynomiale (also biholomorphe) Abbildungen vermittelt wird.

[69] d.h. lokal wird Y in X durch endlich viele holomorphe Gleichungen definiert.

[70] Die Aussage ist ein Spezialfall des Einbettungssatzes von Kodaira: eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X ist genau dann algebraisch, wenn es auf X eine geschlossene positiv definite (1,1)-Form gibt, deren Kohomologie-Klasse ganzzahlig ist (d.h im Bild von $H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathbb{C})$ liegt).

1.4.11 Folgerung: analytische Abbildungen algebraischer Varietäten
Seien X und Y vollständige algebraische Varietäten und

$$f: X_{hol} \to Y_{hol}$$

eine beliebige holomorphe Abbildung. Dann kommt f von einem algebraischen Morphismus

$$X \to Y.$$

Beweis. Wir betrachten den Graphen der Abbildung f,

$$\Gamma = \Gamma_f \subseteq X_{hol} \times Y_{hol} = (X\times Y)_{hol}.$$

Die Menge Γ ist eine abgeschlossene analytische Teilmenge von $(X\times Y)_{hol}$., also auf Grund von 1.4.10 abgeschlossen in X×Y bezüglich der Zariski-Topologie. Sei
$(x, f(x)) \in \Gamma$
ein beliebig vorgegebener Punkt. Wir betrachten die Projektion

$$\Gamma \to X$$

auf den ersten Faktor in einer Umgebung dieses Punktes. Diese Projektion induziert einen lokalen Homomorphismus

(1) $$\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\Gamma,(x,,f(x))}$$

der algebraischen lokalen Ringe. Wir haben zu zeigen, dieser Homomorphismus ist ein Isomorphismus. Da die Projektion $\Gamma \to X$ surjektiv ist, ist (1) jedenfalls injektiv. Wir haben die Surjektivität zu beweisen (und können dabei annehmen, der linke Ring ist ein Teilring des rechten).

Wir setzen[71]

$$\mathcal{O}_1 := \mathcal{O}_{X,x}$$

$$\mathcal{O}_2 := \mathcal{O}_{\Gamma,(x,,f(x))}$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_1 := \mathcal{O}_{X_{hol},x}$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_2 := \mathcal{O}_{\Gamma_{hol},(x,,f(x))}.$$

. Da die Projektion

$$\Gamma \to X$$

eigentlich ist und bijektiv, so ist der Homomorphismus endlich (nach dem Hauptsatz von Zariski), d.h.

(2) $\mathcal{O}_2$ ist als Modul über $\mathcal{O}_1$ endlich erzeugt.

Weiter haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_1 & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{O}_2 \\ \cap & & \cap \\ \tilde{\mathcal{O}}_1 & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & \tilde{\mathcal{O}}_2 \end{array},$$

wobei der untere horizontale Homomorphismus ein Isomorphismus ist:

Siehe Wells: Differential analysis on complex manifolds, Theorem VI.4.1 oder Griffiths & Harris: Principles of algebraic geometry Ch.1, Section 4, p. 191. Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{P}^n$ besitzen eine solche (1,1)-Form auf Grund der Fubini-Study-Metrik des $\mathbb{P}^n$.

[71] Die algebraischen lokalen Ringe bestehen aus den Potenzreihen rationaler Funktionen, die analytischen aus den Potenzreihenentwicklungen holomorpher Funktionen in den jeweils betrachteten Punkten.

$\tilde{f}$* ist ein Isomorphismus.
Bezeichne

m_i := das maximale Ideal von $\mathcal{O}_i$

und

$\tilde{m}_i$:= das maximale Ideal von $\tilde{\mathcal{O}}_i$

Es gilt

$\tilde{m}_i = m_i\tilde{\mathcal{O}}_i$

(weil die Potenzreihenentwicklung einer im Ursprung verschwindenden Funktion mit dem Lineargliedern beginnt und m_i von diesen Linearglieder erzeugt wird). Weiter haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_1/m_1^2 & \to & \mathcal{O}_2/m_2^2 \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \tilde{\mathcal{O}}_1/\tilde{m}_1^2 & \xrightarrow{\cong} & \tilde{\mathcal{O}}_2/\tilde{m}_2^2 \end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen sind Isomorphismen, weil jede Poltenzreihe modulo der Glieder einer Ordnung ≥ 2 ein Polynom ist. Wir sehen so, der obere horizontale Abbildung ist ein Isomorphimus, und damit insbesonder surjektiv. Deshalb gilt

$$m_2 = m_1\mathcal{O}_2 + m_2^2$$

Nach dem Lemma von Nakayama[72] (angewandt auf den $\mathcal{O}_2$-Modul m_2 und den Teilmodul $m_1\mathcal{O}_2$) folgt

$$m_2 = m_1\mathcal{O}_2.$$

Weiter lesen wir aus dem dem obigen Diagramm ab,

$$\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 + m_2^2 = \mathcal{O}_1 + m_1^2\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 + m_1\mathcal{O}_1.$$

Nach dem Lemma von Nakayama (angewandt auf den endlichen $\mathcal{O}_1$-Modul $\mathcal{O}_2$ und den Teilmodul $\mathcal{O}_1$) folgt

$$\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1,$$

d.h. ist ein Isomorphismus.
QED.

1.4.12 Über die Anzahl algebraischer Strukturen auf analytischen Mannigfaltigkeiten

Eine Implikation der eben bewiesenen Aussage ist, daß ein kompakter komplexer Raum höchstens eine algebraische Struktur haben kann.[73] Das ist im Fall nicht-kompakter komplexer Räume vollkommen anders. Das folgende Beispiel stammt von Serre.

Beispiel

---

[72] Seien (A,m) ein lokaler Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und N ein Teilmodul mit

$$M = N + mM.$$

Dann gilt M = N.

[73] Ein Isomorphismus der komplexen Strukturen induziert einen der algebraischen Strukturen.

Für jede eindimensionale abelsche Varietät X über $\mathbb{C}$ gibt es bis auf (algebraische) Isomorphie genau eine algebraische Gruppe G, so daß die Erweiterung

$$0 \to \mathbb{C} \to G \to X \to 0$$

nicht trivial ist.[74] In der analytischen Kategorie ist die Situation jedoch anders: wir können die universellen Überlagerungen betrachten (welche analytische ober keine algebraischen Abbildungen sind) und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathbb{C} & \to & \tilde{G} & \to & \mathbb{C} & \to 0 \\ & \| & & \downarrow & & \downarrow\pi & \\ 0 \to & \mathbb{C} & \to & G & \to & X & \to 0 \end{array} .$$

Die oberen horizontalen Abbildungen sind durch die Universalitätseigenschaften der universellen Überlagerungen von G und X festgelegt, wenn man zusätzlich noch fordert, daß die neutralen Elemente ineinander abgebildet werden sollen. Alle Abbildungen sind dann Morphismen algebraischer Gruppen.

Die Fasern der vertikalen Abbildungen werden auf Grund der Kommutativität des Diagramms ineinander abgebildet. Diese Fasern sind aber gerade die fundamentalen Gruppen der Räume der unteren Zeile. Die obere Zeile fällt damit zusammen mit dem Ende der langen Homotopiesequenz des Faserbündels $G \to X$ und ist damit insbesondere exakt (die Exaktheit links ist trivial, weil die fundamentale Gruppe trivial ist). Wir haben gezeigt, die obere Zeile ist exakt, d.h. die Gruppe in der Mitte ist eine Erweiterung von G_a mit sich selbst. Es gibt jedoch nur eine solche Erweiterung: die triviale[75] , d.h. wir können annehmen $\tilde{G} = \mathbb{C}^2$ und die obere Zeile ist die offensichtliche exakte Sequenz (die $\mathbb{C}^2$ mit der direkten Summe von zwei Exemplaren von $\mathbb{C}$ identifiziert). Wir erhalten so, G ist isomorph zum Faktorraum

$$G \cong \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$$

von $\mathbb{C}^2$ nach einem Gitter vom Rang 2, d.h. ω_1, ω_2 ist eine Basis von $\mathbb{C}^2$. Als komplexe Mannigfaltigkeit hat G also die Gestalt

$$(\mathbb{C}/\mathbb{Z})\times(\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^* = G_m\times G_m$$

---

[74] Nach Serre: Groupes algébrique et corps de classes, Hermann Paris 1959, Th. 7, chap. VII, §3, Abschnitt 17 ist die Gruppe $\mathrm{Ext}(X, G_a)$ der Erweiterungen

(1) $$0 \to G_a \to G \to X \to 0$$

für abelsche Varietäten X isomorph zu $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Dies ist in unserem Fall ein 1-dimensionaler Vektorraum. Auf diesem Vektorraum operiert $G_m = \mathbb{C}^*$ und alle von Null verschiedenen Elemente liegen im selben Orbit von G_m, d.h. je zwei solche Erweiterungen G, G' sind durch ein kommutatives Diagramm der Gestalt

(2) $$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & G_a & \to & G & \to & X & \to 0 \\ & \downarrow c & & \downarrow & & \| & \\ 0 \to & G_a & \to & G' & \to & X & \to 0 \end{array} \quad \text{mit } c \in G_m = \mathbb{C}^*$$

miteinander verbunden. Nach dem Fünferlemma sind die algebraischen Gruppen G und G' isomorph. Umgekehrt liefert jeder Isomorphismus $G \to G'$ algebraischer Gruppen für jede Erweiterung (1) ein kommutatives Diagramm (2) (weil die Automorphismen von G_a gerade die Elemente von G_m sind).

[75] vgl. Serre VII, §2, Abschnitt 7.

Diese Gruppe ist aber gerade die triviale Erweiterung von X mit $\mathbb{C}$.[76] Wir haben damit zwei verschiedene algebraische Strukturen, nämlich

$$G \text{ und } G_m \times G_m ,$$

auf derselben analytischen Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$.

Bemerkung
Wir setzen jetzt unsere Betrachtung der komplexen algebraischen Tori fort.

1.4.13 Folgerung: Algebraizität komplexer Tori

Sei $X = V/\Gamma$ ein d-dimensionaler komplexer Torus. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Der komplexe Raum X kommt von einer projektiven algebraischen Varietät.
(ii) Der komplexe Raum X kommt von einer algebraischen Varietät.
(iii) Auf X gibt es d algebraisch unabhängige meromorphe Funktionen.
(vi) Es gibt eine solche positiv definite hermitische Form

$$H: V \times V \to \mathbb{C},$$

daß der Imaginärteil $E = \mathrm{Im}\, H$ auf $\Gamma\times\Gamma$ nur ganzzahlige Werte hat.

Beweis. Die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sind trivial.[77] Die Implikation

$$\text{(vi)} \Rightarrow \text{(i)}$$

wurde bereits bewiesen (vgl. 1.4.8 Satz von Lefschetz). Wir haben also noch die Implikation

$$\text{(iii)} \Rightarrow \text{(vi)}$$

zu beweisen.
Seien

$$f_1,...,f_d: X \longrightarrow \mathbb{C}$$

algebraische unabhängige meromorphe Funktionen auf X.
Bezeichne

$$D_i = \mathrm{div}\,(f_i)_\infty$$

den Polstellen-Divisor von f_i. Wir setzen

$$D = D_1 + ... + D_d.$$

Weiter sei

$$L = \mathcal{O}_X(D)$$

das zu D gehörige Geradenbündel auf X.[78] Nach Konstruktion besitzt besitzt das Geradenbündel d+1 holomorphe Schnitte

---

[76] Man kann $\mathbb{C}$ (als algebraische Gruppe) in diese Gruppe einbetten zum Beispiel durch

$$\mathbb{C} \to (\mathbb{C}/\mathbb{Z})\times(\mathbb{C}/\mathbb{Z}),\ a + bi\ a\ (ai \bmod \mathbb{Z}, bi \bmod \mathbb{Z}).$$

[77] Es gibt dann auf X sogar d rationale Funktionen, die algebraische unabhängig sind.

[78] d.h. die Quotienten der lokalen Gleichungen von D sind Übergangsfunktionen von L. Genauer, ist

$X = \cup U_\alpha$

eine offene Überdeckung und ist $g_\alpha: U_\alpha \to \mathbb{C}$ lokale Gleichung von D auf U_α, so hat die Garbe der L der Schnitt des Bündels auf U_α die Gestalt

$$L \mid U_\alpha = \frac{1}{g_\alpha}\mathcal{O}_{U_\alpha}.$$

Die holomorphen Schnitte von L lassen sich deshalb mit den meromorphen Funktionen f auf X identifizieren, für welche gilt

$$fg_\alpha \text{ regulär auf } U_\alpha,$$

$$\sigma_0, \dots, \sigma_d : X \to L$$

mit

(1) $$\sigma_i = f_i \sigma_0 \text{ für } i = 1, \dots, d.$$

Nach dem Satz von Appell gibt es eine Hermitische Form

$$H: V \times V \to \mathbb{C}$$

mit

$$\operatorname{Im} H(\Gamma\times\Gamma) \subseteq \mathbb{Z}$$

und einen Multiplikator

$$\alpha: \Gamma \to \mathbb{C}^*_1$$

mit

$$L = L(H,\alpha).$$

Da L nicht-triviale Schnitte besitzt, ist die Hermitische Form zumindest positiv semi-definit,

$$H \text{ positiv semi-definit}$$

(vgl. 1.4.4 und 1.4.5). Seien N der Nullraum von H,

$$N := \{v\in V \mid H(v, v') = 0 \text{ für alle } v'\in V\}$$

und X' der zugehörige Teiltorus von X,

$$X' = N/N\cap\Gamma.$$

Dann kommt H von einer positiv definiten quadratischen Form $\bar{H}$ auf dem Faktortorus

$$\bar{X} = X/X' = (V/\Gamma)/(N+\Gamma/\Gamma) = (V/N)//(\Gamma+N)/N) = \bar{V}/\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma} = \Gamma/N\cap\Gamma,$$

$$\bar{H}: \bar{V}\times\bar{V} \to \mathbb{C} \text{ positiv definit.}$$

Dabei ist Im $\bar{H}$ ganzzahlig auf dem Gitter $\bar{\Gamma}$,

$$\operatorname{Im} \bar{H}\,(\bar{\Gamma}\times\bar{\Gamma}) \subseteq \mathbb{Z}.$$

Nach dem Theorem von Lefschetz ist $\bar{X}$ eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit,

$$\bar{X} \subseteq \mathbb{P}^N.$$

Wir wir beim Beweis von 1.4.4 gesehen haben, sind die Schnitte von L (aufgefaßt als Theta-Funktionen $V \to \mathbb{C}$) auf den Restklassen modulo N konstant. Wegen (1) sind damit alle Mengen der Gestalt

$$\{x\in X \mid f_i(x) = \text{const}\}$$

Vereinigungen von Restklassen modulo X'.[79] Damit kommt jede der Funktionen f_i von einer meromorphen Funktion

$$\bar{f}_i: \bar{X} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Bezeichne

$$\mathbb{C}(\bar{X})$$

den Körper der rationalen Funktionen auf der algebraischen Mannigfaltigkeit $\bar{X}$. Dann gilt

---

d.h.

$$\operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g_\alpha) \ge 0 \text{ auf } U_\alpha,$$

d.h.

$$\operatorname{div}(f) + D \ge 0,$$

d.h mit den meromorphen Funktionen, deren Polstellen-Divisor ≥ -D ist. Beispiele für solche meromorphen Funktionen sind

$$1, f_1, \dots, f_d$$

[79] Falls die Bedingung $f_i(x) = \text{const}$ in x erfüllt ist, so ist sie auch auf der ganzen Restklasse erfüllt.

$$d = \text{tr deg}_{\mathbb{C}}\ \mathbb{C}(\bar f_1, \dots, \bar f_d) \le \text{tr. deg}_{\mathbb{C}}\ \mathbb{C}(\bar X) = \dim \bar X \le \dim X \le d.$$

Es folgt dim X' = 0, d.h. H ist positiv definit.
QED.

1.4.14 Algebraizität der eindimensionalen Tori

Jeder komplexe Torus der Dimension 1 ist algebraisch.
Beweis. Sei

$$X = V/\Gamma$$

ein algebraischer Torus der Dimension 1, d.h.

$$V = \mathbb{C} \text{ und } \Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega,\ \omega\in\mathbb{C} - \mathbb{R}.$$

Wir setzen

$$H(z, w) := \frac{1}{\text{Im } \omega} z\cdot\bar w \text{ für } z, w\in\mathbb{C}.$$

Dann ist H eine hermitische Form, welche positiv definit ist, mit

$$\text{Im } H(1,1) = \text{Im } H(\omega, \omega) = 0$$
$$\text{Im}(\omega, 1) = - \text{Im } H(1,\omega) = 1.$$

Insbesondere ist Im H ganzzahlig auf Γ.
QED.
Bemerkungen
Ein Reihe von projektiven Einbettungen des 1-dimensionalen Torus X sind wohlbekannt (siehe zum Beispiel Hartshorne). Zum Beispiel ist die Weierstraßsche $\wp$-Funktion

$$\wp(z) = \frac{1}{(z - z_0)^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left(\frac{1}{(z\text{-}n\text{-}m\omega)^2} - \frac{1}{(z_0\text{+}n\text{+}m\omega)^2}\right)$$

meromorph mit den Perioden 1 und ω und besitzt in den Punkten von Γ doppelte Pole. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \to \mathbb{P}^2, z \mapsto [1, \wp(z), \wp'(z)]$$

definiert einen Isomorphismus von X mit einer ebenen Kurve dritten Grades, deren Gleichung die Gestalt

$$X_0X_2^2 = 4X_1^3 + aX_0^2X_1 + bX_0^3$$

hat (wobei a und b von ω abhängen).

1.4.15 Der Fall einer Dimension d > 1

Sei V ein komplexer Vektorraum der endlichen Dimension d > 1. Dann ist der komplexe Torus

$$X = V/\Gamma$$

für fast jede Wahl des Gitters Γ nicht algebraisch. Außerdem gilt für fast jede Wahl von Γ

$$\text{Pic } X = \text{Pic}^0 X.$$

Nach dem Satz von Appell ist letzteres äquivalent dazu, daß es keine schiefsymmetrische Form

$$E: V \times V \to \mathbb{R}$$

gibt, mit

$$E(\Gamma\times\Gamma) \subseteq \mathbb{Z} \text{ und } E(ix, iy) = E(x,y) \text{ für } x,y\in V.$$

Beweis. Wir setzen

$$T = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$$

und betrachten die Abbildung

$$\wedge^2\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) \to \wedge^2_{\mathbb{C}}\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(U, \mathbb{C}) = \wedge^2_{\mathbb{C}}\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$$

$$= \bigwedge^2_{\mathbb{C}} (T \oplus \overline{T})$$
$$= \bigwedge^2_{\mathbb{C}} T \oplus (T \otimes \overline{T}) \oplus \bigwedge^2_{\mathbb{C}} \overline{T}.$$
Das Bild dieser Abbildung besteht aus den schiefsymmetrischen Bilinearformen
$$E: V \times V \to \mathbb{C},$$
die ganzzahlig auf dem Gitter Γ sind. Eine solche Bilinearform genügt außerdem noch der Bedingung
$$E(ix, iy) = E(x,y),$$
genau dann wenn sie im mittleren Summanden
$$T \otimes \overline{T}$$
liegt. Es reicht also zu zeigen, für fast jede Wahl von Γ liegt kein Element des Bildes dieser Abbildung (außer der 0) in $T \otimes \overline{T}$. Dazu wiederum reicht es zu zeigen, die induzierte Abbildung
$$\bigwedge^2 \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) \to \bigwedge^2_{\mathbb{C}} T$$
ist für fast jede Wahl von Γ injektiv.
Nun ist aber das Bild von
$$\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) = T$$
ein Gitter in T und bei geeigneter Wahl von Γ kann man auf diese Weise jedes Gitter von T (maximalen Rangs) erhalten.[80] Es reicht also, das nachfolgende Lemma zu beweisen.
QED.

Lemma
Sei V ein d-dimensionaler komplexer Vektorraum. Dann ist für fast alle Gitter
$\Gamma \subseteq V$
maximalen Rangs die Abbildung

(1) $$\bigwedge^d_{\mathbb{Z}} U \to \bigwedge^d_{\mathbb{C}} V$$

injektiv (so daß auch alle Abbildungen $\bigwedge^i_{\mathbb{Z}} U \to \bigwedge^i_{\mathbb{C}} V$ mit $i \le d$ injektiv sind).

Fast alle soll hier folgendes bedeuten. Wir wählen ein komplexes Koordinatensystem auf V und beschreiben das Gitter U durch die (d×2d)-Matrix
$$M = (\omega_{ij})$$
der Koordinatenvektoren einer Basis von Γ. Die Ausnahme-Gitter, für welche die obige Abbildung nicht injektiv ist, entprechen dann einer abzahlbaren Vereinigung von Hyperebenen im Raum dieser Matrizen.

Beweis. Die Spalten der Matrix bilden ein Gitter vom Rang 2d im $\mathbb{C}^d$. Unter diesen Spalten sind also d linear unabhängig über $\mathbb{C}$. Wir beschränken uns hier auf dem Fall, daß die ersten d Spalten unabhängig sind. Dies entspricht der Betrachtung einer offenen Teilmenge einer endlcihen offenen Überdeckung des Raums dieser Matrizen. Sei
$$A = (v_1,...v_d)$$
die Matrix der ersten d Spalten $v_1,...v_d$ von M und
$$B = (v_{i_1},...,v_{i_d})$$
eine Matrix von irgendwelchen d Spalten von M. Dann gilt

---
[80] Für ein gegebenes Gitter von T fixiere man eine Basis und wählen eine duale Basis (über $\mathbb{R}$).

$$B = CA$$
mit irgendeiner komplexen d×d-Matrix C und
$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_d} = \det(C) \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_d.$$
Die Vektoren der Gestalt
$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_d}$$
bilden eine Basis von $\wedge^d_{\mathbb{Z}} U$, und die Abbildung (1) ist genau dann injektiv, wenn diese Vektoren auch in $\wedge^d_{\mathbb{C}} V$ linear unabhängig über $\mathbb{Z}$ sind. Das Gegenteil ist genau dann der Fall, wenn die endlich vielen komplexen Zahlen
$$\det C$$
einer linearen Relation über $\mathbb{Z}$ genügen. Die Anzahl aller möglichen Relationen dieser Gestalt ist abzahlbar (man lasse die Koeffizienten dieser Relationen alle möglichen Werten in $\mathbb{Z}$ durchlaufen).
QED.

2. Algebraische Theorie: die Sprache der algebraischen Mannigfaltigkeiten

Bezeichnungen

k ein algebraisch abgeschlossener Körper

2.1 Definition der abelschen Varietäten

2.1.1 Definition

Eine abelsche Varietät X ist eine vollständige algebraische Varietät[81] über k zusammen mit einem Gruppengesetz
$$m: X \times X \to X,$$
wobei m und die Invertierungsabbildung
$$i: X \to X, x \mapsto x^{-1},$$
Morphismen von Varietäten sind.

Bemerkungen

(i) Im Fall $k = \mathbb{C}$ ist der komplex-analytische Raum zu einer abelschen Varietät eine kompakte komplex-analytische Gruppe, d.h. auf Grund der Ergebnisse von 1.1 ein komplexer Torus.

(ii) Im Fall $k \neq \mathbb{C}$ besteht die erste Aufgabe der Theorie der abelschen Varietäten darin, zu zeigen, daß ihre Eigenschaften denen der komplexen Tori analog sind.

(ii) Im Fall char $k = 0$ kann man viele Ergebnisse dieser Art beweisen indem man sie auf den Fall $k = \mathbb{C}$ zurückführt (Lefschetz-Prinzip). Im Fall char $k \neq 0$ ist das jedoch nicht möglich.

2.1.2 Fragestellungen im Zusammenhang mit abelschen Varietäten

Wir haben vor, die folgenden grundlegenden Fragestellungen zu untersuchen.

Problem 1. Man bestimme die Struktur von X als abstrakte Gruppe.

Wir werden zeigen, die Gruppe X ist kommutativ und teilbar.

[81] Insbesondere soll das bedeuten, X ist irreduzibel.

Sei weiter

$$n_X: X \to X,\ p \mapsto n\cdot p,$$

der Morphismus der Multiplikation mit $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Dann zeigen wir, der Kern von n_X hat die folgende Struktur.

$$X_n := \mathrm{Ker}(n_X) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \text{ falls char } k \text{ kein Teiler ist von } n$$

$$X_{p^m} \cong (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^i \text{ falls } p = \text{char } k > 0,\ m \geq 0.$$

Dabei kann i einen beliebigen Wert annehmen mit

$$0 \leq i \leq g := \dim X.$$

Die ganze Zahl i heißt p-Rang der Varietät X.

Problem 2. Man berechne die Kohomologie $H^q(X, \Omega^p)$

Dabei sei Ω^p die Garbe der p-Formen auf X. Wie im klassichen Fall konstruieren wir einen kanonischen Isomorphismus

$$H^q(X, \Omega^p) \cong \wedge^p H^0(X,\Omega^1) \otimes_k \wedge^q H^1(X,\mathcal{O}_X)$$

und wir zeigen

$$\dim H^1(X,\mathcal{O}_X) = \dim H^0(X,\Omega^1) = q.$$

Wir zeigen außerdem, daß die fundamentale Gruppe $\pi_1(X)$ (im algebraischen Sinne, d.h. der projektive Limes der Galois-Gruppen der endlichen unverzweigten Überlagerungen) ist isomorph zu

$$\pi_1(X) \cong \begin{cases} \prod_l (\mathbb{Z}_l)^{2g} & \text{falls char } k = 0 \\ \prod_{l \neq p} (\mathbb{Z}_l)^{2g} \times \mathbb{Z}_p^i & \text{falls char } k = p > 0 \end{cases}$$

Sei $Y \xrightarrow{f} X$ ein solcher Morphismus, daß auf Y eine endliche Gruppe G operiert und X gerade die Faktor-Varietät von Y bezüglich G ist. Dann existieren eine ganze Zahl n > 0 und ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "n_X"] & & X \end{tikzcd}$$

Außerdem existiert auf Y die Struktur einer abelschen Varietät, bezüglich welcher f und g Homomorphismen sind.

Problem 3. Man bestimme die Struktur von Pic X.

Wir zeigen, die exakte Sequenz von Gruppen

$$0 \to \mathrm{Pic}^0 X \to \mathrm{Pic}\, X \to NS(X) \to 0,$$

in welcher $\mathrm{Pic}^0 X$ die natürliche Struktur einer abelschen Varietät und NS(X) eine freie abelsche Gruppe mit endlicher Erzeugendenzahl ist (und deren Rang ρ Basiszahl von X heißt).

Wir werden sogar versuchen, eine Beschreibung der Gruppe NS(X) zu finden, die analog ist zur klassischen Beschreibung mit Hilfe der Riemann-Formen.

Hier sind noch zwei damit zusammenhängende Probleme.

(a) Man zeige, daß für je zwei abelsche Mannigfaltigkeiten X,Y die abelsche Gruppe Hom(X,Y) der relationstreuen Morphismen frei ist und endlich erzeugt.

(d) Man finde Matrizen-Darstellungen dieser Gruppe (im klassischen Fall kommen diese Darstellungen von $\mathrm{Hom}(H_1(X), H_1(Y))$.

Problem 4. Man charakterisiere die amplen umkehrbaren Garben auf X.

Allgemeineres Problem: Man berechne die Kohomologie mit Werten in einer beliebigen umkehrbaren Garbe und insbesondere die Dimension des Raums aller globalen Schnitte, d.h. man löse das Riemann-Roch-Problem auf X.

2.1.3 Singularitätenfreiheit

Abelsche Varietäten besitzen keine singulären Punkte.

Beweis. Sei X eine abelsche Varietät. Dann gibt es mindestens (wie auf jeder Varietät) einen nicht-singulären Punkt

$$a \in X.$$

Sei jetzt

$$x \in X$$

ein beliebig vorgegebener Punkt. Dann ist die Multiplikation mit xa^{-1},

$$\lambda_{xa^{-1}}: X \to X,\ x' \mapsto xa^{-1}x',$$

ein Isomorphismus der Varietät X mit sich, welcher eine Umgebung von a in eine Umgebung von x abbildet. Also ist auch x ein nicht-singulärer Punkt von X.
QED.

2.1.4 Kommutativität des Gruppengesetzes

Als abstrakte Gruppe ist jede abelsche Varietät kommutativ.

Beweis. Wir werden zwei Beweise für diese Aussage angeben. Den einen jetzt, den anderen später. Der erste Beweis verallgemeinert den klassischen Beweis für kompakte komplexe Lie-Gruppen über $\mathbb{C}$, welcher die adjungierte Darstellung von X auf dem Tangentialraum an X im Punkt e verwendet.
Anstelle der adjungierten Darstellung auf dem Tangentialraum betrachten wir diese Darstellung auf allen Räumen

$$\mathcal{O}_{X,e}/m^n_{X,e},$$

wobei $\mathcal{O}_{X,e}$ den lokalen Ring von X im neutralen Element $e \in X$ bezeichnet,

$$m_{X,e}$$

das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,e}$ und n die natürlichen Zahlen durchläuft. Für jedes $x \in X$ bezeichne

$$C_x: X \to X,\ x' \mapsto xx'x^{-1},$$

die Konjugation mit x. Dies ist ein Isomorphismus von X mit sich, welcher das neutrale Element e in sich abbildent. Also induziert C_x für jedes $x \in X$ einen Automorphismus

$$C^*_x: \mathcal{O}_{X,e} \to \mathcal{O}_{X,e}$$

und damit für jedes n eine Automorphismus

$$C^*_{x,n}: \mathcal{O}_{X,e}/m^n_{X,e} \to \mathcal{O}_{X,e}/m^n_{X,e}.$$

Auf diese Weise erhalten wir für jedes n eine Abbildung

$$\gamma_n: X \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{X,e}/m^n_{X,e}) \subseteq \mathrm{End}(\mathcal{O}_{X,e}/m^n_{X,e}).$$

Bezüglich geeigneter affiner Koordinaten in einer Zariski-Umgebung $U \subseteq X$ von

$$e = (0,...,0) \in U \subseteq k^N$$
hat C_x die Gestalt
$$y \mapsto (f_1(x,y), ... , f_N(x,y))$$
mit in x und y regulären Funktionen f_i. Wir denken uns diese Funktionen im Urprung in Potenzreihen entwickelt. Bezeichne
$$f_i^n$$
das Taylorpolynom des Grades n-1, zur Potenzreihe von f_i. Dann ist $C^*_{x,n}$ durch die Abbildungsvorschrift
$$\mathcal{O}_{X,e}/m^n_{X,e} \to \mathcal{O}_{X,e}/m^n_{X,e}\ , p(y) \mapsto p(f^n_1(x,y), ... , f^n_N(x,y)), y = (y_1,...,y_N),$$
gegeben. Man beachte, diese Abbildung ist linear in p und regulär in x und y. deshalb ist γ_n für jedes n ein reguläre Abbildung (mit Werten in einem endlich-dimensionalen k-Vektorraum). Da das Bild von γ_n affin ist und X eine vollständige (und irreduzible) Varietät ist, muß γ_n konstant sein,
$$\gamma_n = \text{const.}$$
Nach Konstruktion ist $\gamma_n(e)$ die identische Abbildung. Also ist $\gamma_n(x)$ für jede x die identische Abbildung, d.h.
$$C^*_{x,n} = \text{id für jedes } x\in X \text{ und jedes } n\in\mathbb{N}.$$
Wir gehen zum inversen Limes über und erhalten, daß C^*_x die Identische Abbildung
$$\hat{\mathcal{O}}_{X,e} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,e}$$
auf der Komplettierung von $\mathcal{O}_{X,e}$ induziert. Dann ist aber die Abbildung
$$C^*_x: \mathcal{O}_{X,e} \to \mathcal{O}_{X,e}$$
selbst die identische Abbildung. Das wiederung bedeutet,
$$C_x: X \to X, y \mapsto xyx^{-1},$$
stimmt in einer Zariski-Umgebung mit der identischen Abbildung überein. Das gilt dann aber sogar auf der Abschließung dieser Zariski-Umgebung. Da X irreduzibel ist, folgt
$$C_x = Id_X \text{ für jedes } x\in X.$$
Mit anderen Worten, X ist kommutativ.
QED.

2.1.5 Vereinbarung

Von jetzt ab schreiben wir das Gruppengesetzt auf der abelschen Varietät X additiv. Insbesondere bezeichne λ_x die Abbildung
$$\lambda_x: X \to X, y \mapsto y + x.$$

2.1.6 Die Garbe der 1-Formen auf X

Seien X eine abesche Varietät über k,
$$T = T_{X,0}$$
deren Tangentialraum im neutralen Element 0 und
$$\Omega_0 := \text{Hom}_k(T, k)$$

dessen Dual. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\Omega_0 \otimes_k \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X,$$

wobei Ω^1_X die Garbe der regulären 1-Formen auf X bezeichne.

Beweis. Betrachten wir den Garben-Morphismus

$$\varphi : \Omega_0 \otimes_k \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X , \theta \otimes f \mapsto f \cdot \omega_\theta .$$

Dabei bezeichne

$$\omega_\theta \in \Omega^1_X$$

die eindeutig bestimmte (und global definierte) verschiebungsinvariante 1-Form auf X, die im neutralen Element den Wert θ hat:

$$(\omega_\theta)_0 = \theta, \rho_x^* \omega_\theta = \omega_\theta \text{ für jedes } x \in X.$$[82]

Explizit: Für $x \in X$ überführt

$$\rho_{-x}: X \to X, y \mapsto y - x,$$

eine Umgebung von $0 \in X$ in eine Umgebung von $x \in X$, induziert also einen Isomorphismus

$$d\rho_{-x}: T_x X \to T_0 X$$

auf den Tangentialräumen. Wir setzen für jeden Tangentialvektor $D \in T_x X$ mit Fußpunkt in x,

$$\omega_\theta(D) := \theta(d\rho_{-x}(D)) = (d\rho_{-x})^*(\theta)(D) = \rho_{-x}^*(\theta)(D),$$

d.h.

$$(\omega_\theta)_x := \rho_{-x}^*(\theta).$$

Da durch

$$X \times X \to X, (x, y) \mapsto \rho_{-x}(y),$$

eine reguläre Abbildung definiert ist, ist ω_θ für jedes θ eine reguläre Differentialform. Der Garben-Morphismus φ ist damit wohldefiniert. Nach Konstruktion induziert φ für jeden Punkt x einen Isomorphismus von Ω_0 mit dem Raum der 1-Formen von X im Punkt x. Mit anderen Worten,

$$\varphi \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x} : \Omega_0 \to \Omega^1_X(x),$$

ist für jedes $x \in X$ ein Isomorphismus. Nach dem Lemma von Nakayama ist dann aber die Abbildung der Halme

$$\varphi_x : \Omega_0 \otimes_k \mathcal{O}_{X,x} \to \Omega^1_{X,x},$$

für jedes $x \in X$ ein Isomorphismus.[83] Das bedeutet aber, φ ist ein Isomorphismus.

QED.

---

[82] Wie oben sei $\rho_x: X \to X, y \mapsto y + x$, die Verschiebung un $x \in X$.

[83] Nach Nakayama ist die Abbildung surjektiv. Da Bild- und Urbild-Modul frei vom Rang 1 über $\mathcal{O}_{X,x}$ sind (d.h. die Abbildung ist durch eine 1×1-Matrix gegeben), folgt aus der Surjektivität die Injektivität: die Abbildung besteht in der Multiplikation mit einem Element $c \in \mathcal{O}_{X,x}$. Da die Abbildung surjektiv ist, gilt $c \cdot d = 1$ für ein d, d.h. c ist eine Einheit, d.h. die Abbildung ist injektiv.

2.1.7 Folgerung: die globalen regulären 1-Formen auf X

Sei X ein abelsche Varietät über k. Dann gilt

$$H^0(X, \Omega^1_X) = T \ (:= \mathrm{Hom}_k\ (T_{X,0}\ , k)).$$

Beweis. Die Varietät X ist vollständig und zusammenhängend (sogar irreduzibel). Jede globale reguläre Funktion auf X ist also konstant, d.h.

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) = k.$$

Es folgt

$$H^0(X, V\otimes_k \mathcal{O}_X) = V$$

für jeden k-Vektorraum V. Für $V = \Omega_0$ erhalten wir auf Grund von 2.1.6 die Behauptung.
QED.

2.1.8 Surjektivität von n_X

Sei X ein abelsche Varietät über k. Für jede ganze Zahl n, die teilerfremd ist zur Charakteristik von k ist, ist der Morphismus

$$n_X: X \to X,\ x \mapsto n\cdot x = x + ... + \ x \text{ (n-mal)}$$

surjektiv.

Beweis. 1. Schritt: Die durch die Addition a: X×X → X auf den Tangentialräumen induzierte Abbildung

$$d_0a: T_0X\times T_0X \to T_0X$$

ist gerade die Vektorraum-Addition $(v,w) \mapsto v+w$.

Auf jeden Fall ist die Abbildung

$$d_0a{:}T_{(0,0)}X\times X \to T_0X$$

k-linear. Die Einbettungen

$$i_0: X \to X\times X,\ x \mapsto (0,x), \quad \text{und} \quad i_1: X \to X\times X,\ x \mapsto (x,0),$$

induzieren Einbettungen

$$di_0: T_0X \to T_{(0,0)}X\times X \quad \text{und} \quad di_1: T_0X \to T_{(0,0)}X\times X,$$

die den Tangentialraum

$$T = T_0X$$

mit Unterräumen T', T" von $T_{(0,0)}X\times X$ identifizieren, wobei

$$T_{(0,0)}X\times X = T'\oplus T''$$

gilt. Da da eine k-lineare Abbildung ist, reicht es zu zeigen, die beiden Einschränkungen

$$d_0a|_{T'}: T' \to T \quad \text{und} \quad da|_{T''}: T'' \to T$$

sind bezüglich der beschriebenen Identifikationen beide gerade die identische Abbildung. Mit anderen Worten, wir haben zu zeigen,

$$d_0a \circ di_0 = \text{id und } d_0a\circ di_1 = \text{id}.$$

Da der Übergang zum Differential ein Funktor ist, reicht es zu zeigen,

$$a\circ i_0 = \mathrm{Id} \quad \text{und} \quad a\circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$$

Die beiden letzten Identitäten gelten aber trivialerweise.

2. Schritt. Für jedes $n\in\mathbb{Z}$ gilt $n_X(v) = n\cdot v$.

Nach dem ersten Schritt hat die Abbildung

$$(n+1)_X : X \xrightarrow{(n_X,id)} X\times X \to X$$

im Punkt 0 das Differential

$$(d(n+1)_X)(v) = da\,(dn_X(v), v) = dn_X(v) + v.$$
Das Differential der Multiplikation mit 0 ist die Nullabbildung,
$$d0_X = 0.$$
Zusammen ergibt sich durch Induktion nach n,
$$(dn_X)(v) = n\cdot v$$
ist die Multiplikation mit n.
3. Schritt: Abschluß des Beweises
Sei jetzt n teilerfremd zur Charakteristik
$$p = \text{char } k$$
des Grundkörpers (diese Bedingung ist leer im Fall $p = 0$). Dann induziert die Multiplikation mit n einen Isomorphismus auf jedem k-Vektorraum. Insbesondere ist dann

(1) $\qquad dn_X: T_0X \to T_0X$ ein Isomorphismus.

Angenommen, n_X ist nicht surjektiv. Dann hat das Bild von n_X eine Dimension, die kleiner ist als die von X,
$$\dim \operatorname{Im} n_X < \dim X$$
(weil X irreduzibel ist). Nach dem Satz über die Dimension der Faser müssen die Fasern von n_X alle mindestens 1-dimensional sein. Insbesondere ist
$$\dim \operatorname{Ker} n_X = \dim n_X^{-1}(0) > 0.$$
Insbesondere gibt es einen von Null verschiedenen Tangentialvektor
$$D \in T_0X - \{0\}$$
mit
$$D \in T_0 \operatorname{Ker} n_X .$$
Da die Abbildung n_X auf Ker n_X konstant ist, folgt $dn_X = 0$ auf T_0Ker n_X, also
$$dn_X(D) = 0,$$
im Widerspruch zu (1).
QED.
Bemerkung
Das nachfolgende Lemma liefert neben anderen wichtigen Anwendungen einen zweiten Beweis für die Kommutativität der Gruppe X.

2.1.9 Starrheitslemma (erste Formulierung)
Seien X eine vollständige Varietät, Y und Z beliebige Varietäten und
$$f: X\times Y \to Z$$
ein solcher Morphismus, daß für einen Punkt
$$y_0 \in Y$$
das Bild
$$f(X\times\{y_0\}) = \{z_0\}$$
aus nur einem Punkt besteht. Dann gibt es einen Morphismus $g: Y \to Z$, für welchen das Diagramm
$$\begin{array}{ccc} X\times Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ & {\scriptstyle f}\searrow & \downarrow{\scriptstyle g} \\ & & Z \end{array}$$
kommutativ ist. Dabei bezeichne p_2 die Projektion auf den zweiten Faktor.

Beweis. Wir fixieren einen beliebigen Punkt
$$x_0 \in X$$

und definieren die Abbildung g als

$$g: Y \to Z, y \mapsto f(x_0, y).$$

Zum Beweis der Identität

$$f = g \circ p_2$$

reicht es zu zeigen, daß diese Identität auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge von X×Y besteht (da X×Y als Varietät insbesondere irreduzibel ist). Sei

$$U \subseteq Z$$

eine affine Umgebung des Punktes $z_0 \in Z$,

$$F := Z - U$$

und

$$G := p_2(f^{-1}(F)).$$

Dann ist G abgeschlossen in Y (weil X vollständig ist). Weiter gilt

$$y_0 \notin G,$$

denn kein Punkt von $f(X\times\{y_0\}) = \{z_0\}$ liegt in $F = Z - U \subseteq Z - \{z_0\}$. Deshalb ist

$$V := Y - G$$

eine nicht-leere offene Menge von Y. Für jeden Punkt $y\in V$ wird die vollständige Varietät

$$X \times \{y\}$$

durch f in die affine Varietät U abgebildet, d.h.

$$f(X \times \{y\})$$

besteht aus nur einem Punkt. Damit gilt aber für $x\in X$ und $y\in V$

$$f(x,y) = f(x_0, y) = g\circ p_2(x,y),$$

d.h. es gilt die Behaupt (auf X×V also auch auf X×Y).
QED.

2.1.10 Folgerung 1:Morphismen abelscher Varietäten und Homomorphismen
Sei

$$f: X \to Y$$

ein Morphismus algebraischer Varietäten. Falls X und Y abelsche Varietäten sind, gibt es einen Homomorphismus

$$h: X \to Y$$

und einen Punkt $a\in Y$ mit

$$f(x) = h(x) + a$$

für jedes $x\in X$.
Beweis. O.B.d.A. sei

$$f(0) = 0$$

Falls das nicht so ist, können wir f durch f - f(0) ersetzen. Es reicht zu zeigen, in dieser Situation ist f ein Gruppen-Homomorphismus. Dazu betrachten wir den folgenden Morphismus algebraischer Varietäten.

$$\varphi: X \times X \to Y, (x,y) \mapsto f(x+y) - f(y) - f(x).$$

Es gilt

$$\varphi(x, 0) = f(x) - f(0) - f(x) = 0,$$

d.h.

$$\varphi(X\times\{0\}) = \{0\}.$$

Nach dem Starrheitslemma hängt $\varphi(x,y)$ nicht vom ersten Argument ab, d.h. es ist

$$\varphi(x, y) = \varphi(0, y) = f(y) - f(y) - f(0) = 0$$

für alle $x, y\in X$. Also ist f ein Gruppen-Homomorphismus.
QED.

2.1.11 Folgerung 2: Ein weiterer Beweis der Kommutativität

Abelsche Varietäten X sind kommutativ.

Beweis. Nach 2.1.12 unterscheidet sich der Morphismus

$$h: X \to X, x \mapsto x^{-1},$$

nur durch eine Konstante von einem Gruppen-Homomorphismus. Wegen h(1) = 1 ist h selbst schon ein Gruppen-Homomorphismus, d.h. es gilt für beliebige $x, y \in X$:

$$x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

d.h. xy = yx.

QED.

2.1.12 Folgerung 3:

Sei X eine abelsche Varietät. Wir betrachten den Funktor

$$h^X: (\text{vollst. Var})_* \to Ab, Y \mapsto Hom(Y, X),$$

auf der Kategorie der punktierten vollständigen Varietäten, wobei wir uns X mit dem Basispunkt $0 \in X$ versehen denken und Hom die Menge der Morphismen, die die Basispunkte respektieren, bezeichnen soll.

In dieser Situation ist der Funktor h^X linear, d.h. für beliebige punktierte vollständige Varietäten S, T ist die natürliche Abbildung

$$Hom(S, X) \times Hom(T, X) \to Hom(S \times T, X), (f, g) \mapsto f \circ pr_S + g \circ pr_T,$$

bijektiv. Dabei seien

$$pr_S: S \times T \to T \text{ und } pr_T: S \times T \to T$$

die natürlichen Projektionen.

Beweis. Injektivität.

Sei

$$h = f \circ pr_S + g \circ pr_T.$$

Dann gilt

$$h(s,t) = f(s) + g(t).$$

Seien s_0 und t_0 die Basispunkte von S bzw. T. Dann gilt $f(s_0) = 0 = g(t_0)$, also

$$f(s) = h(s, t_0) \text{ und } g(t) = h(s_0, t).$$

Das Paar (f,g) ist somit durch dessen Bild h eindeutig festgelegt.

Surjektivität. Sei

$$h: S \times T \to X$$

ein beliebiger Morphismus von algebraischen Varietäten mit

$$h(s_0, t_0) = 0.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} f(s) &:= h(s, t_0) \\ g(t) &:= h(s_0, t) \\ k(s,t) &:= h(s,t) - f(s) - g(t) \end{aligned}$$

für jedes $s \in S$ und jedes $t \in T$.

Dann gilt für jedes $s \in S$:

$$k(s, t_0) = h(s, t_0) - f(s) - g(t_0) = 0,$$

d.h. $k(S \times \{t_0\}) = 0$. Nach dem Starrheitslemma ist k(s,t) unabhängig von s, d.h.

$$k(s,t) = k(s_0, t) = h(s_0, t) - f(s_0) - g(t) = 0$$

für alle s und alle t. Mit anderen Worten: h ist das Bild von (f,g) büe der obigen Abbildung.

QED.

2.1.13 Ein Kriterium für abelsche Varietäten

Seien X eine vollständige Varietät,

$$e \in X$$

ein Punkt und

$$m: X\times X \to X$$

ein Morphismus algebraischer Varietäten mit

$$m(e, x) = m(x, e) = x \text{ für jedes } x\in X.$$

Dann ist X eine abelsche Varietät mit dem Gruppengesetzt $m:X\times X\to X$ und dem neutralen Element e.

Beweis. Wir schreiben

$$xy \text{ anstelle von } m(x,y).$$

Wir betrachten den Morphismus

$$\psi: X\times X \to X\times X, (x,y) \mapsto (xy, y).$$

Es gilt

$$\psi^{-1}(e,e) = \{(e,e)\}.$$

Nach dem Satz über die Dimension der Faser gilt damit

$$\dim \psi(X\times X) = \dim X\times X,$$

d.h. das Bild von ψ liegt dicht in $X\times X$. Weil X (und damit auch $X\times X$)vollständig ist, ist die Abbildung ψ surjektiv,

ψ ist surjektiv.

Daraus folgt insbesondere die Existenz des Linksinversen:

(1) Für jeden Punkt $x\in X$ gibt es einen Punkt $x'\in X$ mit $x'x = e$.

Wir setzen

$$\Gamma' := \{(x,y) \in X\times X \mid xy = e \}$$

und bezeichnen mit

$$p_i: X\times X \to X, i = 1,2,$$

die Projektion auf den i-ten Faktor. Wegen (2) gilt

$$p_2(\Gamma') = X.$$

Wir fixieren eine irreduzible Komponente Γ von Γ' mit

$$p_2(\Gamma) = X.$$

Dann gilt

$$\dim \Gamma \ge \dim X.$$

Mit

$$p'_i := p_i|_\Gamma$$

gilt

$$p'^{-1}_1(e) \subseteq \text{}^{84} \{(e,e)\},$$

d.h. unter den Fasern von $p_1|_\Gamma: \Gamma \to X$ gibt solche einer Dimension ≤ 0. Nach dem Satz über die Dimension der Faser gilt damit

$$\dim p_1(\Gamma) = \dim X.$$

Weil Γ vollständig ist, folgt

$$p'_1: \Gamma \to X \text{ ist surjektiv.}$$

Insbesondere ergibt sich daraus die Existenz den Rechtsinversen:

(2) Für jeden Punkt $x\in X$ gibt es einen Punkt $x'\in X$ mit $xx' = e$.

Betrachten wir jetzt den Morphismus

$$\varphi: \Gamma\times X \to X, (x',x,y) \mapsto x'(x,y).$$

Es gilt für jedes $(x',x)\in\Gamma$:

---

[84] Auf Γ' gilt $xy = e$. Wenn außdem noch $x = e$ sein soll, so muß auch $y = e$ sein.

$$\begin{aligned}\varphi(x', x, e) &= x'(xe)\\ &= x'x && \text{(nach Voraussetzung über m)}\\ &= e, && \text{(nach Definition von } \Gamma)\end{aligned}$$

d.h.

$$\varphi(\Gamma\times\{e\}) = \{e\}.$$

Nach dem Starrheitslemma ist $\varphi(x', x, y)$ unabhängig von (x',x), d.h. es gilt

$$x'(xy) = \varphi(x', x, y) = \varphi(e,e,y) = y,$$

d.h.

(3) $\qquad x'(xy) = y$ für alle $(x',x)\in\Gamma$ und alle $y\in X$.

Insbesondere besteht für jedes $(x', x) \in \Gamma$ die Relation

$$x'(xx') = x'.$$

Wir multiplizieren diese Identität von links mit einem beliebigen Element x'' und erhalten

$$x''(x'(xx')) = x''x'.$$

Für x'' können wir insbesondere ein Linksinverses von x' wählen, $x''x' = e$. Nach (3) ist dann $x''(x'(xx')) = xx'$ und zusammen bekommt die Identität die Gestalt

$$xx' = e.$$

Wir haben gezeigt:

(4) $\qquad xx' = e$ für jedes $(x',x) \in \Gamma$

(die Linksinversen von Γ sind auch rechtsinvers).

Betrachten wir jetzt die Abbildung

$$\chi: \Gamma\times X\times X \to X, (x', x, y, z) \mapsto x((x'y)z).$$

Für $y = z = e$ erhalten wir wegen (4) nur den Wert e, d.h.

$$\chi(\Gamma\times\{e\}\times\{e\}) = \{e\},$$

Nach dem Starrheitssatz ist $\chi(x',x,y,z)$ unabhängig von $(x',x)\in\Gamma$, d.h.

$$x((x'y)z) = \chi(x',x,y,z) = \chi(e, e,y,z) = e((ey)z) = yz.$$

Wir multiplizieren diese Identität mit x' und erhalten:

$$\begin{aligned}(x'y)z &= x'(x((x'y)z)) && \text{(nach (3))}\\ &= x'(yz) && \text{(nach der letzten Identität).}\end{aligned}$$

Diese Identität gilt für beliebige $y,z\in X$ und beliebige $(x',x)\in\Gamma$. $p'_1: \Gamma \to X$ surjektiv ist, folgt

$$(x'y)z = x'(yz) \text{ für beliebige } x', y, z \in X,$$

d.h. die Multiplikation m ist assoziativ.

Zusammen haben wir gezeigt, X ist eine Gruppe mit dem Gruppengesetz m. Wir haben noch zu zeigen

$$X \to X, x \mapsto x^{-1},$$

ist eine Morphismus von Varietäten.

Dazu betrachten wir wieder den Morphismus

$$\psi: X\times X \to X\times X, (x,y) \mapsto (xy, y).$$

vom Anfang des Beweises (dessen Surjektivität wir bereits gezeigt haben). Aus

$$\psi(x,y) = \psi(z,w)$$

folgt $xy = zw$ und $y = w$, also (da X eine Gruppe ist) $x = z$, d.h. $(x,y) = (z, w)$. Der Morphismus ist also sogar bijektiv.

Betrachten wir die durch ψ induzierte Abbildung

$$d\psi: T_eX\oplus T_eX \to T_eX\oplus T_eX.$$

Wegen $\psi(x, e) = (x, e)$ induziert $d\psi$ auf dem ersten direkten Summanden die Abbildung

$$v \mapsto (v, 0).$$

Wegen $\psi(e,x) = (x,x)$ induziert $d\psi$ auf dem zweiten direkten Summanden die Abbildung

$$w \mapsto (w,w).$$

Insgesamt erhalten wir, $d\psi$ ist die Abbildung

$$(v,w) \mapsto (v,0) + (w,w) = (v+w, w) = (v,w)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

d.h. $d\psi$ ist bijektiv. Der Morphismus ψ ist damit separabel[85] also birational.[86] Nach dem Hauptsatz von Zariski[87] ist ψ ein Isomorphismus. Wir haben gezeigt, die Umkehrung von ψ,

$$\psi^{-1}: X\times X \to X\times X, (x,y) \mapsto (xy^{-1}, y),$$

ist ein Morphismus von Varietäten. Die Einschränkung auf $\{e\}\times X$,

$$X \to X, y \mapsto y^{-1},$$

ist dann aber auch ein Morphismus.

QED.

2.2 Kohomologie und Basiswechsel

2.2.1 Einige Begriffe der Theorie der Schemata: geometrische Räume, Morphismen, affine Schemata, Schemata

2.2.2 Definition: eigentliche Morphismen

(i) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Der Morphismus heißt separiert, wenn der Diagonal-Morphismus

$$\Delta: X \to X\times_Y X$$

eine abgeschlossene Einbettung ist.

(ii) Der Morphismus ist vom endlichen Typ, wenn es eine offene affine Überdeckung

$$Y = \cup_i V_i, V_i = \mathrm{Spec}\, B_i$$

gibt mit der Eigenschaft, daß für jedes i das vollständige Urbild von V_i eine endliche affine Überdeckung

$$f^{-1}(V_i) = \cup_{j=1}^{n_i} U_{ij}, U_{ij} = \mathrm{Spec}\, A_{ij},$$

besitzt, wobei A_{ij} für jedes i und jedes j eine endlich erzeugte B_i-Algbra ist.

(iii) Der Morphismus f heißt abgeschlossen, wenn er abgeschlossene Teilmengen von X in abgeschlossene Teilmengen von Y überführt. Er heißt universell abgeschlossen, wenn für jeden Morphismus $Y' \to Y$ der induzierte Morphismus

$$X\times_Y Y' \to Y'$$

abgeschlossen ist.

Der Morphismus heißt eigentlich, wenn er separiert, vom endlichen Typ und universell abgeschlossen ist.

2.2.3 Bewertungskriterium für separierte Morphismen

Seien f. $X \to Y$ ein Morphismus von Schemata mit X noethersch. Dann sind folgenden Aussage äquivalent:

(i) f ist separiert.

(ii) Jedes kommutative Diagramm der Gestalt

---

[85] Wärre ψ inseparabel, so würde ψ über einen Frobenius faktorisieren, d.h. auf keinen Tangentialraum wäre $d\psi$ injektiv.

[86] Nach dem Hauptsatz von Zariski (vgl. Milne) zerfällt ψ in eine offene Einbettung und einen endlichen Morphismus. Das alle beteiligten Varietäten vollständig sind, ist ψ ein endlicher Morphismus. Da ψ bijektiv ist, ist ψ endlich vom Separabilitätsgrad 1. Weil ψ separabel ist, ist ψ endlich vom Grad 1, also birational.

[87] vgl. Hartshorne: Algebraic geometry, Theorem V, 5.2: Sei T: $X \to Y$ eine birationale Transformation von projektiven Varietäten mit X normal. Ist $p\in X$ ein fundamentaler Punkt von T, dann ist die totale Tranformierte T(P) zusammenhängend von einer Dimension ≥ 1. (Insbesondere kann ein birationale Morphismus mit Fundamentalpunkten nicht bijektiv sein). Die Voraussetzung der Projektivität ist unwesentlich und - wie wir später sehen werden - in unserer Situation erfüllt.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\,K & \to & X \\ i\downarrow & & \downarrow f \\ \mathrm{Spec}\,R & \to & Y \end{array}$$

mit einem Körper K und einem Bewertungsring $R \subseteq K$ besitzt höchstens eine kommutative Ergänzung

$$\mathrm{Spec}\,R \to X.$$

Dabei bezeichen i den durch die Inklusion $R \subseteq K$ definierten Morphismus.

Beweis: vgl. Hartshorne Theorem II, 4.3.

QED.

2.2.4 Bewertungskriterium für eigentlich Morphismen

Seien f. $X \to Y$ ein Morphismus von Schemata endlichen Typs mit X noethersch. Dann sind folgenden Aussage äquivalent:

(i) f ist eigentlich.

(ii) Jedes kommutative Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\,K & \to & X \\ i\downarrow & & \downarrow f \\ \mathrm{Spec}\,R & \to & Y \end{array}$$

mit einem Körper K und einem Bewertungsring $R \subseteq K$ besitzt genua eine kommutative Ergänzung

$$\mathrm{Spec}\,R \to X.$$

Dabei bezeichen i den durch die Inklusion $R \subseteq K$ definierten Morphismus.

Beweis: vgl. Hartshorne Theorem II, 4.7.

QED.

2.2.5 Satz über eigentliche Morphismen

Sei f: $X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus lokal noetherscher Schemata und F eine kohärente Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln auf X. Dann ist

$$R^p f_*(F)$$

für jedes nicht-negative ganze p eine kohärente Garbe von $\mathcal{O}_Y$-Moduln.

Beweis. siehe EGA

QED.

2.2.6 Kohomologie und Basiswechsel

Seien

$$f: X \to Y$$

ein eigentlicher Morphismus noetherscher Schemata mit

$$Y = \mathrm{Spec}\,A$$

affin und F eine kohärente Garbe auf X, welche flach ist über Y.[88] Dann existiert ein endlicher Komplex

$$0 \to K^0 \to K^1 \to \ldots \to K^n \to 0$$

von endlich erzeugten projektiven A-Moduln und ein funktorieller Morphismus

$$H^p(X \times_Y \mathrm{Spec}\,B, F \otimes_A B) \cong H^p(K^* \otimes_A B)$$

auf der Kategorie der A-Algebren B (für jedes nicht-negative ganze p).

Beweis. vgl. EGA

QED.

---

[88] d.h. für jedes $x \in X$ ist F_x flach über $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$

2.2.7 Folgerung 1: Halbstetigkeitssatz
Seien

$$f: X \to Y$$

ein eigentlicher Morphismus noetherscher Schemata und F eine kohärente Garbe auf X, welche flach ist über Y.[89] Dann gilt:

(i) Für jedes nicht-negative ganze p ist die Funktion

$$\varphi: Y \to \mathbb{Z},\ y \mapsto \dim_{k(y)} H^p(X_y, F_y)$$

nach oben halbstetig.[90] Dabei seien

$$X_y := X \times_Y \operatorname{Spec} k(y) \text{ und } F_y := F|_{X_y}$$

(ii) Die Funktion

$$Y \to \mathbb{Z},\ y \mapsto \chi(F_y)\ \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dim_{k(y)} H^p(X_y, F_y)$$

ist konstant auf Y.

2.2.8 Folgerung 2: direkte Bilder und Vektorraumbündel
Seien

$$f: X \to Y$$

ein eigentlicher Morphismus noetherscher Schemata und F eine kohärente Garbe auf X, welche flach ist über Y. Das Schema Y sei reduziert und zusammenhängend. Dann sind für jedes nicht-negative ganze p die folgenden Bedingungen äquivalent.

(i) $Y \to \mathbb{Z},\ y \mapsto \dim_{k(y)} H^p(X_y, F_y)$ ist konstant.

(ii) $R^p f_*(F)$ ist eine lokal freie Garbe auf Y und für jeden Punkt $y \in Y$ ist die natürliche Abbildung

$$R^p f_*(F) \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \to H^p(X_y, F_y)$$

ein Isomorphismus.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist außerdem die natürliche Abbildung

$$R^{p-1} f_*(F) \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \to H^{p-1}(X_y, F_y)$$

ein Isomorphismus für jedes $y \in Y$.

2.2.9 Folgerung 3: direkte Bilder und Kohomologie der Fasern 1
Seien

$$f: X \to Y$$

ein eigentlicher Morphismus noetherscher Schemata und F eine kohärente Garbe auf X, welche flach ist über Y. Weiter gelte

$$H^p(X_y, F_y) = 0$$

für eine nicht-negatives ganzes p und alle $y \in Y$. Dann ist die natürliche Abbildung

$$R^{p-1} f_*(F) \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \to H^{p-1}(X_y, F_y)$$

ein Isomorphismus für jedes $y \in Y$.

---

[89] d.h. für jedes $x \in X$ ist F_x flach über $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$

[90] d.h. die Mengen $\{y \in Y \mid \varphi(n) \ge n\}$ sind abgeschlossen in Y für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

2.2.10 Folgerung 4: direkte Bilder und Kohomologie der Fasern 2

Seien

$$f: X \to Y$$

ein eigentlicher Morphismus noetherscher Schemata und F eine kohärente Garbe auf X, welche flach ist über Y. Weiter gelte

$$R^k f_*(F) = 0 \text{ für alle } k \ge k_0.$$

Dann gilt

$$H^k(X_y, F_y) = 0 \text{ für alle } y \in Y \text{ und alle } k \ge k_0.$$

2.2.11 Folgerung 5: flacher Basiswechsel

Seien

$$f: X \to Y$$

ein eigentlicher Morphismus noetherscher Schemata und F eine kohärente Garbe auf X, welche flach ist über Y = Spec A. Weiter sei B eine flache A-Algebra. Dann gilt:

$$H^p(X \times_Y \operatorname{Spec} B, F \otimes_A B) \cong H^p(X, F \otimes_A B)$$

2.2.12 Folgerung 6: der Trivialisierungsort einer Familie von Geradenbündeln

Seien X ein vollständige Varietät, T eine beliebige (nicht-notwendig irreduzible) Varietät und L ein Geradenbündel auf X×T. Dann ist die Menge

$$T_1 := \{t \in T \mid L|_{X\times\{t\}} \text{ trivial auf } X\times\{t\}\}$$

abgeschlossen in T.

Sei weiter $p_2: X\times T_1 \to T_1$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Dann gilt

$$L|_{X\times T_1} \cong p_2^* M$$

für ein Geradenbündel M auf T_1.

Dieser Satz heißt auch Satz von der Schaukel oder Schaukelsatz.

Beweis des Satzes. 1. Schritt: ein Geradenbündel M auf einer vollständigen Varietät X ist genau dann trivial, wenn gilt

$$\dim H^0(X, M) > 0 \text{ und } \dim H^0(X, M^{-1}) > 0.$$

Die Notwendigkeit der Bedingung ist offensichtlich. Sei umgekehrt jetzt diese Bedingung erfüllt. Dann gibt es von Null verschiedene globale Schnitte

$\sigma \in H^0(X, M)$ und $\tau \in H^0(X, M^{-1})$,

also Garbenmorphismen

$$\sigma: \mathcal{O}_X \to M, f \mapsto f\sigma,$$

$$\tau: \mathcal{O}_X \to M^{-1}, f \mapsto f\tau,$$

die nicht identisch Null sind. Aus dem zweiten Garbenmorphismus erhalten wir durch Tensorieren mit M einen Garbenmorphismus

$$\tau: M \to \mathcal{O}_X, s \mapsto s\tau,$$

welcher nicht identisch Null ist. Wir setzen letzteren mit σ zusammen und erhalten einen Garbenmorphismus

$$\tau\circ\sigma: \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X,$$

welcher nicht identisch Null ist. Insbesondere ist $\tau(\sigma(1))$ ein von Nullverschiedener globaler Schnitt von $\mathcal{O}_X$. Da X vollständig (und irreduzibel) ist, ist jeder Schnitt der Strukturgarbe von X konstant. Also ist der Schnitt $\tau(\sigma(1))$ in keinem Punkt Null. Dann sind aber die Garbenmorphismen

$$\sigma\colon \mathcal{O}_X \to M,\ f \mapsto f\sigma,$$

$$\tau\colon M \to \mathcal{O}_X,\ s \mapsto s\tau,$$

in keinem Punkt Null. Das sie zwischen lokal freien Garben vom Rang 1 abbilden, sind σ und τ Isomorphismen. Insbesonder ist M trivial.

<u>2. Schritt</u>: Reduktion der Behauptung auf den Fall $T_1 = T$.

Nach dem ersten Schritt gilt

$$T_1 = \{t \in T \mid \dim H^0(X\times\{t\}, L|_{X\times\{t\}}) > 0 \text{ und } \dim H^0(X\times\{t\}, L^{-1}|_{X\times\{t\}}) > 0\}.$$

Nach Folgerung 1 (2.2.7(i)) ist T_1 eine abgeschlossene Teilmenge von T. Wir versehen T_1 mit der reduzierten Schema-Struktur, ersetzen T durch T_1 und L durch $L|_{X\times T_1}$.

Wir können damit annehmen,

(1) $$L|_{X\times\{t\}} \text{ ist trivial für jedes } t\in T,$$

wobei T ein reduziertes Schema ist. Wir haben zu zeigen,

$$L \cong p_2^* M \text{ mit einem Geradenbündel M auf T.}$$

Wie bisher sei $p_2\colon X\times T \to T$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Zum Beweis können wir annehmen, T ist zusammenhängend, d.h. wir sind in der Situation von 2.2.8 Folgerung 2. Wegen (1) gilt

(2) $$\dim H^0(X\times\{t\}, L|_{X\times\{t\}}) = 1 \text{ für jedes } t\in T.$$

Auf Grund der Folgerung ist $p_{2*}L$ eine lokal freie Garbe und die natürliche Abbildung

$$(f_*L)\otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \to H^0(X_t, L_t) = H^0(X\times\{t\}, L|_{X\times\{t\}})$$

ist ein Isomorphismus für jedes $t\in T$. Wegen (2) ist

$$M := p_{2*}L \text{ lokal frei vom Rang 1, d.h. umkehrbar.}$$

Betrachten wir den natürlichen Garbenmorphismus

$$p_2^* M = p_2^*\, p_{2*}L \to L$$

(der adjungiert ist zum identischen Morphismus von $p_{2*}L$). Es reicht zu zeigen, dies ist ein Isomorphismus. Jedenfalls ist es ein Morphismus von lokal freien Garben des Rangs 1. Nach dem Lemma von Nakayama reicht es zu zeigen, die Einschränkungen dieses Morphismus auf die Teilschemata $X\times\{t\}$ sind Isomorphismen.[91] Wegen der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} X\times\{t\} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "q"'] & X\times T \arrow[d, "p_2"] \\ \{t\} \arrow[r, hook, "j"] & T \end{tikzcd}$$

---

[91] Jeder abgeschlossene Punkt liegt auf einen solchen Teilschema. Übersetzt in kommutative Algebra bedeutet dies: Ist (A,m) ein lokaler Ring, $I \subseteq m$ ein Ideal, so ist eine A-lineare Abbildung

$$A \to A,\ x \mapsto ax,$$

genau dann ein Isomorphismus, wenn die induzierte Abbildung $A/I \to A/I$ ein Isomorphismus ist (was genau dann der Fall ist, wenn a eine Einheit von A ist.

Auf der linken Seite erhalten wir durch Einschränken auf der linken Seite

$$\begin{aligned}
p_2^* M|_{X\times\{t\}} &= i^* p_2^* M = q^*j^*M && \text{(wegen } j\circ q = p_2\circ i\text{)}\\
&= q^*j^*(p_{2*}L) && \text{(Definition von M)}\\
&= q^*(q_* i^*L) && \text{(Flacher Basiswechsel)[92]}\\
&= q^*(q_*\mathcal{O}_{X\times\{t\}}) && \text{(i*L ist trivial)[93]}\\
&= q^*\mathcal{O}_{\{t\}} && \text{(k ist algebraisch abgeschlossen)}\\
&= \mathcal{O}_{X\times\{t\}} && \text{(Definition des inversen Bilds)}\\
&= L|_{X\times\{t\}}
\end{aligned}$$

QED.

2.3 Der Satz vom Kubus I

2.3.1 Theorem

Seien X und Y vollständige Varietäten, Z eine beliebige Varietät und

$$x_0 \in X, y_0 \in Y, z_0 \in Z$$

fixierte Punkte. Dann ist jedes Geradenbündel L auf

$$X\times Y\times Z,$$

dessen Einschränkungen auf

$$\{x_0\}\times Y\times Z, X\times\{y_0\}\times Z \text{ und, } X\times Y\times\{z_0\},$$

trivial sind, selbst schon trivial.

Diese Aussage heißt Satz vom Kubus.

2.3.2 Bemerkungen

(i) Sei

$$T: (\text{voll. Var./k})^{op} \to Ab$$

ein Funktor auf der Kategorie der vollständigen Varietäten über k mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen.[94]

Seien weiter

$$X_1 , ... , X_n$$

beliebige vollständige Varietäten über k,

$$x_1^0 \in X_0, ... , x_n^0 \in X_n$$

fest gewählte Punkte und

$$\pi_i: X_1 \times .... \times X_n \to X_1\times ....\times\hat{X}_i\times...\times X_n, (x_1 , ... , x_n) \mapsto (x_1, ... \hat{x}_i ...,x_n)$$

$$\sigma_i: X_1 \times ....\times\hat{X}_i\times...\times X_n \to X_1 \times .... \times X_n, (x_1, ...\hat{x}_i...,x_n) \mapsto (x_1, ...x_i^0 ...,x_n)$$

die natürlichen Projektionen bzw. Inklusionen.

Betrachten wir die Homorphismen

---

[92] vgl Hartshorne III, Prop. 9.3, j ist separiert und p_2 ist flach.

[93] d.h. wir können i*L mit $\mathcal{O}|_{X\times\{t\}}$ identifizieren.

[94] Der Wert von T auf der einpunktigen Varietät sei die triviale Gruppe, T{e} = {0}-

$$\alpha_T^n\colon \prod_{i=1}^n T(X_1\times \dots \times \hat{X}_i \times \dots \times X_n) \to T(X_1 \times \dots \times X_n),\ (\xi_1,\dots,\xi_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \pi_i^*(\xi_i),$$

$$\beta_T^n\colon T(X_1 \times \dots \times X_n) \to \prod_{i=1}^n T(X_1\times \dots \times \hat{X}_i \times \dots \times X_n),\ \eta \mapsto (\sigma_1^*(\eta), \dots , \sigma_n^*(\eta)).$$

Dann gibt es eine natürliche Zerlegung

$$T(X_1 \times \dots \times X_n) = \mathrm{Im}(\alpha_T^n) \oplus \mathrm{Ker}(\beta_T^n)$$

Der Funktor T heißt von der Ordnung n-1, wenn α surjektiv ist (was genau dann der Fall ist, wenn β injektiv ist). Im Fall n = 2 sagt man statt dessen auch T ist linear, im Fall n = 3, T ist quadratisch, usw.

(ii) Mit diesen Definitionen besagt die Aussage des Satzes, der Funktor

$$\mathrm{Pic}\colon (\text{vollst. Var./k})^{op} \to Ab$$

ist (im Fall daß Z auch vollständig ist) quadratisch.

(iii) Seien jetzt

$$T_1, T_2, T_3 : (\text{vollst.Var./k})^{op} \to Ab$$

kontravariante Funktoren und

$$f\colon T_1 \to T_2 \text{ und } g\colon T_2 \to T_3$$

Morphismen, für welche die Sequenz

$$T_1 \xrightarrow{f} T_2 \xrightarrow{g} T_3$$

exakt ist. Wenn dann T_1 und T_3 die Ordnung n haben, so gilt dasselbe auch für T_2.

(iv) Aus der Bemerkung (iii) ergibt sich der Beweis des Satzes vom Kubus im Fall des Grundkörpers $\mathbb{C}$, denn dann hat man eine in X funktorielle exakte Sequenz

$$H^1(X, \mathcal{O}) \to H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^2(X, \mathbb{Z})$$

Der Funktor $H^1(X, \mathcal{O})$ ist linear[95] also erst recht quadratisch und der Funktor

$$H^2(X, \mathbb{Z})$$

ist quadratisch auf Grund der Künneth-Formel. Also ist auch $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ quadratisch.

Beweis. Zu (i). Im Fall n = 1, $X_1 = X$, $x_1^0 = a$, $\pi_1 = \pi$, $\sigma_1 = \sigma$ ist die Komposition

$$\{a\} \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{\pi} \{a\}$$

gleich der Identität. Dasselbe gilt also auch für

$$T\{a\} \xrightarrow{\alpha} TX \xrightarrow{\beta} T\{a\}.$$

Insbesondere ist α injektiv und die Sequenz

$$0 \to T\{a\} \xrightarrow{\alpha} TX \to \mathrm{Koker} \to 0$$

---

95 Nach der Künneth-Formel gilt

$$H^1(X\times Y, \mathbb{C}) = H^1(X,\mathbb{C}) \oplus H^1(Y, \mathbb{C}).$$

Vergleich der Hodge-Zerlegungen $H^1 = H^{0,1} \oplus H^{1,0}$ auf beiden Seiten liefert

$$H^1(X\times Y, \mathcal{O}) = H^1(X, \mathcal{O}) \oplus H^1(Y, \mathcal{O}),$$

d.h. die natürliche Abbildung

$$H^1(X, \mathcal{O}) \oplus H^1(Y, \mathcal{O}) \to H^1(X\times Y, \mathcal{O})$$

ist surjektiv.

ist exakt und zerfällt. Da β linksinvers ist zu α, folgt

$$TX = \mathrm{Im}(\alpha)\oplus\mathrm{Ker}(\beta).$$

Sei jetzt $n > 1$. Betrachten wir die Komposition

$$\prod_{i=1}^{n} T(X_1\times \ldots\times\hat{X}_i\times\ldots\times X_n) \xrightarrow{\alpha} T(X_1 \times \ldots \times X_n) \xrightarrow{\beta} \prod_{i=1}^{n} T(X_1\times \ldots\times\hat{X}_i\times\ldots\times X_n).$$

Es reicht zu zeigen, diese Komposition ist gerade die identische Abbildung. Dazu reicht es zu zeigen, die i-te Koordinate der Einschränkung von $\beta\circ\alpha$ auf den j-ten Faktor ist gleich Id im Fall $i = j$ und Null sonst. Die i-te Koordinate dieser Einschränkung ist gerade:

$$T(X_1\times \ldots\times\hat{X}_j\times\ldots\times X_n) \to T(X_1\times \ldots\times\hat{X}_i\times\ldots\times X_n),\ \xi \mapsto \sigma_i^* \pi_j^* (\xi).$$

Die Aussage im Fall $i = j$ ist trivial, wegen

$$\pi_i\circ\sigma_i = \mathrm{Id}.$$

Zum Beweis der Aussage im Fall $i \neq j$ schreibt man

$$T(X_1\times \ldots\times\hat{X}_j\times\ldots\times X_n) = \mathrm{Im}(\alpha')\oplus\mathrm{Ker}(\beta')$$

als direkte Summe in der Art, wie sie nach Induktionsvoraussetzung existiert. Zum Beweis von

$$\sigma_i^* \pi_j^* = 0 \text{ für } i \neq j$$

genügt es diese Identität auf $\mathrm{Im}(\alpha')$ und $\mathrm{Ker}(\beta')$ zu überprüfen. Im ersten Fall muß man zeigen

$$\sigma_i^* \circ\pi_j^* \circ\alpha' = 0 \text{ für } i \neq j$$

Dazu reicht es, dies für die Einschränkung auf jeden Faktor des Produkts, auf dem α' definiert ist, zu zeigen. Für diese Einschränkung gilt die Aussage aber nach Induktion (bezüglich der Anzahl n der Faktoren X_i).

Im zweiten Fall muß man zeigen,

$$\sigma_i^* \pi_j^* \mid \mathrm{Ker}\ \beta' = 0 \text{ für } i \neq j.$$

Da σ_i und π_j im Fall $i \neq j$ kommutieren, reicht es zu zeigen, $\sigma_i^* \mid \mathrm{Ker}\ \beta' = 0$. Das ist aber der Fall nach Definition von β'.

Zu (iii). Wegen der Exaktheit von

$$T_1 \xrightarrow{f} T_2 \xrightarrow{g} T_3$$

und dem Schlangen-Lemma ist auch

$$\mathrm{Ker}\ \beta^n_{T_1} \to \mathrm{Ker}\ \beta^n_{T_2} \to \mathrm{Ker}\ \beta^n_{T_2}$$

exakt. Wenn die äußeren Gruppen trivial sind, ist es also auch die mittlere.

QED.

Zum Beweis des Satzes vom Kubus benötigen wir noch das folgende Lemma.

2.3.3 Lemma

Seien X eine beliebige Varieät über k und $x_0, x_1 \in X$ zwei Punkte. Dann gibt es auf X eine irreduzible Kurve

$$C \subseteq X$$

welche die beiden Punkte ebenfalls enthält.

Beweis. Auf Grund des Lemmas von Chow können wir annehmen,

X ist projektiv.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach

$$d = \dim X.$$
Im Fall d = 1 ist nichts zu beweisen. Sei also
$$d > 1.$$
Auf Grund der Induktionsvoraussetzung reicht es zu zeigen, es gibt eine Teilvarietät
$$Y \subseteq X$$
mit
$$\dim Y \le d-1 \text{ und } x_0, x_1 \in Y.$$
<u>1. Schritt</u>. Konstruktion eines birationalen Morphismus $f: X' \to X$ mit X' projektiv und
$$\dim f^{-1}(x_i) \ge 1 \text{ für } i = 0, 1.$$
Wir wählen eine beliebige rationale Funktion
$$h: X \dashrightarrow k$$
welche in den Punkten x_0 und x_1 nicht definiert ist.[96] Sei X' die Abschließung des Graphen von h,
$$X' := \overline{\{(x,y)\in X\times\mathbb{P}^1 \mid h \text{ regulär in } x \text{ und } y = h(x)\}}$$
und
$$f: X' \to X$$
sei die Einschränkung der Projektion auf den ersten Faktor. Das Bild von f enthält eine nicht-leere offenen Teilmenge von X, liegt also dicht in X. Da X' projektiv ist, muß
$$f \text{ surjektiv}$$
sein. Nach Konstruktion induziert f auf gewissen offenen Teilmengen von X' bzw. X einen Isomorphismus, d.h. f ist birational. Nach dem Hauptsatz von Zariski[97] gilt
$$\dim f^{-1}(x_i) \ge 1 \text{ für } i = 0,1.$$
<u>2. Schritt</u>. Konstruktion von Y.
Wir betten X' in einen projektiven Raum ein, sagen wir
$$X' \subseteq \mathbb{P}^N,$$
und zwar so, daß X' in keiner Hyperebene liegt. Nach dem Satz von Bertini[98] gibt es eine Hyperebene
$$H \subseteq \mathbb{P}^N$$
mit
$$Y' := H \cap X' \text{ irreduzibel.}$$
Weil die Fasern $f^{-1}(x_i)$ eine positive Dimension haben, ist ihr Durchschnitt mit der Hyperebene H nicht leer, d.h. es gilt
$$f^{-1}(x_i) \cap Y' \ne \emptyset.$$
Also enthält die (irreduzible) Varietät
$$Y = f(Y')$$
die Punkte x_0 und x_1. Nach Konstruktion gilt
$$\dim Y \le \dim Y' = \dim H\cap X' = \dim X' - 1 = \dim X - 1 = d-1.$$

---

[96] Sei $X \subseteq \mathbb{P}^N$, wobei N so klein gewählt sei, daß X in keiner Hyperebene liegt. Wir wählen die Gleichung L' einer Hyperebene, die durch die beiden Punkte geht und die Gleichung L" einer Hyperebene, die durch keinen dieser beiden Punkte geht. Dann ist $h = L''/L' |_X$ einer rationale Funktion der gewünschten Gestalt.

[97] vgl. Hartshorne, Theorem V.5.2

[98] vgl. Einführung in die algebraische Geometrie 02/03, Theorem 1.7.14 (Hartshorne behandelt nur den nicht-singulären Fall).
Siehe auch
Jouanolou, J.-P.: Théoremes de Bertini et applications, Progress in Math. 42, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart 1983

QED.

2.3.4 Beweis des Satzes vom Kubus

1. Schritt: Es reicht zu zeigen

$$L\,|_{\{x\}\times Y\times\{z\}} \text{ ist trivial}$$

für für beliebige Punkte $x\in X$ und $z\in Z$.

Nach dem Schaukel-Satz kommt dann L von einem Geraden-Bündel,

$$L' \text{ auf } X\times Z,$$

$$L = p_{1,3}^{*}L'$$

und es gilt

$$L' \cong L|_{X\times\{y_0\}\times Z} = \text{trivial},$$

d.h. L ist selbst schon trivial.

2. Schritt: Reduktion auf den Fall dim X = 1 und X nicht-singulär

Gelte die Behauptung für den Fall, daß X eine vollständige nicht-singuläre Kurve ist. Wir betrachten zwei Punkte

$$x\in X \text{ und } z\in Z$$

und haben zu zeigen, $L\,|_{\{x\}\times Y\times\{z\}}$ ist trivial.

Nach 2.3.3 gibt es eine Kurve

$$C \subseteq X \text{ durch } x \text{ und } x_0.$$

Seien

$$\pi\colon C' \to C$$

eine Normalisierung von C und

$$\pi'\colon C'\times Y\times Z \to X\times Y\times Z$$

die induzierte Abbildung. Die Voraussetzungen des Satzes sind dann für das Geradenbündel

$$\pi'^{*}L \text{ auf } C'\times Y\times Z$$

erfüllt (wenn man anstelle von $x_0 \in X$ einen beliebigen über x_0 liegenden Punkt von C' verwendet). Dann ist aber $\pi'^{*}L$ trivial, d.h. für jeden über x liegenden Punkt $x'\in C'$ ist das Bündel

$$\pi'^{*}L\,|_{\{x'\}\times Y\times\{z\}} \cong L|_{\{x\}\times Y\times\{z\}}$$

trivial. Nach dem ersten Schritt ist damit L trivial.

3. Schritt: Reduktion auf die Existenz einer nicht-leeren offenen Teilmenge $Z'\subseteq Z$, für welche die Einschränkung

$$L|_{X\times Y\times Z'} \text{ trivial}$$

ist.

Dann ist $L|_{X\times Y\times\{z\}}$ trivial für alle $z\in Z'$. Da die Menge der Punkte z, für welche

$$L|_{X\times Y\times\{z\}}$$

trivial ist, abgeschlossen ist in Z (nach dem Schaukel-Satz), ist damit

$$L|_{\{x\}\times Y\times\{z\}}$$

trivial für beliebige $x\in X$ und beliebige $z\in Z$, d.h. L ist trivial nach dem 1. Schritt.

4. Schritt: Reduktion auf den Fall, daß das direkte Bild von $L\otimes p_1^{*}\mathcal{O}_X(D)$ bei der Projektion

$$p_{23}\colon X\times Y\times Z \to Y\times Z,\ (x,y,z) \mapsto (y,z),$$

eine lokal freie Garbe vom Rang 1 ist für einen geeignet gewählten effektiven Divisor D des Grades g auf der Kurve X vom Geschlecht g.

Bezeichne

$$\Omega^1 = \Omega^1_X$$
die Garbe der regulären 1-Formen auf X und
$$g = \dim H^0(X, \Omega^1)$$
das Geschlecht der glatten Kurve X. Bezeichne weiter K_X den kanonischen Divisor von X, d.h. das kanonische Geraden-Bündel
$$\Omega^1_X = \mathcal{O}_X(K_X)$$
ist gerade das Bündel zum Divisor K_X.[99] Dann kann man

(1) $$H^0(X, \Omega^1) = H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X))$$

identifizieren mit den rationalen Funktionen f auf X mit

(2) $$\operatorname{div}(f) + K_X \geq 0.$$

Sei $P_1 \in X$ ein Punkt, der nicht auf allen Divisoren der Gestalt (2) liegt. Dann kann man

(3) $$H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - P_1))$$

identifizieren mit den rationalen Funktionen f auf X mit

(4) $$\operatorname{div}(f) + K_X - P \geq 0,$$

d.h. mit den Schnitten von (1), die in P_1 Null sind. Nach Wahl von P_1 ist der k-Vektoraum (3) echt enthalten in (1). Sei $P_2 \in X$ ein Punkt, der nicht auf allen Divisoren der Gestalt (4) liegt, Nach demselben Schluß wie eben ist dann
$$H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - P_1 - P_2))$$
ein echter Unterraum von (3). Wir wiederholen die Argumentation und erhalten Punkte
$$P_1, \ldots, P_g \in X$$
mit
$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - D)) = 0, D := P_1 + \ldots + P_g .$$
Sei
$$p_1 : X \times Y \times Z \to X$$
die Projektion auf den ersten Faktor und
$$\begin{aligned} L' &:= L \otimes p_1^* \mathcal{O}_X(D)). \\ L'_{(y,z)} &:= L'|_{X \times \{y\} \times \{z\}} \text{ für } (y,z) \in Y \times Z. \end{aligned}$$
Dann gilt

(5) $$L'_{(y,z_0)} \cong \mathcal{O}_X(D)$$

(weil L auf $X \times \{y\} \times \{z_0\}$ trivial ist) also
$$\begin{aligned} \dim H^1(X, L'_{(y,z_0)}) &= \dim H^0(X, \Omega^1_X(-D)) && \text{(Serre-Dualität)} \\ &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - D)) && \text{(Definition von } K_X) \\ &= 0. && \text{(nach Wahl von D).} \end{aligned}$$
Betrachten wir die Menge

---

[99] Jedes Geraden-Bündel L hat die Gestalt $\mathcal{O}_X(D)$ mit einem Divisor D (man tensoriere L mit der Garbe $\mathcal{M}$ der rationalen Funktionen auf X und betrachte die zugehörige Einbettung $L \to \mathcal{M}$).

$$F := \{(y,z) \in Y\times Z \mid \dim H^1(X, L'_{(y,z)}) \ge 1\}.$$

Wie wir gerade gesehen haben, gilt

$$F \cap Y\times\{z_0\} = \emptyset.$$

Weil Y vollständig ist, gibt es eine offene Teilmenge $Z' \subseteq Z$ mit

$$F \cap Y\times Z' = \emptyset.$$[100]

Auf Grund des dritten Schrittes können wir Z durch Z' ersetzen, also annehmen,

$$F = \emptyset .$$

Dann gilt aber

$$\begin{aligned}
\dim H^0(X, L'_{(y,z)}) &= \chi(X, L'_{(y,z)}) && \text{(wegen } F = \emptyset\text{)}\\
&= \chi(X, L'_{(y_0,z_0)}) && \text{(Flachheit von L' über X×Z)}^{101}\\
&= \chi(X, \mathcal{O}_X(D)) && \text{(nach (5))}\\
&= 1 - g + \deg D && \text{(Riemann-Roch)}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Nach Folgerung 2 des Satzes über Kohomologie und Basiswechsel ist das direkte Bild

$$p_{23*}L'$$

von L' eine lokal freie Garbe vom Rang 1 und die natürlichen Abbildungen

$$p_{23*}L'\otimes k(y,z) \to H^0(X, L'_{(y,z)})$$

sind Isomorphismen für jeden Punkt $(y, z) \in Y\times Z$.

5. Schritt: Beschreibung von L' durch einen effektiven Divisor $\tilde{D}$ auf X×Y×Z.
Seien $U \subseteq Y\times Z$ eine offene Teilmenge, auf welcher die umkehrbare Garbe $p_{23*}L'$ trivial ist und

$$\sigma_U \in H^0(U, p_{23*}L') = H^0(p_{23}^{-1}(U), L')$$

ein Schnitt, welcher die Garbe $p_{23*}L'$ über U erzeugt. Bezeichne

$$\tilde{D}_U = \operatorname{div} \sigma_U$$

den Nullstellen-Divisor von σ_U auf $p_{23}^{-1}(U)$. Für je zwei offene Teilmengen $U, U' \subseteq Y\times Z$ wie oben unterscheiden sich die Schnitte σ_U und $\sigma_{U'}$ nur um einen Faktor, der nirgends Null wird. Die Divisoren $\tilde{D}_U$ verheften sich deshalb zu einem Divisor

$$\tilde{D} = \text{effektiver Divisor auf } X\times Y\times Z \text{ mit } \tilde{D}|p_{23}^{-1}(U) = \tilde{D}_U = \operatorname{div} \sigma_U.$$

Nach Konstruktion definieren die lokalen Gleichungen von $\tilde{D}$ gerade Übergangsfunktionen des Bündels L', d.h. es ist

$$L' = \mathcal{O}(\tilde{D}).$$

6. Schritt: Bestimmung des Divisors $\tilde{D}$.

Für jedes Paar $(y,z) \in Y\times Z$ ist die Einschränkung von $\tilde{D}$ auf $X\times\{y\}\times\{z\}$ gerade der Nullstellen-Divisor eines Schnittes von

---

[100] das Bild von F bei der natürlichen Projektion $Y\times Z \to Z$ ist eine abgescblossen Teilmenge von Y, welche den Punkt z_0 nicht enthält. Das Komplement dieses Bildes ist eine offenen Teilmenge Y' der geforderten Art.

[101] siehe Hartshorne, Th. III.9.9 und Ex. III.5.2

$$H^0(X, L'_{(y,z)}),$$
welcher nicht identisch Null ist. Da der Vektorraum 1-dimensional ist, ist dieser Schnitt bis auf ein konstantes Vielfaches eindeutig bestimmt. Insbesondere sind die beiden Einschränkungen

(6) $\qquad \tilde{D}\,|_{X\times\{y\}\times\{z_0\}}$ und $\tilde{D}\,|_{X\times\{y_0\}\times\{z\}}$ gleich $D = P_1+...+P_g$

für beliebige $y\in Y$ und beliebige $z\in Z$.[102] Für
$$p \in X - \{P_1, ..., P_g\}$$
hat die Einschränkung von $\tilde{D}$ auf $\{p\}\times Y\times Z$ einen Träger
$$S := \mathrm{Supp}\ \tilde{D}\,|_{\{p\}\times Y\times Z}$$
welcher sich weder mit $\{p\}\times Y\times\{z_0\}$ noch mit $\{p\}\times\{y_0\}\times Z$ schneidet,[103]

(7) $\qquad S \cap \{p\}\times Y\times\{z_0\} = \emptyset = S \cap \{p\}\times\{y_0\}\times Z.$

Die Projektion der Menge S auf Z ist eine echte abgeschlossene Teilmenge
$$T = p_3(S) \subset Z.$$
Weil S in $\{p\}\times Y\times Z$ die reine Kodimension 1 hat[104], muß S die Gestalt
$$S = \cup_{i=1}^{m} \{p\}\times Y\times T_i$$
haben mit $T_i \subset Z$ abgeschlossen von der Kodimension 1 für jedes i. Die zweite Identität (7) impliziert dann aber,
$$S = \emptyset,$$
d.h. der Träger von $\tilde{D}$ schneidet sich nicht mit $\{p\}\times Y\times Z$ außer im Fall $p = P_i$ für ein i.

Damit hat $\tilde{D}$ die Gestalt
$$\tilde{D} = \sum_{i=1}^{g} n_i \{P_i\}\times Y\times Z.$$
Durch Einschränken auf $X\times\{y_0\}\times\{z_0\}$ und Vergleich mit (6) sehen wir,
$$\tilde{D} = \sum_{i=1}^{g} \{P_i\}\times Y\times Z.$$
Damit gilt aber
$$L = L'\otimes p_1^*\mathcal{O}_X(-D) = \mathcal{O}(\tilde{D})\otimes p_1^*\mathcal{O}_X(-D) = \mathcal{O}_{X\times Y\times Z},$$
d.h. L ist trivial.
QED,

2.3.5 Folgerung 1

Seien X und Y vollständige Varietäten, Z eine beliebige Varietät. Dann hat jedes Geradenbündel auf
$$X\times Y\times Z$$
bis auf Isomorphie die Gestalt

---

[102] Nach Definition ist $L' = L\otimes p_1^*\mathcal{O}(D)$ und L ist trivial auf $X\times\{y\}\times\{z_0\}$ und $X\times\{y_0\}\times\{z\}$. D ist also Nullstellen-Divisor eines Schnitts der Einschränkung von L'.
[103] Wäre einer der beiden Durchschnitte nicht-leer so gäbe es ein $y\in Y$ bzw. ein $z\in Z$, für welches (6) falsch ist.
[104] Wegen (7) ist S eine echte Teilmenge. Als Träger eines Divisors hat S die reine Kodimension 1.

$$p_{12}^*L\otimes p_{13}^*M\otimes p_{23}^*N$$

mit Geradenbündeln L, M, N auf X×Y, X×Z bzw. Y×Z. Dabei bezeichne p_{ij} die Projektion von X×Y×Z auf das Produkt aus i-ten und j-ten Faktor.

Beweis: das folgt aus den Bemerkungen im Anschluß von Theorem 2.3.1 (Satz vom Kubus).

QED.

2.3.6 Folgerung 2

Seien X eine beliebige Varietät, Y eine abelsche Varietät und

$$f,g,h\colon X \to Y$$

reguläre Abbildungen. Dann gilt für jedes Geradenbündel L auf Y:

$$(f+g+h)^*L \cong (f+g)^*L\otimes(f+h)^*L\otimes(g+h)^*L\otimes f^*L^{-1}\otimes g^*L^{-1}\otimes h^*L^{-1}.$$

Beweis. Bezeichnungen:

p_i: Y×Y×Y → Y Projektion auf den i-ten Faktor (i=1,2,3).

q_i: Y×Y → Y Projektion auf den i-ten Faktor (i = 1,2)

$m_{ij} := p_i+p_j : Y\times Y\times Y \to Y$

$m := p_1+p_2+p_3 : Y\times Y\times Y \to Y$

$q := Y\times Y \to Y\times Y\times Y, (y,y') \mapsto (0, y, y')$.

$n\colon Y \times Y \to Y, (y, y') \mapsto y+y'$

Wir betrachten das Geradenbündel auf Y×Y×Y,

$$M := m^*L\otimes m_{12}^*L^{-1}\otimes m_{13}^*L^{-1}\otimes m_{23}^*L^{-1}\otimes p_1^*L\otimes p_2^*L\otimes p_3^*L.$$

Es gilt

$$q^*M = n^*L\otimes q_1^*L^{-1}\otimes q_2^*L^{-1}\otimes n^*L^{-1}\otimes 0^*L\otimes q_1^*L\otimes q_2^*L$$

wenn 0: Y×Y → Y die Null-Abbildung bezeichnet. Aus dem letzten Ausdruck liest man ab, q*M ist trivial. Aus Symmetrie-Gründen sind auch die Einschränkungen von M auf Y×{0}×Y und Y×Y×{0} trivial. Nach dem Satz über den Kubus ist damit M trivial. Dasselbe gilt dann aber auch für das inverse Bild von M bezüglich

$$(f,g,h)\colon X \to Y\times Y\times Y,$$

d.h. es gilt die Behauptung.

QED.

2.3.7 Folgerung 3

Seien X eine abelsche Varietät und n eine ganze Zahl. Dann gilt für jedes Geradenbündel L auf X,

$$n_X^*L \cong L^{(n^2+n)/2}\otimes(-1_X)^*L^{(n^2-n)/2}$$

Beweis. Wir wenden die Isomorphie

$$(f+g+h)^*L \cong (f+g)^*L\otimes(f+h)^*L\otimes(g+h)^*L\otimes f^*L^{-1}\otimes g^*L^{-1}\otimes h^*L^{-1}.$$

von Folgerung 2 an mit

$$f = (n+1)_X\ , g = 1_X \text{ und } h = (-1)_X$$

und erhalten

$$(n+1)_X^*L \cong (n+2)_X^*L\otimes n_X^*L\otimes 0_X^*L\otimes(n+1)_X^*L^{-1}\otimes 1_X^*L^{-1}\otimes(-1)_X^*L^{-1}.$$

also

(1) $$(n+2)_X^*L\otimes(n+1)_X^*L^{-2}\otimes n_X^*L \cong 1_X^*L\otimes(-1)_X^*L$$

Falls die Behauptung für ein n gilt, so erhält man durch Anwenden von $(-1_X)^*$ die Behauptung für -n (die beiden Faktoren auf der rechten Seite vertauschen bein

Anwenden von $(-1_X)^*$ ihre Plätze). Wir können also annehmen, $n \ge 0$. Wir führen jetzt den weiteren Beweis durch Induktion nach n. Für n = 0 und n = 1 besteht die behauptete Isomorphie trivialerweise. Sei jetzt also n > 1. Aus der Relation (1) erhalten wir (mit n-1 anstelle von n)

(2) $$n_X^* L = (L\otimes(-1)_X^* L)\otimes(n-1)_X^* L^{\otimes 2}\otimes(n-2)_X^* L^{-1}$$

Bezeichnung:

$$L^{(a,b)} := ((L\otimes(-1)_X^* L))^{\otimes a}\otimes L^{\otimes b}.$$

Es gilt dann

$$L^{(a,b)}\otimes L^{(a',b')} \cong L^{(a+a',b+b')}$$

Mit dieser Bezeichnungsweise bekommt die zu beweisende Aussage die Gestalt

$n_X^* L = L^{(s(n),n)}$ mit s(n) = Summer der natürlichen Zahlen < n.

Auf Grund von (2) und der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} n_X^* L &= (L\otimes(-1)_X^* L)\otimes(n-1)_X^* L^{\otimes 2}\otimes(n-2)_X^* L^{-1} \\ &= L^{(1,0)}\otimes(L^{\otimes 2})^{(s(n-1),n-1)}\otimes(L^{-1})^{(s(n-2),n-2)} \\ &= L^{(a,b)} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} (a,b) &= (1,0) + 2(s(n-1), n-1) - (s(n-2), n-2) \\ &= (2s(n-1) - s(n-2) + 1, 2(n-1) - (n-2)) \\ &= (s(n-1) + (n-2) + 1, n) \\ &= (s(n), n). \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

QED.

2.3.8 Folgerung 4: Satz vom Quadrat

Seien X eine abelsche Varietät und L ein Geradenbündel auf X. Dann gilt

$$\rho_{x+y}^* L\otimes L \cong \rho_x^* L\otimes\rho_y^* L$$

für beliebige Punkte $x,y\in X$. Dabei sei wie bisher ρ_z der Translations-Morphismus

$$\rho_z: X \to X,\ u \mapsto u+z.$$

Mit anderen Worten, die Abbildung

$$\varphi_L: X \to \mathrm{Pic}\, X,\ x \mapsto \rho_x^* L\otimes L^{-1},$$

ist ein Gruppen-Homomorphismus.

Beweis. Wir wenden Folgerung 2 an mit X = Y und

f := konstante Abbildung mit dem Wert x
g := konstant Abbildung mit dem Wert y
h := identische Abbildung

Die Relation

$$(f+g+h)^*L \cong (f+g)^*L\otimes(f+h)^*L\otimes(g+h)^*L\otimes f^*L^{-1}\otimes g^*L^{-1}\otimes h^*L^{-1}.$$

bekommt dann die Gestalt

$$\begin{aligned} \rho_{x+y}^* L &\cong \mathcal{O}_X\otimes\rho_x^* L\otimes\rho_y^* L\otimes\mathcal{O}_X\otimes\mathcal{O}_X\otimes L^{-1} \\ &\cong \rho_x^* L\otimes\rho_y^* L\otimes L^{-1} \end{aligned}$$

QED.

2.3.9 Vereinbarung: die Abbildung φ_L

Die Abbildung φ_L wird im folgenden eine wichtige Rolle spielen. Im weiteren werden wir deren Bezeichnung beibehalten: φ_L sei für jedes Geradenbündel L auf einer abelschen Varietät der Gruppen-Homomorphismus

$$\varphi_L: X \to \text{Pic } X,\ x \mapsto \rho_x^* L\otimes L^{-1}.$$

Man beachte, es gilt:

(i) $\varphi_{L'\otimes L''} = \varphi_{L'} + \varphi_{L''}$

(ii) $\varphi_{\rho_x^* L} = \varphi_L$ für jedes $x \in X$

Im Fall dim X = 1 und $L = \mathcal{O}_X(p)$ mit einem Punkt $p\in X$ ist φ_L gerade die Abel-Jacobi-Abbildung der elliptischen Kurve X.

Beweis. Zu (ii). Es gilt

$$\varphi_{\rho_x^* L}(y) = \rho_y^*\rho_x^*L\otimes\rho_x^*L^{-1} = \rho_{x+y}^*L\otimes\rho_x^*L^{-1} = \varphi_L(x+y)\otimes L\otimes\rho_x^*L^{-1}$$
$$= \varphi_L(x+y)\cdot\varphi_L(x)^{-1}$$
$$= \varphi_L(x+y)\cdot\varphi_L(-x)$$
$$= \varphi_L(y).$$

Zu (i). Es gilt

$$\varphi_{L'\otimes L''}(x) = \rho_x^*(L'\otimes L'')\otimes L''^{-1}\otimes L'^{-1}$$
$$= \rho_x^*(L')\otimes L'^{-1}\otimes\rho_x^*(L'')\otimes L''^{-1}$$
$$= \varphi_{L'}(x)\cdot\varphi_{L''}(x)$$

Das ist gerade die Behauptung (wobei wir im Beweis das Gruppengesetz von Pic multiplikativ geschrieben haben).

QED.

2.3.10 Bezeichnung: die Untergruppe K(L)

Für jedes Geradenbündel L auf der abelschen Varietät L sei

$$K(L) := \text{Ker } \varphi_L = \{x\in X \mid \rho_x^*L \cong L\}$$

der Kern des Gruppenhomomorphismus von 2.3.8.

2.3.11 Proposition

Sei X eine abelsche Varietät über k. Dann ist die Untergruppe

$$K(L) \subseteq X$$

abgeschlossen in der Zariski-Topologie.

Beweis. Wir wenden den Schaukelsatz (2.2.12) auf das Geradenbündel

$$M := a^*L\otimes p_2^*L^{-1}$$

wobei

$$a: X \times X \to X \text{ und } p_2: X \times X \to X$$

das Gruppengesetz von X sei bzw. die Projektion auf den zweiten Faktor. Die Menge

$$\{ x\in X \mid M \text{ ist trivial auf } \{x\}\times X \}$$

ist danach Zariski-abgeschlossen. Wegen

$$M|_{\{x\}\times X} \cong \rho_x^*L\otimes L^{-1}$$

ist diese Menge aber gleich K(L).

QED.

2.3.12 Lemma
Seien X eine abelsche Varietät,

$$C \subseteq X$$

eine (irreduzible) Kurve auf X und

$$E$$

ein Primdivisor mit $C \cap E = \emptyset$. Dann ist E invariant gegenüber Verschiebungen mit beliegigen Punkten der Gestalt x'-x" mit $x,y \in C$.

Beweis. Sei

$$L = \mathcal{O}(E).$$

Da sich E und C nicht schneiden, ist die Einschränkung von $\rho_x^* L$ auf C für jedes $x \in X$ ein Bündel vom Grad 0,

$$\deg \rho_x^* L|_C = (C \cdot \rho_x^* E) =^{105} (C \cdot E) = 0.$$

Also kann sich E mit $\rho_x C$ nicht in einer endlichen nicht-leeren Menge schneiden (denn dann wäre die Schnittzahl positiv). Das bedeutet, für jedes $x \in X$ gilt

$$\rho_x C \cap E = \emptyset \text{ oder } \rho_x C \subseteq E.$$

Für $x', x'' \in C$ und $y \in E$ ist

$$y \in \rho_{y-x''} C \cap E,$$

also $\rho_{y-x''} C \subseteq E$, also $y - x'' + x' \in E$. Damit ist das Lemma bewiesen.

QED.

2.3.13 Anwendung 1: die amplen Geradenbündel auf einer abelschen Varietät
Seien X eine abelsche Varietät, D ein effektiver Divisor auf X und

$$L = \mathcal{O}_X(D)$$

das zugehörige Geradenbündel.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) Die folgende Untergruppe von X ist endlich.

$$H := \{ x \in X \mid \rho_x^*(D) =^{106} D \}.$$

(ii) Die Gruppe K(L) ist endlich.

(iii) Das lineare System |2D| besitzt keine Basispunkte und definiert einen endlichen Morphismus $\varphi_L : X \to \mathbb{P}^N$.

(iv) Das Geradenbündel L ist ampel.

Beweis. <u>(iii) ⇒ (iv)</u>. Nach Definition von φ_L gilt

$$L \cong \varphi_L^* \mathcal{O}(1).$$

Dabei bezeichne $\mathcal{O}(1)$ das Bündel zu einer beliebigen Hyperebene des $\mathbb{P}^N$. Das Bild von φ_L,

$$\bar{X} := \operatorname{Im} \varphi_L ,$$

ist eine projektive Teilvarietät des projektiven Raumes und

$$i: \bar{X} \to \mathbb{P}^N$$

---

[105] Der Schnitt-Index von C mit den Gliedern einer algebraischen Familie hängt nicht vom speziellen Glied der Familia ab.

[106] Gleichheit von Divisoren, nicht von Divisorklassen.

die natürliche Einbettung. Nach Voraussetung ist

$$\varphi_L : X \to \overline{X}$$

endlich. Wir können L als inverses Bild der sehr amplen Garbe

$$\overline{L} = \mathcal{O}(1)|\overline{X}$$

schreiben,

$$L = \varphi_L^* \overline{L}.$$

Es reicht also zu zeigen, das inverse Bild einer amplen Garbe $\overline{L}$ bei einem endlichen Morphismus ist ampel. Das ist aber der Fall nach Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Exercise III.5.7(d) oder EGA III(2.6.1) bzw. (4.4.2).

<u>(iv) ⇒ (ii)</u>. Angenommen, K(L) ist unendlich. Bezeichne

$$Y = K(L)^0$$

die Zusammenhangskomponente der Null. Dann ist Y eine abelsche Varietät positiver Dimension, und die Einschränkung

$$L_Y := L|_Y$$

von L auf Y ist ample auf Y. Außerdem gilt

$$\rho_y^* L_Y \cong L_Y \text{ für alle } y \in Y.$$

Seien

$$a: Y \times Y \to Y \text{ und } p_i: Y\times Y \to Y$$

das Gruppengesetzt von Y bzw. die Projektion auf den i-ten Faktor. Nach dem Schaukelsatz (2.2.12) ist

$$a^*L_Y \otimes p_1^* L_Y^{-1} \otimes p_2^* L_Y^{-1}$$

trivial auf Y×Y.[107] Wir betrachten das inverse Bild dieses Geradenbündels bei

$$j: Y \to Y\times Y,\ y \mapsto (y, -y),$$

und sehen so, daß das Bündel

$$L_Y \otimes (-1)_Y^* L_Y \tag{1}$$

trivial sein mußt.[108] Mit L_Y ist aber auch $(-1)_Y^* L_Y$ ample (da die Multiplikation mit -1 ein Automorphismus ist. Also ist (1) auch ample. Das steht aber im Widerspruch zu

$$\dim Y > 0.$$

<u>(ii) ⇒ (i)</u>. Trivial, denn es gilt $H \subseteq K(L)$.

Zum Abschluß des Beweises reicht es zu zeigen:

<u>(i) ⇒ (iii)</u>. Nach Folgerung 4 ist die Garbe zum Divisor

$$\rho_x^* D + \rho_{-x}^* D \tag{2}$$

isomorph zu $\rho_0^* \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(D) = \mathcal{O}(2D)$, d.h. dieser Divisor liegt im linearen System

$$\rho_x^* D + \rho_{-x}^* D \in |2D| \text{ für jedes } x \in X.$$

Für jedes $u \in X$ gibt es ein $x \in X$ mit[109]

---

[107] Wegen $\rho_y^* L_Y \cong L_Y$ ist die Einschränkung dieser Garbe auf jeder Faser von jedem p_i trivial. Die Garbe ist damit inverses Bild einer Garbe auf Y, die ihrerseits trivial sein muß.

[108] $a \circ j$ ist die Nullabbildung, $p_1 \circ j$ ist die identische Abbildung und $p_2 \circ j$ die Multiplikation mit -1.

[109] Man betrachte die Urbilder von Supp D bei den Automorphismen

$$X \to X,\ x \mapsto u+x, \text{ und } X \to X,\ x \mapsto u - x.$$

Beide Urbilder haben die Kodimension 1, ihre Vereinigung ist also nicht gleich X. Man wähle x beliebig aus dem Komplement dieser Vereinigung.

$$u \pm x \notin \text{Supp } D,$$

d.h. mit

$$u \notin \text{Supp } (\rho_x^* D + \rho_{-x}^* D).$$

Deshalb besitzt das lineare System keine Basispunkte und definiert einen Morphismus

$$\varphi := \varphi_{2D}: X \to \mathbb{P}^N.$$

Wäre dieser Morphismus nicht endlich, so würde es eine irreduzible Kurve

$$C \subset X$$

geben mit $\varphi(C)$ = einzelner Punkt. Das bedeutet, jeder Divisor $E \in |2D|$ enthält entweder C oder schneidet sich nicht mit C.[110] Da der Träger von (2) jedem Punkt $u \in X$ ausweichen kann, gilt damit

$$C \cap \text{Supp } (\rho_x^* D + \rho_{-x}^* D) = \emptyset$$

für fast alle $x \in X$ (für alle x aus einer nicht-leeren offenen Teilmenge von X). Sei

$$D = \sum_i n_i D_i$$

die Zerlegung von D in Prim-Divisoren. Nach dem Lemma ist jedes D_i invariant gegenüber Verschiedungen mit Elementen der Gestalt $x'-x''$, $x', x'' \in C$. Das steht aber im Widerspruch zur Annahme (i). Es gilt also (iii).
QED.

2.3.14 Folgerung: Projektivität der abelschen Varietäten

Jede abelsche Varietät X ist projektiv.
Beweis. Wir fixieren eine beliebige affine offene Teilmenge

$$U \subset X$$

Durch eine Verschiebung erreichen wir,

$$0 \in U.$$

Seien $D_1,...,D_t$ die Komponenten des Komplements X - U. Wir können annehmen, die D_i sind Primdivisoren.[111] Wir setzen

$$D = \sum_{i=1}^{t} D_i .$$

Es reicht zu zeigen, D genügt der Bedinung (i) von 2.3.13, d.h. die Menge

(1) $$H = \{ x \in X \mid \rho_x^* D = D \}$$

ist endlich. Die Menge H ist eine abgeschlossene Untergruppe von X. Nach Konstruktion bildet für jedes $x \in H$ die Verschiebung mit x den Träger

$$\text{Supp } D$$

in sich und das Komplement des Trägers

$$U = X - \text{Supp } D$$

ebenfalls in sich ab. Wegen $0 \in U$ gilt insbesondere für jedes $x \in H$ auch

$$x = 0 + x \in U.$$

Also gilt

---

[110] Ein Schnitt von $H^0(X,\mathcal{O}(2D)) - \{0\}$, der auf C eine Nullstelle besitzt mußt auf C identisch Null sein, denn er kann als Koordinatenfunktion der Abbildung φ verwendet werden. Außerdem gibt es Schnitte, die auf C von Null verschiedenen sind, denn φ ist auf C wohldefiniert. Die auf C verschwindenden Schnitte bilden also einen echten Unterraum.

[111] Man nehme aus einem lokalen Ideal von D_i eine lokale Gleichung und schließe den zugehörigen lokalen Divisor in X ab. Das Entfernen der Abschließung aus U liefert eine affine offenen Teilmenge von U (wenigstens auf einer affinen offenen Teilmenge von U).

$$H \subseteq U.$$

Wegen H vollständig und U affin, folgt H endlich.

QED.

2.3.15 Anwendung 2

Die Gruppe der Punkte einer abelschen Varietät X ist teilbar. Für jedes $n \ge 1$ ist die Gruppe

$$X_n$$

endlich.

Beweis. Wir betrachten den Morphismus

$$n_X: X \to X, x \mapsto nx.$$

Wir haben zu zeigen, n_X ist surjektiv und hat einen endlichen Kern.

Nach dem Satz von der Dimension der Faser gilt[112]

$$\dim \mathrm{Im}(n_X) < \dim X \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}(n_X) > 0.$$

Die Surjektivität von n_X folgt also aus der Endlichkeit des Kerns

$$X_n = \mathrm{Ker}\, n_X$$

und es reicht letztere zu zeigen.

Zum Beweis wählen wir eine beliebige ample Garbe L auf X. Eine solche existiert nach 2.3.14. Nach 2.3.7 gilt

$$n_X^* L \cong L^{(n^2+n)/2} \otimes (-1_X)^* L^{(n^2-n)/2}.$$

und weil -1_X ein Automorphismus von X ist, ist auch $(-1_X)^*L$ ample. Wegen

$(n^2+n)/1 > 0$ und $(n^2-n)/2 \ge 0$

ist damit auch[113]

$$n_X^* L \text{ ample.}$$

Dann ist aber die Einschränkung dieser Garbe auf jede Teilvarietät positiver Dimension nicht-trivial.[114] Nun ist aber der Morphismus n_X konstant auf Ker n_X, d.h. die Garbe

$$n_X^* L \,|_{\mathrm{Ker}\, n_X}$$

ist sehr wohl trivial. Das ist aber nur möglich, wenn die Komponenten von Ker n_X einzelne Punkte sind, d.h. Ker n_X ist endlich.

QED.

Bemerkung

Als dritte Anwendung berechnen wir X_n im Fall, daß n teilerfremd ist zur Charakteristik von k. Wir ´beginnen zunächst damit, an einige allgemeine Fakten zu erinnern.

2.3.16 Der Grad eines endlichen Morphismus

Sei

$$f: X \to Y$$

ein surjektiver Morphismus vollständiger Varietäten derselben Dimension,

$$\dim X = \dim Y.$$

Dann induziert f eine Injektion der rationalen Funktionenkörper

---

[112] Da n_X ein Gruppen-Homomorphismus ist, haben alle Fasern von n_X dieselbe Dimension.

[113] Das Tensorprodukt ampler Garben ist ample, vgl. Hartshorne: Algebraic geometry, Exercise II.7.5

[114] Die Schnitte der trivialen Garbe definieren eine Projektion auf einen Punkt, also niemals eine abgeschlossene Einbettung, es sei denn, der Definitonsbereicht ist ein einzelner Punkt.

$$f^*: k(Y) \to k(X).$$

Da diese denselben Transzendenzgrad besitzen, ist dies eine endliche Körpererweiterung. Ihr Grad

$$\deg f = [k(X) : k(Y)]$$

heißt Grad des Morphismus f. Analog heißt der Separabilitätsgrad

$$\deg_s f := [k(X) : k(Y)]_s$$

auch Separabilitätsgrad von f und der Inseparabilitätsgrad

$$\deg_i f := [k(X) : k(Y)]_i$$

auch Inseparabilitätsgrad von f.

Bemerkungen

(i) Der Separabilitätsgrad von f ist gleich der Anzahl der Punkte von fast allen Fasern von f,

$$\deg_s f = \# f^{-1}(y) \text{ für fast alle } y \in Y,$$

d.h. für alle y aus einer Menge, die eine nicht-leere offene Teilmenge von X enthält.

(ii) Ist n die gemeinsame Dimension von X und Y,

$$n = \dim X = \dim Y$$

und sind $D_1, \dots, D_n$ Divisoren auf Y, so gilt für die Schnitt-Multiplizität

$$(f^*D_1 \cdot \ldots \cdot f^*D_n) = \deg f \cdot (D_1 \cdot \ldots \cdot D_n).$$

Beweis. Zu (i). (Pseudo-Beweis)[115]. Dies ist eine wohlbekannte klassische Tatsache. Es reicht, die entsprechende Aussage für endliche Morphismen

$$f: X \to Y$$

affiner Varietäten zu beweisen,

$$X = \operatorname{Spec} A, Y = \operatorname{Spec} B.$$

Da die singulären Orte von X und Y abgeschlossene Teilmengen von echt kleinerer Dimension sind, können wir annehmen,

X und Y nicht-simgulär.

Da die Fasern von endlichen rein inseparablen Morphismen aus genau einem Punkt bestehen, reicht es die Aussage im Fall, daß

f separabel ist,

zu beweisen. In dieser Situation gilt:

$K := k(X) = Q(A)$ ist endliche separable Körpererweiterung von $L := k(Y) = Q(B)$.
und

A ist die ganze Abschließung von B in K.

Da A und B klassische Koordinaten-Ringe sind (also insbesondere exzellente Ringe), ist A als B-Modul endlich, d.h.

$$A = a_1B+\ldots+a_rB \text{ mit } a_i \in A.$$

Dann ist $a_1Q(B)+\ldots+a_rQ(B)$ als nullteilerfreie endliche Q(B)-Algebra ein Körper und enthält damit Q(A) = K, d.h. es gilt

$$a_1Q(B)+\ldots+a_rQ(B) = K.$$

Also gibt es eine L-Vektorraumbasis $x_1,\ldots,x_n$ K über L,

(1) $$K = x_1L+\ldots+x_nL \text{ mit } f_i \in A \text{ für jedes } i.$$

Insbesondere ist

$$x_1B+\ldots+x_nB \subseteq A.$$

Wegen (1) ist jedes a_i eine Linearkombination der x_j mit Koeffizienten aus L. Wir ersetzen B durch eine affine offene Teilmenge und erreichen, daß alle Koeffizienten dieser (endlich vielen) Linearkombinationen in B liegen. Dann gilt auch

---

[115] Für einen formalen Beweis siehe Grundlagen der algebraischen Geometrie 2002/03, 1.5.3(j).

$$a_i \in x_1B+...+x_nB \text{ für jedes } i,$$

also

$$A = x_1B+...+x_nB.$$

Insbesondere ist A ein freier B-Modul vom Rang n = deg f. Sei $y\in Y$ und bezeichne m das zugehörige maximale Ideal von B. Dann ist

$$f^{-1}(y) = \text{Spec } A/mA$$

Das schema-theoretische vollständige Urbild von y in X. Es ist ein Schema der Länge

$$l_k(A/mA) = l_{B/m}(A/mA) = n\cdot l_B(B/m) = n = \deg f.$$

Seien jetzt $n_1, \ldots , n_s$ die über m liegenden Primideale von B, welche gerade den abgeschlossenen Punkten der Faser $f^{-1}(y)$ entsprechen. Dann gilt

$$\deg f = l_k(A/mA) = \sum_{i=1}^{s} l_k((A/mA)_{n_i}).$$

Falls y nicht im Verzweigungsort von f: $X \to Y$ liegt, sind die Längen unter der Summe rechts alle gleich Eins, d.h. es gilt

$$\# f^{-1}(y) = s = \deg f$$

(dabei soll links die Anzahl der abgeschlossenen Punkte der Faser stehen).

Zu (ii). Dies ist ebenfalls eine wohlbekannte klassische Tatsache, die man zum Beipiel im Rahmen der Multiplizitätstheorie, wie sie im Buch von Schafarevič: Grundlagen der algebraischen Geometrie, entwickelt wird, reltive leicht ableiten läßt. Wir geben hier einen Beweis mit Hilfe der allgemeinen Multiplizitätstheorie von Fulton an (welcher lediglich die funktoriellen Eigenschaften der inversen und direkten Bilder von Zyklen verwendet). Betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \arrow[dl, "\beta"] \\ & \text{Spec } k & \end{tikzcd}$$

Die Zyklen-Gruppe von Spec k (modulo rationaler Äquivalenz) kann man mit $\mathbb{Z}$ identifizieren. Die Schnitt-Multiplizität kann man deshalb definieren als

$$(D_1\cdot \ldots \cdot D_n) := \alpha_*((D_1\cdot \ldots \cdot D_n)).$$

Als Element der Zyklen-Gruppe hat der 0-Zyklus $D_1\cdot \ldots \cdot D_n$ die Gestalt

$$D_1\cdot \ldots \cdot D_n = a_1p_1+\ldots+a_rp_r$$

mit Punkten $p_i\in Y$ und ganzen Zahlen $a_i\in\mathbb{Z}$. Es gilt

$$\begin{aligned}(f^*D_1\cdot \ldots \cdot f^*D_n) &= \beta_*(f^*D_1\cdot \ldots \cdot f^*D_n)\\ &= \alpha_*f_*(f^*D_1\cdot \ldots \cdot f^*D_n)\\ &= \alpha_*(a_1f_*f^*p_1+\ldots+a_rf_*f^*p_r)\\ &=^{116} \deg f\cdot\alpha_*(a_1p_1+\ldots+a_rp_r)\\ &= \deg f\cdot\alpha_*(D_1\cdot \ldots \cdot D_n)\\ &= \deg f\cdot(D_1\cdot \ldots \cdot D_n).\end{aligned}$$

QED.

3.2.17 Begriff der Isogenie

Ein Homomorphismus

---

[116] Fulton: Intersection theory, Proposition 2.3((c) “Projektionsformel”.

$$f: X \to Y$$
von abelschen Varietäten heißt Isogenie, wenn er surjektiv ist und einen endlichen Kern hat.

Bemerkungen

(i) Wir haben gerade gesehen, für jede abelsche Varietät und jedes von Null verschiedene $n \in \mathbb{Z}$ ist $n_X: X \to X$ eine Isogenie.

(ii) Für jede Isogenie $f: X \to Y$ ist der Grad von f wohldefiniert,
$$\deg f = [k(X):k(Y)] < \infty,$$
denn die Ordnung des Kerns von f ist gleichzeitig die Ordnung jeder Faser von f, und diese ist gleich dem Separabilitätsgrad (d.h. dieser ist endlich).

3.2.18 Eigenschaften der Isogenie n_X

Seien X eine abelsche Varietät über k, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ und
$$n_X: X \to X$$
die zugehörige Isogenie. Dann gilt

(i) $\deg n_X = n^{2g}$ mit $g := \dim X$.

(ii) n_X ist genau dann separabel, wenn n teilerfremd zu $p := \mathrm{char}\, k$ ist.

(iii) $X_n = X_{p_1^{m_1}} \oplus \ldots \oplus X_{p_r^{m_r}}$ falls $n = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}$ gilt mit teilerfremden Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$.

(iv) $X_n \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$, falls n teilerfremd zu p ist.

(v) $X_{p^m} \cong (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^i$ mit $0 \le i \le g$.

Beweis. Zu (i). Sei D ein ampler symmetrischer Divisor auf X, d.h.ein ampler Divisor D mit
$$(-1)_X^* D = D.$$
Ein solcher Divisor existiert: ist D' irgendeiu ampler Divisor (ein solcher existiert weil X projektiv ist, vgl. 2.3.14), so ist auch
$$D' + (-1)_X^* D'$$
ample und nach Konstruktion symmetrisch. Es gilt für das g-fache Produkt von D mit sich
$$\deg (n_X)(D \cdot \ldots \cdot D) \quad = (n_X^* D \cdot \ldots \cdot n_X^* D) \qquad \text{(nach Bemerkung (ii) von 2.3.16)}$$
Nach Folgerung 3 (d.h. 2.3.7) ist $n_X^* D$ linear äquivalent zu
$$n_X^* D \sim \frac{n^2+n}{2} \cdot D + \frac{n^2-n}{2} (-1)_X^* D = (\frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2-n}{2})D = n^2 D.$$
Damit gilt
$$\deg (n_X)(D \cdot \ldots \cdot D) = n^2 \cdot (D \cdot \ldots \cdot D).$$
Weil $(D \cdot \ldots \cdot D)$ positiv ist (denn ein Vielfaches von D ist eine Hyperebenenschnitt), folgt
$$\deg (n_X) = n^2.$$
Zu (ii). Falls n teilerfremd ist zu p, so ist der Grad von n_X teilerfremd zur Charakteristik des Grundkörpers, d.h. n_X ist separabel.

Sei jetzt p | n. Wir haben zu zeigen, n_X ist separabel. Wir wir gesehen haben, induziert n_X auf dem Tangentialraum in 0 die Multiplikation mit n,

$$dn_X: T_0X \to T_0X,\ v \mapsto nv.$$

Da T_0X ein k-Vektorraum ist, ist damit dn_X die Nullabbildung,

$$dn_X = 0.$$

Sei jetzt ω irgendein invariantes Differential auf X. Dann ist auch

$$n_X^*\omega$$

ein invariantes Differential auf X, welches außerdem auf dem Tangentialraum in 0 identisch Null ist. Mit anderen Worten

(1) $$n_X^*\omega = 0$$

für jedes invariante Differential ω. Wir wir oben gesehen haben, erzeugen die invarianten Differentiale ω über $\mathcal{O}_X$ die Garbe Ω^1_X der regulären 1-Formen. Wir betrachten Ω^1_X als Teilgarbe der Garbe der rationalen 1-Formen,

$$\Omega^1_X \subseteq \Omega^1_{X,rat}$$

Letztere ist eine Modulgarbe über der Garbe $\mathcal{O}_{X,rat}$ der rationalen Funktionen auf X (und ist lokal frei vom Rang 1 über dieser). Weil der von $\mathcal{O}_X$ erzeugte $\mathcal{O}_{X,rat}$-Modul gleich $\mathcal{O}_{X,rat}$ ist, ist lokal der von Ω^1_X erzeugte $\mathcal{O}_{X,rat}$-Modul gleich $\Omega^1_{X,rat}$. Wegen der Garben-Axiome gilt dies dann aber auch global. Zusammen erhalten wir, die invarianten 1-Formen ω erzeugen $\Omega^1_{X,rat}$ über $\mathcal{O}_{X,rat}$. Wir gehen zu den globalen Schnitten über und erhalten:

$\Omega^1_{k(X)/k}$ wird über k(X) von den invarianten 1-Formen ω erzeugt.

Wegen (1) bedeutet das, n_X induziert auf $\Omega^1_{k(X)/k}$ die Null-Abbildung. Das ist nur möglich, wenn bei

$$n_X^*: k(X) \to k(X)$$

jedes Element in eine p-te Potenz abgebildet wird. Der Inseparabilitätsgrad von n_X ist damit mindestens

$$\deg_i n_X \ge p^g,\ g := \dim X.$$

Insbesondere ist n_X inseparabel.

<u>Zu (iii)</u>. Zumindest gilt

$$X_{p_i^{m_i}} \subseteq X_n \text{ für jedes } i$$

und

$$\# X_{p_i^{m_i}} = \operatorname{ord}(p_i^{m_i})_X$$

d.h. diese Untergruppen haben paarweise teilerfremde Ordnungen und das Produkt ihrer Ordnungen ist

$$\text{ord}\,(p_1^{m_1})_X \cdot\ldots\cdot \text{ord}\,(p_r^{m_r})_X = \text{ord}\, n_X = \# X_n .$$

Die Abbildung

$$\varphi: X_{p_1^{m_1}} \oplus\ldots\oplus X_{p_r^{m_r}} \to X_n,\ (x_1,\ldots,x_r) \mapsto x_1+\ldots+x_r,$$

ist ein Homomorphismus zwischen Gruppen gleicher Ordung. Zum Beweis seiner Bijektivität reicht es seine Injektivität zu beweisen. Sei

$$\varphi(x_1,\ldots,x_r) = 0.$$

Dann gilt $x_1+\ldots+x_r = 0$. Sei l das Produkt alle $p_j^{m_j}$ mit $j \ne i$. Dann folgt $l \cdot x_i = 0$. Da l teilerfremd zu p_i ist, repräsentiert l eine Einheit modulo $p_i^{m_i}$. Also gilt $x_i = 0$ (i beliebig).

<u>Zu (iv)</u>. Wegen (iii) reicht es, die Behauptung für den Fall zu beweisen, daß

$$n = q^m$$

die Potenz einer Primzahl ist. Im Fall $ggT(n,p) = 1$ ist der Morphismus

$$n_X : X \to X$$

separabel vom Grad n^{2g} ist, folgt

$$\# X_n = n^{2g}.$$

Nach derselben Argumentation gilt auc

(2) $$\# X_m = m^{2g} \text{ für jedes m mit } m|n.$$

Außerdem wird jedes Element von X_m bei Multiplikation mit m in die Null abgebildet, d.h.

(3) Jedes Element von X_m hat eine Ordnung die m teilt.

Als endliche abelsche Gruppe ist X_n direktes Produkt zyklischer Gruppen. Wegen (3) hat jede dieser Zyklischen Gruppen eine Ordnung $\le n$. Die Zahl der zyklischen direkten Summanden ist daher mindestens 2g und ist genau dann gleich 2g wenn jeder direkte Summand die Ordnung m hat. Es reicht also zu zeigen, kein direkter Summand hat eine Ordnung kleiner als m.

Angenommen, es gibt doch einen solchen direkten Summanden, sagen wir

$$X_n = \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}/m_t\mathbb{Z} \text{ mit } m_1 < m,\ m_1 \le \ldots \le m_t \le m$$

und

$$m_1 \cdot \ldots \cdot m_t = m^{2g},\ t > 2g.$$

Mit m ist jedes m_i eine Potenz von q. Jeder der direkten Summanden enthält eine zyklische Untergruppe der Ordnung m_1 (wegen $m_1 \le \ldots \le m_t$). Wir ersetzen jeden der direken Summanden durch diese Untergruppe und erhalten eine Untergruppe von X_{m_1},

$$\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \subseteq X_{m_1}$$

Da die Zahl der direkten Summanden rechts gleich $t > 2g$ ist, folgt

$$\# X_{m_1} \ge (m_1)^t > (m_1)^{2g}$$

im Widerspruch zu (2).

<u>Zu (v)</u>. Wie wir beim Beweis von (ii) gesehen haben, hat p_X: $X \to X$ eine inseparabilitätsgrad $\ge p^g$ und einen Grad p^{2g} also eine Separabilitätsgrad

$$\deg_s p_X = p^i \text{ mit } 0 \le i \le g.$$

Damit gilt

$$\deg_s (p^m)_X = (p^m)^i \text{ für jede natürliche Zahl m.}$$

Deshalb ist jede der Gruppen X_{p^m} von der Ordnung $(p^m)^i$. Nach derselben Argumentation wie in (iv) gilt dann aber $X_{p^m} \cong (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^i$.

QED.

2.4 Faktorisierung einer Varietät nach einer endlichen Automorphismengruppe

2.4.1 Definition: Etale-Morphismen

Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus algebraischer Varietäten (über dem algebraisch abgeschlossen Körper k). Dieser Morphismus heißt etale oder auch Etale-Morphismus, wenn die folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) f ist flach.

(ii) Für jeden Punkt $x \in X$ gilt

$$f^*(m_{Y,f(x)})\mathcal{O}_{X,x} = m_{X,x}.$$

Dabei bezeichne $m_{X,x}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$, d.h. das Ideal der Keime regulärer Funktionen, die in x Null sind.

Bemerkungen

(i) Diese beiden Bedinungen sind äquivalent dazu, daß f ein formaler Isomorphismus im folgenden Sinne ist:

Für jeden Punkt $x \in X$ mit dem Bild $y = f(x) \in Y$ induziert f einen Isomorphismus

$$\hat{f}_x: \hat{\mathcal{O}}_{Y,y} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}.$$

Dabei bezeichne $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ die Vervollständigung von $\mathcal{O}_{X,x}$ bezüglich der $m_{X,x}$-adischen Topologie.

(ii) Im Fall $k = \mathbb{C}$ ist kann man die formalen Potenzreichenringe von (i) auch durch die konvergenten Potenzreihen (d.h. die Keime holomorpher Funktionen) ersetzen, d.h. die Bedingung ist äquivalent dazu, daß f ein lokaler Isomorphismus analytischer Räume ist.

(iii) Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist der folgende Satz.

2.4.2 Theorem 1: Existenz des Faktors nach einer endlichen Automorphismengruppe

Seien X ein algebraische Varietäten über k und G eine endliche Gruppe von Automorphismen von X.

Wir nehmen an, für jeden Punkt $x \in X$ liegt das Orbit Gx von x in einer affinen offenen Teilmenge von X.

Dann gibt es einen Morphismus

$$\pi: X \to Y$$

algebraischer Varietäten über k mit folgenden Eigenschaften.

(i) Als topologischer Raum ist Y der Faktorraum von X bezüglich der Gruppen-Operation G.[117]

(ii) Bezeichne $\pi_*(\mathcal{O}_X)^G$ die Teilgarbe von $\pi_*(\mathcal{O}_X)$ der G-invarianten Schnitte von $\pi_*(\mathcal{O}_X)$. Dann ist der natürliche Homomorphismus von Ring-Garben

$$\mathcal{O}_Y \to \pi_*(\mathcal{O}_X)^G$$

ein Isomorphismus.

Weiter gilt:

(iii) Die Varietät Y und der Morphismus π sind durch diese Bedingungen bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt. Der Morphismus ist endlich, surjektiv und separabel.
(iv) Ist X eine affine Varietät, so auch Y.
(v) Operiert G frei auf X, d.h. $gx \ne x$ für beliebige $x\in X$ und $g\in G - \{e\}$, so ist π ein Etal-Morphismus.

Beweis. Eindeutigkeit: Durch die Bedingungen (i) und (ii) sind der Y als topologischer Raum und dessen Strukturgarbe festgelegt. Die Eindeutigkeitsaussage (iii) ist somit trivialerweise richtig.
Existenz: Wir haben zu zeigen, der topologische Raum

$$Y := X/G$$

ist zusammen mit der Strukturgarbe

$$\mathcal{O}_Y := \pi_*(\mathcal{O}_X)^G$$

eine algebraische Varietät.
1. Schritt: Reduktion auf den Fall einer affinen Varietät X.
Nehmen wir also an, die Behauptung des Satzes ist für affine Varietäten X richtig und beweisen sie für beliebige Varietäten X.
Sei $x\in X$ vorgegeben. Dann liegen nach Voraussetzung die Punkte des Orbits Gx in iner affinen offenen Teilmenge von X , sagen wir U',

$$x \in U' \subseteq X.$$

Dann ist

$$U = \cap_{g\in G} gU'$$

eine G-invariante affine offene Umgebung von x.[118] Wir haben gezeigt, X besitzt eine Überdeckung durch G-invariante affine offene Teilmengen

$$U \subseteq X.$$

Für jedes solche U gilt

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = U.$$

insbesondere ist π(U) offen in Y. Aus der Gültigkeit des Theorem im affinen Fall folgt, daß π(U) zusammen mit der Einschränkung

$$\mathcal{O}_Y|_{\pi(U)}$$

eine affine Varietät ist. Da die Teilmengen der Gestalt π(U) eine offene Überdeckung von Y bilden, folgt die Behauptung im allgemeinen Fall damit aus der Eindeutigkeitsaussage.
2. Schritt: Beweis der Existenz im affinen Fall.
Wir können annehmen,

$$X = \text{Spec } A \text{ mi } A = k[x_1,...,x_n].$$

[117] d.h. als Menge ist Y die Menge der G-Orbits, π: X → Y ist die natürliche Surjektion und die Topologie von Y ist die Faktorraum-Topologie.
[118] Der Durchschnitt von zwei affinen offenen Teilmengen U, V ⊆ X ist affine offene Teilmenge: U∩V ist isomorph zu U×V∩Δ in X×X. Dabei ist Δ die Diagonale in X×X. Die Aussage ist richtig für beliebige separierte S-Schemata.

Wir werden Y definieren als

$$Y = \mathrm{Spec}\ B \text{ mit } B := A^G$$

Dabei operiere G auf dem Koordinatenring A vermittels der Operation[119]

$$G\times A \to A, (g, f) \mapsto gf := f\circ g^{-1}.$$

Y ist eine algebraische Varietät über k:
Wir haben zu zeigen, B ist eine endlich erzeugte k-Algebra. Sei

$$\nu := \# G$$

die Ordnung der Gruppe G. Für jedes $f\in A$ und $1 \le k \le \nu$ bezeichnen wir mit

$$\sigma_k(f)$$

die elementarsymmetrische Funktion des Grades k in den ν Elementen

$$gf \in A, g\in G.$$

Wir setzen

$$B' := k[\sigma_i(x_j) \mid i = 1,...,\nu, j = 1,...,n].$$

Nach Kostruktion ist B' eine Teilalgebra von A, die aus G-invarianten Elementen besteht,

$$B' \subseteq B = A^G \subseteq A.$$

Die erzeugenden Elemente x_j von A über k sind ganz über B', denn x_j genügt der Gleichung

$$X^\nu - \sigma_1(x_j)X^{\nu-1} + ... +(-1)^\nu\sigma_\nu(x_j) = 0.$$

Also ist A ein endlich erzeugter B'-Modul. Weil B' ein noetherscher Ring ist, ist dann aber auch der Teilmodul B über B' endlich erzeugt. Da B' als k-Algebra endlich erzeugt ist, gilt damit dasselbe auch für B.

Die Einbettung

$$B \subseteq A$$

definiert einen Morphismus algebraischer Varietäten

$$\pi: X = \mathrm{Spec}\ A \to \mathrm{Spec}\ B = Y.$$

Der Morphismus π ist surjektiv, endlich und separabel:
Wie wir gerade gesehen haben, ist A ein endlicher Modul über B', also erst recht über B. Also ist π endlich und surjektiv. Zum Beweis der Separabilität reicht es zu zeigen,

K = Q(A) ist eine Galois-Erweiterung von L := Q(B).

Die Operation von G auf A setzt sich auf genau eine Weise auf den Quotientenkörper K fort:

$$G\times K \to K, (g, a/b) \mapsto ga/gb.$$

Für beliebige $\frac{a}{b}\in K^G$, $a, b\in A$, $b\ne 0$ gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot \prod_{g\in G-\{e\}} gb}{\prod_{g\in G} gb}$$

Weil der Qutient in K^G liegt und der Nenner des Bruches rechts, so liegt auch der Zähler des Bruches rechts in K^G, d.h. jedes Element von K^G ist Quotient zweier Elemente aus $A\cap K^G = A^G = B$. Wir haben gezeigt,

$$K^G = Q(B),$$

d.h. K ist eine Galois-Erweiterung von Q(B) = L.

---

[119] G ist nach Voraussetzung eine Gruppe von Automorphismen von X.

Es gilt $\pi_*(\mathcal{O}_X)^G = \mathcal{O}_Y$:
Weil $\pi: X \to Y$ endlich und surjektiv ist, ist π ein eigentlicher Morphismus. Also ist

$$\pi_*\mathcal{O}_X$$

ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul. Nun ist $\pi_*(\mathcal{O}_X)^G$ gerade der Durchschnitt der Kerne der endlich vielen Garben-Morphismen

$$\varphi_g: \pi_*\mathcal{O}_X \to \pi_*\mathcal{O}_X, f \mapsto gf - f,$$

mit $g\in G$. Also ist $\pi_*(\mathcal{O}_X)^G$. Der natürliche Garben-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_Y \to \pi_*(\mathcal{O}_X)^G$$

induziert einen Isomorphismus der globalen Schnitte. Da er zwischen kohärenten Garben auf affinen Schemata abbildet, ist er selbst schon ein Isomorphismus.
Als Menge ist $Y = \operatorname{Spec} B$ gerade die Menge der Orbits von G auf $X = \operatorname{Spec} A$.
Wir haben zu zeigen, die Fasern der Abbildung

$$\pi: X = \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A^G = Y$$

sind gerade die G-Orbits auf X.
Seien $x, y\in\operatorname{Spec} A$ zwei Punkte im selben G-Orbit, sagen wir

$$y = gx.$$

Für jedes $f\in A^G$ gilt

$$f(x) = (gf)(x) = (f\circ g^{-1})(x) = f(y),$$

d.h. die (Verpflanzungen auf X der) Funktionen des Koordinatenrings A^G von Y haben in x und y denselben Wert. Dann gilt aber

$$\pi(x) = \pi(y).$$

Seien jetzt $x,y\in\operatorname{Spec} A$ zwei Punkte in unterschiedlichen Orbits von G. Wir betten X in einen affinen Raum ein,

$$X \subseteq \mathbb{A}^N$$

und wählen eine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{A}^N$ durch x, welche die endlich vielen Punkte des Orbits von y meidet:

$$x \in H, gy \notin H \text{ für } g\in G.$$

Sie f_1 die Einschränkung einer Hyperebenengleichung von H auf X. Dann ist die Funktion

$$f = \prod_{g\in G} gf_1$$

invariant bezüglich G, Null im Punkt x und ungleich Null in y. Mit anderen Worten, f ist eine reguläre Funktion auf Y, die in $\pi(x)$ und $\pi(y)$ verschiedene Werte annimmt. Also gilt

$$\pi(x) \ne \pi(y).$$

Die Topologie von $Y = \operatorname{Spec} B$ ist gerade die Faktortopologie von $X = \operatorname{Spec} A$.
Als Morphismus ist $\pi: X \to Y$ stetig. Nach Konstruktion ist π außerdem endlich, also abgeschlossen. Für jede Menge $V \subseteq Y$ mit

$$\pi^{-1}(V) \text{ offen}$$

gilt also

$X - \pi^{-1}(V)$ abgeschlossen,

also

$Y - V = \pi(X - \pi^{-1}(V))$ abgeschlossen,

also

V offen.

Wir haben gezeigt, jede Menge mit offenen Urbild ist offen. Umgekehrt hat jede offene Menge ein offenes Urbild. Wir haben gezeigt , die Topologie von Y ist die Faktortopologie.
Wir haben nocht die letzte Behauptung des Satzes zu beweisen:
Falls G frei auf X operiert, ist π: $X \to Y$ ein Etale-Morphismus.
Seien $x\in X$ ein Punkt, $y = f(x)$ dessen Bild und m das zu y gehörige maximale Ideal

$$m \subseteq B.$$

Weiter seien

$$\hat{A} = \lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} A/m^nA \text{ und } \hat{B} = \lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} B/m^n$$

die Vervollständigungen von A bzw. B in der m-adischen Topologie. Weil A als B-Modul endlich erzeugt ist, ist der natürliche Homomorphismus

$$\hat{B}\otimes_B A \to \hat{A}$$

ein Isomorphismus. Der Ring $\hat{B}$ ist gerade die Vervollständigung

$$\hat{B} = \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$$

des lokalen Rings $\mathcal{O}_{Y,y}$ bezüglich des maximalen Ideals. Auf der anderen Seite sind die maximalen Ideale von A, welche mA enthalten, gerade die Punkte von X der Gestalt gx mit $g\in G$. Nach dem Chinesischen Restesatz ergibt sich

$$\text{(1)} \qquad \hat{A} \xrightarrow{\cong} \prod_{g\in G} \hat{\mathcal{O}}_{X,gx} .$$

Dabei bezeichne $\hat{\mathcal{O}}_{X,gx}$ die Vervollständigung des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,gx}$ bezüglich des maximalen Ideals. Die Operation der Gruppe G auf A induziert eine Operation auf

$$\hat{B}\otimes_B A$$

vermittels $g(b\otimes a) := b\otimes ga$ und damit eine Operation auf $\hat{A}$. Die Tatsache, daß B der Ring der G-Invarianten auf A ist, läßt sich durch die Exaktheit der folgenden Sequenz ausdrücken.

$$0 \to B \to A \xrightarrow{\alpha} \prod_{g\in G} A$$

mit $\alpha(a) := \{ ga - a \}_{g\in G}$. Da $\hat{B}$ ein flacher B-Modul ist, erhalten wir durch Tensorieren die exakte Sequenz

$$0 \to \hat{B} \to \hat{B}\otimes_B A \xrightarrow{id\otimes\alpha} \prod_{g\in G} \hat{B}\otimes_B A.$$

Mit anderen Worten $\hat{B}$ ist gerade der Ring der G-Invarianten in $\hat{A}$,

$$\hat{B} = \hat{A}^G.$$

Weiter definiert die Operation von $g\in G$ (auf X bzw. auf A) einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,gx}, f \mapsto f\circ g^{-1}.$$

Wenn man mit Hilfe dieser Isomorphismen den Ring auf der rechten Seite von (1) mit

$$\prod_{g\in G} \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$$

identifiziert, so bewirkt die Operation von G auf letzteren Ring gerade eine Permutation der Koordinaten:

$$(g' , \{f_g\}_{g\in G}) \mapsto (g' , \{f_g\circ g^{-1}\}_{g\in G}) \mapsto \{f_g\circ g^{-1}\circ g'^{-1}\}_{g\in G} = \{f_g\circ(g'g)^{-1} \}_{g\in G}$$

$= \{(g'f)_{g'g} \circ (g'g)^{-1}\}_{g\in G} \mapsto \{(g'f)_g\}_{g\in G}$

mit $(g'f)_g = f_{g'^{-1}g}$ für jedes $g\in G$. Eine Familie $\{f_g\}_{g\in G}$ ist G-Invariant genau dann, wenn gilt

$$f_g = (g'f)_g = f_{g'^{-1}g} \text{ für jedes } g\in G \text{ und jedes } g'\in G.$$

Mit anderen Worten, der Ring

$$\hat{\mathcal{O}}_{Y,y} = \hat{B} = \hat{A}^G.$$

der G-Invarianten von $\hat{A}$ ist bis auf Isomorphie gerade das Bild der Diagonal-Abbildung

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \to \prod_{g\in G} \hat{\mathcal{O}}_{X,x}.$$

Der natürliche Homomorphismus

$$\hat{\mathcal{O}}_{Y,y} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$$

ist deshalb ein Isomorphismus, d.h. π ist ein Etale-Morphismus.

QED.

2.4.3 Bemerkung zu den Bedingungen von 2.4.2

Die Bedingung von Theorem 1 (2.4.2), daß jedes G-Orbit in X in einer affinen offenen Teilmenge enthalten sein soll, ist automatisch erfüllt, wenn X quasi-projektiv ist.

Beweis. Seien X eine lokal abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{P}^N$, $\bar{X}$ deren projektive Abschllließung und

$$x_1,\dots,x_n \in X$$

endlich viele Punkte. Es reicht zu zeigen, in dieser Situation gibt es eine Hyperfläche $H\subseteq\mathbb{P}^N$ mit

$$\bar{X} - X \subseteq H \text{ und } \{x_1,\dots,x_n\}\cap H = \emptyset.$$

Denn dann ist

$$\bar{X} - (\bar{X}\cap H) = X - X\cap H$$

affin und offen in X und enthält alle Punkte x_i.

Beweisen wir die Existenz der Hyperfläche H. Weil die Punkte x_i nicht auf der abgeschlossenen Teilmenge

$$Z := \bar{X} - X \subseteq \mathbb{P}^N$$

liegen, gibt es für jedes i ein homogenes Polynom F_i aus dem Ideal von Z mit

$$F_i(x_i) \ne 0.$$

Indem wir jedes der F_i durch eine geeignete Potenzersetzen, erreichen wir

$$\deg F_1 = \deg F_2 = \dots = \deg F_n .$$

Betrachten wir die n×n-Matrix

$$(F_i(x_j)).$$

Spalten dieser Matrix sind dann vom Ursprung verschiedene Punkte des k^n. Es gibt deshalb eine Hyperebene durch den Ursprung, die alle diese Punkte des k^n meidet, d.h. es gibt ein linearers homogendes Polynom L, welches auf jeder Spalte dieser Matrix von Null verschieden ist:

$$L(F_1(x_j),\dots,F_n(x_j)) \ne 0 \text{ für } j = 1,\dots,n.$$

Das homogene Polynom

$$F := L(F_1,...,F_n)$$

definiert dann die gesuchte Hyperfläche.
QED.

2.4.4 Definition: Faktor einer Varietät nach einer endlichen Gruppe von Automorphismen

In der in Theorem 1 (2.4.2) beschriebenen Situation heißt die Varietät Y Faktor von X bezüglich G und wird mit X/G bezeichnet.

2.4.5 Definition: verträgliche Operationen auf einer Garbe

Seien X eine algebraische Varietät, G eine endliche Gruppe von Automorphismen von X und F eine Garbe (von Mengen) auf X mit dem Etalraum

$$f: E_F \to X.$$

Eine Operation von G auf F heißt verträglich mit der Operation von G auf X, wenn für jedes $g \in G$ das folgende Diagramm kommutativ ist.[120]

$$\begin{array}{ccc} E_F & \xrightarrow{g} & E_F \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Dabei bezeichne die obere Zeile die auf dem Etalraum induzierte Abbildung.[121]

Bemerkungen

(i) Eine verträgliche Operation von G auf F ist durch eine Familie von Abbildungen

$$g_U: F(U) \to F(gU)$$

gegeben, wobei $U \subseteq X$ die offenen Teilmengen und g die Elemente von G durchläuft, wobei diese Abbildungen mit den Garben-Restriktionen verträglich sind und außerdem gilt

1. $id_U = id$

2. $g''_{g'U} \circ g'_U = (g''g')_U$ (Assoziativgesetz).

(ii) Eine verträgliche Operation von G auf F ist durch eine Familie von Garben-Morphismen

$$g: F \to g_*F$$

gegeben, wobei das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{g'} & g'_*F \\ & \searrow g''g' & \downarrow g'_*(g'') \\ & & (g''g)_*F \end{array}$$

für beliebige $g',g'' \in G$ kommutativ ist.

---

[120] vgl. Grothendieck, A.: Sur quelques points d'algebre homologigue, Tôhoku Mathematical Journal 9 (1957)

[121] Wir erinnern daran, E_F ist die disjunkte Vereinigung der Halme von X,

$$E_F = \cup_{x \in X} F_x$$

und f ist die Abbildung mit $f(F_x) = \{x\}$.

2.4.6 Definition: G-$\mathcal{O}_X$-Moduln

Seien X eine algebraische Varietät, G eine endliche Gruppe von Automorphismen von X und F eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Diese Garbe heißt G-$\mathcal{O}_X$-Modul, wenn G auf F derart durch Gruppenhomomorphismen operiert, das diese Operation mit der Operation von G auf X verträglich ist und außerdem für jedes $g\in G$, jeden Schnitt f von $\mathcal{O}_X$ und jeden Schnitt s von F (über derselben offenen Menge $U\subseteq X$) gilt

$$g(f\cdot s) = (gf)\cdot(gs),$$

d.h. das folgende Diagramm ist für jedes $g\in G$ kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X\times F & \xrightarrow{\text{mult}} & F \\ g\times g\downarrow & & \downarrow g \\ \mathcal{O}_X\times F & \xrightarrow{\text{mult}} & F \end{array}$$

Beispiel 1
Die Operation

$$G\times X \to X, (g,x) \mapsto gx,$$

definiert durch Verpflanzung von Funktionen eine Operation von G auf der Strukturgarbe,

$$G\times\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X, (g,f(x)) \mapsto (gf)(x) := f(g^{-1}x).$$

Letztere definiert für jedes $x\in X$ einen Isomorphismus der Halme,

$$\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,gx}.$$

Mit anderen Worten, diese Operation von G auf $\mathcal{O}_X$ ist mit der Operation von G auf X verträglich.

Beispiel 2
Seien F ein (kohärenter) $\mathcal{O}_Y$-Modul mit $Y = X/G$ und $\pi: X \to Y$ der natürliche Morphismus. Dann hat π^*F in natürlicher Weise die Struktur eines G-$\mathcal{O}_X$-Moduls. Man beachte, für jedes $g\in G$ hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

und damit einen Garben-Morphismus

$$g^*\pi^*F \to \pi^*F.$$

Die zugehörigen Garben-Morphismen

$$\pi^*F \to g_*\pi^*F$$

definieren gerade die erwähnte Operation,

2.4.7 Proposition 2: der Fall, daß G frei operiert

Seien X eine glatte algebraische Varietät und G eine endliche Gruppe von Morphismen von X, die auf X frei operiert. Wir setzen

$$Y = X/G$$

und bezeichnen mit

$$\pi: X \to Y$$

den natürlichen Morphismus. Dann ist der folgende Funktor eine Äquivalenz von Kategorien.

$$(\text{kohärente } \mathcal{O}_Y\text{-Moduln}) \to (\text{kohärente } G\text{-}\mathcal{O}_X\text{-Moduln}),\ \mathcal{F} \mapsto \pi^*\mathcal{F}.$$

Der folgende Funktor ist quasi-invers zu diesem Funktor:

$$(\text{kohärente } G\text{-}\mathcal{O}_X\text{-Moduln}) \to (\text{kohärente } \mathcal{O}_Y\text{-Moduln}),\ \mathcal{G} \mapsto \pi_*(\mathcal{G})^G.$$

Dabei gehen lokal freie Garben über in lokal freie Garben desselben Raugs.

Beweis. Wir betrachten die natürlichen Homomorphismen

$$S(\mathcal{F}): \mathcal{F} \to \pi_*(\pi^*(\mathcal{F})^G)$$

$$T(\mathcal{G}): \pi^*(\pi_*(\mathcal{G})^G) \to \mathcal{G}.$$

(die sich aus den analogen Homomorphismen ergeben, die man erhält, wenn man den Übergang zu den G-invarianten Schnitten wegläßt).

Es reicht zu zeigen, diese beiden Homomorphismen sind Isomorphismen. Zum Beweis können wir annehmen, X und Y sind affin:

$$X = \operatorname{Spec} A,\ Y = \operatorname{Spec} B,\ B = A^G.$$

Wir haben zu zeigen, die natürlichen Homomorphismen

$$S(M): M \to (M\otimes_B A)^G,\ m \mapsto m\otimes 1.$$

$$T(N): N^G\otimes_B A \to N\ ,\ n\otimes a \mapsto an.$$

sind Isomorphismen für jeden endlich erzeugten B-Modul M und jeden endliche erzeugten G-A-Modul N.

1. Schritt: Reduktion auf den Beweis der Bijektivität von T(N).

Betrachten wir die Komposition

$$M\otimes_B A \xrightarrow{S(M)\otimes id} (M\otimes_B A)^G \xrightarrow{T(M\otimes_B A)} M\otimes_B A.$$

Nach Definition von S(M) und T(N) ist dies die identische Abbildung. Wenn also T(N) für jedes N ein Isomorphismus ist, so ist auch $S(M)\otimes id$ ein solcher. Nun ist aber π nach Voraussetzung ein surjektiver Etal-Morphismus, d.h. A ist treuflach über B, d.h. mit $S(M)\otimes id$ ist auch S(M) ein Isomorphismus.

2. Schritt: Isomorphie von T(N) im Fall A = B[G].

Die Elemente von A sind formale Linearkombinationen der Gestalt

$$\sum_i b_i g_i\ ,\ b_i \in B,$$

und G operiert auf diesen durch Permutation der Koordinaten b_i. Da G auf sich selbst transitiv operiert, folgt

$$A^G = \{\sum_i bg_i \mid b\in B\},$$

d.h. die Diagonaleinbettung

$$B \to A,\ b \mapsto \sum_{g\in G} bg$$

identifiziert B mit dem G-invarianten Teil von A. Sei jetzt N ein G-A-Modul. Wir wählen ein Erzeugendensystem von N über A und erhalten eine A-lineare Surjektion

$$(1) \qquad A^r \twoheadrightarrow N$$

Indem wir das Erzeugendensystem von N so wählen, daß mit jedem Element auch alle Elemente des G-Orbits im Erzeugendensystem liegen, erreichen wir, daß (1) G-äquivariant wird, wenn G in geeigneter Weise durch Permuation der direkten Summanden auf A^r operiert. Den Modul A^r können wir uns auch als direkte Summe von B-Teilmoduln Bg vorstellen. Das G-Orbit jedes solchen direkten Summanden ist isomorph zu B[G], d.h. es gilt

$$A^r \cong B[G]^{r_0} \text{ als B-Modul,}$$
wobei die G-Modul-Struktur von der Gruppen-Ringstruktur von B[G] kommt. Wir erhalten damit eine B-lineare und G-äquivariante Surjektion
$$B[G]^{r_0} \to N.$$
Indem wir den Schluß mit dem Kern dieser Surjektion wiederholen erhalten wir eine exakte Sequenz
$$0 \to B[G]^{r_\ell} \to \dots \to B[G]^{r_1} \to B[G]^{r_0} \to N \to 0$$
von B-linearen G-äquivarienten Abbildungen. Wir können dafür sorgen, daß diese Sequenz endet, weil A als Koordinatenring einer glatte affinen Varietät endliche homologische Dimension hat (und diese obige Sequenz gleichzeitig eine A-linere Auflösung von N durch freie A-Moduln ist).
Wir führen den weiteren Beweis durch Induktion nach ℓ, wobei wir gleich zeitig
$$H^i(G, N) = 0 \text{ für alle } i > 0$$
beweisen.
1. Fall: $\ell = 0$.
Es gilt
$$N = B[G]^{r_0} = A^r$$
und G operiert auf jedem direkten Summanden durch Permutation der Koordinaten. Wir erhalten
$$N^G = B^{r_0}$$
also
$$N^G \otimes_B A = B^{r_0} \otimes_B B[G] = B[G]^{r_0} = N.$$
Zu Beweis von
$$H^i(G, N) = 0 \text{ für alle } i > 0$$
reicht es zu zeigen, N ist koinduziert, d.h. von der Gestalt
$$N = \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}[G], X).$$
Mit einer abelschen Gruppe X. Dazu wiederum reicht es zu zeigen, A ist koinduziert. Das ergibt sich aber aus den G-Isomorphismus
$$\varphi: \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}[G], B) \xrightarrow{\cong} B[G] = A,\ f \mapsto \sum_{g\in G} f(g)g$$
Man beachte, es gilt
$$\varphi(hf) = \sum_{g\in G} (hf)(g)g = \sum_{g\in G} f(h^{-1}g)g = h\cdot \sum_{g\in G} f(h^{-1}g)h^{-1}g = h\cdot\varphi(f).$$
2. Fall: $\ell > 0$.
Wir erhalten eine exakte Sequenz
$$0 \to N' \to B[G]^{r_0} \to N \to 0$$
wobei N' der Induktionsvoraussetzung bezüglich ℓ genügt. Wir gehen zu den G-invarienten Elementen über und erhalten
$$0 \to N'^G \to (B[G]^{r_0})^G \to N^G \to H^1(G, N') \to 0 \to H^1(G,N) \to H^2(G,N') \to 0 \to \dots$$
Nach Induktionsvoraussetzung gilt
$$H^i(G,N) = H^{i+1}(G, N') = 0 \text{ für alle } i > 0$$
und

$$0 \to N'^G \to (B[G]^{r_0})^G \to N^G \to 0$$

ist exakt. Wir tensorieren mit A über B und betrachten das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & N' & \to & B[G]^{r_0} & \to & N & \to 0 \\
 & \alpha'\uparrow & & \uparrow\beta & & \uparrow\alpha & \\
0\to & N'^G\otimes_B A & \to & (B[G]^{r_0})^G\otimes_B A & \to & N^G\otimes_B A & \to 0
\end{array}$$

Wir haben zu zeigen, α ist ein Isomorphismus. Nach dem Fünferlemma reicht es zu zeigen, α' und β sind Isomorphismus. Für α' ist das der Fall nach Induktionsvoraussezung bezüglich l. Für β ergibt sich dies aus dem Fall $l = 0$.

3. Schritt: Bijektivität von T(N) im allgemeinen Fall.

Seien $x\in X$, $y = \pi(x)$ und

$$\hat{B} := \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}.$$

Zum Beweis der Bijektivität von $T(N)$: $N^G\otimes_B A \to N$ reicht es zu zeigen, daß der Homomorphismus

$$T(N)\otimes id:(N^G\otimes_B A)\otimes_B \hat{B} \to N\otimes_B \hat{B}$$

ein Isomorphismus ist (für jedes $x\in X$)[122].

Zum Beweis betrachten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccc}
(N^G\otimes_B A)\otimes_B \hat{B} & \xrightarrow{T(N)\otimes id} & N\otimes_B \hat{B} \\
\downarrow\alpha & & \| \\
(N^G\otimes_B \hat{B})\otimes_{\hat{B}}(A\otimes_B \hat{B}) & & N\otimes_B \hat{B} \\
\downarrow\beta & & \| \\
(N\otimes_B \hat{B})^G\otimes_{\hat{B}}(A\otimes_B \hat{B}) & \xrightarrow{T(N\otimes_B \hat{B})} & N\otimes_B \hat{B}
\end{array}$$

Wir haben zu zeigen, die obere horizontale Abbildung ist bijektiv. Zum Beweis reicht es zu zeigen, alle anderen Abbildungen sind bijektiv. Die Bijektivität von α ist trivial. Die von β folgt aus der Tatsache, daß die G-Invariaten von $N\otimes_N \hat{B}$ gerade mit $N^G\otimes_B \hat{B}$ (wegen der Flachheit von $\hat{B}$ über B, vgl. den Beweis von Theorem 1). Wir haben damit den Beweis der Behauptung auf den Beweis der Bijektivität der unteren horizontalen Abbildung zurückgeführt. Nach dem zweiten Schritt reicht es zu zeigen, $A\otimes_B \hat{B}$ ist eine direkte Summe von Exemplaren von $\hat{B}$, wobei G durch permutieren der direkten Summanden auf dem Tensorprodukt operiert. Nun ist aber

$$A\otimes_B \hat{B}$$

die Vervollständing von A bezüglich der y-adischen Topologie,

$$A\otimes_B \hat{B} = \lim_{\substack{\leftarrow \\ t}} B/y^t B =^{123} \lim_{\substack{\leftarrow \\ t}} \prod_{x'\in\pi^{-1}(y)} A_{x'}/y^t A_{x'},$$

---

[122] Da $\hat{B}$ treuflach über der Lokalisierung von B im Punkt y ist.

$$= \varprojlim_t \prod_{g\in G} A_{gx}/y^t A_{gx}$$

$$= \prod_{g\in G} \hat{\mathcal{O}}_{X,gx}$$

$$\cong \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}[G] \qquad \text{(denn } \pi \text{ ist etale)}$$

QED.

2.4.8 Bezeichnung: die Charaktergruppe von G

$$\hat{G} := \mathrm{Hom}(G, k^*).$$

2.4.9 Proposition 3: der Fall X vollständig

Seien X eine glatte vollständige algebraische Varietät und G eine endliche Gruppen von Automorphismen von X, die frei auf X operiert. Sei

$$\pi: X \to Y := X/G$$

die natürliche Projektion auf den Faktor. Für jeden Charakter

$$\alpha: G \to k^*$$

von G sei

$$\mathcal{L}_\alpha := \{a\in\pi_*(\mathcal{O}_X) \mid ga = \alpha(g)a \text{ für alle } g\in G\}.$$

Dann ist $\mathcal{L}_\alpha$ eine umkehrbare Garbe auf Y. Die Multiplikation der Schnitte von $\pi_*(\mathcal{O}_X)$ definiert einen Isomorphismus

$$\mathcal{L}_\alpha \otimes \mathcal{L}_\beta \to \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$$

und die Abbildung

$$\hat{G} \to \mathrm{Ker}(\mathrm{Pic}\ Y \to \mathrm{Pic}\ X), \alpha \to \mathcal{L}_\alpha,$$

ist wohldefiniert und ein Gruppen-Isomorphismus.

Beweis. <u>1. Schritt</u>: Konstruktion eines Isomorphismus $\varphi: \hat{G} \to \mathrm{Ker}(\mathrm{Pic}\ Y \to \mathrm{Pic}\ X)$,.
Auf Grund von Proposition 2 kann man

$$\mathrm{Ker}(\pi^*:\mathrm{Pix}\ Y \to \mathrm{Pic}\ X)$$

identifizieren mit der Menge der Operationen von G auf der trivialen Garbe $\mathcal{O}_X$, welche mit der Operation von G auf X verträglich sind. Bei jeder solchen Operation ist das Bild von $1 \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ bei $g\in G$ ein globaler Schnitt von $\mathcal{O}_X$, welcher nirgends Null ist. Weil X vollständig ist, ist dieser Schnitt eine Konstante, sagen wir

$$\alpha^{-1}(g) \in k^*.$$

Nach Konstruktion ist die Abbildung

$$\alpha: G \to k^*$$

ein Gruppen-Homorphismus, d.h. ein Element

$$\alpha\in\hat{G}.$$

Ist Umgekehrt ein Gruppen-Homomorphismus $\alpha: G \to k^*$, so ist durch

$$G \times \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X, (g, f) \mapsto \alpha^{-1}(g)\cdot(f\circ g^{-1}),$$

[123] Das gilt nach dem Chinesischen Restsatz: es gilt $A_{x'}/y^t A_{x'} = A/y'^{(t)}A$, wenn $y'^{(t)}$ die Primärkomponente von y^t zum Primideal x' bezeichnet.

eine Operation von G auf $\mathcal{O}_X$ definiert, die mit der Operation von G auf X verträglich ist.

Der zu dieser Operation gehörige Charakter von G ist gerade α (Man setze für f den konstanten Schnitt 1 ein).

Umgekehrt ist diese Operation die einzige $\mathcal{O}_X$-lineare Operation, für welche der zugehörige Charakter gerade α ist: für jede solche Operation gilt nämlich

$$g(f\cdot s) = gf\cdot gs$$

für beliebige Schnitte f,s von $\mathcal{O}_X$. Speziel für s = 1 erhalten wir

$$gf = (f\circ g^{-1})\cdot\alpha^{-1}(g).$$

Damit ist die gesuchte Bijektion konstruiert. Es ist nicht schwer, zu sehen, daß es sich um einen Gruppen-Homomorphismus handelt.

<u>2. Schritt</u>: das Bild von $\alpha\in\hat{G}$ bei φ ist gerade $\mathfrak{L}_\alpha$

Wie bisher wollen wir die natürliche Operation von G auf $\mathcal{O}_X$ in der üblichen Weise bezeichnen:

$$G \times \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X, (g, f) \mapsto gf := f\circ g^{-1}.$$

Bezeichen $\sigma = \varphi(\alpha)$, die Operation, die zum Charakter $\alpha\in\hat{G}$ gehört. Dann gilt

$$\sigma(g)f = \alpha^{-1}(g)\cdot(f\circ g^{-1}) = \alpha^{-1}(g)\cdot gf.$$

Die zu dieser Operation gehörige Teilgarbe $(\pi_*\mathcal{O}_X)^G$ der G-invarianten Schnitte ist damit gleich

$$\{f\in\pi_*\mathcal{O}_X \mid \sigma(g)f = f\} = \{f\in\pi_*\mathcal{O}_X \mid \alpha(g)f = f\} = \mathfrak{L}_\alpha \in \text{Pic } Y.$$

Wir haben noch zu zeigen,

$$\mathfrak{L}_\alpha\otimes\mathfrak{L}_\beta \cong \mathfrak{L}_{\alpha+\beta}.$$

Indem wir die Garben $\mathfrak{L}_\alpha$, $\mathfrak{L}_\beta$ und $\mathfrak{L}_{\alpha+\beta}$ als Teilgarben von $\pi_*\mathcal{O}_X$ ansehen, ergibt sich unmittelbar aus deren Definition,

$$\mathfrak{L}_\alpha\cdot\mathfrak{L}_\beta \subseteq \mathfrak{L}_{\alpha+\beta},$$

d.h. $\mathfrak{L}_\alpha\otimes\mathfrak{L}_\beta$ ist zumindest isomorph zu einer Teilgarbe von $\mathfrak{L}_{\alpha+\beta}$. Wir haben noch zu zeigen, die durch die Multiplikation von der Schnitte induzierte Abbildung

(1) $$\mathfrak{L}_\alpha\otimes\mathfrak{L}_\beta \to \mathfrak{L}_{\alpha+\beta}$$

ist surjektiv. Diese Aussage ist lokaler Natur. Es reicht, sie über einer beliebig kleinen offene Umgebung $U\subseteq Y$ eines vorgegebenen Punktes zu beweisen. Sei U so klein gewählt, daß die Garben über U frei (von Rang 1 sind). Insbesonder gibt es dann einen erzeugenden Schnitt

$$f \in \mathfrak{L}_\alpha(U) \subseteq H^0(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$$

der Garbe $\mathfrak{L}_\alpha$ über $\mathcal{O}_Y$. Dieser Schnitt ist nirgends Null auf U. Deshalb ist auch $f\circ\pi$ nirgends Null auf $\pi^{-1}(U)$, d.h. f^{-1} ist ein wohldefinierter Schnitt von $\pi_*\mathcal{O}_X$ über U. Für jeden Schnitt s von $\mathfrak{L}_{\alpha+\beta}$ über U ist dann sf^{-1} ein Schnitt von $\mathfrak{L}_\beta$ über U und s ist das Bild von $f\otimes sf^{-1}$ bei (1). Mit anderen Worten, (1) ist surjektiv.

QED.

2.4.10 Bemerkungen zur Zerlegung $\pi_*\mathcal{O}_X$ umkehrbare Garben

(i) Falls die Gruppe G eine zur Charakteristik p = char k teilerfremde Ordnung besitzt, so sind die Darstellungen von G auf den k-Vektorräumen $(\pi_*\mathcal{O}_X)(V)$ vollständig reduzibel, d.h. jede Darstellung ist direkte Summe von irreduziblen Darstellungen.

(ii) Insbesondere gilt damit

$$\pi_*(\mathcal{O}_X) \cong \oplus_{\alpha\in\hat{G}}\mathfrak{L}_\alpha \oplus \mathfrak{S},$$

wobei die Darstellung von G auf jedem der Vektorräume $\mathfrak{S}(V)$ keine1-dimensionalen Teil-Darstellungen besitzt.

(iii) Ist die Gruppe außerdem noch kommutativ, so besitzt sie keine irreduziblen Darstellungen einer Dimension > 1, d.h. es ist

$$\pi_*(\mathcal{O}_X) \cong \oplus_{\alpha\in\hat{G}}\mathfrak{L}_\alpha$$

Beweis. Zu (i). Zunächst beachten wir, jede irreduzible Darstellung ist endlich-dimensional: für jeden Vektor v des Darstellungsraumes ist der von den

$$gv \text{ mit } g\in G$$

erzeugte Unterraum endlich-dimensional und G-invariant, d.h. jedes v liegt in einem endlich-dimensionalen G-invarianten Unterraum. Zum Beweis der vollständigen Reduzibilität haben wir zu zeigen, zu jedem G-invarianten Unterraum

$$W \subseteq H := (\pi_*\mathcal{O}_X)(V)$$

gibt es eine komplementären G-invarianten Unterraum.
Zumindest gibt es einen komplentären Unterraum, sagen wir W'. Bezeichne

$$p: H \to W$$

die zugehörige Projektion. Wir setzen

$$p_0 := \frac{1}{\#G} \sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}.$$

Dies ist eine k-lineare Abbildung H → H. Weil W ein G-invarianter Unterraum ist, gilt sogar

$$p_0(H) \subseteq W,$$

d.h. p_0 ist eine k-lineare Abbildung

$$p_0: H \to W.$$

Für $x\in W$ gilt $g^{-1}x\in W$, also $p(g^{-1}x) = g^{-1}x$, also $g\circ p\circ g^{-1}(x) = x$, also $p_0(x) = x$. Wir haben gezeigt,

$$p_0|_W = id_W,$$

d.h. p_0 ist eine Projektion,

$$p_0^2 = p_0.$$

Weiter gilt

$$g\circ p_0 = p_0\circ g \text{ für jedes } g\in G,$$

denn es ist

$$g\circ p_0\circ g^{-1} = \frac{1}{\#G} \sum_{h\in G} g\circ h\circ p\circ h^{-1}\circ g^{-1}$$

$$= \frac{1}{\#G} \sum_{h\in G} (gh)\circ p\circ (gh)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\#G} \sum_{h\in G} g\circ p\circ g^{-1}$$

$$= p_0$$

Sei

$$W_0 := \mathrm{Ker}\ p_0.$$

Dies ist ein zu W komplementärer Unterraum. Es reicht zu zeigen, er ist G-invariant. Sei

$$x\in W_0.$$

Dann gilt $p_0(x) = 0$, also

$$p_0(gx) = (p_0\circ g)(x) = (g\circ p_0)(x) = g(x) = 0,$$

also $gx \in W_0$ für jedes $g\in G$.

Zu (ii). Jeder 1-dimensionale G-Modul in $\mathfrak{S}(V)$ würde einen Charakter α von G definieren. Dann läge dieser G-Modul aber ganz in $\mathfrak{L}_\alpha(\mathfrak{V})$.

Zu (iii). Sei M ein irreduzibler G-Modul[124] einer Dimension > 1. Jedes $g\in G$ besitzt mindestens einen Eigenraum in M (weil k algebraisch abgeschlossen ist). Weil G kommutativ ist, ist dieser Eigenraum G-invariant. Weil M irreduzibel ist, ist er gleich M. Mit anderen Worten, jedes $g\in G$ operiert durch Multiplikation mit einem Element aus k auf M, die Gruppe G selbst durch Multiplikation mit einem Charakter. Dann ist M aber reduzibel (wegen dim M > 1).

QED.

2.4.11 Folgerung

Seien X eine vollständige algebraische Varietät über k und G eine endliche Automorphismengruppe mit einer zu p = char k teilerfremden Ordnung. Weiter sei

$$\pi: X \to Y = X/G$$

der natürliche Morphismus auf die Faktorvarietät. Weiter sei F ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul.

Dann ist F isomorph zu einem direkten Summanden von $\pi_*\pi^*(F)$.

Beweis. Nach 2.4.10(iii) ist

$$\pi_*(\mathcal{O}_X) \cong \oplus_{\alpha\in\hat{G}} \mathfrak{L}_\alpha$$

also nach der Projektionsformel

$$\pi_*\pi^*(F) = \pi_*\pi^*(\mathcal{O}_Y\otimes F) = \pi_*\pi^*(\mathcal{O}_Y)\otimes F = \pi_*(\mathcal{O}_X)\otimes F = \oplus_{\alpha\in\hat{G}} (\mathfrak{L}_\alpha\otimes F).$$

Die Garbe F ist bis auf Isomorphie der direkte Summand rechts zum trivialen Charakter $\alpha = 0$. Man beachte, es gilt

$$\mathfrak{L}_0 = \pi_*(\mathcal{O}_X)^G = \mathcal{O}_Y$$

QED.

Wir wenden jetzt die bewiesenen Aussagen auf die abelschen Varietäten an. Dazu benötigen wir die Unterversalitätseigenschaft der natürlichen Projektion $X \to X/G$ auf die Faktor-Varietät.

[124] d.h. ein einfacher k[G]-Modul.

2.4.12 Die Universalitätseigenschaft der Faktor-Varietät

Seien X ein algebraische Varietät, G eine endliche Gruppe von Automorphismen von X und

$$\pi: X \to Y := X/G$$

der natürliche Morphismus auf die Faktor-Varietät.
Weiter sei

$$f: X \to Z$$

ein Morphismus von algebraischen Varietäten, dessen Fasern G-invariant sind. Dann gibt es genau einen Morphismus $\tilde{f}: X/G \to Z$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & Y=X/G \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.
Beweis. Da π: X → Y auch als stetige Abbildung die natürliche Projektion auf den Faktorraum ist, existiert zumindest

$$\tilde{f}: X/G \to Z$$

als stetige Abbildung und der Morphismus $\tilde{f}$ ist, falls er existiert, eindeutig. Es reicht also zu ziegten, die stetige Abbildung $\tilde{f}$ ist ein Morphismus. Mit anderen Worten, wir haben zu zeigen,

(1) für jede offenen Menge W⊆Z und jede reguläre Funktion s:W→k ist auch die Funktion

$$s\circ \tilde{f}: \tilde{f}^{-1}(W) \to k$$

regulär.

Zumindest ist, da f ein Morphismus ist,

$$s\circ f: f^{-1}(W) \to k \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(W))$$

regulär. Da die Fasern von f G-invariant sind, gilt

$$g(s\circ f) = s\circ f\circ g^{-1} = s\circ f,$$

d.h. s∘f ist ein G-invarianter Schnitt von

$$f_*\mathcal{O}_X = \tilde{f}_*\pi_*\mathcal{O}_X$$

über W. Wegen

$$f = \tilde{f}\circ\pi$$

können wir s∘f auch als G-invarianten Schnitt von $\pi_*\mathcal{O}_X$ auffassen über $\tilde{f}^{-1}(W)$, d.h.

$$s\circ \tilde{f}\circ\pi = s\circ f \in (\pi_*\mathcal{O}_X)^G(\tilde{f}^{-1}(W)) = \mathcal{O}_Y(\tilde{f}^{-1}(W))$$

d.h.

$$s\circ \tilde{f}: \tilde{f}_*\mathcal{O}_Y(W).$$

Wir haben gezeigt, $\tilde{f}$ induziert einen Garben-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_Z \to \tilde{f}_*\mathcal{O}_Z.$$

Dann ist aber $\tilde{f}$ ein Morphismus algebraischer Varietäten.
QED.

2.4.13 Theorem 4: endliche Untergruppen und separable Isogenien

Sei X eine abelsche Varietät. Dann sind die folgenden beiden Abbildungen bijektiv und zueinander invers.

$$\{\text{endliche Untergruppen von } X\} \rightleftarrows \{\text{separable Isogenien } X\to Y\}/\sim.$$

$$\begin{array}{ccc} K & \mapsto & X \to X/K \\ \mathrm{Ker}\, f & \leftarrow\!\!\dashv & f{:}X\to Y \end{array}$$

Dabei bezeichne ~ die folgende Äquivalenz-Relation:

$$f \sim f' \Leftrightarrow \text{es gibt einen Isomorphismus } h \text{ mit } f' = h\circ f.$$

Beweis. Beginnen wir mit einer endlichen Untergruppe $K \subseteq X$. Sie operiert frei auf X, d.h. die natürliche Projektion

$$f: X \to X/K$$

auf die Faktor-Varietät ist (surjektiv, endlich und) etale. Außerdem ist X/K der Faktor der abstrakten abelschen Gruppe X nach der Untergruppe K und hat damit die Struktur einer Gruppe. Wir haben zu zeigen, das Gruppen-Gesetz

$$n: X/K \times X/K \to X/K$$

ist ein Morphismus algebraischer Varietäten. Zum beweis betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X\times X & \xrightarrow{m} & X \\ f\times f\downarrow & & \downarrow f \\ X/K \times X/K & \xrightarrow{n} & X/K \end{array}.$$

Dabei bezeichne m das Gruppen-Gesetz von m. Es ist nicht schwer zu zeigen, es gilt

$$X/K \times X/K = X\times X/K\times K.$$

Weiter sind die Fasern des Morphismus $f\circ m$: $X \times X \to X/K$ invariant bei $K\times X$. Deshalb faktorisiert sich $f\circ m$ (nach 2.4.12) über $X\times X/K\times K$, d.h. n ist ein Morphismus.

Analog wird zeigt gezeigt, der Übergang zum inversen Element ist ein Morphismus $j{:}X/K \to X/K$. Man betrachtet das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ X/K & \xrightarrow{j} & X/K \end{array},$$

wobei i den Übergang zum inversen Element auf X bezeichne. Der Morphismus $f\circ i$ hat K-invariante Fasern, d.h.nach 1.4.12 faktorisiert er sich auf genau eine Weiser über X/K, d.h. j ist ein Morphismus.

Wir haben gezeigt, X/K ist eine algebraische Gruppe. Weiter ist X vollständige Varietät (als Bild der vollständigen Varietät). Zusammen sehen wir X/K ist ein abelsche Varietät und der natürliche Morphismus

$$f: X \to X/K$$

ist ein separabler Morphismus mit endlichem Kern (vgl. 2.4.2), d.h. ein separable Isogenie (vgl. 3.2.17).

Sei jetzt umgekehrt $f{:}X \to Y$ ein separable Isogenie. Bezeichne

$$K := \mathrm{Ker}\, f$$

deren Kern. Wie oben konstruieren wir die zu K gehörige separable Isogenie

$$g: X \to X/K.$$

Da die Fasern von f invariant sind bei der Operation von K, gibt es nach 2.4.12 einen Morphismus $h{:}X/K \to Y$, für welchen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/K \arrow[rr, "h"] & & Y \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.
Nach Konstruktion ist h bijektiv und, weil f separabel ist, auch separabel. Weil g endlich ist, ist auch h endlich. Also ist h endlich vom Grad 1, also birational. Nach dem Hauptsatz von Zariski ist damit h ein Isomorphimus.
QED.

2.4.14 Folgerung 1

Jede separable Isogenie abelscher Varietäten ist ein Etale-Morphismus.

2.4.15 Folgerung 2

Seien X und Y abelsche Varietäten und

$$f\colon X \to Y$$

eine Isogenie, deren Grad teilerfremd ist zur Charakteristik p des Grundkörpers k. Dann sind

$$\text{Ker } f \quad \text{und} \quad \text{Ker } (f^*\colon \text{Pic } Y \to \text{Pic } X)$$

duale endliche abelsche Gruppen.
Beweis. Nach Proposition 3 (d.h. 2.4.9) gilt,

$$\hat{G} \cong \text{Ker}(f^*\colon\text{Pic } Y \to \text{Pic } X) \text{ mit } G := \text{Ker } f$$

im Fall, daß $f\colon X \to Y$ der natürliche Morphismus auf den Faktor X/G ist. Nach 2.4.13 Theorem 4 gilt damit die Aussage aber auch für beliebige separable Isogenien.
QED.

2.5 Die duale abelsche Varietät im Fall der Charakteristik Null

Die Voraussetzung über die Charakteristik des Grundkörpers k wird erst am Ende des Abschnitts benötigt (siehe 4. Schritt bei der Konstruktion des Poincaré-Bündels in 2.5.4).

2.5.1 Definition von Pic^0 X

Sei X eine abelsche Varietät über k. Dann bezeichne

$$\text{Pic}^0 X := \{L \in \text{Pic } X \mid \varphi_L = 0\}$$

die Menge der Isomorphie-Klassen aller Geraden-Bündel L auf X, für welche der Grupen-Homomorphismus

$$\varphi_L\colon X \to \text{Pic } X,\ x \mapsto \rho_x^* L \otimes L^{-1}$$

von 2.3.8 (Satz vom Quadrat) identisch Null ist.
Bemerkungen

(i) Nach dem Satz vom Quadrat (2.3.8) liegt das Bild von φ_L für jedes L ganz in Pic^0 X,

$$\text{Im } \varphi_L \in \text{Pic}^0 X \text{ für jedes } L \in \text{Pic } X.$$

(ii) Man hat damit sogar eine exakte Sequenz

$$0 \to \text{Pic}^0 X \xrightarrow{\alpha} \text{Pic } X \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_{Ab}(X, \text{Pic}^0 X)$$

wobei φ gerade die Abbildung[125] $L \mapsto \varphi_L$ ist.

[125] Diese Abbildung ist nach 2.3.9 ein Gruppenhomomorphismus.

(iii) Das Hauptziel dieses Abschnitts ist es im Fall der Charakteristik Null zu zeigen, daß $\mathrm{Pic}^0 X$ eine in natürlicher Weise definierte Struktur einer abelschen Varietät besitzt. Diese Varietät heißt die zu X duale abelsche Varietät. Wir beginnen mit einigen Bemerkungen allgemeiner Natur.

Beweis. Zu (i). Für jedes $x \in X$ gilt

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\varphi_L(x)} &= \varphi_{\rho_x^* L \otimes L^{-1}} && \text{(nach Definiton von } \varphi_L) \\
&= \varphi_{\rho_x^* L} - \varphi_L && \text{(nach 2.3.9(i))} \\
&= \varphi_L - \varphi_L && \text{(nach 2.3.9(ii))} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

also $\varphi_L(x) \in \mathrm{Pic}^0 X$.

Zu (ii). Nach (i) gilt $\mathrm{Im}\, \alpha \subseteq \mathrm{Ker}\, \varphi$. Umgekehrt gilt für $L \in \mathrm{Ker}\, \varphi$ stets $\varphi_L = 0$, also nach Definition $L \in \mathrm{Pic}^0$.

QED.

2.5.2 Eigenschaften von $\mathrm{Pic}^0 X$

Sei X eine abelsche Varietät über k. Dann gilt:

(i) $L \in \mathrm{Pic}^0 X \Leftrightarrow \rho_x^* L \cong L$ für jedes $x \in X \Leftrightarrow m^*L \cong p_1^* L \otimes p_2^* L$

Dabei seien $m, p_1, p_2 : X \times X \to X$ das Gruppengesetzt, die Projektion auf auf den ersten bzw. die Projektion auf den zweiten Faktor.

(ii) Für $L \in \mathrm{Pic}^0 X$, jedes Schema S und je zwei Morphismen $f;g: S \rightrightarrows X$ gilt

$$(fg)^*L \cong f^*L \otimes g^*L \ .$$

(iii) $n_X^* L \cong L^{\otimes n}$ für jedes $L \in \mathrm{Pic}^0 X$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) $n_X^* L \otimes L^{-n^2} \in \mathrm{Pic}^0 X$ für jedes $X \in \mathrm{Pic}\, X$.

(v) $L \in \mathrm{Pic}^0 X$ falls $L \in \mathrm{Pic}\, X$ endliche Ordnung besitzt.

(vi) Seien S eine beliebige Varietät, L ein Geradenbündel auf $X \times S$ und

$$L_s := L|_{X \times \{s\}}.$$

Dann gilt

$$L_{s_1} \otimes L_{s_0}^{-1} \in \mathrm{Pic}^0 X \text{ für beliebige } s_0, s_1 \in S.$$

(vii) $H^i(X, L) = 0$ für jedes i und jedes nicht-triviale $L \in \mathrm{Pic}^0 X$.

Beweis. Zu (i). Nach dem Schaukelsatz ist das Geradenbündel

$$m^*L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1}$$

genau dann trivial, wenn seine Einschränkungen auf $X \times \{a\}$ und $\{0\} \times X$ für jedes $a \in X$ trivial sind. Auf $\{0\} \times X$ ist diese Garbe jedoch immer trivial[126] und auf $X \times \{a\}$ ist sie isomorph zu[127]

$$\rho_a^* L \otimes L^{-1}.$$

---

[126] Auf $\{0\} \times X$ sind m und p_2 gleich dem identischen Morphismus und p_1 ist eine konstante Abbildung

[127] Auf $X \times (a)$ ist m gleich der Verschiebung ρ_a, p_1 ist die identische Abbildung und p_2 eine konstante Abbildung.

Die Behauptung folgt damit aus der Definition von $\mathrm{Pic}^0 X$ (und der von φ_L, $\varphi_L(x) = \rho_x^* L\otimes L^{-1}$).

Zu (ii). Wegen $L\in\mathrm{Pic}^0X$, gilt besteht nach (i) ein Isomorphismus

$$m^*L \cong p_1^*L\otimes p_2^*L .$$

Wir gehen zum inversen Bild bei

$$(f,g): S \to X\times X$$

über und erhalten

$$(f\cdot g)^*L = f^*L\otimes g^*L.$$

Zu (iii). Für n = 0 ist die Aussage trivial. Aus (ii) erhalten wir mit f = n und g = Id,

$$(n+1)_X^*L = n_X^*L\otimes L .$$

Die Behauptung ergibt sich also durch (aufsteigende und absteigende) Induktion nach n.

Zu (iv). Nach 2.3.7 ist

$$n_X^*L \cong L^{(n^2+n)/2}\otimes(-1_X)^*L^{(n^2-n)/2} \cong L^{n^2}\otimes(L\otimes(-1_X)^*L^{-1})^{(n-n^2)/2},$$

d.h.

$$n_X^*L\otimes L^{-n^2} \cong (L\otimes(-1_X)^*L^{-1})^{(n-n^2)/2}$$

Weil $L \mapsto \varphi_L$ (nach 2.3.9) ein Gruppen-Homomorphismus ist, also Pic^0X eine Untergruppe von Pic X, reicht es zu zeigen,

$$L\otimes(-1_X)^*L^{-1} \in \mathrm{Pic}^0X .$$

Nach (i) reicht es zu zeigen, die Isomorphie-Klasse dieser Garbe ändert sich nicht, wenn man ρ_x^* mit $x\in X$ anwendet. Es gilt

$$\begin{aligned}
\rho_x^*(L\otimes(-1_X)^*L^{-1}) &\cong^{128} \rho_x^*L\otimes(-1_X)^*\rho_{-x}^*L^{-1}\\
&\cong \rho_x^*L\otimes(-1_X)^*[L\otimes\rho_{-x}^*L^{-1}]\otimes(-1_X)^*L^{-1}\\
&\cong^{129} \rho_x^*L\otimes L^{-1}\otimes\rho_{-x}^*L\otimes(-1_X)^*L^{-1}\\
&\cong \varphi_L(x)\otimes\varphi_L(-x)\otimes L\otimes(-1_X)^*L^{-1} \text{ (nach Definition von } \varphi_L)\\
&\cong^{130} \varphi_L(x-x)\otimes L\otimes(-1_X)^*L^{-1}\\
&\cong L\otimes(-1_X)^*L^{-1}
\end{aligned}$$

Zu (v). Aus der Trivialität von L^n folgt

$$0 = \varphi_{L^n}(x) = n\cdot\varphi_L(x) = \varphi_L(nx)$$

---

[128] Das folgende Diagramm ist kommutativ:
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho_x} & X \\ {\scriptstyle -Id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -Id} \\ X & \xrightarrow{\rho_{-x}} & X \end{array}$$

[129] Man beachte, die Garbe in eckigen Klammern liegt in Pic^0X (nach Bemerkung (i) von 2.5.1), wir können also (iii) auf diese Garbe anwenden.

[130] Nach 2.3.8 ist $\varphi_L : X \to \mathrm{Pic}\, X$ für jede umkehrbare Garbe L ein Gruppen-Homomorphismus.

für jedes $x\in X$. Da die Gruppe X teilbar ist, folgt $\varphi_L = 0$.

Zu (vi). 1. Schritt: Reduktion auf den Fall $L|_{\{0\}\times S}$ trivial.

Da L lokal frei ist, können wir eine offene Überdeckung[131]

$$S = \cup\, S_\alpha$$

finden mit der Eigenschaft, daß

$$L|_{\{0\}\times S_\alpha} \text{ trivial}$$

ist für jedes α. Für gegebene s_0, s_1 gibt es α_0 und α_1 mit

$$s_0\in S_{\alpha_0} \text{ und } s_1\in S_{\alpha_1}$$

und ein $s\in S_{\alpha_0}\cap S_{\alpha_1}$ (denn S soll eine Varietät, d.h. irreduzibel, sein). Es reicht zu zeigen

$$L_s\otimes L_{s_0}^{-1} \in \mathrm{Pic}^0 X \text{ und } L_s\otimes L_{s_1}^{-1} \in \mathrm{Pic}^0 X.$$

Im Folgenden halten wir s_0 fest und variieren $s = s_1$.

2. Schritt: Reduktion auf den Schritt L_{s_0} trivial.

Wir können L durch $L\otimes p_1^* L_{s_0}^{-1}$ ersetzen.

3. Schritt: Beweis der Behauptung unter den zusätzlichen Bedingungen.

Wir haben zu zeigen

$$L_s \in \mathrm{Pic}^0 X \text{ für jedes } s\in S.$$

Nach (i) reicht es zu zeigen,

(1) $$m^*L_s\otimes p_1^*L_s^{-1}\otimes p_2^*L_s^{-1} \text{ ist trivial für jedes } s\in S.$$

Dazu betrachten wir das folgende Geradenbündel M auf $X\times X\times S$.

$$M := \mu^*L\otimes p_{13}^*L^{-1}\otimes p_{23}^*L^{-1}$$

mit

μ: $X\times X\times S \to X\times S$, $(x, y, s) \mapsto (x+y, s)$,

p_{13}: $X\times X\times S \to X\times S$, $(x, y, s) \mapsto (x, s)$,

p_{23}: $X\times X\times S \to X\times S$, $(x, y, s) \mapsto (y, s)$.

Die Einschränkungen dieser Garbe M auf $\{0\}\times X\times S$, $X\times\{0\}\times S$ und $X\times X\times\{s_0\}$ sind trivial[132]. Nach dem Satz vom Kubus ist damit M trivial. Dann ist aber auch die zu (1) isomorphe Garbe

---

[131] Eigentlich wählt man zunächst eine offene Überdeckung von $X\times S$, auf welcher L trivial ist. Durch Schneiden mit $\{0\}\times X$ erhält man dann die S_α.

[132] Auf $\{0\}\times X\times S$ ist $\mu=p_{23}$ und p_{12} faktorisiert sich über die Einbettung $\{0\}\times S \subseteq X\times S$ (und L ist auf $\{0\}\times S$ trivial).
Auf $X\times\{0\}\times S$ ist $\mu=p_{12}$ und p_{23} faktorisiert sich über die Einbettung $\{0\}\times X \subseteq X\times S$.
Auf $X\times X\times\{s_0\}$ faktorisieren sich alle drei Abbildungen μ, p_{12} und p_{23} über die Einbettung

$$X\times\{s_0\}\subseteq X\times S$$

(und L ist auf $X\times\{s_0\}$ trivial).

$$M|_{X\times X\times\{s\}}$$

trivial[133].

Zu (vii). Wir führen den Beweis durch Induktion nach i.

Induktionsanfang: i = 0.

Angenommen, es ist

$$H^0(L) \neq 0.$$

Dann gilt[134]

$$L = \mathcal{O}_X(D)$$

mit einem Divisor $D \geq 0$. Wegen $L \in \mathrm{Pic}^0 X$ können wir (iii) anwenden und erhalten

$$L^{-1} \cong (-1)_X^* L \cong \mathcal{O}_X((-1)_X^* D),$$

also

$$\mathcal{O}_X \cong L \otimes L^{-1} \cong \mathcal{O}_X(D + (-1)_X^* D),$$

Der effektive Divisor $D + (-1)_X^* D$ muß demnach der Nulldivisor sein, d.h. es gilt

$$D = 0,$$

d.h. $L \cong \mathcal{O}_X$ im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen.

Induktionsschritt: Angenommen es gibt eine natürliche Zahl k mit $H^k(L) \neq 0$. Wir können annehmen, k ist die kleinste solche natürliche Zahl. Bezeichne s_1 den Morphismus

$$s_1 : X \to X\times X,\ x \mapsto (x, 0).$$

Wegen $L \in \mathrm{Pic}^0 X$ gilt nach (i)

$$m^*L = p_1^* L \otimes p_2^* L\ .$$

Aus der Zerlegung

$$X \xrightarrow{s_1} X\times X \xrightarrow{m} X$$

des identischen Morphismus erhalten wir die folgende Zerlegung[135] der identischen Abbildung

$$H^k(X, L) \to H^k(X\times X, m^*L) \xleftarrow{m^*} H^k(X, L).$$

Es reicht deshalt zu zeigen, es gilt

(2) $$H^k(X\times X, m^*L) = 0,$$

---

[133] Auf $X\times X\times\{s\}$ ist μ bis auf Isomorphie gerade m, p_{12} ist bis auf Isomorphie gerade p_1 und p_{23} gerade p_2.

[134] Die Projektivierung von $H^0(L)$ ist gerade die Menge aller dieser Divisoren, und diese Projektivierung ist nicht leer.

[135] Für jeden Morphismus $f:U \to V$ und jede abelsche Garbe F auf U haben wir eine Spektralsequenz

$$H^q(V, R^p f_* F) \Rightarrow H^{p+q}(U, F)$$

die im rechten oberen Quadranten konzentriert ist. Damit gibt es einen Kanten-Homomorphismus

$$H^k(V, f_* F) = E_2^{k0} \twoheadrightarrow E_3^{k0} \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow E_\infty^{k0} \subseteq H^k(U,\ F).$$

Ist F speziell von der Gestalt $F = f^*L$ so erhalten wir mit Hilfe des Adjunktions-Homomorphismus $L \to f_* f^* L$ die Abbildung

$$H^k(V, L) \to H^k(V, f_* f^* L) \to H^k(U, f^* L)$$

denn dann muß auch $H^k(L) = 0$ sein. Zum Beweis von (2) verwenden wir die Künneth-Formeln[136]. Es gilt

$$H^k(X\times X, m^*L) \cong H^k(X\times X, p_1^*L\otimes p_2^*L) \cong \oplus_{i+j=k} H^i(L)\otimes H^j(L).$$

Für $i + j = k \geq 1$ muß aber $i < k$ oder $j < k$ gelten, also $H^i(L) = 0$ oder $H^j(L) = 0$. Zusammen ergibt sich damit (2).
QED.

2.5.3 Theorem 1: Surjektivität der Abel-Jacobi-Abbildung

Seien X eine abelsche Varietät über k, L eine ample Garbe auf X und

$$M \in \mathrm{Pic}^0 X.$$

Dann gibt es einen Punkt $x\in X$ mit

$$M \cong \rho_x^* L \otimes L^{-1}.$$

Mit anderen Worten, der Gruppen-Homomorphismus $\varphi_L : X \to \mathrm{Pic}^0 X$ ist surjektiv.

Im Fall $\dim X = 1$ und $L = \mathcal{O}_X(p)$ mit einem Punkt $p\in X$ ist dies gerade der Satz von Abel-Jacobi.

Beweis. Die Grundidee des Beweises besteht in der Betrachtung des Geradenbündels

$$K := m^*L\otimes p_1^* L^{-1}\otimes p_2^*(L^{-1}\otimes M^{-1})$$

auf $X\times X$. Gegem die Kohomologie dieses Geradenbündels konvergieren zwei Leray-Spektralsequenzen, die zu den beiden Projektionen $X\times X \to X$ gehören:

(1) $\qquad H^l(X, R^k p_{1*}K) \Rightarrow H^{k+l}(X\times X, K)$

(2) $\qquad H^l(X, R^k p_{2*}K) \Rightarrow H^{k+l}(X\times X, K).$

Wir untersuchen diese Spektralsequenzen, indem wir die Einschränkungen von K auf die Fasern der beiden Projektionen betrachten. Es gilt

$$K|_{\{x\}\times X} \cong^{137} \rho_x^* L\otimes L^{-1}\otimes M^{-1}$$

$$K|_{X\times\{x\}} \cong^{138} \rho_x^* L\otimes L^{-1}$$

---

[136] vgl. Bredon, G. E.: Sheaf Theory, McGraw-Hill, New York 1967, Ch. 2 Theorem 18.2. Der Beweis dort beschränkt sich auf den Fall lokal kompaker Räume. Der Beweis in unserem Fall ist so ähnlich. Entscheidend ist, daß eine der beiden beteiligten Garben torsionsfrei ist:

Theorem 18.2:
Seien X und Y lokal kompakte Hausdorff-Räume und A, B abelsche Garben auf X bzw. Y mit

$$A * B = 0.$$

Dann gibt es eine exakte Sequenz von Kohomologien mit kompakten Trägern:

$$0 \to \oplus_{i+j=k} H_c^i(X,A)\otimes H_c^j(X,B) \to H_c^k(X\times Y, A\otimes B) \to \oplus_{i+j=k+1} H_c^i(X, A) * H_c^j(Y,B) \to 0$$

(betrachtet man alles über einem Körper, so sind die Torsionsprodukte rechts sämtlich Null).
Zum allgemeinen Fall siehe Grothendieck, A., Dieudonné, J.: Éléments de géometrie algébrique III_1, Théorème 6.7.3 (es werden 6 Spektralsequenzen angegeben, die gegen einen gemeinsamen Limes gehen).

[137] Die Einschränkung von m auf $\{x\}\times X$ ist isomorph zur Verschiebung um x, die von p_1 ist der konstante Morphismus und die von p_2 ist isomorph zur Identität.

Wenn also M für kein x isomorph ist zu $\rho_x^* L \otimes L^{-1}$, so ist die Einschränkung $K|_{\{x\}\times X}$ für kein x das triviale Element von Pic^0 X. Nach Eigenschaft (vii) von 2.5.2 bedeutet dies, alle Kohomologie-Gruppen dieser Einschränkung sind trivial. Nach 2.2.8 Folgerung 2 des Satzes über Kohomologie und Basiswechsel bestehen aber Isomorphismen

(3) $$R^k p_{1*}(K) \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x) \to H^k(\{x\}\times X, K|_{\{x\}\times X}),$$

d.h. es ist $R^k p_{1*}(K) = 0$ für alle k. Auf Grund von (1) folgt

$$H^k(X\times X, K) = 0 \text{ für alle k.}$$

Betrachten wir jetzt die zweite Spektralsequenz. Für $x \notin K(L)$ ist das Bündel $\rho_x^* L \otimes L^{-1}$ nicht-trivial[139] und liegt in Pic^0 X[140]. Nach 2.5.2 (vii) sind sämtliche Kohomologie-Gruppen mit Koeffizienten in $\rho_x^* L \otimes L^{-1}$ für solche x gleich Null. Es folgt

$$\mathrm{Supp}\, R^k p_{2*} K \subseteq K(L) \text{ für jedes k.}$$

Nun ist K(L) eine endliche Menge, die höheren Kohomologien mit Koeffizienten in der Garbe $R^k p_{2*} K$ sind Null, d.h. (2) degeneriert:

$$\oplus_{x\in K(L)} (R^k p_{2*} K)_x \cong H^k (X\times X, K) \text{ für jedes k.}$$

Da rechts die Null steht, folgt

$$R^k p_{2*} K = 0 \text{ für jedes k.}$$

Aus dem Isomorphismus (3) mit p_2 anstelle von p_1 erhalten wir

$$H^k(X\times\{x\}, K|_{X\times\{x\}}) = 0 \text{ für jedes k.}$$

Das ist aber nicht möglich: für x = 0 ist $K|_{X\times\{x\}} \cong \rho_x^* L \otimes L^{-1}$ das triviale Bündel, hat also nioht-triviale globale Schnitte. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung.
QED.

Bemerkungen

(i) Einen anderen Beweis einer etwas schwächeren Variante der obigen Aussage findet man im Buch von S. Lang [17].

(ii) Das obige Theorem besagt, als abstrakte Gruppe ist Pic^0 X isomorph zur abelschen Varietät

$$X/K(L) \text{ mit } K(L) = \{x\in X \mid \rho_x^* L \cong L\}$$

(vgl. 2.3.10).

(iii) Sei $\hat{X}$ irgendeine abelsche Varietät, die als abstrakte Gruppe isomorph ist zu

(*) $$\hat{X} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}^0 X.$$

---

[138] Die Einschränkung von m auf $X\times\{x\}$ ist isomorph zur Verschiebung um x, die von p_1 ist isomorph zur Identität und die von p_2 ist der konstante Morphismus.

[139] K(L) war definiert als der Kern des Gruppen-Homomorphismus $\varphi_L : X \to \mathrm{Pic}\, X, x \mapsto \rho_x^* L \otimes L^{-1}$, vgl. 2.3.10. Nach 2.3.13 ist K(L) für amples L endlich.

[140] Nach Bemerkung (i) von 2.5.1.

Unser Ziel in diesem Abschnitt besteht darin, diese zusätzliche Struktur auf $\mathrm{Pic}^0 X$ durch gewisse natüliche Eigenschaften zu charakterisieren. Genauer geht es um die beiden folgenen Eigenschaften.

(a) Auf $X\times\hat{X}$ gibt es ein Geradenbündel P, welches Poincaré-Bündel heißt, mit der Eigenschaft, daß für jedes $\alpha\in\mathrm{Pic}^0 X$ die Einschränkung

$$P_\alpha = P|_{X\times\{\alpha\}}$$

dasjenige Element von $\mathrm{Pic}^0 X$ ist, welches beim oben gewählten Gruppen-Isomorphismus (*) gerade dem Element α entspricht.[141] Außerdem ist die Einschränkung

$$P|_{\{0\}\times\hat{X}}$$

trivial auf $\hat{X}$. Man beachte, nach dem Satz vom Kubus (2.3.1 mit Z = Spec k) ist P durch diese Bedinungen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt).

(b) Seien S eine normale Varietät und K ein Geradenbündel auf $X\times S$ mit den folgenden beiden Eigenschaften.

1. $K_s := K|_{X\times\{s\}}$ liegt für ein $s\in S$ in $\mathrm{Pic}^0 X$ (also für alle $s\in S$, vgl. 2.5.2(vi)).
2. $K|_{\{0\}\times S}$ ist trivial.

Dann ist die eindeutig[142] bestimmte Abbildung[143]

$$f\colon S \to \hat{X} \text{ mit } K_s \cong P_{f(s)}$$

ein Morphismus von algebraischen Varietäten, und außerdem ist $K \cong (1_X\times f)^*P$.

(iv) Die Eigenschaften (a) und (b) charakterisieren $\hat{X}$ und P bis auf kanonische Isomorphie. Das Problem besteht in der Konstruktion von P.

(v) Mit dem Ziel der Konstruktion von P fixieren wir im folgendne ein amples Geraden-Bündel,

$$L \text{ ample auf } X$$

und nehmen als abelsche Varietät $\hat{X}$ den Faktor

$$\hat{X} := X/K(L)$$

(vgl. Theorem 1). Bezeichne

$$\pi\colon X \to \hat{X}$$

den natürlichen Morphismus auf die Faktor-Varietät, d.h. $\pi = \varphi_L$,wenn man mit Hilfe von (*) die Varietät $\hat{X}$ mit der Gruppe $\mathrm{Pic}^0 X$ identifiziert.

2.5.4 Konstruktion des Poincaré-Bündels (in der Charakteristik 0)

Zur Konstruktion von P wenden wir 2.4.7 Proposition 2 auf den Morphismus

(1) $$(1_X\times\pi)\colon X\times X \to X\times\hat{X}$$

und die Untergruppe $G = \{0\}\times K(L)$ von $X\times X$ an. Die Proposition besagt in dieser Situation, daß durch

---

[141] Mit anderen Worten, bei (*) wird $\alpha\in\hat{X}$ identifiziert mit $P_\alpha\in\mathrm{Pic}^0 X$.

[142] Nach Definition sind die Geradenbündel P_α für verschiedene α nicht-isomorph.

[143] Identifiziert man mit Hilfe von (*) die Varietät $\hat{X}$ mit der Gruppe $\mathrm{Pic}^0 X$, so ist f gerade die Abbildung

$$S \to \mathrm{Pic}^0 X,\ s \mapsto K_s .$$

(kohärente $\mathcal{O}_{X\times\hat{X}}$-Moduln) $\to$ (kohärente G-$\mathcal{O}_{X\times X}$-Moduln), $\mathcal{F} \mapsto (1_X\times\pi)^*\mathcal{F}$.
eine Äquivalentz von Kategorien definiert ist mit dem Quasi-Inversen Funktor

$$\mathcal{G} \mapsto ((1_X\times\pi)_*\mathcal{G})^G$$

Es reicht also π^*P auf X in geeigneter Weise zu beschreiben. Sei

$$K := m^*L\otimes p_1^*L^{-1}\otimes p_2^*L^{-1}$$

1. Schritt. Falls P existiert, so gilt $(1_X\times\pi)^*P \cong K$.

Wir wenden Eigenschaft (b) von Bemerkung 2.5.3 (iii) an auf den Fall S = X und K wie oben an. Man beachte, K hat tatsächlich die geforderten Eigenschaften:

1. $K_s := K|_{X\times\{s\}} \cong \rho_s^*L\otimes L^{-1} = \varphi_L(s)$ liegt in Pic^0 _X.
2. $K|_{\{0\}\times X} \cong L\otimes\mathcal{O}_X\otimes L^{-1}$ ist trivial.

Nach (b) ist dann die Abbildung

$$f: X \to \hat{X} = \mathrm{Pic}^0 X,\ s \mapsto K_s\ ,$$

ein wohldefinierter Morphismus von Varietäten mit $K \cong (1_X\times f)^*P$.

Wegen $K_s \cong \varphi_L(s)$ ist aber f = π, d.h. es gilt

$$K \cong (1_X\times f)^*P.$$

2, Schritt: K ist das inverse Bild bei (1) eines kohärenten $\mathcal{O}_{X\times\hat{X}}$-Moduls
(den wir mit P bezeichnen werden).

Nach der oben zitierten Proposition 2 (d.h. 2.4.7) haben wir zu zeigen, K hat die Struktur eines G-$\mathcal{O}_{X\times X}$-Moduls. Für jedes Element

$$(0,a) \in G = \{0\}\times K(L)$$

haben wir einen Automorphismus φ_a: K → K anzugeben mit

$$(2)\qquad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\varphi_a} & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ X\times X & \xrightarrow{(x,y)\mapsto(x,y+a)} & X\times X \end{array}$$

Dabei seien die vertikalen Abbildungen gerade die Bündelprojektionen. Untersuchen wir also, welche Wirkung eine Translation mit (0,a) auf K hat. Es gilt

$$\begin{aligned} \rho_{(0,a)}^*K &\cong \rho_{(0,a)}^*m^*L\otimes \rho_{(0,a)}^*p_1^*L^{-1}\otimes \rho_{(0,a)}^*p_2^*L^{-1} \\ &\cong m^*\rho_a^*L\otimes p_1^*L^{-1}\otimes p_2^*\rho_a^*L^{-1} \end{aligned}$$

Die letzte Isomorphie besteht wegen der Kommutativität der folgenden Diagramme.

$$\begin{array}{ccc} X\times X & \xrightarrow{\rho_{(0,a)}} & X\times X \\ m\downarrow & & \downarrow m \\ X & \xrightarrow{\rho_a} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X\times X & \xrightarrow{\rho_{(0,a)}} & X\times X \\ & p_1 \searrow & \downarrow p_1 \\ & & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X\times X & \xrightarrow{\rho_{(0,a)}} & X\times X \\ p_2\downarrow & & \downarrow p_2 \\ X & \xrightarrow{\rho_a} & X \end{array}$$

Wegen a∈K(L) ist L invariant gebenüber der Translation um a, d.h. es gilt

$$\rho_{(0,a)}^*K \cong m^*L\otimes p_1^*L^{-1}\otimes p_2^*L^{-1} = K.$$

Wir haben gezeigt, es gibt einenen Automorphismus φ_a , für welchen das Diagramm (2) kommutativ ist. Ein solcher Automorphismus ist jedoch nicht eindeutig festgelegt.

Durch Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten (aus k) erhält man aus φ_a einen weiteren solchen Automorphismus.

Da K ein Geradenbündel (d.h. vom Rang 1) ist, unterscheiden sich je zwei solche Automorphismen durch Multiplikation mit einer regulären (auf X×X definierten) Funktion, die an keiner Stelle Null ist. Da X×X projektiv ist, ist jede solche Funktion konstant. Diese Tatsache bietet eine Möglichkeit, durch eine Zusatzbedingung den Automorphismus eindeutig festzulegen: es reicht, diesen auf einer der Fasern von K festzulegen.
Zur Beschreibung des Automorphismus auf einer der Fasern von K benutzen wir den folgenden natürlichen Isomorphismus.

$$K|_{\{0\}\times X} \cong m^*L|_{\{0\}\times X} \otimes p_1^* L^{-1}|_{\{0\}\times X} \otimes p_2^* L^{-1}|_{\{0\}\times X}$$
$$\cong L \otimes (\text{triviales Bündel } L^{-1}(0)\times X) \otimes L^{-1}$$
$$\cong L^{-1}(0)\times X$$

Dabei bezeiche $L^{-1}(0)$ die Faser des Bündels L^{-1} über dem Punkt $0 \in X$. Wegen der Kommutativität von (2) überführt φ_a die Einschränkung $K|_{\{0\}\times X}$ und hat, wenn man diese Einschränkung mit $L^{-1}(0)\times X$ identifiziert, dort die Gestalt

$$L^{-1}(0)\times X \to L^{-1}(0)\times X,\ (v, x) \mapsto (f(x)v, x+a),$$

mit einer regulären Funktiorn f: $X \to k - \{0\}$. Da X vollständig ist, ist f konstant. Wir legen jetzt φ_a dadurch fest, indem wir fordern, daß diese Konstante gleich 1 ist, d.h. φ_a soll auf $K|_{\{0\}\times X}$ den Automorphismus

$$L^{-1}(0)\times X \to L^{-1}(0)\times X,\ (v, x) \mapsto (v, x+a),$$

induzieren[144]. Wir haben noch zu zeigen, die Abbildung

$$G\times K \to K,\ ((0,a), v) \mapsto \varphi_a(v),$$

ist tatsächlich eine Gruppenoperation, d.h. zu zeigen ist

$$\varphi_a\varphi_b = \varphi_{a+b} \text{ für beliebige } a,b \in K(L).$$

Wir wissen, die beiden Automorphismen $\varphi_a\varphi_b$ und φ_{a+b} unterscheiden sich nur in der Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten. Es reicht zu zeigen, diese Konstante ist 1. Dazu wieder reicht es zu zeigen, die beiden Automorphismen stimmen auf einer Faser von K überein. Das ist aber sogar der Fall auf allen Fasern über den Punkten von $\{0\}\times X$: dort induzieren beide Automorphismen die identische Abbildung auf der Faser $L^{-1}(0)$.

Damit ist die Aussage des zweiten Schritts bewiesen: wir haben die Existenz eines Geradenbündels P auf $X\times\hat{X}$ bewiesen mit $(1_X\times\pi)^*P \cong K$.

<u>3. Schritt</u>. P genügt der Bedinung (a) von Bemerkung 2.5.3 (iii).
Wir haben zu zeigen, für jedes $\alpha\in\hat{X}$ ist die Einschränkung

$$P_\alpha = P|_{X\times\{\alpha\}} \in \mathrm{Pic}^0\, X$$

gerade das α bei der Identifikation $\hat{X} = \mathrm{Pic}^0\, X$ ensprechende Bündel. Zum Beweis schreiben wir

$$\alpha = \pi(s)$$

[144] Indem wir den Werteverlauf von φ_a auf den Faser über (0,0) festlegen, legen wir diesen Werteverlauft damit auf allen Fasern über den Punkten von $\{0\}\times X$ fest (und nach den obigen Bemerkungen auf allen Fasern überhaupt).

mit einem geeignet gewählten $s \in X$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
P_\alpha = P|_{X\times\{\alpha\}} &\cong^{[145]} (1_X\times\pi)^*(P)|_{X\times\{s\}} \\
&\cong K|_{X\times\{s\}} \\
&= K_s \\
&\cong \rho_s^* L\otimes L^{-1} \\
&= \varphi_L(s) \\
&= \pi(s) \\
&= \alpha \, .
\end{aligned}
$$

Wir haben noch zu zeigen, $P|_{\{0\}\times\hat{X}}$ ist trivial. Wegen

$$K = (1_X\times\pi)^*P$$

und wegen der Surjektivität von $1_X\times\pi$ entsteht das Bündel P aus K, indem man die Fasern von K über den Punkten desselben Orbits von $G = \{0\}\times K(L)$ mit Hilfe der oben konstruierten Isomorphismen φ_a identifiziert, d.h. P ist ein Faktor von K bezüglich K(L). Dann ist aber auch $P|_{\{0\}\times\hat{X}}$ ein Faktor von $K|_{\{0\}\times X} = L^{-1}(0)\times X$ bezüglich K(L), wobei K(L) auf der Faser $L^{-1}(0)$ trivial operiert. Also gilt

$$P|_{\{0\}\times\hat{X}} \cong L^{-1}(0)\times(X/K(L)) \cong L^{-1}(0)\times\hat{X},$$

d.h. die Einschränkung von P auf $\{0\}\times X$ ist tirivial.

<u>4. Schritt</u>. P genügt der Bedinung (b) von Bemerkung 2.5.3 (iii).

Seien S ein normale Varietät über k und K' ein Geradenbündel auf $X\times S$ mit

$$K'_s := K'|_{X\times\{s\}} \in \operatorname{Pic}^0 X \text{ für jedes } s\in S$$

und

$$K'|_{\{0\}\times S} \text{ trivial.}$$

Wir haben zu zeigen, die Abbildung

$$f\colon S \to \hat{X} = \operatorname{Pic}^0 X,\ s \mapsto K'_s\ ,$$

ist ein Morphismus mit $(1_X\times f)^*P \cong K'$. Zum Beweis betrachten wir das Geradenbündel

$$E := p_{12}^*K'\otimes p_{13}^*P^{-1} \text{ auf } X\times S\times\hat{X}.$$

Dann gilt

$$E|_{X\times\{(s,\alpha)\}} \cong K'_s\otimes P_\alpha^{-1} \text{ für beliebige } s\in S,\ \alpha\in\hat{X}.$$

Nach dem Schaukelsatz 2.2.12 ist

$$\Gamma := \{\,(s,\alpha)\in S\times\hat{X} \mid E|_{X\times\{(s,\alpha)\}} \text{ trivial}\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $S\times\hat{X}$, Wegen

$$E|_{X\times\{(s,\alpha)\}} \text{ trivial} \Leftrightarrow K'_s \cong P_\alpha\ (=\alpha)$$

ist diese Menge gerade der Graph der Abbildung f. Mit anderen Worten, f ist eine algebraische Korrespondenz. Um zu beweisen, daß f ein Morphismus ist, müssen wir zeigen, die Projektion auf den ersten Faktor induziert einen Isomorphismus

(3) $$\Gamma \subseteq S\times\hat{X} \to S.$$

---

[145] Die Einschränkung von $(1_x\times\pi)$ auf $X\times\{x\}$ ist ein Isomorphismus $X\times\{x\} \to X\times\{\alpha\}$

Da Γ der Graph einer Abbildung ist, ist (3) zumindest bijektiv. An dieser Stelle verwenden wir die globale Vorausssetzung, daß k ein Körper der Charakteristik Null sein soll.[146]
Nach dem Hauptsatz von Zariski (die Variante wie im Buch von Milne) zerfällt (3) in die Komposition einer offenen Einbettung und einem endlichen Morphismus. Da der Morphismus projektiv ist, ist (3) selbst bereits ein endlicher Morphismus. Als bijektiver Morphismus hat (3) den Separabilitätsgrad 1. Auf Grund der Charakteristik Null ist damit auch der Grad von (3) gleich 1, d.h. (3) ist ein birationaler Morphismus. Nach dem Hauptsatz von Zariki (die Variante wie im Buch von Hartshorne) ist (3) ein Isomorphismus.
Wir haben noch zu zeigen, $K' \cong (1_X \times f)^*P$. Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm[147]

$$\begin{array}{ccc} X\times\Gamma & \xhookrightarrow{id\times i} & X\times S\times\hat{X} \\ \cong\downarrow id\times p_1 & & \downarrow id\times p_2 \\ X\times S & \xrightarrow{id\times f} & X\times\hat{X} \end{array}$$

Nach dem Satz von der Schaukel 2.2.12 gibt es ein Geradenbündel M auf Γ mit

$$E|_{X\times\Gamma} \cong p_2^* M.$$

Nun sind K' auf $\{0\}\times S$ und P auf $\{0\}\times\hat{X}$ trivial (Eigenschaft (a) von P, Bemerkung 2.5.3(iii)). Also ist E auf $\{0\}\times S\times\hat{X}$ trivial. Das bedeutet aber, M ist trivial, d.h.

$$E|_{X\times\Gamma}$$

ist trivial. Wegen

$$\begin{aligned} E|_{X\times\Gamma} &= (id\times i)^*E \cong (id\times i)^*p_{12}^*K'\otimes(id\times i)^*p_{13}^*P^{-1}) \\ &\cong (id\times p_1)^*K'\otimes(id\times p_1)^*(id\times f)^*P^{-1} \end{aligned}$$

Man beachte, es gilt $id\times p_2 = p_{13}$ und außer dem obigen Viereck ist auch das folgende kommuativ.

$$\begin{array}{ccc} X\times\Gamma & \xhookrightarrow{id\times i} & X\times S\times\hat{X} \\ & id\times p_2 \searrow & \downarrow p_{12} \\ & & X\times S \end{array}$$

Weil $id\times p_1$ ein Isomorphismus ist, folgt die Trivialität des Bündels

$$K'\otimes(id\times f)^*P^{-1},$$

d.h. es ist $K' \cong (id\times f)^*P$.
QED.

---

[146] Dies ist die einzige Stelle, an der wir diese Voraussetzung verwenden. Trotzdem ist diese Voraussetzung wesentlich. Die von uns konstruierte Varietät $\hat{X}$ kann sich in den von Null verschiedenen Charakteristiken als die "falsche" Varietät erweisen.
[147] Das Diagramm bekommt man aus der Zerlegung (3) von f durch Anwenden des Funktors X×

Index

Literatur

[9] Gunning, R., Rossi, H.: Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, inc., Englewood Cliffs 1966

[10] Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann Paris 1958

[11] Grothendieck, A.:Sur quelques points d'algébre homologique, Tôhoku Math. J. 9 (1957)

[13] Deuring, M.: Die Type der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper, Abh. des Math. Sem. Hamb. Univ. 14 (1941), 197-272

[17] Lang, S.: Abelian varieties, Interscience, N.Y. 1959

[18] Lang, S.: Diophantine Geometry, Interscience, N.Y. 1962

[32] Tate, J.: Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, сб. "Математика" 12:6 (1968), 31-40

[33] Tate, J: On the Birch-Swinnerton-Dyer conjectur and it's geometric analog, сб. "Математика" 12:6 (1968), 41-55

Weitere Literatur

Jouanolou, J.-P.: Théoremes de Bertini et applications, Progress in Math. 42, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart 1983

Inhalt

2. ALGEBRAISCHE THEORIE: DIE SPRACHE DER ALGEBRAISCHEN MANNIGFALTIGKEITEN 73