Lineare algebraische Gruppen

Text zu den Movies von Vorlesung 1 und 2 im Wintersementer 2020/21 (am 30.10.20 und 06.11.20)

Willkommen zur Vorlesung lineare algebraische Gruppen.

Einige Bemerkungen zum Verlauf dieser Vorlesung.

Das Ziel der begleitenden Filme soll es sein, in groben Linien zu beschreiben, worum es in der Theorie der linearen algebraischen Gruppen geht. Ich werde dabei viele Details weglassen. Diese Deteils finden Sie in den zugehörigen Text-Dateinen, die ich einmal in der Woche aktualisieren werde. Die Gliederung dieser Text-Dateinen folgt der des Buches von Springer,

T.A. Springer: Linear algebraic groups, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin 1998

Bitte ziehen Sie in Betracht, statt meiner Text-Dateien, zunächst den Original-Text von Springer zu lesen, und erst dann zu meinen Texten zu greifen, wenn Sie Probleme mit dem Original haben und Erläuterungen oder ergänzende Details brauchen.

Die angebotenen Filme werden nicht fehlerfrei sein. Im Gegenteil, Sie werden mehr Fehler vorfinden, als in meinen gewöhnlichen Vorlesungen, denn es werden mir Ihre korrigierenen Reaktionen auf meine Darstellung fehlen.

Das muß kein Nachteil sein: wie mir einige von Ihnen erklärt haben, können solche Fehler und deren Korrektur hilfreich für das Verständnis des Gegenstandes sein.

Fehler - soweit ich sie bemerke - und deren Korrektur werde ich als Text ins Netz stellen. Bitte machen Sie mich auf Fehler und Probleme aufmerksam - es reicht auch eine Zeitangabe einer Stelle, die erläutert werden sollte.

Zu den linearen algebraischen Gruppen

1. Begriff der linearen algebraischen Gruppe

$$\text{G algebraische Gruppe} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{1. G ist eine Gruppe} \\ \text{2: G ist eine algebraische Varietät}[1] \\ \text{3: Die Abbildungen} \\ \qquad G\times G \longrightarrow G,\ (x,y)\mapsto xy, \\ \qquad G \longrightarrow G,\ x \mapsto x^{-1}, \\ \text{sind regulär.} \end{cases}$$

Eine algebraische Varietät ist für uns zunächst eine Menge von Punkten, die sich lokal durch jeweils endlich viele Polynome mit Koeffizienten aus einem algebraisch abgeschlossenen Körper

$$k$$

definierren läßt. Später werden wir allgemeinere Situationen betrachten.

---

[1] Wir vereinbaren hier, daß daß Varietäten nicht notwendig irreduzibel sein müssen.

Eine reguläre Abbildung ist eine Abbildung algebraischer Varietäten, deren Koordinatenfunktionen lokal durch Quotienten von Polynomen gegeben sind (wobei die Nennerfunktion in einer Umgebung des betrachteten Punktes ungleich 0 ist.

G ist eine lineare algebraische Gruppe $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 1. \text{ G ist eine algebraische Gruppe} \\ 2. \text{ G ist als algebraische Varietät affin} \end{cases}$

Eine affine algebraische Varietät ist eine Menge der Gestalt

$$X = V(f_1,...,f_m) := \{ x \in k^n \mid f_i(x) = 0 \text{ für } i = 1,..., m \},$$

wobei die f_i Polynome in n Unbestimmten mit Koeffizienten aus k sind,

$$f_i \in k[T_1, ... , T_n] =: k[T].$$

Mit anderen Worten, affine algebraische Varietäten sind Lösungen von polynomialen Gleichungssystemen.

2. Der Koordinatenring einer affinen algebraische Varietät

2.1 Definitionen

Für uns wird es wesentlich sein, den Begriff der affinen algebraischen Varietät in der Sprache der kommutativen Ringe mit 1 zu beschreiben. Dazu führen wir den Begriff des Koordinatenrings von X ein. Es ist die Menge

$$k[X] := \{f|_X \mid f \in k[T]\}$$

Der Einschränkungen der Polynome von k[T] auf die Teilmenge $X \subseteq k^n$. Wir identifizieren hier die Polynome $f \in k[T]$ mit den zugehörigen Funktionen

$$k^n \longrightarrow k,\ x \mapsto f(x),$$

auf dem k^n. Das ist deshalb problemlos möglich, weil k als algebraisch abgeschlossener Körper aus unendlich vielen Elementen besteht. Die Elemente von k[X] bilden eine k-Algebra bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von Funktionen. Nach Defintionen gibt einen surjektiven Homomorphismus von Ringen mit 1,

$$k[T] \twoheadrightarrow k[X],\ f \mapsto f|_X.$$

Der Kern dieses Homomorphismus wird mit

$$I(X) := \{f \in k[T] \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } x \in X \}$$

bezeichnet und heißt Ideal der affinen algebraischen Varietät X.
Nach dem Homomorphiesatz gilt

$$k[X] \cong k[T]/I(X).$$

Bezeichnet

$$x_i := T_i|_X$$

die Einschränkung der i-ten Koordinatenfunktion T_i auf X, so gilt

$$k[X] = k[x_1, ... , x_n],$$

d.h. der Koordinatenring wird von den Einschränkungen der Koordinatenfunktionen erzeugt. Daher kommt wohl die Bezeichnung Koordinatenring.

Der Koordinatenring k[X] enthält alle wesentlichen Informationen zur Varietät X, welche für uns von Bedeutung sind. Jeder Punkt $x \in X$ definiert eine Abbildung

$$\varphi_{X,x}: k[X] \longrightarrow k,\ f \mapsto f(x),$$

die Auswertung an der Stelle x. Diese Abbildung ist surjektiv, denn für jedes $c \in k$ wird die konstante Abbildung c in die Konstante c abgebildet. Deshalb ist der Faktor nach dem Kern von $\varphi_{X,x}$ gerade der Körper

$$k[X]/\mathrm{Ker}(\varphi_{X,x}) \cong k,$$

d.h. der Kern von $\varphi_{X,x}$ ist ein maximales Ideal,

$$\mathrm{Ker}(\varphi_{X,x}) \in \mathrm{Specm}\ k[X].$$

Die Menge der maximalen Ideale eines kommutativen Rings A mit 1 wollen wir mit

Specm A := Menge der maximalen Ideale von A.

Wir erhalten so eine Abbildung

$$X \longrightarrow \mathrm{Specm}\ k[X],\ x \mapsto \mathrm{Ker}(\varphi_{X,x}).$$

Diese Abbildung ist injektiv: sind

$a = (a_1,...,a_n) \in X \subseteq k^n$,

$b = (b_1,...,b_n) \in X \subseteq k^n$

zwei verschiedene Punkte von X, so gibt es ein i mit $a_i \neq b_i$. Deshalb ist das Element

$$x_i - a_i \in k[X]$$

gleich Null an der Stelle a und ungleich Null an der Stelle b, d.h. es gilt

$$x_i - a_i \in \mathrm{Ker}(\varphi_{X,a}) - \mathrm{Ker}(\varphi_{X,b}).$$

Insbesondere sind die maximalen Ideale $\mathrm{Ker}(\varphi_{X,a})$ und $\mathrm{Ker}(\varphi_{X,b})$ verschieden, d.h. die obige Abbildung ist injektiv.
Eine etwas tiefliegender Aussage besagt, daß die Abbildung sogar bijektiv ist. Es ist eine Variante des Hilbertschen Nullstellensatzes.

2.2 Hilbertscher Nullstellensatz

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $X \subseteq k^n$ eine affine algebraische Varietät. Dann ist die Abbildung

$$X \longrightarrow \mathrm{Specm}\ k[X],\ x \mapsto m_x := \mathrm{Ker}(\varphi_{X,x}).$$

bijektiv.

2.3 Folgerung

(i) Das zum Punkt $a = (a_1,...,a_n) \in X \subseteq k^n$ gehörige maximale Ideal ist gerade das Ideal

$$(x_1-a_1,...,x_n-a_n) \subseteq k[X],$$

welches von x_i-a_i erzeugt wird, denn jedes der x_i-a_i liegt in $\mathrm{Ker}(\varphi_{X,a})$, d.h. es ist

$$(x_1-a_1,...,x_n-a_n) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_{X,a}).$$

Außerdem besteht nach dem Homomorphiesatz eine Surjektion

$$k[X]/(x_1-a_1,...,x_n-a_n) \twoheadleftarrow k[T]/(T_1-a_1,...,T_n-a_n) = k,$$

d.h. $(x_1-a_1,...,x_n-a_n)$ ist ein maximales Ideal.

(ii) Jedes maximale Ideal von k[X] hat die Gestalt $(x_1-a_1,...,x_n-a_n)$ mit $a_i \in k$.

(iii) Seien $f \in k[X]$ die Einschränkung eines Polynoms aus $k[T]$ und

$$p = (p_1,...,p_n) \in X \subseteq k^n.$$

Dann ist das Bild

$$f \bmod m_p \in k[X]/m_p$$

von f beim natürlichen Homomorphismus

$$\rho: k[X] \longrightarrow k[X]/m_p$$

gerade das Bild von f(p) beim natürlichen Isomorphismus $i: k \xrightarrow{\cong} k[X]/m_p$, d.h. es gilt

$$f(p) = f \bmod m_p$$

wenn wir k mit seinem Bild bei i identifizieren. Wegen

$$m_p = (x_1-p_1,...,x_n-p_n)$$

ist nämlich

$f \bmod m_p = \rho(f(x_1,...,x_n))$

$= f(\rho(x_1),..., \rho(x_n))$ (ρ ist k-Algebra-Homomorphismus und f polynomial)

$= f(\rho(p_1),..., \rho(p_n))$ (wegen $x_i-p_i \in Ker(\rho) = m_p = (x_1-p_1,...,x_n-p_n)$)

$= \rho(f(p_1,...,p_n))$ (ρ ist k-Algebra-Homomorphismus und f polynomial)

$= f(p_1,...,p_n) \bmod m_p$ (nach Definition von ρ)

$= i(f(p_1,...,p_n))$ (nach Definition von i).

3.Ring-Homomorphismen und Abbildungen affiner Varietäten

Wir haben bisher gezeigt, daß wir die Punkte affiner Varietäten mit den maximalen Idealen von deren Koordinatenringen identifizieren können. Aus der Sicht der Kategorien-Theorie gehört zu jeder Sorte von mathematischen Objekten mindestens eine Sorte von Abbildungen, welche zusammen mit diesen Objekten eine Kategorie bilden.

Es ist deshalb naheliegend, nach den Abbildungen zwischen affinen Varietäten bzw. zwischen den maximalen Spektren von deren Koordinatenringen zu fragen.

Die Koordinatenringe sind k-Algebren. Die zugehörigen Abbildungen sind die k-Algebra-Homomorphismen. Wir werden gleich sehen, daß k-Algebra-Homomorphismen von Koordinaten-Ringen Abbildungen der zugehörigen maximalen Spektren induzieren.

Unser nächstes Ziel wird es sein, die zugehörigen Abbildungen zwischen den affinen Varietäten zu beschreiben.

3.1 Die Abbildung der maximalen Spektren zu einem k-Algebra-Homomorphismus

Seien

$$X = V(f_1,...,f_m) \subseteq k^r \text{ und } Y = V(g_1,...,g_n) \subseteq k^s$$

zwei affine algebraische Varietäten und

$$h: k[X] \longrightarrow k[Y]$$

ein k-Algebra-Homomoprhismus der Koordinatenringe. Für jedes maximale Ideal

$$n \in \operatorname{Spec} k[Y]$$

induziert dann h nach dem Homomorphiesatz einen injetiven Homorphismus

$$k[X]/h^{-1}(n) \rightarrowtail k[Y]/n,\ f \bmod h^{-1}(n) \mapsto h(f) \bmod n.$$

Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist $k[Y]/n = k$. Auf der anderen Seite ist die Abbildung

$$k \longrightarrow k[X]/h^{-1}(n),\ c \mapsto \text{Restklasse von } c,$$

ein Ringhomomorphismus, welcher nicht identisch Null ist (das Bild der 1 ist das Einselement des Faktorring). Die Abbildung ist damit injektiv. Wir haben injektive k-Algebra-Homomorphismen

$$k \hookrightarrow k[X]/h^{-1}(n) \hookrightarrow k[Y]/n = k,$$

$$c \mapsto c \bmod h^{-1}(n) \mapsto c \bmod n \mapsto c,$$

also gilt überall das Gleichheitszeichen. Insbesondere ist $k[X]/h^{-1}(n) = k$, d.h. $h^{-1}(n)$ ist ein maximales Ideal. Damit ist durch

$$h^{\#}: \operatorname{Specm} k[Y] \longrightarrow \operatorname{Specm} k[X],\ n \mapsto h^{-1}(n),$$

eine wohldefinierte Abbildung gegeben.

3.2 Die zugehörige Abbildung der affinen Varietäten

Seien $X \subseteq k^r$ und $Y \subseteq k^s$ zwei affine Varietäten und

$$h: k[X] \longrightarrow k[Y]$$

ein k-Algebra-Homomorphismus von deren Koordinatenringen. Wir schreiben

$$k[X] = k[x_1,...,x_r] \text{ und } k[Y] = k[y_1, \dots, y_s],$$

wobei x_i ein Einschränkung der i-ten Koordinatenfunktion des k^r auf X bezeichne und analog y_j die Einschränkung der j-ten Koordinatenfunktion des k^s auf Y. Weiter sei

$$u: Y \longrightarrow k^r,\ y \mapsto (u_1(y), \dots, u_r(y)),$$

die Abbildung mit den Koordinatenfunktionen

$$u_i = h(x_i) \in k[Y].$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(i) $u(Y) \subseteq X$

(ii) Betrachten wir u als Abbildung mit Werten in X, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u} & X \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \operatorname{Specm} k[Y] & \xrightarrow{h^{\#}} & \operatorname{Specm} k[X] \end{array}$$

dessen vertikale Abbildungen die Bijektion des Hilbertschen Nullstellensatzes sind, kommutativ.

(iii) Umgekehrt gibt es für jede Abbildung

$$u: Y \longrightarrow X,\ y \mapsto (u_1(y), \dots, u_r(y)),$$

deren Koordinatenfunktionen u_i im Koordinatenring von X liegen,

$$u_i \in k[Y]$$

(also Einschränkungen von Polynomen auf Y sind), genau einen k-Algebra-Homomorphismus

$$h: k[X] \longrightarrow k[Y],$$

für welchen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u} & X \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \text{Specm } k[Y] & \xrightarrow{h^{\#}} & \text{Specm } k[X] \end{array}$$

kommutativ ist.

Beweis. Zu (i). Nach Voraussetzung haben X und Y die Gestalt

$$X = V(f_1,...,f_m) \subseteq k^r \text{ und } Y = V(g_1,...,g_n) \subseteq k^s$$

Wir haben zu zeigen, für

$$b \in Y$$

gilt $u(b) \in X$, d.h.

$$f_i(u(b)) = 0 \text{ für } i = 1,...,m.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f_i(u(b)) &= (f_i \circ u)(b) \\ &= f_i(u_1,...,u_r)(b) \\ &= f_i(h(x_1),...,h(x_r))(b) \\ &= h(f_i(x_1,...,x_r))(b) \quad \text{(h ist k-Algebra-Homomorphismus und } f_i \in k[T_1,...,T_r]) \\ &= h(f_i(T_1|_X,...,T_r|_X))(b) \\ &= h(f_i(T_1,...,T_r)|_X)(b) \\ &= h(0)(b) \qquad \text{(wegen } f_i \in I(X), \text{ d.h. } f_i|_X = 0) \\ &= 0\,(b) \qquad \text{(h ist k-Algebra-Homomorphismus)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Zu (ii). Wir haben die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u} & X \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \text{Specm } k[Y] & \xrightarrow{h^{\#}} & \text{Specm } k[X] \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} b & \mapsto & u(b) \\ \mapsto & & \mapsto \\ m_b & \overset{?}{\mapsto} & m_{u(b)} \end{array}$$

zu beweisen, d.h. zu zeigen ist

$$m_{u(b)} = h^{-1}(m_b)$$

für jeden Punkt

$$b = (b_1,...,b_s) \in Y \subseteq k^s.$$

Wie bisher bezeichne dabei m_x das maximale Ideal des Koordinatenrings zum Punkt x der Varietät bezeichnet. Weil auf beiden Seiten maximale Ideale von k[X] stehen, reicht es zu zeigen

$$m_{u(b)} \subseteq h^{-1}(m_b),$$

d.h. es reicht, die Inklusion

$$h(m_{u(b)}) \subseteq m_b$$

zu beweisen. Das Ideal $m_{u(b)} \subseteq k[X]$ wird von den Elementen

$$x_i - u_i(b) \in k[X],\ i = 1,...,r,$$

erzeugt. Es reicht somit, zu zeigen

$$h(x_i - u_i(b)) \in m_b.$$

Weil h ein k-Algebra-Homomorphismus ist (und $u_i(b)$ in k liegt), gilt

$$\begin{aligned} h(x_i - u_i(b)) &= h(x_i) - u_i(b) \\ &= u_i - u_i(b) \qquad \text{(nach Definition von } u_i) \end{aligned}$$

Dies ist eine Funktion $Y \longrightarrow k$, die trivialerweise an der Stelle b gleich 0 ist. Nach Defition von m_b als Kern der Auswertungsabbildung

$$\varphi_{Y,b}: k^S \longrightarrow k,\ f \mapsto f(b),$$

liegt $u_i - u_i(b)$ in m_b. Damit ist die Aussage von (ii) bewiesen.

Zu (iii). Wir wählen Polynome $v_i \in k[T_1,...,T_s]$ mit

$$u_i = v_i|_Y \text{ für } i = 1,...,r.$$

Weil die Werte der Abbildung u in X liegen, gilt $u(b) \in X$ für jedes $b \in Y$, also für jedes $f \in I(X)$:

$$\begin{aligned} 0 &= f(u(b)) \\ &= f(u_1(b), ... , u_r(b)) && \text{(nach Definition von u)} \\ &= f(v_1(b), ... , v_r(b)) && \text{(nach Definition der } v_i) \\ &= f(v_1, ... , v_r)(b). \end{aligned}$$

Da dies für jedes $b \in Y$ gilt, folgt

$$f(v_1, ... , v_r) \in I(Y),$$

d.h.

$$f(v_1, ... , v_r)|_Y = 0.$$

Mit anderen Worten, die Polynome $f \in I(X)$ liegen im Kern des k-Algebra-Homomorphismus

$$k[T_1,...,T_r] \longrightarrow k[T_1,...,T_s] \longrightarrow k[Y],\ f(T_1,...,T_r) \mapsto f(v_1,...,v_r) \mapsto f(v_1,...,v_r)|_Y.$$

Nach dem Homomorphiesatz erhalten wir einen k-Algebra-Homomorphismus

$$k[X] = k[T_1,...,T_r]/I(X) \longrightarrow k[Y],\ f \bmod I(X) \mapsto f(v_1,...,v_r)|_Y.$$

Wegen $f(v_1,...,v_r)|_Y = f(v_1|_Y,...,v_r|_Y) = f(u_1,...,u_r)$ können wir diese Abbildung auch in der Gestalt

$$h: k[X] \longrightarrow k[Y],\ f(x_1,...,x_r) \mapsto f(u_1,...,u_r).$$

schreiben. Wegen

$$h(x_i) = u_i \text{ für } i = 1,...r$$

stimmt die zum k-Algebra-Homomorphimus h nach (ii) gehörige Abbildung u mit der hier vorgegebenen Abbildung u überein. Wir haben damit zu vorgegebenen u ein h gefunden, für welches das Diagramm von (iii) kommutativ ist.
Wir haben noch zu zeigen, h ist durch u eindeutig festgelegt und die Kommutativität des Diagramm eindeutig bestimmt. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt

$$m_{u(b)} = h^{-1}(m_b) \text{ für jedes } b \in Y,$$

also

$$h(m_{u(b)}) \subseteq m_b,$$

also

$$h(x_i - u_i(b)) \in m_b,$$

also

$$h(x_i) - u_i(b) \in m_b,$$

also

$$h(x_i)(b) = u_i(b) \text{ für jedes } b \in Y.$$

Die beiden Funktionen $h(x_i)$ und u_i auf Y stimmen in jedem Punkt von Y überein, d.h. es gilt

$$h(x_i) = u_i \text{ für } i = 1,...,r.$$

Da die x_i ein Erzeugendensystem der k-Algebra k[X], ist der k-Algebra-Homomorphismus

$$h: k[X] \longrightarrow k[Y]$$

durch seine Werte in den x_i bereits eindeutig festgelegt, d.h. h ist durch die u_i festgelegt.
QED.

3.3 Zusammenfassung und Ausblick

(i) Der oben beschriebene Zusammenhang zwischen den affinen algebraischen Varietäten und deren polynomialen Abbildungen auf der einen Seite und den Koordinaten-Ringen und deren k-Algebra-Homorphismen auf der anderen Seite läßt sich sehr viel weiter treiben. Etwas mehr Einzelheiten findet man in den Bemerkungen des Abschnitts 1.4.7 im Text zu Kapitel 1: Etwas algebraische Geometrie.

(ii) Zur Abrundung des Bildes sollten noch die Ringe beschrieben werden, die als Koordinatenringe auftreten. Es sind gerade die (kommutativen) k-Algebren A, die den beiden folgenden zusätzlichen Bedingungen benügen.

1. A ist endlich erzeugt.
   Man beachte der Koordinatenring k[X] der affinen algebraischen Varietät
   $$X \subseteq k^n$$
   wird gerade von den Einschränkungen $x_i = T_i|_X$ der Koordiantenfunktionen des k^n erzeugt,
   $$k[X] = k[x_1, \ldots, x_n].$$
2. A ist reduziert, d.h. das einzige nilpotente Element von A ist das Nullelement.
   Man beachte, eine Funktion mit Werten in einen Körper ist genau dann identisch Null, wenn eine Potenz dieser Funktion identisch Null ist.
   (vgl. auch Bemerkung 1.3.1 (iii) und deren Beweis am Ende von 1.3.3)

(iii) In der etwas formaleren Sprache der Kategorientheorie bedeuten die beschriebenen Konstruktionen, daß die folgenden beiden Kategorien äquivalent sind:

Die Kategorie der affinen algebraischen Varietäten über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k zusammen mit den polynomialen Abbildungen dieser Varietäen.

Die Kategorie der endlich erzeugten und reduzierten k-Algebren zusammen mit den k-Algebra-Homomorphismen.

(iv) Die moderne algebraische Geometrie erweitert die Kategorie der affinen Varietäten so, daß sie äquivalent wird zur Kategorie aller kommutativen Ringe mit 1 (und deren Ring-Homomorphismen). Diese Vorlesung bewegt sich deshalb in einem eher klassischen Kontext. Sie bemüht sich aber um eine Sprache, die der der modernen algebraischen Geometrie nahe kommt.

(v) Unser nächstes Ziel besteht darin, die Gruppen-Axiome für lineare algebraische Gruppen in der Sprache der Koordinatenringe zu formulieren und einige grundlegende Schlußfolgerungen aus den gewonnenen Beschreibungen zu ziehen. Insbesondere wollen wir einen Satz beweisen, welcher die Bezeichnung 'lineare algebraische Gruppe' rechtfertigt: es stellt sich nämlich heraus, daß jede lineare algebraische Gruppe eine abgeschlossene Untergruppe einer algemeinen linearen Gruppe $\mathbf{GL}_n$ ist.