Gruppen-Kohomologie
Vorlesung im Sommer-Semester 2018
Do 15-17 Uhr, SG 1-14
Vorlesung im Winter-Semester 2018/19
Fr 15-17 Uhr, SG 3-13

Bezeichnungen

1	das Einselement einer Gruppe, bzw. die triviale Gruppe, vgl. 1.6.
ε	Die Augmentation des Standard-Komplexes, vgl. 1.4.
G	eine Gruppe
$H^n(G, M)$	n-te Kohomologie der Gruppe G mit Koeffizienten im G-Modul M, vgl. 1.4.
$H_n(G, M)$	n-te Homologie der Gruppe G mit Koeffizienten im G-Modul M, vgl. 1.4.
I_G	Augmentationsideal der Gruppe G, vgl. Bemerkung 1.4. (i).
$\mathrm{int}_g(f)$	Konjugation der der Abbildung f mit dem Automorphismus g, vgl. Beispiel 3 von 1.2.
$\mathbf{M}_G^H(M)$	der durch den Modul M über der Untergruppe $H \subseteq G$ der Gruppe G koinduzierte G-Modul, vgl. 2.1
M^G	abelsche Gruppe der invarianten Elemente des G-Moduls M bezüglich der Operation der Gruppe G, vgl. 1.2.
M_G	"größter" Faktormodul des G-Modulns M, auf welchem die Gruppe G trivial operiert, vgl. Bemerkungen (i) und (iii) von 1.4
$M\otimes N$	Tensorprodukt der G-Moduln M und N, vgl. 1.2.
$\mathbb{Z}[G]$	der Gruppenring der Gruppe G, vg. 1.1.
$\sigma \in\in G/H$	soll ausdrückent, daß σ ein Repräsentantensystem der Faktor-Gruppe G/H in der Gruppe G durchläuft, vgl. 2.3.

Gruppen-Kohomologie

Eine frühe Beschreibung der Gruppen-Kohomologie findet sich bereits im Buch von Cartan und Eilenberg über Homologische Algebra. Sehr viel ausführlicher und allgemeiner ist die Darstellung der Gruppen-Kohomolgie im Buch von Braun. Wir beschränken und hier auf ein von uns in der Zahlentheorie benötigtes Minimum der Theorie und orientieren uns am Beitrag von Atiyah und Wall im Buch von Cassels und Fröhlich über algebraische Zahlentheorie.

1 Definition der Gruppen-Kohomologie

1.1 Der Gruppen-Ring einer Gruppe G

Sei

$$G = \{\sigma_1, ..., \sigma_N)$$

eine (nicht-notwending endliche)[1] Gruppe der Ordung N. Dann bezeichne

$$\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}\sigma_1+...+\mathbb{Z}\sigma_N$$

[1] Wir wählen die Terminologie so als wären die betrachteten Gruppen endlich, weil dies der in der Zahlentheorie interessierende Fall ist. Die Tate-Gruppen ausgenommen sind unsere Betrachtungen aber auch im unendlichen Fall gültig. Der für die Zahlentheorie relevante unendliche Fall ist der der pro-endlichen Gruppen, d.h. eine topologische Variante der Gruppen-Kohomologie.

den zugehörigen Gruppen-Ring über $\mathbb{Z}$. Dieser ist definiert als die von den σ_i erzeugte freie abelsche Gruppe, versehen mit der Ring-Struktur, deren Multiplikation durch $\mathbb{Z}$-lineare Fortsetzung der Gruppen-Multiplikation definiert ist.

Bemerkungen

(i) Das neutrale Element der Gruppe G ist gerade das 1-Element des Gruppen-Rings.

(ii) Der Gruppen-Ring ist genau dann kommutativ, wenn die Gruppe abelsch ist.

1.2 G-Moduln

Ein G-Modul M ist definiert als abelschen Gruppe, auf welcher G durch $\mathbb{Z}$-lineare Abbildungen von links operiert,

$$G \times M \longrightarrow M, (g, m) \mapsto gm,$$

d.h. mit $M \longrightarrow M$, $m \mapsto \sigma m$, additiv für jedes $\sigma \in G$. Durch $\mathbb{Z}$-lineare Fortsetzung dieser Operation bekommt M die Struktur eines (linken) $\mathbb{Z}[G]$-Moduls. Umkehrt entsteht jeder $\mathbb{Z}[G]$-Modul auf diese Art, so daß wir die Kategorie der G-Moduln mit der Kategorie der $\mathbb{Z}[G]$-Moduln identifizieren werden,

$$G\text{-Mod} = \mathbb{Z}[G]\text{-Mod}.$$

Wir bezeichnen dann mit

$$M^G := \{m \in M \mid gm = m \text{ für jedes } g \in G\}$$

die abelsche Gruppe der G-invarianten Elemente von M.

Beispiel 1: $\mathbb{Z}$

Der Ring der ganzen Zahlen ist mit der trivialen Operation von G,

$$G \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, (g, n) \mapsto gn := n,$$

ein G-Modul.

Beispiel 2: $M\otimes N$

Seien M und N zwei G-Moduln. Wir versehen M mit der Struktur eines rechten G-Moduls, indem wir setzen

$$m\cdot\sigma := \sigma^{-1}m \text{ für } m \in M \text{ und } \sigma \in G.$$

Dann ist das Tensorprodukt

$$M \otimes N := M \otimes_{\mathbb{Z}} N$$

eine wohldefinierte abelsche Gruppe. Es besitzt die Struktur eines G-Moduls bezüglich der diagonalen Operation von G,

$$G \times M\otimes N \longrightarrow M\otimes N, (g, m\otimes n) \longrightarrow (gm) \otimes (gn).$$

Man beachte diese Operaton ist wohldefiniert, denn die Abbildung

$$M \times N \longrightarrow M\otimes N, (m, n) \mapsto (gm)\otimes(gn),$$

ist bilinear über $\mathbb{Z}$.

Beispiel 3: Hom(M, N)

Seien M und N zwei G-Moduln. Dann ist die abelsche Gruppe

$$\mathrm{Hom}\,(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$$

der $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen $M \longrightarrow N$ ein G-Modul bezüglich der Konjugation, d.h. bezüglich der Operation

$$G \times \mathrm{Hom}\,(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(M, N), (g, f) \mapsto \mathrm{int}_g(f) = g\cdot f\cdot g^{-1},$$

ein G-Modul. Dabei soll $g\cdot f\cdot g^{-1}$ die Abbildung $M \longrightarrow N$ bezeichnen mit

$$(g\cdot f\cdot g^{-1})(m) := g\cdot f(g^{-1}m) \text{ für } g \in G \text{ und } m \in M.$$

Man beachte, für $\sigma,\tau \in G$ und $m \in M$ gilt

$$\begin{aligned}
(\sigma\tau)\bullet f\bullet(\sigma\tau)^{-1}(m) &= \sigma\tau\bullet f(\tau^{-1}\sigma^{-1}m) \\
&= \sigma(\tau\bullet f\bullet\tau^{-1})(\sigma^{-1}m)) \\
&= (\sigma(\mathrm{int}_\tau(f))(\sigma^{-1})(m) \\
&= (\mathrm{int}_\sigma(\mathrm{int}_\tau(f)))(m)
\end{aligned}$$

also

$$\mathrm{int}_{\sigma\tau}(f) = \mathrm{int}_\sigma(\mathrm{int}_\tau(f))$$

1.3 Definition der Kohomologie

Die n-te Kohomologie von G mit Koeffizienten in M ist definiert als

$$H^n(G, M) := \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M),$$

wobei $\mathbb{Z}$ mit der trivialen Opertation von G (durch identische Abbildungen) versehen sei. Die n-te Homologie von G mit Koeffizienten in M ist definiert als

$$H_n(G, M) := \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(M, \mathbb{Z}).$$

Mit anderen Worten, die Gruppen-Kohomologie besteht nach Defintion aus den rechtsabgeleiteten Funktoren des Hom-Funktors

$$H^0(G, ?) : G\text{-Mod} \longrightarrow \mathrm{Ab},\ M \mapsto \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) = M^G.$$

Entsprechend besteht die Gruppen-Homologie nach Definition aus den linksabgeleiteten Funktoren des Tensorprodukt-Funktors

$$H_0(G, ?) : G\text{-Mod} \longrightarrow \mathrm{Ab},\ M \mapsto M\otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$$

1.4 Der Standard-Komplex

Zur Berechnung der Gruppen-Kohomologie kann man projektive Auflösungen von $\mathbb{Z}$ oder injektive Auflösungen von M benutzen, und zur Berechnung der Gruppen-Homologie projektive Auflösungen.

Die erste Berechungsmethode ist beiden Fällen gemeinsam und ist die bevorzugte: meistens wird sogar eine ganz spezielle Auflösung von $\mathbb{Z}$ durch freie $\mathbb{Z}[G]$-Moduln verwendet, der sogenannte Standard-Komplex von G. Er hat die Gestalt

$$\mathbb{Z}_\bullet : \ldots \xrightarrow{d_{n+1}} \mathbb{Z}[G^{n+1}] \xrightarrow{d_n} \ldots \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}[G\times G\times G] \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}[G\times G] \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow 0$$

Dabei sei d_n die $\mathbb{Z}[G]$-lineare Abbildung mit

$$d_n(g_0,\ldots,g_n) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0,\ldots,g_{i-1},g_{i+1},\ldots,g_n) \text{ für } g_i \in G$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß dieser Komplex eine Auflösung des G-Moduls $\mathbb{Z}$ ist, d.h, der augmentierte Komplex

$$\ldots \xrightarrow{d_{n+1}} \mathbb{Z}[G^{n+1}] \xrightarrow{d_n} \ldots \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}[G\times G\times G] \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}[G\times G] \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon:=d_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

mit

$$d_0(g) := 1 \text{ für jedes } g \in G$$

ist exakt. Er ist sogar kontrahierend. Eine kontrahierende Homotopie k,

$$dk + kd = \mathrm{Id}$$

ist für jedes fest gewählte $s \in G$ definiert durch[2]

$$k(g_0,...,g_n) := (s,g_0,...,g_n).$$

Durch Anwenden des Hom-Funktors Hom_G (? , M) erhalten wir einen Komplex, dessen Kohomologie gerade die Gruppen-Kohomologie ist,

$$H^n(G, M) := H^n(\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}_\bullet , M)).$$

Durch Anwenden des Tensor-Produkts $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]}$? erhalten wir

$$H_n(G, M) := H_n(M\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}_\bullet).$$

Bemerkungen

(i) Der Standard-Komplex gestattet eine etwas explizitere Beschreibung der 0-ten Homologie $H_0(G, M)$. Sei nämlich $I \subseteq \mathbb{Z}[G]$ das Ideal

$$I = I_G := \mathrm{Ker}(\varepsilon:\mathbb{Z}[G]\longrightarrow\mathbb{Z},\ \sum_{\sigma\in G} n_\sigma\cdot\sigma \mapsto \sum_{\sigma\in G} n_\sigma.$$

Weil $\varepsilon = d_0$ surjektiv ist, erhält man eine exakte Sequenz von G-Moduln

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \qquad (1)$$

also die Exaktheit von

$$M\otimes_{\mathbb{Z}[G]}I \longrightarrow M\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G] \longrightarrow M\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Die mittlere Gruppe ist isomorph zu M,

$$M\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\cong} M,\ m\otimes\sigma \mapsto m\sigma = \sigma^{-1}m \text{ (mit } \sigma\in G).$$

Das Bild der linken Gruppe in der mittleren, d.h. in M, ist gerade $M\cdot I$. Damit ist

$$H_0(G, M) = M/M\cdot I. \qquad (2)$$

Mit anderen Worten, die Gruppen-Homologie besteht gerade aus den linksabgeleiteten Funktoren des rechtsexakten Funktors

$$H_0(G, ?): G\text{-Mod} \longrightarrow Ab,\ M \mapsto \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} M = M/M\cdot I.$$

Das Ideal I heißt Augmentationsideal und die Abbildung ε Augmentation. Im folgenden werden wir für G-Moduln M vereinfachend auch die folgende Bezeichnung verwenden.

$$M_G := M/M\cdot I_G = H_0(G, M).$$

---

[2] Man beachte

$$dk(g_0,...,g_n)$$

ist bis auf den ersten Summanden $(g_0,...,g_n)$ eine alternierende Summe der $(s, g_0,...,g_{i-1},g_{i+1},...,g_n)$. Dasselbe gilt für

$$kd(g_0,...,g_n),$$

nur daß der erste Summand $(g_0,...,g_n)$ fehlt und daß die übrigen Summanden sich im Vorzeichen von den Summanden von $dk(g_0,...,g_n)$ unterscheiden und sich gegen diese wegheben. Es folgt

$$(dk+kd)(g_0,...,g_n) = (g_0,...,g_n)$$

(ii) Das Augmentationsideal besteht gerade aus allen Elementen von $\mathbb{Z}[G]$, für welche die Summe der Koeffifzienten Null ist,

$$I = \{ \sum_{\sigma\in G} n_\sigma \bullet \sigma \mid \sum_{\sigma\in G} n_\sigma = 0\}$$

$$= \{ \sum_{\sigma\in G} n_\sigma \bullet (\sigma-1) \}$$

Mit anderen Worten I wird als abelsche Gruppe von den Elementen der Gestalt

$$\sigma - 1$$

erzeugt. Es besteht aus den Summen von Elementen der Gestalt

$$\pm(\sigma-1).$$

Insbesondere gilt für jeden (linken) G-Modul M

$$M\bullet I_G = \{ \sum_{\sigma\in G} m_\sigma(\sigma-1) \mid m_\sigma\in M \text{ und } m_\sigma = 0 \text{ für fast alle } \sigma\in G\}$$

$$= \{ \sum_{\sigma\in G} (\sigma^{-1}-1)m_\sigma \mid m_\sigma\in M \text{ und } m_\sigma = 0 \text{ für fast alle } \sigma\in G\}$$

$$= \{ \sum_{\sigma\in G} (\sigma-1)m_\sigma \mid m_\sigma\in M \text{ und } m_\sigma = 0 \text{ für fast alle } \sigma\in G\}$$

$$= I_G\bullet M$$

Wir können also auch schreiben

$$M_G = M/I_G M = H_0(G, M)$$

(iii) Der Faktormodul M_G von (ii) ist der "größte" Faktormodul von M, auf welchen G trivial operiert. Genauer, jeder Faktormodul von M, auf welchem G trivial operiert, ist ein Faktormodul von M_G.

(iv) Für (linke) G-Moduln M und N gilt

$$(M\otimes_{\mathbb{Z}} N)_G = M\otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \tag{3}$$

Die Diagonal-Operation von G auf dem Tensorprodukt über $\mathbb{Z}$ hat die Gestalt

$$G \times M\otimes_{\mathbb{Z}} N \longrightarrow M\otimes_{\mathbb{Z}} N \text{ , } (g, m\otimes n) \mapsto (gm)\otimes(gn) = (mg^{-1})\otimes(gn) \tag{4}$$

(vgl. Beispiel 2 von 1.2).

(v) Für $M = \mathbb{Z}$ kann man die exakte Sequenz (1) ebenfalls zur Berechnung der ersten Homologie benutzen. Durch Anwenden von $?\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z} = ?/I?$ erhält man nämlich die Exaktheit von

$$H_1(G , \mathbb{Z}[G]) \longrightarrow H_1(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \mathbb{Z}[G]/I \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Weil $\mathbb{Z}[G]$ frei ist als Modul über sich selbst, ist

$$H_1(G , \mathbb{Z}[G]) = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) = 0.$$

Nach Definition von I ist $\mathbb{Z}[G]/I = \mathbb{Z}$ und damit der rechte Homomorphismus ein Isomorphismus. Der Morphismus links davor ist damit gleich Null, d.h. es ist

$$H_1(G , \mathbb{Z}) = I_G/I_G^2.$$

Die rechte Seite kann man mit der Faktorkommutator-Gruppe von G identifizieren:

$$H_1(G , \mathbb{Z}) = G/G', \ G' := [G,G]$$

Beweis. <u>Zu (iii)</u>. Für $\sigma\in G$ und $m \in M$ gilt $\sigma-1 \in I$, also $(\sigma\text{-}1)m \in I\bullet M$, also

$$\begin{aligned}\sigma\bullet(m \bmod IM) &= ((\sigma-1)m \bmod IM) + m \bmod IM,\\ &= m \bmod IM,\end{aligned}$$

d.h. G operiert trivial auf M_G. Sei jetzt $h: M \twoheadrightarrow N$ ein surjektiver G-Homomorphismus mit Werten in einem G-Modul N, auf welchem G trivial operiert. Für $\sigma\in G$ und $m\in M$ gilt dann

$$h((\sigma\text{-}1)m) = \sigma\bullet h(m) - h(m) = 0,$$

d.h.

$$(\sigma\text{-}1)m \in \mathrm{Ker}(h) \text{ für } \sigma\in G \text{ und } m \in M.$$

Nach (ii) liegt $I\bullet M$ im Kern von h, d.h. h faktorisiert sich über $M_G = M/IM$, d.h. N ist ein Faktormodul von M_G (also höchstens so "groß" wie M_G).

<u>Zu (iv).</u> Beweis von (3).
Es reicht zu zeigen, die linke Seite von (3) besitzt die Universalitätseigenschaft der rechten Seite. Die Zusammensetzung natürlicher Abbildungen

$$b: M \times N \xrightarrow{\varphi} M\otimes_{\mathbb{Z}}N \twoheadrightarrow M\otimes_{\mathbb{Z}} N/I_G\bullet M\otimes_{\mathbb{Z}} N = (M\otimes_{\mathbb{Z}} N)_G,$$

$$(m,n) \mapsto m\otimes n \mapsto [m\otimes n] := m\otimes n \bmod I\bullet M\otimes_{\mathbb{Z}} N.$$

ist $\mathbb{Z}$-bilinear. Wir haben zu zeigen, daß b sogar $\mathbb{Z}[G]$-bilinear ist. Für $g\in G$, $m\in M$ und $n\in N$ gilt

$$b(mg, n) = [(mg)\otimes n] = [(g^{-1}m)\otimes n] = [g^{-1}\bullet(m\otimes(gn))] \qquad \text{(vgl. (4)).}$$

Weil G trivial auf $(M\otimes_{\mathbb{Z}}N)_G$ operiert, folgt

$$b(mg, n) = [m\otimes(gn)] = b(m,gn).$$

Sei jetzt

$$b': M\times N \longrightarrow L$$

eine beliebige $\mathbb{Z}[G]$-bilineare Abbildung. Wir haben noch zu zeigen, daß sich b' eindeutig über b faktorisiert. Weil b' auch $\mathbb{Z}$-bilinear ist, gibt es einen Gruppen-Homomorphismus

$$\tilde{b}': M\otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{\tilde{b}'} L, \ m\otimes n \mapsto b'(m,n),$$

für welchen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "\varphi"'] & L \\ M\otimes_{\mathbb{Z}}N \arrow[ur, "\tilde{b}'"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Das Bild von φ enthält ein Erzeugendensystem des Tensorprodukts. Deshalb ist $\tilde{b}'$ durch die Kommutativität dieses Diagramms eindeutig festgelegt.
Für $\sigma \in G$, $m \in M$ und $n \in N$ gilt

$$
\begin{aligned}
\tilde{b}'((\sigma-1)\bullet(m\otimes n)) &= \tilde{b}'(\sigma\bullet(m\otimes n) - m\otimes n)\\
&= \tilde{b}'((\sigma m)\otimes(\sigma n) - m\otimes n) \qquad \text{(vgl. (4))}\\
&= \tilde{b}'((m\sigma^{-1})\otimes(\sigma n)) - \tilde{b}'(m\otimes n)\\
&= b'(m\sigma^{-1}, \sigma n) - b'(m, n)\\
&= b'(m, \sigma^{-1}\sigma n) - b'(m, n) \qquad \text{(b' ist G-bilinear).}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Nach (ii) liegt $I_G\bullet M\otimes_{\mathbb{Z}} N$ liegt im Kern von $\tilde{b}'$, d.h. $\tilde{b}'$ faktorisiert sich eindeutig über

$$(M\otimes_{\mathbb{Z}} N)_G = M\otimes_{\mathbb{Z}} N / I_G\bullet M\otimes_{\mathbb{Z}} N.$$

Wir erhalten so ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "\varphi"] & L \\
M\otimes_{\mathbb{Z}} N \arrow[r, two heads] \arrow[ur, "\tilde{b}'"] & (M\otimes_{\mathbb{Z}} N)_G \arrow[u, "\tilde{b}''"']
\end{tikzcd}
$$

Dabei ist die Zusammensetzung von φ mit dem unteren horizontalen Morphismus gerade b, d.h. b' faktorisiert sich über b. Wir haben noch die Eindeutigkeit von $\tilde{b}''$ zu beweisen. Angenommen es gäbe zwei solche Homomorphismen, für welche das äußere Viereck kommuativ ist. Durch Zusammensetzen mit der unteren horizontalen Surjektion erhalten wir dann zwei verschiedene Homomorphismen, für die das linke obere Dreieck kommutativ ist. Das ist aber unmöglich, da $\tilde{b}'$ durch die Kommuativität dieses Dreiecks eindeutig festgelegt ist.
Damit ist (3) bewiesen.

<u>Zu (v)</u>. Wir haben zu zeigen, I_G/I_G^2 ist isomorph zur Faktorkommutator-Gruppe.
Betrachten wir die Abbildung

$$\varphi: G \to I_G/I_G^2,\ g \mapsto g-1 \bmod I_G^2$$

Diese ist ein Gruppen-Homomorphismus der multiplikativen Gruppe G in die additive Gruppe I_G/I_G^2:

$$
\begin{aligned}
\varphi(gg') &= gg' - 1 \mod I_G^2\\
&= (g - 1) + (g' - 1) + (g - 1)(g'-1) \bmod I_G^2\\
&= \varphi(g) + \varphi(g'),
\end{aligned}
$$

Das Bild von φ enthält nach (ii) ein Erzeugendensystem der additiven Gruppe I_G/I_G^2, d.h. φ ist surjektiv.
Außerdem ist

$$\varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(x) + \varphi(y) - \varphi(x) - \varphi(y) = 0,$$

d.h. alle Kommuatatoren von G liegen im Kern von φ. Damit liegt die von den Kommutatoren erzeugte Untergruppe von G im Kern,

$$G' = [G,G] \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi).$$

Die Abbildung φ induziert einen surjektiven Gruppen-Homomorphismus

$$\tilde{\varphi}: G/G' \twoheadrightarrow I/I^2 , g \bmod G' \mapsto g - 1 \bmod I^2.$$

Es reicht zu zeigen, dieser ist injektiv. Zum Beweis konstruieren wir eine Abbildung in umgekehrter Richtung. Dazu betrachten wir

$$I_G = \sum_{g\in G-\{1\}} \mathbb{Z}\cdot(g-1)$$

als freie abelsche Gruppe mit dem freien Erzeugendensystem

$$g\text{-}1 \text{ mit } g\in G - \{1\}.$$

Auf Grund der Freiheit des Erzeugendensystems gibt es einen Gruppen-Homomorphismus

$$\psi:I_G \to G/G' \text{ mit } \psi(g\text{-}1) = g \bmod G' \text{ für jedes } g\in G.$$[3]

Für g, g' $\in$ G gilt

$$(g-1)(g'-1) = gg' - g - g' + 1 = (gg'-1) - (g-1) - (g'-1)$$

Das Bild

$$\begin{aligned}\psi((g-1)(g'-1)) &= \psi(gg'-1)\psi(g-1)^{-1}\psi(g'-1)^{-1}\\ &= gg'g^{-1}g'^{-1} \bmod G'\end{aligned}$$

wird durch einen Kommutator repräsentiert, ist also gleich dem neutralen Element. Also gilt

$$I^2 \subseteq \mathrm{Ker}(\psi),$$

und ψ induziert einen Homomorphismus

$$\tilde{\psi}: I/I^2 \to G/G' \text{ mit } \tilde{\psi}(g\text{-}1 \bmod I^2) = g \bmod G' \text{ für jedes } g\in G.$$

Die Abbildungsvorschriften von $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ zeigen, daß diese beiden Abbildungen invers zueinander sind.
QED.

1.5 Beispiel: endliche zyklische Gruppen

(vgl. z.B. Gille & Szamuely, Chapter 3)

Sei G = $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die endliche zyklische Gruppe der Ordnung n mit dem Erzeuger $\sigma\in G$.

Wir definieren N als die Summe der Elemente von G im Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$

$$N := \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i$$

und bezeichnen die Multiplikation mit Element N ebenfalls mit N,

$$N: \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}[G] , x \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i\bullet x,$$

Weiter sei T die Multiplikation mit σ-1,

$$T: \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}[G] , x \mapsto \sigma\bullet x - x.$$

[3] Weil G/G' eine multiplikative Gruppe ist, gilt $\psi(x+y) = \psi(x)\bullet\psi(y)$ und $\psi(-x) = \psi(x)^{-1}$.

Dann gilt

$$\mathrm{Ker}(N) = \mathrm{Im}(T) \tag{1}$$

und

$$\mathrm{Im}(N) = \mathrm{Ker}(T). \tag{2}$$

Durch Zusammensetzen der Abbildungen N und T erhalten wir eine freie Auflösung

$$\ldots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{T} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{T} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

wobei die <u>Augmentation</u> ε alle Elemente von G in die 1 abbildet. Durch Anwenden des Funktors $\mathrm{Hom}_G(\,?\,, A)$ entsteht ein Komplex

$$(\ 0 \longrightarrow A^G \longrightarrow\ )\ A \xrightarrow{T} A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{T} A \xrightarrow{N} \ldots$$

wobei N und T auf A durch dieselben Formeln definiert seien wie oben.[4]
Wir führen die Bezeichnung

$${}_N A := \mathrm{Ker}(N)$$

für den Kern der Abbildung N ein. Es gilt

$$\begin{aligned} H^0(G, A) &= A^G \\ H^{2i+1}(G, A) &= {}_N A/(\sigma - 1)A \text{ für } i > 0. \\ H^{2i}(G, A) &= A^G/N\bullet A. \quad \text{für } i > 0. \end{aligned}$$

Beweis von (1) und (2).

<u>Zu (2)</u>. Für $x = \sum_{g\in G} x_g \cdot g$ gilt

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow 0 &= \sum_{g\in G} x_g \cdot (\sigma - 1) g \\ &= \sum_{g\in G} x_g \sigma g - \sum_{g\in G} x_g g \\ &= \sum_{g\in G} (x_{\sigma^{-1}g} - x_g) \cdot g \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x_{\sigma^{-1}g} = x_g \text{ für jedes } g\in G$$

$$\Leftrightarrow x_g = x_e \text{ für jedes } g\in G$$

$$\Leftrightarrow x = x_e \cdot \sum_{g\in G} g = x_e \cdot N$$

$$\Leftrightarrow x \in N\bullet\mathbb{Z} =^5 N\cdot\mathbb{Z}[G] = \mathrm{Im}(N).$$

<u>Zu (1)</u>. Bezeichne wie bisher

---

[4] Die Multiplikation mit $\sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i$ bzw. σ-1 geht beim Hom-Funktor in die Multiplikation mit $\sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i$ bzw. σ-1 über.

[5] Die Multiplikation von N mit einem Element von G hat denselben Effekt wie die mit 1.

$$I_G := \mathrm{Ker}(\mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z},\ \sum_{g\in G} x_g\cdot g \mapsto \sum_{g\in G} x_g$$

$$= \{ \sum_{g\in G} x_g\cdot g \mid \sum_{g\in G} x_g = 0\}$$

$$= \{ \sum_{g\in G} x_g\cdot(g-1) \mid x_g \in \mathbb{Z}\}$$

das Augmentationsideal.

Für $x = \sum_{g\in G} x_g\cdot g$ gilt

$$x \in \mathrm{Ker}(N) \Leftrightarrow 0 = N\cdot x = \sum_{gPG} x_g N\cdot g = (\sum_{gPG} x_g)\cdot N$$

$$\Leftrightarrow \sum_{g\in G} x_g = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sum_{g\in G} x_g\cdot g = \sum_{g\in G} x_g\cdot(g-1)$$

$\Leftrightarrow$[6] $x \in I_G$

Wegen σ-1$\in I_G$ und weil I_G ein Ideal ist, gilt

$$\mathrm{Im}(T) \subseteq I_G.$$

Sei umgekehrt, $x \in I_G$. Wir haben noch zu zeigen, dann gilt

$$x \in \mathrm{Im}(T).$$

Wie wir gerade bemerkt haben, ist x von der Gestalt

$$x = \sum_{g\in G} x_g\cdot(g-1).$$

Da die Multiplikation T eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung ist, reicht es zu zeigen,

$$g-1 \in \mathrm{Im}(T) \text{ für jedes } g\in G.$$

Weil G zyklisch ist mit dem Erzeuger σ, hat g die Gestalt

$$g = \sigma^u \text{ mit } u \in \{0, ... , n -1\}.$$

O.B.d.A. sei u > 1. Dann gilt aber

$$g - 1 = (\sigma-1)(\sigma^{u-1}+\sigma^{u-2} + ... + 1) \in \mathrm{Im}(T)$$

QED.

---

[6] Liegt x in I_G, so ist x $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Elementen der Gestalt g-1. Insbesondere ist die Summe der Koeffizienten x_g gleich Null.

1.6 Der reduzierte Standard-Komplex

Die Einbettung[7] $G^n = 1\times G^n \hookrightarrow G^{n+1}$ induziert für jeden G-Modul M und jedes n einen Homomorphismus abelscher Gruppen

$$\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G^{n+1}], M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}[G^n], M) \cong \mathrm{Hom}_{Ens}(G^n, M),\ f \mapsto f|_{G^n}\ . \quad (1)$$

Wegen

$$f((g_0,...,g_n)) = f(g_0\cdot(1,g_0^{-1}g_1, ..., g_0^{-1}g_n)) = g_0\cdot f(1,g_0^{-1}g_1, ..., g_0^{-1}g_n)$$

ist ein G-Homomorphismus f: $G^{n+1} \longrightarrow M$ bereits durch seine Werte auf der Untergruppe $1\times G^n = G^n$ eindeutig festgelegt. Die Abbildung ist also injektiv. Weiter ist für jede Abbildung

$$\varphi: G^n \longrightarrow M$$

durch

$$f((g_0,...,g_n)) := g_0\cdot\varphi(g_0^{-1}g_1, ..., g_0^{-1}g_n)$$

eine G-Homomorphismus f definiert mit $f|_{G^n} = \varphi$, d.h. Abbildung (1) ist ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

Bemerkung

Tatsächlich hat es sich als sinnvoll erwiesen, zusätzlichen noch eine Transformation auszuführen. An der obigen Situation ändert sich nichts, wenn wir die Einbettung von G^n in G^{n+1} durch die folgende ersetzen:

$$G^n = 1\times G^n \hookrightarrow G^{n+1},\ (g_1,...,g_n) \mapsto (1, g_1 , g_1g_2 , ... , g_1g_2...g_n).$$

Dem G-Homomorphismus

$$f: \mathbb{Z}[G^{n+1}] \longrightarrow M$$

ordnet man also den Gruppen-Homomorphismus

$$\varphi: \mathbb{Z}[G^n] \longrightarrow M$$

mit

$$\varphi(g_1,...,g_n) := f(1, g_1 , g_1g_2 , ... , g_1g_2...g_n) \text{ für } g_i\in G$$

zu. Die Umkehrabbildung ist dann gegeben durch

$$f((g_0,...,g_n)) := g_0\cdot\varphi(g_0^{-1}g_1,g_1^{-1}g_2 ..., g_{n-1}^{-1}g_n)$$

Wir erhalten so einen natürlichen Isomorphismus von Hom-Funktoren. Anstelle des Standard-Komplexes kann man damit den reduzierten Standard-Komplex

$$\mathbb{Z}_{\bullet red}: ... \xrightarrow{d_{n+1}} \mathbb{Z}[G^n] \xrightarrow{d_n} ... \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}[G\times G] \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_0} 0$$

zur Berechnung der Gruppen-Kohomologie benutzen. Dies ist ein Komplex abelscher Gruppen: man wendet den Funktor $\mathrm{Hom}_{Ab}(\ ?\ , M)$ an

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}, M) \xrightarrow{d^0} \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}[G], M) \xrightarrow{d^1} ... \xrightarrow{d^{n-1}} \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}[G^n], M) \xrightarrow{d^n}$$

und geht zur Kohomologie über,

$$H^n(G, M) = H^n(\mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}_{\bullet red} , M)).$$

[7] Wir verwenden hier die Bezeichnung 1 für die triviale Gruppe (deren einziges Element das neutrale Element 1 ist).

Die analogen Überlegungen sind auch für die Gruppen-Homologie richtig:

$$M\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G^{n+1}] = M\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G^n] = M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G^n]$$

1.7 Beschreibung der Kohomologie durch Kozyklen und Koränder

1.7.1 Die Differentiale im Fall der Kohomologie

Die Beschreibung der Differentiale

$$d^n:\mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}[G^n], M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}[G^{n+1}], M)$$

im Falle des reduzierten Standard-Komplexes ist etwas komplizierter als im Falle des Standard-Komplexes:

$$\begin{aligned}(d^n f)(g_1,...,g_{n+1}) &= g_1\bullet f(g_2,...,g_{n+1})\\ &+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^j f(g_1,...,g_j g_{j+1},...,g_{n+1})\\ &+ (-1)^{n+1} f(g_1,...,g_n)\\ (d^0 f)(g) &= g\bullet f - f\end{aligned}$$

Beweis. Wir haben die zu zeigen, mit den obigen Definitionen sind die Diagramme

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G^{n+1}], M) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G^{n+2}], M)\\ \gamma\downarrow\cong & & \delta\downarrow\cong\\ \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}[G^n], M) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}[G^{n+1}], M)\end{array}$$

kommutativ. Dabei sollen die vertikalen Morphismen die in 1.5 definierten Isomorphismen (abelscher Gruppen) sein. Der obere horizontale Morphismus sei induziert durch die Differentiale des Standard-Komplexes, und der untere horizontale Morphismus sei gegeben durch die oben angegebenen Formeln.

Sei f aus der linken oberen Hom-Menge. Dann ist $\alpha(f)$ die Abbildung mit

$$\alpha(f)(g_0, ... , g_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j f(g_0,...,g_{j-1},g_{j+1}, ... , g_{n+1})$$

Die Abbildung $\gamma(f)$ ist nach der Anmerkung von 1.5 gegeben durch

$$\gamma(f)(g_1,...,g_n) = f(1, g_1, g_1g_2 , ... , g_1g_2\bullet...,\bullet g_n)$$

Wir schreiben abkürzende $g_{i....j}$ für das Produkt der Faktoren g_i, $g_{i+1},...,g_j$ und erhalten

$$\begin{aligned}&\delta(\alpha(f))(g_1, ... , g_{n+1}) = \alpha(f)(1, g_1, g_{1...2}, ... , g_{1...n+1})\\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j f(1, g_1,g_{1...2},..., g_{1...j-1}, g_{1...j+1} , ... , g_{1...n+1})\\ &= \quad f(g_1, g_{1...2}, ... , g_{1...n+1})\\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j f(1, g_1,g_{1...2},..., g_{1...j-1}, g_{1...j+1} , ... , g_{1...n+1}) \qquad (1)\end{aligned}$$

$$+ (-1)^{n+1} f(1, g_1 g_{1...2}, , ... , g_{1...n})$$
$$= \quad f(g_1, g_{1...2}, ... , g_{1...n+1})$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \gamma(f)(g_1, g_2,..., g_{j-1}, g_j\bullet g_{j+1}, g_{j+2} ... , g_{n+1}) \qquad (2)$$
$$+ (-1)^{n+1}\gamma(f)(1, g_1 g_2, , ... , g_n)$$

Man beachte, im j-ten Summanden von (1) findet man zwei benachbarte Argumente, die sich um den Faktor $g_j\bullet g_{j+1}$ unterscheiden. Im (2) tritt deshalb dieser Faktor als eines der Argumente auf. Bis auf den ersten Summanden ist dies die Formel, die wir suchen. Nun ist f ein G-Homomorphismus. Deshalb ist dieser erste Summand, gerade gleich

$$g_1\bullet f(1, g_2, ... , g_2\bullet...\bullet g_{n+1}) = g_1\bullet\gamma(f)(g_2,...,g_{n+1}).$$

Es folgt

$$\delta(\alpha(f))(g_1, ... , g_{n+1}) = \beta(\gamma(f))(g_1, ... , g_{n+1}),$$

d.h. die obigen Diagramme sind tatsächlich kommutativ.
QED.

1.7.2 Die Differentiale im Fall der Homologie

Die Differentiale

$$d_n: M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G^n] \longrightarrow M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G^{n-1}]$$

im Falle des reduzierten Standard-Komplexes haben die folgende Gestalt:

$$d_n(m\otimes(g_1,...,g_n))$$
$$= g_1^{-1} m\otimes(g_2,...,g_n)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j m\otimes(g_1,...g_{j-1},g_{j-1}\bullet g_{j+1},...,g_n)$$
$$+ (-1)^n m\otimes(g_1,...g_{n-1})$$

Identifiziert man $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ mit M, so gilt speziell

$$d_1(m\otimes g) \qquad = g^{-1}\bullet m - m$$

Beweis. Betrachten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccc}
M\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G^{n+1}] & \xrightarrow{\alpha} & M\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G^n] \\
\gamma\uparrow\cong & & \delta\uparrow\cong \\
M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G^n] & \xrightarrow{\beta} & M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G^{n-1}]
\end{array}$$

Dabei komme α vom Differential des Standard-Komplexes und β sei das Differential des reduzierten Standard-Komplexes, d.h.

$$\alpha(m\otimes(g_0,...,g_n)) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j m\otimes(g_0,...,g_{j-1},g_{j+1},...,g_n).$$

Insbesondere ist

$$\alpha(m\otimes(1, g_1,...,g_n))$$

$$= m\otimes(g_1,...,g_n) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j m\otimes(1,\ g_1,...,g_{j-1},g_{j+1},...,g_n).$$
$$= m\otimes g_1\bullet(1,g_1^{-1}g_2,...,g_1^{-1}g_n)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^j m\otimes(1,g_1,...,g_{j-1},g_{j+1},...,g_n)$$
$$= (mg_1)\otimes(1,g_1^{-1}g_2,...,g_1^{-1}g_n)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^j m\otimes(1,g_1,...,g_{j-1},g_{j+1},...,g_n)$$

Für die vertikalen Gruppen-Isomorphismen erhalten wir

$$\gamma(m\otimes(g_1,...,g_n)) = m\otimes(1,\ g_1,\ g_1g_2,...,\ g_1g_2\bullet...\bullet g_n)$$
$$\delta(m\otimes(g_1,...,g_{n-1})) = m\otimes(1,\ g_1,\ g_1g_2,...,\ g_1g_2\bullet...\bullet g_{n-1})$$

Für $\delta\circ\beta$ erhält man damit

$$\delta\circ\beta(m\otimes(g_1,...,g_n)) \quad = \alpha\circ\gamma(m\otimes(g_1,...,g_n))$$
$$= \alpha(m\otimes(1,\ g_1,\ g_1g_2,...,\ g_1g_2\bullet...\bullet g_n))$$
$$= (mg_1)\otimes(1,g_2,\ g_2g_3,\ ...,g_2g_3\bullet...\bullet g_n)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^j m\otimes(1,g_1,...,g_1g_2\bullet...\bullet g_{j-1},g_1g_2\bullet...\bullet g_{j+1},...,g_1g_2\bullet...\bullet g_n)$$
$$= \delta(g_1^{-1}m\otimes(g_2,...,g_n))$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \delta(m\otimes(g_1,...g_{j-1},g_j\bullet g_{j+1},g_{j+2},...,g_n))$$
$$+ (-1)^n \delta(m\otimes(g_1,...g_{n-1}))$$

Weil δ ein Isomorphismus ist, erhalten wir damit die behauptete Formel

$$\beta(m\otimes(g_1,...,g_n))$$
$$= g_1^{-1}m\otimes(g_2,...,g_n)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j m\otimes(g_1,...g_{j-1},g_j\bullet g_{j+1},g_{j+2},...,g_n)$$
$$+ (-1)^n m\otimes(g_1,...g_{n-1})$$

Speziell für $n = 1$ ergibt sich, wenn wir $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ mit M identifizieren,

$$\beta(m\otimes g) = g^{-1}m\otimes 1 - m\otimes 1 = g^{-1}m - m.$$

1.7.3 Die 0-te Kohomologie

Wegen $\mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}, M) \cong M$, $f \mapsto f(1)$, kann man einen 0-Kozyklus, d.h. ein Element aus dem Kern von d^0, mit einem Element $m \in M$ identifizieren mit $g \bullet m = m$ für jedes $g \in G$, d.h. wie zu erwarten erhalten wir

$$H^0(G, M) = M^G$$

1.7.4 Die erste Kohomologie

Ein 1-Korand, d.h. ein Element aus dem Bild von d^0, läßt sich als Abbildung

$$f: G \longrightarrow M,\ g \mapsto gm - m$$

auffassen mit einem $m \in M$. Falls G auf M trivial operiert, ist damit die Null-Abbildung der einzige 1-Korand.

Ein 1-Kozyklus, d.h. ein Element aus dem Kern von d^1 kann man als Abbildung

$$f: G \longrightarrow M \text{ mit } f(g_1 g_2) = g_1 \bullet f(g_2) + f(g_1)$$

ansehen. Falls G auf M trivial operiert, ist dies gerade ein Gruppen-Homomorphismus.

$$H^1(G, M) = \mathrm{Hom}_{Groups}(G, M) \text{ falls G auf M trivial operiert.}$$

1.7.5 Die ersten Zusammenhangshomomorphismen

Seien G eine Gruppe und

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von G-Moduln.

Dann kann man den Zusammenhangs-homomorphismus

$$\delta^0: H^0(G, M'') \longrightarrow H^1(G, M')$$

wie folgt beschreiben. Sei

$$m'' \in H^0(G, M'') = M''^G$$

vorgegeben. Weil β surjektiv ist gibt es ein Element

$$m \in M \text{ mit } \beta(m) = m''.$$

Der durch m definierte 1-Korand ist nach 1.7.1 ist die Abbildung

$$dm: g \mapsto gm - m.$$

Das Bild von gm-m in M" ist Null (weil m" invariant ist), d.h. gm-m liegt im Bild von α. Deshalb können wir dm als 1-Kozyklus von G mit Koeffizienten in M' ansehen. Die Kohomologie-Klasse [dm] von dm ist gerade das Bild

$$\delta^0(m) = [dm] \in H^1(G, M')$$

von m beim Zusammenhangshomomorphismus δ^0.

Der Zusammenhangshomomorphismus

$$\delta_1: H_1(G, M'') \longrightarrow H_0(G, M')$$

der Homologie kann wie folgt beschrieben werden. Sei eine Homologie-Klasse

$$[f''] \in H_1(G, M'')$$

vorgegeben, und sei

$$f'' = \sigma_1 \otimes m''_1 + .. + \sigma_r \otimes m''_r \in \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} M''$$

ein repräsentierender 1-Zyklus, d.h.

$$0 = df = \sum_{i=1}^{r} (\sigma_i^{-1} - 1) m''_r \text{ in } \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M'' = M''$$

Weil β surjektiv ist, gibt es für jedes i ein

$$m_i \in M \text{ mit } \beta(m_i) = m''_i.$$

Wir setzen

$$f = \sigma_1 \otimes m_1 + .. + \sigma_r \otimes m_r \in \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} M$$

Nach Konstruktion gilt $\beta(df) = d\beta(f) = df'' = 0$, d.h. der 0-Rand

$$df = \sum_{i=1}^{r} (\sigma_i^{-1} - 1) m_r \in \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M = M$$

liegt im Bild von α, und wir können df als 0-Zyklus mit Koeffizienten in M' auffassen. Die zugehörige Homologie-Klasse [df] ist das Bild von [f''] beim Zusammenhangshomomorphismus:

$$\delta_1([f'']) = [df] \in M/I_G M = H_0(G, M').$$

1.8 Der Fall unendlicher Gruppen

(i) Für die Zahlen-Theorie ist die Gruppen-Kohomologie für unendliche Gruppen für den Fall von besonderen Interesse, wenn G eine Proendliche Gruppe ist, d.h.

$$G = \varprojlim_i G/N_i$$

wobei der Limes über die endlichen Faktorgruppen erstreckt wird. Das ist zum Beispiel der Fall für die Galois-Gruppe einer unendlichen Galois-Erweiterung L/K[8]: sind $\{L_i/K\}$ die endlichen galoisschen Teilerweiterungen einer unendlichen Galois-Erweiterung L/K,

$$K \subseteq L_i \subseteq L,$$

so induziert die Einschränkung auf L_i einen surjektiven Gruppen-Homomorphismus

$$G = Gal(L/K) \twoheadrightarrow Gal(L_i/K) = G/N_i\,.$$

Dabei bezeichne N_i den Kern der Surjektion, d.h. die Gruppe der Automorphismen von L, welche L_i fest lassen,

$$N_i = Gal(L/L_i).$$

Weil jedes Element von L bereits in einer endlichen Teilerweiterung von L/L_i liegt, ergibt sich aus der endlichen Galois-Theorie

[8] d.h. einer algebraischen Körper-Erweiterung die separabel und normal ist. Die Darstellung als inverser Limes kommt dann von der Tatsche, daß jedes Element einer solchen Erweiterung bereits in einer endlichen Teil-Erweiterung liegt.

$$L^{N_i} = L_i.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß G gerade der inverse Limes der G/N_i ist.

(ii) Die Kerne der natürlichen Homomorphismen $G \longrightarrow G/N_i$ bilden eine Umgebungsbasis des neutralen Elements von G und definieren so eine Topologie von G, die proendliche Topologie. Auf diese Weise wird G zu einer topologischen Gruppe.

(iii) Die Moduln über G werden meist mit der diskreten Topologie versehen. Es wird jedoch gefordert, daß die Modul-Operationen stetig sind.

(iv) In dieser Situation betrachtet man für diskrete G-Moduln M eine topologische Variante der Gruppen-Kohomologie:

$$H^n(G, M) = \varinjlim_i H^n(G/N_i, M^{N_i})$$

1.9 Satz 90 von Hilbert

Sei K/k eine (nicht notwendig endliche) Galois-Erweiterung des Körpers k mit der Gruppe G. Dann gilt

$$H^1(G, K^*) = 0.$$

Bemerkung

Im Spezialfall einer endlichen zyklischen Gruppe G ist dies äquivalent zur wohlbekannten Aussage der Grundvorlesung Algebra, daß zwei Elemente von K genau dann konjugiert sind, wenn sie dieselbe Norm besitzen.

Beweis. Nach 1.7 können wir annehmen, die Galois-Erweiterung

K/k ist endlich.

Sei $f: G \longrightarrow K^*$ ein 1-Kozyklus von G mit Werten in K*, d.h.

$$f(\tau\sigma) = \tau\bullet f(\sigma)\bullet f(\tau) \quad \text{für } \sigma, \tau \in G.$$

Dabei bezeichnet das erste Multiplikationszeichen auf der rechten Seite die Operation der Gruppe G auf K, während sich das zweite auf die Multiplikation des Körpers K bezieht. Weil K* eine kommutative Gruppe ist, können wir diese Identität auch in der folgenden Gestalt

$$\tau\bullet f(\sigma) = f(\tau)^{-1}\bullet f(\tau\sigma) \tag{1}$$

schreiben.

Wir betrachten die Elemente $\sigma_1,...,\sigma_N$ von G als Gruppen-Homomorphisem

$$K^* \longrightarrow K^*,$$

d.h. als Charactere der Gruppe K* mit Werten in K*. Nach dem Satz von Artin[9] über die Unabhängigkeit der Charaktere sind die σ_i als Funktionen $K^* \longrightarrow K$ linear unabhängig über K. Die Linear-Kombination

$$f(\sigma_1)\bullet\sigma_1 + ... + f(\sigma_N)\bullet\sigma_N : K^* \longrightarrow K,$$

ist nicht identisch Null (weil die Koeffizienten $f(\sigma_i) \in K^*$ ungleich Null sind). Es gibt also ein $c \in K^*$ mit

$$b := \sum_{\sigma\in G} f(\sigma)\bullet\sigma(c) \neq 0.$$

[9] vgl. S. Lang: Algebra, Chapter VIII, §4, Theorem 7.

Wir wenden einen Automorphismus $\tau \in G$ auf diese Identität an und erhalten

$$\begin{aligned}
\tau(b) &= \sum_{\sigma\in G} \tau(f(\sigma))\bullet\tau(\sigma(c)) \\
&= \sum_{\sigma\in G} f(\tau)^{-1}\bullet f(\tau\sigma)\bullet\tau(\sigma(c)) \quad \text{(nach (1))} \\
&= f(\tau)^{-1}\bullet \sum_{\sigma\in G} f(\tau\sigma)\bullet(\tau\sigma)(c) \\
&= f(\tau)^{-1}\bullet \sum_{\sigma\in G} f(\sigma)\bullet\sigma(c) \qquad \text{(mit } \sigma \text{ durchläuft } \tau\sigma \text{ die Gruppe G)} \\
&= f(\tau)^{-1}\bullet b,
\end{aligned}$$

also

$$f(\tau) = b/\tau(b) = \tau(\tfrac{1}{b}) / \tfrac{1}{b} \text{ für jedes } \tau\in G.$$

Mit anderen Worten, f ist ein Korand.
QED.

2 Homologie und Kohomologie als Funktoren der Gruppe

2.1 Koinduzierte Moduln

Seien G eine topologische[10] Gruppe, $G' \subseteq G$ eine Untergruppe und M' ein G'-Modul. Wir betrachten die Menge

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_G^{G'}(M') &:= \mathrm{Hom}_{G'}(G, M') \\
&:= \{h: G \longrightarrow M' \mid h \text{ stetig mit } h(g'x) = g'\bullet h(x) \text{ für } g'\in G', x\in G\}
\end{aligned}$$

der stetigen G'-Modul-Homomorphismen $G \longrightarrow M'$. Diese Menge besitzt die Struktur eines G-Moduls bezüglich der Operation

$$G\times\mathbf{M}_G^{G'}(M') \longrightarrow \mathbf{M}_G^{G'}(M'), (\sigma, h) \mapsto \sigma\bullet h$$

mit

$$(\sigma\bullet h)(x) := h(x\sigma) \text{ für } \sigma, x \in G.$$

Man beachte, für $\sigma,\tau,x\in G$ gilt

$$(\sigma\bullet\tau)h\,(x) = h(x\sigma\tau) = h((x\sigma)\tau) = (\tau h)(x\sigma) = \sigma(\tau h)\,(x),$$

also $(\sigma\bullet\tau)\bullet h = \sigma\bullet(\tau\bullet h)$.

Der G-Modul $M_G^{G'}(M')$ heißt der durch M' koinduzierte G-Modul[11]. Für den Fall, daß G' die triviale Gruppe ist und M' eine beliebige abelsche Gruppe, schreiben wir

---

[10] Für uns ist der Fall einer proendlichen Gruppe von Interesse. Moduln über solchen Gruppen sollen diskret sein, die Gruppen-Operation jedoch stetig.

[11] Bei Serre, Cohomologie Galoisienne, Serre, Corps locaux, heißen solche Moduln 'induziert'. Wir folgen hier der Bezeichnungsweise von Atiya & Wall im Buch von Cassels & Fröhlich: Algebraic number theory.

$$\mathbf{M}_G(M') := \mathbf{M}_G^1(M') := \mathbf{M}_G^{\{1\}}(M').$$

Unter einem koinduzierten Modul wollen wir einen Modul der Gestalt $M_G(M')$ verstehen.

Bemerkung

Im Fall diskreter Gruppen besteht die Hom-Menge aus beliebigen Abbildungen $G \longrightarrow M'$, welche sich $\mathbb{Z}$-linear auf den Gruppen-Ring fortsetzen lassen. Man hat dann

$$\mathbf{M}_G^{G'}(M') := \mathrm{Hom}_{G'\text{-Sets}}(G, M') = \mathrm{Hom}_{G'\text{-Mod}}(\mathbb{Z}[G], M').$$

2.2 $\mathbf{M}_G^{G'}$ als rechtsadjungierter Funktor

Seien G eine Gruppe, $G' \subseteq G$ eine Untergruppe, M ein G-Modul und M' ein G'-Modul. Dann besteht eine natürliche Isomorphie

$$\varphi: \mathrm{Hom}_{G\text{-Mod}}(M, \mathbf{M}_G^{G'}(M')) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G'\text{-Mod}}(M, M')$$

Mit anderen Worten, der Funktor

$$\mathbf{M}_G^{G'}: G'\text{-Mod} \longrightarrow G\text{-Mod},\ M' \mapsto \mathbf{M}_G^{G'}(M') = \mathrm{Hom}_{G'}(G, M'),$$

ist rechtsadjungiert zur natürlichen Einbettung

$$i: G\text{-Mod} \hookrightarrow G'\text{-Mod}.$$

Insbesondere überführt $\mathbf{M}_G^{G'}$ injektive G'-Moduln in injektive G-Moduln.

Beweis. Für f aus dem Definitionsbereich von φ setzen wir

$$\varphi(f)(m) = f(m)(1).$$

Für $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, $m \in M$ und $\sigma \in G$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(m)(\sigma) = f(m)(1\bullet\sigma) &\overset{12}{=} (\sigma\bullet f(m))(1) \\ &= f(\sigma\bullet m)(1) && \text{(denn f ist G-Homomorphismus)} \\ &= \varphi(f)(\sigma\bullet m) && \text{(nach Definition von } \varphi) \\ &= 0 && \text{(wegen } f \in \mathrm{Ker}(\varphi)). \end{aligned}$$

Die Abbildung φ ist somit injektiv. Es reicht zu zeigen, diese Abbildung ist auch surjektiv. Konstruieren wir die Umkehrabbildung

$$\psi: \mathrm{Hom}_{G'\text{-Mod}}(M, M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G\text{-Mod}}(M, \mathrm{Hom}_{G'}(G, M')).$$

Sei

$$g: M \longrightarrow M'$$

aus dem Definitionsbereich von ψ vorgegeben. Für $m \in M$ sei $\psi(g)(m)$ die Abbildung

$$f(m) := \psi(g)(m): G \longrightarrow M',\ \sigma \mapsto g(\sigma\bullet m),$$

d.h.

$$f(m)(\sigma) := (\psi(g)(m))(\sigma) := g(\sigma\bullet m) \text{ für } m \in M \text{ und } \sigma \in G.$$

Mit der Stetigkeit der Multiplikation mit σ und der von g ist auch f(m) eine stetige Abbildung. Mit g ist auch f(m) ein G'-Homomorphismus: für $m \in M$, $\sigma' \in G'$, $\sigma \in G$ gilt

$$f(m)(\sigma'\bullet\sigma) = g(\sigma'\sigma m) = \sigma'\bullet g(\sigma m) = \sigma'\bullet f(m)(\sigma)$$

---

[12] wegen $f(m) \in \mathbf{M}_G^{G'}(M')$ und der Definition der Multiplikation im koinduzierten Modul.

Damit ist f(m) ein Element von $\mathbf{M}_G^{G'}(M')$,

$$\psi(g)(m) = f(m) \in \mathbf{M}_G^{G'}(M') = \mathrm{Hom}_{G'}(G, M')$$

Als Funktion von m ist f(m) ein G-Homomorphismus: die Summe zweier m geht in die Summe der entsprechenden f(m) über, und für $\sigma, \tau \in G$ und $m \in M$ gilt

$$\begin{aligned}(\sigma\bullet f(m))(\tau) &=^{13} f(m)(\tau\sigma)\\ &= g(\tau\sigma m) && \text{(nach Definition von f(m))}\\ &= f(\sigma m)(\tau) && \text{(nach Definition von f(m))}\end{aligned}$$

also $\sigma\bullet f(m) = f(\sigma m)$ für beliebige $\sigma\in G$ und $m\in M$. Wir haben gezeigt, die Abbildung ψ ist wohldefiniert. Weil die Summe zweier g in die Summe der entsprechenden $f(m) = \psi(g)(m)$ übergeht ist ψ ein Gruppen-Homomorphismus.
Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi(\psi(g))(m) &= \psi(g)(m)(1) && \text{(Definition von } \varphi)\\ &= g(1\bullet m) && \text{(Definition von } \psi)\end{aligned}$$

d.h. $\varphi(\psi(g)) = g$, d.h. φ ist surjektiv.

QED.
Bemerkung
Die gerade bewiesene Aussage kann man als eine dualisierte Form einer wohlbekannten Aussage betrachten, die sich aus der Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts ergibt: jeder G'-Homomorphismus mit Werten in einem G-Modul läßt sich zu einen G-Homomorphismus auf dem Tensorprodukt fortsetzen, d.h. es besteht eine natürliche Isomorphie

$$\mathrm{Hom}_{G'\text{-Mod}}(M', M) = \mathrm{Hom}_{G\text{-Mod}}(M'\otimes_{\mathbb{Z}[G']}\mathbb{Z}[G], M)$$

für jeden G'-Modul M' und jeden G-Modul M. Mit anderen Worten, der Funktor

$$\otimes_{\mathbb{Z}[G']}\mathbb{Z}[G]: G'\text{-Mod} \longrightarrow G\text{-Mod}$$

ist linksadjungiert zur natürlichen Einbettung

$$i: G\text{-Mod} \hookrightarrow G'\text{-Mod}.$$

Insbesondere überführt dieses Tensorprodukt (trivialerweise) projektive G'-Moduln in projektive G-Moduln.

2.3 Lemma von Shapiro

Seien G eine Gruppe, $G' \subseteq G$ eine Untergruppe und M' ein G'-Modul. Dann besteht für jedes $q \ge 0$ eine natürliche Isomorphie

$$H^q(G, \mathbf{M}_G^{G'}(M')) \cong H^q(G', M').$$

Insbesondere erhält man für G' trivial, d.h. für abelsche Gruppen M',

$$H^q(G, \mathbf{M}_G(M')) = 0 \text{ für } q > 0.$$

Beweis. Sei P* eine freie Aufösung von $\mathbb{Z}$ über G,

$$P^\bullet \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Die Zerlegung von G in Nebenklassen modulo G'

$$G =^{14} \vee_{\sigma\in\in G/G'} \sigma G'$$

[13] wegen $f(m)\in M_G^{G'}(M')$ und der Definition der Multiplikation im koinduzierten Modul.

liefert eine Zerlegung des Gruppen-Rings von G in eine direkte Summe von Exemplaren von $\mathbb{Z}[G']$.

$$\mathbb{Z}[G] = \oplus_{\sigma\in\in G/G'} \sigma\mathbb{Z}[G']$$

Damit ist (1) auch eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ über G'. Die Behauptung ergibt sich damit aus dem natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{G\text{-Mod}}(P^\bullet, \mathbf{M}_G^{G'}(M')) = \mathrm{Hom}_{G'\text{-Mod}}(P^\bullet, M')$$

von 2.2.

QED.

Bemerkungen

(i) Ersetzt man in der obigen Argumentation den Hom-Funktor durch das Tensorprodukt, so erhält man einen natürlichen Isomorphismus

$$P^\bullet\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[G']} M' = P^\bullet\otimes_{\mathbb{Z}[G']} M'$$

Durch Übergang zur Kohomologie ergibt sich

$$H_n(G, \mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[G']}M') = H_n(G', M')$$

für jeden G'-Modul M. Insbesondere erhält man für G' trivial, d.h. für abelsche Gruppen M',

$$H_n(G, \mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}M') =0 \text{ für } n > 0.$$

G-Moduln der Gestalt $\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}M'$ mit abelschen Gruppen M' heißen <u>induziert</u>.

Aus der natürlichen Surjektion

$$\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}M' \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[G]}M'$$

ergibt sich, daß jeder G-Modul Faktormodul eines induzierten ist.

(ii) Jeder G-Modul M ist in natürlicher Weise Teilmodul eines koinduzierten G-Moduls:

$$\varphi:M \hookrightarrow \mathbf{M}_G(M),\ m \mapsto (\sigma\mapsto\sigma m).$$

Wegen $\varphi(m)(1) = m)$ ist diese Abbildung injektv. Wir haben noch zu zeigen, daß φ ein G-Homomorphismus ist. Nach Definition der G-Modul-Struktur des koinduzierten Moduls ist das τ-fache der Abbildung $\varphi(m)$ gerade die Abbildung

$$\sigma\mapsto\varphi(m)(\sigma\tau) = \sigma\tau m = \varphi(\tau m)(\sigma),$$

d.h. es ist $\tau\bullet\varphi(m) = \varphi(\tau m)$. Mit anderen Worten, φ ist ein G-Homomorphismus.

2.4 Kohomologie als Funktor bezüglich G

Seien h: $G \longrightarrow G'$ ein Gruppen-Homomorphismus und M' ein G'-Modul. Dann definiert h auf M' auch eine G-Modul-Struktur und induziert einen natürlichen Homomorphismus abelscher Gruppen (s.u.)

$$f^*: H^n(G', M') \longrightarrow H^n(G, M'),$$

d.h. die Kohomologie ist ein kontravarianten Funktor bezüglich der Gruppe.
Im Spezialfall, daß

$$G \subseteq G'$$

---

[14] Die Bezeichnungsweise $\sigma\in\in G/G'$ soll bedeuten, daß σ ein Repräsentantensystem von G/G' in G durchlaufen soll.

eine Untergruppe von G' und h die natürliche Einbettung ist, heißt dieser Homomorphismus auch Restriktion und wird mit

$$\text{Res}: H^n(G', M') \longrightarrow H^n(G, M')$$

bezeichnet.

Im Spezialfall, daß f die natürlche Surjektion auf eine Faktorgruppe ist

$$G' = G/H$$

mit einem Normalteiler H, und

$$M' = M^H$$

der Invarianten-Modul eines G-Moduls M, heißt dieser Homomorphismus auch Inflation und wird mit

$$\text{Inf}: H^n(G/H,\ M^H) \longrightarrow H^n(G,\ M^H)$$

bezeichnet.

Beweis (der Existenz von f*). Der Homomorphismus h: $G \longrightarrow G'$ induziert Homomorphismen $G^{n+1} \longrightarrow G'^{n+1}$ und damit einen Homomorphismus der Standard-Komplexe zu G und G'.
QED.

2.5 Homologie als Funktor bezüglich G

Seien h: $G \longrightarrow G'$ ein Gruppen-Homomorphismus und M' ein G'-Modul. Dann definiert h auf M' auch eine G-Modul-Struktur und induziert einen natürlichen Homomorphismus abelscher Gruppen

$$f_*: H_n(G, M') \longrightarrow H_n(G', M'),$$

d.h. die Homologie ist ein kovarianter Funktor bezüglich der Gruppe.

Im Spezialfall, daß

$$G \subseteq G'$$

eine Untergruppe von G' und h die natürliche Einbettung ist, heißt dieser Homomorphismus auch Korestriktion und wird mit

$$\text{Cor}: H_n(G, M') \longrightarrow H_n(G', M')$$

bezeichnet.

2.6 Verhalten der Kohomologie bei inneren Automoprhismen der Gruppe

Seien G eine Gruppe, M ein G-Modul und $\sigma \in G$ ein Element. Der durch σ definierte innere Automorpismus

$$\text{int}_\sigma: G \longrightarrow G,\ g \mapsto \sigma g \sigma^{-1}$$

gestattet es, M mit einer neuen G-Modul-Struktur zu versehen. Der Modul M mit dieser neuen Struktur wird mit

$$M^\sigma$$

bezeichnet. Die Operation von G auf M^σ ist durch die folgende Vorschrift gegeben.

$$G \times M^\sigma \longrightarrow M^\sigma,\ (g, m) \mapsto \sigma g \sigma^{-1} m.$$

Nach 2.4 definiert der Automorphismus int_σ einen Homomorphismus

$$\text{int}_\sigma^*: H^n(G, M) \longrightarrow H^n(G, M^\sigma). \qquad (1)$$

Die (bijektive) Abbildung

$$f\colon M^{\sigma} \longrightarrow M,\ m \mapsto \sigma^{-1}m,$$

ist ein G-Homomorphismus:

$$\tau\bullet f(m) = \tau\sigma^{-1}m = \sigma^{-1}\sigma\tau\sigma^{-1}m = f(\sigma\tau\sigma^{-1}m).$$

Deshalb induziert f auf der Kohomologie einen Homomorphismus

$$H^n(G, M^{\sigma}) \longrightarrow H^n(G, M) \qquad (2).$$

Der eine Homomorphismus (1) existiert auf Grund der Funktorialität bezüglich der Gruppe, der andere (2) auf Grund der Funktorialität bezüglich des Moduls. Tatsächlich gibt es einen Zusammenhang zwischen ihnen:

Die Homomorphismen (1) und (2) sind invers zueinander.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n.
Der Fall $n = 0$.
Es gilt

$$\begin{aligned}(M^{\sigma})^G &= \{m \in M \mid \sigma g\sigma^{-1}m = m \text{ für jedes } g \in G\}\\ &= \{m \mid m \in M \text{ und } g\sigma^{-1}m = \sigma^{-1}m \text{ für jedes } g \in G\}\\ &=^{\text{[15]}} \{\sigma m \mid m \in M \text{ und } gm = m \text{ für jedes } g \in G\}\\ &= \sigma M^G.\\ &=^{\text{[16]}} M^G.\end{aligned}$$

Die durch int_{σ} induzierte Abbildung auf dem Standard-Komplex ist ebenfalls die Konjugation mit σ. Durch Anwenden des Hom-Funktors auf den Morphismus der Standard-Komplexe erhalten wir einen Komplex-Morphismus der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
& M^G \arrow[d, equal] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G],M) \arrow[r] \arrow[d] & \dots & f \arrow[d, mapsto] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},M^{\sigma}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G],M^{\sigma}) \arrow[r] & \dots & f\circ\mathrm{int}_{\sigma} \\
& (M^{\sigma})^G & & &
\end{tikzcd} \qquad (3)$$

Die Elemente der Hom-Mengen der oberen Zeile werden mit den Konjugationsabbildungen

$$\mathrm{int}_{\sigma}\colon \mathbb{Z}[G^{n+1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[G^{n+1}]$$

zusammengesetzt und liefern so Elemente der Hom-Mengen der unteren Zeile.[17]

---

[15] Mit m durchläuft auch σm den gesamten Modul M.

[16] Jedes Gruppenelement operiert trivial auf M^G, also auch σ.

[17] Für $\sigma, \tau \in G$ und $x \in \mathbb{Z}[G^{n+1}]$ gilt

$$(f\circ\mathrm{int}_{\sigma})(\tau x) = f(\sigma\tau\sigma^{-1}x) = \sigma\tau\sigma^{-1}f(x).$$

Der linke vertikale Morphismus ist die identische Abbildung (weil G auf $\mathbb{Z}$ trivial operiert). Damit ist (1) die identische Abbildung von M^G im Fall n = 0.

Im Fall des Morphismus (2) erhalten wir ein Diagramm mit umgekehrten vertikalen Pfeilen,

$$\begin{tikzcd}
 & M^G \arrow[d, equal] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G],M) \arrow[r] & \ldots \\
 & & & \ldots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},M^\sigma) \arrow[r] \arrow[uu] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G],M^\sigma) \arrow[r] \arrow[uu] & \ldots \\
 & (M^\sigma)^G & &
\end{tikzcd}$$

welches aber diesmal durch f induziert wird. Die für n = 0 induzierte Abbildung hat die Gestalt

$$M^G \longrightarrow M^G \text{ , } m \mapsto \sigma^{-1}m = m,$$

ist also auch die identische Abbildung.

<u>Der Fall n > 0</u>.

Wir verwenden die in Bemerkung 2.3 (ii) beschriebene natürliche Einbettung

$$M \hookrightarrow M' = \mathbf{M}_G(M),\ m \mapsto (g \mapsto gm),$$

und ergänzen diese zu einer exakten Sequenz von G-Homomorphismen

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Weil $M' = \mathbf{M}_G(M)$ als koinduzierter Modul kohomologische trivial ist, erhalten wir kommutative Diagramme mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(G,M) \arrow[r] \arrow[d, dash] & H^0(G,M') \arrow[r] \arrow[d, dash] & H^0(G,M'') \arrow[r] \arrow[d, dash] & H^1(G,M) \arrow[r] \arrow[d, dash] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(G,M^\sigma) \arrow[r] & H^0(G,M'^\sigma) \arrow[r] & H^0(G,M''^\sigma) \arrow[r] & H^1(G,M^\sigma) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3}$$

und für i > 1

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{i-1}(G,M'') \arrow[r] \arrow[d, dash] & H^i(G,M) \arrow[r] \arrow[d, dash] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^{i-1}(G,M''^\sigma) \arrow[r] & H^i(G,M^\sigma) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{4}$$

Die vertikalen Morphismen können dabei einmal vom Typ (1) und einmal vom Typ (2) sein. Auf Grund des Induktionsanfangs sind im Diagramm (3) die vertikalen Morphismen von Typ (1) mit eventueller Ausnahme des ganz rechten invers zu den entsprechenden Morphismen vom Typ (2). Wegen (3) ist dies dann aber auch für die Morphismen ganz rechts der Fall. Damit gilt die Aussage für n = 1. Für größere n ergibt sich der Induktionsschritt über die analoge Argumentation mit den Diagrammen (4).

QED.

Bemerkung

(i) Der obige Beweis ist ein erstes Beispiel für ein allgemeines Prinzip der algebraischen Zahlentheorie: wir haben eine Aussage über Kohomologie-Gruppen $H^n(G, M)$ zunächst für ein spezielles n bewiesen (in unserem Fall für n = 0) und haben dann formale Argumente benutzt, welche induktiv zeigen, daß die Aussage dann für alle n gilt.

(ii) Dieses Prinzip kann man für den Fall endlicher Gruppen mit der sogenannten Tate-Kohomologie $\hat{H}^n(G, M)$ noch weiter treiben, welche für kleine n mit der Gruppen-Homologie und für große n mit der Gruppen-Kohomologie übereinstimmt und welche die Kohomologie ein und desselben Komplexes ist.

$$H^n(G, M) = \hat{H}^n(G, M) \qquad \text{für } n \geq 1$$

$$H_n(G, M) = \hat{H}^{-n-1}(G, M) \qquad \text{für } n \geq 1$$

(iii) Mit Hilfe der Tate-Kohomologie kann man, wie wir sehen werden, die Konstruktionen und Abbildungen der Kohomologie zu solchen der Homologie machen und umgekehrt. Insbesondere sind dann die Abbildungen

Res und Cor

sowohl für die Homologie also auch die Kohomologie definiert, und man kann sie zusammensetzen.

$$\hat{H}^n(G, M) \xrightarrow{\text{Res}} \hat{H}^n(H, M) \xrightarrow{\text{Cor}} \hat{H}^n(G, M)$$

Wir werden die Abbildungsvorschriften für n = 0 bestimmen und auf diese Weise zeigen, daß die Zusammensetzung (für alle n) gerade die Multiplikation mit dem Index

$$(G:H)$$

der Untergruppe H in G ist. Im Spezialfall, daß die Untergruppe trivial ist,

$$H = \{1\},$$

wird sich zeigen, daß die Kohomologie-Gruppen von der Gruppen-Ordnung anulliert werden:

$$\# G \cdot \hat{H}^n(G, M) = 0.$$

2.7 Eine exakte Sequenz welche Inflation und Restriktion verbindet

2.8 Die exakte Sequenz 2.7 für höhere Kohomologie-Gruppen

3 Tate-Kohomologie

3.1 Vereinbarungen und Bezeichnungen

In diesem Abschnitt werden wir stets annehmen, daß die Gruppe G endlich ist.

$$\# G < \infty$$

Wir bezeichnen dann die Summe der Gruppen-Elemente im Gruppen-Ring $\mathbb{Z}[G]$ mit

$$N := N_G := \sum_{\sigma\in G} \sigma \in \mathbb{Z}[G] \tag{1}$$

Ist M ein G-Modul, so verwenden wir für die Multiplikation mit N ebenfalls die Bezeichnung N,

$$N = N_G : M \longrightarrow M,\ m \mapsto N\cdot m. \tag{2}$$

Man beachte, für jedes Gruppen-Element σ gilt

$$\sigma\cdot N = N = N\cdot\sigma,$$

denn die Multiplikation mit σ permutiert nur die Summanden von N.

Weil das Augmentationsideal I_G aus Summen von Elementen der Gestalt

$$\pm(\sigma - 1)$$

besteht, gilt damit

$$I_G M \subseteq \mathrm{Ker}(N). \tag{3}$$

und

$$\mathrm{Im}(N) \subseteq M^G \tag{4}$$

Der Gruppen-Homomorphismus N induziert wegen (3) und (4) einen Gruppen-Homomorphismus

$$H_0(G, M) = M_G = M/I_G M \xrightarrow{N^*} M^G = H^0(G, M) \tag{5}$$

3.2 Die Tate-Gruppen $\hat{H}_0(G, M)$ und $\hat{H}^0(G, M)$

Seien G eine endliche Gruppe und M ein G-Modul. Mit den Bezeichnungen von 3.1 setzen wir

$$\hat{H}_0(G, M) \quad := \mathrm{Ker}(M_G \xrightarrow{N^*} M^G) = \{m \in M \mid N\bullet m = 0\}/I_G M$$

$$\hat{H}^0(G, M) \quad := \mathrm{Koker}(M_G \xrightarrow{N^*} M^G) = M^G/N\bullet M$$

Aus den Definitionen erhalten wir eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow \hat{H}_0(G,M) & \hookrightarrow & H_0(G,M) & \xrightarrow{N^*} & H^0(G,M) & \twoheadrightarrow & \hat{H}^0(G,M) \longrightarrow 0 \\ & & \| & & \| & & \\ & & M_G & & M^G & & \end{array}$$

3.3 Induzierte und koinduzierte Moduln im Fall endlicher Gruppen

Sei G eine endliche Gruppe. Dann fallen die Begriffe 'induzierter' G-Modul und 'koinduzierter' G-Modul zusammen.

Beweis. Sei A eine abelsche Gruppe. Es reicht zu zeigen, der Homomorphismus abelscher Gruppen

$$\varphi: \mathrm{Hom}_{Ab}(G, A) \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A \,.\, f \mapsto \sum_{\in G} \sigma^{-1} \otimes f(\sigma)$$

ist ein Isomorphismus von G-Moduln. Zumindest ist es ein Homomorphismus von G-Moduln, denn für $\sigma, \tau \in G$ und $f \in \mathrm{Hom}(G,A)$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\tau f) &= \sum_{\in G} \sigma^{-1} \otimes (\tau f)(\sigma) \\ &= \sum_{\in G} \sigma^{-1} \otimes f(\sigma\tau) \\ &= \sum_{\in G} (\sigma\tau^{-1})^{-1} \otimes f(\sigma) \\ &= \tau \sum_{\in G} \sigma^{-1} \otimes f(\sigma) \\ &= \tau \bullet f(f) \end{aligned}$$

Wir haben noch die Bijektivität von φ zu beweisen.

Für $\sigma\in G$ und $a\in A$ bezeichne $\chi_{\sigma,a}$ die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\chi_{\sigma,a}: \mathbb{Z}[G] \longrightarrow A,$$

welche den freien Erzeuger $\sigma\varpi$ des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}[G]$ in a und alle anderen Elemente von G in die Null abbildet. Für je zwei Elemente a' , a" $\in$A gilt dann

$$\chi_{\sigma,a'+a''} = \chi_{\sigma,a'} + \chi_{\sigma,a''}$$

Weiter betrachten wir die Abbildung

$$\mathbb{Z}[G] \times A \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}[G], A), \left(\sum_{\sigma\in G} n_\sigma\bullet\sigma, a\right) \mapsto \sum_{\sigma\in G} n_\sigma\bullet\chi_{\sigma^{-1},a} .$$

Diese Abbildung ist $\mathbb{Z}$-bilinear. Es ist gerade die bilineare Fortsetzung der Abbildung

$$G \times A \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], A), (\sigma, a) \mapsto \chi_{\sigma^{-1},a}$$

Diese bilineare Fortsetzung induziert einen Gruppen-Homomorphismus

$$\psi:\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}[G], A), \sigma \otimes a \mapsto \chi_{\sigma^{-1},a} .$$

Nach Definition von $\chi_{\sigma,a}$ gilt $\varphi(\chi_{\sigma,a}) = \sigma^{-1}\otimes a$, also

$$\psi(\varphi(\chi_{\sigma,a})) = \psi(\sigma^{-1}\otimes a) = \chi_{\sigma,a}.$$

Für jede $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung f: $\mathbb{Z}[G] \longrightarrow A$ ist[18]

$$f = \sum_{\sigma\in G} \chi_{\sigma^{-1},f(\sigma)} ,$$

also

$$\psi(\varphi(f)) = \sum_{\sigma\in G} \psi(\varphi(\chi_{\sigma^{-1},f(\sigma)}) = \sum_{\sigma\in G} \chi_{\sigma^{-1},f(\sigma)} = f,$$

also

$$\psi\circ\varphi = \mathrm{Id}.$$

Weiter ist für jedes $\sigma\in G$ und jedes $a \in A$,

$$\varphi(\psi(\sigma\otimes a)) = \varphi(\chi_{\sigma^{-1},a}) = \sigma\otimes a.$$

Weil die $\sigma\otimes a$ ein Erzeigendensystem des Tensorprodukts bilden, folgt

$$\varphi\circ\psi = \mathrm{Id}.$$

Die Homomorphismen φ und ψ sind zueinander invers, also Isomorphismen.

QED.

3.4 Die 0-ten Tate Gruppen für induzierte Moduln

Seien G eine endliche Gruppe und M ein induzierter G-Modul. Dann gilt

$$\hat{H}_0(G, M) = 0 = \hat{H}^0(G, M).$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, die Abbildung

---

[18] Beide Seiten sind $\mathbb{Z}$-linear und haben an der Stelle $\sigma\in G$ den Wert $f(\sigma)$.

$$M/I_G M \xrightarrow{N^*} M^G \tag{1}$$

ist bijektiv.

Nach Voraussetzung können wir schreiben

$$M = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

mit einer abelschen Gruppe A. Jedes Element $m \in M$ läßt sich dann in der Gestalt

$$m = \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes a_\sigma$$

mit eindeutig bestimmten $a_\sigma \in A$. Ist dieses Element G-invariant, so gilt

$$\sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes a_\sigma = \sum_{\sigma \in G} g\sigma \otimes a_\sigma = \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes a_{g^{-1}\sigma}$$

für jedes $g \in G$, also $a_\sigma = a_{g^{-1}\sigma}$ für alle σ, $g \in G$. Weil G transitiv auf sich selbst operiert, müssen damit alle a_σ gleich sein,

$$a_\sigma = a \in A \text{ für alle } \sigma \in G,.$$

Wir können a ausklammern und erhalten

$$m = N \otimes a = N \bullet (1 \otimes a)$$

d.h. m liegt im Bild der Abbildung N. Wir haben gezeigt, die Abbildung (1) ist surjektiv. Repräsentiere jetzt

$$m = \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes a_\sigma$$

ein Element aus dem Kern der Abbildung N. Dann gilt

$$0 = N \bullet \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes a_\sigma = \sum_{\sigma \in G} N \otimes a_\sigma = N \otimes \sum_{\sigma \in G} a_\sigma = \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes a$$

mit $a = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma$. Mit $0 = \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes a$ muß aber $a = 0$ sein,

$$0 = a = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma$$

Damit ist aber

$$\begin{aligned} m &= \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes a_\sigma \\ &= \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes a_\sigma - 1 \otimes \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \\ &= \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes a_\sigma - \sum_{\sigma \in G} 1 \otimes a_\sigma \end{aligned}$$

$$= \sum_{\sigma\in G} (\sigma - 1)\otimes a_\sigma \in I_G M$$

Mit anderen Worten, m repräsentiert das Nullelement in $M/I_G M$. Wir haben gezeigt, (1) ist injektiv.
QED.

3.5 Die höheren Tate-Gruppen

Seien G eine endliche Gruppe und M ein G-Modul. Wir setzen

$$\hat{H}^n(G, M) := H^n(G, M) \text{ für } n \geq 1$$
$$\hat{H}^{-1}(G, M) := \hat{H}_0(G, M)$$
$$\hat{H}^n(G, M) := H_{-n-1}(G, M) \text{ für } n < -1$$

d.h.

$$\hat{H}^{-2}(G, M) := H_1(G, M)$$
$$\hat{H}^{-3}(G, M) := H_2(G, M)$$
$$\ldots$$

Die "negativen" $\hat{H}$ sind gewissermaßen um eins negativer als wir uns das wünschen würden.

3.6 Die Tate-Gruppen als "∂-Funktor"

Seien G eine endliche Gruppe und

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

eine exakte Sequenz von G-Moduln.
Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow \hat{H}^n(G, M') \longrightarrow \hat{H}^n(G, M) \longrightarrow \hat{H}^n(G, M'') \longrightarrow \hat{H}^{n+1}(G, M') \longrightarrow \ldots$$

(die in doppelt funktorieller Weise von G und M abhängt).
Beweis. Wir kleben die beiden Komplexe, deren (Ko-) Homologie gerade die Gruppen-Homologie bzw. die Gruppen-Kohomologie ist, wie folgt zu einem kommutativen Diagramm mit eakten Zeilen zusammen.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \hat{H}^{-1}(G,M') \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \hat{H}^{-1}(G,M) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \hat{H}^{-1}(G,M'') \arrow[d, phantom, "\cap"] & & \\
\ldots \arrow[r] & H_1(G,M'') \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d] & H_0(G,M') \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "N'^*"] & H_0(G,M) \arrow[r] \arrow[d, "N^*"] & H_0(G,M'') \arrow[r] \arrow[d, "N''^*"] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] & H^0(G,M') \arrow[r] \arrow[d, two heads] & H^0(G,M) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, two heads] & H^0(G,M'') \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[d, two heads] & H^1(G,M') \arrow[r] & \ldots \\
 & & \hat{H}^0(G,M') \arrow[r] & \hat{H}^0(G,M) \arrow[r, "\beta'"] & \hat{H}^0(G,M'') & &
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

Die zweite Zeile ist gerade die die lange Homologie-Sequenz zur kurzen exakten Sequenz (1), und die dritte die lange Kohomologie-Sequenz.
Die drei vertikalen Abbilungen in der Mitte werden induziert durch die Multiplikation mit der Summe N der Gruppen-Elemente.
Die obere Zeile besteht aud den Kernen der Abbildungen N'*, N* und N''*, und die untere aus deren Kokernen. Diese beiden Zeilen bilden auf Grund des Schlangen-Lemmas zusammen eine exakte Sequenz (wegen der Kommutativität des Diagramms, welches aus den mittleren beiden Zeilen und den Abbildungen N'*, N*, N''' gebildet wird).

Die Kommutativität der beiden inneren Quadrate ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß (1) eine exakte Sequenz von G-Homomorphismen ist.[19] Die Kommutativität der beiden äußeren Quadrate ergibt sich aus den Beschreibungen der Zusammenhangshomomorphismen von in 1.6.4:
1) Die Zuordnungsvorschriften für das linke Quadrat kann man nach 1.6.4 wie folgt beschreiben.

$$
\begin{array}{ccc}
[\sum_i \sigma_i \otimes m_i] & \mapsto & [\sum_i (\sigma_i^{-1}-1)m_i] \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & \mapsto & [N\bullet\sum_i (\sigma_i^{-1}-1)m_i]
\end{array}
$$

Wir verwenden hier die Tatsache, daß $H_1(G,M'')$ ein Subfaktor von $Z[G]\otimes_{\mathbb{Z}} M$ ist, d.h. die Elemente der Homologie-Gruppe lassen sich durch Elemente der Gestalt

$$\sum_i \sigma_i \otimes m_i$$

repräsentieren. Wir verwenden hier eckige Klammern [...] zur Bezeichnung von Restklassen.
2) Die Zuordnungsvorschriften für die das rechte Quadrat kann man wie folgt beschreiben.

[19] Für G-Homomorphismen f gilt $f(N\bullet x) = N\bullet f(x)$.

$$\begin{array}{ccc} [m] & \mapsto & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ [N\bullet m], [m'] & \mapsto & (g \mapsto gm'-m') \end{array}$$

Man beachte, für m' := N•m gilt

$$gm' - m' = gNm - Nm = Nm - Nm = 0.$$

Auf Grund der Kommutativittät von (2) und der Exaktheit der mittleren Zeilen gilt

$$\mathrm{Im}(\delta_1) = \mathrm{Ker}(\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}(N^*\circ\alpha) = \mathrm{Ker}(N'^*) = \hat{H}^{-1}(G,M')$$

Deshalb faktoriesiert sich δ_1 über $\hat{H}^{-1}(G,M')$. Die Einschränkung α' von α hat damit denselben Kern wie α, d.h. die Exaktheit der zweiten Zeile von (2) bleibt erhalten, wenn die letzten drei Objekte dieser Zeile durch die darüber stehenden Objekte der ersten Zeile ersetzt werden.

Weiter gilt wegen $\delta^1\circ N''^* = 0$, $\mathrm{Im}(N''^*) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta^1)$, d.h. δ^1 faktorisiert sich nach dem Homomorphie-Satz über

$$H^0(G, M'')/\mathrm{Im}(N''^*) = \hat{H}(G, M'').$$

Und es bleibt die Exaktheit der dritten Zeile erhalten, wenn man deren erste drei Objekte durch die darunterstehenden Objekte der vierten Zeile ersetzt.

Zusammen mit dem Schlangen-Lemma erhalten die behauptete exakte Sequenz.
QED.
Bemerkungen

(i) Man kann zunächst nicht erwarten, daß sich die obige Konstruktion von 3.5 funktoriel bezüglich der Gruppe G verhält: der linke Teil der Sequenz ist in kovarianter Weise funktoriel bezüglich G, der rechte Teil jedoch in kontravarianter Weise. Dort, wo beide Teile zusammentreffen ist keine Funktorialität zu erwarten, auch weil die Abbildungen N nicht mit Gruppen-Homomorphismen verträglich sind.[20]

(ii) Weil die Begriffe induziert und koinduziert für Moduln über endlichen Gruppen übereinstimmen (vgl. 3.3) und weil 3.4 nicht nur für $\hat{H}_0$ und $\hat{H}^0$ sondern für jedes $\hat{H}_n$ und jedes $\hat{H}^n$ gilt, sieht man jedoch mit Hilfe kurzer exakter Sequenzen[21]

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathbf{M}_G(M) \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

von G-Moduln mit $\mathbf{M}_G(M)$ (ko-) induziert, daß jedes $\hat{H}^n$ auch ein $\hat{H}^{n+1}$ und ein $\hat{H}^{n-1}$ ist. Daraus ergibt sich die Funktorialität der Sequenz von 3.6 bezüglich G, und zwar sowohl als Sequenz von kovarianten als auch als Sequenz von kontravarianten Funktoren.

3.7 Die volle Resolvente einer endlichen Gruppe G

Seien G eine endliche Gruppe und

---

[20] Die beteiligten Gruppen können zum Beispiel eine unterschiedliche Anzahl von Elementen haben.

[21] vgl. den Fall n > 1 im Beweis von 2.6.

$$\ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} 0 \qquad (1)$$

eine Auflösung des G-Moduls $\mathbb{Z}$ durch freie $\mathbb{Z}[G]$-Moduln (wie zum Beispiel der Standard-Komplex). Wir wenden den Funktor

$$\mathrm{Hom}_{Ab}(\ ?\ , \mathbb{Z}): G\text{-Mod} \longrightarrow G\text{-Mod},\ M \mapsto M^*,$$

an und erhalten eine Sequenz von G-Modul-Homomorphismen[22]

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon^*} P_0^* \longrightarrow P_1^* \longrightarrow \ldots \qquad (2)$$

Weil der Hom-Funktor linksexakt ist, ist diese Sequenz exakt an den Stellen $\mathbb{Z}$ und P_0^*. An den übrigen Stellen ist sie ebenfalls exakt, denn es gilt

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 \text{ für } i > 0,$$

denn $\mathbb{Z}$ ist als Modul über sich selbst frei. Die beiden exakten Sequenzen (1) und (2) lassen sich zu einer neuen exakten Sequenz

$$\ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon^*\circ\varepsilon} P_0^* \longrightarrow P_1^* \longrightarrow \ldots \qquad (3)$$

zusammenkleben, die wir auch wie folgt bezeichnen wollen

$$\ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon^*\circ\varepsilon} P_{-1} \longrightarrow P_{-2} \longrightarrow \ldots$$

oder auch wie folgt

$$L_*: \ldots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{\varepsilon^*\circ\varepsilon} L_{-1} \longrightarrow L_{-2} \longrightarrow \ldots$$

---

[22] Für jeden G-Modul M sei M* mit der G-Operation

$$G \times M^* \longrightarrow M^*,\ (g, \ell) \mapsto g\bullet\ell : m \mapsto \ell(mg) = \ell(g^{-1}m),$$

versehen. Man beachte, es gilt für $\sigma, \tau \in G$ und $m \in M$,

$$((\sigma\tau)\bullet\ell)(m) = \ell(\tau^{-1}\sigma^{-1}m) = (\tau\ell)(\sigma^{-1}m) = (\sigma(\tau\ell))(m)$$

also ist $(\sigma\tau)\bullet\ell) = \sigma(\tau\ell)$.

Für jeden G-Homomorphismus

$$f: M \longrightarrow M'$$

ist der induzierte Homomorphismus

$$f^*: M'^* \longrightarrow M^*,\ \ell \mapsto \ell\circ f,$$

ein G-Homomorphismus: für $\sigma\in G$, $m \in M$ und $\ell\in M'^*$ gilt:

$$\begin{aligned}
f^*(\sigma\bullet\ell)(m) &= ((\sigma\bullet\ell)\circ f)(m) \\
&= (\sigma\bullet\ell)(f(m) \\
&= \ell(\sigma^{-1}\bullet f(m)) \quad \text{(Definition der Multiplikation in } M'^*) \\
&= \ell(f(\sigma^{-1}m)) \quad \text{(f ist ein G-Homomorphismus)} \\
&= \ell(f(m\sigma)) \\
&= (\ell\circ f)(m\sigma) \\
&= (\sigma\bullet(\ell\circ f))(m) \quad \text{(Definition der Multiplikation in } M^*). \\
&= (\sigma\bullet f^*(\ell))(m)
\end{aligned}$$

Also gilt

$$f^*(\sigma\bullet\ell) = \sigma\bullet f^*(\ell)$$

d.h. wir setzen

$$L_n := \begin{cases} P_n = P^*_{-n-1} & \text{für } n < 0 \\ P_n & \text{sonst} \end{cases} \qquad (4)$$

Man beachte, weil ε surjektiv und ε* injektiv ist, gilt

$$\mathrm{Ker}(\varepsilon^*\circ\varepsilon) = \mathrm{Ker}(\varepsilon) \text{ und } \mathrm{Im}(\varepsilon^*\circ\varepsilon) = \mathrm{Im}(\varepsilon^*).$$

Die Tate-Gruppen treten dann als Kohomologie des Komplexes $\mathrm{Hom}_G(L_*, M)$ auf,

$$\hat{H}^n(G, M) := H^n(\mathrm{Hom}_G(L_*, M)) \text{ für jedes } n \in \mathbb{Z}.$$

Zum Beweis benötigen wir zunächst das folgende Lemma.

3.7.1 Lemma

Seien C ein endlich erzeugter G-Modul, welcher als $\mathbb{Z}$-Modul frei ist, und

$$C^* := \mathrm{Hom}(C, \mathbb{Z})$$

der zugehörige duale G-Modul. Dann ist die folgende Abbildung für jeden G-Modul M ein Isomorphismus von G-Moduln[23].

$$\varphi: C\otimes M \to \mathrm{Hom}(C^*, M),\ c\otimes m \mapsto (f \mapsto f(c)\cdot m).$$

Beweis. <u>1. Schritt</u>. φ ist ein G-Homomorphismus.
Nach Definition gilt

$$\varphi(c\otimes m)(f) = f(c)\bullet m.$$

Für g ∈ G entsteht das g-fache dieser Abbildung durch “Konjugation” mit g, d.h.

$$(g\bullet\varphi(c\otimes m))(f) = g\bullet\varphi(c\otimes m)(g^{-1}f) = g\bullet(((g^{-1}f))(c)\bullet m)$$

Wegen $f \in C^* = \mathrm{Hom}(C, \mathbb{Z})$ und wegen der G-Multiplikation in C* ist $g^{-1}f$ die Abbildung mit $(g^{-1}f)(c) = g^{-1}\bullet f(gc) = f(gc)$[24]. Damit ist

$$(g\bullet\varphi(c\otimes m))(f) = g\bullet(f(gc)\bullet m) = f(gc)\bullet(gm) = \varphi((gc)\otimes(gm))(f) = \varphi(g\bullet(c\otimes m))(f)$$

Da dies für jedes f gilt, folgt

$$g\bullet\varphi(c\otimes m) = \varphi(g\bullet(c\otimes m)).$$

Wir haben gezeigt, φ ist ein G-Homomorphismus.

<u>2. Schritt</u>. φ ist bijektiv.

Wir werden zeigen, die Abbildung ist bijektiv für jeden freien $\mathbb{Z}$-Modul C endlichen Rangs. Da beide Seiten mit direkten Summen kommutieren, können wir dazu annehmen,

$$C = \mathbb{Z}.$$

Die linke Seite ist dann isomorph zu M,

$$M \cong \mathbb{Z}\otimes M,\ m \mapsto 1\otimes m,$$

---

[23] Die G-Modul-Struktur von C⊗M ist durch die von Hom(C*, M) eindeutig festgelegt: für g∈G ist das g-fache der Abbildung

$$f \mapsto f(c)\cdot m$$

gerade deren g-Konjugiertes, d.h. die Abbildung

$$f \mapsto g\cdot((g^{-1}f)(c)\cdot m) = g(f(gc)\cdot m) = f(gc)\cdot gm.$$

Letztere ist das Bild des Elements (gc)⊗(gm) ∈C⊗M. Die Operation von G auf C⊗M ist damit die folgende:

$$G \times C\otimes M \to C\otimes M,\ (g, c\otimes m) \mapsto (gc)\otimes(gm).$$

[24] denn G operiert auf $\mathbb{Z}$ trivial

und die rechte Seite ebenfalls[25],

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^*, M) \cong M,\ f \mapsto f(\mathrm{Id}).$$

Identifizieren wir so beide Seiten mit M, so bekommt φ die Gestalt

$$M \to \mathbb{Z}\otimes M \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^*, M) \to M,\ m \mapsto 1\otimes m \mapsto (f\mapsto f(1)\cdot m) \mapsto m,$$

d.h. wir erhalten die identischen Abbildung, welche in der Tat bijektiv ist.
QED.

3.7.2 Beweis von 3.7

Beweis. Die Aussag ist trivial für $n \ge 1$. Zum Beweis der verbleibenden Aussagen unterscheiden wir die Fälle

$$n = 0,\ n = -1,\ n \le -2$$

<u>1. Fall</u>: $n \le -2$.
Aus dem Lemma ergibt sich, daß die folgende Komposition ein Isomorphismus ist.

$$C\otimes_G M \cong (C\otimes M)_G \xrightarrow{N^*} (C\otimes M)^G \to \mathrm{Hom}(C^*, M)^G = \mathrm{Hom}_G(C^*,M). \tag{1}$$

$$[c\otimes m] \mapsto N\cdot(c\otimes m) \mapsto (f\mapsto \sum_{g\in G} f(gc)\cdot g\, m$$

Die linke Isomorphie ergibt sich aus Bemerkung 1.4 (iv).

Man beachte, N^* ist ein Isomorphismus (nach 3.3), weil der Modul $C\otimes M$ induziert ist, d.h. seine Tate-Kohomologie ist Null, d.h. Kern und Kokern von N^* sind trivial. Damit ist für $n \le -2$, wenn P die Standard-Resolvende bezeichnet,

$$\begin{aligned}
\check{H}^n(G, M) &= H_{-n-1}(G,M) && \text{(nach Definition von } \check{H}^n \text{ für } n \le -2)\\
&= H_{-n-1}(P\otimes_G M) && \text{(nach Definition der } H_i)\\
&= H_{-n-1}(\mathrm{Hom}_G(P^*, M)) && \text{(wegen (1))}\\
&= H^n(\mathrm{Hom}_G(L_*, M))
\end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt wegen $L_n = P^*_{-n-1}$ für $n < 0$ (nach Formel (4) von 3.7.

<u>2. Fall</u>: $n = -1, 0$:
Die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_G(P_{-1}, M) \to \mathrm{Hom}_G(P_0 , M),\ f \mapsto f^*(\varepsilon^*\circ\varepsilon) = f\circ\varepsilon^*\circ\varepsilon, \tag{2}$$

kommt von der Komposition

$$P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^* \xrightarrow{\varepsilon^*} P_{-1} = P_0^*,\ p \mapsto \varepsilon(p) = \varepsilon(p)\cdot\mathrm{Id} \mapsto (\varepsilon(p)\cdot\mathrm{Id})\circ\varepsilon = \varepsilon(p)\cdot\varepsilon$$

Wir identifizieren den Modul

$$\mathrm{Hom}_G(P_{-1}, M) = \mathrm{Hom}_G(P_0^*, M)$$

mit Hilfe des Isomorphismus (1) mit dem Tensor-Produkt $P_0\otimes_G M$. Abbildung (2) bekommt dann die Gestalt

$$P_0\otimes_G M \to \mathrm{Hom}_G(P_0^* , M) \to \mathrm{Hom}_G(P_0 , M), \tag{3}$$

$$p\otimes m \mapsto (f \mapsto \sum_{g\in G} f(gp)\cdot gm)) \mapsto (\ p' \mapsto \varepsilon(p')\cdot\varepsilon \mapsto \varepsilon(p')\varepsilon(p)\ N \cdot m)$$

Man beachte, die Zuordnung rechts entsteht aus der Zuordnung

---

[25] $\mathbb{Z}^*$ besteht aus der identischen Abbildung $\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ und deren Vielfachen.

$$f \mapsto \sum_{g\in G} f(gp)\cdot g\, m$$

in der Mitte durch Zusammensetzen mit der Abbildung

$$p' \mapsto \varepsilon(p')\cdot\varepsilon.$$

Wir haben für f unter der Summe $\varepsilon(p')\cdot\varepsilon$ einzusetzen und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{g\in G} f(gp)\bullet gm &= \sum_{g\in G} \varepsilon(p')\cdot\varepsilon(gp)\bullet g\, m \\ &= \sum_{g\in G} \varepsilon(p')\cdot\varepsilon(p)\bullet g\, m \quad (\varepsilon \text{ ist G-invariant}) \\ &= \varepsilon(p')\varepsilon(p) \sum_{g\in G} g \cdot m \\ &= \varepsilon(p')\varepsilon(p)\, N\cdot m\end{aligned}$$

Abbildung (3) bekommt also die Gestalt

$$p\otimes m \mapsto (p' \mapsto \varepsilon(p')\bullet\varepsilon(p)\bullet N\bullet m)$$

Wir erhalten so eine Zerlegung von Abbilung (3) in drei Homomorphismen

$$P_0\otimes_G M \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} \mathbb{Z}\otimes_G M = M_G \xrightarrow{N^*} M^G = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_G(P_0, M)$$

$$p\otimes m \quad \mapsto \varepsilon(p)\cdot m \bmod I_G M \quad \mapsto (z \mapsto z\cdot\varepsilon(p)N\cdot m) \mapsto (p' \mapsto \varepsilon(p')\varepsilon(p)Nm),$$

wobei der erste surjektiv und der letzte injektiv ist. Bei der Berechnung des Kerns von (2) können wir die Injektion weglassen, bei der Berechnung des Bildes die Surjektion.
.
Es folgt

$$\mathrm{Ker}\,(2) = \mathrm{Ker}(P_0\otimes_G M \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} \mathbb{Z}\otimes_G M = M_G \xrightarrow{N^*} M^G) \tag{4}$$

$$\mathrm{Im}\,(2) = \mathrm{Im}(M_G \xrightarrow{N^*} M^G)\ (\subseteq \mathrm{Hom}_G(P_0, M)) \tag{5}$$

also

$$\begin{aligned} H^0(\mathrm{Hom}(L,M)) &= \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_G(P_0, M) \to \mathrm{Hom}_G(P_1, M))/\mathrm{Im}\,(2) \\ &= \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M)/\mathrm{Im}\,(2) \qquad \text{(Linksexaktheit von Hom)} \\ &= M^G/\mathrm{Im}\, N^* \qquad \text{(nach (5))} \\ &= \mathrm{Koker}\, N^* \\ &= \hat{H}^0(G, M) \end{aligned}$$

und

$$H^{-1}(\mathrm{Hom}(L,M)) = \mathrm{Ker}\,(3)/\mathrm{Im}(P_1\otimes_G M \to P_0\otimes_G M)$$

$$= \mathrm{Ker}(P_0\otimes_G M \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} \mathbb{Z}\otimes_G M = M_G \xrightarrow{N^*} M^G)/\mathrm{Im}(P_1\otimes_G M \to P_0\otimes_G M)$$

$$=^{26} \mathrm{Ker}(P_0\otimes_G M \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} \mathbb{Z}\otimes_G M = M_G \xrightarrow{N^*} M^G)/\mathrm{Ker}(P_0\otimes_G M \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} \mathbb{Z}\otimes_G M)$$

[26] weil $\otimes$ rechtsexakt ist.

$= \mathrm{Ker}(N^*: M_G \to M^G)$

$= \hat{H}_0(G, M) = \hat{H}^{-1}(G, M)$

QED.

3.8 Verschiebung des Kohomologischen Grades

Seien G eine endliche Gruppe und M ein G-Modul. Dann ist M ein Teilmodul eines koinduzierten Moduls, sagen wir M',

$$0 \to M \to M'$$

und Faktormodul eines induzierten Moduls, sagen wir M",

$$M'' \to M \to 0.$$

Wir haben damit kurze exakte Sequenzen von G-Moduln

$$0 \to M \to M' \to C \to 0$$

$$0 \to K \to M'' \to M \to 0$$

deren mittlere Moduln koinduziert bzw. induziert sind, also kohomologisch trivial bezüglich der Tate-Kohomologie,

$$\hat{H}^q(G, M') = \hat{H}^q(G, M'') = 0 \text{ für jedes } q \in \mathbb{Z}$$

(nach der Bemerkung von 4.6.5). Auf Grund der langen Kohomologie-Sequenz von 3.6 bestehen damit natürliche Isomorphismen

$$\hat{H}^q(G, M) \cong \hat{H}^{q-1}(G, C) \cong \hat{H}^{q+1}(G, K).$$

Dies wird uns im folgenden oft in die Lage versetzen, Aussagen über die Tate-Kohomologie durch Induktion nach q zu beweisen und entsprechende induktive Konstruktionen durchzuführen.

3.9 Restriktion und Korestriktion für die Tate-Kohomologie

Sei H eine Untergruppe der endlichen Gruppe G. Dann ist die Restriktion

$$\mathrm{Res}: H^q(G, M) \to H^q(H, M)$$

für jedes $q \geq 0$ definiert. Für die Tate-Kohomologie,

(1) $$\mathrm{Res}: \hat{H}^q(G, M) \to \hat{H}^q(H, M)$$

ist sie damit für jedes $q \geq 1$ definiert. Da Res mit den Zusammenhangshomomorphismen zu kurzen exakten Sequenzen kommutiert, erhalten wir damit eine Definition von Res für beliebige

$$q \in \mathbb{Z},$$

(denn jedes $\hat{H}^q$ läßt sich nach 4.6.9 als ein $\hat{H}^{q+1}$ auffassen).

Analog ist die Korestriktion

$$\mathrm{Cor}: H_q(H, M) \to H_q(G, M)$$

für jedes $q \geq 0$ definiert, also nach 4.6.5

$$\mathrm{Cor}: \hat{H}^q (H, M) \to \hat{H}^q (G, M)$$

für jedes $q \leq -2$. Da Cor mit den Zusammenhangshomomorphismen zu kurzen exakten Sequenzen kommutiert, erhalten wir damit eine Definition von Cor für beliebige

$$q \in \mathbb{Z},$$

(denn jedes $\hat{H}^q$ läßt sich nach 4.6.9 als ein $\hat{H}^{q-1}$ auffassen).

3.10 Beschreibung von Restriktion und Korestriktion im Grad 0

Seien G eine endliche Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe, M ein G-Modul und

$$\{g_i\}_{i=1}^{\ell}$$

ein Repräsentantensystem von G modulo H,

$$G = g_1 H \cup \ldots \cup g_\ell \text{ (disjunkte Vereinigung)}$$

Dann gilt:

(i) Res: $\hat{H}_0(G, M) \to \hat{H}_0(H, M)$ wird durch die folgende Abbildung induziert.

$$N'_{G/H}: M_G \to M_H, [m] \mapsto [\sum_{i=1}^{\ell} g_i^{-1} m].$$

(ii) Cor: $\hat{H}^0(H, M) \to \hat{H}^0(G, M)$ wird durch die folgende Abbildung induziert.

$$N_{G/H}: M^H \to M^G, [m] \mapsto \sum_{i=1}^{\ell} g_i m.$$

Beweis. Wir beschränken uns auf den Beweis von (i). Der Beweis von (ii) ist analog zu dem von (i). Sei

$$0 \to M' \to M^* \to M \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von G-Moduln mit

M* induziert über G (also auch über H).

Dann ist die Abbildung

$$\mathrm{Res} = \mathrm{Res}^{-1}: \hat{H}^{-1}(G,M) = \hat{H}_0(G, M) \to \hat{H}_0(H, M) = \hat{H}^{-1}(H,M)$$

definiert durch die Kommutativität des oberen Vierecks von

$$\begin{tikzcd}
M_G & M_H \\
\hat{H}^{-1}(G,M) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\mathrm{Res}^{-1}"] \arrow[d, "\delta_G", "\cong"'] & \hat{H}^{-1}(H,M) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[d, "\delta_H"', "\cong"] \\
\hat{H}^0(G,M') \arrow[r, "\mathrm{Res}^0"] & \hat{H}^0(H,M') \\
M'^G \arrow[u, two heads] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & M'^H \arrow[u, two heads]
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Zur Berechnung von Res = Res^{-1} müssen wir die Isomorphismen δ_G und δ_H beschreiben. Der Zusammenhangshomomorphismus δ_G ist gerade der des Schlangen-Lemmas zum Diagramm (2) von 3.6 (mit M', M* und M anstelle von M', M, M''):

$$\begin{tikzcd}
 & & \hat{H}^{-1}(G,M') \arrow[r, "\alpha'"] & \hat{H}^{-1}(G,M^*) \arrow[r] & \hat{H}^{-1}(G,M) & \\
\ldots \arrow[r] & H_1(G,M) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d] & H_0(G,M') \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "N'^*"] & H_0(G,M^*) \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[r] \arrow[d, "N^{**}"] & H_0(G,M) \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[r] \arrow[d, "N^*"] & 0 \arrow[d] \\
 & 0 \arrow[r] & H^0(G,M') \arrow[r] & H^0(G,M^*) \arrow[r, "\beta"] & H^0(G,M) \arrow[r, "\delta^1"] & H^1(G,M) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd} \tag{2}$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{H}^0(G,M') & \longrightarrow & \hat{H}^0(G,M^*) & \xrightarrow{\beta'} & \hat{H}^0(G,M) \end{array}$$

Für

$$[m] \in \hat{H}^{-1}(G, M) \ (\subseteq M_G)$$

wählen wir einen Repräsentanten $m \in M$ und ein Urbild von $m^* \in M^*$ von m. Weil [m] im Kern von N^* liegt, repräsentiert $N\bullet m^* \in M^{*G}$ ein Element aus dem Kern von β' und damit ein Element von $\hat{H}^0(G,M')$. Es gilt

$$\delta_G[m] = [N_G\bullet m^*] \tag{3}$$

Die analoge Argumentation mit H anstelle von G liefert

$$\delta_H[m] = [N_H m^*] \tag{4}$$

Die gesuchte Abbildung $Res^{-1} = Res$ ist die eindeutigbestimmte Abbildung mit

$$\delta_H Res([m]) = \delta_G[m] \text{ für jedes } m \in M$$

Es reicht zu zeigen, diese Relationen bestehen mit $N'_{G/H}$ anstelle von Res.

Es gilt

$$\begin{aligned} \delta_H N'_{G/H}([m]) &= \delta_H[\sum_{i=1}^{\ell} g_i^{-1}\cdot m] && \text{(nach Definition von } N'_{G/H}) \\ &= [N_H\bullet \sum_{i=1}^{\ell} g_i^{-1}\cdot m^*] && \text{(nach (4))} \\ &= [\sum_{h\in H} \sum_{i=1}^{\ell} h\, g_i^{-1}\cdot m^*] \\ &=^{27} [\sum_{g\in G} gm^*] \\ &= [N_G\bullet m] \\ &= \delta_G[m]. && \text{(nach (3))} \end{aligned}$$

QED.

3.10 Beispiel

Wir betrachten den Fall $q = -2$ und $A = \mathbb{Z}$. Dann ist

---

[27] Weil die g_i ein Repräsentantensystem von G/H in G bilden, ist

$$G = \bigcup_i g_i H.$$

Wir wenden die Bijektion $G \longrightarrow G,\ x \mapsto x^{-1}$ an und erahalten

$$G = \bigcup_i Hg_i^{-1}$$

$$\hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}) = H_1(G, \mathbb{Z}) \cong G/G'$$

die Faktorkommutatorgruppe und die Restriktion ist eine Abbildung

$$\mathrm{Res}: G/G' \to H/H',$$

welche sich wie folgt beschreiben läßt. Die abelsche Gruppe G/G' ist dual zu ihrer Charaktergruppe Hom(G, $\mathbb{C}^*$). Deshalb ist Res dual zu einem Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*) \to \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*).$$

Dieser genügt der folgenden Abbildungsvorschrift

$$\rho \mapsto \det(i_*\rho)/\det(i_*1).$$

Dabei bezeichnet

$$i_*\rho: G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}[H]}\mathbb{Z}[G])$$

die durch die eindimensionale Darstellung ρ: H $\to$ C* = Aut(C) induzierte Darstellung.

Man beachte, durch ρ wird $\mathbb{C}$ ein H-Modul. Der Homomorphismus $i_*\rho$ definiert gerade die zugehärige induzierte G-Modul-Struktur.

3.11 Eine Zusammensetzung von Restriktion und Korestriktion

Seien G eine endliche Gruppe und H $\subseteq$ G eine Untergruppe vom Index

$$n = (G:H)$$

und M ein G-Modul.
Dann ist die Zusammensetzung

$$\hat{H}^q(G, M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \hat{H}^q(H, M) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} \hat{H}^q(G, M)$$

für jedes q gerade die Multiplikation mit n,

$$\mathrm{Cor}\circ\mathrm{Res} = n.$$

Beweis. Der Fall q = 0. Nach Definition von n gibt es ein Repräsentantensystem

$$\{g_i\}_{i=1}^{n}$$

der Restklassen modulo H in G. Nach 4.6.11 (ii) ist die Korestriktion für q = 0 gerade die Abbildung, für welche das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc}
\hat{H}^0(H,M) & \xrightarrow{\mathrm{Cor}} & \hat{H}^0(G,M) \\
\uparrow & & \uparrow \\
M^H & \to & M^G \\
m & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} g_i m
\end{array}$$

Die Restriktion dagegen ist induziert durch natürliche Einbettung $M^G \subseteq M^H$. Für $m\in M^G$ gilt aber

$$\sum_{i=1}^{n} g_i m = \sum_{i=1}^{n} m = n\cdot m,$$

d.h. Cor°Res: $\hat{H}^0(G, M) \to \hat{H}^0(G, M)$ ist die Multiplikation mit n.
Der Fall q $\neq$ 0. Für jedes q kann Cor°Res: $\hat{H}^q(G, M) \to \hat{H}^q(G, M)$ nach 4.6.9 mit einer Abbildung der Gestalt Cor°Res: $\hat{H}^0(G, M') \to \hat{H}^0(G, M')$ identifiziert werden (mit geeignet gewähltem M').
QED.

3.12 Die Gruppen-Ordnung annulliert die Kohomologie
Seien G eine endliche Gruppe der Ordnung N. Dann gilt

$$N\cdot H^n(G, M) = 0$$

für jedes n > 0 und jeden G-Modul M.
Beweis. Nach 3.11 mit H = {1} ist die Zusammensetzung

$$\hat{H}^q(G, M) \xrightarrow{\text{Res}} \hat{H}^q(1, M) \xrightarrow{\text{Cor}} \hat{H}^q(G, M)$$

gerade die Multiplikation mit

$$N = (G:1).$$

Diese Zusammensetzung ist die Null-Abbildung, denn die Tate-Kohomologie

$$\hat{H}^q(1, M)$$

der trivialen Gruppe ist trivial.
QED.

Literatur

[1] Brown, K.S.: Cohomology of groups, Springer, New York Heidelberg Berlin 1982

[2] Cartan, H., Eilenberg, S.: Homological algebra, Princeton University Press, Princeton 1956

[3] Cassels, J.W.S., Fröhlich, A.: Algebraic number theory, Academic Press, London New York 1967

[4] Gille, P., Szamuely, T.: Central simple algebras and Galois cohomology, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 165, Cambrigde University Press, Cambridge 2017
http://www.cambridge.org/uk/catalogue.asp?isbn=9780521861038

Index

Inhalt