Einführung in die Etal-Kohomologie
frei nach J.S. Milne: Etale Cohomology
Vorlesung im Sommer-Semester 2016
Di 15-17 Uhr, Raum 3.13 SG verlegt auf Mi 15-17 Uhr, SG 2-14
Vorlesung im Winter-Semester 2016/17
Do 15-17 Uhr, SG 2-14
Vorlesung im Sommer-Semester 2017
Do 15-17 Uhr, SG 3-11
Vorlesung im Winter-Semester 2017/18
Fr 15-17 Uhr, SG 1-12
Vorlesung im Sommer-Semester 2018
Do 15-17 Uhr, SG 1-14

Bezeichnungen

Ab Kategorie der abelschen Gruppen

A^h Henselisierung des lokalen Rings A, vgl. 2.4.8.

A^{sh} strenge Henselisierung des lokalen Rings A, vgl. Bemerkung 2.4.15 (ii).

$\mathbf{Bilin}_A(M', M'', N)$ Gruppe der bilinearen Morphismen $M' \times M'' \longrightarrow N$ über der Garbe A von kommutativen Ringen mit 1, vgl. 4.5.12.

$\mathbf{C}(F)$ Godement-Auflösung der Etal-Garbe F, vgl. 5.1.17 (ii).

Cat T die Kategorie einer Grothendieck-Topologie, vgl. 1.3.

Cov T die Klasse der Überdeckungen einer Grothendieck-Topologie, vgl. 1.3.

$Cov_T(X)$ die Menge der Überdeckungen des Objekts X von Cat T bezüglich der Topologie T.

$\check{C}(\underline{U}, P)$ Cech-Komplex der Prägarbe P bezüglich der Überdeckung $\underline{U}$, vgl. 5.2.1.

D_X Garbe der Weil-Divisoren auf dem Etal-Situs X_{et}, vlg. 4.4.7.

Div_X Garbe der Cariter-Divisoren auf dem Etal-Situs X_{et}, vlg. 4.4.7.

E/X die Kategorie der E-Schemata über dem Schema X, vgl. 1.3.9.

$(E/X)_E$ der kleine E-Situs auf dem Schema X, vgl. 1.3.9

Ens Kategorie der Mengen

$Ext^i_S(F, G)$ i-te Ext-Gruppe der Garben F und G, vgl. 5.1.3

$\underline{Ext}^i_S(F, G)$ i-te Ext-Garbe der Garben F und G, vgl. 5.1.3

$\mathbf{F}_M$ die konstante Garbe zur abelschen Gruppe M auf dem Situs X_E, vgl. 4.3.13(i).

FEt / X Kategorie der Schemata über dem Schema X, welche endlich und etale sind über X, vg. 3.2.1.

F(S) die von der Prägarbe von Mengen S über einer Garbe von kommuativen Ringen mit 1 erzeugte freie Modul-Garbe, vgl. 4.5.12.

$\mathbb{G}_a$ die additive Gruppe, vgl. 4.1.2 (b).

$\mathbb{G}_{a,X}$ die additive Gruppe über dem Schema X, vgl. Bemerkung 4.2.4 (iii).

$\mathbb{G}_m$ die multiplikative Gruppe, vgl. 4.1.2 (c).

G-sets Kategorie der G-Mengen über der proendlichen Gruppe G, vgl. 4.2.7.

$\Gamma_c(X, F)$ Gruppe der auf X definierten Schnitte der Garbe F mit kompakten Träger, vgl. 5.1.26

H^0_A Hilbert-Funktion des lokalen Rings A bezügliche dessen maximalen Ideals, vgl. den Beweis des Lemmas zu Bemerkung 1.3.8 (iii).

$H^i(X_E, ?)$ i-te Kohomologie-Gruppe des Situs X_E mit Koeffizieneten in der Garbe F, vgl. 5.1.3

$\underline{H}^i(X_E, F)$ i-te Kohomologie-Garbe des Situs X_E mit Koeffizienten in der Garbe F, vgl. 5.1.3

$H^p_c(X, F)$ p-te Kohomologie der Varietät X mit kompakten Träger und Koeffizienten in der Garbe F, vgl. 5.1.26.

$\overset{\vee}{H}{}^p(\underline{U}, P)$ Cech-Kohomologie der Prägarbe P bezüglich der Überdeckung $\underline{U}$, vgl. 5.2.1.

$\overset{\vee}{H}{}^p(X_E, P)$ Cech-Kohomologie der Prägarbe P, vgl. 5.2.4.

$\overset{\vee}{\underline{H}}{}^p(X_E, P)$ Prägarbisierte Cech-Kohomologie der Prägarbe P, vgl. Bemerkung 5.2.4(ii).

$\overset{\vee}{\underline{H}}{}^p(P)$ Prägarbisierte Cech-Kohomologie der Prägarbe P, vgl. Bemerkung 5.2.4(ii).

$i^! F$ Teilgarbe der Etal-Garbe F der Schnitt mit Träger in einen abgeschlossenen Teilschema, vgl. 4.5.7.

$j_! F$ Fortsetzung der Etal-Garbe F durch Null, vgl. 4.5.7.

K_s separabler Abschluß des Körpers K.

LFT/X Kategorie der Schemata über dem Schema X, welche lokal endlichen Typs über X sind, vgl. 1.3.9

$(LFT/X)_E$ der große E-Situs auf X, vgl. 1.3.9.

M_G^H induzierter G-Modul bezüglich der abgeschlossenen Untergruppe $H \subseteq G$ der proendlichen Gruppe G, vgl. 4.4.2 (v).

$M' \otimes_A M''$ Tensorprodukt der Modul-Garben M', M'' über der Garbe A von kommuativen Ringen mit 1, vgl. 4.5.12.

$\mu(M)$ minimale Anzahl der Erzeuger des Moduls M über einem lokalen Ring, vgl. den Beweis des Lemmas zu Bemerkung 1.3.8 (iii).

$\mathcal{O}_{X,\overline{x}}$ $:= \mathcal{O}^{sh}_{X,\overline{x}}$, lokaler Ring des Schemas X im geometrischen Punkt $\overline{x}$ von x, vgl. Bemerkung 2.4.15(viii).

$\mathcal{O}^{sh}_{X,\overline{x}}$ strenge Henselisierung des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ des Schemas X im Bild x des geometrischen Punkts $\overline{x}$ von X, vgl. Bemerkung 2.4.15(viii).

$\mathbf{P}_M$ die konstante Prägarbe mit dem Wert M auf dem Situs X_E, vgl. 4.1.2 (a).

PS die von der Prägarbe von Mengen S über einer Prägarbe kommutativer Ringe mit 1 erzeugte freie Modul-Prägarbe, vgl. 4.5.12.

$P|_{X'}$ inverses Bild der Prägarbe P auf $(C/X)_E$ bezüglich eines stetigen Morphismus $\pi: X' \longrightarrow X$ im Fall $C'/X' = (C/X)/X'$. vgl. Beispiel 4.3.4 (ii).

$P_{\overline{x}}$ Halm der Prägarbe P auf X_{et} im geometrischen Punkt $\overline{x} \longrightarrow X$ von X, vgl. 4.3.7.

$\mathbf{P}(X_E, A)$ Kategorie der Modul-Prägarben über der Präarbe A von kommutativen Ringen mit 1 auf dem Situs X_E, vgl. 4.5.12.

$\pi_1(X, \bar{x})$ fundamentale Gruppe des zusammenhängenden Schemas X im geometrischen Punkt $\bar{x}$, vgl. 3.2.3.

$\pi_1(X^{an}, x)$ analytischen fundamentale Gruppe der komplexen Mannigfaltigkeit X im Punkt c, vgl. Bemerkung 3.2.4 (iii).

$\pi_1^t(X, \bar{x})$ zahme fundamentale Gruppe des Schemas X im geometrischen Punkt $\bar{x}$, vgl. 3.3.5.

$\pi_p(P')$ direktes Bild der Prägarbe P' auf $(C'/X')_E$ bezüglich des stetigen Morphismus π: $X'_E, \longrightarrow X_E$, vgl. Bemerkung 4.3.1(ii).

$R^i f$ i-ter rechtsabgeleiteter Funktor zum linksexakten Funktor f, vgl. 5.1.0

$R^i\pi_* F$ i-tes höheres direktes Bild der Garbe F beim stetigen Situs-Morphismus π, vgl. 5.1.3

Sch Kategorie der lokal noetherschen Schemata, vgl. 1.3.8

Q(A) voller Quotientenring des kommutativen Rings A mit 1, vgl. 4.4.7.

$Sh_T(C)$ Kategorie der Garben auf der Topologie oder Prätopologie T mit Werten in der Kategorie mit Faserprodukten C, vgl.

$s_{\bar{x}}$ der Keim des Schnittes $s \in P(U)$ einer Prägarbe P auf dem Schema X über einer Etal-Umgebung U im geometrischen Punkt $\bar{x} \longrightarrow U$, vgl. Bemerkung 4.3.7(iii).

$\mathbf{S}(X_E, A)$ Kategorie der Modulgarben über der Garbe A von kommutativen Ringen mit 1 auf dem Situs X_E, vgl. 4.5.12.

T(X) Kategorie der Tripel zu einer Zerlegung des Schemas X in ein abgeschlossenes Teilschema und dessen Komplement, vgl. 4.5.1.

W(F) die Prägarbe auf X_E zum $\mathcal{O}_X$-Modul F, vgl. 4.1.2 (d)

$X_E = (\mathcal{C}/X)_E$ der E-Situs der Schema-Kategorie $\mathcal{C}/X$, vgl. 1.3.9.

$X_{ét}$ der Etale-Situs auf dem Schema X, vgl. 1.3.9.

X_{fl} der flache Situs auf dem Schema X, vgl. 1.3.9.

X_{Zar} der Zariski-Situs auf dem Schema X, vgl. 1.3.9

X^p Menge der Punkte der Dimension p des Schemas X, vgl. 4.5.10.

5. Kohomologie

5.1. Definition und grundlegende Eigenschaften

5.1.0 Abgeleitete Funktoren

Im folgenden nehmen wir an, daß alle Funktoren zwischen abelschen Kategorien additiv sind.

Sei A eine abelsche Kategorie. Ein Objekt I von A heißt injektiv, wenn der Funtor

$$\mathrm{Hom}(?, I): A \longrightarrow Ab, M \mapsto \mathrm{Hom}(M, I),$$

exakt ist. Man sagt, A besitzt genügend viele injektive Objekte, wenn es für jedes Objekt M von A einen Monomorphismus $M \longrightarrow I$ mit I injektiv gibt.

Seieen A eine abelsche Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten und

$$f: A \longrightarrow B$$

ein linksexakter Funktor mit Werten in einer abelschen Kategorie B. Unter den zu f rechtsabgeleiteten Funktoren versteht man eine Folge von Funktoren

$$R^i f: A \longrightarrow B, \; i = 0, 1, 2, ...$$

mit folgenden Eigenschaften.

(i) $R^0 f = f$

(ii) $R^i f(I) = 0$ für $i > 0$ und I injektiv.

(iii) Für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

in A existieren Morphismen

$$\partial^i: R^i f(M'') \longrightarrow R^{i+1} f(M'), \; i = 0, 1, 2, ...$$

derart daß die folgende Sequenz exakt ist.

$$...\longrightarrow R^i f(M) \longrightarrow R^i f(M'') \xrightarrow{\partial^i} R^{i+1} f(M') \longrightarrow R^{i+1} f(M) \longrightarrow ...$$

(iv) Die Abbildung von (iii), welche jeder kurzen exakten Sequenz der Kategorie A eine lange exakte Sequenz der Kategorie B zuordnet ist funktoriel.

Bemerkungen

(i) Für jeden linksexakten Funktor $f: A \longrightarrow B$ von abelschen Kategorien A, B, wobei A genügend viele injektive Objekte besitzt, existieren die rechtsabgeleiteten Funktoren und sind einschließlich der Morphismen ∂^i bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt, siehe zum Beispiel

Bucur, I., Deleanu, A.: Introduction to the theory of categories and functors, John Wiley & Sons, London, New York, Sydney, 1968

(ii) Ein Objekt M von A heißt azyklisch bezüglich f oder auch f-azyklisch, wenn

$$R^i f(M) = 0$$

gilt für jedes $i > 0$. Sei M ein Objekt von A mit einer f-azyklischen Resolvende, sagen wir,

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N^0 \longrightarrow N^1 \longrightarrow N^2 \longrightarrow ...$$

Das soll bedeuten, die Sequenz ist exakt in A, wobei die Objekte N^i injektiv sein sollen. In dieser Situation sind die Objekte $R^i f(M)$ kanonisch isomorph zur Kohomologie des Komplexes

$$0 \longrightarrow fN^0 \longrightarrow fN^1 \longrightarrow fN^2 \longrightarrow ...$$

(iii) Wir wollen die obigen Ergebnisse auf die Funktoren auf $S(X_E)$ anwenden. Dazu müssen wir zunächst zeigen, daß diese Kategorie genügend viele injektive Objekte besitzt.

5.1.1 Die Kategorie $S(X_E)$ besitzt genügend viele injektive Objekte

Seien X ein Schema und $(C/X)_E$ ein Situs auf X wie in 1.3.9 (d.h. E is eine Menge von Schema-Morphismen, die alle Isomorphismen enthält und invariant unter Komposition

und Basiswechsel ist). Dann besitzt die Kategorie $S(X_E)$ der Garben auf $(C/X)_E$ genügend viele injektive Objekte.

Bemerkung
Wir geben hier zwei Beweise für die obige Aussage an. Einen für den Etal-Situs und einen für den allgemeinen Fall. Wir benötigen dafür einige Lemmata.

5.1.1.1 Lemma

(i) Das Produkt injektiver Objekte ist injektiv.

(ii) Sei f: A $\longrightarrow$ B ein Funktor zwischen abelschen Kategorien, der einen linksadjungierten Funktor g: B $\longrightarrow$ A besitzt. Ist g exakt, so überführt f injektive Objekte in injektive Objekte.

Insbesondere überführt für jeden stetigen Situs-Morphismus π der Funktor π_* injektive Objekte in injektive Objekt, falls π^* exakt ist.

Beweis von Lemma 5.1.1.1. Zu (i). Die gilt auf Grund des natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}\,(?,\ \prod_{i\in I} M_i\ ) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(?,\ M_i)$$

und weil das direkte Produkt von exakten Sequenzen abelscher Gruppen exakt ist.
Zu (ii). Sei I ein injektives Objekt von A. Dann ist der Funktor

$$B \longrightarrow Ab,\ M \mapsto \mathrm{Hom}(M, fI)$$

isomorph zum Funktor

$$B \longrightarrow Ab,\ M \mapsto \mathrm{Hom}(gM, I).$$

Letztere ist exakt (als Zusammensetzung exakter Funktoren). Also ist fI injektiv in B.
QED (Lemma 5.1.1.1).

5.1.1.2 Beweis im Falle des Etal-Situs

Sei $\overline{x} \longrightarrow X$ ein geometrischer Punkt von X. Die Kategorie $\mathbf{S}(\overline{x}_{et})$ ist isomorph zu **Ab**, besitzt also genügend viele injektive Objekte. Sei jetzt ein beliebiges Objekt von $\mathbf{S}(X_{et})$ gegeben, sagen wir

$$F \in |\mathbf{S}(X_{et})|.$$

Wir haben eine injektives Objekti dieser Kategorie zu finden, welches F enthält.

Für jeden Punkt $x \in X$ fixieren wir einen Monomorphismus

$$u_x^* F \hookrightarrow F'_x$$

der Garbe $u_x^* F$ mit Werten in einer injektiven Garbe F'_x von $\mathbf{S}(\overline{x}_{et})$. Dabei bezeichne u_x den natürlichen Morphismus

$$u_x : \overline{x} = \mathrm{Spec}\ \kappa(x)_s \longrightarrow X.$$

Betrachten wir die beiden folgenden Garben auf $\mathbf{S}(X_{et})$

$$F^* := \prod_{x\in X} u_{x*} u_x^* F$$

$$F^{**} := \prod_{x \in X} u_{x*} F'_x$$

Durch Abbilden jedes Schnittes auf die Familie seiner Keime erhalten wir einen Morphismus

$$F \longrightarrow F^*$$

Außderdem induzieren dieEinbettungen (1) einen Mrophismus

$$F^* \longrightarrow F^{**}.$$

Beide Morphismen sind Monomorphismen (da sie Monomorphismen auf den Halmen induzieren, vgl. 4.3.10 (ii)(d)). Es reicht zu zeigen, F^{**} ist injektiv. Nach Lemma 5.1.1.1(i) reicht es zu zeigen,

$$u_{x*} F'_x$$

ist injektiv für jedes $x \in X$. Nach Lemma 5.1.1.1(ii) reicht es zu zeigen,

$$u_x^*: \mathbf{S}(X_{et}) \longrightarrow \mathbf{S}(\overline{x}_{et}).$$

Das ist aber der Fall nach Bemerkung 4.3.7 (i)[1] und Bemerkung 4.3.9 (iii)[2].
Damit ist die Behaupting bewiesen.

5.1.1.3 Kriterium für die Existenz genügend vieler injektiver Objekte

Sei C eine abelsche Kategorie, die dem Axiom AB5[3] genügt und eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von erzeugenden Objekten[4] besitzt. Dann besitzt C genügend viele injektive Objekte.
Beweis siehe Theorem 1.10.1 in A. Grothendieck, Sur quelques points d'algébre homologique, Tôhoku Mathematical Journal, 9 (1957),119-221.

Bemerkung

Im Buch von Milne wird zusätzlich gefordert, daß C dem Axiom AB3* genügt und auf einen Satz verwiesen, der C als Teilkategorie einer Modul-Kategorie beschreibt und im Buch von Bucur & Deleanu bewiesen wird.

5.1.1.4 Beweis im allgemeinen Fall

Nach 5.1.1.3 reicht es zu zeigen, daß $\mathbf{S}(X_E)$ eine Familie von erzeugenden Objekten besitzt (AB5 ist erfüllt nach 4.3.10 (v)). Für jedes Objekt

$$f: U \longrightarrow X$$

---

[1] Der Übergang zum Prägarben-Halm ist exakt.

[2] Der Übergang zur assoziierten Garbe läßt die Halme unverändert.

[3] Es existieren unendliche direkte Summen und für jede aufsteigende filtrierende Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Teilobjekten eines Objekts A und jedes Teilobjekt B von A gilt

$$(\sum_{i \in I} A_i) \cap B = \sum_{i \in I} (A_i \cap B)$$

[4] Für jedes Objekt A von C und jedes Teilobjekt $B \hookrightarrow A$ gibt es ein $i \in I$ und einen Morphismus $A_i \longrightarrow A$, der sich nicht über B faktorisiert.

Man beachte, die Existenz einer erzeugenden Familie $(A_i)_{i \in I}$ ist äquivalent zur Existenz eines erzeugenden Objekts $A (= \sum_{i \in I} A_i)$ und äquivalent dazu, daß jedes Objekt Faktor-Objekt einer direkten Summe von Exemplaren von A ist.

von C/X bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}_U$ die Garbe

$$\mathbb{Z}_U = f_!\mathbb{Z},$$

wobei $\mathbb{Z}$ die die konstante Garbe auf U_E sei, welche durch die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ definiert werde. Dann gilt

$$\mathrm{Hom}_X(\mathbb{Z}_U , F) = \mathrm{Hom}_U(\mathbb{Z}, F|_U) = F(U).$$

Die Familie der $\mathbb{Z}_U$, wobei U ein Repräsentantensystem einer hinreichend großen Klasse von Isomorphie-Klassen von Objekten von C/X durchläuft, bildet eine Familie von erzeugenden Objekten von $\mathbf{S}(X_E)$. Wir benutzen hier wesentlich die Tatsache, daß diese Klasse tatsächlich eine Menge ist (vgl. die Bemerkung 4.3.2 (iii)).

5.1.2 Der Fall des Spektrums eines Körpers

Sei X = Spec K mit einem Körper K. Dann kann man für die Kategorie

$$S(X_{et}) =^{5} G\text{-mod}$$

als Familie erzeugender Objekte die G-Moduln

$$\mathbb{Z}[G/H]$$

verwenden, wobei H die offenen Untergruppen von G durchläuft.[6]

Sei N ein diskreter G-Modul. In der Kategorie der abelschen Gruppen wählen wir einen Monomorphismus

$$N \hookrightarrow N' \text{ mit } N' \text{ injektiv in } \mathbf{Ab}.$$

Dieser injektive Homomorphismus abelscher Gruppen induziert einen Homomorphismus[7] von diskreten G-Moduln

$$\varphi: N \hookrightarrow M_G(N') = \mathrm{Hom}(G, N'),\ n \mapsto (x \mapsto xn)$$

Dabei bezeichne Hom(G,A) die Menge der stetigen Homomorphismen mit wie folgt definierter Operation von G: es gelte

$$(gf)(x) = f(xg) \qquad (1)$$

für $f: G \longrightarrow A$ stetig, $x \in G$ und $g \in G$. $M_G(N')$ heißt <u>induzierter</u> G-Modul (vgl. Abschnitt I.2.5 in [S 1964] J.-P. Serre: Cohomoloige Galoisienne).

---

[5] die Kategorie der diskreten Moduln über der Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(K_s/K)$ der separablen Abschließung K_s von K.

[6] Für jeden diskreten G-Modul M und jedes $m \in M$ ist der Stabilisator offen, enthält also ein H, d.h. es gibt einen G-Homomorphpismus $\mathbb{Z}[G/H] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[G]\bullet M \subseteq M$. Ist ein echter Teilmodul

$$N \hookrightarrow M$$

gegeben, so wähle man $m \in M - N$.

[7] Die Abbildung φ ist tatsächlich ein G-Homomorphismus, denn nach Definition von φ gilt

$$\varphi(n)(x) = xn \qquad \text{für } n \in N \text{ und } x \in G$$

also

$$\varphi(gn)(x) = xgn \qquad \text{für } n \in N \text{ und } x,g \in G.$$

Aus (1) mit $f = \varphi(n)$ erhalten wir

$$(g\bullet\varphi(n))\,(x) = \varphi(n)(xg) = xgn = \varphi(gn)(x)$$

für jedes $x \in G$, also

$$g\bullet\varphi(n) = \varphi(gn) \text{ für } g \in G \text{ und } n \in N.$$

Aus der Injektivität von N' als abelsche Gruppe folgt die Injektivität[8] von $M_G(N')$ als diskreter G-Modul. Damit ist φ gerade ein Monomoprhismus von G-mod mit Werten in einem injektiven Objekt.

---

[8] Wir wollen zeigen, der Funktor

$$M_G: \mathrm{Ab} \longrightarrow \text{G-mod}, N \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G, N),$$

überführt injektive in injektive Objekte. Dies ist ein linksexakter Funktor. Nach 5.1.1.1 (ii) reicht es zu zeigen, M_G besitzt einen exakten linksadjungierten Funktor. Der Vergiß-Funktor

$$i: \text{G-mod} \longrightarrow \mathrm{Ab}, N \mapsto N,$$

ist exakt. Es reicht also zu zeigen, er ist linksadjungiert zu M_G. Mit anderen Worten, es reicht einen funktoriellen Isomorphismus

$$\alpha: \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(iN, N') \overset{\cong}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_G(N, M_G(N')), f \mapsto \alpha_f$$

für G-Moduln N und abelsche Gruppen N' zu konstruieren.
Wir setzen

$$\alpha_f(n)(x) := f(xn) \text{ für } n \in N \text{ und } x \in G,$$

d.h. für jedes $n \in N$ sei $\alpha_f(n)$ die Abbildung

$$\alpha_f(n): G \longrightarrow N', x \mapsto f(xn).$$

Wir haben zu zeigen, die Abbildung α ist wohldefiniert, d.h. α_f ist eine G-Homomorphismus:

$$\alpha_f(gn) = g \bullet \alpha_f(n) \qquad (1)$$

für $g,x \in G$ und $n \in N$. Betrachten wir die Abbildungsvorschriften der auftretenden Abbildungen:

$\alpha_f(n)$:	$x \mapsto f(xn)$
$g \bullet \alpha_f(n)$:	$x \mapsto \alpha_f(n)(xg) = f(xgn)$
$\alpha_f(g \bullet n)$:	$x \mapsto f(xgn)$

Die erste Zeile ergibt sich aus der Definition von $\alpha_f(n)$. Die zweite aus der Definition der Multiplikation in $M_G(N')$. Die dritte Ziele erhält man aus der ersten durch Ersetzen von n durch gn. Wir vergleichen die beiden letzten Zeilen und sehen, es gilt (1), d.h. α ist wohldefiniert.
Wir haben noch zu zeigen, α ist bijektiv. Dazu reicht es eine Umkehrabbildung

$$\beta: \mathrm{Hom}_G(N, M_G(N')) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(iN, N'), u \mapsto \beta_u.$$

anzugeben. Betrachten wir die Auswertung an der Stelle $1 \in G$, d.h. β_u sei die Abbildung

$$\beta_u : N \longrightarrow N', n \mapsto \beta_u(n) := u_n(1),$$

wobei $u_n \in M_G(N')$ das Bild von $n \in N$ bei der Abbildung u bezeichne.

Für $n \in N$ und jeden Gruppen-Homomorphismus f gilt damit

$$\begin{aligned} \beta_{\alpha_f}(n) &= \alpha_f(n)(1) \text{ (Definition von } \beta_u \text{ mit } u = \alpha_f) \\ &= f(1 \bullet n) \text{ (Definition von } \alpha_f \text{ mit } x = 1) \\ &= f(n), \end{aligned}$$

d.h.

$$\beta_{\alpha_f} = f \text{ für jedes } f,$$

d.h.

$$\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}.$$

Bemerkung zur Existenz genügend vieler projektiver Objekte
Ist in der Situtation von 5.1.2 die Gruppe G unendlich, so ist es vergleichsweise einfach zu zeigen, daß das einzige projektive Objekt von

$$S(X_{et}) = G\text{-mod}$$

der triviale G-Modul ist. Allgemein kommt es selten vor, daß $S(X_{et})$ genügend viele projektive Objekte hat.

5.1.3 Definition der Kohomologie-Funktoren

Seien X ein Schema und $(C/X)_E$ ein Situs auf X wie in 1.3.9 (d.h. E is eine Menge von Schema-Morphismen, die alle Isomorphismen enthält und invariant unter Komposition und Basiswechsel ist).

(i) Der Funktor

$$\Gamma(X, ?): \mathbf{S}(X_E) \longrightarrow \mathbf{Ab},\ F \mapsto F(X),$$

ist linksexakt. Seine rechtsabgeleiteten Funktoren werden mit

$$R^i\Gamma(X, ?) = H^i(X, ?) = H^i(X_E, ?)$$

bezeichnet. Die Gruppe $H^i(X_E, F)$ heißt i-te Kohomologie-Gruppe des Situs X_E mit Koeffizienten in F.

(ii) Für jedes Objekt $U \longrightarrow X$ der Kategorie C/X werden die rechtsabgeleiteten Funktoren des Funktors

$$\Gamma(U, ?): \mathbf{S}(X_E) \longrightarrow \mathbf{Ab},\ F \mapsto F(U),$$

mit

$$H^i(U, ?)$$

bezeichnet. Die Gruppen

$$H^i(U, F)$$

sind zunächst von den in (i) definierten Gruppen $H^i(U, F|_U)$ zu unterscheiden.

(iii) Die natürliche Einbettung

$$i: \mathbf{S}(X_E) \longrightarrow \mathbf{P}(X)$$

Sei jetzt ein G-Homomorphismus

$$u: N \longrightarrow M_G(N'),\ n \mapsto u_n$$

gegeben, d.h. es gelte

$$u_{gn}(x) = (g \bullet u_n)(x) = u_n(xg). \qquad (2)$$

für g, x ∈ G und n ∈ N. Es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_{\beta_u}(n)(x) &= \beta_u(xn) \text{ (Definition von } \alpha_f(n)(x) \text{ mit } f = \beta_u) \\
&= u_{xn}(1) \text{ (Definition von } \beta_u(n) \text{ mit xn anstelle von n)} \\
&= u_n(1 \bullet x) \qquad \text{(nach (2) mit x = 1 und g = x)} \\
&= u_n(x)
\end{aligned}$$

Damit ist $\alpha_{\beta_u}(n) = u_n$ für jedes n, d.h.

$$\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}.$$

Die Abbildungen α und β sind invers zueinander, also bijektiv.

ist linksexakt. Die zugehörigen rechtsabgeleiteten Funktoren werden mit

$$\underline{H}^i(X_E, F) \text{ oder } \underline{H}^i(F)$$

bezeichnet.

(iv) Für jede fest gewählte Garbe F_0 auf X_E ist der Funktor

$$\mathbf{S}(X_E) \longrightarrow \mathbf{Ab},\ F \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(F_0, F),$$

linksexakt. Die zugehörigen rechtsabgeleiteten Funktoren werden mit

$$R^i\mathrm{Hom}_S(F_0, ?) = \mathrm{Ext}^i_S(F_0, ?)$$

bezeichnet.

(v) Für jede fest gewählte Garbe F_0 auf X_E ist der Funktor

$$\mathbf{S}(X_E) \longrightarrow \mathbf{S}(X_E),\ F \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(F_0, F),$$

linksexakt. Die zugehörigen rechtsabgeleiteten Funktoren werden mit

$$R^i\underline{\mathrm{Hom}}(F_0, ?) = \underline{\mathrm{Ext}}^i_S(F_0, ?)$$

bezeichnet.

(vi) Für jeden stetigen Morphismus $\pi: X'_{E'} \longrightarrow X_E$ ist der Funktor

$$\pi_*: \mathbf{S}(X'_{E'}) \longrightarrow \mathbf{S}(X_E)$$

linksexakt. Die zugehörigen rechtsabgeleiteten Funktoren

$$R^i\pi_*: \mathbf{S}(X'_{E'}) \longrightarrow \mathbf{S}(X_E)$$

heißen <u>höhere direkte Bilder</u>.

5.1.4 Erste Eigenschaften der Kohomologie-Funktoren

(i) <u>Die Ext-Funktoren als Funktoren des ersten Arguments (Banlanziertheit)</u>
Für jede Garbe F_0 auf X_E und jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

von Garben auf X_E besteht eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(F, F_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(F', F_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(F'', F_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(F, F_0) \longrightarrow \ldots$$

(ii) $\mathrm{Ext}^i(F', F'')$ <u>als Gruppe von Erweiterungen</u>
Wie für jede andere abelsche Kategorie (mit genügend vielen injektivien Objekten) kann man die Ext-Gruppen

$$\mathrm{Ext}^i(F', F'')$$

auch im Fall der Kategorie $\mathbf{S}(X_E)$ als die Gruppe der <u>Joneda-Erweiterungen</u> interpretieren, d.h. als Gruppe der Isomorphie-Klassen[9] aller exakten Sequenzen der Gestalt

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow F_{i-2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow F'' \longrightarrow 0.$$

(iii) $H^i(X_E, F)$ <u>als Funktor bezüglich</u> X_E

---

[9] Man betrachte zwei-zeilige kommutative Diagramme, deren Zeile gerade die obigen exakten Sequenzen sind, wobei die äußeren vertikalen Morphismen identische Morphismen sind.

Wir werden später sehen, daß man $H^i(X_E, F)$ als Funktor in X_E ansehen kann. Genauer, zu jeden stetigen Morphismus

$$\pi: X'_E, \longrightarrow X_E$$

kann man einen Gruppen-Homomorphismus

$$H^i(X_E, F) \longrightarrow H^i(X'_E, \ , \pi^*F), \tag{1}$$

konstruieren und dieser definiert einen funktoriellen Morphismus.

Im Spezialfall, daß π^*: $S(X_E) \longrightarrow S(X'_E,)$ exakt ist, ergibt sich dieser Homomorphismus wie folgt. Wegen der Exaktheit von π^* liefert die Zusammensetzung vom π^* mit dem ∂-Funktor[10]

$$(H^i(X'_E, \ , ?))_{i=0,1,...}$$

einen ∂-Funktor

$$(H^i(X_E, \pi^* ?)_{i=0,1,...} \tag{2}$$

auf $\mathbf{S}(X_E)$. Der natürliche Garben-Morphismus

$$F \longrightarrow \pi_*\pi^*F$$

induziert einen Gruppen-Homomorphismus

$$\begin{aligned} H^0(X_E, F) \longrightarrow H^0(X_E, \pi_*\pi^*F) &= (\pi^*F)(X\times_X X') \\ &= (\pi^*F)(X') \\ &= H^0(X'_E, \ , \pi^*F) \end{aligned}$$

und damit einen Morphismus des universellen ∂-Funktorts

$$(H^i(X_E, \ , ?))_{i=0,1,...}$$

mit dem ∂-Funktor (2) als Ziel. Insbesondere erhält man Morphismen der Gestatl (1).

(iv) Invarianz der Kohomologien

Die in 5.1.3 definierten Funktoren und deren rechtsabgeleiteten Funktoren hängen in einem bestimmten Sinne nur von der Kategorie $\mathbf{S}(X_E)$ ab. Ist zum Beispiel der Situs-Morphismus

$$\pi: X' \longrightarrow X$$

ein universeller Homöomorphismus, so bestehen natürliche Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^i(X_{et}, F) &\cong H^i(X'_{et}, F') \\ Ext^i(F_0, F) &\cong Ext^i(F'_0, F') \\ \underline{H}^i(X, F) &\cong \pi_*\underline{H}^i(X', F') \end{aligned}$$

(v) Existenz von Abhängigkeiten

Die Funktoren von 5.1.3 sind nicht voneinander unabhängig. Zum Beispiel gilt

$$\Gamma(X, ?) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, ?),$$

wenn $\mathbb{Z}$ die konstante Garbe auf X_E bezeichnet. Deshalb ist

$$H^i(X, ?) \cong Ext^i(\mathbb{Z}, ?),$$

---

[10] Ein ∂-Funktor auf einer abelschen Kategorie A ist ein Funktor der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von A mit Werten in der Kategorie der (langen) exakten Sequenzen von A (vgl. Hartshorne, Algebraic geometry, Definition vor Remark III.1.2.1)

d.h. die Kohomologie-Gruppen sind spezielle Ext-Gruppen.

Außerdem ist leicht zu sehen, daß $\underline{H}^i(F)$ gerade die Prägarbe

$$U \mapsto H^i(U, F)$$

ist (nach Definition der Funktoren $\underline{H}^i$ und H^i). Tieferliegende Zusammenhänge, welche sich durch Spektralsequenzen ausdrückent, werden wir weiter unten in diesem und in den nachfolgenden Abschnitten beschreiben.

Beweis. Zu (i). Sei

$$0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow I^*$$

eine injektive Auflösung (d.h. eine exakte Sequenz mit I^i injektiv für jedes i). Durch Anwenden des Hom-Funktors erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Komplexen in **Ab**,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(F'', I^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F, I^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F', I^*) \longrightarrow 0.$$

Die zugehörige lange Kohomologie-Sequenz ist gerade die oben angegebene gesuchte Sequenz.

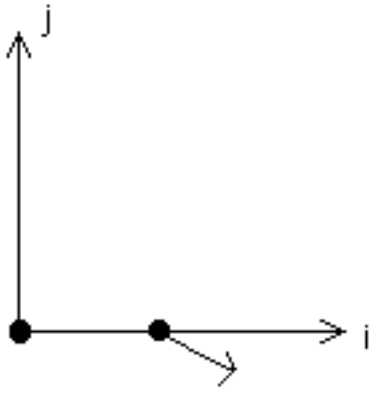
Zu (ii). siehe Mitchell, B.: Theory of categories, Academic Press, New York 1965.

Zu (iii). Die Beweis-Idee im allgemeinen Fall für die Konstruktion der Homomorphismen (1) beruht auf dem Begriff der schwachen Garbe, den wir später einführen werden. Wir werden sehen,

1. injektive Garben sind schwach (nach Definition der Kohomologie).
2. schwache Garben sind $H^0(X_E, ?)$-azyklisch (nach Definition der Schwachheit).
3. π_*: $\mathbf{S}(X'_E,) \longrightarrow \mathbf{S}(X_E)$ überführt schwache Garben in schwache Garben (vgl. Milne, Lemma III.1.19 bzw. Folgerung III.2.13).

Das bedeutet insbesondere, daß π_* injektive Garben in $\Gamma := H^0(X_E, ?)$-azyklische überführt. Damit existiert die Spektral-Sequenz der Funktor-Komposition $\Gamma \circ \pi_*$:

$$H^i(X_E , R^j\pi_* F') \Rightarrow H^{i+j}(X'_E, , F').$$



Diese ist im ersten Quadranten konzentriert. Die Kanten-Objekte mit j = 0 bilden sich damit surjektiv auf ihre entsprechentend Limes-Terme ab[11]. Damit bildet sich

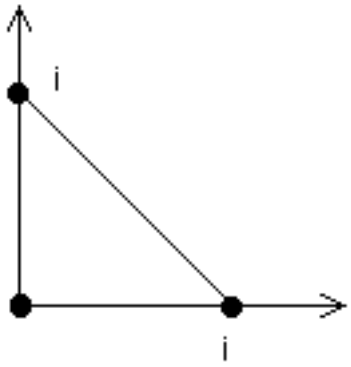
$$H^i(X_E , \pi_* F')$$

[11] Die Pfeile aller Differentiale zeigen nach rechts unten, vgl. Grothendieck, Sur quelques points, Section II.2.4, Definition der Spektralsequenz, b).

auf einen graduierten Bestandteil[12] von $H^i(X'_E, \ , F')$ ab für jede Garbe F' auf X'_E,.

$$H^i(X_E , \pi_* F') \twoheadrightarrow F^i(H^i(X'_E, \ , F'))/F^{i+1}(H^i(X'_E, \ , F')) \qquad (3)$$

Nun ist die Spektralsequenz die zu einem Doppelkomplex (zu einer Cartan-Eilenberg-Auflösung), welcher im ersten Quadranten konzentriert ist. Die Filtration $\{F^pH^i\}_{p\geq 0}$ ist absteigend, separiert, erschöpfend und endlich.



Die Zahl der von Null verschiedenen graduierten Bestandteile ist i+1. Insbesondere ist

$$F^0H^i = H^i \text{ und } F^{i+1}H^i = 0.$$

Damit steht rechts in (3) eine Untergruppe von H^i, d.h. (3) definiert einen Gruppen-Homomorphismus

$$H^i(X_E , \pi_* F') \longrightarrow H^i(X'_E, \ , F') \qquad (4)$$

Der natürliche Garben-Morphismus

$$F \longrightarrow \pi_*\pi^*F$$

induziert für jedes i einen Gruppen-Homomorphismus

$$H^i(X_E, F) \longrightarrow H^i(X_E , \pi_*\pi^*F)$$

Die Zusammensetzung mit (4) für $F' = \pi^*F$ liefert den gesuchten Homomorphismus

$$H^i(X_E, F) \longrightarrow H^i(X'_E, \ , \pi^*F').$$

Zu (iv). Die angegebenen Isomorphismen ergeben sich aus der Aussage von 4.5.11 (ii) nach, welcher

$$i_*: \mathbf{S}(X'_{et}) \longrightarrow \mathbf{S}(X_{et})$$

eine Äquivalenz von Kategorien ist, falls der Situs-Morphismue i: X' $\longrightarrow$ X ein universeller Homöomorphismus ist. Letzteres ist eine Verallgemeinerung von 4.5.11(i), wonach i_* eine Äquivalenz ist für surjektive abgeschlossene Einbettungen

$$i: X' \hookrightarrow X.$$

QED.

5.1.5 Beispiel: der Fall X = Spec K

Seien K ein Körper und

$$X = \text{Spec } K.$$

Dann ist (nach 4.2.7)

$$S(X_{et}) \approx \text{G-mod}$$

---

[12] vgl. Grothendieck, Sur quelques points, Section II.2.4, Definition der Spektralsequenz, e).

äquivalent zur Kategorie der diskreten G-Moduln mit $G = \mathrm{Gal}(K_s/K)$ (die Galois-Gruppe der separablen Abschließung von K).

(i) Sei F eine Garbe auf X_{et}, welche dem G-Modul M entspricht. Dann ist (nach Beispiel 4.2.6, Aussage 3)

$$\Gamma(X, F) = M^G$$

also

$$H^i(X, F) = H^i(G, M) = H^i(K, M),$$

wobei in der Mitte und auf der rechten Seite die Gruppen-Kohomologie im Sinne von Serre steht (vgl. Serre, J.-P.: Cohomologie Galoisienne).

(ii) Entsprechen die Garben F', F" den diskreten G-Moduln M' bzw. M", so gilt

$$\mathrm{Hom}(F', F") = \mathrm{Hom}_G(M', M"),$$

also

$$\mathrm{Ext}^i(F', F") = \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(M', M"),$$

wobei rechts der Ext-Funktor auf der Kategorie der $\mathbb{Z}[G]$-Moduln oder auch der Kategorie G-mod steht.

(iii) Entsprechen die Garben F', F" den diskreten G-Moduln M' bzw. M", so entspricht

$$\underline{\mathrm{Hom}}(F', F")$$

dem diskreten G-Modul

$$\bigcup_{H\subseteq G} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M', M")^H = \bigcup_{H\subseteq G} \mathrm{Hom}_H(M', M"),$$

wobei H die offenen Untergruppen (oder auch die offenen Normalteiler) von G durchläuft. Man beachte, G operiert auf $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M', M")$ durch "Konjugation":

$$(\sigma\bullet f)(m') = \sigma(f(\sigma^{-1}(m'))) \text{ für } \sigma\in G \text{ und } f\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M', M").$$

Bezeichnen wir die obige Vereinigung mit

$$\underline{\mathrm{Hom}}_G(M', M")$$

und die zugehörigen abgeleiteten Funktoren mit

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_G(M', M").$$

Man beachte, für endlich erzeugte Moduln M' gilt

$$\underline{\mathrm{Hom}}_G(M', M") = \mathrm{Hom}_G(M', M").$$

5.1.6 Zur Berechnung der Kohomologie-Funktoren durch Auflösungen

Sei

$$f: \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$$

ein linksexakter Funktor abelscher Kategorien, wobei **A** genügend viele injektive Objektie besitze. Weiter sei

$$\mathbf{T} \subset |\mathbf{A}|$$

eine Klasse von Objekten mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Jedes Objekt von **A** ist Teilobjekt eines Objekts von **T**.

(ii) Jeder direkte Summand eines Objekts von **T** liegt in **T**.

(iii) Für jede exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F" \longrightarrow 0$$

von **A** mit $F', F \in \mathbf{T}$ gilt $F" \in \mathbf{T}$ und die Sequenz

$$0 \longrightarrow fF' \longrightarrow fF \longrightarrow fF" \longrightarrow 0$$

ist exakt in **B**.

In dieser Situation liegen alle injektiven Objekte von **A** in **T** und alle Objekte von **T** sind f-azyklisch. Die abgeleiteten Funktoren

$$R^i f$$

lassen sich also mit Hilfe von Resolventen aus **T** berechnen.
Beweis.

QED. Sei I ein injektives Objekt von **A**. Wir haben zu zeigen, I liegt in **T**. Nach (i) ist I Teilobjekt eines Objekts A von **T**., d.h. es gibt einen Monomorphismus

$$I \hookrightarrow A \in |\mathbf{T}|.$$

Weil I injektiv ist, ist I direkter Summand von A. Wegen (ii) liegt damit I in T.
Sei jetzt A ein Objekt von **T**,

$$A \in |\mathbf{T}|.$$

Wir haben noch zu zeigen, A ist f-azyklisch. Zum Beweis wählen wir eine injektive Aufösung von A, sagen wir

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \ldots \qquad (1)$$

Induktiv definieren wir Objekte Z^i derart, daß die folgenden Sequenzen exakt sind.

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow Z^1 \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow Z^i \longrightarrow I^i \longrightarrow Z^{i+1} \longrightarrow 0. \end{gathered} \qquad (2)$$

Man beachte, nach Konstruktion sind Z^1, Z^2, Z^3, ... Kokerne, also wegen der Exaktheit von (2) auch Kobilder, also Bilder und damit Teilobjekte von I^1, I^2, I^3, ...
Nach (iii) liegt Z^1 in **T**. Induktiv sehen wir, jedes Z^i liegt in T, und durch Anwenden von f auf die Sequenzen (1) erhalten wir exakte Sequenze in **B** (nach (iii)). Diese setzen sich zu einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow fA \longrightarrow fI^0 \longrightarrow fI^1 \longrightarrow fI^2 \longrightarrow \ldots$$

zusammen. Also gilt

$$R^i f(A) = 0 \text{ für jedes } i > 0.$$

Wir haben gezeigt, A ist f-azyklisch.
QED.

5.1.7 Beispiele für Klassen T des Kriteriums 5.1.6

(i) Injektive Objekte. Seien **A** eine abelschen Kategorie mi genügend viele injektiven Objekten. Dann genügt die Klasse **T** der injektiven Objekte von **A** den Bedingungen von 5.1.6 für jeden linksexakten Funktor f.[13]

(ii) Welke Garben. Seien X ein topologischer Raum. Eine Garbe auf F auf X heißt welk, wenn für je zwei offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $U \hookrightarrow V$ die Restriktion

$$F(V) \longrightarrow F(U)$$

---

[13] Die erste Bedingung an **T** ist erfüllt, weil **A** genügend viele injektive Objekte besitzt. Sei A ein direkter Summand eines injektiven Objekts I, sagen wir

$$I = A \oplus B$$

Dann ist der Funktor $\mathrm{Hom}(?, I) = \mathrm{Hom}(?, A) \oplus \mathrm{Hom}(?, B)$, $? \xrightarrow{f} I \mapsto (p_A f, p_B f)$ exakt. Insbesondere ist dann auch Hom(?, A) exakt, d.h. A ist injektiv. Damit genügt **T** auch der zweiten Bedingung. Sei schließlich

$$0 \longrightarrow I' \longrightarrow I \longrightarrow I'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz in **A** mit I' und I injektiv. Wegen I' injektiv zerfällt diese Sequenz. Insbesondere ist I'' als direkter Summand von I'' ebenfalls injektiv. Weil die Sequenz zerfällt, ist das Bild dieser Sequenz bei jedem additiven Funktor wieder exakt. Damit ist auch die dritte Bedingung bewiesen.

surjektiv ist. Die Klasse der welken Garben auf X genügt den Bedingungen des Kriteriums 5.1.6 für den Funktor $\Gamma(X,?)$ (vgl. Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux).[14]

---

[14] Bezeichne **T** die Klasse der welchen Garben auf X und sie F eine beliebige Garbe auf X. Dann bezeichne F* die Garbe auf X mit

$$F^*(U) = \prod_{x\in U} F_x$$

für jede offene Menge $U \subseteq X$. Für $V \subseteq U$ offen sie die Garbenrestriktion

$$F^*(U) \longrightarrow F^*(V)$$

die Projektion auf das Teilprodukt. Die Garbe F* ist welk. Außerdem gibt es einen Garbenmorphismus $F \longrightarrow F^*$ mit

$$F(U) \longrightarrow F^*(U),\ s \mapsto (s_x)_{x\in U}$$

für jede offene Menge $U \subseteq X$, d.h. jeder Schnitt wird auf die Familie seiner Halme abgebildet. Dieser Morphismus ist injektiv, d.h. F ist Teilgarbe von F*. Damit genügt **T** der ersten Bedingung. Sei jetzt G ein direkter Summand einer welken Garbe F, sagenwir,

$$F = G \oplus H.$$

Dann sind nach Definition die Restriktionen von F surjektiv. Dasselbe gilt dann aber auch für G, d.h. G ist welk und liegt in **T**. Die Klasse **T** genügt der zweiten Bedingung. Sei schließlich eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'' \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

von Garben gegeben mit F' und F welk. Wir haben zu zeigen, dann ist auch F'' welk, und jeder linksexakte Funkter überführt diese Sequenz in eine kurze exakte Sequenz.
Seien U und V ineinander liegende offene Mengen, sagen wir

$$V \subseteq U,$$

und sei

$$s'' \in F''(V).$$

Wir müssen s'' als Einschränkung eines Schnitts über U darstellen. Weil $F \longrightarrow F''$ surjektiv ist, gibt es eine offene Überdeckung

$$V = \bigcup_{i\in I} V_i$$

und Schnitte $\tilde{s}_i \in F(V_i)$ mit $\beta(\tilde{s}_i) = s''|_{V_i}$. Weil F welk ist, ist $\tilde{s}_i$ Einschränkung eines Schnitts über U, d.h. es gibt einen Schnitt

$$s_i \in F(U) \text{ mit } s_i|_{V_i} = \tilde{s}_i, \text{ also } \beta(s_i) = s''|_{V_i}.$$

Für beliebige $i,j\in I$ ist deshalb $\beta(s_i - s_j)|_{V_i} = s''|_{V_i} - s''|_{V_i} = 0$, d.h. die Differenz ist $s_i - s_j$ ist ein Schnitt des Kerns von β,

$$s_i - s_j \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha).$$

Es gibt Schnitte $s'_{ij} \in F'(U)$ mit $\alpha(s'_{ij}) = s_i - s_j$ für alle $i,j \in I$ (welche Null sind für i=j), d.h. mit

$$s_i = s_j + \alpha(s'_{ij}).$$

Es folgt

$$\tilde{s}'' := \beta(s_i) = \beta(s_j) \in F''(U) \text{ für alle } i, j \in I$$

(iii) Schwache Garben. Seien X ein Schema und $(C/X)_E$ ein Situs wie in 1.3.9. Eine Garbe F auf X_E heißt schwach, wenn sie kohomologisch trivial ist, d.h. wenn gilt

$$H^i(U , F) = 0 \text{ für jedes Objekt U von C/X und jedes } i > 0.$$

Diese Definition fällt mit dem Begriff der welken Garbe zusammen wie dieser in der Monographie von M. Artin, Grothendieck topologies, definiert wird. Er weicht ab vom Begriff der welken Garbe im Sinne von SGA 4, V.4.1, wo eine Garbe F auf X_E als welk definiert wird, wenn für jede freie Garbe S auf X_E die höheren rechtsabgeleiteten Funktoren des Funktors

$$F' \mapsto \mathrm{Hom}(S, F')$$

an der Stelle F gleich Null sind. Insbesondere ist jede in diesem Sinne welke Garbe im hier definierten Sinne welk(denn für $S = \mathbb{Z}_U$ ist $\mathrm{Hom}(S, F') = F'(U)$, d.h.. als rechtsabgeleitete Funktoren erhält man die $H^i(U, ?)$).

Sei **T** die Klasse der schwachen Garben. Dann liegt jede injektive Garbe in **T**, d.h. Bedingung (i) von 5.1.6 ist erfüllt.

Weil die Funktoren $H^i(U, ?)$ mit direkten Summen kommutieren, ist jeder direkte Summand einer schwachen Garbe schwach, d.h. Bedingung (ii) von 5.1.6 ist erfüllt.

Sei jetzt eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

gegeben mit F' und F schwach. Auf Grund der langen Kohomologie-Sequenz zum Funktor $\Gamma(U, ?)$ erhalten wir, daß auch F" eine schwache Garbe ist, d.h. der erste Teil von Bedingung (iii) in 5.1.6 ist erfüllt. Weil F' nach Voraussetzung schwach ist, ergibt sich der zweite Teil dieser Bedingung für die Funktoren

$$f = \Gamma(X, ?) \text{ und } f = \Gamma(U, ?).$$

Wir werden demnächst sehen, die Bedingung ist auch für die direkten Bilder

$$f = \pi_*$$

stetiger Situs-Morphismen erfüllt.

5.1.8 Vergleich von $H^i(U, F)$ und $H^i(U, F|_U)$

Seien X ein Schema und $(C/X)_E$ ein Situs wie in 1.3.9. Für jede Garbe F auf X_E und jedes Objekt $U \longrightarrow X$ von C/X besteht dann ein natürlicher Isomorphismus

---

und $\tilde{s}"|_{V_i} = \beta(s_i|_{V_i}) = s"|_{V_i}$ für jedes $i \in I$. Weil F" eine Garbe ist und die V_i eine Überdeckung von U bilden, folgt $\tilde{s}"|_U = s"$. Damit ist gezeigt, die Garbe F" ist welk. Der erste Teil der dritten Bedingung ist damit erfüllt für die Mengen **T**. Wir haben noch den zweiten Teil zu beweisen, d.h. Sequenz (1) bleibt exakte, wenn man den globalen Schnittfunktor anwendet. Das ergibt sich aber aus der obigen Rechnung für den Fall U = V = X. Dann erhält man nämlich für den vorgegebenen globalen Schnitt s":

$$s" = \tilde{s}" = \beta(s_i) \text{ für jedes } i \in I,$$

wobei $s_i \in F(X)$ für jedes i ein globaler Schnitt von F ist.

$$H^i(U, F) \cong H^i(U_E , F|_U),$$

wobei U_E den Situs $(C/U)_E$ bezeichne.

5.1.8.1 Lemma

Für jeden Morphismus $\pi: U \longrightarrow X$ von C/X überführt der Funktor

$$\pi^*: \mathbf{S}(X_E) \longrightarrow \mathbf{S}(U_E), F \mapsto F|_U,$$

injektive Garben in injektive Garben.
Beweis. Der Funktor π^* besitzt nach 4.5.8[15] (i) und (ii) einen exakten linksadjungierten Funktor

$$\pi_!: \mathbf{S}(U_E) \longrightarrow \mathbf{S}(X_E).$$

Nach 5.1.1.1 überführt π^* deshalb injektive in injektive Objekte.
QED.

5.1.8.2 Beweis der Behauptung

Beweis. Der Funktor

$$\mathbf{S}(X_E) \longrightarrow \mathbf{S}(U_E), F \mapsto F|_U ,$$

ist exakt und überführt nach dem Lemma 5.1.8.1 injektive in injektive Objekte. Wir wählen eine injektive Auflösung der Garbe F, sagen wir

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow I^*. \qquad (1).$$

Durch Einschränken von (1) auf U erhalten wir eine injektive Auflösung

$$0 \longrightarrow F|_U \longrightarrow I^*|_U. \qquad (2).$$

Aus der injektiven Auflösung (1) ergibt sich

$$H^i(U, F) = H^i(\Gamma(U, I^*)),$$

und aus (2) erhalten wir

$$H^i(U_E , F|_U) = H^i(\Gamma(U, I^*|_U)) = H^i(\Gamma(U, I^*)),$$

d.h. die beiden Kohomologien sind gleich.
QED.
Bemerkungen

(i) Aus 5.1.8 folgt insbesondere, daß der Funktor

$$\mathbf{S}(X_E) \longrightarrow \mathbf{S}(U_E), F \mapsto F|_U ,$$

schwache Garben in schwache Garben überführt. Einen weiteren Beweis dieser Aussage werden wir im nächsten Abschnitt mit Hilfe der $\check{\text{C}}$ech-Kohomologie angeben.

(ii) Aus 5.1.8 folgt auch, daß $\underline{H}^i(F)$ gerade die Prägarbe

$$U \mapsto H^i(U_E , F|_U)$$

ist.[16]

---

[15] Eigenschaften der Standard-Funktoren.

[16] Für F injektiv, ist letztere Prägarbe trivial (weil auch $F|_U$ injektiv ist), und zu kurzen exakten Garben-Sequenzen erhält man durch Anwenden von $H^i(U_E , ?|_U)$ lange exakte Sequenen in **Ab**, welche lange exakte Sequenzebn von Prägarben definieren. Die Behauptung folgt damit aus der Eindeutigkeit der abgeleiteten Funktoren bis auf naütlrihe Isomorphie.

5.1.9 Vergleich von $R^i\pi_*(F)$ und $\underline{H}^i(F)$

Seien $\pi: X'_{E'} \longrightarrow X_E$ ein stetiger Situs-Morphismus und $F' \in \mathbf{S}(X'_{E'})$. Dann gilt

$$R^i\pi_*F' = a(\pi_p(\underline{H}^i(F'))),$$

d.h. $R^i\pi_*F$ ist die assoziierte Garbe zur Prägarbe

$$U \mapsto H^i(U'_{E'}, F'|_{U'}) \text{ mit } U' = U \times_X X'.$$

Beweis. Nach Definition stimmt π_p für Garben mit π_* überein, d.h.

$$\pi_* = a \circ \pi_p \circ i,$$

wenn i die natürliche Einbettung

$$i: \mathbf{S}(X_E) \hookrightarrow \mathbf{P}(X)$$

bezeichnet. Sei

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow I'^*$$

eine injektive Auflösung von F' in $\mathbf{S}(X'_{E'})$. Dann ist $R^i\pi_*F'$ gerade die i-te Kohomologie-Garbe des Komplexes

$$\pi_*(I^*) = a(\pi_p(iI'^*)).$$

Nun sind aber a und π_p exakte (nach 4.3.10 (i) bzw. 4.3.5 (i)). Die Funktoren kommunizieren also mit dem Übergang zur Kohomologie. Es folgt

$$R^j\pi_*F' = a(\pi_p(H^j(iI'^*))) = a(\pi_p(\underline{H}^j(F'))) \text{ für jedes j.}$$

QED.

5.1.10 Höhere direkte Bilder von schwachen Garben

Seien $\pi: X'_{E'} \longrightarrow X_E$ ein stetiger Situs-Morphismus und $F' \in \mathbf{S}(X'_{E'})$ eine schwache Garbe. Dann gilt

$$R^i\pi_*F' = 0 \text{ für jedes } i > 0.$$

Höhere direkte Bilder lassen sich also mit Hilfe von Auflösungen durch schwache Garben berechnen.

Beweis.Nach 5.1.8 gilt

$$H^i(U', F'|_{U'}) = H^i(U', F') = 0$$

für i >0, F' schwach und U' beliebig. Nach Bemerkung 5.1.8 (ii) ist damit

$$\underline{H}^i(F') = 0$$

für i>0 und F' schwach. Auf Grund von 5.1.9 ist

$$R^i\pi_*F' = a(\pi_p(\underline{H}^i(F'))) = 0 \text{ für } i > 0.$$

QED.

5.1.11 Halme höherer direkter Bilder entlang quasi-kompakter Morphismen

Seien

$$\pi: X' \longrightarrow X$$

ein quasi-kompakter Morphismus von Schemata,

$$F' \in \mathbf{S}(X'_{et})$$

und

$$\overline{x} \longrightarrow X$$

ein geometrischer Punkt mit

$$\kappa(\overline{x}) = \kappa(x)_s \text{ (:= separable Abschließung von } \kappa(x)).$$

Wir setzen

$$\widetilde{X} := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,\overline{x}}$$

und betrachten das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}' & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{X} & \longrightarrow & X \end{array}$$

Dann besteht ein natürlicher Isomorphismus

$$R^i\pi_*(F')_{\overline{x}} \xrightarrow{\cong} H^i(\widetilde{X}', \widetilde{F}'),$$

wobei $\widetilde{F}'$ das inverse Bild entlang $\widetilde{X}' \longrightarrow X'$ bezeichne.

Beweis. Weil der Übergang zur assoziierten Garbe die Halme einer Garbe nicht ändert (vgl.Bemerkung 4.3.9 (iii)) gilt

$$\begin{aligned} R^i\pi_*(F')_{\overline{x}} &= (a(\pi_p(\underline{H}^i(F')))_{\overline{x}} && \text{(nach 5.1.9)} \\ &= (\pi_p(\underline{H}^i(F')))_{\overline{x}} && \text{(nach Bemerkung 4.3.9 (iii))} \\ &= \varinjlim_{\overline{x} \longrightarrow U} H^i(U \times_X X', \ldots) \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt nach Definition des Halms und nach Definition des direkten Bildes π_p einer Prägarbe. Die drei Pünktchen im zweiten Argument stehen für das inverse Bild von F' auf dem Schema des ersten Arguments. Der Limes wird dabei über die Etal-Umgebungen U von $\overline{x}$ erstreckt. Man kann sich dabei auf die affinen Etal-Umgebungen beschränken, so daß gilt

$$\varprojlim_{U \text{ affin}} U = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,\overline{x}} = \widetilde{X}.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es somit zu zeigen, daß in der vorliegenden Situation die Etal-Kohomologie bezüglich des ersten Arguments inverse Limites in direkte Limites überführt. Denn dann sit

$$\begin{aligned} R^i\pi_*(F')_{\overline{x}} &= H^i((\varprojlim_{\overline{x} \longrightarrow U} U) \times_X X', \ldots) \\ &= H^i(\widetilde{X} \times_X X', \ldots) \\ &= H^i(\widetilde{X}, \widetilde{F}'). \end{aligned}$$

Der Beweis der Behauptung reduziert sich damit auf die Aussage des nachfolgenden Lemmas.

QED.

5.1.12 Etal-Kohomologie inverser Limites von Schemata

Sei I eine filtrierende Kategorie und

$$I^{op} \longrightarrow \mathbf{Sch}/X \text{ , } i \mapsto X_i \text{ ,}$$

ein kontravarianter Funktor auf I mit Werten in der Kategorie der Schemata über dem Schema X. Wir nehmen an, die folgenden Bedingungen sind erfüllt.

1. Jedes X_i ist quasi-kompakt.

2. Die Morphismen $X_i \longrightarrow X_j$ sind affin.

Dann besteht für Garben F auf X_{et} ein natürlicher Isomorphismus

$$\varinjlim_{i\in I} H^p((X_i)_{et}, F_i) \xrightarrow{\cong} H^p((X_\infty)_{et}, F_\infty)$$

mit

$$X_\infty = \varprojlim_{i\in I} X_i ,$$

wobei F_i bzw. F_∞ die inversen Bilder der Garbe F auf X_i bzw. X_∞ bezeichnen sollen.

Zum Beweis. Wir verzichten hier auf den Beweis, weil er ziemlich technisch ist. Er beruht darauf, daß die Kategorie der Etal-Schemata endlichen Typs über X_∞ der inverse Limes der entsprechenden Kategorien über den X_i ist (vgl. EGA IV, Abschnitt 17) und darauf, daß, wie wir sehen werden, die Etal-Kohomologie bezüglich des zweiten Arguments mit direkten Limites kommutiert (vgl. Milne, Bemerkung III.3.6 (d)). Einzelheiten des Beweises findet man in SGA4, VIII.5.8 oder auch in der Monographie von M.Artin: Grothendieck topologies.
QED.

5.1.14 Bemerkungen zu 5.1.11 und 5.1.12

(i) Gehört die Garbe $F' \in \mathbf{S}(X'_{et})$ von 5.1.11 zu eimem Gruppen-Schema G' lokal endlichen Typs über X', so gehört die Garbe $\widetilde{F}$' zum Gruppen-Schema

$$\widetilde{G}' := G' \times_{X'} \widetilde{X}'$$

(vgl. 4.4.2 (iv)[17], Beispiel 3). Die Aussage von 5.1.11 bekommt dann die Gestalt

$$R^i\pi_*(G')_{\bar{x}} \xrightarrow{\cong} H^i(\widetilde{X}', \widetilde{G}').$$

Die analogen Aussagen sind auch für 5.1.12 richtig.

(ii) Für eigentliche Morphismen läßt sich die Aussage von 5.1.11, wie wir sehen werden, verfeinern zum Satz über den eigentlichen Basiswechsel:

Sei π: X' $\longrightarrow$ X ein eigentlicher Morphismus von Schemata und $\bar{x} \longrightarrow X$ ein geometrischer Punkt. Für jede Torsionsgarbe F' auf X' besteht dann ein natürlicher Isomorphismus

$$R^i\pi_*(F')_{\bar{x}} \xrightarrow{\cong} H^i(X'_{\bar{x}}, F'|X'_{\bar{x}}).$$

(vgl. Milne, Folgerung VI.2.3).

---

[17] Der in 4.2.2(iv) konstruierte Garben-Morphismus $\varphi_G: \pi^*G_X \longrightarrow G_{X'}$, welcher den inversen Bild-Funktor π^* mit dem Basis-Wechsel-Funkter der darstellenden Gruppen-Schemata vergelicht, ist ein Isomorphismus, wenn π^* der Einschränkugnsfunktor auf eine Teilkategorie ist oder G in C/X liegt. Weil in unserem Fall π durch Basis-Wechsel aus dem Etal-Morphsimus $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,\bar{x}} \longrightarrow X$ entsteht, sind hier die erste Bedingung für den Etal-Situs $(et/X)_{et}$ erfüllt.

(iii) Mit Hilfe der $\check{C}$ech-Kohomologie verwandelt sich der Beweis von 5.1.12 in eine einfache Übung (vgl. Milne, Aufgabe III.3.17).

(iv) Alle Ergebnisse von SGA.VII.5 und insbesondere die Aussage 5.1.12 sind auch für den flachen Situs richtig (vgl. Grothendieck, A.: Le groupe de Brauer I, Algébres d'Azumaya et interprétation diverses, II. Theorie cohomologique, III. - Exemples et complements, In: Dix Exposes sur la cohomologie des schemas, North-Holland, Amsterdam 1968, Seite 172).

5.1.15 Zwei Spektral-Sequenzen

(i) Leray-Spektral-Sequenz. Sei π: $(C'/X')_{E'} \longrightarrow (C/X)_E$ ein stetiger Situs-Morphismus. Dann besteht eine Spektral-Sequenz

$$H^p(X_E , R^q\pi_* F') \Rightarrow H^{p+q}(X'_{E'} , F')$$

für jede Garbe F' auf $X'_{E'}$.

(ii) Seien statige Situs-Morphismen

$$X''_{E''} \xrightarrow{\pi'} X'_{E'} \xrightarrow{\pi} X_E$$

gegeben. Dann besteht eine Spektral-Sequenz

$$(R^p\pi_*)\circ(R^q\pi'_*)\, F'' \Rightarrow R^{p+q}(\pi\circ\pi')_*\, F''$$

für jede Garbe F'' auf $X''_{E''}$.[18]

Beweis. Weil schwache Garben azyklisch sind für die Funktoren $\Gamma(X_E , ?)$ und π_*, ergeben sich beide Spektral-Sequenzen auf Grund der nach folgenden Aussage als Spezialfälle der Spektral-Sequenz einer Funktor-Komposition (vgl. Grothendieck: Sur quelques poinst..., Theorem II.2.4.1).
QED.

5.1.16 Direkte Bilder schwacher Garben

Sei π: $X'_{E'} \longrightarrow X_E$ ein schwacher Situs-Morphismus. Dann überführt π_* schwache Garben in schwache Garben.

Beweis. Der Beweis wird in nachfolgenden Abschnitt (unter Verwendung der $\check{C}$ech-Kohomologie) angegeben (vgl. Milne, Folgerung III.2.13 (a)).
QED.

Bemerkung
Falls der Funktor π^* exakt ist, überführt π_* injektive in injektive Objekte (nach Lemma 5.1.1.1(ii), so daß man in dieser Situation den Beweis von 5.1.15 nicht auf den nächsten Abschnitt verschieben muß.

5.1.17 Kanonische Auflösungen durch induzierte Garben auf dem Etal-Situs

(i) Der zahlentheoretische Fall. Sei G eine proendliche Gruppe, N eine abelsche Gruppe und $M_G(N)$ wie bisher der induzierte G-Modul. Ist

$$G := G(k_s/k)$$

mit einem Körper k (und dessen separabler Abschließung k_s), so entspricht

---

[18] Die Leray-Spektral-Sequenz ist im Fall der klassischen Topologie ein Spezialfall dieser letzteren Spektral-Sequenz (nämlich der Fall, daß X_E ein einpunktiger topologischer Raum ist). Man könnte deshalb auch diese Sequenz Leray-Spektral-Sequenz nennen.

$$M_G(N)$$

gerade dem direkten Bild u_*F der Garbe F zum Modul N bezüglich des natürlichen Morphismus

$$u: \operatorname{Spec} k_s \longrightarrow \operatorname{Spec} k =: X$$

(nach 4.4.2 (v)). Wir sprechen deshalb von u_*F als von der induzierten Garbe.

Man beachte:

1. Jede Garbe auf $X = \operatorname{Spec} k_s$ ist induziert, denn im Fall $k = k_s$ ist u_* der identische Funktor.
2. Unter der Voraussetzung, daß Aussage 5.1.16 bewiesen ist, ist für jede Garbe F auf $\operatorname{Spec} k_s$ die induzierte Garbe u_*F eine schwache Garbe, also azyklisch für die Funktoren
$$\Gamma(X, ?), \Gamma(U, ?), \underline{H}^0(?), R^0\pi_*$$
(nach Definition der Schwachheit für die ersten drei, nach 5.1.10 für den letzten).
3. Jede Garbe F auf $X = \operatorname{Spec} k$ ist Teilgarbe einer induzierten Garbe (auf Grund des kanonischen Morphismus $F \longrightarrow u_*u^*F$, welcher in der vorliegenen Situation der natürlichen Einbettung $N \hookrightarrow M_G(N)$ entspricht).

Deshalb kann man im Fall $X = \operatorname{Spec} k$ die Funktoren

$$H^i(X, ?), H^i(U, ?), \underline{H}^i(?), R^i\pi_*$$

mit Hilfe von Auflösungen durch induzierte Garben berechnen. Die Äquivalenz von Kategorien

$$\mathbf{S}(X_{et}) \approx G\text{-mod}$$

(vgl. 4.2.7) gestattet es uns, die obigen Aussage über Etal-Garben in die Sprache der diskreten G-Moduln zu übersetzen. Insbesondere kann man zur Berechnung von

$$H^i(G, ?)$$

Auflösungen durch induzierte G-Moduln verwenden.

Ist M_0 ein G-Modul, welcher projektiv ist als abelsche Gruppe, so gilt dies auch für die Berechnung der abgeleiteten Funktoren von[19]

$$\operatorname{Hom}_G(M_0, ?) \text{ und } \underline{\operatorname{Hom}}_G(M_0, ?).$$

(ii) Der allgemeine Fall.

---

[19] Für $M_0 = \mathbb{Z}[G]$ gilt

$$\operatorname{Hom}_G(M_0, ?) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Z}[G], ?)^G = ((?)^{\#G})^G = ((?)^G)^{\#G}$$

also

$$\operatorname{Ext}^i_G(M_0, ?) = (H^i(G, ?))^{\#G}.$$

Für $M_0 = \mathbb{Z}[G]$ (allgemeiner für M_0 endlich erzeugt) gilt nach 5.1.5 (iii)

$$\underline{\operatorname{Hom}}_G(M_0, ?) = \operatorname{Hom}_G(M_0, ?).$$

Damit ist die Aussage klar im Fall M_0 frei, und damit auch für direkte Summanden freier Moduln.

Sei X ein Schema. Eine Garbe auf X_{et} heißt <u>induziert</u>, wenn sie die Gestalt

$$\prod_{x\in X} u_{x*}F_x$$

hat, wobei u_x den natürlichen Morphismus

$$u_x: \overline{x} \longrightarrow X,\ \overline{x} := \operatorname{Spec} \kappa(x)_s ,$$

bezeichne und F_x irgendeine Garbe auf $\overline{x}$ (d.h. eine abelsche Gruppe). Wir setzen

$$X' := \vee_{x\in X} \overline{x} \qquad \text{(disjunkte Vereinigung).}$$

Eine Garbe auf X' ist im wesentlichen dasselbe wie eine Familie $(F_x)_{x\in X}$ von abelschen Gruppen F_x , wobei man F_x als konstante Garbe auf $\overline{x}$ betrachten kann. Sei

$$u: X' \longrightarrow X$$

der natürliche Morphismus. Dann gilt

$$u_*((F_x)_{x\in X}) = \prod_{x\in X} u_{x*}F_x .$$

Damit ist jede induzierte Garbe schwach (weil auf X'_{et} jede Garbe schwach ist und direkte Bilder schwacher Garben schwach sind).
Wegen der Injektivität des natürlichen Morphismus[20]

$$F \longrightarrow u_*u^*F$$

kann man damit zur Berechnung der Kohomologie und der höheren direkten Bilder Auflösngen durch induzierte Garben verwenden.
Eine wichtige Tatsache besteht darin, daß jede Garbe F auf X_{et} eine <u>kanonische Auflösung durch induzierte Garben</u> besitzt, welche auch <u>Godement-Auflösung</u> heißt und mit

$$\mathbf{C}(F)$$

bezeichnet wird.
Letztere ist wie folgt induktiv definiert.

1. $C^0(F) := u_*u^*F.$

   Sei $\varepsilon=\varepsilon_F$: $F \hookrightarrow C^0(F)$ der natürliche Morphismus $F \longrightarrow u_*u^*F$.

2. $C^1(F) := C^0(\operatorname{Koker} \varepsilon).$

   Sei d^0: $C^0(F) \longrightarrow C^1(F)$ der natürliche Morphismus

   $$C^0(F) \xrightarrow{\operatorname{Koker}(\varepsilon)} \operatorname{Koker} \varepsilon \hookrightarrow C^0(\operatorname{Koker} \varepsilon) = C^1(F).$$

   Man beachte, wegen der Injektivität des zweiten Morphismus[21] ist die Sequenz

   $$F \xrightarrow{\varepsilon} C^0(F) \xrightarrow{d^0} C^1(F)$$

   exakt.

---

[20] Dies ist im wesentlichen der Garben-Morphismus, bei dem jeder Schnitt auf die Familie seiner Keime abgebildet wird.

[21] Der Kern dieses Morphimus ändert sich nicht, wenn man die Injektion rechts wegläßt, d.h. $\operatorname{Ker}(d^0) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Koker}(\varepsilon)) = \operatorname{Im}(\varepsilon) = F.$

3. $C^i(F) := C^0(\text{Koker } (d^{i-2})$.

Sei $d^{i-1}: C^{i-1}(F) \longrightarrow C^i(F)$ der natürliche Morphismus von (ii) mit

$$F' = \text{Koker } (d^{i-3}) \text{ anstelle von } F$$

und

$$\varepsilon': F' \hookrightarrow C^0(F') \text{ anstelle von } \varepsilon,$$

d.h. d^{i-1} soll der natürliche Morphismus

$$C^0(F') \overset{\text{Koker}(\varepsilon')}{\longrightarrow} \text{Koker } \varepsilon' \hookrightarrow C^0(\text{Koker } \varepsilon').$$

sein. Wie in (ii) ist wegen der Injektivität des zweiten Morphismus die Sequenz

$$F' \overset{\varepsilon'}{\longrightarrow} C^0(F') \overset{d^{i-1}}{\longrightarrow} C^0(\text{Koker } \varepsilon') \; (=^{22} C^1(F')) \qquad (1)$$

exakt und nach Definition von $C^{i-1}(F)$ und F' gilt

$$C^{i-1}(F) \quad = \quad C^0(F'). \qquad (2)$$

Wir haben noch zu zeigen, es gilt

$$C^0(\text{Koker } \varepsilon') \; = C^i(F) \qquad (3)$$

(d.h. d^{i-1} ist korrekt definiert) und die Sequenz

$$C^{i-2}(F) \overset{d^{i-2}}{\longrightarrow} C^{i-1}(F) \overset{d^{i-1}}{\longrightarrow} C^i(F) \qquad (4)$$

ist exakt (d.h. wir erhalten tatsächlich eine Auflösung).

Zum Beweis können wir annehmen, daß diese Aussagen mit i-1 anstelle von i richtig sind. Insbesondere können wir also annehmen, daß die Sequenz

$$C^{i-3}(F) \overset{d^{i-3}}{\longrightarrow} C^{i-2}(F) \overset{d^{i-2}}{\longrightarrow} C^{i-1}(F)$$

exakt ist. Dann ist d^{i-2} bis auf Isomorphie die Zusammensetzung von

$$\alpha := \text{Koker}(d^{i-3})$$

mit einer natürlichen Einbettung dieses Kokerns in $C^{i-1}(F)$, d.h. d^{i-2} ist von der Gestsalt

$$d^{i-2}: C^{i-2}(F) \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} F' \hookrightarrow C^{i-1}(F) \overset{(2)}{=} C^0(F').$$

Dabei kann man als Injektion $F' \hookrightarrow C^0(F')$ den Morphismus ε' verwenden[23]. Weil d^{i-2} diese Gestalt hat, folgt

$$C^0(\text{Koker } \varepsilon') = C^0(\text{Koker}(d^{i-2})) =^{24} C^i(F),$$

d.h. es gilt (3). Wir ersetzen in der exakten Sequenz (1) den Morphismus ε' durch dessen Zusammensetzung $\varepsilon' \circ \alpha = d^{i-2}$ mit der Surjektion α und erhalten die exakte Sequenz (4).

Man beachte, die Godement-Auflösung

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow \mathbf{C}^*(F)$$

---

[22] nach Definition von $C^1(?)$ in (ii).

[23] Nach Definition von d^{i-2} (d.h. nach Definition von d^{i-1} mit i-1 anstelle von i) ist das Bild von d^{i-2} gerade das Bild von ε'.

[24] nach Definition von $C^i(F)$.

ist funktoriel in F.

5.1.18 Aufgabe

Sei X ein Jacobson-Schema, d.h. die abgeschlossenen Punkte jeder abgeschlossenen Teilmenge von X sollen dicht in dieser Menge liegen (siehe EGA I.6.4 für Beispiele). Dann ist es natürlicher, die induzierten Garben auf X als die Garben der Gestalt

$$F = \prod_{i \in X^0} u_{x*} F_x$$

zu definieren, wobei X^0 die Menge der abgeschlossenen Punkte von X bezeichne (vgl. Bemerkung 4.3.12 (ii)). Dabei sei

$$u_x : \overline{x} = \operatorname{Spec} \kappa(x)_s \longrightarrow X$$

wie bisher der natürliche Morphismus. Für jeden Punkt $x \in X^0$ bezeichne

$$i_x : x = \operatorname{Spec} \kappa(x) \longrightarrow X$$

die natürliche Einbettung.Man zeige, eine Garbe F auf X ist genau dann im eben definierten neuen Sinne induziert, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) $F \cong \prod_{i \in X^0} i_{x*} i_x^* F$

(ii) $i_x^* F$ ist induziert im Sinne der Definition von 5.1.17 (ii) für jeden abgeschlossenen Punkt von X.

Als nächstes wollen wir den Zusammenhang zwischen den lokalen und den globalen Ext- bzw. Ext-Funktoren untersuchen.

5.1.19 Die lokal-globale Spektral-Sequenz

Seien X ein Schema und X_E ein Situs. Für beliebige Garben F' und F" auf X_E besteht dann eine Spektral-Sequenz

$$H^p(X_E, \underline{Ext}^q(F', F")) \Rightarrow Ext^{p+q}(F', F"),$$

welche lokal-globale Spektral-Sequenz heißt.
Beweis. Die Behauptung folgt aus der nachfolgenden Aussage.
QED.

5.1.20 Der Funktor Hom(F', F") für F" injektiv

Seien X ein Schema, X_E ein Situs und F' und F" Garben auf X_E mit F" injektiv. Dann ist Hom(F', F") eine schwache Garbe.

Beweis. Wir werden diese Aussage später mit Hilfe der $\check{C}$ech-Kohomologie beweisen (vgl. auch Milne, Folgerung III.2.13(c)).
QED.

5.1.21 Ext als Garbe zu einer Prägarbe von globalen Ext-Funktoren

Seien X ein Schema, X_E ein Situs und F' und F" Garben auf X_E . Dann ist

$$\underline{Ext}^p(F', F")$$

die zur folgenden Prägarbe assoziierte Garbe.

$$U \mapsto Ext^p_{S(U_E)}(F'|_U, F"|_U)$$

Beweis. Zum Beweis reicht es zu zeigen, in beiden Fällen definieren die Funktor-Folgen einen universellen ∂-Funktor über demselben Funktor des Grades 0. Das ergibt sich aber gerade aus den folgenden Aussagen.
1. Die beiden Garben stimmen überein im Fall $p = 0$.
Das ist der Fall auf Grund der Definition von Hom(F', F").
2. Beide Garben sind 0, falls F" injektiv und $p > 0$ ist.
Für die lokalen Ext-Funktoren gilt dies nach Definition. Weil mit F" auch $F"|_U$ injektiv ist (nach Lemma 5.1.8.1) gilt

$$\mathrm{Ext}^p_{S(U_E)}(F'|_U, F"|_U) = 0,$$

d.h. die Prägarbe der globalen Ext-Funktoren ist 0. Dann ist dies aber auch für die zugehörige Garbe der Fall.
3. Für beide Funktor-Familie gehört zu jeder kurzen exakten Garben-Sequenz eine lange exakte Sequenz bezüglich des zweiten Arguments (die in funktorieller Weise von dieser kuzen exakten Sequenz abhängt).
Für die Familie der lokalen Ext-Funktoren ist dies nach Definition der Fall. Im Fall der globalen Ext-Funktoren hat man zu jeder kurzen exakten Sequenz von Garben für jedes U eine kurze exakte Sequenz der auf U eingeschränkten Garben und damit eine lange exakte Sequenz der globalen Ext-Gruppen. Diese langen exakten Sequenzen setzen sich zu einer langen exakten Prägarben-Sequenz zusammen. Durch Übergang zu den assoziierten Garben erhält man die gesuchte lange exakte Garben-Sequenz (weil der Funktor a: $\mathbf{S}(X_E) \longrightarrow \mathbf{P}(X_E)$ exakt ist).

QED.

Bemerkung
Analog zum obigen Beweis ergibt sich aus 5.1.4 (i), daß zu jeder kurzen exakten Garben-Sequenz

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F" \longrightarrow 0$$

von Garben auf X_E auch eine eine lange exakte Garben-Sequenz

$$\ldots \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^i(F, F_0) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^i(F', F_0) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^{i+1}(F", F_0) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^{i+1}(F, F_0) \longrightarrow \ldots$$

bezüglich der ersten Argumente gehört.

5.1.22 Kohomologie mit Träger in einem abgeschlossenen Teilschema

Seien X ein Schema, $Z \subseteq X$ ein abgeschlossenes Teilschema, U := X - Z und

$$Z \overset{i}{\hookrightarrow} X \overset{j}{\hookleftarrow} U$$

die natürlichen Einbettungen. Weiter sei F eine Garbe auf X_{et}. Dann ist

$$i_* i^! F$$

die größte Teilgarbe von F, welche trivial ist außerhalb von Z (vgl. die Standard-Funktoren und ihre Eigenschaften 4.5.4, 4.5.7, 4.5.8). Die Gruppe

$$\Gamma(X, i_* i^! F) = \Gamma(Z, i^! F) =^{25} \mathrm{Ker}(F(X) \longrightarrow F(U))$$

heißt Gruppe der Schnitte von F mit Träger in Z. Der Funktor

$$\mathbf{S}(X) \longrightarrow \mathrm{Ab},\ U \mapsto \Gamma(X, i_* i^! F),$$

ist linksexakt (als Zusammensetzung linksexakter Funktoren, vgl. 4.5.8 (ii)). Seine rechtsabgeleiteten Funktoren werden mit

---

[25] vgl. die Definition von $i^!$ in 4.5.7.

$$H^p_Z(X, F)$$

bezeichnet und heißen Kohomologie-Gruppen von X mit Träger in Z und Koeffizienten in F.

Bemerkung

Diese Funktoren sind kontravarient in (X, U). Topologen schreiben gewöhnlich

$$H^p(X, U, F) \text{ anstelle von } H^p_Z(X, F).$$

5.1.23 Die lange Kohomologie-Sequenz zu einer abgeschlossenen Einbettung

Seien X ein Schema, $Z \subseteq X$ ein abgeschlossenes Teilschema, U := X - Z ,

$$Z \overset{i}{\hookrightarrow} X \overset{j}{\hookleftarrow} U$$

die natürlichen Einbettungen und F eine Garbe auf X_{et}. Dann hat man eine lange Kohomologie-Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0_Z(X, F) \longrightarrow H^0(X, F) \longrightarrow H^0(U, F) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow H^p(X, F) \longrightarrow H^p(U, F) \longrightarrow H^{p+1}_Z(X, F) \longrightarrow H^{p+1}(X, F) \longrightarrow \ldots$$

Beweis.Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_!j^*F \longrightarrow F \longrightarrow i_*i^*F \longrightarrow 0.$$

von 4.5.6. Ist speziell F die konstante Garbe $\mathbb{Z}$ schreiben wir diese Sequenz als

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_U \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_Z \longrightarrow 0$$

mit

$\mathbb{Z}_U := j_!j^*\mathbb{Z}$ und

$\mathbb{Z}_Z := i_*i^*\mathbb{Z}$.

Insbesondere liefert diese kurze exakte Sequenz die lange Kohomologie-Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots\longrightarrow & \mathrm{Ext}^p(\mathbb{Z}, F) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^p(\mathbb{Z}_U, F) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{p+1}(\mathbb{Z}_Z, F) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{p+1}(\mathbb{Z}, F) & \longrightarrow \ldots \\ & \| & & \| & & \| & & \| & \\ & H^p(X, F) & & H^p(U, F|_U) & & H^{p+1}_Z(X, F) & & H^{p+1}(X, F) & \end{array}$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß die vertikalen Gleichheitszeichen gelten, d.h. daß dies die gesuchte lange Kohomologie-Sequenz ist.

Wegen $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, F) = \Gamma(X, F)$ ist

$$\mathrm{Ext}^p(\mathbb{Z}, F) = H^p(X, F).$$

Weil $j_!$ linksadjungiert ist zu j^* gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X)}(\mathbb{Z}_U, F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(U)}(\mathbb{Z}, j^*F),$$

d.h. $\mathrm{Ext}^p(\mathbb{Z}_U, F)$ ist der p-te rechtsabgeleitete Funktor zum Funktor

$$S(X_{et}) \longrightarrow \mathrm{Ab},\ F \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(U)}(\mathbb{Z}, j^*F) = \Gamma(U, F|_U),$$

d.h. es ist

$$\mathrm{Ext}^p(\mathbb{Z}_U, F) = H^p(U, F|_U).$$

Weil i_* linksadjungiert ist zu $i^!$ gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X)}(\mathbb{Z}_Z , F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(Z)}(\mathbb{Z}, i^!F) = \Gamma(Z, i^!F) = \Gamma(X, i_*i^!F) = H^0_Z(X, F),$$

d.h. es ist

$$\mathrm{Ext}^p(\mathbb{Z}_Z, F) = H^p_Z(X, F).$$

QED.

Bemerkung

Die obigen Konstruktionen lassen sich ohne Schwierigkeiten auf den Fall von lokal abgeschlossenen Einbettungen verallgemeinern. Das sind Kompositionen

$$Z \hookrightarrow U \hookrightarrow X$$

mit einer abgeschlossen Einbettung $Z \hookrightarrow U$ und einer offenen Einbettung $U \hookrightarrow X$ (für den Fall des Zariski-Situs vgl. Grothendieck, A.: Local cohomology, Lecture Notes in Math. 41 (1967). Man erhält dann zum Beispiel für jedes Tripel

$$X \supset U \supset V$$

mit U und V offen in X eine exakte Sequenz[26]

$$\ldots \longrightarrow H^p_{X-U}(X, F) \longrightarrow H^p_{X-V}(X, F) \longrightarrow H^{p+1}_{U-V}(U, F|_U) \longrightarrow H^{p+1}_{X-U}(X, F) \longrightarrow \ldots$$

Im Fall $V = \varnothing$ ist dies gerade die Sequenz von 5.1.23.

5.1.24 Ausschneidung

Seien $Z \hookrightarrow X$ und $Z' \hookrightarrow X'$ abgeschlossene Teilschemata und

$$\pi: X' \longrightarrow X$$

ein Etal-Morphismus mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung auf Z' ein Isomorphismus

$$\pi|_{Z'}: Z' \xrightarrow{\cong} Z$$

ist und außerdem

$$\pi(X' - Z') \subseteq X - Z$$

gilt. Dann gilt

$$H^p_Z(X, F) = H^p_{Z'}(X', \pi^*F)$$

für jede Garbe F auf X_{et} und jedes $p \geq 0$.

Beweis. Auf der linken Seite steht ein universeller ∂ Funktor bezüglich F.

Weil π etal ist, ist der Funktor π^* exakt, d.h. rechts steht ein ∂-Funktor bezüglich F. Außerdem überführt nach Lemma 5.1.8.1 der Funktor π^* injektive in injektive Objekte.[27] Damit ist der Funktor rechts auslöschend[28] für jedes $p > 0$. Insbesondere ist der rechte ∂-Funktor ebenfalls universell.[29]
Es reicht also, Behauptung für den Fall $p = 0$ zu beweisen.

---

[26] Man fixiere abgeschlossene Teilschemata X - U und X - V und betrachte U - V als offenes Teilschema von X - V.

[27] Da ein exakter linksadjungierter Funktor $\pi_!$ existiert.

[28] Englisch 'effaceable', efface heißt auslöschen, streichen, verwischen: für jedes Objekt A gibt es einen Monomorphismus $u: A \longrightarrow M$, der vom Funktor in den Null-Morphismus überführt wird. Man nehme zum Beispiel eine Einbettung von A in ein injektives Objekt.

[29] vgl. Grothendieck, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique, Proposition II.2.2.1.

Betrachten wir das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen[30]

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H^0_Z(X,F) & \longrightarrow & \Gamma(X,F) & \longrightarrow & \Gamma(U,F) & (U:=X\text{-}Z) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & H^0_Z,(X',F|_X,) & \longrightarrow & \Gamma(X',F|_X,) & \longrightarrow & \Gamma(U',F|_U,) & (U':=X'\text{-}Z') \end{array}$$

Sei γ ein Element aus dem Kern der linken vertikalen Abbildung. Betrachten wir γ als Element von $\Gamma(X, F)$. Dann gilt

$$\gamma|_U = 0 \text{ und } \gamma|_X, = 0.$$

Nach Voraussetzung liegt jeder Punkt von X-U = Z im Bild von π, d.h.

$$\{X' \longrightarrow X,\ U \longrightarrow X\}$$

ist eine Überdeckung von X. Deshalb muß $\gamma = 0$ sein. Wir haben gezeigt, der linke vertikale Morphismus ist injektiv.

Sei jetzt $\gamma' \in H^0_Z,(X', F|_X,)$.Betrachten wir den Schnitt als Element von $\Gamma(X', F|_X,)$.

Wegen $\gamma'|_U, = 0$ stimmen die Schnitte

$$\gamma' \in \Gamma(X', F|_X,) \text{ und } 0 \in \Gamma(U, F)$$

überein auf $X' \times_X U = \pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(X\text{-}Z) \subseteq$[31] $X' - Z' = U'$. Es gibt also einen Schnitt $\gamma \in \Gamma(X, F)$ mit $\gamma|_X, = \gamma'$ und $\gamma|_U = 0$. Damit liegt γ sogar in $H^0_Z(X, F)$, d.h. γ' hat ein Urbild in $H^0_Z(X, F)$. Wir haben gezeigt der linke verikale Homomorphismus ist surjektiv.

QED.

5.1.25 Kohomologie mit Träger in einem abgeschlossenen Punkt

Sei z ein abgeschlossener Punkt des Schemas X. Dann bestehen für jede Garbe F auf X_{et} Isomorphismen

$$H^p_z(X, F) \xrightarrow{\cong} H^p_z\,(\text{Spec } \mathcal{O}_{X,z}, F).$$

Beweis. Für jede Etal-Umgebung (Y, y) des Punktes z, die einen Isomorphismus

$$\kappa(z) \xrightarrow{\cong} \kappa(y)$$

der Restekörper induziert und deren Faser über z nur aus y besteht, gibt es nach 5.1.24 einen Isomorphismus

$$H^p_z(X, F) = H^p_y(Y, F).$$

Durch Übergang zum Limes erhalten wir

$$\varinjlim_{(Y,y)} H^p_y(Y, F) = H^p_z(\varprojlim Y, F) = H^p_z(\text{Spec } \mathcal{O}_{X,z}, F)$$

(vgl. 5.1.12).

QED.

---

[30] Die vertikalen Morphismen seien gerade die Garben-Restriktionen zum Etal-Morphismus $X' \longrightarrow X$ bzw. $U' \longrightarrow U$.

[31] Ein Element $x \in \pi^{-1}(X\text{-}Z)$ kann nicht in Z' liegen, da es sich dann in Z abbilden würde statt ins Komplent von Z.

5.1.26 Kohomologie mit kompakten Träger

Seien X eine Varietät[32] und F eine Garbe auf X_{et}. Die Gruppe der auf X definierten Schnitte von F mit kompakten Träger ist definiert als die Vereinigung

$$\Gamma_c(X, F) := \bigcup \mathrm{Ker}(\Gamma(X, F) \longrightarrow \Gamma(X\text{-}Z, F),$$

wobei $Z \hookrightarrow X$ die eigentlichen Teilschemata von X durchläuft.

Der Funktor $F \mapsto \Gamma_c(X, F)$ ist linksexakt. Es wäre deshalb naheliegend, die Kohomologie mit kompakten Träger als die rechtsabgeleiteten Funktoren dieses Funktors zu definieren. Dieser Funktor ist jedoch nicht besonders interessant. Ist zum Beispiel X eine affine Varietät, so sind die einzigen eigentlichen Teilvarietäten die abgeschlossenen Punkte, d.h. es ist

$$\Gamma_c(X, F) = \oplus_{x \in X^0} H^0_x(X, F)$$

und damit

$$R^p\Gamma_c(X, F) = \oplus_{x \in X^0} H^p_x(X, F).$$

Statt dessen nehmen wir an, daß eine offene Einbettung

$$j: X \hookrightarrow \overline{X}$$

von X in eine eigentliche Varietät $\overline{X}$ existiert[33], und definieren

$$H^p_c(X, F) := H^p(\overline{X}, j_!F).$$

Bemerkungen

(i) Wir erinnern daran, daß der Funktor $j_!$ exakt ist, aber möglicherweise injektive Objekte nicht notwendig in injektive Objekte überführt.

(ii) Später werden wir zeigen (vgl. Milne VI.3.11), daß $H^p_c(X, F)$ für Torsionsgarben F nicht von der speziellen Wahl von $\overline{X}$ abhängt und außerden die Poincaré-Dualität gilt.

5.1.27 Erste Eigenschaften der Funktoren $H^p_c(X, F)$

Mit den oben angegebenen Annahmen zu X, $\overline{X}$ und F gelten die folgenden Aussagen.

(i) $H^0_c(X, F) = \Gamma_c(X, F)$.

---

[32] d.h. ein reduziertes, irreduzibles und separiertes Schema endlichen Typs über einem (algebraisch abgeschlossenen Körper k ?).

[33] Wir können dann $\overline{X}$ durch die Abschließung des Bildes von j ersetzen, also annehmen, daß X in $\overline{X}$ dicht liegt. Der allgemeinere Fall wäre derjenige, daß X eine in $\overline{X}$ dicht liegende Teilmenge ist, wobei die natürliche Einbettung

$$X \hookrightarrow \overline{X}$$

ein Morphismus ist. Da jeder Morphismus endlichen Typs von noetherschen Schemata konstruktive Teilmengen in konstruktive Teilmengen überführt (vgl. Hartshorne, Ex. II.3.19), wäre dann X ein konstruktive dicht liegende Teilmenge von $\overline{X}$, d.h. endliche Vereinigung von Differenzen offener Teilmengen (vgl. Hartshorne, Ex. II.3.18) und damit die Vereinigung einer offenen dichten Teilmenge mit lokal offenen Teilmengen von deren Komplement.

(ii) Die Funktoren $H^p_c(X, ?)$ bilden einen ∂-Funktor, d.h. zu jeder kurzen exakten Garben-Sequenz gehört eine lange exakte Kohomologie-Sequenz, die in funktorieller Weise von der kurzen exakten Garben-Sequenz abhängt.

(iii) Für jede eigentliche Teilvarietät $Z \hookrightarrow X$ gibt es einen natürlichen Morphismus von ∂-Funktoren

$$H^p_Z(X, ?) \longrightarrow H^p_c(X, ?).$$

Beweis. Zu (i). Wir betrachten die abgeschlossene Einbettung

$$i: \overline{X} - X \hookrightarrow \overline{X}$$

und die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_!j^*F \longrightarrow F \longrightarrow i_*i^*F \longrightarrow 0.$$

von 4.5.6, wobei wir die Garbe F auf $\overline{X}$ durch das direkte Bild j_*F einer Garbe F auf X ersetzen:

$$0 \longrightarrow j_!j^*j_*F \longrightarrow j_*F \longrightarrow i_*i^*j_*F \longrightarrow 0.$$

Nun ist die Einschränkung j^*j_*F von j_*F auf X gerade F, d.h. die Sequenz läßt sich in der Gestalt

$$0 \longrightarrow j_!F \longrightarrow j_*F \longrightarrow i_*i^*j_*F \longrightarrow 0.$$

schreiben. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} H^0_c(X, F) &= H^0(\overline{X}, j_!F) \qquad \text{(nach Definition von } H^0_c) \\ &=^{34} \operatorname{Ker}(H^0(\overline{X}, j_*F) \longrightarrow H^0(\overline{X}, i_*i^*j_*F)) \\ &= \operatorname{Ker}(H^0(X, F) \longrightarrow H^0(\overline{X} - X, i^*j_*F)) \\ &= \operatorname{Ker}(\Gamma(X, F) \longrightarrow \Gamma(\overline{X} - X, i^*j_*F)) \\ &= \operatorname{Ker}(\Gamma(X, F) \longrightarrow \varinjlim_{V \longrightarrow \overline{X}} \Gamma(V \times_{\overline{X}} X, j_*F)) \end{aligned}$$

wobei $V \longrightarrow \overline{X}$ die Etal-Morphismen durchläuft, deren Bild die Teilmenge $\overline{X} - X$ enthalten.

$$\begin{array}{ccc} \overline{X}\text{-}X & \longrightarrow & V \\ \| & & \downarrow \text{etal} \\ \overline{X}\text{-}X & \overset{i}{\hookrightarrow} & \overline{X} \end{array}$$

Man beachte, der direkte Limes rechts ist nach 4.3.3 gerade die Gruppe der Schnitte der Prägarbe i^pj_*F über $\overline{X} - X$. Weil F eine Garbe ist, bleibt der Kern unverändert, wenn man zur assoziierten Garbe i^*j_*F übergeht (vgl. 4.4.1). Weil das Bild von $V \times_{\overline{X}} X$ ganz in X liegt, kann man noch j_*F durch F ersetzen.

$$H^0_c(X, F) = \operatorname{Ker}(\Gamma(X, F) \longrightarrow \varinjlim_{V \longrightarrow \overline{X}} \Gamma(V \times_{\overline{X}} X, F))$$

Damit ist[35]

---

[34] wegen der kurzen exakten Sequenz (1).

[35] Ein Element, hat genau dann das Bild Null im Limes, wenn dieses Bild in einem $\Gamma(V \times_{\overline{X}} X, F)$ durch die Null representiert wird.

$$H^0_c(X, F) = \bigcup \mathrm{Ker}(\Gamma(X, F) \longrightarrow \Gamma(V \times_{\overline{X}} X, F)).$$

Sei jetzt $s \in \Gamma_c(X, F)$. Dann ist $s \in \Gamma(X, F)$ ein Schnitt mit

$$s|_{\overline{X}-Z} = 0$$

für ein eigentliches Teilschema $Z \hookrightarrow \overline{X}$. Mit

$$V := \overline{X} - Z,$$

d.h.

$$V \times_{\overline{X}} X = V \cap X = (\overline{X} - Z) \cap X = X - Z,$$

ist dann auch

$$0 = s|_{X-Z} = s|_{V \times_{\overline{X}} X},$$

d.h.

$$s \in H^0_c(X, F).$$

Sei jetzt umgekehrt s ein Element von $H^0_c(X, F)$. Dann gilt $s \in \Gamma(X, F)$ und

$$s|_{V \times_{\overline{X}} X} = 0 \qquad (1)$$

für ein Etal-Schema $V \longrightarrow \overline{X}$, dessen Bild das Teilschema $\overline{X} - X$ enthält. Bezeichne

$$V'$$

das Bild von V in $\overline{X}$. Dann ist

$$\overline{X} - X \subseteq V' \subseteq \overline{X}$$

und V' ist offen in $\overline{X}$. Insbesondere ist

$$Z := \overline{X} - V' \subseteq \overline{X} - (\overline{X} - X) = X$$

abgeschlossen in X und $\overline{X}$, also mit der reduzierten Schema-Struktur ein eigentliches Teilschema von X mit

$$X - Z = X - (\overline{X} - V') = V' \cap X.$$

Aus dem Etal-Morphismus $V \twoheadrightarrow V' \hookrightarrow \overline{X}$ erhält man durch Basiswechsel $X \hookrightarrow \overline{X}$ einen Etal-Morphismus

$$V \times_{\overline{X}} X \twoheadrightarrow V' \times_{\overline{X}} X = V' \cap X \hookrightarrow X,$$

wobei die Surjektion links eine Überdeckung definiert. Mit (1) ist damit auch

$$s|_{X-Z} = s|_{V' \cap X} = 0,$$

also $s \in \Gamma_c(X, F)$.

Zu (ii). Die Fortsetzung $j_!$ durch Null ist ein exakter Funktor (vgl. die Eigenschaften der Standard-Funktoren 4.5.8). Damit definieren die Funktoren

$$H^p_c(X, F) := H^p(\overline{X}, j_! F)$$

einen ∂-Funktor.

Zu (iii). Aus (i) und der Definition

$$\Gamma_c(X, F) := \bigcup_{Z \text{ eigentlich in } X} \mathrm{Ker}(\Gamma(X, F) \longrightarrow \Gamma(X, X-Z))$$

(vgl. 5.1.26) erhalten wir für jedes Z einen natürlichen Morphismus

$$H^0_Z(X, F) \longrightarrow H^0_c(X, F).$$

Weil die Funktoren $H^p_Z(X, F)$ als abgeleitete Funktoren einen universellen ∂-Funktor bilden, ergibt sich die Behauptung auf (ii).
QED.

5.1.28 Die lange Kohomologie-Sequenz der H^p_c zu einer abgeschlossenen Einbettung

Sei Z ein abgeschlossenes Teilvarietät der Varietät X und seien

$$j': X - Z \hookrightarrow X \text{ und } i': Z \hookrightarrow X$$

die natürlichen Einbettungen. Für jede Garbe F auf X_{et} bekommt dann die kurze exakte Sequenz von 4.5.6 die Gestalt

$$0 \longrightarrow j'_!(F| X - Z) \longrightarrow F \longrightarrow i'_*(F \mid Z) \longrightarrow 0 \text{ mit } F|Z := i'^*F.$$

Die zugehörige lange Kohomologie-Sequenz der H^p_c hat die Gestalt

$$... \longrightarrow H^p_c(X - Z, F) \longrightarrow H^p_c(X, F) \longrightarrow H^p_c(Z, F|Z) \longrightarrow ...$$

Beweis. Weil die $H^p_c(X, ?)$ einen ∂-Funktor bilden, erhalten wir eine exakte Sequenz

$$--- \longrightarrow H^p_c(X, j'_!(F| X - Z)) \longrightarrow H^p_c(X,F) \longrightarrow H^p_c(X, i'_*(F \mid Z)) \longrightarrow ...$$

Nach Definition der $H^p_c(X, ?)$ ist

$$\begin{aligned} H^p_c(X, j'_!(F| X - Z)) &= H^p(X, j_!j'_!(F| X - Z)) \\ &= H^p(X, (j\circ j')_!(F| X - Z)) \\ &= H^p_c(X - Z, F). \end{aligned}$$

Man beachte,

$$X - Z \overset{j'}{\hookrightarrow} X \overset{j}{\hookrightarrow} \overline{X}$$

ist eine offene Einbettung.
Zum Beweis der Behauptung haben wir noch zu zeigen, es gilt

$$H^p_c(X, i'_*(F \mid Z)) = H^p_c(Z, F|Z).$$

Dazu fixieren wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \overset{i'}{\longrightarrow} & X \\ \tilde{j}\downarrow & & \downarrow j \\ \overline{Z} & \overset{\overline{i}}{\longrightarrow} & \overline{X} \end{array}$$

mit einer eigentlichen Varität $\overline{Z}$, wobei die vertikalen Morphismen offene Einbettungen und die horizontalen Einbettungen abgeschlossene Einbettungen seien. Für $\overline{Z}$ kann man die Abschließung von Z in $\overline{X}$ nehmen und für $\tilde{j}$ und $\overline{i}$ die natürlichen Einbettungen.

Auf Grund des Beweises von 5.1.27 (i) haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_!F \longrightarrow j_*F \longrightarrow i_*i^*j_*F \longrightarrow 0.$$

für Garben F auf X_{et} bezüglich der natürlichen Einbettungen

$$X \overset{j}{\hookrightarrow} \overline{X} \text{ und } \overline{X} - X \overset{i}{\hookrightarrow} \overline{X}$$

Außerdem ist auf Grund dieeses Beweises für $f:U \longrightarrow \overline{X}$ etal:

$$H^0(U, j_!F) = \{ s \in \Gamma(U, j_*F) \mid s|U - Z' = 0 \text{ für ein eigentliches } Z' \subseteq U\} \qquad (1)$$

Eigentlich haben wir diese Identität nur für Etal-Schemata U über X bewiesen. Wenn jedoch der Träger jedes Schnitts s der Garbe F in Z liegt, gilt sie für beliebige Etal-Morphismen f. Um dies einzusehen, zerlegen wir den Etal-Morphismus f:

$$U \twoheadrightarrow f(U) \hookrightarrow \overline{X}$$

Durch den Basiswechsel $X \hookrightarrow \overline{X}$ erhalten wir

$$U \times_{\overline{X}} X \twoheadrightarrow f(U) \times_{\overline{X}} X = f(U) \cap X \hookrightarrow \overline{X}$$

und damit Etal-Überdeckungen

$$\{ U \twoheadrightarrow f(U) \} \text{ und } \{U \times_{\overline{X}} X \twoheadrightarrow f(U),\ f(U) - Z \hookrightarrow f(U) \}^{36}$$

Die erste Überdeckung liefert für beliebige Garben F einen Isomorphismus

$$F(f(U)) \overset{\cong}{\longrightarrow} F(U)$$

und die zweite für Garben F, deren Schnitte einen Träger haben, der ganz in Z liegt, einen Isomorphismus

$$F(f(U)) \overset{\cong}{\longrightarrow} F(U \times_{\overline{X}} X),$$

Nun faktorisiert sich $U \times_{\overline{X}} X \twoheadrightarrow f(U)$ über U, d.h. die Garben-Restriktion

$$F(U) \overset{\cong}{\longrightarrow} F(U \times_{\overline{X}} X)$$

ist ebenfalls ein Isomorphismus. Ist F eine Garbe, deren Schnitte einen Träger ganz in Z haben, so gilt dasselbe für die Garbern $j_!F$ und j_*F. Die Schnittmengen auf den beiden Seiten von (1) ändern sich also nicht, wenn man U durch $U \times_{\overline{X}} X$ esetzt.

Nun haben die Schnitte der Garbe $i'_*(F|Z)$ offensichtlich einen Träger, der ganz in Z liegt. Deshalb gilt (1) mit $i'_*(F|Z)$ anstelle von F:

$$H^0(U, j_! i'_*(F|Z)) = \{ s \in \Gamma(U,\ j_* i'_*(F|Z)) \mid s|U - Z' = 0 \text{ für ein eigentliches } Z' \subseteq U\}$$

$$= \{ s \in \Gamma(U, \overline{i}_* \widetilde{j}_*(F|Z)) \mid s|U - Z' = 0 \text{ für ein eigentliches } Z' \subseteq U\}$$

$$= \{ s \in \Gamma(\overline{U}, \widetilde{j}_*(F|Z)) \mid s|\overline{U} - Z' = 0 \text{ für ein eigentliches } Z' \subseteq \overline{U}\}$$

Dabei entstehe $\overline{U} \longrightarrow \overline{Z}$ aus $U \longrightarrow \overline{X}$ durch Basiswechsel bezüglich $\overline{i}:\overline{Z} \hookrightarrow \overline{X}$.

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & \overline{X} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \overline{U} & \hookrightarrow & \overline{Z} \end{array}$$

Betrachten wir jetzt den Spezielfall

$$X := Z,\ \overline{X} := \overline{Z},\ i' = Id,\ \overline{i} = Id,\ j = \widetilde{j}$$

---

[36] Das Bild des ersten Morphismus ist $f(U) \cap X$. Wegen $Z \subseteq X$, also $f(U) - X \subseteq f(U) - Z$, liegen alle übrigen Punkte im Bild des zweiten.

Wir erhalten dann bezüglich der Einbettungen

$$Z \overset{\sim}{\underset{j}{\hookrightarrow}} \overline{Z} \text{ und } \overline{Z} - Z \overset{\sim}{\underset{i}{\hookrightarrow}} \overline{Z}$$

die Identität

$$H^0(\overline{U}, \tilde{j}_! (F|Z)) = \{ s \in \Gamma(\overline{U}, \tilde{j}_*(F|Z)) \mid s|\overline{U} - Z' = 0 \text{ für ein eigentliches } Z' \subseteq \overline{U}\}.$$

Mit anderen Worten, es gilt für jeden Etal-Morpismus $U \longrightarrow \overline{X}$

$$H^0(U, \overline{i}_* \tilde{j}_! (F|Z)) = H^0(U, j_! i'_*(F|Z)),$$

d.h.

$$j_! i'_*(F|Z)) = \overline{i}_* \tilde{j}_! (F|Z))$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} H^p_c(X, i'_*(F \mid Z)) &= H^p(\overline{X}, j_! i'_*(F \mid Z)) \\ &= H^p(\overline{X}, \overline{i}_* \tilde{j}_!(F \mid Z)) \\ &= H^p(\overline{Z}, \tilde{j}_!(F \mid Z)) \\ &= H^p_c(Z, F|Z). \end{aligned}$$

QED.

5.1.29 Die Spektral-Sequenz zu einer Kette von abgeschlossenen Teilvarietäten.

Eine absteigende Folge

$$X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \ldots \supseteq X_r = \varnothing$$

von abgeschlossenen Teilschemata definiert eine Spektral-Sequenz

$$E_1^{pq} = H_c^{p+q}(X_p - X_{p+1}, F) \Rightarrow H_c^{p+q}(X, F)$$

Für jede Garbe F auf X_{et}.

Beweis. Wir bezeichnen mit

$$i_\nu : X_\nu \hookrightarrow X \text{ und } j_\nu : X_\nu - X_{\nu+1} \hookrightarrow X_\nu$$

die natürlichen abgeschlossenen bzw. offenen Einbettungen. Wir setzen

$$F_\nu := \overset{*}{i_\nu} F.$$

und benutzen die direkten Bild-Funktoren um für jedes ν die Kategorie $S((X_\nu)_{et})$ mit einer Teilkategorie von $S(X_{et})$ zu identifizieren. Die F_ν werden so zu Garben auf X.

Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_! j^* F \longrightarrow F \longrightarrow i_* i^* F \longrightarrow 0.$$

von 4.5.6 führt dann für jedes ν zu exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow (j_\nu)_! F_\nu \mid X_\nu - X_{\nu+1} \longrightarrow F_\nu \longrightarrow F_{\nu+1} \longrightarrow 0.$$

die wir als Sequenzen von Garben auf X auffassen könnnen. Wir schreiben sie in der Gestalt

$$0 \longrightarrow F'_\nu \longrightarrow F_\nu \longrightarrow F_{\nu+1} \longrightarrow 0 \text{ mit } F'_\nu := F_\nu \mid X_\nu - X_{\nu+1} \qquad (1)$$

Insbesondere erhalten wir eine Folge von Epimorphismen

$$F^* = F_0 \twoheadrightarrow F_1 \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow F_r = 0 \qquad (2)$$

von $\mathbf{S}(X_{et})$, die wir in der dualen Kategorie auch als Folge von Teilobjekten betrachten können.

Für jedes ν bezeichne I^*_ν die Godement-Auflösung von F_ν,

$$0 \longrightarrow F_\nu \longrightarrow I^*_\nu \qquad (3)$$

Die Epimorphismen von (2) induzieren Epimorphismen der Godement-Auflösungen[37]

$$I^* = I^*_0 \twoheadrightarrow I^*_1 \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow I^*_r = 0.$$

Durch Anwenden von

$$\Gamma(\overline{X}, j_! \, ?)$$

erhalten wir eine Folge von Surjektionen von Komplexen abelscher Gruppen.[38] In der dualen Kategorie

$$Ab^{op} = Ab$$

ist dies eine Folge von Teilkomplexen von

$$\Gamma(\overline{X}, j_! I^*)$$

und definiert so auf $\Gamma(X, j_! I^*)$ die Struktur eines filtrierten Komplexes. Die zugehörige Spektral-Sequenz[39] hat die Gestalt

$$H^{p+q}(\mathrm{Ker}(\Gamma(\overline{X}, j_! I^*_p) \twoheadrightarrow \Gamma(\overline{X}, j_! I^*_{p+1})) \Rightarrow H^{p+q}(\Gamma(\overline{X}, j_! I^*))$$

Man beachte, die Kerne links sind in der dualen Kategorie Kokerne, d.h. gerade die Faktoren der entsprechenden Filtration.
Es gilt

$$H^{p+q}(\Gamma(\overline{X}, j_! I^*)) =^{40} H^{p+q}(\overline{X}, j_! F) = H_c^{p+q}(X, F).$$

---

[37] Weil Garben-Surjektionen auf den Halmen Surjektionen induzieren.

[38] Weil die beteiligten Garben induziert (also direkte Produkte ihrer Halme) sind und sich dies beim Anwenden von $j_!$ nicht ändert.

[39] Zu einem Komplex K mit nach oben und unten beschränkter absteigender Filtration $F = \{F^p\}_{p \in Z}$ gehört eine Spektralsequenz

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(F^p/F^{p+1}) \Rightarrow H^n(K),$$

siehe zum Beispiel:

Spanier, E.H.: Algebraic topology, Chap. 9,$1 Th. 2

Weibel, C.A.: An introduction to homological algebra, Th. 5.5.1

oder auch meine Vorlesung von 2003 über gemischte Hodge-Strukturen, Abschnitt 2.6.

[40] $j_!$ ist exakt und überführt induzierte in induzierte Garben (vgl. die Definition von $j_!$ in 4,5,7), d.h. aus der induzierten Auflösung

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow I^*$$

erhält man durch Anwenden von $j_!$ eine induzierte Auflösung

$$0 \longrightarrow j_! F \longrightarrow j_! I^*.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

$$I'^{*}_{p} := \mathrm{Ker}\,(I^{*}_{p} \longrightarrow I^{*}_{p+1})$$

liefert eine induzierte Auflösung

$$0 \longrightarrow F'_{p} \longrightarrow I'^{*}_{p}$$

F'_{ν}: Weil nämlich $j_!$ exakt ist, ist dann

$$0 \longrightarrow j_! F'_{p} \longrightarrow j_! I'^{*}_{p}$$

eine induziete Auflösung von $j_! F'_{p}$, also

$$\begin{aligned} H_c^{p+q}(X_p - X_{p+1}, F) &= H^{p+q}(\overline{X}, j_! F_p) \\ &= H^{p+q}(\Gamma(\overline{X}, j_! I'^{*}_{p})) \\ &= H^{p+q}(\Gamma(\overline{X}, j_! \mathrm{Ker}\,(I^{*}_{p} \longrightarrow I^{*}_{p+1}))) \quad \text{(nach Definition von } I'^{*}_{\nu}) \\ &=^{41} H^{p+q}(\Gamma(\overline{X}, \mathrm{Ker}\,(j_! I^{*}_{p} \longrightarrow j_! I^{*}_{p+1}))) \\ &=^{42} H^{p+q}(\mathrm{Ker}(\Gamma(\overline{X}, j_! I^{*}_{p}) \to \Gamma(\overline{X}, j_! I^{*}_{p+1}))) \end{aligned}$$

Zeigen wir also,

$$I'^{*}_{\nu} := \mathrm{Ker}\,(I^{*}_{\nu} \longrightarrow I^{*}_{\nu+1})$$

ist auf X eine induzierte Auflösung von $F'_{\nu} = F_{\nu} \mid X_{\nu} - X_{\nu+1}$. Der Komplex-Morphismus $I^{*}_{\nu} \longrightarrow I^{*}_{\nu+1}$ ist ein Epimorphismus von Komplexen induzierter Garben, und besteht im wesentlichen aus Projektionen von Produkten von Halmen auf Teilprodukte. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I'^{*}_{\nu} \longrightarrow I^{*}_{\nu} \longrightarrow I^{*}_{\nu+1} \longrightarrow 0$$

ist deshalb eine zerfallende exakte Sequenz und I'^{*}_{ν} besteht aus induzierten Garben und ist exakt in allen positiven Graden. Mit anderen Worten I'^{*}_{ν} ist eine induzierte Auflösung

$$0 \longrightarrow H^0(I'^{*}_{\nu}) \longrightarrow I'^{0}_{\nu} \longrightarrow I'^{1}_{\nu} \longrightarrow I'^{2}_{\nu} \longrightarrow \ldots$$

der Garbe

$$H^0(I'^{*}_{\nu}) = \mathrm{Ker}(I'^{0}_{\nu} \longrightarrow I'^{1}_{\nu}).$$

Es reicht also zu zeigen, diese Garbe ist isomorph zu F'_{ν}. Zum Beweis betrachten wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilten und Spalten.

---

[41] $j_!$ ist exakt, kommutiert also mit Kernen.

[42] $\Gamma(\overline{X}, ?)$ ist linksexakt kommutiert also mit Kernen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathrm{Koker}(f'_\nu) & \longrightarrow & \mathrm{Koker}(f_\nu) & \longrightarrow & \mathrm{Koker}(f_{\nu+1}) & & \\
 & & \uparrow\uparrow & & \uparrow\uparrow & & \uparrow\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & I'^1_\nu & \longrightarrow & I^1_\nu & \longrightarrow & I^1_{\nu+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow f'_\nu & & \uparrow f_\nu & & \uparrow f_{\nu+1} & & \\
0 & \longrightarrow & I'^0_\nu & \xrightarrow{\beta} & I^0_\nu & \longrightarrow & I^0_{\nu+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \alpha\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathrm{Ker}(f'_\nu) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(f_\nu) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(f_{\nu+1}) & &
\end{array}$$

Das Schlangen-Lemma liefert eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Ker}(f'_\nu)\longrightarrow\mathrm{Ker}(f_\nu)\longrightarrow\mathrm{Ker}(f_{\nu+1}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Koker}(f'_\nu)\longrightarrow\mathrm{Koker}(f_\nu)\longrightarrow\mathrm{Koker}(f_{\nu+1})$$

Der horizontale Morphismus unten links des Diagramms ist monomorph (weil die Morphismen α und β es sind), d.h. wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f'_\nu)\longrightarrow\mathrm{Ker}(f_\nu)\longrightarrow\mathrm{Ker}(f_{\nu+1}).$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f'_\nu) &= \mathrm{Ker}(\mathrm{Ker}(f_\nu)\longrightarrow\mathrm{Ker}(f_{\nu+1})) \\
&= \mathrm{Ker}(F_\nu \longrightarrow F_{\nu+1}) && \text{(nach (3) ist } \mathrm{Ker}(f_\nu) = F_\nu) \\
&= F'_\nu && \text{(nach (1))}
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten, $I'^*_\nu = \mathrm{Ker}\,(I^*_\nu \longrightarrow I^*_{\nu+1})$ ist eine induzierte Auflösung von F'_ν.

QED.

5.1.30 Aufgabe (weglassen ?)

Bezeichne A einen (noetherschen) Ring und gleichzeitig auch die durch A definierte Garbe auf X_{et},

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_X(U, A_X).$$

Man beweise die folgenden Aussagen.

(i) Für jede injektive Garbe F von A-Moduln und jeden geometrischen Punkt $\bar{x} \longrightarrow X$ von X ist $F_{\bar{x}}$ ein injektiver A-Modul.

(ii) Sei F_0 ein in $\bar{x}$ pseudo-kohärente Garbe. Dann gilt

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_A(F_0, F) = \mathrm{Ext}^p_{A_{\bar{x}}}((F_0)_{\bar{x}}, F_{\bar{x}}).$$

(iii) Es gilt $\mathrm{Ext}^p_A(F, A) = 0$ für $p > 0$ und jede lokal freie Garbe F endlichen Rangs von A-Moduln (d.h. für jeden Punkt $x \in X$ soll es eine Umgebung U geben mit $F|_U \cong A^r$ mit einem endlichen $r = r(U)$). Dieselbe Aussage gilt, falls F pseudo-kohärent in allen geometrischen Punkten des Schemas X und A als A-Modul injektiv ist (Beispiel: $A = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$).

5.2 Čech-Kohomologie

5.2.1 Čech-Komplex und Čech-Kohomologie einer Prägarbe bezüglich einer Überdeckung

Seien X ein Schema, X_E ein Situs wie in 1.3.9 und

$$\underline{U} = \{U_i \xrightarrow{\varphi_i} X\}_{i\in I}$$

eine Überdeckung vonn X_E. Für jedes (p+1)-Tupel

$$i = (i_0, \dots , i_p) \in I^{p+1}$$

setzen wir

$$U_i := U_{i_0,\dots,i_p} := U_{i_0} \times_X \dots \times_X U_{i_p} .$$

Weiter sei

$$\varepsilon_j(i) := ((i_0, \dots ,i_{j-1} i_{j+1},\dots, i_p).$$

Die natürlichen Projektion

$$U_i \longrightarrow U_{\varepsilon_j(i)}$$

auf das Teilprodukt induziert dann für jede Prägarbe P eine Restriktion

$$res_{i,j} :P(U_{\varepsilon_j(i)}) \longrightarrow P(U_i),$$

die wir manchmal abkürzend auch einfach mit res_j bezeichnen. Der Čech-Komplex der Prägarbe P zur Überdeckung U ist definiert als der Komplex

$$\check{C}(\underline{U}, P) := (\check{C}^p(\underline{U}, P) , d^p: \check{C}^p(\underline{U}, P) \longrightarrow \check{C}^{p+1}(\underline{U}, P))$$

mit den Objekten

$$\check{C}^p(\underline{U}, P) := \prod_{i\in I^{p+1}} P(U_i)$$

dessen Differentiale d^p wie folgt definiert sind. Für

$$s = (s_i)_{i\in I^{p+1}} = (s_{i_0,\dots,i_p})_{(i_0,\dots,i_p)\in I^{p+1}} \in \check{C}^p(\underline{U}, P)$$

sei $ds = ((ds)_i)_{i\in I^{p+2}}$ die Familie mit

$$(ds)_i := \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j res_{i,j} (s_{\varepsilon_j(i)})$$

d.h. mit

$$(ds)_{(i_0,\dots,i_{p+1})} := (ds)_{i_0,\dots,i_{p+1}} := \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j res_j (s_{i_0,\dots,i_{j-1},i_{j+1},\dots,i_{p+1}})$$

Bemerkungen

(i) In der üblichen Weise[43] zeigt man

$$d^{p+1} \circ d^p = 0,$$

d.h. die obigen Konstruktionen führen tatsächlich zu einem Komplex.

(ii) Die Kohomologie des Cech-Komplexes $\overset{\vee}{C}(\underline{U}, P)$ heißt Cech-Kohomologie von P bezüglich der Überdeckung $\underline{U}$ und wird mit

$$\overset{\vee}{H}^p(\underline{U}, P)$$

bezeichnet.

5.2.2 Verfeinerungen von Überdeckungen und Komplex-Morphismen

Seien X ein Schema, X_E ein Situs wie in 1.3.9 und

$$\underline{U} = \{U_i \xrightarrow{\varphi_i} X\}_{i \in I}$$

$$\underline{V} = \{V_j \xrightarrow{\psi_j} X\}_{j \in J}$$

zwei Überdeckungen von X_E. Man sagt, $\underline{V}$ sei eine Verfeinerung von $\underline{U}$, wenn es eine Abbildung

$$\tau: J \longrightarrow I$$

mit der Eigenschaft gibt, daß sich für jedes $j \in J$ der Morphismus ψ_j über $\varphi_{\tau(j)}$ faktorisiert, d.h.

$$\psi_j = \varphi_{\tau(j)} \circ \eta_j \qquad \begin{array}{ccc} V_j & \xrightarrow{\eta_j} & U_{\tau(j)} \\ & {\scriptstyle \psi_j} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \varphi_{\tau(j)}} & \\ & X & \end{array}$$

mit einem Morphismus

$$\eta_j: V_j \longrightarrow U_{\tau(j)}\,.$$

Bemerkungen

(i) Die Abbildung τ induziert zusammen mit der Familie $\eta := \{\eta_j\}_{j \in J}$ für jede Prägarbe P auf X_E und jedes p einen Homomorphismus

$$\tau^p = \tau^p_\eta : \overset{\vee}{C}^p(\underline{U}, P) \longrightarrow \overset{\vee}{C}^p(\underline{V}, P),\ s \mapsto \tau^p s\,.$$

Für $s = (s_i)_{i \in I^{p+1}} = (s_{i_0,\ldots,i_p})_{i_0,\ldots,i_p \in I}$ sei dabei

---

[43] Die Familie ds entsteht aus der Familie s, indem man für jeden Multi-Index $i \in I^{p+1}$ auf jede mögliche Weise eine Koordinate streicht, die zugehörigen Schnitte der Familie s auf U_i einschränkt und die alternierende Summe bildet.
Die Familie dds entsteht entsprechend durch zweimaliges Streichen. Für je zwei zu streichende Indizes kann man erst den ersten und dann den zweiten Streichen oder man kann dies in umgekehrter Reihenfolge tun. In beiden Fällen ist das Ergebnis dasselbe, nur die zugehörigen Vorzeichen in den alternierenden Summen sind unterschiedlich (weil der größere zu streichende Index seine Position um 1 ändert, wenn man den kleineren Index zuerst streicht). Die beiden Ergebnisse heben sich gegenseitig weg, sodaß man insgesamt Null erhält: dds = 0.

$$(\tau^p(s)_j)_{j\in J^{p+1}} = (\tau^p(s)_{j_0,\dots,j_p})_{j_0,\dots,j_p \in J}$$

die Familie mit

$$\tau^p(s)_j := \mathrm{res}_{\eta_j}(s_{\tau(j)}).$$

Für $j = (j_0, \dots, j_p)$ sei dabei

$$\eta_j := \eta_{j_0} \times \dots \times \eta_{j_p} : V_j := V_{j_0} \times_X \dots \times_X V_{j_p} \longrightarrow U_{\tau(j_0)} \times_X \dots \times_X U_{\tau(j_p)} =: U_{\tau(j)}$$

das Faserprodukt der η_{j_ν} über X und

$$\mathrm{res}_{\eta_j}(s_{\tau(j)}): P(U_{\tau(j)}) \longrightarrow P(V_j)$$

die zugehörige Garben-Restriktion, d.h.

$$\tau^p(s)_{j_0,\dots,j_p} := \mathrm{res}_{\eta_{j_0} \times \dots \times \eta_{j_p}})(s_{\tau(j_0),\dots,\tau(j_p)}). \qquad (1)$$

(ii) Die Abbildungen τ^p kommutieren mit den Differentialen d des Čech-Komplexes[44], induzieren also einen Komplex-Morphismus

$$\tau^* = \tau^*_\eta : \check{C}(\underline{U}, P) \longrightarrow \check{C}(\underline{V}, P),$$

und damit Homomorphismen der Čech-Kohomologie

$$\rho(\underline{V},\underline{U},\tau,\eta) := \check{H}^p(\tau) = \check{H}^p(\tau,\eta) : \check{H}^p(\underline{U}, P) \longrightarrow \check{H}^p(\underline{V}, P),$$

5.2.3 Eindeutigkeit der Komplex-Morphismen τ^*_η bis auf Homotopie

Die in 5.2.2 konstruierten Komplex-Moprhismen

$$\tau^* = \tau^*_\eta : \check{C}(\underline{U}, P) \longrightarrow \check{C}(\underline{V}, P),$$

sind durch die Überdeckungen $\underline{U}$ und $\underline{V}$ bis auf Homotopie eindeutig bestimmt. Die induzierten Homomorphismen der Čech-Kohomoloige

$$\rho(\underline{V},\underline{U},\tau,\eta) := \check{H}^p(\tau) = \check{H}^p(\tau,\eta) : \check{H}^p(\underline{U}, P) \longrightarrow \check{H}^p(\underline{V}, P),$$

hängen also nicht von der speziellen Wahl der der τ und η ab.

Beweis. Seien eine zweite Abbildung

$$\tau': J \longrightarrow I$$

mit zugehöriger Morphismen-Familie $\eta' := \{\eta'_j\}_{j\in J}$ gegeben. Wir betrachten den Homomorphismus

$$k^p: \check{C}^p(\underline{U}, P) \longrightarrow \check{C}^{p-1}(\underline{V}, P),$$

welcher die Familie

---

[44] Streicht man in (1) auf der linken Seite einen Index j_ν und auf der rechten Seite den zugehörigen Faktor η_{j_ν} und den Index $\tau(j_\nu)$, so erhält man wieder eine Identität der Gestalt (1).

$$s = (s_i)_{i\in I^{p+1}} \in \overset{\vee}{C}{}^p(\underline{U}, P)$$

abbildet auf die Familie

$$k^p s = ((k^p s)_j)_{j\in J^p} \in \overset{\vee}{C}{}^{p-1}(\underline{V}, P)$$

mit

$$(k^p s)_{j_0,\ldots,j_{p-1}} := \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^r \text{res}_{\eta_{j_0}\times\ldots\times\eta_{j_{r-1}}\times(\eta_{j_r},\eta'_{j_r})\times\eta'_{j_{r+1}}\times\ldots\times\eta'_{j_{p-1}}} (s_{\tau(j_0),\ldots,\tau(j_r),\tau'(j_r),\ldots,\tau'(j_{p-1})})$$

Abkürzend wollten wir eine Identität dieser Art auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$(k^p s)_j := \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^r \text{res}_{\varepsilon_r(\eta_j,\eta'_j)} ({}^{s}\varepsilon_r(\tau(j),\tau'(j)))$$

Man beachte, (η_{j_r},η'_{j_r}) ist der Morphismus

$$(\eta_{j_r},\eta'_{j_r}): V_{j_r} \longrightarrow U_{\tau(j_r)} \times_X U_{\tau'(j_r)} \tag{1}$$

mit den Koordinaten-Funktionen η_{j_r} und η'_{j_r}. Der Morphismus

$$\eta_{j_0}\times\ldots\times\eta_{j_{r-1}}\times(\eta_{j_r},\eta'_{j_r})\times\eta'_{j_{r+1}}\times\ldots\times\eta'_{j_{p-1}} : V_{j_0,\ldots,j_{p-1}} \longrightarrow U_{\tau(j_0),\ldots,\tau(j_r),\tau'(j_r),\ldots,\tau'(j_{p-1})}$$

bildet somit ein p-faches Faserprodukt in ein (p+1)-faches Faserprodukt ab. Die Abbildungen k^p genügen den Identitäten

$$d^{p-1}k^p + k^{p+1}d^p = \tau'^p - \tau^p \text{ für } p = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Um das einzusehen, beachten wir zunächst, daß in der definierenden Summe für

$$k^{p+1}(ds)_j$$

der Summand zu r = 0 entsteht durch Einschränken von

$$({}^{ds}\varepsilon_r(\tau(j),\tau'(j)) \tag{3}$$

entlang der Morphismen (1) (mit r = 0) wobei wir hier der Einfachheit halber die weniger interessanten Faktoren η_{j_ν} weggelassen haben. Nun ist (3) nach Definition selbst eine Summme. Deren erster Summand entsteht für r = 0 aus[45]

$${}^{s}\tau'(j_0),\ldots,\tau'(j_{p-1})$$

durch Einschränken entlang der Projektion

$$U_{\tau(j_r)} \times_X U_{\tau'(j_r)} \longrightarrow U_{\tau'(j_r)} \tag{4}$$

wobei wir hier erneut die weniger interessanten Faktoren, welche identische Abbildungen sind, weggelassen haben. Die Zusammensetzung von (1) und (4) ist nun gerade gleich $\eta'_{j_r} : V_{j_r} \longrightarrow U_{\tau(j_r)}$. Der entstehende Summand ist damit gerade gleich

$$\tau'^p(s)_j$$

---

[45] einem Schnitt, der nur von τ', aber nicht von τ abhängt.

Eine etwas genauere Analyse zeigt, daß nur so die Summanden entstehen, in denen kein $\tau(j_\nu)$ als Index vorkommt. Insbesondere kommen die Summanden der Gestalt $\tau'^p(s)_j$ nur in $(k^{p+1}d^p s)_j$ und nicht in $(d^{p-1}k^p)_j$ vor.

Dieselbe Argumentation mit ausgetauschten Rollen von τ und τ' zeigt, daß die Summanden $\tau^p(s)_j$ nur in $(d^{p-1}k^p s)_j$ und nicht in $(k^{p+1}d^p s)_j$ vorkommen (wobei sich das Vorzeichen um den Faktor $(-1)^{p+1}(-1)^p = (-1)^{2p+1} = -1$ ändert).

Alle anderen Summanden, für die sowohl Indizes der Gestalt $\tau(j_\nu)$ als auch der Gestalt $\tau'(j_\nu)$ treten sowohl in $d^{p-1}k^p$ als auch in $k^{p+1}d^p$ auf, jedoch mit entgegengesetzen Vorzeichen, so daß sie sich in der Summe (2) wegheben.

Auf Grund von (2) induzieren die τ^p und τ'^p auf der $\check{}$Cech-Kohomologie dieselben Abbildungen.

QED.

5.2.4 $\check{}$Cech-Komplex und $\check{}$Cech-Kohomologie einer Prägarbe

Seien X ein Schema, X_E ein Situs wie in 1.3.9 und

$$\underline{U} = \{U_i \xrightarrow{\varphi_i} X\}_{i\in I}$$

$$\underline{V} = \{V_j \xrightarrow{\psi_j} X\}_{j\in J}$$

$$\underline{W} = \{W_\ell \xrightarrow{\varepsilon_j} X\}_{\ell\in L}$$

Überdeckungen von X_E. Ist $\underline{V}$ eine Verfeinerung von $\underline{U}$ und $\underline{W}$ eine solche von $\underline{V}$, so ist $\underline{W}$ auch eine Verfeinerung von $\underline{U}$, und nach 5.2.3 gilt für die auf der $\check{}$Cech-Kohomologie induzierten Homomorphismen

$$\rho(\underline{W},\underline{U}) = \rho(\underline{W},\underline{V})\circ\rho(\underline{V},\underline{U}).$$

Wir können zum direkten Limes

$$\check{H}^p(X_E, P) := \varinjlim_{\underline{U}} \check{H}^p(\underline{U}, P)$$

bezüglich aller Überdeckungen $\underline{U}$ von X übergehen, welcher $\underline{\check{}\text{Cech-Kohomologie}}$ der Prägarbe P auf X heißt.

Bemerkungen

(i) Wir sind es gewohnt, Limites über halbgeordnete Mengen zu bilden. Der hier betrachtete Limes ist nicht von dieser Art. Genauer, man muß die angegebene Konstruktion wie folgt leicht verändern, um einen Limes dieser Art zu erhalten.

(ii) $\underline{\text{Äquivalenzklassen von Verfeinerungen}}$. Schreiben wir $\underline{V} \hookrightarrow \underline{U}$ für zwei Überdeckungen $\underline{U}$ und $\underline{V}$ von X, wenn $\underline{V}$ eine Verfeinerung von $\underline{U}$ ist. Dann bilden die Überdeckungen von X zusammen mit den Verfeinerungsrelationen $\underline{V} \hookrightarrow \underline{U}$ als Morphismen eine Kategorie. Da je zwei Überdeckungen

$$\underline{U} = \{U_i \xrightarrow{\varphi_i} X\}_{i\in I}$$

$$\underline{V} = \{V_j \xrightarrow{\psi_j} X\}_{j\in J}$$

eine gemeinsame Verfeinerung

$$\{U_i \times_X V_j \xrightarrow{\psi_j} X\}_{j\in J}$$

besitzen, ist diese Kategorie sogar kofiltrierend.[46] Die Menge der Überdeckungen von X ist allerdings bezüglich der Relation '$\hookrightarrow$' keine halbgeordnete Menge: die Relation ist nicht anti-symmetrisch. Das kann man jedoch ändern, indem man zwei Überdeckungen als äquivalent betrachtet, wenn sie Verfeinerungen voneinander sind und den Limes bezüglich dieser Äquivalenzklassen betrachtet.

(iii) Prägarbisierte $\overset{\vee}{\text{C}}$ech-Kohomologie. Seien $U \longrightarrow X$ ein Morphismus von C/X und P eine Garbe von $(C/X)_E$. Dann kann man für jede Überdeckung $\underline{U}$ von U analog wie oben die Gruppe

$$\overset{\vee}{H}^p(\underline{U}/U, P) := \overset{\vee}{H}^p(\underline{U}, P|_U)$$

definieren, und damit auch die Gruppe

$$\overset{\vee}{H}^p(U, P) := \varinjlim_{\underline{U}} \overset{\vee}{H}^p(\underline{U}/U, P) = \overset{\vee}{H}^p(U, P|_U),$$

wobei der Limes über die Überdeckungen $\underline{U}$ von U erstreckt wird. Diese Kohomologien werden durch dieselben Komplexe wie bisher deffiniert, nur daß X durch U und P durch $P|_U$ zu ersetzen sind. Wir erhalten so einen kontravarianten Fuinktor

$$(C/X) \longrightarrow Ab,\ U \mapsto \overset{\vee}{H}^p(U, P),$$

d.h. eine Prägarbe auf $(C/X)_E$. Diese Prägarbe bezeichnen wir mit

$$\overset{\vee}{\underline{H}}^p(X_E, P) \text{ oder auch mit } \overset{\vee}{\underline{H}}^p(P).$$

und sprechen von der prägarbisierten $\overset{\vee}{\text{C}}$ech-Kohomologie.

(iv) $\overset{\vee}{\text{C}}$ech-Kohomologie und assoziierte Garben. Indem wir jeden Schnitt der Prägarbe P auf die Familie seiner Restriktionen bezüglich einer Überdeckung abbilden und dann zum Limes übergehen, erhalten wir einen natürlichen Prägarben-Morphismus

$$P \longrightarrow \overset{\vee}{\underline{H}}^0(P). \qquad (1)$$

---

[46] Eine Kategorie heißt kofiltrierend, wenn sie nicht-leer und pseudokofiltrirend ist, und es außerdem für je zwei Objekte U und V Morphismen

$$W \longrightarrow U \text{ und } W \longrightarrow V$$

gibt. Die Kategorien heißt pseudokofiltrierend, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für je zwei Morphismen $U_i \xrightarrow{\varphi_i} V$ (i=1,2) gibt es zwei Morphismen $W \xrightarrow{\psi_i} U_i$ mit $\varphi_i \circ \psi_i$ unabhängig von i.

(ii) Gilt in (i) $U_1 = U_2$, so kann man die ψ_i so wählen, daß $\psi_1 = \psi_2$ gilt (Man wähle die Diagonale).

Der Kern dieses Morphismus ist gerade die Teilprägarbe

$$P_0 = \mathrm{Ker}(P \longrightarrow \check{\underline{H}}^0(P))$$

von P, deren Schnitte gerade diejenigen der Garbe P sind, die auf irgendeiner Überdeckung gleich Null werden. Wir haben diese Prägarbe P_0 beim Beweis der Existenz der assoziierten Garbe aP verwendet (vgl. 4.3.9).

Die Prägarbe P ist genau dann <u>separiert</u> (genügt dem ersten Garben-Axiom), wenn der Morphismus (1) injektiv ist.Die Prägarbe

$$\check{\underline{H}}^0(P)$$

ist stets separiert, denn jeder Schnitt wird durch eine Familie von Schnitten von P repräsentiert, wobei die 0-Schnitte gerade diejenigen sind, die repräsentierende Familie durch lauter 0-Schnitte von P besitzen.

Auf Grund der Konstruktion der assoziierten Garbe im Beweis von 4.3.9 ist[47]

$$aP = \check{\underline{H}}^0(\mathrm{Im}(P \longrightarrow \check{\underline{H}}^0(P))). \qquad (2)$$

Wenn P separiert ist, so ist - wie eben bemerkt - P isomorph zu seinem Bild in der Prägare $\check{\underline{H}}^0(P)$, d.h. es ist

$$aP = \check{\underline{H}}^0(P) \text{ für separierte Prägarben P.} \qquad (3)$$

Für Teilpräggarben $Q \subseteq P$ gilt nach Definition $\check{\underline{H}}^0(Q) \subseteq \check{\underline{H}}^0(P)$. Insbesondere ist[48]

$$aP \subseteq \check{\underline{H}}^0(\check{\underline{H}}^0(P)).$$

Umgekehrt ist jeder Schnitt s von $\check{\underline{H}}^0(\check{\underline{H}}^0(P))$, durch eine Familie von Schnitten von $\check{\underline{H}}^0(P)$ gegeben, die wiederum durch Familien von Schnitten von P gegeben sind. Der Schnitt s ist damit lokal durch Schnitte aus dem Bild von (1) gegeben und damit lokal durch Schnitte von aP. Weil aP eine Garbe ist, gilt also sogar

$$aP = \check{\underline{H}}^0(\check{\underline{H}}^0(P)) \text{ für beliebige Prägarben P} \qquad (4)$$

(v) <u>Cech-Kohomologie und alternierende Koketten</u>.
Aus der klassischen algebraischen Topologie wissen wir, daß man zum Beispiel die singuläre Kohomologie mit Hilfe von alternierenden Koketten (anstelle der geordneten Koketten) berechnen kann. Diese Konstruktion läßt sich im Fall des Zariski-Situs auf den Fall der Garben-Kohomologie übertragen.[49] Zu einer Überdeckung

$$U = \{U_i\}_{i \in I}$$

betrachtet man die endlichen Typel $s := (i_0, \ldots, i_p)$ mit $i_\nu \in I$ und

$$U_s := U_{i_0} \bigcap \ldots \bigcap U_{i_p} \neq \varnothing.$$

---

[47] Im Beweis von 4.3.9 verwenden wir die Bezeichnung $P_1 := P/P_0$ anstelle von $\mathrm{Im}(P \longrightarrow \check{\underline{H}}^0(P))$.

[48] wegen $\mathrm{Im}(P \longrightarrow \check{\underline{H}}^0(P)) \subseteq \check{\underline{H}}^0(P)$ und (2)

[49] vgl. Serre, J.-P.: Faisceaux algebriques coherents, Annalas of Math. 61:2 (1955), 197-278

Für jedes feste p bilden diese die p-dimensionalen Simplexe eines Simplizial-Komplexes K. Durch Streichen von Koordinaten erhält man gerade die Seiten des Simplexes.
Die alternierenden Koketten von K mit Koeffizienten in einer Prägarbe P sind dann gerade die Familien

$$(f_s)_{s\in K} \text{ mit } f_s \in P(U_s)$$

mit

(a) $f_s = 0$ falls zwei Koordinaten von s gleich sind (entartetes Simplex)

(b) $f_{\pi(s)} = \text{sign}(\pi)\bullet f_s$

für jede Permutation π der Koordinaten von s. Für jedes Seite s' von s hat man Garben-Restriktionen

$$P(U_s,) \longrightarrow P(U_s). \qquad (5)$$

Die alternierenden Koketten bilden dann einen Kettenkomplex, dessen Differentiale mit Hilfe von alternierenden Summen dieser Restriktionen gebildet werden.
Die Bedinungen (a) und (b) führen bei der Berechnung der Garben-Kohomologie zu sehr viel kleineren Komplexen als die von uns definierten $\check{}$Cech-Komplexe.

Für den algemeinen Fall von Grothendieck-Toplogien ist diese Konstruktion jedoch nicht geeignet. Das sieht man zum Beispiel daran, daß der alternierende Koketten-Komplex wegen (a) trivial ist, falls die Überdeckung aus nur einer Menge U_i besteht. Insbesondere ist dann auch die Kohomologie trivial.
Die Kohomologie bezüglich einer Grothendieck-Topologie muß jedoch auch für einelementige Überdeckungen nicht trivial sein. Das gilt insbesondere für den Etal-Situs und den flachen Situs (siehe zum Beispiel die nächste Bemerkung).

(vi) Der affine Fall: $\check{}$Cech-Kohomologie und Amitsur-Kohomologie.

Sei X = Spec A ein affines Schema und $\underline{U}$ = { Spec B $\longrightarrow$ Spec A } eine einelementige Überdeckung mit einer treuflachen A-Algebra B. Dann ist der $\check{}$Cech-Komplex zur Überdeckung $\underline{U}$ mit Koeffizieten in der Garbe $\mathbb{G}_m$ gerade der Komplex

$$0 \longrightarrow B^* \longrightarrow (B\otimes_A B)^* \longrightarrow (B\otimes_A B\otimes_A B^* \longrightarrow ...$$

Die Differentiale sind dabei alternierende Summen[50] von Abbildungen der Gestalt

$$b_0\otimes...\otimes b_p \mapsto b_0\otimes...\otimes 1\otimes...\otimes b_p$$

Die Vorschrift zur Berechnung von

$$\check{H}^P(\underline{U}, \mathbb{G}_m)$$

is also vergleichsweise explizit.
Die Gruppen sind im allgemeinen nicht trivial. Amitsur hat zum Beispiel im Fall einer endlichen Galois-Erweiterung

$$K/k$$

mit der Galois-Gruppe G gezeigt, daß

$$H^2(G, K^*)$$

[50] Die auftretenden Gruppen sind multiplikation. Summen sind hier also in Wirklichkeit Produkte und Differenze sind Quotienten.

gerade die Brauer-Gruppe der zentralen einfachen k-Algebren A ist, welche über K zerfallen (d.h. $A \otimes_k K$ ist isomorph zu einer Matrizen-Algebra über K).[51] Insbesondere ist

$$H^2(\text{Spec } \mathbb{R}, \mathbb{C}^*) =^{52} H^2(G(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0.^{53}$$

5.2.5 Čech-Kohomologien als ∂-Funktoren

5.2.6 Čech-Kohomologie als abgeleitete Funktoren

5.2.7 Kriterum für die Gleichheit von Čech-Kohomologie und gewöhnlicher Kohomologie

5.2.8 Der Fall einer endlichen Galois-Überdeckung

5.2.9 Čech-Kohomologie-Spektralsequenzen für die gewöhnliche Kohomologie

5.2.10 Garbisierte Čech-Kohomologie-Spektralsequenz

Index

—A—

Auflösug
  kanonische, durch induzierte Garben, 24
Auflösung
  Godement-, 24
  injektive, 12
azyklische Resolvende
  bezüglich eines Funktors, 4
azyklisches Objekt
  bekzüglich eines Funktors, 4

—B—

Basiswechsel
  eigentlicher, Satz über, 21
Bilder
  direkte, höhere, 10

—C—

Cech-Kohomologie, 41
  prägarbisierte, 45
Cech-Kohomologie einer Prägarbe, 44
Cech-Komplex, 40

—D—

Delta-Funktor, 11
direkte Bilder
  höhere, 10

[51] Amitsur, S.A.: Simple algebras and cohomology of groups of arbitrary fields, Trans. Math. Soc. 90 (1959), 73-112, Theorem 5.4 on page 96.
[52] vgl. 5.1.5
[53] $\mathbb{R}$ und die Hamiltonschen Quaternionen sind die einzigen zentralen einfachen Algebren über $\mathbb{R}$ (und sind nicht isomorph).

—E—

eigentlicher Basiswechsel
  Satz über den, 21
Erweiterung
  Joneda-, 10

—F—

Funktor
  ∂-Funktor, 11
Funktoren
  rechtsabgeleitete, 4

—G—

Garbe
  induzierte, 23; 24
  induzierte, auf einem Jacobson-Schema, 26
  kohomologisch triviale, 17
  welke, 15
genügend viele injektive Objekte, 4
Godement-Auflösung, 24

—H—

höhere direkte Bilder, 10

—I—

induzierte Garbe, 23; 24
induzierte Garbe auf einem Jacobson-Schema, 26
induzierter G-Modul, 7
injektive Auflösung, 12
injektives Objekt, 3
  genügend viele, 4

—J—

φ, 21
Jacobson-Schema
  induzierte Garbe auf einem, 26
Joneda-Erweiterung, 10

—K—

kanonische Auflösung durch induzierte Garben, 24
Kohomologie mit Träger, 28
Kohomologie-Gruppe, 9
kohomologisch triviale Garbe, 17
kompakter Träger
  Schnitt mit, 31

—L—

Leray-Spektral-Sequenz, 22
lokal-globale Spektral-Sequenz, 26

—M—

Modul
  induzierter, über einer proendlichen Gruppe, 7

—P—

prägarbisierte Cech-Kohomologie, 45

—R—

rechtsabgeleiteten Funktoren, 4

—S—

Satz über den eigentlichen Basiswechsel, 21
Schnitt mit kompakten Träger, 31
Schnitt mit Träger in einem abgeschlossenen Teilschema, 27
Spektral-Sequenz
  Leray-, 22
  lokal-globale, 26

—T—

Träger
  Kohomologie mit -, 28
  kompakter, Schnitt mit, 31
  Schnitt mit Träger in einem abgeschlossenen Teilschema, 27
trivial
  Garbe, kohomologisch triviale, 17

—Ü—

Überdeckung
  Verfeinerung einer, 41

—V—

Vereinbarung
  Funktoren zwischen abelschen Kategorien, 3
Verfeinerung einer Überdeckung, 41

—W—

welke Garbe, 15

—∂—

∂-Funktor, 11

Inhalt

BEZEICHNUNGEN **1**

5. KOHOMOLOGIE 3

5.1. Definition und grundlegende Eigenschaften 3
5.1.0 Abgeleitete Funktoren 3
5.1.1 Die Kategorie $S(X_E)$ besitzt genügend viele injektive Objekte 4
5.1.2 Der Fall des Spektrums eines Körpers 7
5.1.3 Definition der Kohomologie-Funktoren 9
5.1.4 Erste Eigenschaften der Kohomologie-Funktoren 10
5.1.5 Beispiel: der Fall X = Spec K 13
5.1.6 Zur Berechnung der Kohomologie-Funktoren durch Auflösungen 14
5.1.7 Beispiele für Klassen T des Kriteriums 5.1.6 15
5.1.8 Vergleich von $H^i(U, F)$ und $H^i(U, F|_U)$ 17
5.1.9 Vergleich von $R^i\pi_*(F)$ und $\underline{H}^i(F)$ 19
5.1.10 Höhere direkte Bilder von schwachen Garben 19
5.1.11 Halme höherer direkter Bilder entlang quasi-kompakter Morphismen 19
5.1.12 Etal-Kohomologie inverser Limites von Schemata 20
5.1.14 Bemerkungen zu 5.1.11 und 5.1.12 21
5.1.15 Zwei Spektral-Sequenzen 22
5.1.16 Direkte Bilder schwacher Garben 22
5.1.17 Kanonische Auflösungen durch induzierte Garben auf dem Etal-Situs 22
5.1.18 Aufgabe 26
5.1.19 Die lokal-globale Spektral-Sequenz 26
5.1.20 Der Funktor $\underline{Hom}(F', F'')$ für F'' injektiv 26
5.1.21 $\underline{Ext}$ als Garbe zu einer Prägarbe von globalen Ext-Funktoren 26
5.1.22 Kohomologie mit Träger in einem abgeschlossenen Teilschema 27
5.1.23 Die lange Kohomologie-Sequenz zu einer abgeschlossenen Einbettung 28
5.1.24 Ausschneidung 29
5.1.25 Kohomologie mit Träger in einem abgeschlossenen Punkt 30
5.1.26 Kohomologie mit kompakten Träger 31
5.1.27 Erste Eigenschaften der Funktoren $H^p_c(X, F)$ 31
5.1.28 Die lange Kohomologie-Sequenz der H^p_c zu einer abgeschlossenen Einbettung 34
5.1.29 Die Spektral-Sequenz zu einer Kette von abgeschlossenen Teilvarietäten. 36
5.1.30 Aufgabe (weglassen ?) 39

5.2 Čech-Kohomologie 40
5.2.1 Čech-Komplex und Čech-Kohomologie einer Prägarbe bezüglich einer Überdeckung 40
5.2.2 Verfeinerungen von Überdeckungen und Komplex-Morphismen 41
5.2.3 Eindeutigkeit der Komplex-Morphismen τ^*_η bis auf Homotopie 42
5.2.4 Čech-Komplex und Čech-Kohomologie einer Prägarbe 44
5.2.5 Čech-Kohomologien als ∂-Funktoren 48
5.2.6 Čech-Kohomologie als abgeleitete Funktoren 48
5.2.7 Kriterum für die Gleichheit von Čech-Kohomologie und gewöhnlicher Kohomologie 48
5.2.8 Der Fall einer endlichen Galois-Überdeckung 48
5.2.9 Čech-Kohomologie-Spektralsequenzen für die gewöhnliche Kohomologie 48
5.2.10 Garbisierte Čech-Kohomologie-Spektralsequenz 48

INDEX **48**

INHALT **49**