Einführung in die Etal-Kohomologie
frei nach J.S. Milne: Etale Cohomology
Vorlesung im Sommer-Semester 2016
Di 15-17 Uhr, Raum 3.13 SG verlegt auf Mi 15-17 Uhr, SG 2-14
Vorlesung im Winter-Semester 2016/17
Do 15-17 Uhr, SG 2-14
Vorlesung im Sommer-Semester 2017
Do 15-17 Uhr, SG 3-11
Vorlesung im Winter-Semester 2017/18
Fr 15-17 Uhr, A 3-14

Bezeichnungen

Ab Kategorie der abelschen Gruppen
A^h Henselisierung des lokalen Rings A, vgl. 2.4.8.
A^{sh} strenge Henselisierung des lokalen Rings A, vgl. Bemerkung 2.4.15 (ii).
Cat T die Kategorie einer Grothendieck-Topologie, vgl. 1.3.
Cov T die Klasse der Überdeckungen einer Grothendieck-Topologie, vgl. 1.3.
$Cov_T(X)$ die Menge der Überdeckungen des Objekts X von Cat T bezüglich der Topologie T.
D_X Garbe der Weil-Divisoren auf dem Etal-Situs X_{et}, vlg. 4.4.7.
Div_X Garbe der Cariter-Divisoren auf dem Etal-Situs X_{et}, vlg. 4.4.7.
E/X die Kategorie der E-Schemata über dem Schema X, vgl. 1.3.9.
$(E/X)_E$ der kleine E-Situs auf dem Schema X, vgl. 1.3.9
Ens Kategorie der Mengen
$\mathbf{F}_M$ die konstante Garbe zur abelschen Gruppe M auf dem Situs X_E, vgl. 4.3.13(i).
FEt / X Kategorie der Schemata über dem Schema X, welche endlich und etale sind über X, vg. 3.2.1.
$\mathbb{G}_a$ die additive Gruppe, vgl. 4.1.2 (b).
$\mathbb{G}_{a,X}$ die additive Gruppe über dem Schema X, vgl. Bemerkung 4.2.4 (iii).
$\mathbb{G}_m$ die multiplikative Gruppe, vgl. 4.1.2 (c).
G-sets Kategorie der G-Mengen über der proendlichen Gruppe G, vgl. 4.2.7.
H^0_A Hilbert-Funktion des lokalen Rings A bezügliche dessen maximalen Ideals, vgl. den Beweis des Lemmas zu Bemerkung 1.3.8 (iii).
K_s separabler Abschluß des Körpers K.
LFT/X Kategorie der Schemata über dem Schema X, welche lokal endlichen Typs über X sind, vgl. 1.3.9
$(LFT/X)_E$ der große E-Situs auf X, vgl. 1.3.9.
M^H_G induzierter G-Modul bezüglich der abgeschlossenen Untergruppe $H \subseteq G$ der proendlichen Gruppe G, vgl. 4.4.2 (v).
$\mu(M)$ minimale Anzahl der Erzeuger des Moduls M über einem lokalen Ring, vgl. den Beweis des Lemmas zu Bemerkung 1.3.8 (iii).
$\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ $:= \mathcal{O}^{sh}_{X,\bar{x}}$, lokaler Ring des Schemas X im geometrischen Punkt $\bar{x}$ von x, vgl. Bemerkung 2.4.15(viii).

$\mathcal{O}^{sh}_{X,\bar{x}}$ strenge Henselisierung des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ des Schemas X im Bild x des geometrischen Punkts $\bar{x}$ von X, vgl. Bemerkung 2.4.15(viii).

$\mathbf{P}_M$ die konstante Prägarbe mit dem Wert M auf dem Situs X_E, vgl. 4.1.2 (a).

$P|_{X'}$ inverses Bild der Prägarbe P auf $(C/X)_E$ bezüglich eines stetigen Morphismus π:X'$\longrightarrow$X im Fall C'/X' = (C/X)/X'. vgl. Beispiel 4.3.4 (ii).

$P_{\bar{x}}$ Halm der Prägarbe P auf X_{et} im geometrischen Punkt $\bar{x} \longrightarrow$ X von X, vgl. 4.3.7.

$\pi_1(X, \bar{x})$ fundamentale Gruppe des zusammenhängenden Schemas X im geometrischen Punkt $\bar{x}$, vgl. 3.2.3.

$\pi_1(X^{an}, x)$ analytischen fundamentale Gruppe der komplexen Mannigfaltigkeit X im Punkt c, vgl. Bemerkung 3.2.4 (iii).

$\pi^t_1(X, \bar{x})$ zahme fundamentale Gruppe des Schemas X im geometrischen Punkt $\bar{x}$, vgl. 3.3.5.

$\pi_p(P')$ direktes Bild der Prägarbe P' auf $(C'/X')_E$ bezüglich des stetigen Morphismus π: $X'_{E'} \longrightarrow X_E$, vgl. Bemerkung 4.3.1(ii).

Sch Kategorie der lokal noetherschen Schemata, vgl. 1.3.8

$Sh_T(C)$ Kategorie der Garben auf der Topologie oder Prätopologie T mit Werten in der Kategorie mit Faserprodukten C, vgl.

$s_{\bar{x}}$ der Keim des Schnittes s $\in$ P(U) einer Prägarbe P auf dem Schema X über einer Etal-Umgebung U im geometrischen Punkt $\bar{x} \longrightarrow$ U, vgl. Bemerkung 4.3.7(iii).

T(X) Kategorie der Tripel zu einer Zerlegung des Schemas X in ein abgeschlossenes Teilschema und dessen Komplement, vgl. 4.5.1.

W(F) die Prägarbe auf X_E zum $\mathcal{O}_X$-Modul F, vgl. 4.1.2 (d)

$X_E = (\mathcal{C}/X)_E$ der E-Situs der Schema-Kategorie $\mathcal{C}$/X, vgl. 1.3.9.

$X_{ét}$ der Etale-Situs auf dem Schema X, vgl. 1.3.9.

X_{fl} der flache Situs auf dem Schema X, vgl. 1.3.9.

X_{Zar} der Zariski-Situs auf dem Schema X, vgl. 1.3.9

Wiederholung

W.1. Die grundlegenden Begriffe

Weil-Kohomologie.
Ziel dieser Vorlesungsreihe ist die Konstruktion einer Weil-Kohomologie, wie sie zum Beweis der Weilschen Vermutungen benötigt wird.

Etal-Kohomologie.
Wie wir wissen, ist die gewöhnliche Garben-Kohomologie keine solche Weil-Kohomologie. Eine bekannte Konstruktion für eine Weil-Kohomologie (die ℓ-adische Kohomologie) beruht auf der sogenannten Etal-Kohomologie.

Grothendieck-Topologien.

Die Konstruktion der Etal-Kohomologie basiert auf der Verallgemeinerung des Begriffs des topologischen Raums: anstelle des gewöhnlichen Topopologie-Begriffs hat man sogenannte Grothendieck-Topologien zu betrachten.

Äquivalent zum Begriff des topologischen Raums ist dessen zugehörige Kategorie: anstelle der offenen Teilmengen U eines topologischen Raums X betrachtet man deren natürliche Einbettungen

$$U \hookrightarrow X$$

in den Raum. Die Verallgemeinerung besteht nun darin, daß man anstelle dieser Einbettungen gewisse Morphismen

$$U \longrightarrow X$$

einer vorgegebenen Kategorie mit fest gewählten Ziel X betrachtet.

Überdeckungen.
Ein topologischer Raum ist gegeben, wenn man dessen offene Mengen kennt. Äquivalent kann man auch für jede seiner offenen Mengen, deren offene Überdeckungen angeben. Entsprechend definiert man eine Grothendieck-Topologie indem man für jedes Objekt X der gegebenen Kategorie Familien

$$\{U_\alpha \longrightarrow X\}_{\alpha\in I}$$

von Morphismen mit dem Ziel X festlegt, welche man Überdeckungen von X nennt. Diese Art der Definition einer Grothendieck-Topologie hat den Vorteil, daß auf diese Weise der Garbenbegriff besonders einfach eingeführt werden kann: die Etal-Kohomologie ist eine Garben-Kohomologie, jeder Garbe auf einer Grothendieck-Topologie soll eine Kohomologie-Gruppe zugeordnet werden.

Siebe.
Den Axiomen, welche den Begriff des topologischen Raums definieren, entsprechen dabei gewissen Bedingungen, die wir an die Überdeckungen unserer Kategorie stellen müssen. Dem Durchschnitt $U\cap U'$ zweier offener Mengen

$$U, U' \subseteq X$$

eines topologischen Raums X entspricht dabei das Faserprodukt

$$U\times_X U'$$

der zugehörigen natürlichen Einbettungen $U \hookrightarrow X$ und $U'\hookrightarrow X$. Die naheliegendste Definiiton des Begriffs der Grothendieck-Topologie benutzt deshalb den Begriff des Faserprodukts und ist damit zunächst auf dem Fall von Kategorien mit endlichen Faserprodukten beschränkt.

Diese Einschränkung läßt sich umgehen, indem man anstelle von beliebigen Überdeckungen sogenannte Siebe betrachtet. Im Fall der gewöhnlichen Topologie bedeutet das, man betrachtet nur Überdeckungen

$$U = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$$

mit der Eigenschaft, daß für jedes $\alpha'\in I$ und jede offene Teilmenge $V \subseteq U_{\alpha'}$ auch V zur Familie der U_α gehört. Im Fall einer belieben Grothendieck-Topologie betrachtet man nur Überdeckungen

$$\{U_\alpha \longrightarrow X\}_{\alpha\in I}$$

mit der Eigenschaft, daß für jedes $U_{\alpha'} \longrightarrow X$ und jeden Morphismus $V \longrightarrow U_{\alpha'}$ auch die Komposition

$$V \longrightarrow U_{\alpha'} \longrightarrow X$$

zur Familie der $U_\alpha \longrightarrow X$ gehört.

Definition der Prätopologie (vgl. 1.3.1).

Eine Grothendieck-Prätopologie T besteht aus einer Kategorie

$$\text{Cat } T$$

und einer Menge

$$\text{Cov } T$$

von Familien

$$\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\} \tag{1}$$

von Morphismen von Cat T mit festem Ziel, welche Überdeckungen heißen, wobei für jede Überdeckung das Ziel der Morphismen dasselbe ist und die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für jeden Isomorphismus φ: $V \longrightarrow U$ von Cat T gilt $\{\varphi\} \in \mathrm{Cov}(T)$.

(ii) Mit $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(T)$ und $\{V_{ij} \xrightarrow{\varphi_{ij}} U_i\}_{j\in J_i} \in \mathrm{Cov}(T)$ für jedes $i\in I$ ist auch die Familie $\{V_{ij} \longrightarrow U\}$ der Zusammensetzungen $\varphi_i \circ \varphi_{ji}$, $i \in I$, $j \in J_i$ eine Überdeckung von T.

(iii) Ist $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von T und ψ: $V \longrightarrow U$ ein Morphismus von Cat T, so existieren die Faserprodukte $U_i \times_U V$ und die Familie $\{U_i \times_U V \longrightarrow V\}_{i\in I}$ ist eine Überdeckung von T.

Definition des Sieb-Begriffs (vgl. Bemerkung 1.3.2 (iv))

Seien C eine Kategorie und $S = \{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$ eine Familie von Morphismen von C mit demselben Ziel U. Die Familie S heißt Sieb (über U), wenn für jeden Morphismus $U_i \xrightarrow{\varphi_i} U$ von S und jeden Morphismus $V \longrightarrow U_i$ von C auch die Zusammensetzung $V \longrightarrow U$ zu S gehört.

Definition der Topologie (vgl. 1.3.3).

Sei C eine (kleine) Kategorie. Eine Grothendieck-Topologie T auf C besteht aus einer Klasse von Sieben

$$J(U)$$

für jedes Objekt U von C, welche überdeckende Siebe von T heißen, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für jedes Objekt U von C gehört das maximale Sieb,

$$\{\varphi \in \mathrm{Mor}(C) \mid \varphi \text{ hat das Ziel } U\},$$

zu J(U).[1]

[1] Seien X ein topologischer Raum (aufgefaßt als Kategorie) und U eine offene Menge von X. Dieses Axiom reflektiert gerade die Tatsache, daß U selbst eine Überdeckung von sich selbst ist.

(ii) Für jedes überdeckende Sieb $R \in J(U)$ und jeden Morphismus $f\colon V \longrightarrow U$ von C ist das Sieb

$$f^*(R) := \{\alpha\colon W \longrightarrow V \mid W \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{f} U \in R\}$$

überdeckend: $f^*(R) \in J(V)$.[2]

(iii) Seien S ein Sieb über U und $R \in J(U)$ ein überdeckendes Sieb. Es gelte

$$f^*(S) \in J(V) \text{ für jeden Morphismus } f{:}V \longrightarrow U \text{ von } R.$$

Dann ist auch S ein überdeckendes Sieb, $S \in J(U)$.[3]

Eine kleine Kategorie, die mit einer Grothendieck-Topologie versehen ist, heißt Situs.

Bemerkungen

(i) Die Definition des Begriffs der Garbe auf einer Prätopologie ist im wesentlichen dieselbe wie im klassischen Fall (vgl. 1.3.2).

(ii) Der Begriff der Garbe ist auch im Fall von Grothendieck-Topologien wohldefiniert (vgl. Schubert: Kategorien, die Definitionen II.20.2.6 und II.20.4.5), ist aber komplizierter und weniger suggestiv.

(iii) Jede Prätopologie definiert eine Grothendieck-Topologie[4] mit derselben Garben-Theorie (und damit derselben Garben-Kohomologie). Genauer: jede Familie:

$$R = \{U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} X\}_{\alpha\in I}$$

von Morphismen einer Kategorie C mit festem Ziel X definiert ein Sieb S(R), welches gerade aus allen Morphismen $V \longrightarrow U$ von C besteht, die sich über ein φ_α faktorisieren. Dieses Sieb S(R) heißt das von R erzeugte Sieb. Sei jetzt die Kategorie C mit einer Prätopologie T versehen. Für jedes Objekt X von C bezeichne

$$J_T(X) := \{S(R) \mid R \in Cov_T(X)\}$$

die Klasse der Siebe von C über X die von den Elementen von $Cov_T(X)$, d.h. den Überdeckungen von X bezüglich T erzeugt werden. Weiter sei

$$J(X)$$

die Klasse der Siebe von C über X, die ein Sieb von $J_T(X)$ also Teilfamilie enthalten.[5] Man überprüft sofort (Schubert: Kategorien II.20.5.3(a)), daß die J(X) eine Topologie von C definieren. Diese Topologie heißt die durch T erzeugte Topologie von C.

---

[2] Sei $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung der offenen Menge U eines topologischen Raums und $V \subseteq U$ eine offene Teilmenge. Diese Axiom reflektiert die Tatsache, daß dannt $\{U_i \cap V\}$ eine offene Überdeckung von V ist.

[3] Seien $\{X_j\}$ eine Überdeckung von U und $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von U. Für jedes i sei

$$\{X_j \cap U_i\}_j$$

eine offene Überdeckung von U_i. Dann ist $\{X_j\}$ auch eine offene Überdeckung von U. Das Axiom reflektiert die Tatsache, daß jede Vereinigung offener Menge offen ist.

[4] indem man in der Familie der Überdeckungen alle Nicht-Siebe wegläßt.

[5] d.h. die minimalen Elemente von J(X) bezüglich der Teilfamilien-Relation sind gerade die Elemente von $J_T(X)$.

Ein Funktur F: C $\longrightarrow$ Ens ist genau dann eine Garbe dieser Topologie, wenn das Diagramm

$$F(X) \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} F(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta\in I} F(U_\alpha \times_X U_\beta)$$

exakt ist für jede Überdeckung $R = \{U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} X\}_{\alpha\in I}$ bezüglich T (Schubert: Kataegorien II.20.5.3(b)). "Exakt" heißt dabei, daß die linke Abbildung gerade der Differenzkern der beiden rechten Abbildungen ist. (vgl. Schubert: Kategorien II.20.5.3). Mit anderen Worten, die (mengenwertigen) Garben bezüglich der von T erzeugten Topologie sind gerde die Garben bezüglich T.

(iv) Im Fall von Kategorien mit Faserpordukt wird jede Topologie durch eine Prätopologie erzeugt. Man betrachte die Teilfamilien der Elemente von J(X) mit der Eigenschaft, daß die erzeugten Siebe in J(X) liegen. Diese Sieb-Erzeuger definieren eine Prätopologie, welche die gegebene Topologie erzeugt.

(v) Verschiedene Prätopologien können dieselbe Grothendieck-Topologie definieren. Da sie zur selben Garben-Theorie und zur selben Garben-Kohomologie führen, sind sie für unsere Zwecke nicht wesentlich verschieden. Es kommt also nicht so sehr auf die Prätopologien als vielmehr auf die zugehörigen Topologien an. Wir werden trotzdem - wann immer möglich - die Sprache der Prätopologien verwenden, da diese anschaulicher ist und die jeweiligen Konstruktionen weniger technisch sind.

Beweis von (iv). Sei C eine kleine Kategorie mit Faserprodukten und J eine Topologie von C. Für jedes Objekt X von C bezeichne Cov(X) die Menge der Famlien $\{U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} X\}_{\alpha\in I}$ von Moprhismen von C mit dem Ziel X, welche ein Sieb von J(X) erzeugen. Wir haben zu zeigen, die Mengen Cov(X) sind für jedes X die Überdeckungen von X bezüglich einer Prätopologie.

<u>1. Schritt</u>: Prätopologie-Axiom (i) ist erfüllt (Jede offene Menge überdeckt sich selbst).
Für jedes Objekt X von C erzeugt die Familie $\{Y \longrightarrow X\}$, deren einziges Element ein Isomorphismus ist, gerade das maximale Sieb über X, welches nach 1.3.3 (i) in J(X) liegt, d.h.

$$\{Y \longrightarrow X\}$$

liegt in Cov(X). Damit genügt Cov(X) der Bedingung (i) von 1.3.1.

<u>2. Schritt:</u> Prätopologie-Axiom (iii) ist erfüllt (Basiswechsel überführt Überdeckungen in Überdeckungen).

Seien $R := \{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ und $\psi: V \longrightarrow U$ ein Morphismus von C. Mit anderen Worten, es gelte

$$S(R) \in J(U),$$

d.h. die Familie der Morphismen von C, die sich über ein φ_i faktorisieren bilden eine überdeckendes Sieb von U.
Nach 1.3.3 (ii) gilt dann $\psi^*(S(R)) \in J(V)$, d.h. die Familie der Morphismen ξ von C, deren Zusammensetzung von ψ sich über ein φ_i faktorisieren, bilden ein überdeckendes Sieb von V,

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\xi} & V \\ \exists\downarrow & & \downarrow\psi \\ U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & U \end{array}$$

Morphismen ξ mit dieser Eigenschaft sind aber gerade auch die Moprhismen, welche sich über eine der Projektionen

$$U_i \times_U V \longrightarrow V$$

faktorisieren. Mit anderen Worten $\psi^*(S(R))$ wird erzeugt von der Familie

$$\{U_i \times_U V \longrightarrow V\},$$

d.h. $S(\{U_i \times_U V \longrightarrow V\}) = \psi^*(S(R)) \in J(V)$, d.h.

$$\{U_i \times_U V \longrightarrow V\} \in Cov(V).$$

Wir haben gezeigt, das Axiom (iii) für Prätopologien ist erfüllt.

<u>3. Schritt</u>: Prätopologie-Axiom (ii) ist erfüllt.

Seien $R := \{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I} \in Cov(U)$ und $R_i := \{V_{ij} \xrightarrow{\varphi_{ij}} U_i\}_{j\in J_i} \in Cov(U_i)$ für jedes $i\in I$. Mit anderen Worten, es soll gelten

$$S(R) \in J(U) \text{ und } S(R_i) \subseteq J(U_i) \text{ für jedes } i \in I.$$

Sei S die Familie aller Morphismen $V \longrightarrow U$ von C, die sich über eine Zusammensetzung der Gestalt $\varphi_i \circ \varphi_{ji}$ mit $i \in I$, $j \in J_i$ faktorisieren. Offensichtlich ist S ein Sieb von C über U. Wir haben zu zeigen,

$$S \in J(U).$$

Zum Beweis dieser Aussage können wir die R_i durch die durch sie erzeugten Siebe ersetzen, d.h. wir können annehmen, die R_i sind selbst schon Siebe,

$$R_i = S(R_i) \in J(U_i) \text{ für jedes } i \in I.$$

Die Familie S besteht dann aus Morphismen der Gestalt $\varphi_{i'} \circ \varphi_{j'i'}$ mit $i' \in I$, $j' \in J_i$.

Nach 1.3.3 (iii) reicht es zu zeigen, für jeden Morphismus $U_i \xrightarrow{\varphi_i} U$ von R gilt[6]

$$\varphi_i^*(S) \in J(U_i).$$

Nach Definition von φ_i^* besteht $\varphi_i^*(S)$ aus den Morphismen ξ von X, deren Zusammensetzung mit φ_i die Gestalt $\varphi_{i'} \circ \varphi_{j'i'}$ mit $i' \in I$, $j' \in J_i$ hat,

[6] Eigenslich müßten wir diese Aussage für jeden Morphismus von S(R) beweisen. Da aber S(R) auch ein Sieb-Erzeuger (für das Sieb S(R)) ist, kann man sich auf Morphismen von R beschränken.

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{\quad \xi \quad} & & & U_i \\ \| & & & & \downarrow \varphi_i \\ V_{i'j'} & \xrightarrow{\varphi_{j'i'}} & U_{i'} & \xrightarrow{\varphi_{i'}} & U \end{array}$$

Das Diagramm ist trivialerweise kommutativ für $\xi = \varphi_{ji}$, i' = i und j' = j, d.h. es gilt

$$R_i = S(R_i) \subseteq \varphi_i^*(S).$$

Nach Voraussetzung gilt $R_i = S(R_i) \in J(U_i)$. Dann gilt aber auch

$$\varphi_i^*(S) \in J(U_i)$$

(vgl. Schubert: Kategorien, Satz II.20.1.7).

QED.

W.2. Beispiele für (Prä-)Topologien

In 1.3.3 haben wir die folgenden Topologien eingeführt.

Die diskrete Topologie J_d einer kleinen Kategorie C ist definiert durch

$$J_d(U) := \text{Menge aller Siebe über } U.$$

Die triviale Topologie J_t einer kleinen Kategorie C ist definiert durch

$$J_t(U) := \{ \text{ maximales Sieb über } U \}$$

Durch Bildung von Durchschnitten bzw. Vereinigungen erhält man aus einer Familie von Topologien eine neue Topologie, das Infimun bzw. Supremum dieser Familie.
Zu jeder Familie von Sieben gibt es eine kleinste Topologie, für welche alle diese Siebe überdeckende Siebe sind. Sie heitß die von dieser Familie erzeugte Topologie.

Für jede Kategorie ist eine kanonische Topologie definiert, deren (mengenwertige) Garben gerade die darstellbaren Funktoren sind (vgl. 1.3.4).

Die meisten von uns betrachteten Prätopologien sind Prätopologien von Kategorien von Schemata und entstehen auf die folgende Weise (vgl. 1.3.9).

Wir fixieren eine Klasse E von Morphismen von Schemata , deren Elemente E-Morphismen heißen sollen und die folgenden Bedingungen genügen.

(E_1) Jeder Isomorphismus von Schemata ist ein E-Morphismus.

(E_2) Die Komposition von zwei E-Morphismen ist ein E-Morphismus.

(E_3) Jeder Morphismus, der aus einem E-Morphismus durch Basiswechsel entsteht, ist ein E-Morphismus.

Beispiele für solche Klassen sind die folgenden.

(a) E := (Zar) ist die Klasse aller offenen Einbettungen.
(b) E := (ét) ist die Klasse aller Etale-Morphismen endlichen Typs.
(c) E := (fl) ist die Klasse aller flachen Morphismen lokal endlichen Typs.

In jedem dieser Beispiele sind alle E-Morphismen offen und jede offene Einbettung ist ein E-Morphismus. Dies ist auch der Fall für fast alle bekannten Beispiele. Die E-Morphismen spielen die Rolle, die die offenen Teilmengen in der gewöhnlichen Topologie spielen.

Seien jetzt ein Basis-Schema

$$X,$$

eine Klasse

$$E,$$

die den Bedingungen (E_1) - (E_3) genügt und eine volle Teilkategorie

$$\mathcal{C}/X \subseteq Sch/X$$

der Kategorie der Schemata über X fest vorgegeben. Wir nehmen weiter an:

1. $\mathcal{C}/X$ besitzt Faser-Produkte.
2. Für jeden Morphismus $Y \longrightarrow X$ von $\mathcal{C}/X$ und jeden E-Morphismus $U \longrightarrow Y$ ist die Komposition $U \longrightarrow X$ ein Morphismus von $\mathcal{C}/X$.

Bemerkungen

(i) Jede Klasse E, welchen den Bedingungen E_1-E_2 genügt ist die Morphismen-Klasse einer Kategorie, welche wir ebenfalls mit E bekzeichnen.

(ii) Bedingung 2 ist äquivalent zu $E \subseteq Mor(\mathcal{C})$ (wegen der Existenz der identischen Morphismen).

(iii) Alle E-Morphismen mit dem Ziel X sind damit Struktur-Morphismen der Objekte von $\mathcal{C} / X$. Die kleinste in Frage kommende Kategorie dieser Art hat damit ausschließlich Objekte, deren Struktur-Morphismen E-Morphismen sind. Diese Kategorie wird mit

$$E/X$$

bezeichnet.

(iv) Eine E-Überdeckung eines Objekts Y von $\mathcal{C}/X$ ist definiert als eine Familie

$$\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} Y\}_{i \in I}$$

von E-Morphismen mit

$$Y = \bigcup_{i \in I} \varphi_i(U_i).$$

Die Klasse aller solcher Überdeckungen für alle Objekte von $\mathcal{C}/X$ definiert eine Prätopologie von $\mathcal{C}/X$, welche E-Prätopolgie von $\mathcal{C}/X$ heißt, und damit auch eine Topologie, welche E-Topologie von $\mathcal{C}/X$ heißt. Die Kategorie $\mathcal{C}/X$ zusammen mit dieser Topologie heißt E-Situs von $\mathcal{C}/X$ und wird mit

$$X_E = (\mathcal{C}/X)_E$$

bezeichnet.

(v) Ist $\mathcal{C}$ die kleinste in Frage kommende Kategorie, also gleich E, so spricht man von einem kleinen Situs. Ist C die größte in Frage kommende Kategorie, also gleich der Teilkategorie **LFT** von **Sch**, deren Morphismen vom lokal endlichen Typ sind, so spricht man von einem großen Situs.
So heißt

$$(E/X)_E$$

kleiner E-Situs auf X. Falls E aus Morphismen lokal endlichen Typs besteht, so heißt

$$(\mathbf{LFT}/X)_E$$

großer E-Situs auf X.

Der Zariski-Situs auf X ist definiert als der kleine Situs

$$X_{Zar} := ((Zar)/X)_{(Zar)}.$$

Der Etale-Situs auf X ist definiert als der kleine Situs

$$X_{ét} := ((ét)/X)_{(ét)}.$$

Der flache Situs auf X ist definiert als der große Situs

$$X_{fl} := (LFT/X)_{(fl)}$$

(iv) Die Morphismen des Zariski-Situs und des Etale-Situs sind automatisch E-Morphismen (vgl. 1.3.8 Bemerkung (iv)). Für den flachen Situs ist diese Aussage falsch. Man betrachte zum Beispiel das kommutative Diagramm von natürlichen Homomorphismen

$$\begin{tikzcd} A[X,Y] \arrow[rr, two heads] & & A[X,Y]/(Y) \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

mit einem kommutativen Ring A mit 1 und Unbestimmten X und Y. Der horizontale Homomorphismus ist natürlich nicht flach, während die beiden anderen treuflach sind.

(iiv) Der Begriff des kleinen Situs steht dem Begriff des gewöhnlichen topologischen Raums mit seinen offenen Mengen nahe. So erhält man aus dem Zariski-Situs die gewöhnliche Zariki-Topologie, wenn man je zwei offene Einbettungen mit demselben Bild identifiziert. Ein großer Situs ist eher vergleichbar mit der Kategorie aller topologischen Räume über einem gegebenen topologischen Raum.

4. Garben-Theorie

4.1. Prägarben

4.1.1 Prägarben

Eine Prägarbe auf der Kategorie

$$X_E = (C/X)_E$$

ist per Definition ein kontravarianter Funktor

$$P: (C/X)^0 \longrightarrow Ab.$$

Für jedes Objekt U von C/X nennt man die Elemente von P(U) auch Schnitte von P über U.

Ein Morphismus von Prägarben ist per Definiton ein funktorieller Morphismus von Prägarben.

Bemerkungen

(i) Die Prägarben auf X_E bilden zusammen mit den eben definierten Morphismen eine Kategorie

$$\mathbf{P}(X_E) := \mathbf{P}((C/X)_E),$$

welche ihre grundlegenden Eigenschaften von der Kategorie Ab erbt. Insbesondere ist $\mathbf{P}(X_E)$ eine abelsche Kategorie mit den Eigenschaften[7] AB5 und Ab4*.

---

[7] Für x ∈ {1,2,3,4,5,6} führen wir die folgenden Bedingungen ein.

ABx* := Abx für die duale Kategorie.

AB1)

(ii) Ist U $\longrightarrow$ U' ein Morphismus von C, so existiert ein Restriktionsmorphismus

$$P(U') \longrightarrow P(U),$$

welcher aber - anders als im Fall der klassischen Topologie - nicht eindeutig bestimmt sein muß, d.h. von U $\longrightarrow$ U' abhängen kann.

(iii) Direkte Summen werden koordinatenweise gebildet:

$$(P\oplus P')(U) = P(U) \oplus P'(U)$$

für Prägarben P, P'.

(iv) Kerne und Kokerne von Prägarben-Morphismen $f{:}F\longrightarrow P'$ werden koordinatenweise gebildet:

$$(\mathrm{Ker}\ f)(U) = \mathrm{Ker}\ f(U){:}P(U) \longrightarrow P'(U)$$

$$(\mathrm{Koker}\ f)(U) = \mathrm{Koker}\ f(U){:}P(U) \longrightarrow P'(U)$$

Analoge Aussage gelten für direkte und inverse Limites.

4.1.2 Beispiele

(a) Konstante Prägarben

Für jede abelsche Gruppe M definieren wir die <u>konstante Prägarbe</u> $\mathbf{P}_M$ auf X_E durch

$\mathbf{P}_M(U) := M$ für jedes U

$\mathbf{P}_M(\varnothing) := 0$ für jedes U

$\mathbf{P}_M(f) := 1_M$ für jedes f: U $\longrightarrow$ U'

Jeder Morphismus besitzt einen Kern und einen Kokern.

<u>AB2</u>)

Für jeden Morphismus u ist der natürlichen Morphismus Koim(u) $\longrightarrow$ Im (u) ein Isomorphismus.

<u>AB 3</u>)

Jede Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Objekten und beliebiger Index-Menge besitzt eine direkte Summe.

<u>AB 4</u>)

Es gilt AB3 und jede direkte Summe von Monomorphismen ist ein Monomorphismus.

<u>AB5</u>)

Es gilt AB3) und für aufsteigende Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Teilobjekten eines Objekts A und jedes Teilbojekt B von A gilt

$$\Big(\sum_{i\in I} A_i\Big) \cap B = \sum_{i\in I} (A_I \cap B).$$

<u>AB6</u>)

Für jedes Objekt A und jede Familie $(A^j)_{j\in J}$ von aufsteigenden Familien $(A_i^j)_{i\in I_j}$ von Teilobjekten von A gilt

$$\bigcap_{j\in J} \Big(\sum_{i\in I_j} A_i^j\Big) = \sum_{i_j\in I_j \text{ für alle } j\in J} \Big(\bigcap_{j\in J} A_i^j\Big)$$

(b) Additive Gruppe

Die Prägarbe $\mathbb{G}_a$ auf X_E ist definiert durch

$$\mathbb{G}_a(U) := \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$$

$$\mathbb{G}_a(f{:}U\longrightarrow U') := \Gamma(U', f^{\#}: \mathcal{O}_{U'} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_U) = \Gamma(U', \mathcal{O}_{U'}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U).$$

(c) Multiplikative Gruppe

Die Prägarbe $\mathbb{G}_m$ auf X_E ist definiert durch

$$\mathbb{G}_m(U) := \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*$$

$$\mathbb{G}_m(f{:}U\longrightarrow U') := \Gamma(U', f^{\#}: \mathcal{O}_{U'} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_U)^* = \Gamma(U', \mathcal{O}_{U'})^* \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*.$$

(d) Die Prägarbe W

Sei F eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln im Sinne der Zariski-Topologie von X. Die Prägarbe W(F) ist dann definiert durch

$$W(F)(U) := \Gamma(U, F\otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U) := \Gamma(U, f^*F) \text{ für jedes } f{:}U \longrightarrow X$$

(d.h. W ist die Zusammensetzung des inversen Bildes mit dem Schnittfunktor). Insbesondere ist

$$W(\mathcal{O}_X) = \mathbb{G}_a$$

Sei jetzt X ein S-Schema mit dem Struktur-Morphismus φ: $X\longrightarrow S$. Dann sollte man

$$W(\Omega_{X/S}): f{:}U \longrightarrow X \mapsto \Gamma(U, f^*\Omega_{X/S})$$

nicht verwechseln mit dem Funktor $U \mapsto \Gamma(U, \Omega_{U/S})$. Aus der fundamentalen exakte Sequenz

$$f^*\Omega_{X/S} \longrightarrow \Omega_{U/S} \longrightarrow \Omega_{U/X} \longrightarrow 0$$

erhält man durch Anwenden des Schnitt-Funktors $\Gamma(U, ?)$ einen Morphismus

$$W(\Omega_{X/S})(U) = \Gamma(U, f^*\Omega_{X/S}) \longrightarrow \Gamma(U, \Omega_{U/S}.$$

Diese Morphismen setzen sich zu einem Prägarben-Morphismus zusammen, welcher aber im allgemeinen kein Isomorphismus ist.

4.1.3 Die Prägarbe $W(\Omega_{X/S})$ im Fall des Etal-Situs

Seien X/S ein Schema lokal endlichen Typs über dem Schema S und U/X ein Etal-Schema. Dann gilt

$$W(\Omega_{X/S})(U) = \Gamma(U, \Omega_{U/S}).$$

Beweis. Weil der Struktur-Morphismus f: $U \longrightarrow X$ ein Etal-Morphismus ist, gilt $\Omega_{U/X} = 0$. Aus der obigen fundamentalen exakten Sequenz erhalten wir somit eine Surjektion

$$f^*\Omega_{X/S} \twoheadrightarrow \Omega_{U/S}.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, dies ist sogar ein Isomorphismus. Letztere Aussage ist lokaler Natur. Wir können deshalb annehmen, daß alle beteiligten Schemata affin sind,

$$S = \operatorname{Spec} A, X = \operatorname{Spec} B, U = \operatorname{Spec} C$$

mit einer Etal-Algebra C über B. Wir haben zu zeigen, die natürliche Surjektion

$$C\otimes_B\Omega_{B/A} \longrightarrow \Omega_{C/A}$$

ist ein Isomorphismus. Dieser Morphismus ist Bestandteil der fundamentalen exakten Sequenz

$$C\otimes_B\Omega_{B/A} \longrightarrow \Omega_{C/A} \longrightarrow \Omega_{C/B} \longrightarrow 0$$

dessen linker Differential-Modul gleich Null ist (weil C etale ist über B) und dessen linker Homorphismus injektiv ist, falls C/B 0-glatt ist (vgl. Matsumura, H.: Commutative ring theory, Theorem 25.1). Die Bedingung der 0-Glattheit ist erfüllt: dies ist nur ein anderer Name für formale Glattheit (siehe 2.3.1). Man beachte, Etal-Morphismen sind formal etale (vgl. 2.3.2), also erst recht formal glatt.
QED.

4.2. Garben

4.2.1 Garben

Eine Prägarbe F auf X_E heißt Garbe, wenn für jedes Objekt U von C/X und jede E-Überdeckung $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(S_1)

Ist $s \in F(U)$ ein Schnitt mit $s|_{U_i} := \varphi_i^*(s) := F(\varphi_i)(s) = 0$ in $F(U_i)$ für jedes $i\in I$, so gilt $s = 0$. Die Garbenrestriktion $s|_{U_i}$ von s ist dabei bezüglich des Morphismus φ_i zu nehmen.

(S_2)

Ist $(s_i)_{i\in I}$ eine Familie von Schnitten $s_i \in F(U_i)$ mit

$$s_i|_{U_i\times_U U_j} = s_j|_{U_i\times_U U_j} \text{ in } F(U_i\times_U U_j)$$

für je zwei $i,j \in I$, so existiert ein Schnitt $s \in F(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für jedes $i \in I$. Die beiden Garbenrestriktionen $s_i|_{U_i\times_U U_j}$ und $s_j|_{U_i\times_U U_j}$ sind dabei bezüglich der beiden Projektionen des Faserprodukts $U_i\times_U U_j$ zu nehmen.

Bemerkungen

(i) Die beiden Bedingungen bedeuten gerade, daß für jede E-Überdeckung

$$\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$$

das Diagramm

$$(S) \qquad F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} F(U_i\times_U U_j)$$

exakt ist, d.h. der linke Homomorphismus ist gerade der Differenzkern der beiden rechten. Die beiden rechten Homomorphismen sind dabei durch die Projektionen der Faserprodukte auf den ersten bzw. zweiten Faktor induziert.

(ii) Eine Prägarbe P, welche der Bedinung (S_1) genügt heißt separierte Prägarbe.

(iii) Das leere Schema $\varnothing$ besitzt die leere Überdeckung als E-Überdeckung, d.h. die leere Familie von Morphismen ist eine E-Überdeckung von $\varnothing$. Da das Produkt abelscher Gruppen über der leeren Index-Menge die triviale abelsche Gruppe ist, ergibt sich für Garben und separierte Prägarben F, daß

$$F(\varnothing) = 0$$

gilt. Wem diese Argumentation zu weit hergeholt erscheint, kann diese Bedingung auch zu den Axiomen für Garben bzw. separierte Prägarben hinzufügen.

(iv) Falls die Klasse E alle offenen Einbettungen enthält, läßt sich jede offene Überdeckung

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i$$

als E-Überdeckung auffassen. Jede Garbe im Sinne der E-Topologie ist auch eine Garbe im gewöhnlichen Sinne (d.h. im Sinne der Zariski-Topologie).

(v) Bedingung (S) für gewöhnliche offene Überdeckungen ist äquivalent zu den Garben-Axiomen.

(vi) Die Garben auf X_E bilden zusamen mit den Prägarben-Morphismen eine Kategorie

$$\mathbf{S}(X_E)$$

und damit eine volle Teilkategorie von $\mathbf{P}(X_E)$. Die Kategorie erbt, wie wir sehen werden, die meisten (wenn auch nicht alle) guten Eigenschaften von $\mathbf{P}(X_E)$.

Zunächst betrachten wir zur Illustration Bedingung (S) für einige nicht-klassische Überdeckungen.

4.2.2 Die Garben-Bedingung für eine Galois-Überdeckung

Seien $Y \longrightarrow X$ eine Galois-Überdeckung mit der Gruppe

$$G = \{\sigma_1, \dots , \sigma_n\}$$

und P eine Prägarbe auf dem Etal-Situs oder einem feineren Situs über X, welche disjunkte Vereinigungen von Schemata in direkte Produkte überführt.
Dann operiert G (von links) auf P(Y), und das Diagramm (S) zur Überdeckung $(Y\longrightarrow X)$ läßt sich in natürlicher Weise mit dem folgenden Diagramm identifizieren.

$$P(X) \longrightarrow P(Y) \underset{\sigma_1,\dots,\sigma_n}{\overset{(1,\dots,1)}{\rightrightarrows}} P(Y)^n$$

Insbesondere genügt P genau dann der Bedingung (S) für $\{Y \longrightarrow X\}$, wenn der Gruppen-Homomorphismus

$$P(X) \longrightarrow P(Y)$$

die Menge P(X) mit der Menge der G-invarianten Elemente von P(Y) identifiziert, d.h. mit der Menge

$$P(Y)^G := \{a \in P(Y) \mid \sigma(a) = a \text{ für jedes } \sigma\in G\}.$$

Beweis. Das Element $\sigma\in G$ operiert auf Y von rechts und definiert so einen Morphismus von Schemata

$$Y \xrightarrow{\sigma} Y.$$

Durch Anwenden von P erhalten wir einen Gruppen-Homomorphismus

$$P(Y) \xrightarrow{P(\sigma)} P(Y).$$

Weil P kontravariant ist, erhält man so eine Linksoperation von G auf P(Y).

Auf Grund der Beschreibung von Galois-Überlagerungen in 3.5.5 haben wir einen Isomorphismus von Schemata

$$\vee_{\sigma\in G} Y_\sigma \xrightarrow{\cong} Y\times_X Y,\ y \in Y_\sigma \mapsto (y, \sigma y).$$

Aus dem Diagramm der beiden Projektionen

$$Y\times_X Y \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y$$

erhalten wir durch Zusammensetzen mit diesem Isomorphismus das Diagramm

$$\vee_{\sigma\in G} Y_\sigma \underset{\sigma_1,\dots,\sigma_n}{\overset{(1,\dots,1)}{\rightrightarrows}} Y$$

wobei das Tupel $(f_1,\dots,f_n)$ den Morphismus bezeichne, der auf Y_{σ_n} gleich f_n ist.

Durch Anwenden von P erhalten wir das angegebene Diagramm und damit die Behauptung.
QED.

4.2.3 Kriterium für Garben auf X_{et} und X_{fl}

Sei P eine Prägarbe auf dem Etal-Situs bzw. dem flachen Situs auf dem Schema X. Dann ist P genau dann eine Garbe, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für jedes Schema U vom C/X ist die Einchränkung von P auf die offenen Mengen von U eine Garbe im Sinne der Zariski-Topologie.

(ii) Für jede Überdeckung $\{U' \longrightarrow U\}$ mit affinen Schemata U und U' ist das Diagramm

$$P(U) \longrightarrow P(U') \rightrightarrows P(U'\times_U U')$$

exakt.

Beweis. Die Notwendingkeit dieser Bedingungen ist offensichtlich. Zeigen wir, die Bedingungen sind hinreichend.

Sei eine Überdeckung

$$\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I} \tag{1}$$

gegeben. Wir betrachten die disjunkte Vereinigung

$$U' := \vee_{i\in I} U_i$$

und die durch die φ_i definierte einelementige Familie

$$\{\varphi:U' \longrightarrow U\ \} \tag{2}$$

<u>1. Schritt</u>. Die Diagramme (S) zu den Überdeckungen (1) und (2) sind isomorph.
Auf Grund von (i) gilt

$$\begin{aligned}
P(U') &= P(\vee_{i\in I} U_i) = \prod_{i\in I} P(U_i)\\
P(U'\times_U U') &= P((\vee_{i\in I} U_i)\times_U(\vee_{j\in I} U_j))\\
&= P(\,(\vee_{i,j\in I} U_i\times_U U_j\,)
\end{aligned}$$

$$= \prod_{i,j\in I} P(U_i \times_U U_j)$$

Das Diagramm (S) zu (2)

$$P(U) \longrightarrow P(U') \rightrightarrows P(U' \times_U U')$$

hat also die Gestalt

$$P(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} P(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} P(U_i \times_U U_j)$$

Eine etwas genauere Betrachtung der Morphismen dieses Diagramms zeigt, daß es sich gerade um das Diagramm (S) zur Familie (1) handelt.

Damit ist die Aussage des ersten Schritts bewiesen. Es reicht daher die Exaktheit des Diagramms (S) für einelementige Familien (2) zu beweisen.

<u>2. Schritt</u>. Das Diagramm (S) zur Familie (2) ist exakt.

Die Familie (1) und die Schemata U_i spielen im weiteren Beweis keine Rolle mehr. Wir können deshalb die Bezeichnungen U_i anderweitig verwenden. Genauer, wir fixieren eine Überdeckung von U durch affine offene Teilschemata und nennen diese Teilschemata U_i:

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i \text{ , } U_i \text{ affin und offen in } U.$$

Weiter wählen wir für jedes $i \in I$ eine Überdeckung von $\varphi^{-1}(U_i)$ durch affine offene Teilschemata U'_{ij},

$$\varphi^{-1}(U_i) = \bigcup_{j\in J_i} U'_{ij} \text{ , } U'_{ij} \text{ affin und offen in } U'.$$

Zu diesen Zerlegungen in affine offene Teilmengen erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
P(U) & \longrightarrow & P(U') & \rightrightarrows & P(U' \times_U U') \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\prod\limits_{i\in I} P(U_i) & \longrightarrow & \prod\limits_{i\in I}\prod\limits_{j} P'(U'_{ij}) & \rightrightarrows & \prod\limits_{i\in I}\prod\limits_{j,\ell} P(U'_{ij} \times_U U'_{i\ell}) \\
\downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow & & \\
\prod\limits_{i,j\in I} P(U_i \cap U_j) & \hookrightarrow & \prod\limits_{i,j\in I}\prod\limits_{k\ell} P(U'_{ik} \cap U'_{j\ell}) & = & \prod\limits_{i,j\in I} P(\vee_{k,\ell} U'_{ik} \cap U'_{j\ell})
\end{array} \tag{3}$$

Man beachte, weil P nach Vorausetzung (i) eine klassische Garbe auf U ist, ist die linke Spalte exakt. Weil P eine klassische Garbe auf U' ist, ist auch die mittlere Spalte exakt. Aus demselben Grund gilt auch

$$P(\vee_{k,\ell} U'_{ik} \cap U'_{j\ell}) = \prod_{k,\ell} P(U'_{ik} \cap U'_{j\ell}) \text{ für beliebige } i,j\in I \tag{4}$$

Wir gehen zum Produkt $\prod_{i,j\in I}$ über und erhalten so die Gleichheit rechts unten im Diagramm (3).

Zeigen wir als nächstes, die horizontale Abbildung links unten im Diagramm (3) ist injektiv. Dazu betrachten wir die einelementige Familie

$$\{\vee_{k\in J_i,\ell\in J_j} U'_{ik} \cap U'_{j\ell} \longrightarrow U_i \cap U_j\}.$$

Wir wollen auf diese Voraussetzung (ii) anwenden. Dazu beachten wir, der einzige Morphismus ist nach Konstruktion surjektiv und liegt in X_{et} bzw. X_{fl}, bildet also eine Überdeckung[8]. Außerdem sind die Faserprodukte $U_i \cap U_j = U_i \times_U U_j$ affin[9]. Dasselbe gilt für die Faserprodukte

$$U'_{ik} \cap U'_{j\ell} = U'_{ik} \times_{U'} U'_{j\ell}.$$

Deren disjunkte Vereinigungen sind jedoch im allgemeinen nicht affin: sind die beteiligten Index-Mengen unendlich, so ist die disjunkte Vereinigung nicht quasikompakt, kann also auch nicht affin sein.

Falls die Familien J_i und J_j jedoch endlich sind, so ist die disjunkte Vereinigung ebenfalls affin, d.h. nach Voraussetzung (ii) ist der Morphismus

$$P(U_i \cap U_j) \longrightarrow P(\vee_{k\in J_i,\ell\in J_j} U'_{ik} \cap U'_{j\ell}) \overset{(4)}{=} \prod_{k\in J_i,\ell\in J_j} P(U'_{ik} \cap U'_{j\ell}) \qquad (5)$$

als Teil eines exakten Diagramms injektiv. Ohne die Voraussezung der Endlichkeit wissen wir zumindest, daß die Bilder der $U'_{ik} \cap U'_{j\ell}$ in $U_i \cap U_j$ eine offene[10] Überdeckung des affinen, also quasi-kompakten Schemas $U_i \cap U_j$ bilden. Mit anderen Worten, der Morphismus (5) wird injektiv, wenn wir die Mengen J_i und J_j durch geeignete endliche Teilmengen ersetzen. Beim erneuten Vergrößern von J_i und J_j bleibt aber diese Injektivität erhalten, d.h. (5) ist auch im allgemeinen Fall injektiv. Wir gehen zum Produkt $\prod_{i,j\in I}$ über und erhalten so die Injektivität des linken unteren Morphismus des Diagramms (3).

---

[8] Die Aussage gilt für alle Prätopologien, für welche alle Zariski-Überdeckungten Überdeckungen sind: aus den einelementigen Überdeckungen

$$\{\vee_k U'_{ik} \longrightarrow U_j\}$$

erhält man durch Basiswechsel die einelementige Überdeckkungd

$$\{\vee_k U'_{ik} \times_U U_j \longrightarrow U_i \times_U U_j\}$$

Wegen $U'_{ik} \times_U U_j = U'_{ik} \times_{U'} U' \times_U U_j = U'_{ik} \times_{U'} \varphi^{-1}(U_j)$ erhält man aus der Überdeckung von $\varphi^{-1}(U_j)$ durch $\vee_\ell U'_{j\ell}$ die Behauptung.

[9] Die offenen Teilmengen U_i und U_j sind nach Voraussetzung affin. Für die Affinität des Durchschnitts benötigen wir die Separiertheit von U. Wir sollten deshalb entweder in die allgemeinen Vereinbarungen von 1.3.8 oder in die Definitionen 1.3.9 des flachen und des Etal-Situs die Bedingung der Separiertheit aller betrachteten Schemata aufnehmen.

[10] weil alle beteiligten Morphismen flach sind.

Die mittlere Zeile von (3) ist das Produkt über alle $i \in I$ von Diagrammen, in denen alle Schemata affin und auf Grund des ersten Schritts von der Gestalt (1) sind. Da die endliche disjunkte Vereinigung affiner Schemata affin ist, ist die mittlere Zeile exakt, vorausgesetzt die Indexmengen J_i sind endlich. Dieselbe Argumentation wie oben zeigt, daß die mittlere Zeile von (3) auch für möglicherweise unendliche Mengen J_i exakt ist.

Wegen der Exaktheit der mittleren Zeile und der linken Spalte ergibt sich die Injektivität des linken oberen horizontalen Homomorphismus

$$P(U) \longrightarrow P(U').$$

Aus einer einfachen Diagramm-Jagt folgt weiter, dieser Homomorphismus ist gerade der Differenzkern der beiden Homomorphismen rechts, d.h. die obere Zeile ist exakt. **QED**.

4.2.4 Kriterium für Garben der Gestalt W(F) auf X_{fl} und X_{et}

Für jede quasi-kohärente Garbe F von $\mathcal{O}_X$-Moduln ist die Prägarbe W(F) eine Garbe auf X_{fl} und X_{et} .

Beweis. Es reicht zu zeigen, die Prägarbe

$$P = W(F)$$

genügt den beiden Bedingungen von 4.2.3.

<u>1. Schritt.</u> Bedingung (i) von 4.2.3 ist erfüllt.

Sei $f: U \longrightarrow X$ ein X-Schema von X_{fl} bzw. X_{et}. Wir haben zu zeigen, die Einschränkung von P auf die Kategorie der offenen Teilmengen von U ist eine Garbe.

Nach Definitin gilt

$$P(U) = \Gamma(U, f^*F).$$

Für jedes offene Teilschema $U' \subseteq U$ ist damit

$$P(U') = \Gamma(U', f^*F),$$

d.h. die Einschränkung von P auf die Kategorie der offenen Teilmengen von U ist gerade die Garbe f^*F.

<u>2. Schritt</u>. Bedingung (i) von 4.2.3 ist erfüllt.

Sei $\varphi: U' \longrightarrow U$ ein Morphismus afffiner Schemata

$$U' = \mathrm{Spec}\, A' \text{ und } U = \mathrm{Spec}\, A$$

der Kategorie X_{fl} bzw. X_{et}. Wir haben zu zeigen, das Diagramm

$$P(U) \longrightarrow P(U') \rightrightarrows P(U' \times_U U')$$

d.h. das Diagramm

$$\Gamma(U, f^*F) \longrightarrow \Gamma(U', f'^*F) \rightrightarrows \Gamma(U' \times_U U', p_i^*f^*F)$$

ist exakt. Dabei seien

$$f: U \longrightarrow X,\ f': U' \longrightarrow X \qquad \begin{tikzcd} U' \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f'"'] & & U \arrow[dl, "f"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

die Struktur-Morphismen von U bzw. U' und

$$p_i: U' \times_U U' \longrightarrow U'$$

die beiden Projektionen des Faser-Produkts.
Nach Voraussetzung ist F eine quasi-kohärente Garba auf X. Dann ist aber auch f^*F quasi-kohärent auf U, d.h.

$$f^*F = \widetilde{M} \text{ mit einem A-Modul M,}$$

Wegen $f' = f\circ\varphi$, ist weiter

$$f'^*F = \varphi^*f^*F = \varphi^*\widetilde{M} = \widetilde{M}' \text{ mit } M' = M\otimes_A A'.$$

und

$$p_i^*f^*F = p_i^*\widetilde{M} = \widetilde{N} \text{ mit } N = M\otimes_A(A'\otimes_A A').$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es damit die Exaktheit des Diagramms

$$M \longrightarrow M\otimes_A A' \rightrightarrows M\otimes_A(A'\otimes_A A') \qquad (1)$$

zu beweisen. Dieses Diagramm entsteht durch Anwenden des Funktors $M\otimes_A$ aus dem Diagramm

$$A \longrightarrow A' \underset{e_1}{\overset{e_0}{\rightrightarrows}} A'\otimes_A A' \qquad (2)$$

Dabei sei $A \longrightarrow A'$ der natürlichen Homomorpjhismus und die Homomorphismen e_i sind gegeben durch

e_0: $A' \longrightarrow A'\otimes_A A'$, $a' \mapsto 1\otimes a'$, bzw.

e_1: $A' \longrightarrow A'\otimes_A A'$, $a' \mapsto a'\otimes 1$.

Wir beschränken uns hier auf den Beweis des Falls M = A, d.h. auf den Beweis der Exaktheit des Diagramm (2) anstelle von (1). Der allgemeine Fall unterscheidet sich vom hier behandelten nur um einen zusätzlichen Tensorfaktor keine wesentliche Rolle spielt.
Die Exaktheit von (2) ist äquivalent zur Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A' \xrightarrow{e_0-e_1} A'\otimes_A A'$$

Die zu beweisende Aussage ergibt sich damit aus dem nachfolgenden dritten Schritt.

<u>3. Schritt</u>. Sei $h: A \longrightarrow B$ ein treuflacher Homomorphismus. Dann ist die folgende Sequenz exakt.

$$K: 0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{d^0} B^{\otimes 2} \longrightarrow \dots \longrightarrow B^{\otimes r} \xrightarrow{d^{r-1}} B^{\otimes(r+1)} \longrightarrow \dots (3)$$

Dabei sei

$B^{\otimes r} := B\otimes_A \dots \otimes_A B$ (r mal)

$d^{r-1} := \sum_{i=0}^{r} (-1)^i e_i$

$e_i(b_0\otimes\dots\otimes b_{r-1}) := b_0\otimes\dots\otimes b_{i-1}\otimes 1\otimes b_i \dots\otimes b_{r-1}$

(Allgemeiner ist sogar $M\otimes_A K$ exakt).

Nach Definition ist

$d^0(b) = 1\otimes b - b\otimes 1$,

also $d^0 \circ h = 0$. Entsprechend gilt[11]

$$d^r \circ d^{d-1} = 0.$$

Die Sequenz (3) ist somit ein Komplex. Es reicht zu zeigen, die Kohomologie dieses Komplexes ist trivial.
Zum Beweis nehmen wir zunächst an, daß der Homomorphismus h eine <u>Retraktion</u>[12]

$$s: B \longrightarrow A$$

besitzt. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, die identische Komplex-Abbildung von (3) ist homotop zur Null-Abbildung.[13] Sei

$$k_r: B^{\otimes(r+2)} \longrightarrow B^{\otimes(r+1)}$$

die A-lineare Abbildung mit

$$k_r(b_0 \otimes \ldots \otimes b_{r+1}) = s(b_0) b_1 \otimes \ldots \otimes b_{r+1}\ .$$

Es reicht zu zeigen,

$$k_{r+1} \circ d^{r+1} + d^r \circ k_r = \mathrm{Id} \text{ für } r \geq -1.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} d^r \circ k_r(b_0 \otimes \ldots \otimes b_{r+1}) &= s(b_0) \bullet d^r(b_1 \otimes \ldots \otimes b_{r+1}) \\ &= s(b_0) \bullet \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i b_1 \otimes \ldots \otimes b_i \otimes 1 \otimes b_{i+1} \ldots \otimes b_{r+1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} k_{r+1} \circ d^{r+1}(b_0 \otimes \ldots \otimes b_{r+1}) &= k_{r+1}\Big(\sum_{i=0}^{r+2} (-1)^i b_0 \otimes \ldots \otimes b_{i-1} \otimes 1 \otimes b_i \ldots \otimes b_{r+1}\Big) \\ &= s(1) \bullet b_0 \otimes \ldots \otimes b_{i-1} \otimes b_i \ldots \otimes b_{r+1} \\ &\quad + s(b_0) \bullet \sum_{i=1}^{r+2} (-1)^i b_1 \otimes \ldots \otimes b_{i-1} \otimes 1 \otimes b_i \ldots \otimes b_{r+1} \end{aligned}$$

also

$$d^r \circ k_r(b_0 \otimes \ldots \otimes b_{r+1}) + k_{r+1} \circ d^{r+1}(b_0 \otimes \ldots \otimes b_{r+1}) = b_0 \otimes \ldots \otimes b_{r+1}$$

Damit ist die Behauptung im Fall, daß h einen Schnitt besitzt, bewiesen. Betrachten wir den allgemeinen Fall.
Seien A' eine A-Algebra und h' der Homomorphismus

$$h' = A' \otimes_A h: A' = A' \otimes_A A \longrightarrow A' \otimes_A B =: B'$$

Es gilt

$$A' \otimes_A B^{\otimes r} = B' \otimes_A B^{\otimes(r-1)} = B' \otimes_{A'} (A' \otimes_A B^{\otimes(r-1)})$$

Induktiv bezüglich r ergibt sich

---

[11] d^{d-1} fügt an allen Stellen eines Tensorprodukts von Elementen den Tensorfaktor 1 hinzu und bildet die alternierende Summen der so entstehenden Produkte. Die Zusammensetzung $d^r \circ d^{d-1}$ fügt zweimal auf alle mögliche Weisen den Tensorfaktor 1 hinzu. Die beiden Faktoren 1 lassen sich in zwei verschiedenen Reihenfolgen hinzufügen. Das Ergebnis ist jedesmal dasselbe, unterscheidet sich jedoch im Vorzeichen, d.h. die beiden Ergebnisse addieren sich zu Null.

[12] d.h. r ist ein Homomorphismus mit $r \circ h = \mathrm{Id}$. Im Buch von Milne ist von einem Schnitt die Rede. Das ist in gewissen Maße akzeptabel, da der kontravariante Spec-Funktor Retraktionen in Schnitte überführt.

[13] Auf der Kohomologie ist damit die identische Abbildung gleich der Null-Abbildung, d.h. die Kohomologie ist trivial.

$$A'\otimes_A B^{\otimes r} \quad = B'^{\otimes r}$$

Damit hat der zu h' gehörige Komplex K die Gestalt

$$K' = A'\otimes_A K$$

Falls A' treuflach über A ist, reicht es die Exaktheit von K' zu beweisen. Zum Beweis der Behauptung reicht es somit, eine treuflache A-Algebra A' zu finden, für welche h' eine Retraktion besitzt. Weil B nach Voraussetzung treuflach über A ist, reicht es zu zeigen, der Homomorphismus

$$h':B\otimes_A A \longrightarrow B\otimes_A B,\ b\otimes a \mapsto b\otimes h(a) = ba \otimes 1$$

besitzt eine Retraktion

$$s: B\otimes_A B \longrightarrow B\otimes_A A.$$

Das ist aber tatsächlich der Fall: mit $s(b\otimes b') = bb'\otimes 1$ gilt nämlich

$$s(h'(b\otimes a)) = s(ba\otimes 1) = ba\bullet 1\otimes 1 = ba\otimes 1 = b \otimes a.$$

QED.

Bemerkungen

(i) Die eben konstruierte exakte Sequenz spielt eine wesentliche Rolle in der Abstiegstheorie, vgl.

Milne, Etal-Kohomologie I.2.19,
Murre, Chapter VII
Knus, M.A., Ojanguren, M.: Théorie de la descente et algébres d' Azumaya, Lecture Notes in Math. 389, Springer, Heidelberg 1974).

Siehe auch die Theorie der strengen Morphismen 2.1.9 und Milne nach Theorem 2.16.

(ii) Als Spezielfall von 4.2.4 erhalten wir die Aussage, daß die Prägarbe $\mathbb{G}_a$ eine Garbe auf dem flachen und dem Etal-Situs sind.

(iii) Im klassischen Kontext bezeichnet $\mathbb{G}_a$ die additive Gruppe der affinen Geraden. Dies ist in gewissem Sinne auch in unserem Kontext der Fall. Um das einzusehen, betrachten wir für jedes Schema X die <u>affine Gerade</u> über X oder auch <u>additive Gruppe</u> über X,

$$\mathbb{G}_{a,X} := X\times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}} \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[T]$$

für jedes Schema X. Für jedes X-Schema U gilt dann

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_X(U, \mathbb{G}_{a,X}) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}}(U, \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[T]) \\ &= \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[T], \Gamma(U, \mathcal{O}_U)) \\ &= \Gamma(U,\mathcal{O}_U) \\ &= \mathbb{G}_a(U).\end{aligned}$$

Das erste Gleichheitszeichen ergibt sich dabei aus der Universalitätseigenschaft des Faserprodukts.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[dd] & & \\
 & X\times_{\mathbb{Z}}\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[T] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[T] \arrow[d] \\
X \arrow[r, phantom, "="] & X \arrow[r] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Wir erhalten somit

$$\mathbb{G}_a(U) = Hom_X(U, \mathbb{G}_{a,X}) \text{ für jedes X-Schema U.}$$

(iv) Aus der letzten Identität kann man direkt ableiten, daß $\mathbb{G}_a$ für den flachen und den Etal-Situs die Bedingung (b) von 4.2.3 erfüllt, also eine Garbe ist (weil treufalche Morphismen strenge Epimorphismen sind, vgl.2.1.9).

(v) Analog zur Argumentation in (ii) zeigt man

$$\mathbb{G}_m(U) = Hom_X(U, \mathbb{G}_{m,X})$$

mit

$$\mathbb{G}_{m,X} = X\times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}} \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[T,T^{-1}],$$

d.h. $\mathbb{G}_m$ ist in unserem Kontext das Analogon der klassischen <u>multiplikativen Gruppe</u>.

(vi) Wie in (iv) folgt, daß $\mathbb{G}_m$ eine Garbe bezüglich des flachen und des Etal-Situs ist (weil $\mathbb{Z}[T,T^{-1}]$ treuflach über $\mathbb{Z}$, also $\mathbb{G}_{m,X}$ treuflach über X ist, vgl. 2.1.9).

(vii) $\mathbb{G}_a$ und $\mathbb{G}_m$ sind Beispiele für Garben, die sich mit Hilfe eines Gruppen-Schemas definieren lassen. Ein X-Schema G heißt <u>kommutatives Gruppen-Schema</u> über X, wenn der durch G dargestellte Funktor (den wir ebenfalls mit G bezeichnen wollen[14]) mit einer Faktorisierung über Ab versehen ist[15],

$$\begin{tikzcd} Sch/X \arrow[rr] \arrow[dr, "G"'] & & Ab \arrow[dl, "f"] \\ & Ens & \end{tikzcd}$$

Dabei sei f der Vergiß-Funktor.

(viii) <u>Beispiel</u>. Sei G eine abelsche Gruppe. Dann besitzt

$$G_X = \vee_{\sigma\in G} X_\sigma \text{ mit } X_\sigma := X$$

die Struktur eines kommutativen Gruppen-Schemas, wobei die Multiplikation

$$G_X\times_X G_X \longrightarrow G_X$$

gerade durch die natürlichen Isomorphismen

$$X_\sigma\times_X X_\tau = X\times_X X \cong X$$

gegeben ist.

(ix) Gruppen-Schemata spielen für uns hier deshalb eine besondere Rolle, weil wir Garben also Funktoren mit Werten in Ab definiert haben (d.h. als <u>abelsche Garben</u>). Viele Konstruktionen funktionieren tatsächlich auch für Funktoren mit Werten in Ens (<u>mengenwertige Garben</u>), wobei anstelle der darstellenden Gruppen-Schemata gewöhnliche Schemata treten.

4.2.5 Die Prägarbe zu einem Gruppen-Schema

Sei G ein kommutatives Gruppen-Schema über X. Dann ist die durch G gegebene Prägarbe

$$U \mapsto Hom_X(U, G), \tag{1}$$

eine Garbe auf dem flachen, dem Etal- und dem Zariski-Situs.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dieser Funktor genügt den Bedingungen von 4.2.3.

<u>1. Schritt</u>. Bedingung (i) von 4.2.3 ist erfüllt.

---

[14] Wir identifizieren die Kategorie der Schemata bezüglich der Yoneda-Einbettung mit einer Teilkategorie der zugehörigen Funktor-Kategorie.

[15] d.h. G ist ein Gruppen-Objekt von Sch/X.

Wir haben zu zeigen, (1) ist eine Garbe auf der Kategorie der offenen Mengen des X-Schemas U. Sei eine offene Überdeckung von U gegeben:

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Das erste Garben-Axiom ist trivialerweise erfüllt: zwei Morphismen auf U, die für jedes $i \in I$ dieselbe Einschränkung auf U_i haben, sind gleich.

Dasselbe gilt für das zweite Garben-Axiom: eine Familie von Morphismen $U_i \longrightarrow G$, die auf den gemeinsamen Teilen ihrer Definitonsbereich gleich sind, verheften sich zu eimem global definierten Morphismus $U \longrightarrow G$.

<u>2. Schritt</u>. Bedingung (ii) von 4.2.3 ist erfüllt.

Wir haben zu zeigen, für jeden surjektiven Morphismus $U' \longrightarrow U$ des betrachteten Situs mit U und U' affin ist das Diagramm

$$\mathrm{Hom}(U, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U', G) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(U'\times_U U', G)$$

exakt. Im flachen Situs, im Etal-Situs und im Zariski-Situr impliziert die Surjektivität, daß $U' \longrightarrow U$ treuflach, also ein strenger Epimorphismus ist (vgl. 2.1.9). Das Diagramm ist also tatsächlich exakt.

QED.

(i) <u>Vereinbarung</u>. Ist G ein kommutatives Gruppen-Schema über X (oder Spec $\mathbb{Z}$), werden wir mit G sowohl das Gruppen-Schema selbst als auch die durch G definierte Garbe bezeichnen.

(ii) Das nachfolgende Beispiel ist besonders wichtig. Es zeigt, daß die Angabe einer Etal-Garbe über dem Spektrum eines Körpers äquivalent ist zur Angabe eines diskreten Moduls über der Galois-Gruppe der separablen Abschließung des Moduls ist.

4.2.6 Beispiel

Sei K ein Körper. Wir betrachten den Etal-Situs X_{et} über dem Schema

$$X := \mathrm{Spec}\ K.$$

Nach Bemerkung 1.3.8 (ii) (e) ist jedes Etal-Schema U über X eine disjunkte Vereinigung

$$U = \vee_{i\in I} U_i$$

von affinen Spektren endlicher separabler Körper-Erweiterungen von K. Wir fixieren eine separable Abschließung

$$K_s/K$$

und bezeichnen mit

$$G := \mathrm{Gal}(K_s/K)$$

die zugehörige Galois-Gruppe, d.h wir fixieren einen geometrischen Punkt

$$\bar{x} := \mathrm{Spec}\ K_s \longrightarrow \mathrm{Spec}\ K = X$$

und bezeichnen mit G die fundamentale Gruppe

$$G := \pi_1(X, \bar{x}).$$

Die Gruppe G operiert auf K_s von links und auf $\bar{x} = \mathrm{Spec}\ K_s$ von rechts.

Sei jetzt F eine Prägarbe auf X_{et}. Für jede endliche separable Erweiterung K'/K schreiben wir

$$F(K') := F(\mathrm{Spec}\ K').$$

Sei

$$M_P := \varinjlim_{K \subseteq K' \subseteq K_s} F(K')$$

wobei der Limes über alle endlichen Teilerweiterungen K' von K_s erstreckt wird. Die Operation von G auf K' im Fall von endlichen Galois-Erweiterungen K'/K induziert eine Operation von G auf F(K') und damit auf dem Limes M_P. Weil K_s gleich der Vereinigung aller endlichen Galoisschen Teilerweiterung von K ist, gilt

$$M := M_P = \bigcup_{H \subseteq G} M_P^H,$$

wobei H die offenen Untergruppen von G durchläuft oder die Normalteiler von G mit endlichem Index.[16] Genauer, die Identität ist eine direkte Konsequenz der folgenden Aussagen.

1. Die Morphismen des obigen induktiven Systems sind injektiv, d.h. man kann den direkten Limes durch die Vereinigung ersetzen.
2. Die Galois-Gruppen der Gestalt

$$H := Gal(K_s/K')$$

---

[16] Die Normalteiler mit endlichen Index bilden eine Umgebungsbasis des neutralen Elements. Für jeden G-Modul M sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) $M = \bigcup_{U \subseteq G \text{ offene Untergruppe}} M^U$

(ii) Der Stabilisator G_m von $m \in M$ in G ist offen für jedes m.

(iii) $\mu: G \times M \longrightarrow M, (\sigma, m) \mapsto \sigma m$, ist stetig bezüglich der diskreten Topologie von M.

(iv) $M = \bigcup_{H \subseteq G \text{ Normalteiler mit } G/H \text{ endlich}} M^H$

Beweis. (i) ⇒ (ii). Für $m \in M$ gilt $m \in M^U$ für ein U, also $U \subseteq G_s$. Damit ist G_s Vereinigung von U-Nebenklassen, also offen.

(ii) ⇒ (iii). Da die Topologie von M diskret sein soll, reicht es zu zeigen,

$$\mu^{-1}(m) = \{(g,n) \in G \times M \mid gn = m\}$$

ist offen für jedes $m \in M$. Der Stabilisator G_m operiert auf dieser Menge:

$$G_m \times \mu^{-1}(m) \longrightarrow \mu^{-1}(m), (h, (g,n)) \mapsto (hg,n).$$

Deshalb zerfällt $\mu^{-1}(m)$ in G_m-Orbits. Diese sind Mengen der Gestalt

$$G_m g \times \{n\},$$

also nach Voraussetzung offen in G×M.

(iii) ⇒ (iv). Für jedes $m \in M$ ist $\mu^{-1}(m)$ nach Voraussetzung offen in G×M. Mit dem Element $(e,m) \in \mu^{-1}(m)$ liegt eine ganze Umgebung dieses Elements in $\mu^{-1}(m)$, d.h, es gilt

$$H \times \{m\} \subseteq \mu^{-1}(m)$$

mit einem Normalteiler $H \subseteq G$ mit G/H endlich. Dann gilt aber $m \in M^H$.

(iv) ⇒ (i). trivial.

QED.

wobei K'/K die endlichen Galoisschen Teilerweiterungen von K_s/K durchläuft, sind gerade die Normalteiler von G mi endlichem Index.

3. Für jede endliche Galoissche Teilerweiterung K'/K von K_s/K gilt

$$F(K') = M^H \text{ mit } H := Gal(K_s/K').$$

Zu 1. Weil F eine Garbe ist, ist für je zwei endliche Teilerweiterungen K'/K und K''/K von K_s/K mit $K' \subseteq K''$ das Diagramm

$$F(K') \longrightarrow F(K'') \rightrightarrows F(K'' \otimes_K K'')$$

exakt. Insbesondere sind die Restriktionen $F(K') \longrightarrow F(K'')$ injektiv.

Zu 2. Für jede endliche Galoissche Teilerweiterung K'/K definiert die Einschränkung auf K' einen surjektiven Gruppen-Homomorphismus

$$G = Gal(K_s/K) \longrightarrow Gal(K'/K)$$

mit dem Kern $H := Gal(K_s/K')$. Insbesondere ist H ein Normalteiler von G mit

$$G/H \cong Gal(K'/K).$$

Weil K'/K endliche Erweiterung ist, ist die Galois-Gruppe G/H endlich, d.h. H hat endlichen Index.

Sei umgekehrt $H \subseteq G$ ein Normalteiler mit endlichem Index. Wir setzen

$$K' = K_s^H.$$

Dann ist K'/K eine Galoissche Teilerweiterung von K_s/K, und der Kern H' der Surjektion

$$G = Gal(K_s/K) \longrightarrow Gal(K'/K)$$

ist ein Normalteiler mit $H \subseteq H'$ und $G/H' = Gal(K'/K)$. Weil der Index von H endlich ist, gilt dasselbe für den Index von H', d.h. K'/K ist eine endliche Galois-Erweiterung.

Nach dem Hauptsatz der Galois-Theorie[17] ist

$$H = H' = Gal(K_s/K'),$$

d.h. H ist Galois-Gruppe einer Erweiterung der Gestalt K_s/K'.

Zu 3. Wir beginnen mit der Vorbemerkung, daß für je zwei endliche Teilerweiterungen K'/K und K''/K von K_s/K mit

$$K' \subseteq K'' \text{ und } K''/K \text{ Galoissch}$$

gilt

$$F(K') = F(K'')^{Gal(K''/K')}$$

(nach 4.2.2).

1. Schritt. Beweis der Inklusion $F(K') \subseteq M^H$ mit $H := Gal(K_s/K')$.

Sei $x \in F(K')$. Wir haben zu zeigen, $\sigma x = x$ für jedes $\sigma \in Gal(K_s/K')$. Wir wählen eine endliche Galossche Teilerweiterung K''/K von K_s/K mit $K' \subseteq K''$ und setzen

$$\sigma' := \sigma|_{K''} \in Gal(K''/K).$$

Dann gilt

[17] Für möglicherweise unendliche Erweiterungen, vgl. das Konspekt zu Cassels & Fröhlich, Algebraic number theory, 5.1.6.5.

$$\begin{aligned}\sigma x &= \sigma' x \quad \text{(nach Definition der Operation von G auf M)}\\ &= x \qquad \text{(wegen } \sigma' \in Gal(K''/K) \text{ und der Vorbemerkung).}\end{aligned}$$

<u>2. Schritt</u>. Beweis der Inklusion $F(K') \supseteq M^H$ mit $H := Gal(K_s/K')$.

Sei $x \in M$ im Stabilisator von H. Nach Definition von M und der Aussage 1 gibt es eine Galoissche Teilerweiterung K''/K von K_s/K mit

$$x \in F(K'').$$

Wir können dabei K'' so groß wählen, daß auch $K' \subseteq K''$ gilt. Nach Voraussetzung gilt

$$\sigma x = x \text{ für jedes } \sigma \in Gal(K_s/K').$$

Wegen $K' \subseteq K''$, also $F(K') \subseteq F(K'') \ni x$ können wir diese Identität in der Gestalt

$$x = \sigma x = \sigma|_{K''}(x) \text{ für } \sigma \in Gal(K_s/K')$$

schreiben. Nun definiert die Einschränkung auf K'' eine Surjektion

$$Gal(K_s/K') \twoheadrightarrow Gal(K''/K').$$

Deshalb ist

$$x = \sigma x \text{ für } \sigma \in Gal(K''/K'),$$

d.h. es gilt $x \in F(K'')^{Gal(K''/K')}$. Nach der Vorbemerkung gilt $x \in F(K')$.

Wir haben damit gezeigt, die Operation von G auf M_P ist stetig, wenn man M_P mit der diskreten Topologie versieht, d.h. M_P ist ein diskreter Modul im Sinne von Serre, Cohomologie Galoisienne, I.2 (vgl. auch Cassels & Fröhlich: Algebraic Number Theory,V Profinte groups, section 2.3).

<u>Umgekehrt kann man für jeden diskreten</u> G-<u>Modul</u> M <u>eine Garbe</u> F_M <u>definieren</u>.

Zum Beweis betrachten wir zunächst den Funktor,

$$\begin{aligned} f: (et)/X &\longrightarrow \{ \text{G-Mengen mit stetiger Linksoperation} \}\\ U &\mapsto Hom_X(\bar{x}, U)\end{aligned}$$

welcher jedem Etal-Schema U über X, in dessen geometrische Faser über dem einzigen Punkt von X abbildet (und dessen Einschränkung auf **FEt** /X nach 3.4 eine Äquivalenz mit der Kategorie der endlichen G-Mengen ist).

Für U = Spec K' mit $K' = K_s^H$, G/H endlich erhalten wir

$$\begin{aligned} f(K') &= Hom_{\text{Spec } K}(\text{Spec } K_s, \text{Spec } K')\\ &= Hom_{K\text{-alg}}(K', K_s)\\ &= Hom_{K\text{-alg}}(K_s^H, K_s).\end{aligned}$$

Jede K-Einbettung $i: K_s^H \longrightarrow K_s$ läßt sich als Zusammensetzung der natürlichen Einbettung

$$K_s^H \hookrightarrow K_s$$

mit einem Isomorphismus $\sigma: K_s \longrightarrow K_s$ darstellen.[18] Zwei solche σ liefern genau dann dasselbe i, wenn sie sich um ein Element $\mathrm{Gal}(K_s/K_s^H) = H$ unterscheiden. Also gilt

$$f(K') = G/H. \qquad (1)$$

Außerdem überführt der kovariante Hom-Funktor $f{:}U \mapsto \mathrm{Hom}_X(\bar{x}, U)$ Produkte in disjunkten Vereinigungen,

$$\begin{aligned} f(\vee_{i\in I} X_i) &= \mathrm{Hom}_X(\bar{x}, \vee_{i\in I} X_i) \\ &= \vee_{i\in I} \mathrm{Hom}_X(\bar{x}, X_i) \end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$f(\vee_{i\in I} X_i) = \vee_{i\in I} f(X_i). \qquad (2)$$

Wir setzen jetzt

$$F_M(U) := \mathrm{Hom}_G(f(U), M).$$

Aus (1) erhalten wir dann $F_M(K') = \mathrm{Hom}_G(G/H, M) = M^H$. Wegen (1) und (2) folgt somit

(a) $F_M(K') := M^H$ mit $H := \mathrm{Gal}(K_s/K')$

(b) $F_M(\vee_{i\in I} X_i) = \prod_{i\in I} F_M(X_i)$.

Zeigen wir,

$$F_M \text{ ist eine Garbe auf dem Etal-Situs } X_{et} \text{ von } X = \mathrm{Spec}\, K \qquad (3)$$

Dazu überprüfen wir, ob die Bedingungen von 4.2.3 erfüllt ist.

Bedingung (i) von 4.2.3: F_M ist eine Garbe auf den offenen Teilmengen jeder Etal-Überlagerung U' von Spec K.

Jede solche Etal-Überlagerung ist eine disjunkte Vereinigung der Gestalt

$$U' = \vee_{i\in I} \mathrm{Spec}\, K'_i$$

mit endlichen Teilerweiterungen K'_i/K von K_s/K (auf Grund der Charakterisierung der separablen Morphismen in Bemerkung 1.3.8 (ii)(e)). Die Aussage folgt daher aus (b).

Bedingung (ii) von 4.2.3: Für jeden surjektiven Morphismus $U' \longrightarrow U$ von affinen Etal-Überlagerungen von Spec K ist das Diagramm

$$F_M(U) \longrightarrow F_M(U') \longrightarrow F_M(U' \times_U U')$$

exakt.

Die Schemata U und U' sind disjunkte Vereinigungen von Spektren endlicher separabler Körper-Erweiterungen von K. Wegen (b) können wir zum Beweis annehmen,

U = Spec L, L/K endliche separable Körpererweiterung.

[18] Weil sich jeder K-Automorphismus von K_s^H zu einem K-Automorphismus von K_s fortsetzen läßt.

Weiter können wir wie im Beweis von 4.2.3 die zu $U' \longrightarrow U$ gehörige Familie durch eine überdeckende Teilfamilie ersetzen, d.h. wir können annehmen,

$U' = \operatorname{Spec} L'$, L'/K endliche separable Körpererweiterung, $L \subseteq L'$.

Sei L''/L eine endlice Galois-Erweiterung, welche L' enthält.

$L''/$ endlich und separabel, $L' \subseteq L''$.

Betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} F_M(L) & \longrightarrow & F_M(L') & \rightrightarrows & F_M(L'\otimes_L L') \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ F_M(L) & \longrightarrow & F_M(L'') & \rightrightarrows & F_M(L''\otimes_L L'') \end{array}$$

Wir haben zu zeigen, die obere Zeile ist exakt. Dazu reicht es zu zeigen,

1. Die untere Zeile ist exakt.
2. Die vertikale Abbildung in der Mitte ist injektiv.

<u>Zu 1</u>: Weil L''/L eine Galois-Erweiterung ist, sind wir in der Situation von 4.2.2, d.h. es reicht zu zeigen,

$$F_M(L) = F_M(L'')^{\mathrm{Gal}(L''/L)}$$

Nach (a) gilt

$$F_M(L) = M^H \text{ mit } H := \mathrm{Gal}(K_s/L)$$

$$F_M(L'') = M^{H''} \text{ mit } H'' := \mathrm{Gal}(K_s/L'')$$

also wegen $H'' \subseteq H$:

$$F_M(L) = M^H = (M^{H''})^H = (M^{H''})^{H/H''} = F_M(L'')^{H/H''}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(L''/L) &= \mathrm{Im}(\mathrm{Gal}(K_s/L) \overset{\text{res}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Gal}(L''/L)) \\ &= \mathrm{Koker}(\mathrm{Ker}(\text{res})) \\ &= \mathrm{Koker}(\mathrm{Gal}(K_s/L'') \hookrightarrow \mathrm{Gal}(K_s/L)) \\ &= \mathrm{Koker}(H'' \hookrightarrow H) \\ &= H/H'', \end{aligned}$$

also

$$F_M(L) = F_M(L'')^{\mathrm{Gal}(L''/L)}$$

<u>Zu 2</u>. Wegen $L' \subseteq L''$ gilt $H'' \subseteq H'$ also

$$F_M(L') = M^{H'} \subseteq M^{H''} = F_M(L'').$$

4.2.7 Die Etal-Garben auf Spec K

Seien K ein Körper, K_s eine separable Abschließung von K, $G = \mathrm{Gal}(K_s/K)$ die Galois-Gruppe und

$$X = \operatorname{Spec} K.$$

Dann sind durch die in 4.2.6 beschriebenen Zuordnungen

(diskrete G-Moduln) $\longrightarrow S(X_{et})$, $M \mapsto F_M$

$S(X_{et}) \longrightarrow$ (diskrete G-Moduln), $F \mapsto M_F$

zueinander quasi-inverse Äquivalenzen von Kategorien definiert.

Beweis. 1. Schritt. Es gibt einen funktoriellen Isomorphismus $F \xrightarrow{\cong} F_{M_F}$.

Seien F eine Garbe auf X_{et}, U ein Objekt von X_{et} und

$$M := M_F = \varinjlim_{K \subseteq K' \subseteq K_s} F(K')$$

der durch F definierte diskrete G-Modul. Für je zwei endliche Teilerweiterungen K'/K und K"/K von K_s/K mit $K' \subseteq K''$ ist Spec K" $\longrightarrow$ Spec K' eine Überdeckung, also - da F eine Garbe ist -

$$F(K') \subseteq F(K'').$$

Wir können daher den Limes M auch als Vereinigung

$$M = \bigcup_{K \subseteq K' \subseteq K_s} F(K')$$

schreiben. Ist K"/K eine Galois-Erweiterung, die K' enthält, so ist nach 4.2.2

$$F(K') = F(K'')^{Gal(K''/K')}.$$

Da es für je zwei endliche Teilerweiterungen K' eine endliche Galois-Erweiterung K"/K gibt, die beide enthält, ergibt sich[19],

$$F(K') = M^{Gal(K_s/K')}$$

Wir schreiben U als disjunkte Vereinigung

$$U = \vee_{i \in I} \operatorname{Spec} K'_i$$

mit endlichen Teilerweiterungen $K'_i \subseteq K_s$. Nach 4.2.6 (a) und (b) ist dann

$$\begin{aligned}
F_M(U) &= F_M(\vee_{i\in I} \operatorname{Spec} K'_i) \\
&= \prod_{i\in I} F_M(K'_i) \\
&= \prod_{i\in I} M^{H_i} \text{ mit } H_i = Gal(K_s/K'_i) \\
&= \prod_{i\in I} F(K'_i) \\
&= F(\vee_{i\in I} \operatorname{Spec} K'_i) \\
&= F(U).
\end{aligned}$$

2. Schritt. Für je zwei diskrete G-Moduln M und M' ist der natürliche Homomorphismus

$$Hom_G(M, M') \longrightarrow Hom_{X_{et}}(F_M, F_{M'})$$

bijektiv.

[19] nach 4.2.6.

Sei h: M $\longrightarrow$ M' ein Homomorphismus von G-Moduln, der im Kern der betrachteten Abbildung liegt. Für jede endliche Teilerweiterung $K' \subseteq K_s$ über K ist dann der induzierte Homomorphismus

$$F_M(K') \longrightarrow F_{M'}(K')$$

trivial, d.h. h induziert den trivialen Homomorphismus

$$M^H \longrightarrow M'^H,\ H := \mathrm{Gal}(K_s/K').$$

Weil M als diskreter G-Modul Vereinigung von Teilmoduln der Gestalt M^H ist, muß h selbst schon trivial sein. Analog zeigt man die Surjektivität der Abbildung.
QED.

Bemerkungen

(i) Der Satz 4.2.7 und dessen Beweis läßt sich ohne Mühe wie folgt verallgemeinern. Seien G eine beliebige proendliche Gruppe und

G-sets

die Kategorie der endlichen Mengen mit stetiger G-Operation von links. Eine Familie von G-Morphismen

$$(S_i \longrightarrow S)_{i\in I}$$

mit festem Ziel heißt Überdeckung der G-Menge S, wenn sie surjektiv ist, d.h. wenn die Bilder der Morphismen S überdecken. Die Kategorie G-sets bekommt auf diese Weise die Struktur eines Situs, d.h. man kann Prägarben und Garben auf G-sets definieren. Wie oben konstruiert man dann eine Äquivalenz von Kategorien

$$S(\text{G-sets}) \longrightarrow \text{G-mod},\ F \mapsto \varinjlim_H F(G/H)$$

der Kategorie der Garben auf G-sets mit der Kategorie der diskreten G-Moduln. Der direkte Limes wird dabei über alle offenen Untergrupppen H von G erstreckt.

(ii) Der Funktor von 4.2.6

$$U \mapsto F(U) = \mathrm{Hom}_X(\bar{x}, U)$$

definiert dann eine Äquivalenz von Kategorien

$$(et)/X \longrightarrow \text{G-sets} \qquad \text{mit } G = \pi_1(X, \bar{x}),$$

wobei Überdeckungen in Überdeckungen überführt werden. Auf diese Weise erhält man Äquivalenzen von Kategorien

$$S(\text{G-sets}) \approx S(X_{et}) \approx \text{G-mod}.$$

(iii) Jede proendliche Gruppe ist isomorph zur Galois-Gruppe eines Körpers, siehe

Douady, A.: Cohomologie des groups compacts totalment discontinus, Seminaire Bourbaki 1959/60, No. 189).
Waterhouse, W.: Profinite groups are Galois groups, Proc. Amer. Math. Soc. 42 (1973), 639- 640.

Deshalb ist die Theorie der diskreten Moduln über proendlchen Gruppen äquivalent zur Theorie der der Etal-Garben über dem Spektrum eines Körpers.

4.2.8 Bemerkungen: die Strukturgarbe

(i) Der gesamte bisher beschriebene Teil der Theorie der Garben und Prägarben (und ein Teil der nachfolgenden) läßt sich in offensichtlicher Weise auch auf den Fall von Garben und Prägarben von Mengen, Gruppen, Ringen und Moduln über Garben von Ringen übertragen.

(ii) Für beliebige E, X und C ist auf dem Situs $X_E = (C/X)_E$ eine Garben

$$U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$$

definiert, welche auch kanonische Garbe oder auch Struktur-Garbe von X_E heißt. Diese Garbe wird mit $\mathcal{O}_{X_E}$ und manchmal einfach auch mit $\mathcal{O}_X$ bezeichnet.

(iii) Die Garben $\mathcal{O}_{X_{et}}$ und $\mathcal{O}_{X_{fl}}$ sind Garben von Ringen. Jeder quasi-kohärente $\mathcal{O}_X$-Modul im klassischem Sinne definiert eine Garbe von $\mathcal{O}_{X_E}$-Moduln W(F) auf X_E für E = (et) und E = (fl).

4.2.9 Bemerkungen: Garben und darstellbare Funktoren

(i) Nach 4.2.5 ist jede durch ein Gruppenschema dargestellte Prägarbe auf X_{et} bzw. X_{fl} sogar eine Garbe.
Dieselben Argumente wie dort zeigen daß jede durch ein Schema dargestellte Prägarbe auf auf X_{et} bzw. X_{fl} eine Garbe von Mengen ist.
Mit anderen Worten, die Etal-Topologie und die flache Topologie sind damit gröber[20] als die kanonische Topologie auf X_{et} bzw. X_{fl}.

(ii) Ist die E-Topologie auf (C/X) gröber als die kanonische Topologie, so läßt sich C/X als volle Teilkategorie von $\mathbf{S}(C/X)_E$ auffassen bzgl. des kontravarianten Funktors

$$C/X \longrightarrow \mathbf{S}((C/X)_E),\ Y \mapsto \mathrm{Hom}(?, Y).$$

wobei hier durch **S** die Kategorie der mengenwertigen Garben bezeichnet werde.[21]

(iii) Gelegtlich kann man zeigen, daß alle Garben darstellbar bzw. ind-darstellbar sind. Das ist zum Beispiel der Fall für die Etal-Garben (von Mengen oder Gruppen) auf einem Körper K.
Sei F eine solche Garbe von Mengen. Wir setzen

$$S := \varinjlim_{i\in I} F(K_i),$$

wobei $(K_i)_{i\in I}$ die Familie der Teilerweiterungen $K_i \subseteq K_s$ über K bezeichne.
Dann ist S eine diskrete G-Menge mit

$$G = \mathrm{Gal}(K_s/K).$$

Zerlegen wir diese in Orbits, sagen wir

$$S = \vee_{j\in J} S_j .$$

Jede der Mengen S_j hat die Gestalt

$$S_j = G/H_j$$

mit einer offenen Untergruppe H_j von G. Der Funktor F wird deshalb durch das Schema

$$U := \vee_{j\in J} U_j \text{ mit } U_j := \mathrm{Spec}\, K_s^{H_j}$$

---

[20] d.h. die Überdeckungen von X_{et} bzw. X_{fl} sind Überdeckungen der jeweiligen kanonischen Topologie.

[21] Hom(?, Y) ist nach Definition eine Garbe bezüglich der kanonischen Topologie, d.h. für jede kanonische Überdeckung erhält man ein exaktes Diagramm. Das gilt dann auch für jede E-Überdeckung (da diese nach Voraussetzung kanonisch sein soll).

dargestellt. Wegen

$$U = \varinjlim_{J' \subseteq J} \vee_{j \in J'} U_j ,$$

wobei J' alle endlichen Teilmengen von J durchlaufe, kann man U als Ind-Objekt von (et)/Spec(K) auffassen.

4.2.10 Existenz der endlichen inversen Limites in X_{et}, X_{fl} und X_{Zar}

Die Kategorie

$$E/X$$

besitzt endliche inverse Limites in den Fällen

$$E = (Zar),\ E = (et) \text{ und } E = LFT.$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß E/X endliche direkte Produkte und Differenzkerne besitzt. Die endlichen direkten Produkte stimmen mit den endlichen Faserprodukten über X überein. Die Existenz der ersteren ergibt sich damit aus der der letzteren.

Beweisen wir die Existenz der Differenzkerne. Im Fall der Kategorie E = (Zar) ist das direkte Produkt der natürlichen Einbettungen

$$U_1 \hookrightarrow U,\ \ldots, U_n \hookrightarrow U$$

gerade die natürliche Einbettung zum Durchschnitt

$$U_1 \cap \ldots \cap U_n \hookrightarrow U.$$

Betrachten wir die Fälle E = (et) und E = LFT. Seien zwei E-Morphismen

$$U' \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} U$$

gegeben. Wir gehen zu den Graphen[22] über,

$$\Gamma_i: U' \longrightarrow U' \times_U U'.$$

Betrachten wir das Faserprodukt $U_0 := U' \times_{U' \times_U U'} U'$ der beiden Graphen,

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{pr_1} & U' \\ pr_2 \downarrow & & \downarrow \Gamma_2 \\ U' & \xrightarrow{\Gamma_1} & U' \times_U U' \end{array} \tag{1}$$

Wegen der Kommutativität des Vierecks sind die Morphismen $\Gamma_i \circ pr_i$ unabhängig vom Index $i \in \{1,2\}$. Deshalb sind auch die Zusammensetzungen mit den beiden Projektionen $p_i: U' \times_U U' \longrightarrow U'$ unabhängig von $i \in \{1,2\}$:

$$d_i := p_2 \circ \Gamma_i \circ pr_i = f_i \circ pr_i: U_0 \longrightarrow U'$$

$$\Delta_i := p_1 \circ \Gamma_i \circ pr_i = id_i \circ pr_i = pr_i: U_0 \longrightarrow U'$$

Wir schreiben deshalb,

$$d = d_i \ (i = 1,2).$$

$$pr_1 = \Delta_1 = \Delta = \Delta_2 = pr_2.$$

---

[22] $\Gamma_i: U' \longrightarrow U' \times_U U'$ ist der Morphismus, dessen Zusammensetzung mit den beiden Projektionen gleich Id bzw. f_i.

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß Δ der Differenzkern von f_1 und f_2 ist. Nach Konstruktion erhalten wir

$$f_i \circ \Delta = f_i \circ pr_i = d_i = d \text{ ist unabhängig von i.}$$

Sei jetzt umgekehrt g: U" $\longrightarrow$ U' ein Morphismus mit

$$f_i \circ g: U'' \xrightarrow{g} U' \xrightarrow{f_i} U \text{ unabhängig von i.} \qquad (2)$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu der Bedingung

$$p_2 \circ \Gamma_i \circ g: U'' \xrightarrow{g} U' \xrightarrow{\Gamma_i} U' \times_U U' \xrightarrow{p_2} U' \text{ unabhängig von i.}$$

Trivialerweise ist $p_1 \circ \Gamma_i \circ g = id \circ g = g$ unabhängig von i. Ein Moprhismus mit Werten in $U' \times_U U'$ ist aber durch seine beiden Zusammensetzungen mit den beiden Projektionen festgelegt (durch seine beiden Kompoenten). Damit ist (2) äquivalent zur folgenden Aussage.

$$\Gamma_i \circ g: U'' \xrightarrow{g} U' \xrightarrow{\Gamma_i} U' \times_U U' \text{ ist unabhängig von i.}$$

Weil das Diagramm (1) kartesich ist, ist letztere Aussage äquivalent zu folgenden:

Es gibt genau einen Morphismus h: U" $\longrightarrow U_0$ mit $pr_i \circ h = g$ für i = 1 und i = 2.

Mit anderen Worten:

Es gibt genau einen Morphismus h: U" $\longrightarrow U_0$ mit $\Delta \circ h = g$.

Wir haben gezeigt, $\Delta: U_0 \longrightarrow U'$ ist der Differenzkern der beiden Morphismen f_i.

QED.

4.3 Direkte und inverse Bilder von Prägarben

4.3.1 Situs-Morphismen

Seien zwei Siten $(C'/X')_{E'}$ und $(C/X)_E$ gegeben. Ein Schema-Morphismus π:X'$\longrightarrow$X heißt Situs-Morphismus

$$(C'/X')_{E'} \longrightarrow (C/X)_E$$

wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Basiswechsel bezüglich π überführt Objekte von C/X in solche von C'/X', d.h. für jedes Schema Y von C/X ist $Y_{(X')} = Y \times_X X'$ ein Schema von C'/X'.

(ii) Basiswechsel bezüglich π überführt E-Morphismen von C/X in E'-Morphismen von C'/X', d.h. für jeden E-Morphismus f: U $\longrightarrow$ Y von C/X ist

$$f_{(X')} = f \times_X X': U_{(X')} \longrightarrow Y_{(X')}$$

ein E'-Morphismus von C'/X'.

Bemerkungen

(i) Surjektive Familien von Morphismen gehen bei Basiswechsel über in surjektive Familien von Morphismen. Deshalb definiert ein Situs-Morphismus einen Funktor

$$\pi^{\bullet}: C/X \longrightarrow C'/X',\ Y \mapsto Y_{(X')},$$

welcher Überdeckungen in Überdeckungen abbildet. Der Einfachheit halber werden wir diesen Sachverhalt dadurch ausdrücken, daß wir von einem stetigen Morphismus

$$\pi: X'_{E'} \longrightarrow X_E$$

sprechen.

(ii) Sei $\pi: X'_{E'} \longrightarrow X_E$ ein stetiger Morphismus. Jede Prägarbe P' auf $X'_{E'}$ definiert dann eine Prägarbe

$$\pi_p(P') := P' \circ \pi^\bullet : (C/X)^{op} \xrightarrow{\pi^\bullet} (C'/X')^{op} \xrightarrow{P} Ab.$$

Für jedes Objekt U von C/X ist nach Definition

$$\Gamma(U, \pi_p(P')) = \Gamma(U_{(X')}, P').$$

Die Prägarbe $\pi_p(P')$ heißt direktes Bild von P' (in der Prägarben-Kategorie).

(iii) Der Übergang zum direkten Bild bezüglich eines stetigen Morphismus

$$\pi: X'_{E'} \longrightarrow X_E$$

definiert einen Funktor der zugehörigen Prägarben-Kategorien

$$\pi_p: \mathbf{P}(X'_{E'}) \longrightarrow \mathbf{P}(X_E).$$

Das inverse Bild ist definiert als der zu π_p linksadjungierte Funktor, d.h. als der Funktor

$$\pi^p: \mathbf{P}(X_E) \longrightarrow \mathbf{P}(X'_{E'})$$

für welchen ein funktorieller Morphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X')}(\pi^p P, P') = \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X)}(P, \pi_p P')$$

besteht für jede Prägarbe P auf X_E und jede Prägarbe P' auf $X'_{E'}$. Die Existenz des inversen Bildes ergibt sich aus den grundlegenden Ergebnissen der Kategorien-Theorie.

(iv) Der identische Morphismus $X \longrightarrow X$ ist genau dann ein Situs-Morphismus

$$(C/X)_{E'} \longrightarrow (C/X)_E ,$$

wenn die E'-Topologie auf X feiner ist als die E-Topologie[23].

Beispiele

(a) Der identische Morphismus definiert stetige Morphismen $X_{fl} \longrightarrow X_{et} \longrightarrow X_{Zar}$

(b) Jeder Morphismus $\pi: X' \longrightarrow X$ definiert einen stetigen Morphismus

$$\pi: (C'/X')_E \longrightarrow (C/X)_E$$

falls dieser auf den betrachteten Kategorien definert ist (d.h. falls Bedingung (i) erfüllt ist).

4.3.2 Kriterium für die Existenz des linksadjungierten Funktors

Seien **C** und **C'** zwei kleine Kategorien und

$$p: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$$

ein Funktor. Weiter sei **A** eine Kategorie mit direkten Limites und

$$\mathrm{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{A}) \text{ und } \mathrm{Fun}(\mathbf{C}', \mathbf{A})$$

---

[23] d.h. es gilt $E \subseteq E'$.

die Kategorien der Funktoren **C** $\longrightarrow$ **A** bzw. **C'** $\longrightarrow$ **A**. Dann besitzt der Funktor

$$\mathrm{Fun}(\mathbf{C'}, \mathbf{A}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbf{C},\mathbf{A}),\ f \mapsto f\circ p,$$

einen linksadjungierten Funktor.

Bemerkungen

(i) Einen Beweis der obigen Aussage findet man in den folgenden Monographien.

Hilton, P., Stammbach, U.A.: A Course in homological algebra, Springer, Heidelberg 1970 (siehe p. 321)

Artin, M.: Grothendieck topologies, Lecture Notes, Harvard University, Department von Mathematics, Cambridge Mass. 1962 (vgl. Theorem 2.1).

Schubert, H.: Kategorien (vgl. Theorem II.17.1.8(a): es wird nur gefordert, daß **C** klein ist)

(ii) Für **C** := (C/X), **C'** := C'/X', A = Ab und p = π_p in Bemerkung 4.3.1 (iii) sind diese Bedingungen erfüllt.

(iii) Die Forderung, daß die Kategorien C und C' klein sein sollen, ist erfüllt, wenn diese Teilkategorien der Kategorie der Schemata endlichen Typs über einem Schema X sind, denn diese Kategorie besitzt eine kleine Teilkategorie, die mindestens ein Objekt besitzt in jeder Isomorphieklasse von Objekten.[24]

(iv) In jedem einzelnen konkreten Fall machen solche mengentheoretischen Fragen keine Schwierigkeiten. Damit die Argumentation jedoch hinreichend korrekt und gleichzeitig hinreichend allgemein ist, muß man Universen verwenden (vgl. den Anhang von SGA 4, Théorie des topos et cohomologie etale des schemas, Springer Lecture Notes 269,270,305).

(v) Eine Alternative zur Methode der Universen ist das Vorgehen von Waterhouse. Intuitiv treten bei allen von uns benötigten Konstruktionen nur Prägarben und Garben auf, die durch eine nicht so große Menge an Daten definiert sind, und genau das erlaubt es uns, alle Schwierigkeiten zu umgehen, selbst wenn wir Funktoren auf Sch/X betrachten. Nach

Waterhouse, W.: Basically bounded functors and flat sheaves, Pacif. J. Math. 57 (1975)597-610

heißt eine Prägarbe P <u>begrenzt</u>, wenn eine Kardinalzahl m existiert mit

$$P(\mathrm{Spec}\ A) = \varinjlim P(\mathrm{Spec}\ B)$$

für jedes affine Schema Spec A/X, wobei der Limes über alle Teilringe B $\subseteq$ A ersteckt wird mit einer Mächtigkeit $\le$ m. Indem man ausschließlich begrenzte Prägarben und Garben betrachtet, kann man alle mengentheoretischen Probleme umgehen, weil jede der Konstruktionen im wesentlichen Schemata verwenden, die mit Hilfe von Ringen konstruiert wurden, welche als Mengen in einer Menge der Mächtigkeit m liegen.

(vi) Einen Hinweis darauf, daß diese Problemen nicht völlig trivial sind, gibt ein Beispiel im oben angegebene Artikel von Waterhouse, für eine unbegrenzte Prägarbe, für welche es keine assoziierte Garbe gibt (der zweite Beweis von

---

[24] Man überdecke X durch offene affine Mengen U_i = Spec A_i und betrachte alle Schemata, die durch endliche Verheftungen von Schemata der Gestalt Spec B ergeben, wobei B ein Faktorring eines Rings der Gestalt $A_i[X_1, X_2, ...]$ ist.

Theorem 2.11, welchen wir unten angeben, funktioniert nicht für dieses Beispiel, weil der Limes

$$\varinjlim \check{H}(\mathbf{U}, P_1)$$

über eine Klasse erstreckt wird, welche im Fall einer unbegrenzten Prägarbe P nicht durch einen Limes über eine Menge ersetzt werden kann).

(vii) Wir werden später eine expliziete Beschreibung der Prägarbe $\pi^p P$ benötigen. Deshalb skitzieren wir jetzt den Beweis von 4.3.2 in diesem Spezielfall.

4.3.3 Beschreibung der Prägarbe $\pi^p P$

Sei ein stetiger Morphismus π: $X'_{E'} \longrightarrow X_E$ gegeben. Beschreiben wir den inversen Bildfunktor

$$\pi^p \colon \mathbf{P}(X_E) \longrightarrow \mathbf{P}(X'_{E'})$$

zum stetigen Morphismus π: $X'_{E'} \longrightarrow X_E$. Grob gesagt ist

$$\Gamma(U', \pi^p P)$$

die Vereinigung aller Gruppen von Schnitten der Prägarbe P bezüglich aller offenen Teilmengen, welche das Bild der Menge U' enthalten, genauer

$$\pi^p P(U') := \varinjlim_{U} P(U),$$

wobei der direkte Limes über alle kommuativen Diagramme

$$(g, U) := \begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array} \qquad (1)$$

mit $U \longrightarrow X$ aus C/X erstreckt wird. Ein Morphismus von zwei solchen Diagrammen (g,U) und $(\widetilde{g}, \widetilde{U})$ ist definiert als ein X-Morphismus h: $U \longrightarrow \widetilde{U}$ mit $hg = \widetilde{g}$.

$$\begin{tikzcd} & & \widetilde{U} \arrow[ddl] \\ U' \arrow[r, "g"'] \arrow[urr, "\widetilde{g}"] \arrow[d] & U \arrow[ur, "h"] \arrow[d] & \\ X' \arrow[r, "\pi"] & X & \end{tikzcd}$$

Für jeden Morphismus h': $V' \longrightarrow U'$ in C'/X' erhält man zum letzten Diagramm analoge Diagramme mit V' anstelle von U'. Der direkte Limes bezüglich für festes V' faktorisiert sich deshalb über den direkten Limes für festes U', d.h. man erhält einen Morphismus[25]

[25] Jedes Diagramm zum Limes $\Gamma(U', \pi^p P)$ läßt sich als Diagramm zum Limes $\Gamma(V', \pi^p P)$ auffassen und damit in den Limes $\Gamma(V', \pi^p P)$ abbilden. Alle diese Abbildungen faktorisieren sich über den Limes $\Gamma(U', \pi^p P)$. Etwas verkürzend hat man die folgende Situation

$$\Gamma(U', \pi^p P) \longrightarrow \Gamma(V', \pi^p P)$$

von C/X.

Auf diese Weise wird $\pi^p P$ zu einer Prägarbe. Wir haben zu zeigen, π^p ist linksadjungiert zu π_p.

Ein Prägarben-Morphismus $P \longrightarrow \pi_p P'$ ist gegeben durch eine Familie von Abbildungen

$$P(U) \longrightarrow P'(U_{(X')}), \tag{2}$$

wobei U die Objekte von C/X durchläuft und die Abbildungen verträglich mit den Prägarben-Restriktionen sind.

Ein Prägarben-Morphismus $\pi^p P \longrightarrow P'$ ist gegeben durch eine Familie von Abbildiungen

$$P(U) \longrightarrow P'(U'), \tag{3}$$

zu allen kommutativen Diagrammen (1) welche mit den Prägarben-Restriktionen verträglich sind. Jeder der zugehörigen Morphismen $g: U' \longrightarrow U$ faktorisiert sich dabei eindeutig über $U_{(X')}$,

$$U' \longrightarrow U_{(X')} \longrightarrow U.$$

Durch Anwenden von P' auf den linken Morphismus erhalten wir eine Abbildung

$$P'(U_{(X')}) \longrightarrow P(U')$$

und aus (2) durch Zusammensetzen einen Morphismus der Gestalt (3). Jeder Morphismus $P \longrightarrow \pi_p P'$ definiert so einen Morphismus $\pi^p P \longrightarrow P'$.

Umgekehrt kann man in (3) speziell das Objekt $U' = U_{(X')}$ einsetzen und erhält so aus einem Morphismus $\pi^p P \longrightarrow P'$ einen Morphismus $P \longrightarrow \pi_p P'$.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß die soeben konstruierten Abbildungen invers zueinander sind (bis auf natürliche Isomorphie).

4.3.4 Die Werte der Prägarbe $\pi^p P$

Sei ein stetiger Morphismus $\pi: X'_{E'} \longrightarrow X_E$ gegeben. Falls die Kategorie C/X endliche inverse Limites besitzt, ist der $\Gamma(U', \pi^p P)$ definierende Limes kofiltrierend.

Beweis. Wir erinnern an die Definitionen. Eine Kategorie heißt pseudofiltrierend, wenn sich jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \\ C & & \end{array}$$

in ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} \{V'\text{-Diagramme}\} & \longrightarrow & \Gamma(V', \pi^p P) \\ \cup & & \uparrow \\ \{U'\text{-Diagramme}\} & \longrightarrow & \Gamma(U', \pi^p P) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow u \\ C & \xrightarrow{v} & D \end{array}$$

einbetten läßt, wobei im Fall B = C das Viereck außerdem noch so gewählt werden kann, daß u = v gilt. Eine Kategorie heißt <u>zusammenhängend</u>, wenn man je zwei Objekte durch eine endliche Folge von Morphismen verbinden kann. Die Kategorie heißt <u>filtrierend</u>, wenn sie pseudofiltrierend und zusammenhängend ist. Eine Kategorie heißt <u>kofiltrierend</u>, wenn ihr Dual filtrierend ist. Wir haben zu zeigen, die Kategorie der kommutativen Vierecke

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

mit U $\longrightarrow$ X aus C/X ist kofiltierend, d.h. für je zwei Morphismen h und h*

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{U} & & \\
U' \arrow[r, "g"'] \arrow[d] \arrow[urr, bend left, "\tilde{g}"] & U \arrow[d] \arrow[ur, "h"] & & U^* \arrow[ul, "h^*"'] \arrow[d] & U' \arrow[l, "g^*"] \arrow[d] \arrow[ull, bend right, "\tilde{g}^*"'] \\
X' \arrow[r, "\pi"] & X & & X & X' \arrow[l, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

mit demselben Ziel $\tilde{U}$ gibt es ein kommutatives Viereck mit den beschriebenen Eigenschaften. Es ist nicht schwer, mit Hilfe von Faserprodukten (bzw. Differenzkernen im Fall g = g*) ein solches Viereck zu konstruieren.

QED.

Bemerkugnen

(i) Wie wir gesehen haben, sind für

$$X_{et'}, X_{fl} \text{ und } X_{Zar}$$

die Bedingungen von 4.3.4 erfüllt.

(ii) Direkte Limites lassen sich als Kokerne direkter Summen beschreiben. Im kofiltrierenden Fall gibt es eine alternative Beschreibung falls die Kategorie eine Teilkategorie von Ens ist:

1. Jedes Element des direkten Limes wird durch ein Element des eines Objekts des direkten Systems repräsentiert.
2. Zwei Elemente zweier Objekte des direkten Systems repräsentieren genau dann dasselbe Element des direkten Limes, wenn ihre Bilder in einem Objekt des direkten Systems gleich sind.

Beispiele für inverse Bilder

(i) Sei P die konstante Prägarbe zur Gruppe G. Dann ist auch $\pi^p P$ die konstante Prägarbe zur Gruppe G.[26]

(ii) Seien π: X' $\longrightarrow$ X ein Morphismus von C/X und

$$C'/X' = (C/X)/X'$$

die volle Teilkategorie der X'-Schemata von C/X. Dann besitzt die Kategorie der Vierecke, über welche der direkte Limes zu erstrecken ist, ein Anfangsobjekt

[26] Das direkte System besteht aus identischen Morphismen, ist also kofiltrierend.

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{id} & U' \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi\circ f'} \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Man beachte, jedes Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{g} & U \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

läßt sich wie folgt schreiben.

$$\begin{tikzcd} & & U \arrow[dd, "f"] \\ U' \arrow[r, "id"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[urr] & U' \arrow[ur, "g"] \arrow[d, "\pi\circ f'"] & \\ X' \arrow[r, "\pi"] & X & \end{tikzcd}$$

Deshalb gilt

$$\Gamma(U', \pi^p P) = \Gamma(U', P),$$

d.h. $\pi^p P$ ist die Einschränkung des Funktors P auf die Teilkategorie C'/X' von C/X. Wir verwenden in dieser Situation für das inverse Bild die Bezeichnung

$$P|_{X'} = \pi^p P$$

(iii) Sei $\pi = id: X \longrightarrow X$ der identische Morphismus. Es gelte $C'/X \supseteq C/X$ und $E' \supseteq E$ Dann gilt

$$\pi_p \pi^p P = P$$

für jede Prägarbe P auf $(C/X)_E$.[27]

Übungsaufgabe

Ist das inverse Bild der additiven Gruppe beim identischen Morphismen

$$\pi = id: X_{fl} \longrightarrow X_{et} \text{ bzw. } \pi = id: X_{et} \longrightarrow X_{Zar}$$

wieder die additive Gruppe ? Gilt

$$\pi^p \mathbb{G}_a = \mathbb{G}_a \text{ ?}$$

Bei der Berechnung von

$$\Gamma(U', \pi^p \mathbb{G}_a) = \varinjlim_{U} \Gamma(U, \mathbb{G}_a)$$

ist der direkte Limes ist zu erstrecken über die kommuativen Vierecke der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{g} & U \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow{id} & X \end{array}$$

mit f' flach bzw. etale und f etale bzw. offene Einbettung. Betrachten wir den zweiten Fall, d.h. f' ist etale und f die natürliche Einbettung einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$. Wegen der Kommutativität des Diagramms gilt

---

[27] Wie im Fall (ii) existiert - falls U' in C/X liegt - ein Anfangsobjekt, nämlich das von (ii) mit $\pi = id$.

$$\mathrm{Im}(f') = f(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Im}(g) \subseteq U.$$

Das Diagramm läßt sich deshalb auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$\begin{tikzcd} & & f'(U') \arrow[dl] \arrow[ddl] \\ U' \arrow[r, "g"'] \arrow[urr, "f'"] \arrow[d, "f'"'] & U \arrow[d, "f"'] & \\ X \arrow[r, "id"'] & X & \end{tikzcd}$$

Mit anderen Worten,

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f'"'] & f'(U') \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ X \arrow[r, "id"] & X \end{tikzcd}$$

ist ein initiales Objekt. Es gilt also

$$\Gamma(U', \pi^p\mathbb{G}_a) = \Gamma(f'(U'), \mathbb{G}_a) = \Gamma(f'(U'), \mathcal{O}_X)$$

Im allgemeinen ist dies nicht gleich $\Gamma(U', \mathcal{O}_{U'})$. Als Beispiel können wir den Fall

$$U' = X \vee X,\ f': X \vee X \longrightarrow X \text{ induziert durch die Identität}$$

betrachten. Dann gilt

$$\Gamma(U', \pi^p\mathbb{G}_a) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \text{ und } \Gamma(U', \mathcal{O}_{U'}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \oplus \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

Also gilt $\pi^p\mathbb{G}_a \neq \mathbb{G}_a$. Das angegebene Beispiel ist dabei auch ein Gegenbeispiel im ersten Fall (da f' auch flach und f auch etale ist).

4.3.5 Eigenschaften von π_p und π^p (Exaktheit und Halbexaktheit)

Sei $\pi: X'_{E'} \longrightarrow X_E$ ein stetiger Morphismus. Dann gilt

(i) π_p ist exakt.

(ii) π^p ist rechtsexakt.

(iii) π^p ist exakt in den folgenden beiden Fällen.
  - (a) In C/X existieren endliche inverse Limites wie z.B. in den Fällen LFT/X, (et)/X , (Zar)/X.
  - (b) π ist ein Objekt von C/X und C'/X' = (C/X)/X'.

Beweis. Zu (i). Seien

$$0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Prägarben auf $X'_{E'}$ und $f: U \longrightarrow X$ ein Objekt von X_E. Wir wenden den Funktor $\Gamma(U_{(X')}, ?)$ an und erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \pi_pP') \longrightarrow \Gamma(U, \pi_pP) \longrightarrow \Gamma(U, \pi_pP'') \longrightarrow 0$$

Damit ist

$$0 \longrightarrow \pi_pP' \longrightarrow \pi_pP \longrightarrow \pi_pP'' \longrightarrow 0$$

exakt.

Zu (ii). Seien

$$0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Prägarben auf X_E und $f':U' \longrightarrow X'$ ein Objekt von $X'_{E'}$. Für jedes kommutative Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

erhalten wir durch Anwenden des Funktors $\Gamma(U, ?)$ eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, P') \longrightarrow \Gamma(U, P) \longrightarrow \Gamma(U, P'') \longrightarrow 0.$$

Nun sind direkte Limites in der Kategorie **Ab** rechtsexakt[28]. Durch Übergang zum direkten Limes erhalten wir also eine exakte Sequnez

$$\Gamma(U, \pi^p P') \longrightarrow \Gamma(U, \pi^p P) \longrightarrow \Gamma(U, \pi^p P'') \longrightarrow 0.$$

Damit ist

$$\pi^p P' \longrightarrow \pi^p P \longrightarrow \pi^p P'' \longrightarrow 0$$

exakt.

Zu (iii). Falls C/X endliche inverse Limites besitzt, ist nach 4.3.4 der Limes $\Gamma(U', \pi^p P)$ kofiltrierend. Dies ist im Fall (a) nach Voraussetzung der Fall. Die Behauptung folgt in diesem Fall aus der Tatsache, daß kofiltriernede Limites in Ab exakt sind.[29]

Im Fall (b) existiert nach Beispiel 4.3.4 (ii) für jedes der auftretenden direkten Systeme ein Anfangsobjekt, und es ist $\Gamma(U', \pi^p P) = \Gamma(U', P)$, d.h. die Exaktheit ergibt sich trivialerweise.
QED.

4.3.6 Das direkte Bild einer Garbe

Seien $\pi: X'_{E'} \longrightarrow X_E$ ein stetiger Morphismus und F' eine Garbe auf $X'_{E'}$. Dann ist auch $\pi_p F'$ eine Garbe.

Beweis. Für jedes Objekt U von C/X setzen wir

$$U' := U \times_X X'.$$

[28] Weil Kokerne direkte Limites sind und direkte Limites miteinander kommutieren.

[29] Wir haben zu zeigen, der direkte Limes von Injektionen ist im kofiltrierenden Fall injekiv.
Sei x ein Repräsentant eines Limes-Elements aus dem Kern. Das Bild von x repräsentiert dann das Nullelement im Limes. Durch Abändern des Repräsentanten kann man also erreichen, daß das Bild von x gleich Null ist (weil der Limes filteriend ist). Dann ist aber x selbst gleich Null, repräsentiert also im Limes die Null. Genauer: sei ein direktes kofiltrierendes System von Monomorphismen

$$A_i \rightarrowtail B_i$$

in **Ab** gegeben. Wir haben dann kommutative Vierecke

$$\begin{array}{ccc} A_i & \rightarrowtail & B_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim_i A_i & \longrightarrow & \varinjlim_i B_i \end{array}$$

Seien $\bar{x}$ im Kern des unteren horizomtalen Homomorphismus und $x \in A_i$ ein Repräsentant von $\bar{x}$. Weil das System kofiltrierend ist, kann man i so wählen, daß x im Kern des oberen horisontalen Homomorphismus liegt. Dann gilt aber $x = 0$, also auch $\bar{x} = 0$.

Sei $\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von X_E. Dann ist $\{U'_i \longrightarrow U'\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von $X'_{E'}$. Weil F' eine Garbe sein soll ist damit das Diagramm

$$F'(U') \longrightarrow \prod_{i\in I} F'(U'_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} F'(U'_i \times_{U'} U'_j)$$

exakt.
Nun ist aber

$$\begin{aligned} U'_i \times_{U'} U'_j &= (U_i \times_X X') \times_{U \times_X X'} (U_j \times_X X') \\ &= (U_i \times_U U \times_X X') \times_{U \times_X X'} (U_j \times_X X') \\ &= U_i \times_U (U \times_X X') \times_{U \times_X X'} (U_j \times_X X') \\ &= U_i \times_U \times U_j \times_X X' \\ &= (U_i \times_U \times U_j)'. \end{aligned}$$

Das Diagramm bekommt so die Gestalt

$$F'(U') \longrightarrow \prod_{i\in I} F'(U'_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} F'((U_i \times_{U'} U_j)')$$

d.h.

$$(\pi_p F')(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} (\pi_p F')(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} (\pi_p F')(U_i \times_{U'} U_j).$$

Wir haben gezeigt, $\pi_p F'$ ist eine Garbe.

QED.

Bemerkungen

(i) Im allgemeinen ist die Prägarbe $\pi^p F$ keine Garbe, für Garben F. Im Fall 4.3.5 (b) ist das aber trialerweise der Fall (wegen $\pi^p F = F|_{\text{Teilkategorie}}$).

(ii) Den Begriff des Halms einer Garbe oder Prägarbe im Punkt eines Situs ist leicht zu definieren, sobald geklärt ist, was man unter einem Punkt zu verstehen hat. Obwohl es für fast jeden Situs eine geeignete Theorie der Punkte und Halme gibt, beschränken wir uns hier auf den Fall des Etal-Situs, da in diesem Fall die Beschreibung in sehr expliziter Weise möglich ist.

(iii) Die wichtigste Eigenschaft eines Punktes eines topologischen Raums in der gewöhnlichen Garbentheorie besteht darin, daß die Definition einer Garbe auf einem einpunktigen topologischen Raum darauf hinausläuft eine Menge (bzw. eine abelsche Gruppe) anzugeben. Für die Etal-Punkte eines einpunktigen Schemas ist das bereits nicht mehr der Fall, sobald das Schema nicht das Spektrum eines separabel abgeschlossenen Körpers ist. Als Punkte in der Etal-Topologie auf X muß man deshalb die geometrischen Punkte wählen.

4.3.7 Halme

Sei x ein Punkt des (topologischen Raumes eines) Schemas X. Mit $\bar{x}$ bezeichnen wir stets das Spektrum eines separabel abgeschlossenen Körpers $k(\bar{x})$, welcher den Körper k(x) enthält. Weiter bezeichnen wir mit

$$u_x: \bar{x} \longrightarrow X$$

den Morphismus, der durch die Einbettung $k(x) \hookrightarrow k(\bar{x})$ induziert wird. Nach 4.2.7 ist der Funktor

$$S(\bar{x}_{et}) \longrightarrow Ab,\ F \mapsto F(\bar{x}),$$

eine Äquivalenz von Kategorien.[30]

Sei P eine Prägarbe auf X_{et}. Der Halm von P im Punkt $\bar{x}$ ist dann definiert als die abelsche Gruppe

$$P_{\bar{x}} := (u_x^p P)(\bar{x}).$$

Explizit,

$$P_{\bar{x}} = \varinjlim_{U} P(U),$$

wobei der Limes über alle kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \longleftarrow & \bar{x} \\ f\big\downarrow & \swarrow u_x & \\ X & & \end{array}$$

mit U etale über X erstreckt wird. Mit anderen Worten, wir nehmen den Limes über alle Etal-Umgebungen des Punktes $\bar{x}$ von X.

Bemerkungen

(i) Der Funktor

$$\mathbf{P}(X_{et}) \longrightarrow Ab,\ P \mapsto P_{\bar{x}},$$

ist exakt.

(ii) Auf der abelschen Gruppe $P_{\bar{x}}$ operiert die Galois-Gruppe $Gal(k(x)_s/k(x))$.

(iii) Sei $U \longrightarrow X$ ein Etal-Morphismus, dessen Bild den Punkt x enthält. Dann kann man im allgemeinen auf viele Verschiedene Weisen einen über x liegenden geometrischen Punkt $\bar{x}$ von U wählen. Es gibt deshalb im allgemeinen keinen natürlichen Homomorphismus

$$P(U) \longrightarrow P_{\bar{x}} -$$

Fixiert man jedoch einen solchen geometrischen Punkt $\bar{x} \longrightarrow U$, so ist dieser Homomorphismus festgelegt, und man verwendet die Bezeichnungsweise

$$P(U) \longrightarrow P_{\bar{x}},\ s \mapsto s_{\bar{x}}.$$

(iv) Seien $Y \longrightarrow X$ ein Schema lokal endlichen Types über X und

$$\{U_i\}_{i\in I}$$

ein filtriertes inverses System von affinen X-Schemata. Dann ist die natürliche Abbildung

$$Y(\varprojlim_{i\in I} U_i) \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} Y(U_i)$$

wohldefiniert und bijektiv. Ist insbesondere P die Garbe zum kommutativen Gruppen-Schema G lokal endlichen Typs über X, so gilt

$$P_{\bar{x}} = \varinjlim_{i\in I} G(U) = G(\varprojlim_{i\in I} U) = G(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,\bar{x}}).$$

Insbesondere ist

---

[30] Die Galois-Gruppe G zu $k(\bar{x})$ ist trivial, d.h. die G-Moduln sind gerade die abelschen Gruppen.

$$(\mathbb{G}_a)_{\bar{x}} = \mathcal{O}_{X,\bar{x}} \text{ und } (\mathbb{G}_m)_{\bar{x}} = \mathcal{O}^*_{X,\bar{x}} .$$

Beweise. Zu (i). Dies gilt nach 4.3.5 (iii).
Zu (ii). Der Morphismus $u_x: \bar{x} \longrightarrow X$ faktorisiert sich über x := Spec k(x),

$$\bar{x} \xrightarrow{j} x \xrightarrow{i_x} X,$$

d.h. es ist

$$P_{\bar{x}} = j^*(i_x^*(P))$$

das inverse Bild der Prägarbe $P^* := i_x^*(P)$ auf Spec k(x) bezüglich des durch $k(x) \hookrightarrow k(x)_s$ induzierten Morphismus, d.h.

$$P_{\bar{x}} = \varinjlim_{k(x)\subseteq K'\subseteq k(\bar{x})} P^*(K'),$$

wobei K'/k(x) die endlichen Galoisschen Teilerweiterungen von $k(\bar{x})/k(x) = k(x)_s/k(x)$ durchläuft. Man beachte, zunächst bilden die zusammenhängenden Etal-Umgebungen ein kofinales Teilsystem, und dann liegt jede endliche Teilerweiterung von $k(\bar{x})/k(x)$ in einer endlichen Galoisschen Teilerweiterung. Wie in 4.2.7 erhalten wir auf dem Limes die Struktur eines diskreten Moduls über $G = Gal(k(\bar{x})/k(x))$.
Zu (iii). Die einzige nicht-triviale Aussage ist die bezüglich der Abbildung

$$Y(\varprojlim_{i\in I} U_i) \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} Y(U_i)$$

Eine Verallgemeinerung dieser Aussage werden wir später beweisen.
QED.

4.3.8 Von Null verschiedene Schnitte und Halme

Seien F eine Garbe auf X_{et}, $f:U \longrightarrow X$ ein Etal-Morphismus und $s \in F(U)$ ein Schnitt von F. Ist $s \neq 0$, so gibt es einen Punkt $x \in X$ und über x einen geometrischen Punkt $\bar{x} \longrightarrow U$ mit $s_{\bar{x}} \neq 0$.
Beweis. Angenommen, s liegt im Kern aller Abbildungen

$$F(U) \longrightarrow F_{\bar{x}} .$$

Jeder Punkt $u \in U$ ist das Bild eines geometrischen Punktes $\bar{x} \longrightarrow U$, der über dem Punkt $x := f(u) \in X$ liegt. Nach Definition von $F_{\bar{x}}$ (und weil $F_{\bar{x}}$ ein kofiltrierende Limes ist) gibt es für jeden Punkt $u \in U$ ein Schema $V_u \longrightarrow U$, welches etale ist über U, mit $s|_{V_u} = 0$. Die Familie der V_u bildet aber einer Überdeckung von U, d.h. nach dem ersten Garben-Axiom gilt s = 0.
QED.

4.3.9 Die zu einer Prägarbe assoziierten Garbe

Für jede Prägarbe P auf X_E existert eine Garbe aP auf X_E und ein Morphismus

$$\varphi: P \longrightarrow aP$$

von Prägarben mit der Eigenschaft, daß sich jeder Morphismus von Prägarben

$$\varphi': P \longrightarrow F$$

mit Werten in einer Garbe F auf X_E eindeutig über φ: P $\longrightarrow$ aP faktorisiert, d.h. es gibt genau einen Garben-Morphismus ψ, für welchen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varphi} & aP \\ & \varphi' \searrow \; \swarrow \psi & \\ & F & \end{array}$$

kommutativ ist.

Bemerkung
Wir geben hier einen Beweis für den Etal-Situs und den Zariski-Siturs an und skitzieren den Beweis im allgemeinen Fall. Wir benötigen zunächst das folgende Lemma.

Lemma 4.3.9.1
Für jeden Situs X_E gelten die folgenden Aussagen.

(i) Das Produkt von Garben auf X_E ist eine Garbe.

(ii) Ist $\{F_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Teilgarben der Garbe F auf X_E , so ist die Prägarbe $\bigcap F_i$ mit

$$\Gamma(U, \bigcap F_i) := \bigcap_{i\in I} \Gamma(U, F_i)$$

eine Garbe auf X_E.

(iii) Ist φ: F $\longrightarrow$ F' ein Morphismus von Garben auf X_E und $F'_0 \subseteq F'$ eine Teilgarbe von F', so ist die Prägarbe $\varphi^{-1}F'_0$ mit

$$\Gamma(U, \varphi^{-1}F'_0) := \varphi^{-1}\Gamma(U, F_0)$$

eine Garbe auf X_E. Insbesondere ist Ker(φ) eine Garbe.

Beweis des Lemmas. Eine Möglichkeit, das Lemma zu beweisen, besteht im direkten Nachweis der Garben-Axiome. Alternativ kann man die Diagramme der Gestalt

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} F(U_i\times_U U_j)$$

zu gegebenen Überdeckungen $\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I}$ betrachten. Weil inverse Limites miteinander kommutieren, sieht man sofort, daß inverse Limites von Garben wieder Garben sind. Die Behauptung folgt aus der Tatsache, daß direkte Produkte, Durchschnitte und vollständige Urbilder inverse Limites sind.
QED.
Beweis von 4.3.9 für den Etal-Situs.
<u>1. Schritt</u>. Der Fall, daß X = Spec K das Spektrum eines separabel abgeschlossenen Körpers ist, $K = K_s$.

Jedes Etal-Schema lokal endlichen Typs U $\longrightarrow$ X zerfällt dann in eine endlich disjunkte Vereinigung

$$U = \vee_{i=1}^{r} U_i \text{ mit } U_i = X \text{ für jedes i.}$$

(vgl. Bemerkung 1.3.8 (ii)(e)). Wir definieren dann aP als die Prägarbe

$$U \mapsto \prod_{i=1}^{r} P(U_i) = P(X)^r.$$

Der Prägarben-Morphismus

$$P \longrightarrow aP$$

sei gerade durch die Restriktion auf die Zusammenhangskomponenten definiert.

Beim Nachweis der Garben-Axiome gehen wir vor wie im Beispiel 4.2.6 (vgl. die beiden dortigen Bedingungen (a) und (b)).
Man sieht sofort, daß die so definierte Prägarbe endliche disjunkte Vereinigungen in Produkte überführt. Insbesondere ergibt sich, daß so auf den offenen Teilmengen von U eine Garbe bezüglich der Zariski-Topologie definiert ist. Nach 4.2.3 reicht es zu zeigen, daß für jeden surjektiven Morphismus U' $\longrightarrow$ U von Etal-Schemata lokal endlichen Typs über X das Diagramm

$$F(U) \longrightarrow F(U') \rightrightarrows F(U' \times_U U')$$

exakt ist. Indem wir U in Zusammenhangskomponenten zerlegen, reduzieren wir die Aussage auf den Fall U = X. Indem wir die zu U'$\longrightarrow$U gehörige Famitlie durch eine minimale überdeckende Familie ersetzen, reduzieren wir auf den Fall U' = X. Wir können also annehmen, U' $\longrightarrow$ U ist der identische Morphismus X $\longrightarrow$ X. Das Diagramm bekomme dann die Gestalt

$$F(X) \xrightarrow{id} F(X) \overset{id}{\underset{id}{\rightrightarrows}} F(X),$$

ist also trivialerweise exakt.
Die Universalitätseigenschaft ergibt sich trivialerweise: für jeden Prägaben-Morphismus P $\longrightarrow$ F mit Werten in einer Garbe hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P(U) \hookrightarrow & \prod_i P(U_i) = aP(U) \\ \downarrow & \downarrow \\ F(Y) = & \prod_i F(U_i) \end{array}$$

Man beachte, das untere Gleichheitszeichen besteht, weil F eine Garbe sein soll.

<u>2. Schritt</u>. Der allgemeine Fall.

Sei jetzt X ein beliebiges Schema. Für jeden Punkt $x \in X$ fixieren wir einen geometrischen Punkt

$$u_x : \bar{x} \longrightarrow X$$

mit dem Bild x in X und setzen

$$P^*_{\bar{x}} := a(u_x^p P),$$

wobei a die assozierte Garbe wie im ersten Schritt definiert bezeichne. Weiter sei P* die wie folgt definierte Garbe auf X.

$$P^* := \prod_{x \in X} (u_x)_p P^*_{\bar{x}}$$

Man beachte, nach 4.3.6 ist das direkte Bild einer Garbe wieder eine Garbe, und nach Lemma 4.3.9.1(i) ist das direkte Produkt von Garben eine Garbe. Den Prägarben-Morphismus

$$\varphi\colon P \longrightarrow P^*$$

definieren wir, indem wir seine Koordinaten-Morphismen angeben, d.h. seine Zusammensetzungen mit den Projektionen $P^* \longrightarrow (u_x)_p P^{*}_{\bar{x}}$. Diese seien gerade die Zusammensetzungen

$$P \longrightarrow (u_x)_p(u_x^p P) \longrightarrow (u_x)_p(P^{*}_{\bar{x}}).$$

Der linke Morphismus komme dabei gerade vom identischen Morphismus $u_x^p P \longrightarrow u_x^p P$ (und der Tatsache, daß $(u_x)_p$ rechtsadjungiert ist zu u_x^p). Der rechte Morphismus entstehe durch Anwenden des Funktors $(u_x)_p$ aus der natürlichen Abbildung

$$u_x^p P \longrightarrow a(u_x^p P) =: P^{*}_{\bar{x}}$$

der Prägarbe $u_x^p P$ in die assoziierte Garbe. Wir definieren jetzt

$$aP := \bigcap\nolimits_{\varphi(P) \subseteq F \subseteq P^*, F \text{ Garbe}} F$$

als den Durchschnitt aller Teilgarben von P^*, welche das Bild von φ enthalten. Sei jetzt

$$\varphi'\colon P \longrightarrow F'$$

ein Morphismus von Prägarben mit Werten in einer Garbe F'. Betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & aP \arrow[r, hook] & P^* \arrow[d, "\psi"] \\ & F \arrow[r, hook] & F^* \end{tikzcd}$$

Dabei entstehe ψ aus den Abbildungen $\varphi'_{\bar{x}}\colon P^{*}_{\bar{x}} \longrightarrow F_{\bar{x}}$ durch Anwenden von $(u_x)_p$ und Übergang zum direkten Produkt. Nach Definition von ψ ist dieses Diagramm kommutativ[31]. Der untere horizontale Garben-Morphismus $F \longrightarrow F^*$ hat die Gestsalt

$$F(U) \longrightarrow \prod_{x\in U} F^{*}_{\bar{x}}, \; s \mapsto s_{\bar{x}} .$$

Nach dem Kriterium 4.3.8 für die Halme von nicht-verschwindende Schnitten ist er injektiv, d.h. man kann die Garbe F als Teilgarbe von F* auffassen. Das vollständiges Urbild $\psi^{-1}(F)$ der Teilgarbe ist F von F* ist eine Teilgarbe von P* (nach Lemma 4.3.9.1(iii)). Nach Definition von aP folgt $aP \subseteq \psi^{-1}(F)$, d.h. ψ induziert einen Garben-Morphismus

$$\tilde{\psi} := \psi|_{aP} : aP \longrightarrow F \text{ mit } \psi|_{aP}\circ\varphi = \varphi'.$$

---

[31] $P \mapsto P^*$ ist als Zusammensetzung von Funktoren ein Funktor, und $P \longrightarrow P^*$ ist ein funktorieller Morphismus.

Ist $\widetilde{\psi}$': aP $\longrightarrow$ F ein zweiter solcher Morphismus, so ist Ker($\widetilde{\psi}$ - $\widetilde{\psi}$') eine Teilgarbe von P*, welche φ(P) als Teilprägarbe enthält. Nach Definition von aP folgt

$$aP \subseteq \mathrm{Ker}(\widetilde{\psi} - \widetilde{\psi}'),$$

d.h. $\widetilde{\psi}$ und $\widetilde{\psi}$' sind gleich auf aP.
QED.
Beweis-Sktize von 4.3.9 für den allgemeinen Fall.
Wir betrachten einen beliebigen Situs $(C/X)_E$. Für jedes Objekt U von C/X definieren wir

$$P_0(U) := \{s \in P(U) \mid \text{Es gibt eine Überdeckung } \{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I} \text{ mit } s|_{U_j} = 0 \text{ für } j\in I\}.$$

Auf diese Weise ist eine Prägarbe $P_0 \subseteq P$ definiert. Nach Konstruktion genügt dann die Prägarbe

$$P_1 := P/P_0 \text{ mit } P_1(U) := P(U)/P_0(U)$$

dem ersten Garben-Axiom. Für jedes U aus C/X setzen wir

$$(aP)(U) := \varinjlim_{\mathbf{U}} \check{H}^0(\mathbf{U}, P_1).$$

Der direkte Limes wird dabei über alle Überdeckungen **U** von U genommen. Mit

$$\check{H}^i(\mathbf{U}, P)$$

bezeichnen wir hier die i-te Kohomologie-Gruppe des (in der offensichtdlichen Weise definierten)[32] Čech-Komplexes der Prägarbe P bezüglich der Überdeckung **U**. Ein Schnitt

$$s \in (aP)(U)$$

ist somit durch eine Familie

$$\{s_i \in P_1(U_i)\}_{i\in I}$$

gegeben zu einer Überdeckung $\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I}$, wobei gilt

$$s_i|_{U_i\times_U U_j} = s_j|_{U_i\times_U U_j} \text{ für beliebige } i,j \in I.$$

---

[32] Bei der Definition der Objekte des Čech-Komplexes hat man in der klassischen Definition

$$\check{C}^q(\mathbf{U}, P) = \prod_{J_q=\{i_0<...<i_q\}} P(U_{i_0}\cap...\cap U_{i_q}) = \prod_{J_q=\{i_0<...<i_q\}} P(U_{J_q})$$

die Durchschnitte der U_i durch deren Faserprodukte über U zu ersetzen. Aus einer geordneten Menge $J_{q+1} = \{i_0<...<i_{q+1}\}$ kann man durch Entfernen eines Elements auf q+2 verschiedene Arten eine Menge J_q mit q+1 Elementen machen. Zu jeder solchen Streichung gehört eine Projektion auf ein Produkt mit q+1 Faktoren, also ein Homomorphismus $P(U_{J_q}) \longrightarrow P(U_{J_{q+1}})$. Die alternierenden Summen dieser Homomorphismen definieren die Differentiale $\check{C}^q(\mathbf{U}, P) \longrightarrow \check{C}^{q+1}(\mathbf{U}, P)$ des Čech-Komplexes. Auf die Details dieser Definition werden wir später eingehen.

Zwei solche Familien repräsentieren genau dann denselben Schnitt, wenn es eine gemeinsame Verfeinerung der beiden zugehörigen Überdeckungen gibt, auf welcher durch Einschränken der s_i dieselbe Familie entsteht.

Man beachte, $\check{H}^i(\mathbf{U}, P)$ ist ein Funktor auf der Kategorie der Prägarben P, und für Garben F gilt

$$\check{H}^i(\mathbf{U}, F) = F.$$

Es ist nicht schwer, einzusehen, daß auf diese Weise eine Prägarbe aP definiert ist. Außerdem faktorisiert sich jeder Prägarben-Morphismus

$$\varphi': P \longrightarrow F$$

mit Werten in einer Garbe F eindeutig über aP. Weil nämlich F dem ersten Garben-Axiom S_1 genügt, gilt $\varphi'(P_0) = 0$, d.h. φ' faktorisiert sich eindeutig über den natürlichen Morphismus

$$P \longrightarrow P_1.$$

Weil F außerdem dem zweiten Garben-Axiom S_2 genügt, läßt sich jeder Morphismus

$$P_1 \longrightarrow F$$

zu einem Morphismus

$$\check{H}^i(\mathbf{U}, P_1) \longrightarrow \check{H}^i(\mathbf{U}, F) = F$$

fortsetzen, also zu einem Morphismus

$$aP \longrightarrow F.$$

Auf Grund der Garben-Axiome für F ist diese Fortsetzung eindeutig bestimmt. Es bleibt noch zu zeigen, daß aP eine Garbe ist. Der Beweis diesser Aussage ist technisch etwas aufwendiger als die bisherige Argumentation. Für die Details verweisen wir auf die Monographie

Artin, M.: Grothendieck topologies, Lecture Notes, Harvard University, Math. Dept., Cambridge Mass., 1962

QED.
Bemerkungen

(i) Die gerade bewiesene Aussage kann man wie folgt formulieren: der Funktor

$$\mathbf{S}(X_E) \longrightarrow \mathbf{P}(X_E),\ F \mapsto F,$$

welcher die Garben-Kategorie auf X_E in die Kategorie der Prägarben einbettet, besitzt einen linksadjungierten Funktor

$$a:\ \mathbf{P}(X_E) \longrightarrow \mathbf{S}(X_E).$$

(ii) Sei $\pi: X'_{E'} \longrightarrow X_E$ ein solcher stetiger Morphismus, daß der inverse Bild-Funktor π^p Garben in Garben überführt. Dann gilt für jede Prägarbe P auf X_E und jede Garbe F' auf $X'_{E'}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{S'}(\pi^p aP, F') &= \mathrm{Hom}_{P'}(\pi^p aP, F') && \text{(P' ist volle Teilkategorie von S')} \\ &= \mathrm{Hom}_S(aP, \pi_p F') && (\pi^p \text{ ist linksadjungiert zu } \pi_p) \end{aligned}$$

$= \mathrm{Hom}_P(P, \pi_p F')$ (Definition von a)

$= \mathrm{Hom}_{P'}(\pi^p P, F')$ (π^p ist linksadjungiert zu π_p)

$= \mathrm{Hom}_{S'}(a\pi^p P, F')$ (Definition von a).

Da dies für alle F' gilt, folgt

$$\pi^p(aP) = a(\pi^p P),$$

d.h. der Übergang zur assoziierten Garbe kommutiert in diesem Fall mit inversen Bildern.

(iii) Im Fall $X_E = \bar{x}_{et}$ ist

$$u_x : \bar{x} \longrightarrow X$$

der identische Morphismus, d.h. u_x^p überführt Garben in Garben. Nach (ii) ist deshalb

$$u_x^p a = a u_x^p , \tag{1}$$

und damit auch

$P_{\bar{x}} \quad = u_x^p P\,(\bar{x})$

$=$[33] $(a u_x^p P)\,(\bar{x})$

$= (u_x^p aP)(\bar{x})$ (wegen (1))

$= (aP)_{\bar{x}}$.

Mit anderen Worten, P und aP haben dieselben Halme.

4.3.10 Exaktheit, Limites and Kolimites in $P(X_E)$ und $S(X_E)$

(i) Der Einbettungsfunktor

$$\mathbf{S}(X_E) \longrightarrow \mathbf{P}(X_E)$$

ist linksexakt und kommuiert mit inversen Limites. Der Übergang zur assoziierten Garbe

$$a: \mathbf{P}(X_E) \longrightarrow \mathbf{S}(X_E)$$

ist exakt und kommutiert mit direkten Limites.

(ii) Folgende Aussagen sind äquivalent.

(a) Die Sequenz von Garben auf X_E

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F''$$

ist exakt in $\mathbf{S}(X_E)$.

(b) Die Sequenz von Garben auf X_E

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F''$$

ist exakt in $\mathbf{P}(X_E)$.

(c) Für jedes Objekt U von C/X ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow F'(U) \longrightarrow F(U) \longrightarrow F''(U)$$

exakt in **Ab**.

---

[33] es gibt nur eine zusammenhängende Etal-Überdeckung von $\bar{x}$, d.h. jede Prägarbe ist eine Garbe.

Im Fall des Etal-Situs $X_E = X_{et}$ sind diese Bedingungen außerdem noch äquivalent zu:

(d) Für jeden geometrischen Punkt $\bar{x}$ von X ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow F'_{\bar{x}} \longrightarrow F_{\bar{x}} \longrightarrow F''_{\bar{x}}$$

exakt in **Ab**.

(iii) Ein Morphismus φ; $F \longrightarrow F'$ ist genau dann surjektiv in $\mathbf{S}(X_E)$, wenn es für jeden Schnitt $s \in F'(U)$ eine Überdeckung $\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I}$ und Schnitte $s_i \in F(U_i)$ gibt mit

$$\varphi(s_i) = s|_{U_i} \text{ für jedes } i \in I,$$

d.h. wenn s <u>lokal im Bild</u> des Prägarben-Morphismus φ ist.

(iv) Um einen inversen Limes in $\mathbf{S}(X_E)$ zu finden (zum Beispiel einen Kern oder ein Produkt), reicht es, den entsprechenden inversen Limes in $\mathbf{P}(X_E)$ zu finden. Die so gefundenen Prägarbe ist dann sogar eine Garbe und ist auch der inverse Limes in $\mathbf{S}(X_E)$.

Um einen direkten Limes in $\mathbf{S}(X_E)$ zu finden (zum Beispiel einen Kokern oder eine Summe), muß man den entsprechenden inversen Limes in $\mathbf{P}(X_E)$ finden. Die assoziierte Garbe zu der so gefundenen Prägarbe ist dann der direkte Limes in $\mathbf{S}(X_E)$.

(v) $S(X_E)$ ist eine abelsche Kategorie, welche den Axiomen Ab5 und Ab3* genügt, aber im allgemeinen nicht dem Axiom Ab4*.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Als volle Teilkategorie der abelschen Kategorie $\mathbf{P}(X_E)$ ist $\mathbf{S}(X_E)$ eine additive Kategorie. Bezeichne

$$j: \mathbf{S}(X_E) \longrightarrow \mathbf{P}(X_E)$$

die natürliche Einbettung der Garben-Kategorie in die Prägarben-Kategorie, und sei

$$\{ \varphi_{ji}: F_i \longrightarrow F_j\}$$

ein inverses System von Garben, welches in der Garben-Kategorie einen Limes besizt. Für jede Prägarbe P auf X_E gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X_E)}(P,\ j(\varprojlim_i F_i)) &=^{34} \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(aP,\ \varprojlim_i F_i) \\
&=^{35} \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(aP, F_i) \\
&=^{36} \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X_E)}(P, j(F_i)) \\
&=^{37} \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X_E)}(P, \varprojlim_i j(F_i))
\end{aligned}$$

Da dies für jedes P richtig ist, folgt

---

[34] a ist linksadjungiert zu j.
[35] auf Grund der Universalitätseigenschaft des direkten Limes.
[36] a ist linksadjungiert zu j.
[37] auf Grund der Universalitätseigenschaft des direkten Limes.

$$j(\varprojlim_i F_i) = \varprojlim_i j(F_i),$$

d.h. j kommutiert mit inversen Limites.

Sei jetzt

$$\{ \psi_{ji}: P_i \longrightarrow P_j \}$$

ein direktes System von Prägarben, welches in der Prägarben-Kategorie einen Limes besitzt. Für jede Garbe F auf X_E gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(a(\varinjlim_i P_i), F) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X_E)}(\varinjlim_i P_i, jF) \\ &= \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X_E)}(P_i, jF) \\ &= \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(aP_i, F) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(\varinjlim_i (aP_i), F) \end{aligned}$$

Da dies für jedes F gilt, folgt

$$a(\varinjlim_i P_i) = \varinjlim_i (aP_i),$$

d.h. a kommutiert mit direkten Limites.

Zeigen wir, j ist linksexakt. Sei

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Garben auf X_E. Weil der Hom-Funktor linksexakt ist, ist dann für jede Prägarbe P auf X_E die folgende Sequenz exakt.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(aP, F') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(aP, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(aP, F'').$$

Weil a linksadjungiert ist zu j, ergibt sich daraus die Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X_E)}(P, jF') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X_E)}(P, jF) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X_E)}(P, jF'').$$

Da dies für jedes P gilt, folgt damit die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow jF' \longrightarrow jF \longrightarrow jF''$$

Zeigen wir, a ist exakt. Sei

$$0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Prägarben auf X_E. Weil der Hom-Funktor linksexakt ist, ist dann für jede Garbe F auf X_E die folgende Sequenz exakt.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X_E)}(P'', jF) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X_E)}(P, jF) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X_E)}(P', jF).$$

Weil a linksadjungiert ist zu j, ergibt sich daraus die Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(aP'', F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(aP, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(aP', F).$$

Da dies für jedes F gilt, folgt die Exaktheit der Sequenz

$$aP' \longrightarrow aP \longrightarrow aP'' \longrightarrow 0.$$

Damit ist die Rechtsexaktheit von a gezeigt. Wir haben noch zu zeigen, a überführt Monomorphismen in Monomorphismen.[38] Sei

$$P' \longrightarrow P$$

ein Monomorphismus von Prägarben auf X_E. Betrachten wir die im Beweis von 4.3.9 (allgemeiner Fall) eingeführte Prägarbe P_1 bzw. P'_1. Ein Schnitt von P, dessen Einschränkungen auf die offenen Mengen einer Überdeckung Null ist, hat, falls es auch ein Schnitt von P' ist, diese Eigenschaft auch als Schnitt von P'. Deshalb induziert der gegebene Monomorphismus einen Monomorphismus

$$P'_1 \longrightarrow P_1,$$

und damit Monomorphismen

$$\check{H}^1(\mathbf{U}, P'_1) \longrightarrow \check{H}^1(\mathbf{U}, P_1)$$

Da zwei Überdeckungen eine gemeinsame Verfeinerung besitzen, bilden letztere Monomorphismen ein kofiltertes direktes System. In der Kategorie der abelschen Gruppen sind aber direkte kofiltrierende Limes exakt, d.h. der induzierte Morphismus

$$aP' \longrightarrow aP$$

ist ein Monomorphismus (als Morphismus von Prägarben und damit auch als Morphismus von Garben).

Zu (ii). (a) ⇒ (b). Folgt aus der Linksexaktheit der Einbettung j: $\mathbf{S}(X_E) \longrightarrow \mathbf{P}(X_E)$ (d.h. aus (i)).

(b) ⇒ (a). Folgt aus der Exaktheit von a: $\mathbf{P}(X_E) \longrightarrow \mathbf{S}(X_E)$ (d.h. aus (i)).

(b) ⇔ (c). Folgt aus der koordinatenweisen Konstruktion von Kernen und Kokernen in der Prägarben-Kategorie (vgl. 4.1.1 (iv)).

(c) ⇒ (d). Folgt aus der Exaktheit der kofiltrierenden direkten Limites in der Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen.

(d) ⇒ (c). Sei s' ein Schnitt aus dem Kern von $F'(U) \xrightarrow{\alpha} F(U)$. Dann ist für jeden geometrischen Punkt $\bar{x} \longrightarrow U$ das Bild des Keims $s'_{\bar{x}} \in F'_{\bar{x}}$ bei $F'_{\bar{x}} \longrightarrow F_{\bar{x}}$ gleich Null. Da letztere Abbildung injektiv ist, folgt

$$s'_{\bar{x}} = 0 \text{ für jeden geometrischen Punkt } \bar{x} \text{ von } U.$$

Nach 4.3.8 ist $s' = 0$.

Sei jetzt s ein Schnitt aus dem Kern von $F(U) \longrightarrow F''(U)$. Für jeden geometrischen Punkt $\bar{x} \longrightarrow U$ liegt dann $s_{\bar{x}}$ im Kern von $F_{\bar{x}} \longrightarrow F''_{\bar{x}}$, also in der Untergruppe

$$F'_{\bar{x}} \subseteq F_{\bar{x}}.$$

Insbesondere gibt es eine Etal-Umgebung $V_x \longrightarrow U$ von $\bar{x}$ mit

$$s|_{V_x} \in F'(V_x).$$

[38] Im Fall des Etal-Situs folgt aus der Injektivität von $P' \longrightarrow P$ die Injektivität der induzierten Abbildungen der Halme und damit die der Abbildung $P'^* \longrightarrow P^*$. Damit ist auch die Abbildung $aP' \longrightarrow aP$ injektiv (als induzierte Abbildung auf Teilgarben).

Die Etal-Morphismen $V_x \longrightarrow U$ bilden eine Überdeckung von U. Weil F' eine Garbe ist, gibt es einen Schnitt $s' \in F'(U)$ mit

$$s'|_{V_x} = s|_{V_x} \text{ für jedes } V_x.$$

Weil F eine Garbe ist, folgt $s = s' \in F'(U)$.

Zu (iii). Seien $F \longrightarrow F''$ ein Morphismus von Garben auf X_E und P desssen Kokern in der Prägarben-Kategorie, d.h.

$$F \longrightarrow F'' \longrightarrow P \longrightarrow 0, \qquad P(U) := F''(U)/\mathrm{im}\, F(U).$$

ist exakt in $\mathbf{P}(X_E)$. Weil a exakt ist (nach (i)), erhalten wir eine exakte Sequenz

$$F \longrightarrow F'' \longrightarrow aP \longrightarrow 0.$$

Damit gilt:

$F \longrightarrow F''$ ist ein Epimorphismus in $\mathbf{S}(X_E)$

$\Leftrightarrow aP = 0$

$\Leftrightarrow$ jedes Element von $\check{H}^0(\mathbf{U}, P_1)$ repräsentiert das Null-Element[39]

$\Leftrightarrow P_1 = 0$ (weil das Axiom S_1 gilt für P_1)

$\Leftrightarrow P_0 = P$

$\Leftrightarrow$ jeder Schnitt von P ist lokal gleich Null

$\Leftrightarrow$ jeder Schnitt von F'' liegt lokal im Bild von $F \longrightarrow F''$

$\Leftrightarrow$ die Bedinung von (iii) ist erfüllt.

Zu (iv). Beide Aussage folgen aus (i).
Für jedes direkte System $\{F_i\}$ von Garben mit Limes in der Garben-Kategorie gilt

$$\varinjlim_i F_i = \varinjlim_i a(j(F_i)) = a(\varinjlim_i j(F_i)).$$

Die natürliche Isomorphie ganz rechts besteht dabei nach (i). Dies ist gerade die zweite Aussage von (iv).
Für jedes inverse System $\{F_i\}$ von Garben mit Limes in der Garben-Kategorie gilt

$$\begin{aligned} \varprojlim_i j(F_i) &= j(\varprojlim_i F_i) && \text{(nach (i))} \\ &= \varprojlim_i F_i \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen besteht, weil eine Garbe nicht aufhört eine Garbe zu sein, wenn man sie als Objekt der Prägarben-Kategorie betrachtet.

Zu (v). Zeigen wir, $\mathbf{S}(X_E)$ ist eine abelsche Kategorie. Wir haben zu zeigen, für jeden Garben-Morphismus $f\colon F \longrightarrow G$ ist der Morphismus

$$\mathrm{Koim}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$$

[39] Für jede Überdeckung **U**, d.h. es gibt eine Verfeinerung von **U**, über welcher alle Schnitte Null sind.

ein Isomorphismus von $\mathbf{S}(X_E)$. Weil $\mathbf{P}(X_E)$ abelsch ist, gilt dies zumindest für den analogen Morphismus der Prägarben-Kategorie. Durch Anwenden des Funktors a erhalten wir einen Isomorphismus. Dieser ist aber gerade der obige Morphismus.

$\mathbf{S}(X_E)$ ist eine AB3*-Kategorie, d.h. es existieren beliebige Produkte: das ist der Fall nach Lemma 4.3.9.1.

$\mathbf{S}(X_E)$ ist eine AB5-Kategorie, d.h. die Summenbildung für aufsteigenden Famlilien von Teilobjekten kommutiert mit endlichen Durchschnitten: das folgt aus der Linksexaktheit der kofiltrierenden direkten Limites in **Ab** (auf Grund von (ii)(c)). Zu zeigen ist

$$(\sum_{i\in I} A_i) \cap B = \sum_{i\in I} (A_i \cap B)$$

für Teilobjekte B von A und eine aufsteigende Familie von Teilobjekten A_i von A. Letzteres bedeutet, die A_i bilden ein kofiltrierendes direktes System. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} (A_i \cap B) &= \varinjlim_i A_i \cap B && \text{(die Familie der } A_i \text{ ist aufsteigend)}\\
&= \varinjlim_i \mathrm{Ker}(A \longrightarrow A/B \oplus A/A_i) && \text{(abelsche Kategorie: } \oplus = \times)\\
&= \mathrm{Ker} \varinjlim_i (A \longrightarrow A/B \oplus A/A_i) && \text{(Exaktheit von } \varinjlim_i)\\
&= \mathrm{Ker}\, A \longrightarrow A/B \oplus A/\varinjlim_i A_i && \text{(direkte Limites kommutieren)}\\
&= \mathrm{Ker}\, A \longrightarrow A/B \oplus A/\sum_{i\in I} A_i && \text{(die Familie ist aufsteigend)}\\
&= (\sum_{i\in I} A_i) \cap B
\end{aligned}$$

QED.

Bemerkung

Zum Beweis von 4.3.10 (v) fehlt noch ein Beispiel, welches zeigt, daß die abelsche Kategorie $\mathbf{S}(X_E)$ nicht dem Axiom (AB4*) genügen muß (es existieren unendliche direkte Produkte und direkte Produkte von Epimorphismen sind Epimorphismen).

4.3.11 Beispiel

Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von diskreten G-Moduln, wobei G irgendeine proendliche Gruppe bezeichne. Wir betrachten das direkte Produkt

$$M_* := \prod_{i\in I} M_i$$

auf welchem G koordinatenweise operieren soll und den Teilmodul

$$M := \bigcup_{H\subseteq G} M_*^H$$

wobei die Vereinigung über alle offenen Untergruppen erstrekt werde. Dann gilt:

(i) M gerade das Produkt der M_i in der Kategorie der diskreten G-Moduln.

(ii) Die Kategorie der diskreten G-Moduln genügt im Fall G unendlich nicht dem Axiom AB4*.

(iii) $\mathbf{S}(X_{et})$ genügt nicht dem Axiom AB4*, falls X = Spec K ist mit einem Körper K, für welchen $Gal(K_s/K)$ unendlich ist.

Beweis. Zu (i). Durch Einschränken der Projektionen $M_* \longrightarrow M_i$ auf M erhält man Projektionen

$$p_i: M \longrightarrow M_i.$$

Sei jetzt eine Familie von Homomorphismen diskreter G-Moduln

$$h_i: M' \longrightarrow M_i$$

gegeben. Diese definieren einen G-Homomorphismus

$$h: M' \longrightarrow M_*,\ m' \mapsto (h_i(m'))_{i\in I}$$

Weil M' diskreter G-Modul ist, gibt es zu jedem $m' \in M'$ eine offene Untergruppe $H \subseteq G$ mit $m' \in M'^H$. Weil h ein G-Homomorphismus ist, folgt $h(m') \in M_*^H \subseteq M$. Mit anderen Worten, das Bild von h liegt ganz in M, und h läßt sich als Homomorphismus diskreter G-Moduln

$$h: M' \longrightarrow M$$

auffassen. Nach Konstruktion gilt $h_i = p_i \circ h$. Trivialerweise ist die Abbildung h durch ihre Koordinatenfunktionen h_i eindeutig bestimmt.

Zu (ii). Sei G unendlich und $\{H_i\}_{i\in I}$ die Familie der Normalteiler von G mit endlichem Index. Dann ist $\mathbb{Z}$ (mit der trivialen Operation von G) und für jedes i auch

$$\mathbb{Z}[G/H_i]$$

ein diskreter G-Modul (weil H_i trivial auf letzteren operiert). Bezeichne

$$\varepsilon_i: \mathbb{Z}[G/H_i] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

die Augmentation (welche jedes Element auf die Summen seiner Koeffizienten abbildet). Dies ist ein Homomorphismus diskreter G-Moduln (wenn G trivial auf $\mathbb{Z}$ operiert).

Für $H_i \subseteq H_j$ kann man

$$\mathbb{Z}[G/H_i]^{H_j}$$

mit der Menge der Abbildungen $G/H_i \longrightarrow \mathbb{Z}$ identifizieren, die auf den $H_j//H_i$-Nebenklassen konstant und an fast allen Stellen Null sind. Insbesondere ist die Summe der Werte dieser Abbildungen durch $\# H_j/H_i$ teilbar, d.h.

$$\varepsilon_i(\mathbb{Z}[G/H_i]^{H_j}) = \# H_j/H_i \cdot \mathbb{Z} \text{ für } H_i \subseteq H_j .$$

Im allgemeinen Fall ist[40]

$$\varepsilon_i(\mathbb{Z}[G/H_i]^{H_j}) = \varepsilon_i(\mathbb{Z}[G/H_i]^{H_iH_j}) = \#(H_iH_j/H_i)\cdot\mathbb{Z}$$

---

[40] Man beachte, das Produkt von Normalteilern ist ein Normalteiler.

Der Wert 1 liegt nur dann im Bild der Augmentation, wenn $H_iH_j = H_i$ gilt, d.h. nur im Fall

$$H_j \subseteq H_i.$$

Betrachten wir das direkte Produkt der Augmentationen:

$$\varepsilon: M_* := \prod_{i\in I} \mathbb{Z}[G/H_i] \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathbb{Z} =: N_*$$

Es reicht zu zeigen, die durch ε induzierte Abbildung $M \longrightarrow N$ ist nicht surjektiv.
Da G trivial auf allen Faktoren von N_* operiert gilt für den zugehörigen diskreten Teilmodul N,

$$N = N_* .$$

Das Element von N, dessen sämtliche Koordinaten gleich 1 sind liegt genau dann im Bild von

$$M_*^{H_j} = \prod_{i\in I} \mathbb{Z}[G/H_i]^{H_j}$$

wenn $H_j \subseteq H_i$ gilt für jedes $i \in I$. Dann ist aber G/H_j ein Anfangsobjekt im inversen System der G/H_i, d.h. die proendliche Gruppe G ist gleich

$$G = \varprojlim_{i\in I} G/H_i = G/H_j ,$$

im Widerspruch zur Annahme, daß G unendlich sein soll. Mit anderen Worten, es gibt kein solches j, und die durch ε induzierte Abbildung $M \longrightarrow N$ ist nicht surjektiv.

Zu (iii). Nach 4.2.7 ist $\mathbf{S}(X_{et})$ ist äquivalent zur Kategorie der diskreten Moduln über $Gal(K_s/K)$. Die Aussage folgt damit aus (ii).
QED.

4.3.12 Bemerkungen

(i) Sei $(F_i)_{i\in I}$ ein pseudofiltrierendes[41] direktes System von Garben auf X_E und F dessen direkter Limes in der Prägarben-Kategorie. Dann genügt F der Garben-Bedingung S für jede endliche Überdeckung

$$\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I} .$$

In einigen Fällen hat das bereits zur Folge, daß F eine Garbe ist. Das ist insbesondere der Fall, wenn der Situs X_E noethersch ist.

(ii) Sei X ein Jacobson-Schema[42]. Dann reicht es in den meisten Fällen, in denen geometrische Punkte eine Rolle spielen, sich auf solche geometrische Punkt zu beschränken, die über abgeschlossenen Punkten liegen. Das ist insbesondere der Fall für:

---

[41] Das direkte System ist filtrierend, wobei auf die Zusammenhangsbedingung verzeichtet wird.

[42] Die abgeschlossenen Punkte einer jeden abgeschlossenen Menge liegen dicht in dieser Menge (vgl. EGA I.6.4). Beispiele für Jacobson-Schemata:

1) Spec $\mathbb{Z}$.
2) Spec K, K ein Körper.
3) Schemata lokal endlichen Typs über einem Jacobson-Schema.

- Aussage 4.3.8 (Schnitte $s \neq 0$ haben mindestens einen Keim $s_{\bar{x}} \neq 0$).
- Beweis von 4.3.9 (Existenz der assoziierten Garbe).
- Aussage 4.3.10 (Eigenschaften der Funktoren a und j).

(iii) Aus 4.3.10 ergibt sich, daß die Funktoren

$$\mathbf{S}(X_{et}) \longrightarrow \mathbf{Ab},\ F \mapsto F_{\bar{x}},\ x \in X,$$

eine <u>univalente konservative Familie</u> bilden:

- Zwei Morphismen φ und φ' von X_{et} sind gleich, wenn die auf den Halmen induzierten Abbildungen

$$\varphi_{\bar{x}} \text{ und } \varphi'_{\bar{x}},\ x \in X,$$

gleich sind.

- Ein Morphismus φ von X_{et} ist ein Isomorphismus, wenn die induzierten Abbildungen

$$\varphi_{\bar{x}},\ x \in X,$$

Isomorphismen sind.

- Eine Sequenz von Garben $F' \longrightarrow F \longrightarrow F''$ ist genau dann exakt, wenn die induzieren Sequenzen abelscher Gruppen

$$F'_{\bar{x}} \longrightarrow F_{\bar{x}} \longrightarrow F''_{\bar{x}},\ x \in X,$$

exakt sind.

Beweis von (i). Für jede der Garben F_ℓ ist das Diagramm

$$F_\ell(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F_\ell(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} F_\ell(U_i \times_U U_j)$$

exakt. Nach Voraussetzung ist die Index-Menge I endlich. Nun sind endliche direkte Produkte in abelschen Kategorien auch direkte Summen, also direkte Limites. Sie kommutieren also mit direkten Limites. Wir gehen zum direkten Limes bezüglich ℓ über und erhalten die Exaktheit von

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} {}_\ell(U_i \times_U U_j).$$

QED.

4.3.13 Beispiele

4.3.13.1 Konstante Garben.

Die <u>konstante Garbe</u> auf X_E zur abelschen Gruppe M ist nach Definition die Garbe

$$\mathbf{F}_M := a(\mathbf{P}_M)$$

welche assoziiert ist zur konstanten Prägarbe $\mathbf{P}_M$. Die Garbe $\mathbf{F}_M$ ist auf X_{Zar}, X_{et}, X_{fl}, ... gerade die zum Gruppen-Schema

$$M_X = \vee_{\sigma\in M} X_\sigma \text{ mit } X_\sigma := X \text{ (vgl. 4.2.5)}$$

gehörige Garbe

$$\mathbf{F}_M = \mathrm{Hom}_X(?, M_X). \qquad (1)$$

??
Zum Beweis reicht es zu zeigen, daß die beiden Garben auf den quasi-kompakten Schemata kanonisch isomorph sind.[43] Wir nehmen deshalb im folgenden an, daß alle auftretenden Schemata quasi-kompakt sind. Betrachten wir den Funktor

$$\pi_0\colon \mathbf{Sch}/X \longrightarrow \mathbf{Ens},\ U \mapsto \{\text{Menge der Zusammenhangskomponenten von } U\}.$$

Dieser Funktor ist linksadjungiet zum Funktor

$$\mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Sch},\ T \mapsto T_{(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z})} = \vee_{t\in T} (\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z})_t\ ,$$

d.h.

$$\mathrm{Hom}_X(Y, M_X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}(Y, M_{(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z})}) =^{44} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(\pi_0(Y), M).$$

??

Im folgenden nehmen wir (1) als Definition an und zeigen, daß $\mathbf{F}_M$ die zu $\mathbf{P}_M$ assoziierte Garbe ist.

Für jedes X-Schema $\pi\colon Y \longrightarrow X$ setzen sich die Abbildungen

$$\mathbf{P}_M(Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(Y, M_X) = \mathbf{F}_M,\ \sigma \mapsto Y \xrightarrow{\pi} X = X_\sigma$$

zu einem Morphismus der Prägarbe $\mathbf{P}_M$ mit Werten in der durch M_X definierten Garbe zusammen,

$$\mathbf{P}_M \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(\ ?\ , M_X) = \mathbf{F}_M \tag{1}$$

Über den zusammenhängenden Schemata Y ist dieser Morphismus surjektiv, denn jeder X-Morpismus $f\colon Y \longrightarrow M_X$ hat dann ein Bild, das ganz in einem X_σ liegt, und stimmt als Morphismus $Y \longrightarrow X_\sigma = X$ mit dem Struktur-Morphismus π überein.
Jeder Prägarben-Morphismus

$$\psi\colon \mathbf{P}_M \longrightarrow F$$

faktorisiert sich eindeutig über (1), definiert also einen Garben-Morphismus

$$\tilde{\psi}\colon F_M \longrightarrow F \tag{2}$$

---

[43] Jedes Schema U besitzt eine Überdeckung durch affine offene Teilmengen U_i (also auch durch quasikompakte offene Teilschemata). Die Behauptung ergibt sich aus der Exaktheit der zugehörigen Diagramme

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \ell(U_i \times_U U_j).$$

Allgemeiner gilt ein Analogon zur Aussage der klassischen Garbentheorie, daß zwei Garben gleich sind, wenn sie auf einer Topologie-Basis übereinstimmen.

[44] Ein X-Morphismus $Y \longrightarrow M_X$ ist durch seine Einschränkungen auf die Zusammenhangskomponenten von Y festgelegt. Diese Einschränkungen sind festgelegt durch das Exemplar der disjunkten Vereinigung M_X, in welchem sie Werte annehmen.

Sei nämlich $f:Y \longrightarrow M_X$ ein X-Morpismus, Dann stimmt f auf jeder Zusammenhangskomponente $Z \subseteq Y$ mit dem Struktur-Morphismus π überein, ist also dort durch ein Element $\sigma \in M$ festgelegt und legt dieses fest. Das Bild von

$$\sigma \in M = \mathbf{P}_M(Z)$$

bei (2) definiert man als das Bild von $f|_Z$ bei ψ,

$$\mathbf{F}_M(Z) \longrightarrow F(Z),\ f|_Z \mapsto \psi_Z(\sigma).$$

Dieser für zusammenhängende Schemata Z definierte Morphismus setzt sich, weil F eine Garbe ist, zu einem Garben-Morphismus

$$\psi:\mathbf{F}_M \longrightarrow F$$

fort. Nach Konstruktion ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}_M & \longrightarrow & \mathbf{F}_M \\ \downarrow & \swarrow\psi & \\ F & & \end{array}$$

kommuativ. Der Morphismus ψ ist über den Zusammenhangskomponenten durch die Kommutativität des Diagramms eindeutig festgelegt, weil (1) über den zusammenhängenden Schemata surjektiv ist. Dann ist aber ψ vollsständig festgelegt (weil F eine Garbe ist).

Wir haben gezeigt, $\mathbf{F}_M$ ist die zu $\mathbf{P}_M$ assoziierte Garbe.

QED.

4.3.13.2 Einheitswurzeln, Kummer-Sequenz

Wir definieren die Teilgarbe μ_n von $\mathbb{G}_m$ durch die Bedingung

$$\mu_n(U) := \{s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \mid s^n = 1\} = \{s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^* \mid s^n = 1\}$$

d.h. die Schnitte von μ_n sind gerade die Schnitte von $\mathbb{G}_m$, welche n-te Einheitswurzeln sind. Dies ist tatsächlich eine Garbe, nämlich die durch das Gruppenschema

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$$

definierte Garbe:

$$\begin{aligned} \mu_n(U) &= \{s \in \mathbb{G}_a(U) \mid s^n = 1\} \\ &= \{s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \mid s^n = 1\} \\ &= \{s \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[T], \Gamma(U, \mathcal{O}_U)) \mid s(T)^n = 1\} \\ &= \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}[T]/(T^n - 1), \Gamma(U, \mathcal{O}_U)) \\ &= \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}(U, \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)) \\ &= \operatorname{Hom}_X(U, X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)) \end{aligned}$$

Durch Erheben in die n-te Potenz erhalten wir einen Garben-Morphismus $\mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m$, dessen Kern gerade μ_n ist, d.h. wir erhalten eine exakte Sequenz in $\mathbf{P}(X_E)$ und damit auch in $\mathbf{S}(X_E)$:

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m .$$

Der Morphismus $\mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m$ ist in der Prägarben-Kategorie eher selten surjektiv: es kommt kaum vor, daß alle Schnitte von $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ n-te Potenzen sind. Das gilt insbesondere für den Zariski-Situs.

Ist jedoch A ein streng lokaler Ring (vgl. 2.4.15), für welchen das Bild von n in A eine Einheit ist (d.h. die Charakteristik des Restekörpers $\kappa(A)$ ist kein Teiler von n), so ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \mu_n(\mathrm{Spec}\ A) & \longrightarrow & \mathbb{G}_m(\mathrm{Spec}\ A) & \xrightarrow{n} & \mathbb{G}_m(\mathrm{Spec}\ A) & \longrightarrow 0 \\ & & & \| & & \| & \\ & & & A^* & & A^* & \end{array}$$

nach dem Henselschen Lemma exakt (vgl. 2.4.3 (vi))[45]. Für jedes Etal-Schema $U \longrightarrow X$, jeden Schnitt $s \in \mathbb{G}_m(U)$ und jeden geometrischen Punkt $\bar{x} \longrightarrow U$ gibt es damit eine Etal-Umgebung $U' \longrightarrow U$ von $\bar{x}$ derart, daß die Einschränkung $s|_{U'} \in \mathbb{G}_m(U')$ eine n-te Potenz ist. Nach 4.3.10 (iii) ist damit die Kummer-Sequenz

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

exakt in der Etal-Topologie.

Zeigen wir, daß dies auch für die flache Topologie gilt, und zwar ohne jede Einschränkung bezüglich der Charakteristik der Restkörper, d.h. ohne jede Einschränkung an n. Seien

$$U \longrightarrow X$$

ein Morphismus von **LFT**/X und $u \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*$. Wir wählen eine Überdeckung

$$\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I}$$

durch affine offene Mengen $U_i = \mathrm{Spec}\ A_i$ und setzen

$$A'_i := A_i[T]/(T^n - u_i) \text{ mit } u_i = u|_{U_i} .$$

Durch Zusammensetzen von $U_i \longrightarrow U$ mit dem natürlichen Morphismus

$$U'_i := \mathrm{Spec}\ A'_i \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A_i = U_i$$

erhalten wir eine Überdeckung

$$\{U'_i \longrightarrow U\}_{i \in I}$$

(weil A'_i frei, also treuflach über A_i ist) mit der Eigenschaft, daß $u|_{U'_i}$ eine n-te Potenz ist. Mit anderen Worten, die Kummer-Sequenz

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

ist exakt in der flachen Topologie.

---

[45] $f(T) = T^n - a$ hat für Einheiten $a \in A^*$ auf Grund der Voraussetzung bezüglich n keine mehrfachen Nullstellen im Restekörper von A, und der Restekörper ist separabel abgeschlossen, d.h. jedes Element von A ist eine n-te Potenz.

4.3.13.3 Artin-Schreyer-Sequenz

Sei $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X$ die konstante Garbe zur abelschen Gruppe $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, wobei X ein Schema der Charakteristik p bezeichne (d.h. der natürliche Morphismus $X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ faktorisiere sich über $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$). In der Charakteristik p gilt[46]

$$T^p - T = \prod_{i=0}^{p-1} (T - i).$$

Nach dem Chinesischen Restesatz folgt

$$\mathbb{F}_p[T] / (T^p - T) = \times_{i=0}^{p-1} \mathbb{F}_p[T] / (T - i) = \times_{i=0}^{p-1} \mathbb{F}_p ,$$

Damit können wir

$$\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[T] / (T^p - T) = \vee_{i=0}^{p-1} \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p}$$

mit dem Gruppen-Schemas über $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$ zur (additiven) Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ identifizieren. Für das zugehörige Gruppen-Schema über X erhalten wir durch Basiswechsel[47]

$$(\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[T] / (T^p - T))_X = (\vee_{i=0}^{p-1} \mathbb{F}_p) \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p} X = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X$$

also

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X(U) &= \operatorname{Hom}_X (U, \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[T] / (T^p - T)_X) \\ &= \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} (U, \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[T] / (T^p - T)) \\ &= \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}} (\mathbb{F}_p[T] / (T^p - T), \Gamma(U, \mathcal{O}_U)) \\ &= \{s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \mid s^p - s = 0\}\end{aligned}$$

Bezeichne F den Frobenius-Morphismus $s \mapsto s^p$. Dann definiert F - 1 einen Morphismus $\mathbb{G}_a \xrightarrow{F-1} \mathbb{G}_a$, d.h. wir erhalten eine exakte Garben-Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{G}_a \xrightarrow{F-1} \mathbb{G}_a$$

Der Morphismus F - 1 ist in der Zariski-Topologie eher selten surjektiv, da für beliebige lokale Ringe A der Charakteristik p die Abbildung

$$F - 1: A \longrightarrow A,\ a \mapsto a^p - a,$$

eher selten surjektiv ist.

Wenn jedoch A streng lokal ist, so ist nach dem Henselschen Lemma diese Abbildung surjektiv: $f(T) = T^p - T + a$ mit $a \in A$ besitzt über dem Restekörper keine mehrfachen Nullstellen[48], und letzterer ist separabel abgeschlossen. Deshalb ist die Artin-Schreyer-Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{G}_a \xrightarrow{F-1} \mathbb{G}_a \longrightarrow 0$$

in der Etal-Topologie und damit auch in der flachen Topologie exakt.

---

[46] Beide Polynome sind normiert vom Grad p, und jedes der p Elemente von $\mathbb{F}_p$ ist nach dem kleinen Fermatschen Satz eine Nullstelle.

[47] Links bedeutet der Index X Basiswechsel, rechts bezeichnet er das Gruppen-Schema X zur Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

[48] denn $f'(T) = p \cdot T^{p-1} - 1 = -1$ ist nicht identisch Null.

4.3.13.4 Der Kern des Frobenius

Seien X ein Schema der Charakteristik $p \neq 0$ und α_p die wie folgt definierte Teilgarbe von $\mathbb{G}_a$:

$$\alpha_p(U) := \{ s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \mid s^p = 0 \}^{49}$$

Dies ist gerade die Garbe zum kommutativen Gruppen-Schema $\mathbb{F}_p[T]/(T^p)$, d.h. der Kern des Frobenius-Morphismus F. Die Sequenz

$$0 \longrightarrow \alpha_p \longrightarrow \mathbb{G}_a \xrightarrow{F} \mathbb{G}_a \longrightarrow 0$$

ist exakt in der flachen Topologie, im allgemeinen jedoch nicht in der Etal-Topologie.

4.3.14 Aufgabe

Sei φ: G $\longrightarrow$ G' ein Morphismus von kommutativen Gruppen-Schemata über X, welche lokal vom endlichen Typ und flach sind über X. Wir betrachten die folgenden Aussaagen:

(i) φ ist etale.

(i') φ ist flach.

(ii) Ker(φ) ist etales Gruppen-Schema über X.

(ii') Ker(φ) ist ein flaches Gruppen.Schema über X.

(iii) φ definiert einen surjektiven Garben-Morphismus in $\mathbf{S}(X_{et})$.

(iii') φ definiert einen surjektiven Garben-Morphismus in $\mathbf{S}(X_{fl})$.

Man zeige:

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)
Aus (iii) muß nicht (ii) folgen.
(i') $\Leftrightarrow$ (ii') $\Rightarrow$ (iii')
Aus (iii') muß nicht (ii') folgen.

Dabei sei Ker(φ) der Kern des Morphismus φ in der Kategorie der Gruppen-Schemata über X, d.h.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}(\varphi) = G\times_{G'}X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow e' \\ G & \xrightarrow{\varphi} & G' \end{array}$$

Zum Beweis.
Die Eigenschaften, etale bzw. flach zu sein, bleiben bei Basiswechsel erhalten. Deshalb gelten

(i) $\Rightarrow$ (ii) und (i') $\Rightarrow$ (ii').

Aus $G\times_{G'}X \longrightarrow X$, $(g,x) \mapsto x$, entsteht durch Basiswechsel mit dem Strukturmorphismus π': G' $\longrightarrow$ X der Morphismus

---

[49] Falls X nicht von der Charakteristik p ist, muß dies keine Gruppe sein.

$$G = G\times_{G'}G' = G\times_{G'}(X\times_X G') = X\times_X G' = G',$$
$$g \mapsto (g, \varphi(g)) \mapsto (g, \pi'\varphi(g), \varphi(g)) \mapsto (\pi'\varphi(g), \varphi(g)) = \varphi(g).$$

Daraus ergeben sich die Implikationen

(ii) $\Rightarrow$ (i) und (ii') $\Rightarrow$ (i').

Zu den Implikationen (ii) $\Rightarrow$ (iii) bzw. (ii') $\Rightarrow$ (iii'). Sei

$$U \longrightarrow G' \in G'(U) = \mathrm{Hom}_X(U, G')$$

ein etaler bzw. flacher X-Morphismus. Die Surjektivität des Garben-Morphismus φ:G$\longrightarrow$G' bedeutet, daß sich jeder solche Morphismus lokal über φ faktorisiert. Dies ergibt sich aber gerade aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} G\times_{G'}U & \xrightarrow{p_2} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\varphi} & G' \end{array}$$

und der Tatsache, daß die Eigenschaft, etale bzw. flach zu sein, bei Basiswechsel erhalten bleibt (der Morphismus faktorisiert sich sogar global).

Falls φ surjektiv (und flach also treuflach) ist, so gilt dasselbe für p_2 , d.h. p_2 bildet in diesem Fall ein einelementige Überdeckung von U, d.h. es gilt (iii) bzw. (iii').

Falls φ nicht surjektiv ist (aber flach), so ist immerhig φ(G) offen in G'. Aus der Zerlegung von G' in Nebenklassen ergibt sich, daß φ(G) auch abgeschlossen in G' ist. Damit ist φ(G) eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von G'. Ein Morphismus U $\longrightarrow$ G', dessen Bild nicht in φ(G) liegt, kann sich deshalb auch nicht lokal über φ faktorisieren.

Die Gültigkeit der Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii) bzw. (ii') $\Rightarrow$ (iii') ist deshalb äquivalent zur Surjektivität der Abbildung φ.

<u>Gegenbeispiel</u>:

$G' := \mathbb{Z}_G = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} G\cdot n$

φ: G $\hookrightarrow$ G' identifiziere G mit G•0.

Dann ist φ flach, induziert aber keine Surjektion von Garben.

4.4. Direkte und Inverse Bilder von Garben

4.4.1 Definitionen

Seien π: $X'_{E'} \longrightarrow X_E$ ein stetiger Morphismus und F' eine Garbe auf $X'_{E'}$. Das <u>direkte Bild</u> von F' entlang π ist dann definiert als die Garbe

$$\pi_*F' := \pi_p F'.$$

Weiter sei F eine Garbe auf X_E. Das <u>inverse Bild</u> von F entlang π ist dann defineirt als die Garbe

$$\pi^*F := a(\pi^pF).$$

Bemerkungen

(i) Nach 4.3.6 ist $\pi_*F' := \pi_pF$ eine Garbe.

(ii) Nach Definition bestehen für Garben F auf X_E und Garben F' auf $X'_{E'}$ funktorielle Isomorphismen

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(F, \pi_*F') &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X_E)}(F, \pi_pF') \quad (\mathbf{S} \subseteq \mathbf{P} \text{ ist volle Teilkategorie})\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X'_{E'})}(\pi^pF, F') \qquad (\pi^p \text{ ist linksadjungiert zu } \pi_p)\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X'_{E'})}(\pi^*F, F') \qquad (\text{Definition von } \pi^*)\end{aligned}$$

Insbesondere ist der inverse Bild-Funktor

$$\pi^*: \mathbf{S}(X_E) \longrightarrow \mathbf{S}(X'_{E'})$$

linksadjungiert zum direkten Bild-Funktor

$$\pi_*.\mathbf{S}(X'_{E'}) \longrightarrow \mathbf{S}(X_E)$$

(iii) Der Funktor π_* ist linksexakt und kommutiert mit inversen Limites, der Funktor π^* ist rechtsexakt und kommutiert mit direkten Limites (vgl. 4.3.10). Falls π^p exakt ist, so gilt dasselbe für[50]

$$\pi^* = a \circ \pi^p.$$

Beweis von (iii). Die Argumente sind analog zu denen von 4.3.10)(i):
Sei

$$\{ F'_i \}$$

ein inverses System von Garben auf $X'_{E'}$, welches einen Limes besizt. Für jede Garbe F azf X_E gilt dann:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(F, \pi_*(\varprojlim_i F'_i)) &=^{51} \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X'_{E'})}(\pi^*F, \varprojlim_i F'_i)\\ &=^{52} \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X'_{E'})}(\pi^*F, F'_i)\\ &=^{53} \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(F, \pi_*(F'_i))\\ &=^{54} \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(F, \varprojlim_i \pi_*(F'_i))\end{aligned}$$

Da dies für jedes F richtig ist, folgt

$$\pi_*(\varprojlim_i F'_i) = \varprojlim_i \pi_*(F'_i),$$

d.h. π_* kommutiert mit inversen Limites.

Sei jetzt

---

[50] Weil nach 4.3.10(i) der Funktor a exakt ist.
[51] a ist linksadjungiert zu j.
[52] auf Grund der Universalitätseigenschaft des direkten Limes.
[53] a ist linksadjungiert zu j.
[54] auf Grund der Universalitätseigenschaft des direkten Limes.

$$\{ F_i \}$$

ein direktes System von Garben auf X_E , welches einen Limes besitzt. Für jede Garbe F' auf $X'_{E'}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X'_{E'})}(\pi^*(\varinjlim_i F_i), F') &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(\varinjlim_i F_i, \pi_* F') \\
&= \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(F_i, \pi_* F') \\
&= \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X'_{E'})}(\pi^* F_i, F') \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X'_{E'})}(\varinjlim_i (\pi^* F_i), F')
\end{aligned}$$

Da dies für jedes F' gilt, folgt

$$\pi^*(\varinjlim_i F_i) \quad = \varinjlim_i (\pi^* F_i),$$

d.h. π^* kommutiert mit direkten Limites.
Die Beweise der Linksexaktheit von π_* und der Rechtsexaktheit von π^* sind ebenfalls analog zu den entsprechenden Beweisen für 4.3.10 (i).
Sei

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Garben auf $X'_{E'}$. Weil der Hom-Funktor linksexakt ist, ist dann für jede Garbe G auf X_E die folgende Sequenz exakt.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X'_{E'})}(\pi^*G, F') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X'_{E'})}(\pi^*G, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X'_{E'})}(\pi^*G, F'').$$

Weil π^* linksadjungiert ist zu π_*, ergibt sich daraus die Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(G, \pi_* F') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(G, \pi_* F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(G, \pi_* F'').$$

Da dies für jedes G gilt, folgt damit die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \pi_* F' \longrightarrow \pi_* F \longrightarrow \pi_* F''$$

Sei

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Garben auf X_E. Weil der Hom-Funktor linksexakt ist, ist dann für jede Garbe G' auf $X'_{E'}$ die folgende Sequenz exakt.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(F'', \pi_* G') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(F, \pi_* G') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_E)}(F', \pi_* G').$$

Weil π^* linksadjungiert ist zu π_*, ergibt sich daraus die Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X'_{E'})}(\pi^* F'', G') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X'_{E'})}(\pi^* F, G') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X'_{E'})}(\pi^* F', G').$$

Da dies für jedes G' gilt, folgt die Exaktheit der Sequenz

$$\pi^* F' \longrightarrow \pi^* F \longrightarrow \pi^* F'' \longrightarrow 0.$$

Der letzte Teil von Aussage (iii) ergibt sich aus der Exaktheit des Funtors a und der Definition $\pi^* = a \circ \pi^p$ von π^* (vgl. 4.3.10 (i)).
QED.

4.4.2 Beispiele

(i) Sei π: X' $\longrightarrow$ X ein Morphismus von C/X. Dann ist der Funktor

$$\pi^*: S((C/X)_E \longrightarrow S((C/X')_E)$$

gerade die Einschränkung auf die Teilkategorie C/X' $\hookrightarrow$ C/X.

Genauer: für Prägarben P auf $(C/X')_E$ und Objekte f'U' $\longrightarrow$ X' von C/X' besitzt das inverse System der Diagramme

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{g} & U \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

zum direkten Limes

$$\pi^p P(U') := \varinjlim_{U} P(U),$$

das initiale Objekt

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{id} & U' \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi\circ f'} \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

d.h. es ist $\pi^p P(U') = P(U')$. Für Garben P = F erhält man so eine Garbe, d.h. π^*F ist gerade die Einschränkung von F.

(ii) Seien E $\subseteq$ E' , C/X $\subseteq$ C'/X und π = id: X $\longrightarrow$ X der identische Morphismus. Damit ist in keiner Weise gesichert, daß

$$\pi_*\pi^*(F) = F$$

gilt. Wir werden später sehen, daß dies für den identischen Morphismus

$$X_{fl} \longrightarrow X_{et}$$

der Falls ist (vgl. Milne, Etale cohomology, Bemerkung 3.11 (b)).

(iii) Das hier angegebene Beispiel soll illustrieren, daß π^* nicht nur von der Topologie (d.h. der Menge E), sondern auch von der Kategorie C abhängt. Seien

k	ein Körper
$\overline{k}$	die algebraische Abschließung von k

und

π: $\overline{X}$:= Spec $\overline{k}$ $\longrightarrow$ Spec k =: X

der durch die natürliche Einbettung induzierte Morphismus. Der zugehörige Morphismus der großen Etal-Situs liefert einen Funktor

$$\pi^*: (\mathbf{Sch} / \mathrm{Spec}\ k)_{et} \longrightarrow (\mathbf{Sch} / \mathrm{Spec}\ \overline{k})_{et}$$

welcher mit der Einschränkung übereinstimmt: seien nämlich F eine Garbe auf $(\mathbf{Sch} / \mathrm{Spec}\ k)_{et}$ und $\overline{U}$ ein Objekt von $(\mathbf{Sch} / \mathrm{Spec}\ \overline{k})_{et}$. Wir betrachten das inverse System

$$\begin{array}{ccc} \overline{U} & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{X} & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

zum direkten Limes $\pi^p F(\overline{U}) = \varinjlim_U F(U)$. Dieses besitzt das initiale Objekt

$$\begin{array}{ccc} \overline{U} & \xrightarrow{id} & \overline{U} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{X} & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

d.h. es ist $\pi^p F(\overline{U}) = F(\overline{U})$, d.h. $\pi^p F$ ist die Einschränkung von F.

Insbesondere ist π^p exakt und kommutiert mit beliebigen Produkten. Das direkte Produkt von Epimorphismen ist ein Epimorphismus (nach dem Halm-Kriterim für von Null verschiedene Schnitte, denn der Halm einer Prägarbe in einem geometrischen Punkt $\overline{x} \longrightarrow U$ ist gerade das inverse Bild entlang $\overline{x} \longrightarrow U$).

Für Garben F ist $\pi^p F$ eine Garbe, d.h. auch $\pi^* F$ ist die Einschränkung der Garbe F.

Insbesondere ist π^* exakt (nach Bemerkung 4.4.1 (iii)) und kommutiert mit beliebigen Produkten. Nach dem Halm-Kriterumg für von Null verschiedene Schnitte ist das direkte Produkt von Epimorphismen in $\mathbf{S}(X_{et})$ ein Epimorphismus.

Das ist jedoch nicht so, wenn wir statt dessen die kleinen Situs betrachten, d.h. den Funktor

$$\pi^*: (et / \operatorname{Spec} k)_{et} \longrightarrow (et / \operatorname{Spec} \overline{k})_{et}$$

und $Gal(\overline{k}/k)$ unendlich ist. Wäre π^* die Einschränkung auf den kleinen Situs des auf dem großen Situs definierten Funktors π^*, so wäre auch in diesem Fall in $\mathbf{S}(X_{et})$ das direkte Produkt von Epimorphismen ein Epimorphismus. Das ist jedoch nicht so auf Grund von Beispiel 4.3.11 (iii).

(iv) <u>Der Garben-Morphismus</u> $\varphi_G: \pi^* G_X \longrightarrow G_{X'}$.Seien $\pi: X' \longrightarrow X$ ein Morphismus und G ein kommutatives Gruppenschema über X. Wir nehmen an, die E-Topologie ist gröber als die kanonische Topologie, so daß G Garben G_X und $G_{X'}$ auf X_E bzw. X'_E definiert.
Wir betrachten für jedes Objekt U' von X'_E die Abbildung

$$\Gamma(U', \pi^p G_X) \longrightarrow \Gamma(U', G_{X'})$$

die den Schnitt von $\pi^p G_X(U') = \varinjlim_U G_X(U)$, welcher repräsentiert wird durch

$$s \in G_X(U) = Hom_X(U, G)$$

bezüglich des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array},$$

abbildet in den Schnitt

$$\begin{aligned} s\circ g \in \mathrm{Hom}_X(U', G) \\ &= \mathrm{Hom}_{X'}(U', G\times_X X') \\ &= \mathrm{Hom}_{X'}(U', G_{X'}) \\ &= G_{X'}(U') \end{aligned}$$

Auf diese Weise ist ein Prägarben-Morphismus $\pi^p G_X \longrightarrow G_{X'}$ definiert, der sich - da $G_{X'}$ eine Garbe ist - eindeutig über einen Garben-Morphismus

$$\varphi_G: \pi^* G_X \longrightarrow G_{X'},$$

faktorisiert.

Dies muß nicht unbedingt ein Isomorphismus sein. Betrachten wir zum Beispiel die folgenden Situationen.
Beispiel 1.

$$X = \mathrm{Spec}\ k,\ X' = \mathrm{Spec}\ A$$

mit einem Körper k und einer k-Algebar A, welche mindestens ein von Null verschiedenes Element a besitze mit $a^p = 0$. Dann ist (vgl. 4.3.13.4)

$$(\alpha_p)_X = 0,$$

denn jedes Etal-Schema U über X ist disjunkte Vereinigung von Spektren Spec K endlicher separabler Körpererweiterungen K/k, d.h. es ist

$$(\alpha_p)_X(U) = \{ s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \mid s^p = 0 \} = \times_{k\subseteq K\subseteq k_s} \{ s \in K \mid s^p = 0 \} = 0$$

Die Garbe $(\alpha_p)_{X'}$ dagegen ist von Null verschieden, zum Beispiel für U' = X' ist

$$(\alpha_p)_{X'}(U') = \{ s \in \Gamma(U', \mathcal{O}_{U'}) \mid s^p = 0 \} = \{ s \in A \mid s^p = 0 \} \ni a \neq 0.$$

Der Morphismus φ_G ist in dieser Situation injektiv, aber nicht surjektiv.
Beispiel 2.

$$X' := \mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p,\ X := \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$$

Der stetige Morphismus

$$\pi: X'_{et} \hookrightarrow X_{et}$$

sei induziert durch den natürlichen Homomorphismus $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_p$ auf den Restekörper.

Der Morphismus

$$\varphi_G: \pi^*(\mathbb{G}_m)_X \longrightarrow (\mathbb{G}_m)_{X'},$$

überführt den durch

$$s \in (\mathbb{G}_m)_X(U) \qquad = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*$$

repräsentierten Schnitt von $\pi^*(\mathbb{G}_m)_X$ zum kommuativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array},$$

in den Schnitt

$$g^{\#}(s) = (\mathbb{G}_m)_{X'}(U') = \Gamma(U', \mathcal{O}_{U'})^*.$$

Dabei sei

$$g^{\#}: \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \longrightarrow \Gamma(U', \mathcal{O}_{U'})$$

der durch g induzierte Homomorphismus.. Nach 2.3.3 ist die Einschränkung auf die Faser,

$$(et/X) \longrightarrow (et/X'),\ U \mapsto U\times_X X' ,$$

eine Äquivalenz von Kategorien (weil X' in X durch ein nilpotentes Ideal definiert wird). Im obigen Viereck kann man deshalb U so wählen, daß $U' = U\times_X X'$ wird. Wegen der speziellen Wahl von X und X' sind dann U' und U dieselben topologischen Räume und $\mathcal{O}_{U'} = \mathcal{O}_U/p\mathcal{O}_U$. Insbesondere ist dann $g^{\#}$ surjektiv, d.h. wir haben eine exakte Sequenz von Garben auf X'

$$\pi^*(\mathbb{G}_m)_X \xrightarrow{\varphi_G} (\mathbb{G}_m)_{X'} \longrightarrow 0$$

Diese Surjektivitätsaussage bleibt richtig, wenn wir $\mathbb{G}_m$ durch $\mathbb{G}_a$ ersetzen. Jeder Schnitt $s' \in \mathbb{G}_a(U')$ besitzt also wenigstens lokal ein Urbild in $\pi^*(\mathbb{G}_a)_X(U')$. Letzteres wird lokal repräsentiert durch einen Schnitt

$$s \in (\mathbb{G}_a)_X(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \text{ mit}^{55}\ U' = U\times_X X'$$

Der zugehörige Schnitt $1 + sp \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*$ definiert lokal einen Schnitt von $\pi^*(\mathbb{G}_m)_X$. Zwei lokale Repräsentanten s eines Urbilds von s' unterscheiden sich um einen Schnitt aus $p\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Die zugehörigen Schnitte 1 + sp unterscheiden sich damit um einen Schnitt aus $p^2\Gamma(U, \mathcal{O}_U) = 0$, d.h. sie sind lokal gleich und definieren damit einen (globalen) Schnitt von $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*$. Wir haben Gruppen-Homomorphismen

$$(\mathbb{G}_a)_{X'}(U') \longrightarrow \pi^*(\mathbb{G}_m)_X(U'),\ s \mapsto 1 + sp,$$

konstruiert:

$$(1 + xp)(1+ yp) = 1 + (x+y)p + xyp^2 \equiv 1 + (x+y)p \bmod p^2.$$

[55] Jedes $g: U' \longrightarrow U$ faktorisiert sich über $U' \longrightarrow U\times_X X'$, jeder Schnitt über U' kommt also von einem Schnitt über $U\times_X X'$, und die Objekte der Gestalt $U\times_X X'$ überdecken das gegebene U'.

Diese Gruppen-Homomorphismen setzen sich zusammen zu einem Garben-Morphismus

$$(\mathbb{G}_a)_{X'} \longrightarrow \pi^*(\mathbb{G}_m)_{X'}, s \mapsto 1 + sp,$$

Durch lokale Betrachtungen bzw. der Betrachtung der Halme sieht man, das Bild dieses Morphismus ist gerade der Kern von φ_G. Außerdem ist dieser Morphismus injektiv:

$$1 + sp \equiv 0 \bmod p^2 \Leftrightarrow s \;\; 0 \bmod p .$$

Wir erhalten so eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (\mathbb{G}_a)_{X'} \longrightarrow \pi^*(\mathbb{G}_m)_X \xrightarrow{\varphi_G} (\mathbb{G}_m)_{X'} \longrightarrow 0$$

Insbesondere sehen wir, in der betrachteten Situation ist φ_G surjektiv, aber nicht injektiv.

<u>Beispiel 3</u>.

Betrachten wir die Situation, in welcher G und π: X' $\longrightarrow$ X in C/X liegen. Zeigen wir, daß dann π^* der Einschränkungsfunktor ist, d.h.

$$\pi^*G_X \xrightarrow{\varphi_G} G_{X'}$$

ist ein Isomorphismus.
Für jede Garbe F' auf X'_E konstruieren wir eine Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{S(X)}\ (G_X , \pi_*F') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S(X')}\ (G_{X'} \quad , F'). \qquad (1)$$

Sei ein Garben-Homomorphismus

$$G_X \longrightarrow \ \pi_*F'$$

gegeben. Für die Objekte U von C/X definiert dieser Gruppen-Homomorphismen

$$\mathrm{Hom}_X(U, G_X) \longrightarrow F(U\times_X X')$$

Speziell für U $\xrightarrow{\varphi}$ X' aus C/X' ist

$$\mathrm{Hom}_X(U, G_X) = \mathrm{Hom}_{X'}(U, G_X\times_X X') = \mathrm{Hom}_{X'}(U, G_{X'})$$

und der Moprhismus (id, φ): U $\longrightarrow$ $U\times_X X'$ induziert eine Abbildung

$$F(U\times_X X')\longrightarrow F(U)$$

Durch Zusammensetzen erhalten wir die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{X'}(U, G_{X'}) = \mathrm{Hom}_X(U, G_X) \longrightarrow F(U\times_X X')\longrightarrow F(U)$$

für jedes U aus C/X', und damit einen Garben-Morphismus $G_{X'}\longrightarrow F'$.

Umgekehrt definiet jeder solche Garben-Morphismus von Garben auf C/X' Abbildungen

$$\mathrm{Hom}_X(U', G_X) \longrightarrow F'(U')$$

für jedes Objekt U' von C/X'. Speziell für U' = $U\times_X X'$ bekommen diese die Gestalt

$$\mathrm{Hom}_X(U \times_X X', G_X) \longrightarrow \pi_* F'(U).$$

Durch Zusammensetzen mit der Abbildung

$$\mathrm{Hom}_X(U, G_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(U', G_X),$$

welche durch die Projektion $U \times_X X' \longrightarrow U$ induziert wird, erhalten wir eine Abbildung

$$\mathrm{Hom}_X(U, G_X) \longrightarrow \pi_* F'(U)$$

für jedes U aus C/X. Diese Abbildungen setzen sich zusammen zu einem Garben-Morphismus $G_X \longrightarrow \pi_* F'$. Die so definierte Abbildung ist invers zu (1). Nun ist (1) funktoriell in F' und G. Insbesondere ist

$$G_{X'} = \pi^* G_X$$

(v) Sei eine Körper-Erweiterung $K \hookrightarrow K'$ gegeben und

$$\pi\colon \mathrm{Spec}\, K' \longrightarrow \mathrm{Spec}\, K$$

der durch die natürliche Einbettung induzierte Morphismus. Wir betrachten ein kommuatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K_s & \hookrightarrow & K'_s \\ \cup & & \cup \\ K & \hookrightarrow & K' \end{array}$$

dessen vertikale Homomorphismen gerade die natürlichen Einbettungen in die jeweiligen separablen Abschließungen sind. Weiter sie

$$\psi\colon G_{K'} \longrightarrow G_K$$

der zugehörigen Homomorphismus der Galois-Gruppen, welcher die Elemente von

$$G_{K'} := \mathrm{Gal}(K'_s/K')$$

auf den Teilkörper K_s einschränkt. Wir identifizieren die Garben-Kategorien

$$\mathbf{S}(\mathrm{Spec}\, K)_{et} \text{ und } \mathbf{S}(\mathrm{Spec}\, K')_s$$

mit den Kategorien diskreter Moduln über den Galois-Gruppen G_K bzw. $G_{K'}$. Die Übergänge zum inversen bzw. direkten Bild

$$\pi^*\colon \mathbf{S}(\mathrm{Spec}\, K)_{et} \longrightarrow \mathbf{S}(\mathrm{Spec}\, K')_s$$

und

$$\pi_*\colon \mathbf{S}(\mathrm{Spec}\, K')_s \longrightarrow \mathbf{S}(\mathrm{Spec}\, K)_{et}$$

verwandeln sich dabei in die folgenden Funktoren.

$$\pi^*\colon G_K\text{-Mod} \longrightarrow G_{K'}\text{-mod}\,,\ N \mapsto N.$$

Dabei sei die Operation von G_K auf π^* wie folgt definiert. Für $\sigma \in G_{K'}$, und $n \in N$ sei

$$\sigma n := \psi(\sigma) n.$$

Der direkte Bild-Funktor bekommt die Gestalt

$$\pi_*\colon G_{K'}\text{-Mod} \longrightarrow G_K\text{-Mod},\ N \mapsto{}^{56}\ M_{G_K}^{\psi(G_{K'})}(N^{\mathrm{Ker}(\psi)})$$

(vgl. Serre: Cohomologie Galoisienne I.2.5)

(vi) Komposition von stetigen Morphismen. Seien stetige Morphismen

$$X''_{E''} \xrightarrow{\pi'} X'_{E'} \xrightarrow{\pi} X_E$$

gegeben. Dann gilt

$$(\pi\circ\pi')_* = \pi_*\circ\pi'_* \text{ und } (\pi\circ\pi')^* = \pi^*\circ\pi^* .$$

4.4.3 Halme der inverser und direkter Bilder (Milne Theorem II.3.2)

Sei π: X' $\longrightarrow$ X ein Morphismus von Schemata.

(i) Für jede Garbe F auf X_{et} und jeden Punkt $x' \in X'$ gilt

$$(\pi^*F)_{\bar{x}'} = F_{\overline{\pi(x')}} .$$

Dabei bezeichne $\bar{x}'$ einen über x' liegenden geometrischen Punkt und

$$\overline{\pi(x')} = \bar{x}'$$

den geometrischen Punkt $\bar{x}'$ betrachtet als über $\pi(x')$ liegend. Ist insbesondere π der kanonische Morphismus

$$\pi\colon \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,\bar{x}} \longrightarrow X,$$

so gilt

$$F_{\bar{x}} = (\pi^*F)_{\bar{x}} = \Gamma(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,\bar{x}}, \pi^*F).$$

(ii) Nehmen wir an, der Morphismus π: X' $\longrightarrow$ X ist quasi-kompakt. Weiter seien

$$\bar{x} = \mathrm{Spec}\ k(x)_s$$

ein über $x \in X$ liegender geometrischer Punkt,

$$f\colon \tilde{X} := \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,\bar{x}} \longrightarrow X$$

der kanonische Morphismus und $\tilde{X}' := X'\times_X\tilde{X}$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}' & \xrightarrow{f'} & X' \\ \downarrow\tilde{\pi} & & \downarrow\pi \\ \tilde{X} & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Dann gilt für jede Garbe F' auf X' und deren Einschränkung $\tilde{F}' = f'^*F'$:

---

[56] Für jedes proendliche Gruppe G, jede abgeschlossen Untergruppe $H \subseteq G$ und jeden diskreten H-Modul A sei

$$M_G^H = \mathrm{Hom}_H(G, A)$$

die Menge der Abbildungen f:G $\longrightarrow$ A mit f(hg) = hf(g) für $h \in H$ und $g \in G$. Dies ist ein diskreter G-Modul bezüglich der folgenden Operation und heißt induzierter G-Modul.

für f: G $\longrightarrow$ A aus M_G^H, $g, x \in G$ sei (gf)(x) = f(xg).

$$(\pi_* F')_{\bar{x}} = \Gamma(\widetilde{X}', \widetilde{F}')$$

Bemerkung
Ist F eine Garbe auf X'_{et}, welche durch ein Gruppenschema lokal endlichen Typs über X' gegeben ist, so gilt

$$\Gamma(\widetilde{X}', \widetilde{F}') = f'^*F(\widetilde{X}') = G(\widetilde{X}').$$

vgl. Milne Chapter II, §3, Remark 3.4.

Beweis. Zu (i). Wir setzen $x := \pi(x')$. Der Morphismus definiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ k(x') & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow\pi \\ \mathrm{Spec}\ k(x) & \longrightarrow & X \end{array}$$

wobei der linke vertikale Mophismus von der durch π induzierten Einbettung $k(x) \hookrightarrow k(x')$ kommt. Diese Einbettung induziert eine (nicht eindeutig bestimmte) Einbettung der separablen Abschließungen und liefert damit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{x}' & \xrightarrow{u_{x'}} & X' \\ \pi_{x'}\downarrow & & \downarrow\pi \\ \bar{x} & \xrightarrow{u_x} & X \end{array}$$

Damit ist

$$(\pi^*F)_{\bar{x}'} = (u^*_{x'}\pi^*F)(\bar{x}') = (\pi^*_{x'}u^*_xF)(\bar{x}') = F_{\overline{\pi(x')}}\ .$$

Wir haben noch den Spezialfall zu behandeln, daß π der natürliche Morphismus

$$\pi: \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,\bar{x}} \longrightarrow X,$$

ist.

Nach Beispiel 4.4.2 ist π^* der Einschränkungsfunktor.[57] Dasselbe gilt für π^p (siehe 4.3.4 Beispiele für inverse Bilder (ii)), d.h. π^* und π^p stimmen auf der Garben-Kategorie überein. Es gilt

$$\Gamma(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,\bar{x}}\ , \pi^*F) = \Gamma(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,\bar{x}}\ , \pi^pF) = \varinjlim_U F(U),$$

wobei der Limes über alle kommutativen Diagramme der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,\bar{x}} & \longrightarrow & U \\ \| & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,\bar{x}} & \longrightarrow & X \end{array}$$

mit U etale über X zu erstrecken ist.

---

[57] Man beachte, π ist die Zusammensetzung einer offenen Einbettung Spec A $\hookrightarrow$ X mit dem Morphismus, der induziert wird durch die Zusammensetzung

$$A \longrightarrow A_x \longrightarrow A_x^{sh}$$

der Lokalisierung bezüglich x mit der strengen Henselisierung. Nach den Bemerkungen 2.4.16 (iv) und 2.4.16 (vii) ist die strenge Henselisierung ein Etal-Morphismus, d.h. π liegt in (et)/X.

Analog ist

$$(\pi^*F)_{\overline{x}} = \varinjlim_{U} F(U),$$

wobei der Limes über alle kommutativen Diagramme der Gestalt

$$\begin{tikzcd} \overline{x} \arrow[r] \arrow[dr, "u_x"'] & U \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

mit U etale über X zu erstrecken ist. Der Morphismus u_x faktoriesiert sich eindeutig über Spec $\mathcal{O}_{X,\overline{x}}$, und nach Definition von $\mathcal{O}_{X,\overline{x}}$ gilt dasselbe für die Morphismen

$$\overline{x} \longrightarrow U$$

mit U zusammenhängend. Deshalb kann man das letzte Diagramm auch in der Gestalt

$$\begin{tikzcd} \overline{x} \arrow[r] & \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,\overline{x}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & U \arrow[d] \\ & \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,\overline{x}} \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

schreiben. Wir sehen so, für beide Limites sind die direkten Systeme im wesentlichen dieselben, d.h. die Limites sind kanonisch Isomorph

$$(\pi^*F)_{\overline{x}} = \Gamma(\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,\overline{x}}, \pi^*F).$$

<u>Zu (ii)</u>. Mit f: $\widetilde{X}$:= Spec $\mathcal{O}_{X,\overline{x}} \longrightarrow X$ ist auch der durch Basiswechsel entstehende Morphismus f': $\widetilde{X}' \longrightarrow X'$ etale. Dieselben Argumente wie im obigen Beweis von (i) zeigen, daß $f'^* = f'^p$ gilt für Garben der Etal-Situs. Es ist somit

$$(f'^*F')(\widetilde{X}') = (f'^pF')(\widetilde{X}') = \varinjlim_{U'} F'(U'), \tag{1}$$

wobei der Limes erstreckt wird über alle kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}' \arrow[r] \arrow[d, equal] & U' \arrow[d] \\ \widetilde{X}' \arrow[r, "f'"] & X' \end{tikzcd} \tag{2}$$

mit U'$\longrightarrow$ X' etale.
Analog ist

$$(\pi_*F')_{\overline{x}} = \varinjlim_{U} (\pi_*F')(U) = \varinjlim_{U} F'(U\times_X\widetilde{X}) \tag{3}$$

wobei der Limes erstreckt wird über alle kommuativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} \overline{x} \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ \widetilde{X} \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

mit U $\longrightarrow$ X etale. Man beachte, die geometrischen Punkte $\overline{x} \longrightarrow X$ und $\overline{x} \longrightarrow U$ faktorisieren sich eindeutig über den kanonischen Morphismus

$$f: \widetilde{X} := \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,\overline{x}} \longrightarrow X,$$

sodaß man diese Vierecke durch die folgenden ersetzen kann

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & U \\ \| & & \downarrow \\ \tilde{X} & \xrightarrow{f} & X \end{array} \qquad (4)$$

Aus letzteren Vierecken entstehen durch Basiswechsel bezüglich π:X' $\longrightarrow$ X gerade Vierecke der Gestalt (2). Man kann also den Limes (3) ansehen als erstreckt über das Teilsystem der Vierecke der Gestalt (2), welche durch Basiswechsel aus den Vierecken (4) entstehen. Zum Beweis der Behauptung, d.h. der Gleichheit von (1) und (3), reicht es zu zeigen, daß das beschriebene Teilsystem kofinal im System der Vierecke (2) ist, d.h. zu zeigen ist, daß sich jeder Morphismus

$$\tilde{X}' \longrightarrow U'$$

über einen Morphismus der Gestalt

$$\tilde{X}' \longrightarrow U\times_X\tilde{X}$$

für ein geeignetes Diagramm (4) faktorisiert. Nun ist aber $\tilde{X}$ ein Limes

$$\tilde{X} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,\bar{x}} = \varprojlim U$$

mit U affin und etale über X. Weil der inverse Limes mit Faserprodukten kommutiert (welche ebenfalls inverse Limites sind), folgt

$$\tilde{X}' = \varprojlim_{U} U\times_X X' .$$

Dabei sind die $U\times_X X'$ quasi-kompakt[58] und die Übergangsmorphismen des inversen Systems sind affin. Die Behauptung folgt damit aus dem nachfolgenden Lemma: jeder Morphismus $\tilde{X}' \longrightarrow U'$ faktorisiert sich über ein $U\times_X X'$.

QED.

4.4.3.1 Lemma

Seien X ein Schema, $\{Y_i\}_{i\in I}$ ein filtriertes inverses System von X-Schemata und

$$Y = \varprojlim_{i\in I} Y_i .$$

Weiter sei Z ein X-Schema lokal endlichen Typs.

Wir nehmen an,
- die Übergangsmorphismen des inversen Systems sind affin
- die Y_i sind quasi-kompakt.

Dann faktorisiert sich jeder X-Morphismus Y $\longrightarrow$ Z über ein Y $\longrightarrow$ Y_i. Außerdem gilt

$$\mathrm{Hom}_X(Y, Z) = \varinjlim_{i} \mathrm{Hom}_X(Y_i , Z).$$

Beweis. Der zweite Teil der Behauptung folgt aus dem ersten. Betrachten wir den affinen Fall, d.h.

$$X = \mathrm{Spec}\ A,\ Y_i = \mathrm{Spec}\ B_i ,\ Z = \mathrm{Spec}\ C.$$

---

[58] Die Quasi-Kompaktheit des Morphismus π: X' $\longrightarrow$ X bleibt bei Basiswechsel bezüglich U$\longrightarrow$X mit U affin erhalten.

Die B_i bilden dabei ein direktes filtrierendes System von A-Algebren, C ist vom endichen Typ über A, und es ist

$$Y = \mathrm{Spec}\ B \text{ mit } B = \varinjlim_i B_i .$$

Wir haben zu zeigen, jeder Homomorphismus von A-Algebren,

$$h: C \longrightarrow B$$

faktorisiert sich über ein B_i. Nach Voraussetzung ist C von der Gestalt

$$C = A[c_1, \dots c_n] = A[T_1, \dots T_n]/(f_1(T), \dots , f_m(T)).$$

Für j = 1, ... , n wird $h(c_j)$ durch ein Element aus einem B_i repräsentiert. Da die Anzahl der j endlich ist und das System der B_i filtrierend, gibt es ein $i \in I$ und Elemente

$$b_1 , \dots , b_n \in B_i$$

derart, daß $h(c_j) \in B$ durch b_j repräsentiert wird. Weil h ein Homomorphismus von A-Algebren ist, gilt

$$f_\ell(h(c_j), \dots , h(c_j)) = 0 \text{ in B für } \ell = 1, \dots , m.$$

Weil das System der B_i filtrierend ist, können wir i so wählen, daß zusätzlich gilt

$$f_\ell(b_j, \dots , b_j) = 0 \text{ in B für } \ell = 1, \dots , m.$$

Der Homomoprhismus von A-Algbren

$$A[T_1, \dots T_n] \longrightarrow B_i , T_j \mapsto b_j ,$$

faktorisiert sich deshalb über C und definiert einen Homomorphismus von A-Algebren

$$C \longrightarrow B_i , c_j \mapsto b_j .$$

Die Zusammensetzung mit dem natürlichen Homomorphismus $B_i \longrightarrow B$ ist gerade der gegebene Homomorphismus h.
Der allgemeine Fall wird bewiesen, indem man X, die Y_i und Z in geeigneter Weise als Vereinigungen affiner Schemata schreibt und so den allgemeinen auf den affinen Fall reduziert (vgl. EGA VI_3 8.13.1).

QED.

4.4.4 Der Fall einer Einbettung bzw. eines endlichen Morphismus

(i) Sei i: X' $\hookrightarrow$ X eine offene oder abgeschlossene Einbettung und F' eine Garbe auf X'_{et}. Für jeden Punkt $x \in X$ (und jeden über x liegenden geometrischen Punkt $\bar{x}$ gilt dann

$$(i_*F)_{\bar{x}} = 0 \text{ für } x \notin i(X').$$

$$(i_*F)_{\bar{x}} = F_{\bar{x}'} \text{ für } x = i\,(x_0) \text{ gilt für ein } x' \in X'.$$

(ii) Sei π: X $\longrightarrow$ X ein endlicher Morphismus und F' eine Garbe auf X'_{et}. Für jede Punkt $x \in X$ gilt dann

$$(\pi_*F)_{\bar{x}} = \prod_{\pi(x') = x} F_{\bar{x}'}^{d(x')}$$

Dabei durchlaufe $x' \in X$ die Faser über x und $d(x')$ bezeichne den Separabilitätsgrad von $\kappa(x')$ über $\kappa(x)$,

$$d(x') = [\kappa(x'):\kappa(x)].$$

Beweis siehe Milne Corollary II.3.5.

Bemerkung
Insbesondere ergibt sich aus (ii), daß für endliche Morphismen (und insbesondere abgesc hlossene Einbettungen, der direkte Bildfunktor exakt ist.

4.4.5 Aufgabe

Sei X ein reduziertes und irreduzibles Schema mit dem allgemeinen Punkt

$$g: \eta \longrightarrow X.$$

(i) Ist X normal, so gilt

$$g_* M_\eta = M_X$$

für jede konstanten Garbe M_η auf η.

(ii) Ist X eine Kurve mit dem (einzigen) singulären Punkt

$$i: z \hookrightarrow X,$$

welcher ein gewöhnlicher Doppelpunkt ist, so besteht eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_X \longrightarrow g_* M_\eta \longrightarrow i_* M_z \longrightarrow 0.$$

(iii) Was passiert im allgemeinen Fall? Hinweis: Zerlegen sie g in die Zusammensetzung $\eta \longrightarrow X' \longrightarrow X$, wobei X' die Normalisierung von X ist.

4.4.6 Der Fall eigentlicher Morphismen

Ist $\pi: X' \longrightarrow X$ ein eigentlicher Morphismus, so kann man die Aussage von 4.4.3 (ii) präzisieren. Für jede Garbe F' auf X' und jeden Punkt $x \in X$ gilt dann

$$(\pi_* F')_{\bar{x}} = \Gamma(X'_{\bar{x}}, F' \mid X'_{\bar{x}}).$$

Dabei bezeichne $X'_{\bar{x}}$ die geometrische Faser von π über $\bar{x} \longrightarrow X$. Die Halme der Garbe π_* kann man deshalb über dem geometrischen Fasern von π berechnen.

Beweis siehe Milne, Bemerkung II.3.8.

4.4.7 Beispiel: Cartier und Weil-Divisoren

Sei X ein reduziertes, irreduzibles und quasi-kompaktes Schema mit dem rationalen Funktionenkörper K. Bezeichne

$$g: \eta = \operatorname{Spec} K \hookrightarrow X$$

die Einbettung des allgemeinen Punktes. Weiter sei

$$\mathbb{G}_{m,K} = \mathbb{G}_{m,\operatorname{Spec} K}$$

die Garbe zur multiplikativen Gruppe auf Spec K, d.h. zum Gruppenschema

$$\mathbb{G}_{m,\operatorname{Spec} K} = \operatorname{Spec} K \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T,T^{-1}] = \operatorname{Spec} K[T,T^{-1}]$$

(vgl. Definition 4.1.2 (c) und Bemerkung 4.2.4 (v)). Dann gilt für jeden Etal-Morphismus $U \longrightarrow X$

$$\Gamma(U, g_* \mathbb{G}_{m,K}) = \Gamma(U \times_X \operatorname{Spec} K, \mathbb{G}_m) \qquad \text{(Definition des direkten Bildes)}$$
$$= \mathbb{G}_m(U \times_X \operatorname{Spec} K)$$

$$= R(U)^*. \qquad \text{(Definition 4.1.2 (c) von } \mathbb{G}_m\text{)}.$$

Dabei bezeichne R(U) den Ring der rationalen Funktionen auf U.[59] Die natürlichen Einbettungen

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_U^*) \hookrightarrow R(U)^*$$

in den vollen Quotientenring für die verschiedenen U setzen sich zusammen zu einer kanonischen Einbettung von Garben auf X

$$\varphi: \mathbb{G}_{m,X} \hookrightarrow g_*\mathbb{G}_{m,K}.$$

Der Kokern dieser Einbettung heißt <u>Garbe der Cartier-Divisoren</u> auf X_{et} und wird mit

$$\mathrm{Div}_X := g_*\mathbb{G}_{m,K}/\mathbb{G}_{m,X}$$

bezeichnet. Man beachte, ein Schnitt von Div_X über U ist gegeben durch eine offene Überdeckung von U, $U = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$, für jedes α eine rationale Funktion f_α auf U_α, wobei für je zwei $\alpha,\beta \in I$ der Quotient f_α/f_β weder Nullstellen noch Pole besitzt. Dabei repräsentieren zwei Familien $\{f_\alpha, U_\alpha\}$ und $\{f'_\beta, U'_\beta\}$ genau dann denselben Schnitt, wenn die Quotienten f_α/f'_β auf dem Durchschnitten $U_\alpha \cap U'_\beta$ weder Nullstellen noch Pole besitzen.

Falls das Schema X regulär ist, kann man die Schntitte von Div_X auch als Weil-Divisoren interpretieren. Bezeichne für jedes Schema Z

$$Z_1$$

die Menge der Punkte z von Z der Kodimension 1, d.h. der Punkte mit $\dim \mathcal{O}_{Z,z} = 1$. Für reguläre Schemata Z sind die $\mathcal{O}_{Z,z}$ mit $z \in Z_1$ diskrete Bewertungsringe. Die Garbe D_X der <u>Weil-Divisoren</u> auf X ist dann definiert durch

$$D_X := \oplus_{x\in X_1} i_{x*}\mathbb{Z}.$$

Dabei bezeichne $\mathbb{Z}$ die durch die ganzen Zahlen definierte konstante Garbe auf

$$x = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,x}$$

und

$$i_x : x \hookrightarrow X$$

den zu x gehörigen natürlichen Morphismus. Wir wollen zeigen, falls X regulär ist, gilt

$$D_X \cong \mathrm{Div}_X$$

Nach Definition gilt für jeden Etal-Morphismus $U \longrightarrow X$,

$$\Gamma(U, D_X) = \oplus_{x\in U} \mathbb{Z}$$

(vgl. 4.4.4 (i)). Betrachten wir den Garben-Morphismus

$$\psi: g_*\mathbb{G}_{m,K} \longrightarrow D_X,\ f \in R(U)^* \mapsto (\mathrm{ord}_x(f)),$$

[59] $U\times_X \mathrm{Spec}\, K$ ist etal über Spec K, besteht also aus isolierten Punkten (für jede Komponente von U einen). Der lokale Ring in jedem dieser isolierten Punkten ist eine separable Körpererweiterung von K, die gleich dem Körper der rationalen Funktionen der zugehörigen Komponente von U ist.

welcher die rationale Funktion $f \in R(U)^*$ auf dem Etal-Schema U/X abbildet auf den ganzzahligen Vektor $(\mathrm{ord}_x(f))$. Dabei bezeichne ord_x die diskrete Bewertung von R(U) zum Bewertungsring $\mathcal{O}_{X,x}$. Zum Beweis der Behauptung reicht es die Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{\varphi} g_*\mathbb{G}_{m,K} \xrightarrow{\psi} D_X \longrightarrow 0$$

zu beweisen. Für jeden Punkt $x \in X$ ist die zugehörigen Sequenz der Halme gerade

$$0 \longrightarrow A^* \longrightarrow L^* \longrightarrow \oplus\, \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

mit $A = \mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ und $L = Q(A)$. Die direkte Summe rechts wird dabei über alle Primideale der Höhe 1 von A ersteckt. Nun ist A nach Voraussetzung regulär, also insbesondere ein ZPE-Ring. Damit ist jedes Primideal der Höhe 1 von A ein Hauptideal. Das Bild des zugehörigen Erzeugers $f \in L^*$ in der direkten Summe ist gerade ein Vektor mit der Koordinate 1 an der Stelle, die zum Primideal gehört, und mit allen anderen Koordinaten gleich Null. Das Bild der Abbildung $L^* \longrightarrow \oplus\, \mathbb{Z}$ enthält also ein Erzeugendensystem der direkten Summe, d.h. die Abbildung ist surjektiv.
Die Einheiten von A liegen trivialerweise in keinem Primideal der Höhe 1, d.h. es gilt

$$\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi).$$

Sei jetzt $f \in L^*$ im Kern von $L' \longrightarrow \oplus\, \mathbb{Z}$. Dann liegen f und f^{-1} in keinem Primideal p der Höhe 1 von A, d.h. f ist eiue Einheit von A_p für jedes solche p. Damit gilt

$$f, f^{-1} \in \bigcap A_p.$$

Weil A als regulärer lokaler Ring normal ist, ist der Durchschnitt auf der rechten Seite gerade gleich A, d.h. es gilt $f, f^{-1} \in A$ und damit $f \in A^*$.

4.5 Die Funktoren $i^!$ und $j_!$

4.5.1 Die Kategorie T(X) zu einer Zerlegung eines Schemas X

Seien X ein Schema, $Z \subseteq X$ ein abgeschlossenes Teilschema und U := X - Z das zu Z komplementäre offene Teilschema. Wir bezeichnen mit

$$i: Z \hookrightarrow X \text{ und } j: U \hookrightarrow X$$

die zugehörigen natürlichen Einbettungen. Weiter sei

$$\mathbf{T}(X) = \mathbf{T}(X, Y, Z)$$

die wie folgt definierte Kategorie. Die Objekte von T(X) seien die Tripel

$$(F_Y, F_U, \varphi)$$

bestehend aus eine Garbe

$$F_Y \in S(Y_{et})$$

einer Garbe

$$F_U \in S(U_{et})$$

und einem Garben-Morphismus

$$\varphi: F_Y \longrightarrow i^*j_*F_U .$$

Die Morphismen $(F_Y, F_U, \varphi) \longrightarrow (F'_Y, F'_U, \varphi')$ sind die Paare

$$(\psi_Y, \psi_U)$$

bestehend aus einem Garben-Morphismus

$$\psi_Y: F_Y \longrightarrow F'_Y$$

und einem Garben-Morphismus

$$\psi_U: F_U \longrightarrow F'_U,$$

für welche das folgende Diagramm kommuativ ist.

$$\begin{array}{ccc} F_Y & \xrightarrow{\varphi} & i^*j_*F_U \\ \psi_Y\downarrow & & \downarrow i^*j_*\psi_U \\ F'_Y & \xrightarrow{\varphi'} & i^*j_*F'_U \end{array}$$

Die Morphismen-Komposition erfolge dabei koordinatenweise.

4.5.2 Die Äquivalenz von $\mathbf{S}(X_{et})$ und $\mathbf{T}(X)$.

Seien X ein Schema, $Z \subseteq X$ ein abgeschlossenes Teilschema, $U := X - Z$ das zu Z komplementäre offene Teilschema und

$$i: Z \hookrightarrow X \text{ und } j: U \hookrightarrow X$$

die zugehörigen natürlichen Einbettungen. Dann ist der folgende Funktor eine Äquivalenz von Kategorien

$$t: \mathbf{S}(X_{et}) \longrightarrow \mathbf{T}(X),\ F \mapsto (i^*F, j^*F, \varphi_F).$$

Dabei bezeichne

$$\varphi_F: i^*F \longrightarrow i^*j_*j^*F$$

den Morphismus, welchen man erhält durch Anwenden von i* auf den Morphismus

$$F \longrightarrow j_*j^*F,$$

der besteht, weil j* linksadjungiert zu j_* ist, d.h. der dem identischen Morphismus

$$j^*F \longrightarrow j^*F$$

entspricht bei der natürlichen Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(X_{et})}(F, j_*j^*F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(U_{et})}(j^*F, j^*F). \qquad (1)$$

Beweis. Es ist nicht schwer einzusehen, daß durch die obige Abbildungsvorschrift tatsächlich ein Funktor definiert ist:: für jede Morphismus

$$\psi: F \longrightarrow F'$$

von $\mathbf{S}(X_{et})$ ist das Paar

$$(i^*\psi: i^*F \longrightarrow i^*F',\ j^*\psi: j^*F \longrightarrow j^*F')$$

ein Morphismus von $\mathbf{T}(X)$ (auf Grund der Funktorialität von (1)).

Wir beschränken uns hier auf die Konstruktion des quasi-inversen Funktors

$$\mathbf{T}(X) \longrightarrow \mathbf{S}(X).$$

Die Einzelheiten findet man im Buch von Milne, Theorie II.3.10. Sei

$$(F_Y, F_U, \varphi: F_Y \longrightarrow i^*j_*F_U)$$

ein Objekt von T(X). Betrachten wir das Faserprodukt $s(F_Y, F_U, \varphi)$ der Garben i_*F_Y und $j_* F_U$ über $i_*i^*j_*F_U$, d.h. das kartesische Quadrat

$$\begin{array}{ccc} s(F_Y,F_U,\varphi) & \longrightarrow & j_*F_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ i_*F_Y & \xrightarrow{i_*(\varphi)} & i_*i^*j_*F_U \end{array} \qquad (2)$$

Das Faserprodukt $s(F_Y, F_U, \varphi)$ ist eine Garbe von X_{et} und hängt in funktorieller Weise von F_Y, F_U und φ ab, definiert also einen Funktor

$$s: \mathbf{T}(X) \longrightarrow \mathbf{S}(X_{et}).$$

Für jede Garbe F auf X_{et} definieren die natürlichen Garben-Morphismen

$$F \longrightarrow i_*i^*F \text{ und } F \longrightarrow j_*j^*F$$

auf Grund der Universalitätseigenschaft von (2) einen Morphismus

$$F \longrightarrow st(F).$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß dies ein funktorieller Isomorphismus ist (siehe Milne).

QED.

4.5.3 Definition

Seien X ein Schema und $Y \hookrightarrow X$ ein Teilschema. F eine Garbe auf X_{et} heißt <u>Garbe mit Träger in</u> Y, wenn

$$F_{\bar{x}} = 0$$

gilt für jeden Punkt $x \in X - Y$.

4.5.4 Etalgarben auf abgeschlossenen Teilschemata

Sei $i: Z \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Einbettung von Schemata. Dann definiert der Funktor

$$i_*: \mathbf{S}_{et}(Z) \longrightarrow \mathbf{S}_{et}(X)$$

eine Äquivalenz von $\mathbf{S}_{et}(Z)$ mit der Teilkategorie der Garben von $\mathbf{S}_{et}(X)$ mit Träger in Z.

Beweis. Bei der Äquivalenz 4.5.2 entsprechen die Garben F mit Träger in Z geraden den Tripeln

$$(F_Z, 0, 0),$$

d.h. den Garben auf Z.

QED.

4.5.5 Beispiel

Sei

$$X = \text{Spec } A$$

mit einem diskreten Bewertungsring A. Wir bezeichnen mit

$$K = \mathbf{Q}(A)$$

dessen Quotientenkörper, mit m dessen maximales Ideal und mit

$$k = A/m$$

dessen Restekörper. Weiter sei

$$G_K := \mathrm{Gal}(K_s/K)$$

die Galois-Gruppe der separablen Abschließung K_s von K über K. Sei A’ die ganze Abschließung von A in K_s. Wir fixieren ein über m liegendes maximales Ideal von m’ von A’ und betrachten die zugehörige Filtration (vgl. die Bemerkungen 2.4.11 (ii)-(vi))

$$G_K \supset D \supset I \supset \{1\}$$

mit der Zerlegungsgruppe (decomposition group)

$$D := \{\sigma \in G_K \mid \sigma(m) = m\}$$

und der Trägheitsgruppe (inertial group)

$$I := \{\sigma \in D \mid \sigma(x) - x \in n' \text{ für jedes } x \in A'\}$$

Dann ist

$$G_k = D/I$$

gerade die Galoisgruppe von k,

$$K_s^D = \mathbf{Q}(A^h)$$

der Quotientenkörper der Henselisierung von A und

$$K_s^I = \mathbf{Q}(A^{sh})$$

der Quotientenkörper der strengen Henselisierung von A (vgl. Bemerkung 2.4.16 (vi)).
Wir setzen

$$U := \mathrm{Spec}\ K,\ Z = \mathrm{Spec}\ k.$$

Die Garbe $F \in S(X_{et})$ entspreche dem Modul

$$N \in G_K\text{-mod}.$$

Dann entspricht i^*j_*F dem G_k-Modul

$$N^I \in G_k\text{-mod}.$$

Die Angabe einer Garbe auf X_{et} entspricht daher der Angabe eines Tripels

$$(N_1, N_2, \varphi)$$

mit $N_1 \in G_k$-mod, $N_2 \in G_K$-mod und φ: $N_1 \longrightarrow N_2^I$ ein G_k-Homomorphismus (vgl. Beispiel 4.4.2(v)). Man beachte, daß es oft bequemer ist, φ als Homomorphismus

$$\varphi: N_1 \longrightarrow N_2$$

anzusehen, der mit den Operationen von G_k und G_K verträglich ist.

Index

Inhalt