**Einführung in die Etal-Kohomologie**
frei nach J.S. Milne: Etale Cohomology
Vorlesung im Sommer-Semester 2016
Di 15-17 Uhr, Raum 3.13 SG
verlegt auf
Mi 15-17 Uhr, SG 2-14

Vorlesung im Winter-Semester 2016/17
Do 15-17 Uhr, SG 2-14

## Bezeichnungen

| | |
|---|---|
| **Ab** | Kategorie der abelschen Gruppen |
| $A^h$ | Henselisierung des lokalen Rings A, vgl. 2.4.8. |
| $A^{sh}$ | strenge Henselisierung des lokalen Rings A, vgl. Bemerkung 2.4.15 (ii). |
| Cat T | die Kategorie einer Grothendieck-Topologie, vgl. 1.3. |
| Cov T | die Menge der Überdeckungen einer Grothendieck-Topologie, vgl. 1.3. |
| E/X | die Kategorie der E-Schemata über dem Schema X, vgl. 1.3.9. |
| $(E/X)_E$ | der kleine E-Situs auf dem Schema X, vgl. 1.3.9 |
| **Ens** | Kategorie der Mengen |
| **FEt** / X | Kategorie der Schemata über dem Schema X, welche endlich und etale sind über X, vg. 3.2.1. |
| $H^0_A$ | Hilbert-Funktion des lokalen Rings A bezügliche dessen maximalen Ideals, vgl. den Beweis des Lemmas zu Bemerkung 1.3.8 (iii). |
| **LFT**/X | Kategorie der Schemata über dem Schema X, welche lokal endlichen Typs über X sind, vgl. 1.3.9 |
| $(LFT/X)_E$ | der große E-Situs auf X, vgl. 1.3.9. |
| $\mu(M)$ | minimale Anzahl der Erzeuger des Moduls M über einem lokalen Ring, vgl. den Beweis des Lemmas zu Bemerkung 1.3.8 (iii). |
| $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ | $:= \mathcal{O}^{sh}_{X,\bar{x}}$, lokaler Ring des Schemas X im geometrischen Punkt $\bar{x}$ von x, vgl. Bemerkung 2.4.15(viii). |
| $\mathcal{O}^{sh}_{X,\bar{x}}$ | strenge Henselisierung des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ des Schemas X im Bild x des geometrischen Punkts $\bar{x}$ von X, vgl. Bemerkung 2.4.15(viii). |
| $\pi_1(X, \bar{x})$ | fundamentale Gruppe des zusammenhängenden Schemas X im geometrischen Punkt $\bar{x}$, vgl. 3.2.3. |
| $\pi_1(X^{an}, x)$ | analytischen fundamentale Gruppe der komplexen Mannigfaltigkeit X im Punkt c, vgl. Bemerkung 3.2.4 (iii). |
| $\pi^t_1(X, \bar{x})$ | zahme fundamentale Gruppe des Schemas X im geometrischen Punkt $\bar{x}$, vgl. 3.3.5. |
| **Sch** | Kategorie der lokal noetherschen Schemata, vgl. 1.3.8 |
| $Sh_T(C)$ | Kategorie der Garben auf der Topologie oder Prätopologie T mit Werten in der Kategorie mit Faserprodukten C, vgl. |
| $X_E = (\mathcal{C}/X)_E$ | der E-Situs der Schema-Kategorie $\mathcal{C}$/X, vgl. 1.3.9. |
| $X_{ét}$ | der Etale-Situs auf dem Schema X, vgl. 1.3.9. |
| $X_{fl}$ | der flache Situs auf dem Schema X, vgl. 1.3.9. |

$X_{Zar}$ der Zariski-Situs auf dem Schema X, vgl. 1.3.9

# 1. Einleitung

## 1.1 Zeta-Funktionen und Kohomologie-Theorien

Eines der interessantesten unglösten Probleme der heutigen Mathematik ist die Frage nach den Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \ z \in \mathbb{C}-\{1\}$$

Die Reihe rechts läßt sich zunächst für reelle z > 1 in eine Potenzreihe entwickeln und dann in die komplexe Ebene fortsetzen. Man erhält so eine meromorphe Funktion der komplexen Ebene, welche außerhalb der Stelle z=1 holomoprh ist, an der Stelle z = 1 eine Polstelle und für z = -2, -4, -6, ... Nullstellen besitzt. Die Riemannsche Vermutung besagt, daß alle übrigen Nullstellen der Realteil - 1/2 haben.

Die Riemannsche Vermutung ist weit von einer Lösung entfernt. Das Beste, was die gegenwärige Mathemaitk in diesem Kontext zu bieten hat, sind Aussagen über die Nullstellen ähnlich gebauter Funktionen. Die algebraische Geometrie definiert für jede algebraische Varietät vom endlichen Typ über $\mathbb{Z}$ eine Zeta-Funktion. Die der Riemannschen Zeta-Funktion am nächsten stehende ist die zu Spec $\mathbb{Z}$. Die analogen Aussagen bezüglich der Nullstellen dieser Zeta-Funktionen für Varietäten über einem endlichen Körper heißen Weilsche Vermutungen. Diese wurden 1973 von Deligne bewiesen.

Aus einer axiomatischen Beschreibung der Weilschen Vermutungen (vgl. Kleiman) ergibt sich, daß es genügt für algebraische Varietäten X endlichen Typs über einem Körper k der Characteristik p > 0 Kohomologie-Gruppen

$$H^i(X)$$

zu definieren, die die aus der algebraischen Topologie bekannten Eigenschaften bestitzen und Weil-Kohomologie-Gruppen heißen.

## 1.2. Weil-Kohomologie

### 1.2.1 Definition

Sei k ein Körper der Charakteristik p > 0. Eine Weil-Kohomologie über k ist ein kontravarianter Funktor

$$H^*: \{\text{projektive Schemata endlichen Typs über k}\} \longrightarrow \{\text{graduierte K-algebren}\}$$

$$X \mapsto H^*(X) = \oplus_{i=0}^{\infty} H^i(X)$$

von der Kategorie der projektiven Schemata X endlichen Typs über über k mit Werten in der Kategorie der graduierten Algebren

$$R := \oplus_{i=0}^{\infty} R_i \ , \ R_i \bullet R_j \subseteq R_{i+j} \ ,$$

über einem Körper K der Charakteristik 0.[1] Dabei sollen die folgenden Bedingungen erfüllt sein.

[1] Die Körper k und K sind verschieden, da sie eine verschiedene Charakteristik besitzen.

(i) $\dim_K H^i(X) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(ii) $H^i(X) \neq 0$ höchstens für $0 \le i \le 2n$, $n := \dim X$.

(iii) Ist X glatt über k, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus $H^{2n}(X) \xrightarrow{\cong} K$ (welcher Orientierungsabbildung heißt).

(iv) Poincaré-Dualität. Ist X glatt über k, so definiert das Produkt der Algebra $H^*(X)$ nicht-entartete Paarungen

$$H^i(X; \times H^j(X) \longrightarrow H^{2n}(X) \cong K$$

für je zwei nicht-negative ganze Zahlen i, j mit $i + j = 2n$.

(v) Künneth-Isomorphismus. Für je zwei glatte projektive Schemata X und Y über k definieren die natürlichen Projektionen[2]

$$p':X \times Y \longrightarrow X \text{ und } p'': X \times Y \longrightarrow Y$$

Homomorphismen graduierter K-Algbren

$$p'^*:H^*(X) \longrightarrow H^*(X\times Y),\ p''^*:H^*(Y) \longrightarrow H^*(X \times Y)$$

mit der Eigenschaft, daß der induzierte Homomorphismus graduierter K-Algebren

$$H^*(X)\otimes H^*(Y) \longrightarrow H^*(X\times Y),\ \alpha\otimes\beta \mapsto p'^*(\alpha)\bullet p''^*(\beta),$$

ein Isomorphismus ist.

(vi) Zyklen-Abbildung. Für X glatt über k und jedes abgeschlossene irreduzible und reduzierte Teilschema

$$Y \hookrightarrow X$$

der Kodimension i gibt es eine Kohomologie-Klasse

$$\eta(Y) = \eta_X(Y) \in H^{2i}(X),$$

welche fundamentale Klasse von Y in X heißt heßt. Diese Abbildung läßt sich linear auf die formalen ganzzahligen Linearkombinationen der Y mit fester Kodimension fortsetzen zu einen Gruppen-Homomorphismus

$$\eta:Z^i(X) \longrightarrow H^{2i}(X)$$

auf den Zyklen der Kodimension i. Rational äquivalente Zyklen[3] haben bei dieser Abbildung dasselbe Bild. Für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X$ ist dabei

$$\eta(\{x\}) \in H^{2n}(X) \cong K$$

von Null verschieden.

(vii) Schwaches Lefschetz-Axiom. Für X glatt über k und für jeden glatten Hyperebenen-Schnitt $j:Y \hookrightarrow X$ sind die induzierten Homomorphismen

$$j^*: H^i(X) \longrightarrow H^i(Y)$$

bijektiv für $i \le n - 2$ und injektiv für $i \le n - 1$ ($n := \dim X$).

(viii) Starkes Lefschetz-Axiom. Sei X glatt über K und $j: Y \hookrightarrow X$ ein glatter Hyperebenenschnitt. Die Multiplikation mit der fundamentalen Klasse

$$y := \eta(Y)\in H^2(X)$$

definiert für jedes i den Lefschetz-Operator

$$L: H^i(X) \longrightarrow H^{i+2}(X),\ \alpha \mapsto \alpha\bullet y.$$

---

[2] Mit $X \times Y$ ist das Faserprodukt über k gemeint.

[3] Zwei Zyklen Y' und Y'' der Kodimension i von X, die ganz in einem abgeschlossenen irreduziblen und reduzierten Teilschemas $Z \hookrightarrow X$ der Kodimension i-1 liegen, werden als äquivalent angesehen, wenn sie als Zyklen von Z linear äquivalent sind, d.h. wenn ihre Differenz ein Hauptdivisor ist, d.h. der Nullstellen-Polstellen-Divisor einer rationalen Funktion auf Z. Die von dieser Relation erzeugte Äquivalenzrelation für Zyklen von X heißt rationale Äquivalenz.

Für $i = 1, \ldots, n := \dim X$ sind dann die iterierten Lefschetz-Operatoren

$$L^i : H^{n-i}(X) \longrightarrow H^{n+i}(X)$$

Isomorphismen.

**Bemerkungen**

(i) Die Multiplikation der K-Algebren $H^*(X)$ spielt dieselbe Rolle wie das Cup-Produkt in der algebraischen Topologie und wird deshalb auch Cup-Produkt genannt.

(ii) Aus den obigen Axiomen kann man ein Analogon der Fixpunkt-Formel von Lefschetz ableiten. Seien X glatt und eigentlich über k und

$$f: X \longrightarrow X$$

ein Morphismus, dessen Fixpunkte eine isolierte Menge bilden. Außerdem operiere

$$1 - df: \Omega^1_{X,x} \longrightarrow \Omega^1_{X,x}$$

auf der Garbe der regulären 1-Formen in den Fixpunkten x von f injektiv (d.h. die Vielfachheit aller Fixpunkte sei 1)[4]. Dann besteht für die Anzahl L(f, X) der Fixpunkt von f die Identität

$$L(f, X) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{Tr}(f^*: H^i(X) \longrightarrow H^i(X)).$$

(iii) Eine andere Konsequenz ist die folgende. Ist $f: X \longrightarrow Y$ ein glatter Morphismus von Schemata endlichen Typs über k mit Y zusammenhängend, so ist die Dimension

$$\dim_K H^i(X_y),\ X_y := f^{-1}(y),\ y \in Y$$

unabhängig von der speziellen Wahl von y. Insbesondere bleibt die Dimension unverändert, wenn den Grundkörper k vergrößert.

(iv) Außerdem kann die Dimension der K-Vektorräum mit der der singulären Kohomologie vergleichen. Für X glatt über $\mathbb{C}$ gilt

$$\dim_K H^i(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X_h, \mathbb{C}),$$

wenn $X_h$ die durch X definierte komplexe Mannigfaltigkeit bezeichnet.

### 1.2.2 Konstruktionsidee für Weil-Kohomologien

Die wichtigsten Wege zur Konstruktion einer Weil-Kohomologie stammen von Grothendieck: die motivische Kohomologie, die kristalline Kohomologie und die $\ell$-adische Kohomologie.

In der ersten Variante würden sich die Weilschen Vermutungen aus den Standard-Vermutungen von Grothendieck ergeben (noch nicht bewiesen). Der Deligne angegebene Beweis der Weilschen Vermutungen benutzt die $\ell$-adische Kohomologie, die sich aus der Etal-Kohomologie $H_{et}$ wie folgt ergibt.

$$H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) := (\underset{r \longrightarrow \infty}{\overset{\lim}{\longleftarrow}} H^i_{et}(X, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell,\ \ell \text{ Primzahl} \neq \operatorname{char}(k).$$

Die Etal-Kohomologie spielt auch im Beweis der Fermatschen Vermutung eine zentrale Rolle. Den Beweis der Eigenschaften der $\ell$-adischen Kohomologie findet man bei M.

---

[4] Sei $\Gamma_f \subseteq X \times X$ der Graph von f und $\Delta \subseteq X \times X$ die Diagonale. Die Forderung bedeutet dann, daß sich $\Gamma_f$ und $\Delta$ in allen Punkten von $\Gamma_f \cap \Delta$ mit der Vielfachheit 1 schneiden.

Artin bzw. in SGA 4-7. Für eine zusammenfassende Darstellung der Argumente, siehe auch SGA $4\frac{1}{2}$ .

Eine Ableitung der Weilschen Vermutungen aus den Eigenschaften der $\ell$-adischen Kohomologie (mit Ausnahme der Riemann-Hypothese) findet man im Anhang C des Lehrbuchs von Hartshorme.

## 1.2 Die Unzulänglichkeiten der Garben-Kohomologie von Schemata

Die gewöhnliche Garben-Kohomologie hat nicht die benötigten Eigenschaften: für Varietäten über einem Körper k der Charakteristik p > 0 erhält man als Kohomologie Vektorräume über dem Körper k anstelle, wie benötigt solche über Körpern der Charakteristik 0. Eine Lefschetz-Fixpunkt-Formel würde Elemente von k vergleichen, könnte also keine Fixpunkt-Anzahlen liefern.

Außerdem kann man zeigen, daß algebraische Varietäten über Körpern positiver Charakteristik die falchen Betti-Zahlen besitzen (vgl. Mumford), sodaß der Vergleichssatz unmöglich für diese Kohomologie gelten kann. Ein Grund für diese Pathologien ist die Zariski-Topologie, die oftmals nicht ‘fein’ genug ist.

Es ist deshalb naheliegend, nach einer Alternative zur Zariski-Topologie zu suchen.

Diese Suche hat Grothendieck zu einer Verallgemeinerung des Topologie-Begriffs geführt. Die Verallgemeinerung ist dabei so gewählt worden, daß sie unseren Bedürfnissen möglichst nahe kommt: wir wollen eine Variante der Garben-Kohomologie finden, die bessere Eigenschaften hat. Um Garben zu definieren, braucht man vor allem den Begriff der Überdeckung. Faßt man einen topologischen Raum als Kategorie auf, deren Objekte die offenen Mengen von X sind, so sind Überdeckungen gerade Familien von Morphismen

$$U_i \longrightarrow U,\ i \in I, \qquad (1)$$

in der Kategorie X mit ein und demselbenm Target U, wobei die Vereinigung der Bilder dieser Morphismen ganz U ist. Die Gesamtheit aller Überdeckungen sollte eine wichtige Eigenschaft haben: aus Überdeckungen sollten durch Basis-Wechsel wieder Überdeckungen entstehen: für jeden Morphismus

$$V \longrightarrow U$$

in X ist mit (1) die Familie

$$U_i \cap V \longrightarrow V,\ i \in I, \qquad (1)$$

eine Überdeckung von V. Man beachte, in der Kategorie X ist der Durchschnitt zweier offenen Teilmengen von U gerade das Faserprodukt dieser Teilmengen über U,

$$U_i \cap V = U_i \times_U V.$$

Dies führt zum Begriff der Grothendieck-Topologie.

## 1.3 Grothendieck-Topologien und Garben

### 1.3.1 Prätopologien

Eine Grothendieck-Prätopologie T besteht aus einer Kategorie

$$\mathrm{Cat}\ T$$

und einer Menge

$$\mathrm{Cov}\ T$$

von Familien

$$\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\} \qquad (1)$$

von Morphismen von Cat T, welche Überdeckungen heißen, wobei für jede Überdeckung das Ziel der Morphismen dasselbe ist und die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für jeden Isomorphismus $\varphi$: V $\longrightarrow$ U von Cat T gilt $\{\varphi\} \in$ Cov(T).

(ii) Mit $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I} \in$ Cov(T) und $\{V_{ij} \xrightarrow{\varphi_{ij}} U_i\}_{j\in J_i} \in$ Cov(T) für jedes $i\in I$ ist auch die Familie $\{V_{ij} \longrightarrow U\}$ der Zusammensetzungen $\varphi_i \circ \varphi_{ji}$ , $i \in I$, $j \in J_i$ eine Überdeckung von T.

(iii) Ist $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von T und $\psi$: V $\longrightarrow$ U ein Morphismus von Cat T, so existieren die Faserprodukte $U_i\times_U V$ und die Familie $\{U_i\times_U V \longrightarrow V\}_{i\in I}$ ist eine Überdeckung von T.

**Bemerkung**

Im folgenden werden wir oft von einer Prätopologie sprechen und dabei eine Grothendieck-Prätopologie T meinen. Anstelle von

Cat T

werden wir für die T zugrundeliegende Kategorie einfach auch die Bezeichnung T verwenden.

### 1.3.2 Garben

Seien T eine Prätopologie und C eine Kategorie mit Produkten. Eine Prägarbe auf T mit Werten in C ist ein Funktor

$$F: T^{op} \longrightarrow C.$$

Die Prägarbe F heißt Garbe, wenn zusätzlich die folgende Bedingung erfüllt ist.

(S) Für jede Überdeckung $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$ von T ist das Diagramm

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} F(U_i\times_U U_j)$$

exakt. Der Pfeil rechts oben im Diagramm komme dabei von den Projektionen

$$U_i\times_U U_j \longrightarrow U_i$$

auf den ersten Faktor, und der Pfeil rechts unten von den Projektionen auf den zweiten Faktor. Mit Exaktheit des Diagramms ist gemeint, daß der linke Morphismus gerade der Differenzkern der beiden rechten Morphismen ist.

**Bemerkungen**

(i) Seien T ein Prätopologie, $R := \{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$ eine Überdeckungen von T und $S := \{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in J}$ eine Familie von Morphismen in C, welche R als Teilfamilie enthält, sagen wir

$$I \subseteq J.$$

Aus der Exaktheit des Diagramms

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} F(U_i \times_U U_j) \qquad (1)$$

ergibt sich dann die Exaktheit des entsprechenden Diagramms mit S anstelle von R,

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in J} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in J} F(U_i \times_U U_j) \qquad (2)$$

Ist nämlich s eine Familie aus der Mitte von (2), welches bei den beiden Morphismen rechts dasselbe Bild hat, so erhält man durch Projektion eine Familie aus der Mitte von (1), welches ebenfalls dasselbe Bild bei den beiden rechten Morphismen von (1) hat. Deshalb kommt s von einem Element von F(U). Mit (1) ist also auch (2) exakt.

(ii) Sei jetzt umgekehrt das Diagramm (2) zur Familie S exakt und R eine Teilfamilie. Wir nehmen zusätzlich an, daß sich jeder Morphismus der großen Familie S über einen der kleinen Familie R faktorisiert. Wir wollen uns davon überzeugen, daß dann mit (2) auch (1) exakt ist. Sei also

$$s = (s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F(U_i)$$

eine Familie, deren Bilder bei den beiden rechten Morphismen von (1) übereinstimmen. Jeder Morphismus $U_j \longrightarrow U$ von S soll sich nach Voraussetzung über einen Morphismus von R faktorisieren, also die Gestalt

$$U_j \longrightarrow U_i \longrightarrow U$$

besitzen. Wir fixieren für jedes j einen Morphismus $U_j \longrightarrow U_i$ (welcher im Fall $j\in I$ der identische Morphismus sei) und bezeichnen mit $s_j$ das Bild von $s_i$ bei $F(U_i) \longrightarrow F(U_j)$. Wir erhalten so eine Familie $(s_j)_{j\in J}$ aus der Mitte von (2). Man rechnet leicht nach, die beiden Bilder dieser Familie bei den rechten Morphismen von (2) sind gleich. Die Familie kommt also von einem Element von F(U). Dann kommt die Ausgangsfamilie s aber ebenfalls von einem Element von F(U).

(iii) Die obige Argumentation zeigt, daß man eine Prätopologie abändern kann, ohne daß sich die zugehörigen Garben ändern: verschiedene Prätopologien können dieselben Garben besitzen. Diese Mangel läßt sich dadurch beheben, daß man zu allen Überdeckungen einer gegebenen Prätopologie eine maximale Anzahl von Morphismen hinzufügt ohne daß sich die zugehörigen Garben ändern. Die so entstehenden Familien mit sehr vielen Morphismen heißen Siebe.

(iii) Seien C ein Kategorie und $S = \{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$ eine Familie von Morphismen von C mit demselben Ziel U. Die Familie S heißt Sieb(über U), wenn für jeden Morphismus $U_i \xrightarrow{\varphi_i} U$ von S und jeden Morphismus $V \longrightarrow U_i$ von C auch die Zusammensetzung $V \longrightarrow U$ zu S gehört.

(iv) Ist S ein Sieb über U und V ein Objekt von C, so bezeichne

$$S(V) \subseteq H_U(V) := \mathrm{Hom}_C(V, U)$$

die Menge der Morphismen von S mit der Quelle V. Die definierende Bedingung für Siebe besagt, dann für jeden Morphismus

$$f: W \longrightarrow V$$

die induzierte Abbildung

$$f_*: H_U(V) \longrightarrow H_U(W)$$

die Menge S(V) in die Menge S(W) abbildet,

$$f_*(S(V)) \subseteq f_*(S(W)).$$

Mit anderen Worten, durch $V \mapsto S(V)$ ist ein Teilfunktor des kontravarianten Hom-Funktors $H_U$ definiert. Ein Sieb S über U ist nichts anderes als ein Teilfunktor

$$S \subseteq H_U.$$

(v) Aus den Defintionen lesen wir direkt ab, daß es für jede Überdeckung

$$R = \{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I}$$

einer Prätopologie ein eindeutig bestimmtes Sieb $S := \{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in J}$ gibt, welches die Überdeckung R als Teilfamilie enthält: S besteht gerade aus allen Morphisem mit dem Ziel U, welche sich über einen Morphismus von R faktorisieren. Die so definierten Siebe werden sich gerade als minimale Siebe einer Topologie im unten definierten Sinne erweisen.

(vi) Seien X ein gewöhnlicher topologischer Raum (aufgefaßt als Kategorie), U eine offene Menge von X und $\underline{U} := \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von U. Das durch $\underline{U}$ definierte Sieb ist gerade die Familie aller offenen Mengen von X, die in einem der $U_i$ enthalten sind.

### 1.3.3 Topologien

Sei C eine (kleine) Kategorie. Eine Grothendieck-Topologie T auf C besteht aus einer Menge von Sieben

$$J(U)$$

für jedes Objekt U von C, welche überdeckende Siebe von T heißen, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für jedes Objekt U von C gehört das <u>maximale Sieb</u>,

$$\{\varphi \in Mor(C) \mid \varphi \text{ hat das Ziel } U\},$$

zu J(U).[5]

(ii) Für jedes überdeckende Sieb $R \in J(U)$ und jeden Morphismus $f: V \longrightarrow U$ von C ist das Sieb

$$f^*(R) := \{\alpha: W \longrightarrow V \mid W \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{f} U \in R\}$$

überdeckend: $f^*(R) \in J(V)$.[6]

---

[5] Seien X ein topologischer Raum (aufgefaßt als Kategorie) und U eine offene Menge von X. Dieses Axiom reflektiert gerade die Tatsache, daß U selbst eine Überdeckung von sich selbst ist.

[6] Sie $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung der offenen Menge U eines topologischen Raums und $V \subseteq U$ eine offene Teilmenge. Diese Axiom reflektiert die Tatsache, daß dannt $\{U_i \cap V\}$ eine offene Überdeckung von V ist.

(iii) Seien S ein Sieb über U und $R \in J(U)$ ein überdeckendes Sieb. Es gelte

$$f^*(S) \in J(V) \text{ für jeden Morphismus } f{:}V \longrightarrow U \text{ von } R.$$

Dann ist auch S ein überdeckendes Sieb, $S \in J(U)$.[7]

Eine kleine Kategorie, die mit einer Grothendieck-Topologie versehen ist, heißt Situs.

**Bemerkungen**

(i) Sei C eine Kategorie. Wir setzen

$$J_d(U) := \text{Menge aller Siebe über } U$$

für jedes U von C. Dann ist auf diese Weise eine Topologie von C definiert, die diskrete Topologie. Für jede andere Topologie J von C gilt

$$J \subseteq J_d \text{ (d.h. } J(U) \subseteq J_d(U) \text{ für jedes U)}$$

(ii) Sei C eine Kategorie. Wir setzen

$$J_t(U) := \{ \text{ maximales Sieb über U}\}.$$

Dann ist auf diese Weise eine Topologie von C definiert, die triviale Topologie. Jede andere Topologie von C enthält die triviale.

(iii) Aus den Axiomen liest man unmittelbar ab, daß für jede Familie $\{J_i\}_{i\in I}$ von Topologien auf einer Kategorie C der Durchschnitt diser Topologien,

$$J(U) := \bigcap_{i\in I} J(U_i)$$

wieder eine Topologie ist,

$$J := \bigcap_{i\in I} J_i = \inf_{i\in I} J_i$$

Jede Familie von Topologien besitzt ein Infimum.

(iv) Jede Familie $\{J_i\}_{i\in I}$ von Topologien besitzt ein Supremum

$$\bigcup_{i\in I} J_i = \sup_{i\in I} J_i ,$$

nämlich den Durchschnitt aller Topologien, die alle $J_i$ enthalten.

(v) Zu jeder Klasse $\mathcal{K}$ von Sieben gibt es eine kleinste Topologie, welche alle diese Siebe als überdeckende Siebe enthält, nämlich den Durchschnitt aller Topologien, die alle Siebe von $\mathcal{K}$ enthalten. Diese Topologie heißt die von $\mathcal{K}$ erzeugte Topologie.

### 1.3.4 Beispiel: die kanonische Topologie einer Kategorie

Sei C eine Kategorie mit Faserprodukten. Wir betrachten die Klasse aller Siebe

$$\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U \}_{i\in I}$$

von C mit der Eigenschaft, daß für jedes Objekt Z von C das Diagramm

$$\mathrm{Hom}(U, Z) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(U_i, Z) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \mathrm{Hom}(U_i \times_U U_j , Z). \qquad (1)$$

exakt ist (d.h. die linke Abbildung ist in Ens der Differenzkern der beiden rechten).

---

[7] Seien $\{X_j\}$ eine Überdeckung von U und $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von U. Für jedes i sei

$$\{X_j \cap U_i\}_j$$

eine offene Überdeckung von $U_i$. Dann ist $\{X_j\}$ auch eine offene Überdeckung von U. Das Axiom reflektiert die Tatsache, daß jede Vereinigung offener Menge offen ist.

Diese Klasse ist nicht leer. Zum Beispiel ist für jedes Objekt U von C das maximale Sieb

$$S_{max} = \{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$$

ein Element dieser Klasse: sei nämlich

$$\psi = \{U_i \xrightarrow{\psi_i} Z\}_{i\in I}$$

eine Familie aus dem Produkt in der Mitte von (1), deren Bilder bei den beiden Morphismen rechts gleich sind. Weil $S_{max}$ maximal ist, liegt der identische Morphismus

$$\varphi_i = \mathrm{id}: U_i = U \longrightarrow U \in S_{max} \text{ für ein i.}$$

im Sieb $S_{max}$. Es gilt dann $U_i \times_U U_j = U_j$ und die beiden Projektionen

$$U_j = U_i \times_U U_j \longrightarrow U_i = U \text{ und } U_j = U_i \times_U U_j \longrightarrow U_j$$

sind dann gerade gleich $p_1 = \varphi_j: U_j \longrightarrow U$ und $p_2 = \mathrm{id}: U_j \longrightarrow U_j$. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} \psi_j &= \psi_i \circ \varphi_i && \text{(wegen } \varphi_i = \mathrm{id}) \\ &= \psi_j \circ \varphi_j && \text{(weil die beiden Bilder von } \psi \text{ gleich sind).} \end{aligned}$$

Deshalb ist das Bild von $\psi_i \in \mathrm{Hom}(U, Z)$ bei der linken Abbildung von (1) gerade $\psi$.

Die von dieser Klasse erzeugte Topologie heißt <u>kanonische Topologie</u> von C.

**Bemerkungen**

(i) Nach Definition sind alle darstellbaren Funktoren Garben bezüglich der kanonischen Topologie von C.

(ii) Eine Familie $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$ von Morphismen aus C mit demselben Ziel, für welche das Diagramm (1) exakt ist, heißt <u>universell effektiv</u>. Man kann zeigen, die universell effektiven Familien bilden eine Prätopologie (vgl. M.Artin). Das hat zur Folge, daß die universell effektiven Siebe eine Topologie bilden. Die überdeckenden Siebe der kanonischen Topologie sind deshalb gerade die universell effektiven Siebe.

(iii) Der Begriff der Garbe und damit die kanonische Topologie läßt sich auch ohne die Annahme definieren, daß in der Kategorie C gewisse Faserprodukte existieren (vgl. Schubert: Kategorien, die Definitionen II.20.2.6 und II.20.4.5).

### 1.3.5 Beispiel: die kanonische Topologie der Kategorie Ens

Sei C = Ens die Kategorie der Mengen. Eine Familie von Abbildungen

$$\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$$

ist genau dann universell effektiv, wenn die Bilder der $\varphi_i$ die Menge U überdecken,

$$U = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Im}(\varphi_i).$$

Die Bedingung ist notwendig. Wenn sie nicht erfüllt ist, ist die linke Abbildung des Diagramms

$$\mathrm{Hom}(U, Z) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(U_i, Z) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \mathrm{Hom}(U_i \times_U U_j , Z). \qquad (1)$$

bereits für Z = U $\neq \emptyset$ nicht injektiv, d.h. links steht nicht der Differenzkern der beiden Abbildungen rechts. Die Bedingung ist hinreichend, denn zwei Abbildungen, die auf dem Durchschnitt ihrer Defintionsbereiche übereinstimmen, lassen sich zu einer Abbildung auf der Vereinigung der Defintionsbereiche fortsetzen.

Nach Konstruktion sind die darstellbaren mengenwertigen Funktoren Garben in der kanonischen Topologie. Es gilt aber auch die Umkehrung: sei

$$F: \mathrm{Ens}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

eine Garbe und U eine beliebige Menge. Wir schreiben U als Vereinigung von einelementigen Mengen,

$$U = \bigcup_{x\in U} \{x\}$$

und erhalten so eine universell effektive Familie. Weil F eine Garbe ist, ist das folgende Diagramm exakt.

$$F(U) \longrightarrow \prod_{x\in U} F(\{x\}) \rightrightarrows \prod_{x,y\in U} F(\{x\}\cap\{y\})$$

Wir fixieren eine einelementige Menge e und erhalten

$$F(U) = \text{Differenzkern von } \prod_{x\in U} F(\{x\}) \rightrightarrows \prod_{x,y\in U} F(\{x\}\cap\{y\})$$

$$\cong^{8} \text{Differenzkern von } \prod_{x\in U} \mathrm{Hom}(\{x\},F(e)) \rightrightarrows \prod_{x,y\in U} \mathrm{Hom}(\{x\}\cap\{y\},F(e))$$

Weil Hom (?, F(e)) eine Garbe ist, erhalten für jedes U eine Bijektion

$$F(U) \cong \mathrm{Hom}(U, F(e)).$$

Diese Bijektionen setzen sich zu einem funktoriellen Isomorphismus $F \cong H_{F(e)}$ zusammen. Garben sind also darastellbare Funktoren.

### 1.3.6 Die kanonische Topologie einer Gruppen-Operation

Seien G eine Gruppe und

$$C = G\text{-Sets}$$

die Kategorie der G-Mengen, d.h. die Objekte von C sind die Mengen M, welche mit einer (linken) Operation

$$G \times M \longrightarrow M, (g, m) \mapsto gm,$$

von G versehen sind. Die Morphismen von C sind die Abbildungen von Mengen,

$$f: M \longrightarrow M',$$

welche mit der Operation von G verträglich sind,

$$g{\bullet}f(m) = f(g{\bullet}m) \text{ für } g \in G \text{ und } m \in M.$$

---

[8] Für jede einelementige Menge {x} gibt es in Ens genau einen Morpismus e $\longrightarrow$ {x}, welcher ein Isomorphismus ist. Dieser induziert einen Isomorphismus F({x}) $\longrightarrow$ F(e). Wir erhalten so einen natürlichen Isomorphismus in der Kategorie der Mengen

$$F(\{x\}) \longrightarrow F(e) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ens}(\{x\}, F(e)).$$

Die Morphismen-Komposition ist die gewöhnliche Zusammensetzung von Abbildungen.

Wie im Fall der Kategorie Ens ergibt sich, daß die universell effektiven Familien gerade die Familien $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$ mit

$$U = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Im}(\varphi_i).$$

sind.[9] Die mengenwertigen Garben der kanonischen Topologie sind wieder darstellbare Funktoren (und umgekehrt). Genauer besteht für jede mengenwertige Garbe F ein funktorieller Isomorphismus

$$F(U) = \mathrm{Hom}_G(U, F(G)), \tag{1}$$

wobei hier F(G) als G-Menge mit der folgenden Operation angesehen wird. Für $g \in G$ ist die Abbildung

$$\mathrm{mult}_g: G \longrightarrow G,\ x \mapsto xg,$$

eine Abbildung von G-Mengen bezüglich der Multiplikation mit Elementen von G von links. Durch Anwenden des Funktors F erhalten wir eine Abbildung

$$F(\mathrm{mult}_g): F(G) \longrightarrow F(G).$$

Für $x \in F(G)$ setzen wir

$$g\bullet x := F(\mathrm{mult}_g)(x).$$

Für $g,h \in G$ erhalten wir

$$\begin{aligned} g(hx) &= F(\mathrm{mult}_g)(F(\mathrm{mult}_h)(x)) \\ &= (F(\mathrm{mult}_g)\circ F(\mathrm{mult}_h))(x) \\ &= F(\mathrm{mult}_h\circ \mathrm{mult}_g)(x) \qquad\qquad \text{(F ist kontravariant)} \\ &= F(\mathrm{mult}_{gh})(x) \\ &= (gh)x. \end{aligned}$$

Auf diese Weise bekommt also F(G) die Struktur einer G-Menge.

Zum Beweis von (1) zerlege man U in Orbits, sagen wir

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Die Faserprodukte $U_i \times_U U_j = U_i \cap U_j$ sind dann leer im Fall $i \neq j$. Weil F und $H_{F(G)}$ Garben sind, folgt

$$F(U) = \prod_{i\in I} F(U_i) \text{ und } H_{F(G)}(U) = \prod_{i\in I} H_{F(G)}(U_i)$$

Es reicht also, die Behauptung für den Fall zu beweisen, daß U aus nur einem Orbit besteht,

$$U = G/H$$

mit einer Untergruppe H von G.

---

[9] Man verwende im wesentlichen dieselben Argumente wie oben und beachte, daß

$$U - \bigcup_{i\in I} U_i$$

eine G-Menge ist, die man identisch auf sich selbst oder auf ein invariantes Element abbilden kann, das man zu Z hinzufügt.

Wir betrachten die Abbildung

$$\psi\text{:Hom}_G(G, F(G)) \longrightarrow F(G),\ \varphi \mapsto \varphi(e), \tag{2}$$

die jede G-Abbildung in deren Wert im neutralen Element abbildet. Die G-Abbildung $\varphi$ ist durch den Wert $\varphi(e)$ bereits eindeutig festgelegt, und dieser Wert kann beliebig vorgegeben werden. Die Abbildung (2) ist somit bijektiv.
Die natürliche Abbildung auf die die Faktormenge

$$\rho\text{: } G \longrightarrow G/H$$

ist surjektiv und eine G-Abbildung. Sie induziert deshalb eine injektive Abbildung

$$H_{F(G)}(\rho)\text{:Hom}_G(G/H, F(G)) \hookrightarrow \text{Hom}_G(G, F(G)),$$

und, weil F kontravariant ist, eine Abbilddung

$$F(\rho)\text{: } F(G/IH) \longrightarrow F(G).$$

Weil $\rho$ surjektiv ist, ist die einelementige Familie $\{\rho\}$ universell effektiv, also das Diagramm

$$F(G/H) \xrightarrow{F(\rho)} F(G) \rightrightarrows F(G\times_{G/H}G) \tag{3}$$

exakt. Insbesondere ist $F(\rho)$ injektiv. Wir erhalten so ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_G(G,F(G)) & \overset{\psi}{\underset{\cong}{\longrightarrow}} & F(G) \\ i\uparrow & & \uparrow j \\ \text{Hom}_G(G/H,F(G)) & & F(G/H) \end{array} \quad \text{mit } i = H_{F(G)}(\rho) \text{ und } j = F(\rho).$$

Zum Beweis der Behauptung (1) für $U = G/H$ reicht es zu zeigen, daß beim Isomoprhismus $\psi$ die Teilmenge Im(i) gerade der Teilmenge Im(j) entspricht, d.h.

$$\psi(\text{Im}(i)) = \text{Im}(j).$$

Die Menge Im(i) besteht gerade aus den G-Abbildungen, die sich über $\rho$ faktorisieren, d.h. auf den H-Nebenklassen von G konstant sind. Das Bild dieser Teilmenge bei $\psi$ besteht gerade aus den H-invarianten Elementen[10] von F(G), d.h.

$$\begin{aligned} \psi(\text{Im}(i)) &= \{x \in F(G) \mid h\bullet x = x \text{ für } h \in H\} \\ &= \{x \in F(G) \mid F(\text{mult}_h)(x) = x \text{ für } h \in H\} \end{aligned}$$

Beschreiben wir Im(j). Für $h \in H$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{mult}_h} & G \\ & \rho\searrow \quad \swarrow\rho & \\ & G/H & \end{array} \tag{4}$$

kommutativ. Damit ist auch

---

[10] Ist $\varphi$: $G \longrightarrow F(G)$ konstant auf den H-Nebenklassen, so gilt für $h\in H$

$$h\bullet\varphi(e) = \varphi(h\bullet e) = \varphi(h) = \varphi(e).$$

Ist umgekehrt $\varphi(e)$ invariant bezüglich der Operation von H, so gilt für $g\in G$ und $h\in H$

$$\varphi(g\bullet h) = g\bullet\varphi(h) = g\bullet\varphi(e) = \varphi(g),$$

d.h. $\varphi$ ist auf den H-Nebenklassen von G konstant.

$$\begin{tikzcd} F(G) \arrow[rr, "F(mult_h)"] & & F(G) \\ & F(G/H) \arrow[ul, "F(\rho)"] \arrow[ur, "F(\rho)"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ. Die Elemente aus dem Bild $j = F(\rho)$ sind also invariant bei den Abbildungen $F(mult_h)$ mit $h \in H$, d.h es gilt

$$Im(j) \subseteq \psi(Im(i)).$$

Wir haben noch zu zeigen, jedes Element der Menge

$$\psi(Im(i)) = \{x \in F(G) \mid F(mult_h)(x) = x \text{ für } h \in H\}$$

liegt in $Im(j) = Im(F(\rho))$. Sei also $x \in F(G)$ ein Element mit

$$F(mult_h)(x) = x \text{ für } h \in H.$$

Wegen der Exaktheit von (3) reicht es zu zeigen, die Bilder von x bei den beiden rechten Abbildungen von (3) sind gleich. Dazu schreiben wir das kommutative Diagramm (4) in der Gestalt

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "id"'] \arrow[dr, "mult_h"] & \\ G \arrow[dr, "\rho"'] & & G \arrow[dl, "\rho"] \\ & GH & \end{tikzcd}$$

Aus der Universalitätseigenschaft des Faserprodukts erhalten wir eine kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & & G \arrow[dll, "id"'] \arrow[d, "\alpha_h"] \arrow[drr, "mult_h"] & & \\ G & & G\times_{G/H}G \arrow[ll] \arrow[rr] & & G \\ & G \arrow[r, phantom] & GH & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, phantom] & \\ G \arrow[dr, "\rho"'] & & G \arrow[dl, "\rho"] \\ & GH & \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\alpha_h(g) = (g, gh)$ für $g \in G$.

Wir wenden den Funktor F an und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & F(G) & \\ F(G) \arrow[ur, "id"] \arrow[r, "p'"] & F(G\times_{G/H}G) \arrow[u, "F(\alpha_h)"] & F(G) \arrow[ul, "F(mult_h)"'] \arrow[l, "p''"'] \\ & F(GH) \arrow[ul, "F(\rho)"] \arrow[ur, "F(\rho)"'] & \end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$x = F(mult_h)(x) = F(\alpha_h)(p''(x))$$

$$x = id(x) = F(\alpha_h)(p'(x))$$

also

$$F(\alpha_h)(p'(x)) = F(\alpha_h)(p''(x)) \text{ für jedes } h \in H \qquad (5)$$

Nun unterscheiden sich die Koodinaten eines Elements von $G\times_{G/H}G$ um einen Faktor aus H. Die Abbildungen

$$\alpha_h: G \longrightarrow G\times_{G/H}G,\ g \mapsto (g, gh)$$

bilden eine universell effektive Familie von Morphismen von G-Mengen. Zu dieser Familie gehört ein exaktes Diagramm. Insbesondere ist die Abbildung

$$F(G\times_{G/H}G) \longrightarrow \prod_{h\in H} F(G),\ y \mapsto (F(\alpha_h)(z))_{h\in H}$$

injektiv. Mit (5) für gilt also

$$p'(x) = p''(x).$$

Die beiden Bilder von x bei den beiden rechten Abbildungen von (3) sind gleich, d.h. x liegt im Bild von $F(\rho) = j$.

**QED**.

**Bemerkungen**

(i) Dieselbe Argumentation wie oben zeigt, daß die abelschen Garben auf der Kategorie

G-Sets

bezüglich der kanonischen Topologie gerade die darstellbaren Funktoren sind, dh. die Funktoren die isomorph sind zu den Funktoren der Gestalt

$$F(U) = \mathrm{Hom}_G(U, A)$$

mit einer abelschen Gruppe A ( = F(G)) mit G-Operation, d.h. einem G-Modul[11] A. Die Kategorie

$$\mathrm{Sh}_{G\text{-Sets}}(Ab)$$

der Garben abelscher Gruppen auf G-Sets bezüglich der kanonischen Topologie ist somit äquivalent zur Kategorie G-Mod. Genauer, die Yondea-Einbettung

$$G\text{-Mod} \longrightarrow Ens,\ A \mapsto H_A$$

der Kategorie G-Mod in die Kategorie Ens induziert eine Äquivalenz von Kategorien,

$$G\text{-Mod} \longrightarrow \mathrm{Sh}_{G\text{-Sets}}(Ab),\ A \mapsto H_A,$$

mit der Quasi-Inversen

$$\mathrm{Sh}_{G\text{-Sets}}(Ab) \longrightarrow G\text{-Mod},\ F \mapsto F(G).$$

(ii) Die beiden Kategorien sind, wenn man von Isomorphismen absieht, gleich. Die Konstruktion der abgeleiteten Funktoren geschieht in der selben Weise: die Quasi-Äquivalenzen überführen injektive in injektive Objekte, exakte Sequenzen in exakte Sequenzen und kommutieren mit dem Übergang zu abgeleiteten Funktoren. Das gilt insbesondere für die Gruppen-Kohomologie

$$H^i(G, A),$$

d.h. für die abgeleiteten Funktoren des linksexakten Funktors

$$H^0(G, ?){:}G\text{-Mod} \longrightarrow Ab,\ A \mapsto A^G := \{x \in A \mid gx = x \text{ für alle } g \in G\} \qquad (7)$$

Sei e der G-Modul mit genau einem Element, auf dem G trivial operiert. Dann gilt

$$A^G = \mathrm{Hom}_{G\text{-Mod}}(e, A),$$

d.h.

---

[11] Abelsche Gruppen A mit G-Operation sind nichts anderes als Moduln über dem Gruppen-Ring $\mathbb{Z}[G]$. Statt von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln spricht man auch von G-Moduln und schreibt

G-Mod

anstelle von $\mathbb{Z}[G]$-Mod für die Kategorie der G-Moduln.

$$H^i(G, A) = \mathrm{Ext}_i^{\mathbb{Z}[G]}(e,A).$$

(iii) Sei F eine abelsche Garbe auf G-Sets. Die zugehörige abelsche Gruppe ist gerade F(G) und deren 0-te Kohomologie die Gruppe

$$F(G)^G = \mathrm{Hom}_G(e, F(G)).$$

Die gewöhnlichen Gruppen-Kohomologie-Funktoren lassen sich also interpretieren, als abgeleitete Funktoren zum linksexakten Funktor

$$Sh_{G\text{-Sets}}(Ab) \longrightarrow Ab,\ F \mapsto F(G)^G,$$

d.h.

$$H^i(G, F) = H^i(G, F(G)) = \mathrm{Ext}_i^{\mathbb{Z}[G]}(e,F(G)).$$

### 1.3.7 Proendliche Gruppen

Sei

$$G = \varprojlim_{H\subseteq G} G/H$$

eine proendliche Gruppe.[12] Weiter seien

$$\mathrm{Cat}(T_G)$$

die Kategorie der endlichen Mengen mit einer stegigen G-Operation[13] und

$$\mathrm{Cov}(T_G)$$

die Menge der endlichen Familien $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$ mit $\bigcup_{i\in I} \mathrm{Im}(\varphi_i) = U$. Man kann dann wieder zeigen, daß $T_G$ die Struktur einer Prätopologie besitzt und die abelschen Garben auf $T_G$ äquivalent ist zur Kategorie der stetigen G-Moduln. Auf diese Weise erhält man jedoch nicht die kanonische Topologie. Nicht alle Garben sind darstellbar. Um darastellbar zu sein, müssen sie einer Endlichkeitsbedingung genügen. Die abgeleiteten Funktoren zum linksexakten Funktor

$$Sh_{T_G}(Ab) \longrightarrow Ab,\ F \mapsto F(e),$$

definieren gerade die Tate-Kohomologie.

### 1.3.8 Etal-Topologie

Vereinbarung

Im folgenden nehmen wir an, daß alle kommutativen Ringe noethersch und alle Schemata lokal noethersch sind.

Sei k eine Körper mit der algebraischen Abschließung $\bar{k}$. Eine k-Algebra A heißt separabel, wenn das Jacobson-Radikal[14] von $\bar{A} := A\otimes_k \bar{k}$ gleich Null ist.

---

[12] d.h. G ist inverser Limes von endlichen Gruppen. Eine solche Gruppe G besitzt in natürlicher Weise eine Topologie und läßt sich dann als inverser Limes über die abgeschlossenen Normalteiler $H \subseteq G$ mit endlichem Index schreiben. Die Galois-Gruppe einer unendlichen Galois-Erweiterungen ist ein Beispiel für eine solche Gruppe. Deren proendliche Struktur kommt von der Tatsache, daß jedes Element einer algebraischen Körpererweiteurng bereits in einer endlchen Teilerweiterung liegt.

[13] Die Stabilisatoren der Elemente dieser Mengen sollen Untergruppen mit endlichem Index sein.

Seien

$$f: Y \longrightarrow X$$

ein Morphismus von Schemata, $y \in Y$ ein Punkt und

$$x := f(y).$$

Dann heißt f separabel im Punkt y, wenn der Restekörper $\kappa(y)$ von y als Algebra über dem Restekörper $\kappa(x)$ separabel ist. Der Morphismus f heißt unverzweigt in y, wenn der lokale Ring

$$\mathcal{O}_{f^{-1}(x),y} = \mathcal{O}_{Y,y}/m_{X,x}\mathcal{O}_{Y,y}$$

der Faser von f durch y ein Körper ist.[15] Der Morphismus f heißt flach im Punkt y, wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_{Y,y}$ von Y in y flach ist als Modul über dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ von X im Bildpunkt x. Ein Morphismus $f: Y \longrightarrow X$ lokal endlichen Typs heißt etale im Punkt $y \in Y$, wenn er separabel, unverzweigt und flach ist in y.

Ein Morphismus von Schemata $f: Y \longrightarrow X$ heißt separabel, unverzweigt, flach bzw. etal, wenn er in allen Punkten separabel, unverzweigt, flach bzw. etale ist. Etale-Morphismen, d.h. Morphismen, die etal sind, sind damit insbesondere lokal vom endlichen Typ.

Sei U ein Schema. Eine Familie $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$ von Etal-Morphismen $\varphi_i$ heißt Etal-Überdeckung von U, wenn für die zugrundeliegenden stetigen Abbildungen $\varphi_i$ gilt

$$\bigcup_{i\in I} \varphi_i(U_i) = U.$$

Die Familie heißt Etal-Sieb, wenn sie außerdem ein Sieb ist in der Kategorie

**Sch**

der (lokal noetherschen) Schemata. Aus den nachfolgend angegebenen Eigenschaften von Etal-Morphismen ergibt sich, daß die Etal-Überdeckungen eine Prätopologie und die Etal-Siebe eine Topologie von **Sch** bilden. Erstere heißt Etal-Prätopologie, letztere Etal-Topologie.

**Beispiel**.

Eine nicht-konstante holomorphe Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ hat lokal in geeigneten Koordinatensystemen die Gestalt

$$z \mapsto z^k. \qquad (1)$$

Bezeichne $\mathbb{C}\langle z\rangle$ den Ring der in einer Umgebung des Ursprungs von $\mathbb{C}$ konvergenten Potenzreihen, d.h. den Halm im Ursprung der Garbe $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}}$ der holomorphen Funktionen auf der komplexen Ebene $\mathbb{C}$. Man kann sich $\mathbb{C}\langle z\rangle$ als eine Art Vervollständigung des lokalen Rings $\mathbb{C}[z]_{(z)}$ von Spec $\mathbb{C}[z]$ vorstellen,

$$\mathbb{C}[z]_{(z)} \subseteq \mathbb{C}\langle z\rangle \subseteq \mathbb{C}[[z]].$$

Der Ring $\mathbb{C}\langle z\rangle$ ist ein lokaler Ring, dessen maximales Ideal aus den Potenzreihen mit dem Absolutglied Null besteht, d.h. aus den Vielfachen von z,

---

[14] d.h. der Durchschnitt der maximalen Ideale.

[15] Im Buch von Milne wird zusätzlich gefordert, daß der Morphismus separabel und lokal vom endlichen Typ ist, d.h. für jeden Punkt $x\in X$ gibt es eine affine Umgebung U := Spec A derart, daß jeder Punkt $y \in f^{-1}(U)$ eine affine Umgebung V := Spec B mit einer endlich erzeugten A-Algebra B besitzt.

$$(z) = z\mathbb{C}\langle z\rangle.$$

Die lokalen Ringe einer Riemannschen Fläche bezüglich der Garbe der holomorphen Funktionen sind dann sämlich isomorph zu $\mathbb{C}\langle z\rangle$. Die auf den lokalen Ringen durch (1) induzierte Abbildung hat die Gestalt

$$f^*{:}\,\mathbb{C}\langle z\rangle \longrightarrow \mathbb{C}\langle z\rangle,\ p(z) \mapsto f^*(p) = p(z^k).$$

Insbesondere gilt für den lokalen Ring der Faser durch einen gegebenen Punkt

$$\hat{\mathcal{O}}_{f^{-1}(x),y} = \mathbb{C}\langle z\rangle/f^*(z)\mathbb{C}\langle z\rangle = \mathbb{C}\langle z\rangle/z^k\mathbb{C}\langle z\rangle$$

Dies ist genau dann ein Körper, wenn k = 1 gilt, d.h. wenn f im betrachteten Punkt den Verzweigungsindex k = 1 besitzt (und ein lokaler Isomorphismus ist).

Lokale Isomorphismen sind natürlich Etal-Morphismen. Die Umkehrung ist im allgemeinen nicht richtig.

Für projektive Schemata über $\mathbb{C}$ ist die Forderung, ein Etal-Morphismus zu sein, jedoch äquivalent zur Forderung, das die induzierte holomorphe Abbildung der zugehörigen komplexen Räume ein lokaler Isomorphismus ist. Das hängt damit zusammen, daß für Etal-Morphismen $f{:}X \longrightarrow Y$ über $\mathbb{C}$ die lokalen Homomorphismen

$$\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \tag{2}$$

Homomorphismen von $\mathbb{C}$-Algebren sind, deren Restekörper in abgeschlossenen Punkten x isomorph zu $\mathbb{C}$ sind. Weil $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, induzieren diese lokalen Homomorphismen Isomorphismen auf den Restekörpern[16]

$$\mathcal{O}_{Y,f(x)}/m_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/m_{Y,f(x)}\mathcal{O}_{X,x}. \tag{3}$$

Weil f flach ist, ist (2) injektiv, d.h. wir können $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ als Teilring von $\mathcal{O}_{X,x}$ ansehen. Aus der Surjektivität von (3) folgt dann

$$\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{Y,f(x)} + m\bullet\mathcal{O}_{X,x} \text{ mit } m := m_{Y,f(x)}.$$

Indem wir diese Identität wiederholt in sich einsetzen, erhalten wir

$$\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{Y,f(x)} + m^{\ell}\bullet\mathcal{O}_{X,x} \text{ für } \ell = 1,2, \ldots$$

Betrachtet man anstelle der Keime regulärer Funktionen die Keime holomorpher Funktioen auf den zugehörigen komplexen Räumen, so erhält man für die zugehöriengen Ringe konvergenter Potenzreihen die analoge Relation, sagen wir[17]

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} = \hat{\mathcal{O}}_{Y,f(x)} + m^{\ell}\bullet\hat{\mathcal{O}}_{X,x},$$

wobei die Potenzreihen des zweiten Summanden rechts frühestens im Grad $\ell$ beginnen (alle Glieder kleineren Grades sind Null). Das bedeutet, für jede Potenzreihe r links gibt es eine Folge von Potenzreihen $r_n$ aus $\hat{\mathcal{O}}_{Y,f(x)}$ derart, daß r und $r_n$ bis zum Grad n dieselben Glieder haben. Das bedeutet aber, es gilt[18]

---

[16] Rechts steht ein Körper, weil f unverzweigt sein soll, d.h. rechts steht $\kappa(x)$, d.h. eine endliche separable Körpererweiterung von $\kappa(y)$.

[17] Jede konvergente Potenzreihe, d.h jedes Element von $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$, läßt sich durch eine Folge von Elementen aus $\mathcal{O}_{X,x}$ approximieren.

[18] Für die lokalen Ringe komplexer Räume gilt eine starkere Variante des Nakayama-Lemmas, weil die die lokalen Ringe eine Vollständigkeitseigenschaft haben. Für Details, siehe Kurke, Pfister, Roczen:

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} = \hat{\mathcal{O}}_{Y,f(x)}.$$

Mit anderen Worten, die durch f induzierte holomorphe Abbildung besitzt lokal in f(x) eine holomorphe Umkehrung. Man könnte auch sagen, f besitzt eine Umkehrung, diese muß jedoch nicht mehr lokal durch Quotienten von Polynome definierbar sein.

**Bemerkkungen**

(i) Charakterisierung der separablen Algebren. Seien k ein Körper mit der algebraischen Abschließung $\bar{k}$ und A eine k-Algebra, die als k-Vektorraum eine endliche Dimension besitzt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
   (a) A ist separabel übert k.
   (b) $\bar{A} := A\otimes_k \bar{k}$ ist als $\bar{k}$-Algebra isomorph zu einem direkten Produkt von Exemplaren von $\bar{k}$.
   (c) A ist als k-Algebra isomorph zu einem direkten Produkt separabler Körper-Erweiterungen von k.
   (d) Die Spur[19] von A über k definiert eine perfekte Paarung

$$A\times A \longrightarrow k,\ (a', a'') \mapsto Tr(a'a'')$$

   (e) Die Diskriminante[20] jeder k-Vektorraumbasis von A/k ist ungleich Null.

(ii) Charakterisierung der separablen unverzweigten Morphismen lokal endlichen Typs. Sei $f: Y \longrightarrow X$ ein Morphismus von Schemata lokal endlichen Typs. Dann sind folgende Aussagen äquivlent.
   (a) f ist separabel und unverzweigt.
   (b) Für jeden Punkt $x \in X$ ist die Faser $Y_x \longrightarrow \text{Spek}\ \kappa(x)$ separabel und unverzweigt.
   (c) Für jeden Morphismus $\text{Spec}\ k \longrightarrow X$ mit einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist der Morphismus $Y\times_X \text{Spec}\ k \longrightarrow \text{Spec}\ k$ separabel und unverzweigt.
   Mit anderen Worten, die geometrischen Fasern von f sind separabel und unverzweigt.

---

Henselsche Ringe, Abschnitt 2.1 (trotz der zahlreichen Fehler in diesem Buch gestattet die kompakte Darstellung einen schnellen Einblick in die Theorie Henselschen Ringe).

[19] Sei $\omega_1,...,\omega_n$ eine k-Vektorraumbasis von A über k. Die Produkte dieser Basiselemente mit einem Element $\alpha\in A$ sind dann k-Linearkombinationen dieser Elemente, sagen wir

$$\alpha\omega_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\alpha)\omega_j$$

Die Determinante

$$\chi_\alpha(T) = \det\,(T\bullet\delta_{ij} - c_{ij}(\alpha))$$

ist dann unabhängig von der Wahl der speziellen Basis und heißt charakteristisches Polynom von $\alpha$. Das Negative des Koeffizienten von $T^{n-1}$ heißt Spur von $\alpha$ und wird mit $Tr(\alpha)$ bezeichnet, vgl. Cassel & Fröhlich: Algebraic number theory, Appendix II A.

[20] Sei $\omega_1,...,\omega_n$ eine k-Vektorraumbasis von A über k. Die Diskriminante von A bezüglich dieser Basis ist dann definiert als die Determinante

$$\det\,(Tr(\omega_i,\omega_j))$$

vgl. Cassels und Fröhlich: Algebraic number theory, Proposition I.3.4 (iii).

(d) Für jeden Punkt $x \in X$ besitzt die Faser $Y_x := f^{-1}(x)$ eine offene Überdeckung durch Spektren separabler $\kappa(x)$-Algebren von endlicher $\kappa(x)$-Vektorraum-Dimension.

(e) Für jeden Punkt $x \in X$ ist die Faser $Y_x := f^{-1}(x)$ eine disjunkte Vereinigung $\vee_{i\in I}$ Spec $k_i$ mit endliche separablen Erweiterungskörpern $k_i$ von $\kappa(x)$.

(f) Die Garbe $\Omega_{Y/X}$ der relativen 1-Formen ist trivial (gleich 0).

(g) Der Diagonal-Morphismus $\Delta = \Delta_{Y/X}$: $Y \longrightarrow Y\times_X Y$ ist eine offene Einbettung.

(Ist f ein Morphimus endlichen Typs, so ist in (d) die Fase $Y_x$ selbst bereits das Spektrum einer separablen $\kappa(x)$-Algebra von endlicher Vektorraum-Dimension und in (e) ist die disjunkte Vereinigung endlich. Insbesondere ist Y quasi-endlich, d.h. hat endliche Fasern).

(iii) Die Fasern von separablen und unverzweigten Morphismen sind 0-dimensional.

(iv) (a) Die Zusammensetzung von zwei Etal-Morphismen ist ein Etal-Morphismus.
(b) Aus einem Etal-Morphismus entsteht durch Basiswechsel mit einem beliebigen Morphismus ein Etal-Morphismus.
Insbesondere bilden die Etal-Überdeckungen der Objekte von Sch eine Prätopologie (und damit die Etal-Siebe eine Topologie) von **Sch**.

(v) Seien $f: X \longrightarrow S$ und $g: Y \longrightarrow X$ Morphismen von Schemata mit fg etal und f separabel und unverzweigt. Dann ist g etal.

**Beweis**. Zu (i). Siehe Milne: Etal-Cohomology, Proposition I.3.1. Der Beweis benutzt die Eigenschaften Artinscher Ringe und den Chinesischen Restesatzt.
Zu (ii). Siehe Milne: Etal-Cohomology, Proposition I,3.2. und I, 3.5. Die Äquivalenz der Eigenschaften von (a) und (b) ergibt sich direkt aus der Definition von separabel und unverzweigt. Die von (c) - (e) sind im wesentlichen direkte Übersetzungen von ( Bemerkung (i) (a) - (c) in eine etwas geometrischere Sprache.

Zu (ii) (f) $\Leftrightarrow$ (g).

Wir betrachten einen Punkt $y \in Y$, eine affine Umgebung

$$U := \text{Spec } A \text{ von } f(y) \in X$$

und eine affine Umgebung

$$V := \text{Spec } B \text{ von } y \in f^{-1}(U) \subseteq Y.$$

Weil f lokal vom endlichen Typ ist, können wir annehmen, daß B eine endlich erzeugte Algebra über A ist. Mit A ist somit auch $B\otimes_A B$ noethersch (vgl. die Vereinbarung am Anfang von 1.3.8 ).

Die Einschränkung von $\Delta$ auf V ist dann gerade die Zusammensetzung von

$$\Delta' = \Delta_{V/U}: V \longrightarrow V\times_U V$$

mit der offenen Einbettung $V\times_U V \longrightarrow Y\times_X Y$. Es reicht deshalb, den Fall

$$X = \text{Spec } A,\ Y = \text{Spec } B$$

zu betrachten, wobei f induziert wird durch einen Homomorphismus

$$h: A \longrightarrow B$$

von Ringen mit 1. Der Diagonal-Morphismus $\Delta$ kommt dann vom surjektiven Homomorphismus

$$B\otimes_A B \longrightarrow B,\ b\otimes b' \mapsto bb'.$$

Der Morphismus $\Delta$ ist eine abgeschlossene Einbettung, und Y als abgeschlossenes Teilschema von $Y\times_X Y$ ist durch das Ideal

$$I := \mathrm{Ker}(B\otimes_A B \longrightarrow B).$$

definiert. Der B-Modul $I/I^2$ definiert auf Spec B = Y die kohärente Garbe

$$(I/I^2)^{\sim} = \Omega_{Y/X}.$$

Deshalb gilt

$$(f) \Leftrightarrow \Omega_{Y/X} = 0 \Leftrightarrow I/I^2 = 0 \Leftrightarrow (I/I^2)_z = 0 \text{ für } z \in Y\times_X Y$$

Nun ist I als Modul über $B\otimes_A B$ endlich erzeugt.[21] Für jeden Punkt

$$z \in Y \subseteq Y\times_X Y = \mathrm{Spec}\ B\otimes_A B$$

gilt deshalb nach Nakayame

$$I_z/(I_z)^2 = (I/I^2)_z = 0 \Leftrightarrow I_z = 0.$$

Da der Träger des Moduls $I/I^2$ ganz im abgeschlossenen Teilschema Y liegt[22], folgt

$$(f) \Leftrightarrow (I/I^2)_z = 0 \text{ für } z \in Y\times_X Y \Leftrightarrow (I/I^2)_z = 0 \text{ für } z \in Y \Leftrightarrow I_z = 0 \text{ für } z \in Y.$$

Die Bedingung $I_z = 0$ für ein $z \in Y$ bedeutet, der Kern der natürlichen Surjektion

$$B\otimes_A B \longrightarrow B$$

ist Null in einer Umgebung von z, d.h. $\Delta: Y \longrightarrow Y\times_X Y$ ist in einer Umgebung von $z \in Y$ ein lokaler Isomorphismus, also insbesondere dort auch eine offene Einbettung. Bedingung (f) bedeutet, daß dies für alle $z \in Y$ der Fall ist, d.h. (f) ist äquivalent zu (g).

<u>Zu (ii) (a) $\Rightarrow$ (f)</u>. Zum Beweis von (f) reicht es zu zeigen, daß die Halme von $\Omega_{Y/X}$ in allen Punkten $y \in Y$ gleich Null sind. Weil $\Omega_{Y/X}$ als $\mathcal{O}_Y$-Modul kohärent ist, reicht es nach dem Nakayama-Lemma zu zeigen,

$$\Omega_{Y/X,y} / m_{Y,y}\, \Omega_{Y/X,y} = 0 \text{ für jeden Punkt } y \in Y.$$

Nun ist mit x = f(y), weil f unverzweigt ist,

$$\begin{aligned}\Omega_{Y/X,y} / m_{Y,y}\, \Omega_{Y/X,y} &= \Omega_{Y/X,y} / m_{X,x}\, \Omega_{Y/X,y} \\ &= \Omega_{Y/X,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x) \\ &= \varphi^*(\Omega_{Y/X})_y\end{aligned}$$

---

[21] I ist ein Ideal des noetherschen Rings $B\otimes_A B$.

[22] Für $z \in Y\times_X Y - Y$ ist $I_z = \mathcal{O}_{X\times_X Y,z} = I_z^2$, also $(I/I^2)_z = 0$.

gerade das inverse Bild von $\Omega_{Y/X}$ entlang der Einbettung[23]

$$\varphi\colon \mathrm{Spec}\ \kappa(y) \longrightarrow \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathrm{Spec}\ B = Y,$$

von $\{y\}$ in Y, d.h. es it

$$\Omega_{Y/X,y} / m_{Y,y}\, \Omega_{Y/X,y} = \Omega_{f^{-1}(x)/\kappa(x)}$$

(man wende Hartshorne, II.8.10, auf das Basiswechsel-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \uparrow & & \uparrow\varphi \\ f^{-1}(x) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\ \kappa(x) \end{array}$$

an). Weil f ein Etal-Morphismus ist, folgt

$$\Omega_{Y/X,y} / m_{Y,y}\, \Omega_{Y/X,y} = \Omega_{\kappa(y)/\kappa(x)}\,,$$

und $\kappa(y)/\kappa(x)$ ist eine separable Körper-Erweiterung. Nach Matsumura: Commutative algebra, (27.B) Theorem 59 steht rechts die Null.

Zu (ii) (f) $\Rightarrow$ (a). Nach (c) reicht es zu zeigen, für jeden Morphismus der Gestalt

$$\varphi\colon \mathrm{Spec}\ k \longrightarrow X$$

mit k algebraisch abgeschlossen entsteht aus f: Y $\longrightarrow$ X ein separabler und unverzweigter Morphismus. Weil Bedingung (f) bei Basiswechsel erhalten bleibt (nach der gerade verwendeten Aussage von Hartshorne, II.8.10), können wir annehmen, daß f selbst bereits die Gestalt

$$f\colon Y \longrightarrow \mathrm{Spec}\ k$$

hat mit k algebraisch abgeschlossen. Sei $y \in Y$ ein Punkt. Wir haben zu zeigen, der lokale Ring $\mathcal{O}_{Y,y}$ ist separabel und unverzweigt über k. Wir betrachten zunächst den Fall,

y abgeschlossen.

Weil k algebraisch abgeschlossen ist, ist die algebraische Körpererweiterung k(y)/k trivial. Die Zusammensetzung der natürliche Einbettung $\{y\}\hookrightarrow Y$, genauer, des natürlichen Morphismus

$$\mathrm{Spec}\ \kappa(y) \xrightarrow{i} Y,$$

mit f ist ein Isomorphismus. Sei j: Spec(k) $\longrightarrow$ Spec $\kappa(y)$ das Inverse dieser Zusammensetzung. Dann gilt $j\circ f\circ i = \mathrm{id}$ und $f\circ i\circ j = \mathrm{id}$. Mit

$$g = i\circ j\colon \mathrm{Spec}\ k \longrightarrow Y$$

gilt $f\circ g = \mathrm{id}$, d.h. g ist ein Schnitt von f, und das Diagramm

---

[23] Ist h: A $\longrightarrow$ B ein Homomorphismus von Ringen mit 1, und $\varphi$: Spec B $\longrightarrow$ Spec A der zugehörige Morphismus affiner Schemata, so gilt für jede kohärente Garbe $F = \widetilde{M}$ auf Spec A,

$$\varphi^*(F) = (M\otimes_A B)^{\sim}$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g\circ f} & Y \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{f} & \mathrm{Spec}(k) \end{array}$$

ist kommutativ. Auf Grund der Universalitätseigenschaft des Faserprodukts gibt es einem Morphismus

$$(gf, id): Y \longrightarrow Y\times_k Y$$

dessen Zusammensetungen mit den beiden Projektionen gleich gf bzw. id ist, und der durch diese beiden Zusammensetzungen eindeutig festgelegt ist. Die Zusammensetzungen von

$$(gf,id)\circ g: \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow Y \longrightarrow Y\times_k Y$$

mit den beiden Projektionen sind damit $gf\circ g = g$ bzw. $id\circ g = g$. Dasselbe gilt auch für die Zusammensetzung von

$$\Delta\circ g: \mathrm{Spec\ Spec}(k) \longrightarrow Y \longrightarrow Y\times_k Y$$

mit den beiden Projektionen. Deshalb ist

$$(gf,id)\circ g = \Delta\circ g,$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Delta} & Y\times_k Y \\ {\scriptstyle g}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (gf;1)} \\ \mathrm{Spec}(k) & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \tag{4}$$

ist kommutativ. Das Diagramm ist sogar kartesisch: für jedes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Delta} & Y\times_k Y \\ {\scriptstyle u}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (gf;1)} \\ Z & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

erhält man für die Zusammensetzungen mit den beiden Projektionen $p_i: Y\times_k Y \longrightarrow Y$:

$$u = p_1\circ\Delta\circ u = p_1\circ(gf,1)\circ v = gfv$$

$$u = p_2\circ\Delta\circ u = p_2\circ(gf,1)\circ v = v$$

d.h.

$$\begin{aligned} u &= v \\ u &= gfu \\ v &= gfv \end{aligned}$$

Mit anderen Worten das letzte Viereck entsteht aus dem Viereck (4) durch Zusammensetzen mit $fu: Z \longrightarrow Y \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$. Also ist (4) tatsächlich kartesisch. Nach Voraussetzung gilt (f), also auch (g), d.h. $\Delta$ ist eine offene Einbettung. Weil (4) kartesisch ist, ist dann aber auch der durch Basiswechsel aus $\Delta$ entstehende Morphismus g eine offene Einbettung, d.h. es gibt eine nicht-leere affine offene Teilmenge $U = \mathrm{Spec}\ A \subseteq Y$ und eine nicht-leere offene Hauptmenge $D(\alpha)$ von U mit

$$D(\alpha) \subseteq \{y\} \subseteq U$$

Weil $\{y\}$ einelementig ist gilt $D(\alpha) = \{y\}$, und $g: \mathrm{Spec}\ k \longrightarrow Y$ hat lokal die Gestalt

$$g: \mathrm{Spec}\ k = \mathrm{Spec}\ A_\alpha \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A,$$

d.h. wird induziert von einem natürlichen Homomorphismus

$$A \longrightarrow A_\alpha = k$$

in den Quotientenring. Weil das Bild von g gleich {y} ist, faktorisiert sich dieser Homomorphismus über den lokalen Ring von Y in y[24],

$$A \longrightarrow A_y = \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow A_\alpha = k.$$

Wegen $D(\alpha) = \{y\}$ ist $\alpha \notin y$, d.h. $\alpha$ ist eine Einheit in $A_y$, und es gilt

$$\begin{aligned} k &= A_\alpha \\ &= (A_y)_\alpha && \text{(alle Einheiten von } A_y \text{ sind Einheiten von } A_\alpha) \\ &= A_y && \text{(wegen } \alpha \notin y). \\ &= \mathcal{O}_{Y,y}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathcal{O}_{Y,y}$ separabel und unverzweigt über k.

Sei jetzt $y \in Y$ nicht notwendig abgeschlossen. Dann enthält die Abschließung von {y} einen abgeschlossenen Punkt $y' \in Y$. Im Fall y' = y ist nichts zu beweisen. Sei also y' von y verschieden, also

$$y' \neq y.$$

Wie wir gerade gesehen haben ist {y'} nicht nur abgeschlossen in Y sonderen auch offen, d.h. Y - {y'} ist abgeschlossen und enthält den Punkt y. Dann liegt aber die Abschließung von {y} ganz in Y - {y'}, was nicht möglich ist nach Wahl von y'. Wir haben gezeigt, der Fall daß y nicht abgeschlossen ist, tritt nicht ein: alle Punkte von Y sind abgeschlossen und dim Y = 0.

Zu (iii). Die Aussage ergibt sich aus dem letzten Teil des Beweises von Aussage (ii).

Zu (iv). Aussage (a) ergibt sich direkt aus den Definitionen. Aussage (b) folgt aus der Charakterisierung (ii)(b) der separablen und unverzweigten Morphismen durch deren geometrische Fasern, denn die geometrischen Fasern eines Morphismus, der durch Basiswechsel entsteht, sind auch geometrische Fasern des Ausgangsmorphismus. Wir benutzen hier die Tatsache, daß die Eigenschaften, flach zu sein bzw. lokal vom endlichen Typ zu sein, bei Basiswechsel erhalten bleibt.

Zu (v). Betrachten wir die zur Komposition der Morphismen

$$g: Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} S$$

gehörige exakte Sequenz der Garben regulärer Differentialformen

$$f^*\Omega_{X/S} \longrightarrow \Omega_{Y/S} \longrightarrow \Omega_{Y/X} \longrightarrow 0$$

(vgl. Hartshorne, II.8.11). Weil fg etal, also separabel und unverzweigt ist, gilt

$$\Omega_{Y/S} = 0,$$

also auch

$$\Omega_{Y/X} = 0.$$

Also ist g separabel und unverzweigt. Weil alle Morphismen nach Vereinbarung lokal vom endlichen Typ sind, haben wir nur noch die Flachheit von g zu beweisen. Nach Voraussetzung ist für jeden Punkt $y \in Y$ die Komposision lokaler Homomorphismen

$$\mathcal{O}_{S,fg(y)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,g(y)} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$$

[24] Der Morphismus g induziert einen lokalen Homomorphismus der lokalen Ringe in (0) bzw. y.

flach. Auf Grund der Voraussetzungen und des bisherigen Beweises sich beide Homomorphismen unverzeigt. Wir haben zu zeigen, der rechte Homomorphismus ist flach.Es reicht, die folgende Aussage zu beweisen.[25]

**Lemma**

Sei h: (A, m) $\longrightarrow$ (B,n) ein unverzweigter Homomorphismus lokaler Ringe. Dann gilt für die Hilbert-Funktionen

$$H^0_A(i) \ge H^0_B(i),\ i = 0, 1, 2, ...$$

Der Homomorpismus ist genau dann flach, wenn das Gleichheitszeichen für alle n gilt.

**Beweis** des Lemmas. Nach dem Lemma von Nakayama erhalten wir

$$\begin{aligned} H^0_A(i) &= \text{length}_A(m^i/m^{i+1}) \\ &= \mu(m^i) && \text{(minimale Erzeugerzahl des Ideals } m^i \text{ von A)} \\ &\ge \mu(m^iB) \\ &= \mu(n^i) && \text{(h ist unverzweigt)} \\ &= H^0_B(i). \end{aligned}$$

Wir haben noch zu zeigen,

h ist flach $\Leftrightarrow$ für jedes i gilt in der Abschätzung das Gleichheitszeichen.

Nach dem lokalen Kriterium der Flachheit gilt

h ist flach

$\Leftrightarrow$ $f\otimes_A A/m$: $A/m \longrightarrow B/mB$ ist flach und die natürlichen Surjektionen

$$m^i/m^{i+1}\otimes_A B \longrightarrow m^iB/m^{i+1}B$$

sind bijektiv.

Nun ist $f\otimes_A A/m$ trivialerweise flach (denn A/m ist ein Körper). Außerdem werden wir gleich sehen, daß die Länge der beiden beiden B-Moduln

$$m^i/m^{i+1}\otimes_A B \text{ und } m^iB/m^{i+1}B$$

endlich ist. Die Bijektivität der natürlichen Surjektion ist deshalb äquivalent zur Gleichheit der beiden Längen. Es gilt deshalb

h ist flach $\Leftrightarrow$ $\text{length}_B(m^i/m^{i+1}\otimes_A B) = \text{length}_B(m^iB/m^{i+1}B)$ $(< \infty)$.

Weil h unverzweigt ist gilt für den Wertevorrat der natürlichen Surjektion

$$\text{length}_B(m^iB/m^{i+1}B) = \text{length}_B(n^i/n^{i+1}) = H^0_B(i)\ ( < \infty).$$

Für deren Definitionsbereich erhalten wir, weil $m^i/m^{i+1}$ ein Modul über A/m ist,

$$\begin{aligned} m^i/m^{i+1}\otimes_A B &= m^i/m^{i+1}\otimes_{A/m} A/m\otimes_A B \\ &= m^i/m^{i+1}\otimes_{A/m} B/mB \\ &= m^i/m^{i+1}\otimes_{A/m} B/n \quad \text{(weil h unverzweigt ist)} \end{aligned}$$

Für die Länge des Moduls ergibt sich

---

[25] Die Ungleichung des Lemmas besteht dann zwischen den lokalen Hilbert-Funktionen von S, X und Y in den Punkten fg(y), g(y) und y:

$$H^0_{S,fg(y)}(n) \ge H^0_{X,g(y)}(n) \ge H^0_{Y,y}(n) \text{ für alle n.}$$

Wegen der Flachheit von fg sind aber die Werte ganz links gleich den Werten ganz recht. Also gilt überall das Gleichheitszeichen. Insbesondere ist g flach.

$$\begin{aligned}\mathrm{length}_B(m^i/m^{i+1}\otimes_A B) &= \mathrm{length}_B(m^i/m^{i+1}\otimes_{A/m} B/n)\\ &= \dim_{B/n}(m^i/m^{i+1}\otimes_{A/m} B/n)\\ &= \dim_{A/m} m^i/m^{i+1}\\ &= H^0_A(i)\ (<\infty)\end{aligned}$$

Die Flachheit von h ist somit äquivalent zur Gleichheit der Hilbertfunktionen.
**QED** für das Lemma.
Zu (iv). Alternativer Beweis, der die kommutative Algebra vermeidet.
Wir betrachten das kommutative Viereck, welches aus dem Diagonal-Morphismus

$$\Delta_{fg}: X \longrightarrow X\times_S X$$

durch Basiswechsel mit $g\times 1: X\times_S X \longrightarrow Y\times_S X$ entsteht:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta_{fg}} & X\times_S X \\ \uparrow & & \uparrow g\times 1 \\ X\times_{X\times_S X}(Y\times_S X) & \longrightarrow & Y\times_S X \end{array}$$

Nun gilt $W\times_Z Z \cong W$ für beliebige Schemata W über einem Schema Z.[26] Durch wiederholtes Anwenden dieser Tatsache erhalten wir

$$\begin{aligned} X\times_{X\times_S X}(Y\times_s X) &= X\times_{X\times_S X}(Y\times_X(X\times_s X))\\ &=^{27} X\times_X Y\\ &= Y\end{aligned}$$

Das kartesiche Diagramm hat also die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta_{fg}} & X\times_S X \\ f\uparrow & & \uparrow g\times 1 \\ Y & \xrightarrow{\Gamma_g} & Y\times_S X \end{array}$$

Dabei ist $\Gamma_g: Y \longrightarrow Y\times_S X$ gerade der Graph von g (über S). Weil fg etale ist, ist $\Delta_{fg}$ eine offene Einbettung, also ein lokaler Isomorphismus, also ebenfalls etale. Damit ist aber auch der Graph $\Gamma_g$ etale. Nun ist

$$g = p_2\circ\Gamma_g\ ,$$

---

[26] Dieser natürliche Isomorphismus kommt vom entsprechenden natürlichen Isomorphismus des Tesonsorprodukts:

$$M\otimes_A A \cong M$$

für A-Moduln M.

[27] Für affine Schemata entspricht diese natürliche Isomorphie der für das Tensorprodukt: $A\otimes_B(B\otimes_D C) = A\otimes_D C$

wobei $p_2$: $Y\times_S X \longrightarrow X$ die Projektion auf den zweiten Faktor bezeichne. Es reicht also zu zeigen, daß $p_2$ etale ist. Zum Beweis betrachten wir das kommutative Viereck, welches aus fg: $Y \longrightarrow S$ durch Basis-Wechsel mit f entsteht:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{fg} & S \\ \uparrow & & \uparrow f \\ Y\times_S X & \longrightarrow & X \end{array}$$

Der untere horizontale Pfeil bezeichnet dabei gerade $p_2$. Mit fg ist somit auch $p_2$ etal.
**QED**.

### 1.3.9 Eine Methode zur Konstruktion von Topologien

Eine allgemeine Möglichkeit zur Konstruktion von Topologien ist die folgende (vgl. Milne, II.1).

Man geht von einer Klasse E von Morphismen von Schemata aus, deren Elemente E-Morphismen heißen sollen und die folgenden Bedingungen genügen.

($E_1$) Jeder Isomorphismus von Schemata ist ein E-Morphismus.

($E_2$) Die Komposition von zwei E-Morphismen ist ein E-Morphismus.

($E_3$) Jeder Morphismus, der aus einem E-Morphismus durch Basiswechsel entsteht, ist ein E-Morphismus.

Im folgenden werden wir Morphismen aus E auch kurz E-Morphismen nennen. Für jedes Schema X bezeichnen wir mit

$$E/X$$

die volle Teilkategorie der Kategorie der X-Schemata

$$Sch/X,$$

deren Struktur-Morphismen E-Morphismen sind. Beispiele für solche Klassen sind die folgenden.

(a) E := (Zar) ist die Klasse aller offenen Einbettungen.
(b) E := (ét) ist die Klasse aller Etale-Morphismen endlichen Typs.
(c) E := (fl) ist die Klasse aller flachen Morphismen lokal endlichen Typs.

In jedem dieser Beispiele sind alle E-Morphismen offen und jede offene Einbettung ist ein E-Morphismus. Dies ist auch der Fall für fast alle bekannten Beispiele. Die E-Morphismen spielen die Rolle die die offenen Teilmengen in der gewöhnlichen Topologie spielen.

Seien jetzt ein Basis-Schema

$$X$$

eine Klasse

$$E$$

die den Bedingungen ($E_1$) - ($E_3$) genügt und eine volle Teilkategorie

$$\mathcal{C}/X \subseteq Sch/X$$

der Kategorie der Schemata über X fest vorgegeben. Wir nehmen weiter an:

1. $\mathcal{C}/X$ besitzt Faser-Produkte.
2. Für jeden Morphismus $Y \longrightarrow X$ von $\mathcal{C}/X$ und jeden E-Morphismus $U \longrightarrow Y$ ist die Komposition $U \longrightarrow X$ ein Morphismus von $\mathcal{C}/X$.

Eine E-Überdeckung eines Objekts Y von $\mathcal{C}/X$ ist dann eine Familie $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} Y\}_{i\in I}$ von E-Morphismen mit

$$Y = \bigcup_{i\in I} \varphi_i(U_i).$$

Die Klasse aller solcher Überdeckungen für alle Objekte von $\mathcal{C}/X$ definiert eine Prätopologie von $\mathcal{C}/X$, welche E-Prätopolgie von $\mathcal{C}/X$ heißt, und damit auch eine Topologie, welche E-Topologie von $\mathcal{C}/X$ heißt. Die Kategorie $\mathcal{C}/X$ zusammen mit dieser Topologie heißt E-Situs von $\mathcal{C}/X$ und wird mit

$$X_E = (\mathcal{C}/X)_E$$

bezeichnet.
Die Kategorie

$$(E/X)_E$$

heißt <u>kleiner E-Situs</u> auf X. Bezeichne

$$\mathbf{LFT}/X$$

die volle Teilkategorie von **Sch**/X, aller X-Schemata, deren Struktur-Morphismus lokal endlichen Typs ist. Falls E aus Morphismen lokal endlichen Typs besteht, so heißt

$$(\mathbf{LFT}/X)_E$$

<u>großer E-Situs</u> auf X.
Der <u>Zariski-Situs</u> auf X ist definiert als der kleine Situs

$$X_{Zar} := ((Zar)/X)_{(Zar)}.$$

Der <u>Etale-Situs</u> auf X ist definier als der kleine Situs

$$X_{ét} := ((ét)/X)_{(ét)}.$$

Der <u>flache Situs</u> auf X ist definiert als der große Situs

$$X_{fl} := (LFT/X)_{(fl)}$$

**Bemerkungen**

(i) Die Morphismen des Zariski-Situs und des Etale-Situs sind automatisch E-Morphismen (vgl. 1.3.8 Bemerkung (iv)). Für den flachen Situs ist diese Aussage falsch. Man betrachte zum Beispiel das kommutative Diagramm von natürlichen Homomorphismen

$$\begin{tikzcd} A[X,Y] \arrow[r, two heads] & A[X,Y]/(Y) \\ & A \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

mit einem kommutativen Ring A mit 1 und Unbestimmten X und Y. Der horizontale Homomorphismus ist natürlich nicht flach, während die beiden anderen treuflach sind.s

(ii) Der Begriff des kleinen Situs steht dem Begriff des gewöhnlichen topologischen Raums mit seinen offenen Mengen nahe. So erhält man aus dem Zariski-Situs die gewöhnliche Zariki-Topologie, wenn man je zwei offene Einbettungen mit demselben Bild identifiziert. Ein großer Situs ist eher vergleichbar mit der Kategorie aller topologischen Räume über einem gegebenen topologischen Raum.

### 1.3.10 Die fppf-Topologie

Im Gegensatz zur bisher verwendeten Bezeichnungsweise bezeichne vorübergend

**Sch**

die Kategorie der (nicht notwendig lokal noetherschen) Schemata. Der Grund für diese vorübergehende Änderung besteht darin, diese diese uns zu einer Vorgehensweise zwingt, die einige Bezeichnungen in diesem Kontext erklärt.
Sei

$$U = \operatorname{Spec} A \in |\mathbf{Sch}|$$

ein affines Schema. Eine fppf-Überdeckungg von U ist eine endliche Familie

$$\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$$

von affinen Schemata $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ mit

$$U = \bigcup_{i\in I} \operatorname{Im}(\varphi_i), \qquad (1)$$

wobei man zusätzlich fordert, daß die $\varphi_i$ flach, von endlicher Darstellung und quasi-endlich sind.
Sei jetzt

$$U \in |\mathbf{Sch}|$$

ein beliebiges Schema. Eine fppf-Überdeckung von U ist eine endliche Familie

$$\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$$

von Schema-Morphismen mit dem Ziel U mit der Eigenschaft, daß für jeden Morphismus

$$\operatorname{Spec} A \longrightarrow U$$

aus dieser Familie durch Basiswechsel eine fppf-Überdeckung von Spec A entsteht.

**Bemerkungen**

(i) Die Bezeichnung 'fppf' ist eine Abkürzung von 'fidèlement plate de presentation finie', d.h. 'treuflach von endlicher Darstellung'. Es wird nicht gefordert, daß jeder der Morphismen treuflach sein soll.

(ii) Mit 'treu' ist hier gemeint daß die $\varphi_i$ einen treuflachen Morphismus

$$\vee_{i\in I} U_i \longrightarrow U$$

induzieren (d.h. die $\varphi_i$ sind flach und es gilt (1)).

(iii) Die Bedingung, von endlicher Darstellung zu sein, bedeutet, daß die $\varphi_i$ lokal von endlicher Darstellung sind, d.h. lokal von der Gestalt

$$\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

sind mit $B = A[X_1,\dots,X_N]/I$, wobei I ein endlich erzeugtes Ideal ist, und außerdem endlichen Typs sind und einer Separiertheitsbedingung genügen. Ist U lokal noethersch, so ist dies äquivalent zur Forderung, daß die $\varphi_i$ vom endlichen Typ sind.

(iv) Die fppf-Überdeckungen definieren eine Prätopologie auf Sch, dem kleinen und dem großen fppf-Situs und damit auch eine Topologie.

### 1.3.11 Die Nisnevich-Topologie

Ein Nisnevich-Morphismus ist ein Etale-Morphismus $f\colon Y \longrightarrow X$ mit der Eigenschaft, daß es für jeden Punkt $x \in X$ einen Punkt $y \in f^{-1}(x)$ gibt, für welchen die induzierte Abbildung der Restekörper $k(x) \longrightarrow k(y)$ ein Isomorphismus ist[28]. Eine Nisnevich-Überdeckung eines Schemas X ist eine Familie $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$ von Etale-Morphismen mit der Eigenschaft, daß es für jeden Punkt $u \in U$ ein $i \in I$ und einen Punkt $u_i \in \varphi_i^{-1}(u)$ gibt, für welchen die induzierte Abbildung der Restekörper $\kappa(u) \longrightarrow \kappa(u_i)$ ein Isomorphismus ist.

**Bemerkungen**

(i) Für endliche Familien ist die Bedingung äquivalent zur Forderung, daß der induzierte Morphismus

$$\vee_{i\in I} U_i \longrightarrow U$$

ein Nisnevich-Morphismus ist.

(ii) Die Nisnevich-Überdeckungen sind die Überdeckungen einer Prätopologie auf der Kategorie der Schemata. Die zugehörige Topologie heißt Nisnevich-Topologie. Der zugehörige Situs wird mit

**Nis**

bezeichnet.

(iii) Die Nisnevich-Topologie ist von Bedeutung in der algebraischen K-Theorie, für die sogenannte $A^1$-Homotopie-Theorie und die Motivische Kohomologie. Ihre ursprüngliche Motivation kommt aus der Theorie der Adele. Es gibt verschiedene Varianten dieser Topologie, die nützlich sind für die Untersuchung singulärer Schemata und die Auflösung der Singularitäten. Die lokalen Ringe bezüglich dieser Topologie sind die sogenannten Henselschen Abschließungen der gewöhnlichen lokalen Ringe.

# 2. Etale-Morphismen

## 2.1 Die lokale Struktur von Etale-Morphismen

### 2.1.1 Beispiel: einfach erzeugte Algebren

Seien k ein Körper, $P(T) \in k[T]$ ein normiertes Polynom (d.h. eines mit dem höchsten Koefficienten 1) und

$$A := k[T]/(P).$$

Falls in der irreduziblen Zerlegung von P keine mehrfachen Faktoren vorkommen, so ist A nach dem Chinesischen Restsatz ein Produkt von Körpererweiterungen von k und ist genau dann separabel über k, wenn alle diese Körpererweiterungen es sind. Im separablen Fall ist A aber auch unverzeigt über k. Weil k ein Körper ist, gilt damit

A ist separabel über k

$\Leftrightarrow$ A ist separabel und unverzweigt über k

$\Leftrightarrow$ A ist etale über k

$\Leftrightarrow$ P ist separabel (d.h. hat keine mehrfachen Nullstellen in $\bar{k}$, d.h.

---

[28] Man beachte, diese Bedingung ist sogar für jeden Punkt der Faser automatisch erfüllt, wenn f ein Etale-Morphismus von projektiven Schemata über $\mathbb{C}$ ist.

es ist (P,P') = k[T])

Diese Aussage lassen sich wie folgt verallgemeinern. Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und $P \in A[T]$ ein normiertes Polynom.

Dann heißt P separabel über A, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.
(i) (P, P')A[T] = A[T].
(ii) Die Restklasse von P'(T) in A[T]/(P) ist eine Einheit.

Die folgenden Bedingungen sind dann äquivalent.

(iii) P ist separabel über A.
(iv) Das natürliche Bild von P in $\kappa(p)[T]$ ist separabel über $\kappa(p)$ für jedes $p \in \mathrm{Spec}\, A$.
(v) Das natürliche Bild von P in $\kappa(p)[T]$ ist separabel für jedes maximale Ideal p von A.

**Beweis**. (iii) $\Rightarrow$ (iv) Die Implikation ist trivial wegen (ii) und weil das Bild einer Einheit bei einem Ring-Homomorphismus eine Einheit ist.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Die Implikation ist trivial, weil jedes maximale Ideal prim ist.

(v) $\Rightarrow$ (iii). Angenommen, P ist nicht separabel. Wegen (ii) gibt es dann ein maximales M von A[T] mit $(P, P') \subseteq M$. Das natürliche Bild von P' in A[T]/M ist dann gleich Null. Sei

$$m := A \cap M.$$

Weil P normiert ist, ist A[T]/(P) als A-Modul endlich erzeugt, also eine ganze Erweiterung von A. Die natürlichen Abbildung

$$A \longrightarrow A[T]/M$$

faktorisiert sich über A/m. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A[T]/M = (A[T]/(P))/(M/(P)) \\ \searrow & \nearrow & \\ & A/m & \end{array}$$

lesen wir ab, m ist ein maximales Ideal von A.[29] Insbesondere ist

$$A/m = \kappa(m)$$

der Restekörper eines Punktes m von Spec A. Der rechte Homomorphismus läßt sich auf den Polynomring über A/m fortsetzen.Wir erhalten so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A[T]/M \\ \searrow & \nearrow & \\ & \kappa(m)[T] & \end{array}$$

Das natülriche Bild von P' in A[T]/M ist nach Wahl von M gleich Null. Das Bild von P' in $\kappa(m)[T]$ ists damit keine Einheit[30] im Widerspruch zur Annahme (v).
**QED**.

Seien wie bisher, A ein kommutativer Ring mit 1, $P \in A[T]$ ein normiertes Polynom und

[29] Weil der rechte Homomorphismus eine ganze Erweiterung definiert und M maximal in A[T] ist.
[30] denn dann wäre auch das Bild von P' in A[T]/M eine Einheit, also ungleich Null.

$$B := A[T]/(P).$$

Für jedes Primideal p von A gilt dann

$$B\otimes_A \kappa(p) = \kappa(p)[T]/(P).$$

Nach Bemerkung 1.3.8 (ii)(a) $\Leftrightarrow$ (b) ist damit Spec B über Spec A genau dann separabel und unverzweigt, wenn P ein separables Polynom ist. Wir sagen in dieser Situation auch, B ist <u>separabel</u> und <u>unverzweigt</u> über A.

Weiter ist B ein freier A-Modul vom Rang deg P, also insbesondere flach über A und vom endlichen Typ. Damit ist B genau dann etale über A, wenn B separabel und unverzweigt ist über A. Damit sind folgende Bedingungen äquivalent.

(vi) B ist separabel und unverzweigt über A.
(vii) B ist etale über A.
(viii) P ist separabel.

Analog ist für jedes $b \in B$ die Algebra $B_b$ etale über A genau dann, wenn das natürliche Bild von P' in $B_b$ eine Einheit ist.

Für $a \in A$ gilt insbesondere

$$\begin{aligned} B := A[T]/(T^r - a) \text{ etale über } A &\Leftrightarrow T^r - a \text{ ist separabel über } A \\ &\Leftrightarrow ra \text{ ist Einheit von } A \\ &\Leftrightarrow ra \text{ ist ungleich Null in } \kappa(p) \text{ für jedes } p \in \operatorname{Spec} A. \end{aligned}$$

### 2.1.2 Beispiel: endlich erzeugte Algebren

Seien A ein kommutativer Ring mit 1,

$$C := A[T_1, \dots , T_n ]$$

und

$$B = C/(f_1,\dots,f_n)$$

mit Polynomen $f_i \in C$. Man beachte, wir nehmen an, die Anzahl der Polynome ist gleich der Anzahl der Unbestimmten. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) B ist etal über A.
(ii) Das natüriche Bild der Determinante

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}\right)$$

in B ist eine Einheit.

**Beweis**. <u>(i) $\Rightarrow$ (ii)</u>. Etale-Morphismen sind flach und quasi-endlich. Für den durch $A \longrightarrow B$ induzierten Schema-Morphismus

$$f: \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

und für jeden Punkt $y \in \operatorname{Spec} B$ gilt deshalb

$$\dim_y \operatorname{Spec} B = \dim_{f(y)} \operatorname{Spec} A + \dim_y f^{-1}(f(y)) = \dim_{f(y)} \operatorname{Spec} A.$$

also

$$\dim \operatorname{Spec} B = \dim \operatorname{Spec} A.$$

Nun wird Spec B in $\mathbb{A}^n_A$ durch die n Gleichugnen $f_i = 0$ definiert. Der Tangentialraum $T_y$ Spec B im Punkt $y \in$ Spec B ist damit in $T_y\mathbb{A}^n_A$ durch das lineare Gleichungssystem

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial T_j} dT_j \;(y)$$

gegeben, d.h. es gilt

$$\dim T_y \operatorname{Spec} B = \dim T_y\mathbb{A}^n_A - \operatorname{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(y)\right)$$

$$= \dim T_{f(y)} \operatorname{Spec} A + n - k\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(y)\right).$$

Zum Beweis von (ii) reicht es somit, zu zeigen, es gilt

$$\dim T_y \operatorname{Spec} B = \dim T_{f(y)} \operatorname{Spec} A.$$

Dazu setzen wir $x = f(y)$ und betrachten den durch f induzierten lokalen Homomorphismus

$$A_x \longrightarrow B_y$$

Dieser ist nach Voraussetzung etale. Insbesondere ist er unverzweigt, d.h. er induziert eine separable Körper-Erweiterungen

$$\kappa(x) \longrightarrow B_y/xB_y = \kappa(y).$$

Mit $m := xA_x$ und $n:=yB_y$ gilt

$$\begin{aligned}
m/m^2 \otimes_{\kappa(x)} \kappa(y) &= m/m^2 \otimes_{A_x/xA_x} B_y/xB_y \\
&= m/m^2 \otimes_{A_x/xA_x} A_x/xA_x \otimes_{A_x} B_y \\
&= m/m^2 \otimes_{A_x} B_y \\
&= m \otimes_{A_x} B_y \,/\, m^2 \otimes_{A_x} B_y \\
&= mB_y \,/\, m^2 B_y && \text{(weil } B_y \text{ flach ist über } A_x\text{)} \\
&= n/n^2 && \text{(weil } B_y \text{ unverzweigt ist über } A_x\text{)}
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\dim T_y \operatorname{Spec} B &= \dim_{\kappa(y)} n/n^2 = \dim_{\kappa(y)} m/m^2 \otimes_{\kappa(x)} \kappa(y) = \dim_{\kappa(x)} m/m^2 \\
&= \dim T_x \operatorname{Spec} A.
\end{aligned}$$

<u>(ii) ⇒ (i)</u>. Wegen $B = C/J$ mit $J = (f_1,...,f_n)$ besteht eine exakte Sequenz

$$J/J^2 \xrightarrow{d} \Omega_{C/A} \otimes_C B \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$$

(vgl. Hartshorne, Prop. II.8.4.A). Der B-Modul $\Omega_{B/A}$ ist damit ein Faktor-Modul von

$$\Omega_{C/A} = C\bullet dT_1 + \ldots + C\bullet dT_n,$$

wird also von Restklassen $dt_i$ der $dT_i$ erzeugt:

$$\Omega_{B/A} = B\bullet dt_1 + \ldots + B\bullet dt_n,$$

Dabei sind die Differentiale der $f_i$ gleich Null in $\Omega_{B/A}$:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial T_j} dt_j \,. \tag{1}$$

Betrachten wir die Identitäten als lineares Gleichungssystem für die Unbestimmten $dt_j$. Dies ist ein System von n Gleichungen für n Unbestimmte, wobei die Determinante des Systems eine Einheit ist. Das System hat also nur die triviale Lösung $dt_j = 0$ für alle j. Damit gilt

$$\Omega_{B/A} = 0,$$

d.h. B ist über A separabel und unverzweigt.

Wir haben noch zu zeigen, der durch die Zusammensetzung natürlicher Homomorphismen

$$h{:}A \overset{i}{\hookrightarrow} C = A[T_1, \ldots , T_n] \overset{p}{\twoheadrightarrow} C/J = B$$

induzierte Morphismus von Schemata

$$f\colon Y = \operatorname{Spec} B = V(f_1,\ldots,f_n) \overset{p^\#}{\hookrightarrow} \operatorname{Spec} C = \mathbb{A}^n_A \overset{i^\#}{\longrightarrow} \operatorname{Spec} A = X$$

ist flach. Dies ist eine Frage lokaler Natur bezüglicn X. Durch Basiswechsel reduzieren wir den Beweis auf den Fall, daß A ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal m ist,

(A, m) ist lokaler Ring.

Betrachten wir die Faser über dem abgeschlossenen Punkt von X. Deren Gleichungen im affinen Raum $(i^\#)^{-1}(m) = \mathbb{A}^n_{A/m}$ sind gerade durch die Restklassen

$$\bar f_i := f_i \bmod mA[T_1, \ldots , T_n]$$

gegeben. Wir erhalten so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
f^{-1}(m) = V(\bar f_1,\ldots,\bar f_n) & \hookrightarrow & \operatorname{Spec}\,(A/m)[T_1,\ldots,T_n] & \longrightarrow & \operatorname{Spec}(A/m) = \{x\} \\
\cap & & \cap & & \cap \\
X = V(f_1,\ldots,f_n) & \hookrightarrow & \operatorname{Spec} A[T_1,\ldots,T_n] & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A = X
\end{array}$$

Der Tangentialraum an die Fasser in einem vorgegebenen Punkt $y \in f^{-1}(m)$ ist dann im Tangentialraum des $\mathbb{A}^n_{A/m} = \operatorname{Spec}\,(A/m)[T_1, \ldots , T_n]$ durch die Differentiale der $\bar f_i$ gegeben:

$$0 = d\bar f_i(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial T_j}(y)\bullet dT_j$$

Nach Voraussetzung hat die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems (in jedem Punkt also auch in y) den Rang n und hat damit nur die triviale Lösung. Die Tengentialräume an die Faser sind 0-dimentional,

$$\dim T_y f^{-1}(m) = 0 \text{ für jedes } y \in f^{-1}(m).$$

Damit muß auch die Faser selbst 0-dimensional sein,

$$\dim V(\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_n) = 0 = \dim (A/m)[T_1, \dots , T_n] - n.$$

Nun sinkt die Dimension der Lösungsmenge eines polynomialen Gleichungssystem im affinen Raum (falls diese nicht leer ist) mit jeder Gleichung um höchstens 1 (vgl. Matsumura, (12.F) Lemma 2). Es muiß deshalb

$$\dim \dim V(\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_i) = n - i$$

für jedes i gelten. Nun hat jedes minimale Primoberideal p von $(\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_i)$ eine Höhe $\le$ i (vgl. Matsumura, (12,I) Theorem 18), d.h. es gilt dim V(p) $\ge$ n- i, also dim V(p) = n-i. Deshalb kann $\overline{f}_{i+1}$ in keinem mimimalen Primoberideal von $(\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_i)$ liegen. Nun hat aber jedes assoziierte Primideal von $(\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_i)$ dieselbe Höhe i (vgl. Matsumura, (16.D+E), Theoreme 30 und 31). Deshalb liegt $\overline{f}_{i+1}$ in keinem assoziierten Primideal von $(\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_i)$, ist also regulär modulo $(\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_i)$ (vgl. Matsumura, (7.B) Proposition). Wir haben gezeigt, die Elemente

$$\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_n$$

bilden eine reguläre Sequenz in $(A/m)[T_1, \dots , T_n]$. Die zu beweisende Flächheitsaussage erhält man durch wiederholtes Anwenden des nachfolgenden Lemmas.

**Lemma**. Seien $(A, m) \longrightarrow (B, n)$ ein lokaler flacher Homomorphismus lokaler Ringe und $b \in B$ ein Element. Die Restklasse von b in B/mB sei eine reguläres Element von B/mB. Dann sit auch

$$A \longrightarrow B \longrightarrow B/bB$$

ein flacher Homomorphismus.

Das Lemma ist eine Folgerung aus dem lokalen Kriterium der Flachheit. Siehe Matsumura, (20.F) Corollary 1.

**QED**.

### 2.1.3 Standard-Morphismen

Seien A ein kommutativer (noetherscher) Ring mit 1,

$$P \in A[T]$$

ein Polynom mit dem höchsten Koeffizienten 1 und

$$B := A[T]/(P).$$

Weiter seien $b \in B$ ein Element und

$$C := B_b.$$

Dabei sei b so gewählt, daß das natürlichen Bild von P' in C eine Einheit ist. Nach 2.2.1 induziert dann die Komposition natürlicher Abbildungen

$$A \hookrightarrow A[T] \longrightarrow A[T]/(P) = B \longrightarrow B_b = C$$

einen Etale-Morphismus

$$\operatorname{Spec} C \longrightarrow \operatorname{Spec} A.$$

Ein Etal-Morphismus dieser Gestalt heißt  heißt <u>Standard-Etal-Morphismus</u>.

### 2.1.4 Struktursatz

Sei f: $Y \longrightarrow X$ ein Morphismus von Schemata, welcher in den Punkten einer Umgebung von $y \in Y$ etale ist. Dann gibt es offene affine Umgebungen

$$U \subseteq Y \text{ und } V \subseteq X$$

von $y \in X$ bzw. $x := f(y) \in X$ derart, daß $f(U) \subseteq V$ gilt und die Einschränkgung

$$f|_U: U \longrightarrow V$$

isomorph ist zu einem Standard-Etal-Morphismus.

Zum Beweis benötigen wir einen wichtige bekannten Satz der algebraischen Geometrie, den wir zunächst zitieren wollen.

#### *2.1.4.1 Hauptsatz von Zariski*

Seien X ein quasi-kompaktes Schema und f: $Y \longrightarrow X$ ein separierter Morphismus endlichen Typs mit endlichen Fasern. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & X \\ & Y' \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

mit einer offenen Einbettung f' und einem endlichen Morphismus g.

**Beweis**. Wir beschränken uns hier auf eine kurze Beweisskitze.
1. Schritt. Der affine Fall.
Wir nehmen an,

$$X = \text{Spec } A,\ Y = \text{Spec } B$$

und f kommt von einem Homomorphismus kommutativer Ringe mit 1,

$$h: A \longrightarrow B,$$

wobei A noethersch und B endlich erzeugt über A ist. Nach Voraussetzung soll B quasi-endlich über A sein, d.h. für jedes Primideal $p \in \text{Spec } A$ soll die Faser über p,

$$\text{Spec } B_p/pB_p\ ,$$

endlich sein.

Sei

$$B'$$

die ganze Abschließung von A in B. Dann reicht es zu zeigen:

(a) Die natürliche Abbildung

$$\text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } B', \qquad (1)$$

ist eine offene Einbettung.

(b) Es gibt eine A-Teilalgebra $B'' \subseteq B'$, welche als A-Modul endlich erzeugt ist, mit der Eigenschaft, daß es für jeden Punkt $q \in \text{Spec } B'$ ein Element $b \in B'' - q$ gibt, für welches die natürliche Einbettung $B'' \hookrightarrow B'$ einen Isomorphismus

$$B''_b \xrightarrow{\cong} B'_b$$

induziert, d.h. der durch $B'' \hookrightarrow B'$ induzierte Morphismus

$$\varphi: \text{Spec } B' \longrightarrow \text{Spec } B'' \qquad (2)$$

induziert auf den durch b definierten offenen Hauptmengen einen Isomorphismus.

Überzeugen wir uns durch einige Bemerkungen davon, daß aus diesen Aussagen tatsächlich die Behauptung im affinen Fall folgt.

Bemerkungen

(i) Endliche Morphismen sind abgeschlossen (vgl. Hartshorne, Aufgabe II.3.5(b)) und surjektiv (vgl. Matsumura, (5.E) Theorem 5(i)). Das Bild von

$$\mathrm{Spec}\, B'' - D(b)$$

in Spec A ist somit abgeschlossen. Das Komplement dieses Bildes ist eine offene Umgebung des Bildes p von q, deren Urbild ganz in

$$D(b) \subseteq \mathrm{Spec}\, B''$$

liegt.

(ii) Das vollstandige Urbild der offenen Hauptmenge

$$D(b) \subseteq \mathrm{Spec}\, B''$$

beim durch $i: B'' \hookrightarrow B'$ induzierten Morphismus

$$\varphi:\mathrm{Spec}\, B' \longrightarrow \mathrm{Spec}\, B''$$

ist gerade die offene Hauptmenge $D(i(f)) = D(f) \subseteq \mathrm{Spec}\, B'$. Der Isomorphismus von (b) läßt sich also auch in der Gestalt

$$\varphi^{-1}(D(f)) \xrightarrow{\cong} D(f)$$

schreiben.

(iii) Nach Konstruktion ist der natürliche Morphismus

$$\mathrm{Spec}\, B'' \xrightarrow{g} \mathrm{Spec}\, A$$

endlich und nach (b) der Morphismus

$$\mathrm{Spec}\, B' \longrightarrow \mathrm{Spec}\, B''$$

ein lokaler Isomorphismus. Nach den Bemerkungen (i) und (ii) gibt es für jeden Punkt

$$p \in \mathrm{Spec}\, A$$

eine offene Umgebung $U \subseteq \mathrm{Spec}\, A$ derart, daß die Einschränkung von f auf U die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc}
f^{-1}(U) & \longrightarrow & \varphi^{-1}g^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & g^{-1}(U) & \longrightarrow & U \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
\mathrm{Spec}\, B & \xrightarrow{(1)} & \mathrm{Spec}\, B' & \xrightarrow{(2)} & \mathrm{Spec}\, B'' & \xrightarrow{g} & \mathrm{Spec}\, A
\end{array}$$

hat. Der linke Morphismus ist eine offene Einbettung nach (a). Der rechte Morphismus ist endlich nach Wahl von B", und der Morphismus in der Mitte ist ein Isomorphismus nach Konstruktion.

Der Beweis der Behauptung im affinen Fall ist damut auf den Beweis von (a) und (b) reduziert.

(iv) Für spätere Anwendungen weisen wir darauf hin, daß jede A-Algebra $\widetilde{B}$ zwischen B" und B',

$$B'' \subseteq \widetilde{B} \subseteq B',$$

die als A-Modul endlich ist, ebenfalls den an B" gestellten Bedingungen genügt.

Der Beweis der Aussagen (a) und (b) ist elementar, aber technisch aufwendig. Er stammt von Peskin.

Peskine, Bul. Sciences Maths. 90 (1966), 119-127,
Beweis von Theorem 1

Man kann ihn auch nachlesen in der Monographie von Raynault.

Raynauld, Anneau locaux Henseliens, Lecture Notes in Math. 169 (1970)
Theorem 1, p. 41 und Beweis, p. 43.

Wir beschränken uns hier auf diese Literaturhinweise.

2. Schritt. Reduktion auf den affinen Fall.(vgl. Milne, Beweis von Theorem I.1.8)

Bezeichne $\mathcal{A}$ die ganze Abschließung von $\mathcal{O}_X$ in $f_*\mathcal{O}_Y$. Dann ist $\mathcal{A}$ eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Algebren mit der Eigenschaft, daß für jede affine offene Menge U = Spec A von X, die Schnitte über U,

$$\Gamma(U, \mathcal{A}) \ (\subseteq \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)) \tag{1}$$

gerade die ganze Abschließung von A in $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)$ bilden. Die $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ ist quasi-kohärent, weil f separiert ist und vom endlichen Typ (vgl. Hartshorne, Proposition II.5.8(c) im Fall, daß f endliche Fasern besitzt und Grothendieck, EGA I, Proposition I.6.7.1 für den allgemeinen Fall)[31].

Die affinen Spektren Spec $\Gamma(U, \mathcal{A})$ verheften sich zu einem X-Schema

$$\varphi\colon \operatorname{Spec} \mathcal{A} \longrightarrow X, \tag{2}$$

welches affin und ganz über X ist mit

$$\varphi_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathcal{A}} = \mathcal{A}.$$

Die natürlichen Einbettungen (1) definieren einen Morphismus von Schemata

$$\psi\colon Y \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{A}. \tag{3}$$

Das Schema Spec $\mathcal{A}$ heißt Normalisierung von X in Y (bezüglich f).

Nach dem ersten Schritt gibt es für jeden Punkt $x \in X$ ein affine offene Umgebung

$$U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$$

von x und eine A-Teilalgebra B" von $\Gamma(U, \mathcal{A})$ derart, daß die Einschränkung von (2) auf U zerfällt in einen Isomorphismus und einen endlichen Morphismus

$$\varphi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Spec} B'' \longrightarrow \operatorname{Spec} A.$$

Mit anderen Worten, die Normalisierung (2) von X in Y ist endlich.

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, es gibt ein kommutatives Diagramm von Schema-Morphismen

---

[31] Im allgemeinen Fall wird gefordert, daß f quasi-kompakt und quasi-separiert ist. Ein Morphismus heißt quasi-kompakt, wenn die Urbilder quasi-kompakter offener Mengen quasi-kompakt sind (EGA I, Definition I.6.1.1). Ein Morphismus heißt quasi-separiert, wenn die Diagonale quasi-kompakt ist (EGA I, Definition I.6.1.3). Morphismen endlichen Typs sind (trivialerweise) quasi-kompakt. Separierte Morphismen sind quasi-separiert (EGA I, Proposition I.6.1.3).

quasi-separiert ist, d.h. die Diagonale definiert eine abgeschlossene Einbettung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\,\mathcal{A} & \xrightarrow{\varphi} & X \\ & g'\searrow \quad \nearrow g & \\ & Y' & \end{array}$$

mit g endlich und $Y \xrightarrow{\psi} \mathrm{Spec}\,\mathcal{A} \xrightarrow{g'} Y'$ eine offene Einbettung.

Dazu beachten wir, jedes Element der oben betrachteten A-Algebra $\Gamma(U, \mathcal{A})$ ist endlich über A, liegt also bereits in einer Teilalgebra, die endlich ist über A. Mit anderen Worten, $\Gamma(U, \mathcal{A})$ ist gleich der Vereinigung aller endlichen A-Teilalgebren,

$$\Gamma(U, \mathcal{A}) = \bigcup \{R \mid R \text{ ist endliche A-Teilalgebra von } \Gamma(U, \mathcal{A})\}$$

Weiter erzeugen die Elemente jeder solchen endlichen A-Teilalgebra eine Garbe von Teilalgebren

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A},$$

für welche der zugehörige Schema-Morphismus

$$\mathrm{Spec}\,\mathcal{R} \longrightarrow X$$

endlich ist. Insbesondere ist jeder Schnitt von $\mathcal{A}$ bereits Schnitt einer endlichen Teilalgebra $\mathcal{R}$ von $\mathcal{A}$. Sei jetzt

$$\{\mathcal{R}_i\}_{i\in I}.$$

die Familie aller endlichen $\mathcal{O}_X$-Teilalgebren von $\mathcal{A}$. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, für jede hinreichend große Teilalgebra $\mathcal{R}_i$ ist die natürliche Abbildung

$$\alpha_i: Y \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathcal{R}_i \tag{4}$$

eine offene Einbettung. Zum Beweis dieser Aussage können wir annehmen, daß X affin (und noethersch) ist[32].

Nach dem ersten Schritt ist die Aussage richtig, wenn man in (4) das Schema Y durch eine beliebige offene affine Teilmenge Spec B mit B noethersch ersetzt. Insbesondere ist (4) für beliebiges Y ein lokaler Isomorphismus (und insbesondere offen). Wir haben noch zu zeigen, (4) ist injektiv für ein $i \in I$.

Nach dem ersten Schritt könen wir i derart wählen, daß es für jeden Punkt $x \in \mathrm{Im}(\alpha_i)$ eine offene Hauptmenge D(f) von Spec $\mathcal{R}_i$ gibt, die x enthält und die Eigenschaft besitzt, daß die Einchränkung

$$\alpha_i^{-1}(D(f)) \longrightarrow D(f)$$

ein Isomorphismus ist. Nach einem Kriterium, das wir verwendet haben, um das kohomologische Kriterium für affine Schemata zu beweisen[33], ist dann aber der Morphismus

---

[32] Weil X quasi-kompakt sein soll, können wir X durch endlich viele affine offene Mengen überdecken und für jede dieser offenen Mengen ein $\mathcal{R}_i$ konstruieren. Die von allen diesen $\mathcal{R}_i$ erzeugte Algebra $\mathcal{R}$ enthält jedes dieser $\mathcal{R}_i$ und definiert damit eine offene Einbettung $Y \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathcal{R}$.

[33] vgl. Hartshorne, Aufgabe II.2.17.(a): Sei f: $Y \longrightarrow X$ ein Morphismus von Schemata. Es existiere eine offene Überdeckung von X durch offene Mengen $U_i$ derart, daß die

$$\alpha_i: Y \longrightarrow \text{Spec Im}(\alpha_i)$$

ein Isomorphismus. Insbesondere ist (4) eine offene Einbettung.
**QED**.

**Bemerkungen**

(i) Der Hauptsatz von Zariski existiert in vielen Varianten, zum Beispiel als Kriterium für die Isomorphie von birationalen Isomorphismen.

(ii) Der Hauptsatz von Zariski ist eine Variantes des Faktorisierungssatzes von Stein:

Sei f: $Y \longrightarrow X$ ein eigentlicher Morphismus noetherscher Schemata. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm von Schema-Morphismen

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & X \\ & Y' \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

mit einem endlichen Morphismus g und einem Morphismus, dessen Fasern zusammenhängend sind.

(vgl. Hartshorne, Corollary III.11.5). Diese Aussage folgt aus dem Proper-Mapping-Theorem: Man setze

$$Y' := \text{Spec } f_*\mathcal{O}_Y .$$

Weil $f_*\mathcal{O}_Y$ eine kohärente Garbe auf X ist, ist das Schema Y' endlich über X. Nach Konstruktion faktorisiert sich f über Y' und es gilt

$$f'_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y'},$$

Diese Identität hat für eigentliche Morphismen zur Folge, daß die Fasern von f' zusammenhängend sind (vgl. Hartshorne, Corollary III.11.3).

(iii) Der Faktorisierungssatz von Stein ist unter anderem auch deshalb interessant, weil er eine geometrische Beschreibung der normalen Schemata liefert: im Fall X normal und f birational ist g ein Isomorphismus. Die normalen Schemata sind gerade diejenigen Schemata, für welche die Auflösung der Singularitäten zusammenhängende Fasern hat.

***Beweis von 2.1.4.2.(vgl. Milne, Theorem I.3.14).***

Wir können vorübergehend annehmen, daß f: $Y \longrightarrow X$ selbst schon etale ist. Außerdem können wir annehmen,

$$X = \text{Spec } A, \text{ A noethersch}$$

und

$$Y = \text{Spec } C, \text{ C endlich erzeugt über A.}$$

Dann ist auch Y noethersch. Da die Fasern von Etale-Morphismen 0-dimensional sind, sind damit die Fasern von f 0-dimensional und noethersch, also endlich. Der Morphismus f ist quasi-endlich.

Durch tensorieren mit $A_{f(y)}$ können wir außerdem noch annehmen, daß A ein lokaler Ring ist,

---

Einschränkung $f^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$ ein Isomorphismus ist für jedes i. Dann ist f ein Isomorphismus.

$$(A, m) \text{ lokaler Ring mit } m = f(y).$$

Als flacher A-Modul ist C sogar treuflach, und die natürlichen Abbildung $A \longrightarrow C$ ist injektiv (vgl. Matsumura, (4.C) (i)), d.h. wir können annehmen

$$A \subseteq C.$$

Nach dem Hauptsatz von Zariski können wir X durch eine offene Umgebung des gegebenen Punktes y so ersetzen, daß außerdem noch gilt:

$$C = D_d \text{ mit einer A-Algebra D, die als A-Modul endlich ist.}$$

und einem Element $d \in D$. Da wir bei der Konstruktion der gesuchten Umgebungen U und V diese bei Bedarf durch beliebig kleine offene Hauptmengen ersetzen können, die die gegebenen Punkte y bzw. $x = f(y)$ enthalten, können wir hier annehmen

$$C = D \text{ ist als A-Modul endlich,}$$

denn wir können später diese Änderung wieder rückgängig machen, inden wir die gefundene Standard-Etal-Algebra $B_b$ durch einen Quotientenring bezüglich der Potenzen eines geeigneten Elements ersetzen. Die Eigenschaft Standard-Etal-Algebra zu sein, bleibt dabei erhalten. Wir müssen aber die Annahme, daß f in allen Punkten von Y etale ist wieder aufgeben, d.h. wir wissen in dieser Situation nur, f ist in einer Umgebung des gegebenen Punktes $y \in Y$ etal.

Wir müssen eine Standard-Etale-Algebra $B_b$ finden mit

$$B_b \cong C_c \text{ für ein } c \in C - y.$$

Nach Voraussetzung ist C/mC in einer Umgebung des Punktes y etale über A/m. Insbesondere ist

$$\kappa(y) = (C/mC)_y \text{ separable Körpererweiterung von } \kappa(m) = A/m.$$

Man beachte, C/mC ist nach dem Chinesichen Restesatz ein direktes Produkt von lokalen $\kappa(m)$-Algebren, wobei einer der Faktoren gleich $\kappa(y)$ ist, sagen wir

$$C/mC = R_1 \times ... \times R_r \text{ mit } R_1 = \kappa(y)$$
$$y_1 = y.$$

Ist nämlich

$$(0) = q_1 \cap ... \cap q_r$$

die Primärzerlegung des Nullideals von $R = C/mC$, so sind die zugehörigen Primideale

$$\bar{y}_1, ..., \bar{y}_r$$

minimal und maximal in R, denn R ist noethersch und 0-dimensional. Nach dem Chinesichen Restesatz definiert der Übergang zu den Restklassen modulo $q_i$ einen Isomorphismus von Ringen mit 1,

$$R \xrightarrow{\cong} R/q_1 \times ... \times R/q_r ,$$

d.h. die behauptete Zerlegung besteht mit $R_i = R/q_i$.

Die maximalen Ideale von C/mC erhält man, indem man einen der Faktoren rechts durch Null ersetzt[34]. Insbesondere entspricht das Primideal y von C gerade dem Primideal

$$\bar{y} = y/mC = 0\times R_2\times\ldots\times R_r\ .$$

Die natürliche Abbildung

$$C/mC \longrightarrow (C/mC)_y = R_1 = \kappa(y) = (C/m)/(y/m) = C/y$$

ist gerade die Projektion auf den ersten Faktor.

Nach dem Satz vom primitiven Element gibt es ein $t \in C$ desssen Restklasse $\bar{t}$ in $\kappa(y)$ die Erweiterung erzeugt:

$$\kappa(y) = \kappa(m)[\bar{t}] \subseteq C/mC.$$

Die Restklasse $\bar{t}$ von t ändert sich nicht, wenn man t modulo y abändert. Wegen

$$y/mC = \bar{y} = 0\times R_2\times\ldots\times R_r\ .$$

können wir deshalb annehmen, daß die Restklasse von t in C/mC die Gestalt

$$t \bmod mC = (\bar{t},\ 0,\ \ldots\ ,\ 0)$$

hat. Es gilt dann

$$t \bmod mC \notin \bar{y}_1 = \bar{y} \text{ und } t \bmod mC \in \bar{y}_i \text{ für } i = 2, \ldots , r \tag{1}$$

Betrachten wir das kommutative Diagramm von Homomorphismen von Ringen mit Eins,

$$\begin{tikzcd}
A[t] \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[d, two heads] & & C \arrow[d, two heads] \\
A[t]/mA[t] \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, two heads, "\alpha"'] & & C/mC \\
& \kappa(m)[\bar{t}] \arrow[ur, hook, "\beta"'] & \\
& \cup & \cup \\
& (0) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & y/mC
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Dabei seien i die natürlichen Einbettung und j induziert durch i. Die beiden schrägen Pfeile mögen gerade die natürliche Zerlegung von j in eine Surjektion und eine Injektion bezeichnen. Wegen (1) gilt dann

$$\beta(\bar{t}) \notin \bar{y}_1 = \bar{y} \text{ und } \beta(\bar{t}) \in \bar{y}_i \text{ für } i = 2, \ldots , n. \tag{3}$$

Insbesondere ist $\beta^{-1}(\bar{y})$ ist ein echtes Ideal von

$$\kappa(m)[\bar{t}] = \kappa(y),$$

also gleich Null,

$$\beta^{-1}(\bar{y}) = 0 \tag{4}$$

Betrachten wir jetzt anstelle der Primideale $\bar{y}_i$ von C/mC deren vollständige Urbilder in C, d.h die Primideale

$$y_1 = y,\ y_2\ , \ldots\ , y_n$$

Wegen (3) gilt dann

---

[34] Faktorringe von C/mC bei denen die Einselemente

$$(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$$

von zwei verschiednen Faktoren von Null verschiedene Restklassen repräsentieren, haben Nullteiler. Bei Faktorringen, die Integritätsbereiche sind, wird genau ein Körper nicht in die Null abgebildet.

$$t \notin y, t \in y_2, \dots, t \notin y_n.$$

Sei

$$y' := y \cap A[t].$$

Aus dem Diagramm (2) lesen wir dann ab,

$$mA[t] \subseteq y'$$

Sei jetzt $y'' \subseteq C$ ein Primideal von C, welches über y' liegt, d.h.

$$y'' \cap A[t] = y'.$$

Dann gilt

$$t \in A[t] - y' = A[t] - y'' \cap A[t] = A[t] - y'' \subseteq C - y''$$

Wegen $mA[t] \subseteq y' \subseteq y''$ folgt $mC \subseteq y''$, d.h. $y''/mC$ ist ein Primideal von C/mC, welches $\overline{t}$ nicht enthält. Auf Grund von (3) gilt $y''/mC = \overline{y} = y/mC$, also $y'' = y$. Wir haben gezeigt,

y ist das einzige Primideal von C, welches über y' liegt.

<u>Wir haben damit den Beweis des Satzes auf den folgenden Spezialfall reduziert.</u>

X = Spec A mit (A,m) lokaler noetherscher Ring
Y = Spec C mit einer A-Algebra C, die als A-Modul endlich erzeugt ist
$y \in Y$ liegt über $m \in \mathrm{Spec}\, A$
$A \subseteq C$
$t \in C$ ein Element, dessen Restklasse in $\kappa(y)$ die Erweiterung $\kappa(y)/\kappa(m)$ erzeugt
y ist das einzige Primideal von C, welches über $y' := A[t] \cap y$ liegt.

Aus der endlichen Erweiterung $A[t] \hookrightarrow C$ erhalten wir durch Übergang zu den Quotienten bezüglich y' eine endliche Erweiterung

$$A[t]_{y'} \hookrightarrow C_{y'}.$$

Dabei ist $yC_{y'}$ das einzige Primideal von $C_{y'}$, welches über $y'A[t]_{y'}$ liegt. Weil die Erweiterung endlich ist, liegt jedes maximale Ideal von $C_{y'}$ über einem maximalen Ideal von $A[t]_{y'}$. Mit $A[t]_{y'}$ ist deshalb auch $C_{y'}$ ein lokaler Ring, wobei das maximale Ideal gleich $yC_{y'}$ ist. Insbeondere ist $C_y = C_{y'}$. Wir erhalten so einen lokalen Homomorphismus

$$A[t]_{y'} \hookrightarrow C_{y'} = C_y \tag{5}$$

lokaler Ringe, welche als Moduln über $A[t]_{y'}$ endlich erzeugt sind. Der induzierte Homomorphismus

$$A[t]_{y'}/mA[t]_{y'} \longrightarrow C_y/mC_y$$

ist surjektiv, weil sein Bild nach Wahl von t gleich $\kappa(y)$ ist und für die Lokalalisierung

$$C_y/mC_y = (C/mC)_y$$

des direkten Produkts C/mC dasselbe gilt. Nach dem Lemma von Nakayama ist dann aber auch die natürliche Einbettung (5) surjektiv, also ein Isomorphismus,

$$A[t]_y = C_y$$

Weil C und A[t] endlich erzeugte A[t]-Moduln sind, gibt es auf Grund des Isomorphismus

$$A[t]_{y'} \longrightarrow C_{y'}$$

ein Element $c \in A[t] - y' \subseteq C - y$ derart, daß die Einbettung $A[t] \hookrightarrow C$ einen Isomorphismus

$$A[t]_c \xrightarrow{\cong} C_c$$

induziert.[35] Wir können deshalb die Algebra C durch A[t] ersetzen[36], d.h. wir können annehmen, C wird von $t \in C$ erzeugt. Die natürlichen Einbettung

$$A[t] \hookrightarrow C$$

wird dann zu einem Isomorphismus, der einen Isomorphismus

$$A[t]/mA[t] \longrightarrow C/mC$$

induziert. Nach Wahl von t ist aber das Bild dieses Isomorphismus gleich $\kappa(y)$, d.h. es ist

$$A[t]/mA[t] \cong \kappa(y).$$

Sei

$$d := [\kappa(y):\kappa(m)]$$

Dann wird $\kappa(y)$ als Vektorraum über $\kappa(m) = A/m$ erzeugt von

$$1, \bar{t}, \dots, \bar{t}^{d-1}$$

Nach dem Nakayama-Lemma wird $C = A[t]$ als Modul über A erzeugt von

$$1, t, \dots, t^{d-1}$$

Insbesondere ist $t^d$ eine A-Linearkombination dieser Potenzen. Es gibt damit eine Surjektion

$$B := A[T]/(P) \twoheadrightarrow C \tag{4}$$

mit einem Polynom $P \in A[T]$ des Grades d, dessen höchster Koeffizient 1 ist. Das durch P definerte Polynom

$$\bar{P} \in \kappa(m)[T]$$

ist dabei gerade das Minimalpolynom von $\bar{t}$ über k(m) und besitzt damit keine mehrfachen Nullstellen. Also ist P separabel im Punkt m. Wir werden später sehen, daß die Punkte $y \in Y$, in denen ein Morphismus $f: Y \longrightarrow X$ etale ist, eine offene Menge bilden. Es gibt deshalb eine offene Hauptmenge D(b), $b \in B$, welche den Punkt y enthält, mit der Eigenschaft, daß

$$\text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } A$$

in allen Punkten von D(b) etale ist. Mit anderen Worten,

$$B_b \text{ ist etale über A.}$$[37]

---

[35] Der Kokern der natürlichen Einbettung $A[t] \hookrightarrow C$ ist endlich erzeugt und hat die Lokalisierung Null an der Stelle y'. Die endlich vielen Erzeugter von C werden also von einem Element aus dem Komplement von y' annulliert. Übergang zu den Quotienten bezüglich dieses Elements liefert den gesuchten Isomorphismus.

[36] Eine offene Hauptmenge D(c) des Schemas Spec C ist dann eine offene Umgebung des vorgegebenen Punktes y. Wir oben lassen wir den Übergang zu einem Quotientenring weg, weil wir diese Operation später ausführen können.

Auf diese Weise wird $B_b$ zu einer Standard-Etale-Algebra über A. Die Surjektion (4) induziert eine Surjektion

$$B_b \twoheadrightarrow C_b$$

von Etale-Algebren über A. Die Zusammensetzung

$$A \longrightarrow B_b \twoheadrightarrow C_b$$

ist etale. Weil der linke Homomorphismus ebenfalls etale ist, muß es auch der rechte sein (vgl. Bemerkung 1.3.8 (v)). Die abgeschlossene Einbettung

$$y \in \text{Spec } C_b \hookrightarrow \text{Spec } B_b$$

ist somit etale, also offen, also eine offene Einbetttung. Die Einschränkung von f auf Spec $C_b$ ,

$$y \in \text{Spec } C_b \hookrightarrow \text{Spec } B_b \longrightarrow \text{Spec } A$$

ist somit die Zusammensetzung aus einer offenen Einbettung und einem Standard-Etal-Morphismus. Es gibt deshalb eine offene Hauptmenge Spec $B_{bb'}$ von Spec $B_b$ welche y enthält, sodaß die Einschränkung von f auf Spec $B_{bb'}$ isomorph ist zum natürlichen Morphismus

$$\text{Spec } B_{bb'} \longrightarrow \text{Spec } A,$$

also isomorph zu einem Standard-Etale-Morphismus.

**QED**.

**Bemerkungen**

(i) Die Bedingung, daß f flach ist, wird nur im letzten Teil des Beweises verwendet. Die obigen Argumente zeigen deshalb auch, daß jeder separable und unverzweigte Morphismus lokal eine Zusammensetzung aus einer abgeschlossenen Einbettung und einem Standard-Etal-Morphismus ist.

(ii) Der obige Beweis nimmt an, daß die Punkte $y \in Y$, in denen ein Morphismus

$$f: Y \longrightarrow X$$

lokal endlichen Typs etale ist, eine offene Menge bilden. Der Beweis dieser Aussage ist unser nächstes Ziel. Dieser besteht aus zwei Teilen. Zunächst muß gezeigt werden, die Menge der Punkte, in denen ein Morphismus flach ist, ist offen. Danach ist die analoge Aussage für die Menge der Punkte zu beweisen, in denen ein Morphismus separabel und unverzweigt ist.

## 2.1.5 Offenheit des Flachheitslokus

### *2.1.5.1 Formulierung in der Sprache der algebraischen Geometrie*

Seien $f: Y \longrightarrow X$ ein Morphismus lokal endlichen Typs und $\mathcal{M}$ eine kohärente Garbe von $\mathcal{O}_Y$-Moduln (z.B. $\mathcal{M} = \mathcal{O}_Y$). Dann ist die Menge

$$\{y \in Y \mid \mathcal{M}_y \text{ ist flach über } \mathcal{O}_{X,f(y)}\},$$

der Punkte $y \in Y$ in denen $\mathcal{M}_y$ flach ist über $\mathcal{O}_{X,f(y)}$ offen in Y. Die Menge ist nicht leer, falls X reduziert und irreduzibel ist.

---

[37] Wir können dabei die Menge D(b) verkleinern, indem wir b mit d multiplizieren und so erreichen, daß

$$D(b) \subseteq D(d)$$

gilt, und so b eine offene Umgebung des Punktes y von Y definiert, in deren Punkten f etale ist.

Diese Aussage läßt sich sofort in die Sprache der kommutativen Algebra übersetzen. Die Aussage ist äquivalent zur folgenden Aussage.

### *2.1.5.2 Formulierung in der Sprache der kommutativen Algebra*

Seien A ein noetherscher Ring, B eine endlich erzeugte A-Algebra und M ein endlich erzeugter B-Modul. Dann ist die folgende Menge offen in Spec B.

$$U := \{P \in \text{Spec } B \mid M_P \text{ ist flach über } A\}$$

Diese Menge ist nicht leer, falls A ein Integritätsbereich ist.

Zum Beweis benötigen wir zwei vorbereitende Aussagen: ein Kriterium für die Offenheit einer Menge von Primidealen und den Beweis eines Spezialfalls.

### *2.1.5.3 Zum Fall einer reduzierten und irreduziblen Basis*

Seien A ein noetherscher Integritätsbereich, B eine endlich erzeugte A-Algebra und M ein endlich erzeugter B-Modul. Dann gibt es ein von Null verschiedenes Element f von A,

$$0 \neq f \in A$$

mit der Eigenschaft, daß $M_f$ ein freier $A_f$-Modul ist.

Insbesondere ist die Menge U von 2.1.3.2 tatsächlich nicht leer, denn es gilt

$$D(f) \subseteq U.$$

**Beweis** (vgl. Matsumura (22.A)). Wir können annehmen,

$$M \neq 0.$$

Wir wählen eine echt aufsteigende Kette von B-Teilmoduln

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_n = M$$

mit

$$M_i/M_{i-1} \cong B/P_i \text{ und } P_i \in \text{Spec } B$$

Eine solche Kette existiert (vgl. Matsumura (7.E), Theorem 10). Da für jede kurze exakte Sequenz von B-Moduln

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

mit M' und M'' frei auch M frei ist, reicht es, die Behauptung für die $B/P_i$-Moduln

$$M_i/M_{i-1}$$

und jedes i zu beweisen. Mit anderen Worten, wir können annehmen,

B ist Integritätsbereich und M = B.

Falls die natürliche Abbildung $A \longrightarrow B$ einen nicht-trivialen Kern besizt, können wir f aus dem Kern wählen. Wegen $B_f = 0$ für solche Elemente f gilt dann die Behauptung trivialerweise. Wir können also annehmen, A ist eine Teilring von B,

$$A \subseteq B.$$

Sei K der Quotientenring von A,

$$K := Q(A).$$

Dann ist $B \otimes_A K = BK$ ($\subseteq Q(B)$) ein Integritätsbereich, der über K endlich erzeugt ist. Insbesondere gilt

$$n := \dim BK = \text{tr.deg}_K BK < \infty.$$

Wir führen den weiteren Beweis durch Induktion nach n. Nach dem Normalisierungssatz (Matsumura (14.G)) gibt es n Elemente

$$y_1,\ldots,y_n \in BK,$$

welche algebraisch unabhängig über K sind mit der Eigenschaft, daß

$$BK \text{ ganz über } K[y] = K[y_1,\ldots,y_n]$$

ist. Durch Multiplikation der $y_i$ mit gewissen Elementen aus B - {0} erreichen wir

$$y_1,\ldots,y_n \in B.$$

Nach Voraussetzung ist B endlich erzeugt über A,

$$B = A[b_1,\ldots,b_r]$$

Jedes der $b_i$ ist ganz über

$$K[y] = Q(A)[y]$$

Durch Multiplikation der Ganzheitsgleichung mit gewissen Elementen aus A - {0} erhalten wir eine Gleichung mit Koeffizienten aus A[y]. Diese zeigt, $gb_i$ ist ganz über B[y] für ein $g \in A - \{0\}$. Dabei können wir für jedes i dasselbe Element g wählen. Wir sehen so, die Algebra

$$B_g = A_g[b_1,\ldots,b_r]$$

ist ganz über $A_g[y]$. Indem wir A und B durch $A_g$ bzw. $B_g$ ersetzen, erreichen wir, daß

$$B \text{ ganz über } C := A[y]$$

ist. Insbesondere ist B endlich erzeugt als C-Modul (da B ganz und endlich erzeugt ist als C-Algebra). Wir wählen eine maximale Menge C-linear unabhängigen Elementen

$$b'_1, \ldots, b'_s \in B.$$

Diese definieren eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow C^m \longrightarrow B \longrightarrow B' \longrightarrow 0$$

mit einem endlich erzeugten C-Torsionsmodul B'. Weil C isomorph ist zu einem Polynomring über A, ist $C^m$ freier A-Modul. Es reicht also, die Behauptung für die A-Algebra C anstelle von B und den C-Modul B' anstelle von B zu beweisen.

$$B \to C,\ M \to B'.$$

Indem wir wie am Anfang des Beweises eine Kette von C-Teilmoduln von B' betrachten, reduzieren wir den Beweis auf den Fall von C/p-Moduln, $p \in \operatorname{Spec} C$.
Weil B' ein Torsionsmodul über C ist, können wir dabei annehmen, daß die auftretenden Primideale p ungleich Null sind.

Für jedes solche Primideal $p \in \operatorname{Spec} C$ hat aber

$$(C/p)\otimes K = CK/pK$$

eine Dimension < n = dim CK (was im Fall n = 0 bedeutet, CK = K also B' = 0, d.h. es liegt der triviale Induktionsanfang vor). Nach Induktionsvoraussetzung bezüglich n gilt die Behauptung für den C-Modul B'.
**QED**.

### *2.1.5.4 Ein Kriterium für offene Mengen von Primidealen*

Seien B ein noetherscher Ring und

$$U \subseteq \operatorname{Spec} B$$

eine Teilmenge. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.
(i) U ist offen in Spec B.
(ii) U genügt den folgenden beiden Bedingungen.

(a) U ist stabil gegenüber Generalisierungen.[38]

(b) Für jedes $P \in U$ ist enthält $V(P) \cap U$ eine nicht-leere offene Menge von $V(P)$.

**Beweis**. (i) ⇒ (ii). Nach Voraussetzung ist U offen, also von der Gestatl

$$U = \text{Spec } B - V(I)$$

mit einem Ideal I von B.

Zu Eigenschaft (a).

Seien p und q Primideale von B mit $p \subseteq q$ und $q \in U$. Dann liegt I nicht ganz in q, also erst recht nicht ganz im Teilideal p. Also gilt $p \in U$.

Zu Eigenschaft (b).

Weil U offen ist in Spec B, ist $V(P) \cap U$ offen in $V(P)$. Wegen $P \in V(P) \cap U$ ist

$$V(P) \cap U$$

eine nicht-leere offene Teilmenge von $V(P)$.

(ii) ⇒ (i). Seien

$$F := \text{Spec } B - U$$

und

$$\overline{F} := \text{die Abschließung von F in Spec B.}$$

Es reicht zu zeigen $\overline{F} \subseteq F$ (denn dann gilt $\overline{F} = F$, d.h F ist abgeschlossen, d.h. U ist offen). Auf Grund der Voraussetzungen gilt

(a') F ist stabil gegenüber Spezialisierungen.[39]

(b') Für kein $P \in \text{Spec } B - F$ ist $V(P) \cap F$ dicht in $V(P)$

Betrachten wir die Zerlegung der abgeschlossenen Menge $\overline{F}$ in irreduzible Komponenten:

$$\overline{F} = V(P_1) \cup \ldots \cup V(P_n)$$

mit Primidealen $P_i$ von Spec B, wobei keines der $P_i$ überflüssig sei, d.h. durch Weglassen von $V(P_i)$ entstehe für jedes i eine echte Teilmenge.Dann ist für jedes i die Differenz

$$V(P_i) - V(P_1) \cup \ldots \cup V(P_{i-1}) \cup V(P_{i+1}) \cup \ldots \cup V(P_n) \qquad (1)$$

nicht leer, also eine nicht-leere offene Teilmenge von $\overline{F}$.

Mit $F_i = V(P_i) \cap F$ gilt

$$F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$$

also

---

[38] Für Primideale $p \subseteq q$ gilt mit $q \in U$ auch $p \in U$. Zum Beispiel ist die irreduzible Kurve mit der Parameterdarstellung

$$\varphi(t) = (t^2, t^3)$$

eine Generalisierung von jedem ihrer Punkte $\varphi(t_0)$.

[39] Für Primideale $p \subseteq q$ gilt mit $p \in F$ auch $q \in F$. Zum Beipiel ist jeder Punkt $\varphi(t_0)$ der irreduziblen Kurve mit der Parameterdarstellung

$$\varphi(t) = (t^2, t^3)$$

eine Spezialisierung dieser Kurve.

$$\overline{F} = \overline{F}_1 \cup \ldots \cup \overline{F}_n \text{ und } \overline{F}_i \subseteq V(P_i).$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Teilmengen folgt[40]

$$\overline{F}_i = V(P_i) \text{ für jedes.}$$

Insbesondere gilt:

$$F_i = V(P_i) \cap F \text{ liegt dicht in } V(P_i). \qquad (2)$$

Nach Definition von $\overline{F}$ liegt F in $\overline{F}$ dicht. Der Durchschnitt mit (1) ist deshalb nicht leer. Es gibt ein

$$P \in V(P_i) \cap F,$$

d.h. ein Primideal P von Spec B mit $P_i \subseteq P \in F$. Wäre $P_i$ nicht in F, so wäre nach (b') die Menge

$$V(P_i) \cap F \text{ nicht dicht in } V(P_i),$$

im Widerspruch zu (2). Deshalb gilt

$$P_i \in F \text{ für jedes i.}$$

Ist $P \in \overline{F}$, so gilt $P_i \subseteq P$ für mindestens ein i. Nach (a') ist dann aber $P \in F$. Wir haben gezeigt,

$$\overline{F} \subseteq F,$$

also ist $F = \overline{F}$ abgeschlossen, also U = Spec B - F offen.
**QED**.

***2.1.5.5 Beweis des Offenheitssatzes (vgl. Matsumura (22.B), Th. 52)***
Seien A ein noetherscher Ring, B eine endlich erzeugte A-Algebra und M ein endlich erzeugter B-Modul. Wir haben zu zeigen, die Menge

$$U := \{P \in \text{Spec } B \mid M_P \text{ ist flach über } A\}$$

ist offen in Spec B. Nach 2.1.5.4 reicht es zu zeigen,
(a) U ist stabil unter Generalisierungen.
(b) Für jedes $P \in U$ enthält $V(P) \cap U$ eine nicht-leere offene Teilmenge von V(P).
Zu (a).
Seien p und q Primideale von B mit $q \subseteq p$ und $M_p$ flach über A. Wir haben zu zeigen, $M_q$ ist ebenfalls flach über A, d.h. es gilt

$$\text{Tor}_i^A(M_q, N) = 0 \qquad (1)$$

für jeden A-Modul N und jedes i > 0. Weil $M_p$ flach ist über A, gilt jedenfalls

$$\text{Tor}_i^A(M_p, N) = 0,$$

d.h. für jede projektive Auflösung von N über A, sagen wir

$$P_* \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

erhält man durch Tensorieren mit $M_p$ über A eine exakte Sequenz

[40] Man denke sich jedes der $\overline{F}_i$ in irreduzible Teilmengen zerlegt.

$$M_p \otimes_A P_* \longrightarrow M_p \otimes_A N \longrightarrow 0.$$

Weil $B_q$ ein Quotientenring von $B_p$ und als solcher flach über $B_p$ ist, erhält man durch Tensorieren mit $B_q$ über $B_p$ eine exakte Sequenz

$$M_q \otimes_A P_* \longrightarrow M_q \otimes_A N \longrightarrow 0.$$

Die Homomologie-Gruppen dieser Sequenz sind trivial, d.h. es gilt die zu beweisende Aussage (1).

Zu (b).

Sei $P \in U$. Wir bezeichnen mit

$$p := P \cap A.$$

das vollständige Urbild von P in A. Für $Q \in V(P)$, d.h. $P \subseteq Q$, gilt dann $pB_Q \subseteq QB_Q = \mathrm{rad}\, B_Q$ ( = Jacobson-Radikal). Auf Grund des lokalen Kriteriums der Flachheit gilt deshalb:

$$M_Q \text{ ist flach über } A \Leftrightarrow M_Q/pM_Q \text{ ist flach über } A/p \text{ und } \mathrm{Tor}_1^A(M_Q, A/p) = 0. \qquad (2)$$

Wir wenden jetzt die Aussage 2.1.5.3 an mit (A/p, B/pB, M/pM) anstelle von (A,B,M). Auf Grund dieser Aussage gibt es ein Element $f \in A - p$ derart, daß

$$(M/pM)_f \text{ ein freier } (A/p)_f$$

ist. Für $Q \in \mathrm{Spec}\, (B/pB)_f = V(pB) \cap D(f)$ ist $(M/pM)_Q$ ein Quotienten-Modul von $(M/pM)_f$ also ebenfalls flach über $(A/p)_f$ (nach Eigenschaft (a)), und damit auch über A/p. Die erste Bedinung auf der rechten Seite von (2) ist damit erfüllt für alle

$$Q \in V(pB) \cap D(f)$$

und damit erst recht für alle

$$Q \in V(P) \cap D(f).$$

Dasselbe gilt aber auch für die zweite Bedingung rechts. weil $M_P$ flach ist über A, gilt

$$\mathrm{Tor}_1^A(M_P, A/p) = 0,$$

und weil mit $Q \in V(P)$ der Ring $B_Q$ ein Quotientenring von $B_P$ ist, gilt

$$\mathrm{Tor}_1^A(M_Q, A/p) = \mathrm{Tor}_1^A(B_Q \otimes_{B_P} M_P, A/p) = B_Q \otimes_{B_P} \mathrm{Tor}_1^A(M_P, A/p) = 0.$$

Nach (2) ist $M_Q$ ist flach über A für alle $Q \in V(P) \cap D(f)$. Die Menge $V(P) \cap D(f)$ ist wegen $f \in A\text{-}p \subseteq B\text{-}P$ eine nicht-leere offene Menge von V(P), d.h. Bedingugn (b) ist erfüllt.

### 2.1.6 Offenheit des Etale-Locus, Abgeschlossenheit des Verzweigungsortes

Sei $f: Y \longrightarrow X$ ein Morphismus lokal endlichen Typs. Dann bilden die Punkte $y \in Y$, für welche $\mathcal{O}_{Y,y}$ flach ist über $\mathcal{O}_{X,f(x)}$ und $\Omega_{Y/X,y} = 0$ gilt, eine offene Teilmenge von Y.

Es gibt deshalb genau eine maximale offene Teilmenge $U \subseteq Y$, auf welcher f etale ist.

**Beweis**. Nach 2.1.5.1 mit $\mathcal{M} = \mathcal{O}_Y$ ist die Menge

$$\{y\in Y \mid f \text{ ist flach in } y\}$$

offen in Y. Es reicht deshalb zu zeigen, auch die folgende Menge ist offen in Y.

$$\{y \in Y \mid \Omega_{Y/X,y} = 0\}$$

Weil die Garbe der Differentialformen

$$\Omega_{Y/X}$$

eine kohärente Garbe ist, läßt sich diese Aussage leicht auf die folgende Aussage der kommutativen Algebra reduzieren.

Seien A ein noetherscher Ring, B eine endlich erzeugte A-Algebra und M ein endlich erzeugter B-Modul. Dann ist

$$U := \{P \in \text{Spec } B \mid M_P = 0\}$$

eine offene Teilmenge von Spec B. Zum Beweis fixieren wir ein endliches Erzeugendensystem von M über B, sagen wir

$$M = Bm_1 + ... + Bm_r.$$

Sei $P \in U$. Es reicht zu zeigen, es gibt eine offene Hauptmenge von Spec B, die P enthält und ganz in U liegt. Wegen $M_P = 0$, wird jedes Element $m \in M$ von einem Element von B-P annulliert. Das gilt insbesondere für die Erzeugter $m = m_i$. Da deren Anzahl endlich ist und P ein Primideal ist, gibt es ein $f \in B - P$, welches jedes $m_i$ annulliert. Dann gilt aber $M_f = 0$, also

$$P \in D(f) \subseteq U.$$

**QED**.

**Bemerkungen**:

(i) Aus den obigen Argumenten ergibt sich insbesondere, daß die Menge

$$\{y \in Y \mid \Omega_{Y/X,y} = 0\}$$

der Punkte, in denen ein Morphismus $f: Y \longrightarrow X$ lokal endlichen Typs separabel und unverzweigt ist, offen ist in Y. Das Komplement dieser Menge ist also abgeschlossen, kann also durch eine Idealgarbe

$$I \subseteq \mathcal{O}_Y$$

definiert werden, d.h. es gibt ein Ideal I mit der Eigenschaft, daß der Träger

$$\text{Supp } \mathcal{O}_Y/I = \{y \in Y \mid \Omega_{Y/X,y} \neq 0\}$$

gerade aus den Punkten besteht, in denen f nicht separabel und unverzweigt ist. Ein solches Ideal ist zum Beispiel der Annullator von $\Omega_{Y/X}$,

$$I = \text{Ann}_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X} = \{s \in \mathcal{O}_Y \mid s\cdot\Omega_{Y/X}\},$$

denn für den Annullator I von $\Omega_{Y/X}$ gilt

$$\Omega_{Y/X,y} = 0 \Leftrightarrow I_y = \mathcal{O}_{Y,y} \Leftrightarrow (\mathcal{O}_Y/I)_y = 0 \Leftrightarrow y \notin \text{Supp } \mathcal{O}_Y/I.$$

d.h.

$$\mathrm{Supp}\ \mathcal{O}_Y/I = \{y \in Y \mid \Omega_{Y/X,y} \neq 0\}.$$

In der zahlentheoretischen Situation kennen wir ebenfalls ein solches Ideal: kommt f von einem injektiven Homomorphismus

$$A \twoheadrightarrow B$$

von Dedekind-Ringen zu einer endlichen separablen Körpererweiterung[41], so besteht die Menge der Punkte $P \in \mathrm{Spec}\ B$, in denen B verzweigt ist über A (im zahlentheoretischen Sinne), gerade aus den Primidealen, die in der Faktorzerlegung der Diskriminate $\delta$ vorkommen, d.h. es gilt

$$V(I) = V(\delta).$$

Man kann zeigen in der zahlentheoretischen Situation gilt mit $B = A[T]/(P)$ und einem normierten Polynom $P \in A[T]$ gilt sogar

$$\delta = I. \tag{1}$$

Mit anderen Worten, der Annullator des Moduls der relativen Differentiale

$$\delta_{Y/X} := \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}$$

verallgemeinert den Begriff der zahlentheoretischen Diskriminante. Die Bedinung $B = A[T](P)$ entspricht dabei gerade der Forderung, daß die Körpererweiterung $Q(B)/Q(A)$ unverzweigt oder total verzweigt ist (vgl. Serre: Corps Locaux, Kapitel III, §7, Proposition 14). Im allgemeinen zahlentheoretischen Fall ist die Situation komplexer (vgl. Kunz, E.: Kähler differentials, §10, Definition 10.1 und Anhang G, Theorem G.11).

(ii) Seien L/K eine endliche separable Körper-Erweiterung, A ein Dedekind-Ring mit dem Quotientenkörper A und B die ganze Abschließung von A in L. Wir nehmen an, B ist eine einfache Erweiterung von A,

$$B \cong A[T]/(P)$$

mit einem normierten Polynom $P \in A[T]$. Dann ist

$$\mathrm{Ann}_B\ \Omega_{B/A}$$

gerade die Diskriminate von B über A.

**Beweis von (ii)**. Wir verwenden die Aussagen der ersten Abschnitte im ersten Kapitel des Buches von Cassels und Fröhlich, Algebraic number theory. Nach Voraussetzung gilt

$$B \cong A[T]/(P)$$

Durch Anwenden des Funktors $\otimes_A K$ erhalten wir $L = K[T]/(P)$. Nach Proposition I.4.6(iii) erhalten wir für die Diskriminante

$$\delta = P'(x)B \text{ mit } x = T \bmod (P).$$

Berechnen wir den Differentialmodul und dessen Annullator.
Die zweite fundamentale exakte Sequenz zur A-Algebra $B = A[T]/(P)$ (vgl. Matsumura 26.I, Theorem 58) hat die Gestalt

$$(P)/(P^2) \xrightarrow{d} \Omega_{A[T]/A} \otimes_{A[T]} B \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0.$$

Nun ist

$$\Omega_{A[T]/A} = A[T]dT \cong A[T]$$

der freie A[T]-Modul mit dem Erzeuger dT, also

---

[41] d.h. A und B seien die Ringe der ganzen Zahlen der beteiligten Körper.

$$\Omega_{A[T]/A}\otimes_{A[T]}B = B\cdot dT \cong B$$

der freie B-Modul mit dem Erzeuger dT. Das Bild von d besteht aus den Elementen dieses Moduls, die repräsentiert werden durch die Differentiale der Gestalt

$$d(F\cdot P) = dF\cdot P + F\cdot dP = (F'\cdot P + F\cdot P')\cdot dT \text{ mit } F\in A[T]$$

Der ersten Summand des Koeffizienten vond dT rechts repräsentiert die Null in B = A[T]/(P). Deshalb ist

$$\Omega_{B/A} = (B/\{F\cdot P' \mid F\in A[T]\}B)\cdot dT \cong B/P'\cdot B.$$

Damit gilt

$$\mathrm{Ann}_B\, \Omega_{B/A} = P'\cdot B = \delta.$$

**QED**.

**Bemerkung**

Ein Standard-Etale-Morphismus kommt von einer Zusammensetzung aus einer polynomialen Erweiterung, dem Übergang zu einem Faktorring und dem Übergang zu einem Quotientenring. Wir wollen hier noch eine Varianten des Struktursatzes angeben, bei der man auf den Übergang zu einem Quotientenring verzichten kann.

### 2.1.7 Schwacher Struktursatz

Sei f: $Y \longrightarrow X$ ein Morphismus von Schemata, welcher in den Punkten einer Umgebung von $y \in Y$ etale ist. Dann gibt es offene affine Umgebungen

$$V = \mathrm{Spec}\, B \subseteq Y \text{ und } U = \mathrm{Spec}\, B \subseteq X$$

von $y \in X$ bzw. $x := f(y) \in X$ derart, daß $f(V) \subseteq U$ gilt, d.h. die Einschränkung von f auf V definiert einen Morphismus

$$f|_V: V \longrightarrow U,$$

mit

$$B = A[T_1,...,T_n]/(P_1,...,P_n),$$

wobei die Restklasse von $\det(\frac{\partial P_i}{\partial T_j})$ in C eine Einheit ist.

**Beweis-Skitze**. Man verwende den Isomorphismus[42]

$$(A[X]/(P(X)))_{F(X)} \cong A[X,Y]/(P(X), Y\cdot F(X) - 1)$$

**QED**.

### 2.1.8 Struktursatz für normale Basen

Sei f: $Y \longrightarrow X$ ein Etale-Morphismus mit X normal. Dann hat f lokal die Gestalt

$$\mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$$

mit $B = (A[T]/(P))_b$ mit einem Integritätsbereich A und einem normierten und separablen Polynom P.

**Beweis**. siehe Milne, Proposition I.3.19.

---

[42] Ist $h:A[X] \longrightarrow B$ ein Homorpismus von Ringen mit 1, bei welchem P in die Null und F in eine Einheit abgebildet wird, so faktorisiert sich dieser eindeutig über

$$A[X,Y]/(P(X), Y\cdot F(X) - 1).$$

Ist nämlich $b \in B$ das Inverse von h(F(X)), so hat der Homomorphismus von A-Algebren

$$A[X,Y] \longrightarrow B,\ X \mapsto h(X),\ Y \mapsto b,$$

einen Kern, der P(X) und $Y\cdot F(X) - 1$ enthält.

## 2.2 Eigenschaften von Etale-Morphismen

### 2.2.1 Die Schnitte von Etale-Morphismen

Sei $f: Y \longrightarrow X$ ein Etale-Morphismus (bzw. ein separierter Etale-Morphismus) mit
X zusammenhängend.
Dann ist jeder Schnitt von f eine offene Einbettung (bzw. ein Isomorphismus mit einer offenen Zusammenhangskomponente von Y).

Insbesondere besteht eine 1-1-Korrespondenz zwischen der Menge dieser Schnitte und der Menge der offenen Teilmengen

$$Y_i \subseteq Y$$

von Y (bzw. der Menge der offenen und abgeschlossenen Teilmengen von Y), für welche die Einschränkung von f auf $Y_i$ ein Isomorphismus ist.

Im separierten Fall ist jeder Schnitt von f insbesondere durch seinen Wert in einem einzigen Punkt bereits eindeutig bestimmt.

**Beweis** siehe Milne, Corollary I.3.12.
**Folgerung**
Seien X ein Schema und

$$f, g: Y' \longrightarrow Y$$

zwei X-Morphismen mit
Y' zusammenhängend und
Y etale und separiert.

Es existiere ein Punkt $y' \in Y'$, für welchen die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. $f(y') = g(y') =: y$ und
2. die durch f und g induzierten Abbildungen $k(y) \longrightarrow k(y')$ stimmen überein.

Dann gilt sogar $f = g$.
**Beweis**. Die Graphen von f und g,

$$\Gamma_f: Y' \longrightarrow Y'\times_X Y \text{ und } \Gamma_g: Y' \longrightarrow Y'\times_X Y$$

sind (nach Definition) Schnitte der Projektion auf den ersten Faktor

$$p_1: Y'\times_X Y \longrightarrow Y'.$$

Diese Projektion $p_1$ etale und separiert (als Ergebnis eines Basiswechsels des separierten Etal-Morphismus $Y \longrightarrow X$). Nach 2.2.1 sind die Bilder der beiden Graphen Zusammenhangskomponenten von $Y'\times_X Y$.

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & Y'\times_X Y \\ \cup & & \cup \\ \operatorname{Spec} k(y) & \longrightarrow & \operatorname{Spec} k(y')\otimes_{k(x)} k(y) \end{array}$$

Nach Voraussetzung besitzen die Graphen denselben Wert in y'. Die beiden Zusammenhangskomponenten haben also einen gemeinsamen Punkt, stimmen also überein. Damit sind aber die beiden Schnitte gleich (nach 2.2.1):

$$\Gamma_f = \Gamma_g.$$

Wir setzen mit der Projektion auf den zweiten Faktor zusammen und erhalten $f = g$.
**QED**.

### 2.2.2 Erhaltung von Normalität und Regularität

Sei f: Y ⟶ X ein Etale-Morphismus. Dann gilt:

(i) Ist das Schema X normal, so ist auch Y normal.
(ii) Ist das Schema X regulär, so ist auch Y regulär.
Insbesondere ist das Polynom P von 2.1.6 außerdem noch irreduzibel.
**Beweis** siehe Milne I.3.17.

### 2.2.3 Kriterium für Etale-Morphismen

Sei f: Y ⟶ X ein unverzweigter Morphismus von Schemata mit X normal. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) f ist etale.

(ii) Für jeden Punkt y ∈ Y ist die induzierte Abbildung $\mathcal{O}_{X,f(y)} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ injektiv.

**Beweis** siehe Milne I.3.20.

### 2.2.4 Struktursatz für Etale-Morphismen über normalen Schemata

Seien X ein zusammenhängendes normales Schema und

$$K := R(X)$$

dessen rationaler Funktionenkörper. Weiter seien

$$L/K$$

eine endliche separable Körpererweiterung,

X' die Normalisierung von X in L[43]

und U ⊆ X' ein offenes Teilschema, welches separabel und unverzweigt über X ist. Dann ist U auch etal über X.

Umgekehrt hat jeder Etale-Morphismus f: Y ⟶ X (endlichen Typs) die Gestalt

$$Y = \vee U_i \longrightarrow X,$$

wobei die Einschränkungen $U_i \longrightarrow X$ wie oben beschrieben entstehen.
**Beweis** siehe Milne I.3.21.

### 2.2.5 Kriterien für offene Einbettungen

(i) Jede abgeschlossene Einbettung f: Y ⟶ X von Schemata, welche außerdem flach (also etale) ist, ist eine offene Einbettung.

(ii) Sei f: Y ⟶ X ein Morphismus von Schemata. Dann sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent.
(a) f ist eine offene Einbettung.
(b) f ist separiert, universell injektiv[44] und etale.

**Beweis**. Zu (i) siehe Milne, I.3.10.

---

[43] Man nehme über jeder affinen offenen Teilmenge U = Spec A ⊆ X die ganze Abschließung von A in L, klebe die so entstehenden Algebren zusammen zu einer $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ und setze X' := Spec $\mathcal{A}$.

[44] Nach EGA I, 3.7.1 ist ein Morhismus f:Y ⟶ X genau dann universell injektiv, wenn er injektiv ist und für jeden Punkt y ∈ Y, die Körpererweiterung κ(y)/κ(f(y)) radikal ist, d.h. der große Körper entsteht aus dem kleinen durch Adjunktion von algebraischen Elementen, die in jeder algebraischen Erweiterung von κ(f(y)) nur zu sich selbst adjungiert sind, d.h. die Erweiterung ist rein inseparabel.

Zu (ii). (a) $\Rightarrow$ (b) ist trivial, weil bei Basiswechsel aus offenen Einbettungen wieder offene Einbettungen entstehen.

Zu (ii). (b) $\Rightarrow$ (a). Siehe Milne, I.3.11.

## 2.3 Formale Beschreibung und Glattheit

### 2.3.1 Definitionen

Seien X ein Schema und

$$F: (Sch/X)^{op} \longrightarrow Ens$$

ein (kontravarianter) Funktor auf der Kategorie der Schemata über X mit Werten in der Kategorie der Mengen. Dieser Funktor heißt formal glatt (bzw. formal unverzweigt (und separabel), bzw. formal etale), wenn für jedes X-Schema X' und jedes Teilschema

$$X'_0 \hookrightarrow X',$$

welches durch ein nilpotentes Ideal I definiert wird, die induzierte Abbildung

$$F(X') \longrightarrow F(X'_0)$$

surjektiv (bzw. injektiv, bzw. bijektiv) ist.

Ein X-Schema Y heißt formal glatt, formal unverzweigt, bzw. formal etale, wenn der Funktor

$$h_Y := Hom_X(?, Y)$$

formal glatt, formal unverzweigt, bzw. formal etale ist.

### 2.3.2 Etale-Morphismen und formale Etale-Morphismen

Jeder Etale-Morphismus ist formal etale.

**Beweis** siehe Milne, der Beweis vor Theorem I.3.23. Den der sehr viel schwierigeren Umkehrung dieser Aussage findet man in der Monographie von M. Artin: Théoremes de representabilité pour espaces algébriques, Presses de l'Université de Montréal, Montréal 1973.

### 2.3.3 Topologische Invarianz des Begriffs des Etale-Morphismus

Seien X ein Schema und $X_0 \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Teilschema, welches durch eine nilpotente Ideal-Garbe definiert wird. Dann ist der Basiswechsel-Funktor

$$(\text{etale Schemata}/X) \longrightarrow (\text{etale Schemata}/X_0),\ Y \mapsto Y\times_X X_0\ ,$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

**Beweis**. Die Angabe eines X-Morphismus Y $\longrightarrow$ die etale sind über X, ist äquivalent zur Angabe von dessen Graphen, d.h. zur Angabe eines Schnitts der natürlichen Projektion

$$Y\times_X Z \longrightarrow Y.$$

Weil Y und Z etale sein sollen über X, ist diese natürlichen Projektion ein Etale-Morphismus. Nach 2.2.1 entsprechen deren Schnitte gerade den offenen Teilschemata von

$$Y\times_X Z,$$

welche sich isomorph auf Y projezieren.

Dieselbe Aussage ist auch für die $X_0$-Morphismen $Y_0 \longrightarrow Z_0$ richtig. Deshalb ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_X(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{X_0}(Y_0, Z_0),\ f \mapsto f \times_X X_0,$$

d.h. der Funktor $\times_X X_0$ ist völlig treu. Zum Beweis der Behauptung ist nur noch zu zeigen, jedes $X_0$-Schema $Y_0$, welches etale ist über $X_0$, ist isomorph zu einem Schema der Gestalt $Y \times_X X_0$ mit Y etale über X. Es reicht zu zeigen, jeder Schnitt der natürlichen Projektion

$$Y_0 \times_{X_0} X_0 \longrightarrow Y_0.$$

kommt von einem Schnitt einer natürlichen Projektion

$$Y \times_X X \longrightarrow Y.$$

Weil diese Schnitte, falls sie existieren, eindeutig sind (wegen der völligen Treue des Funktokrs $\times_X X_0$), reicht es deren Existenz lokal zu beweisen. Im lokalen Falle können wir aber annehmen,

$$X = \mathrm{Spec}\ A,\ X_0 = \mathrm{Spec}\ A/I,\ I \subseteq A \text{ nilpotentes Ideal}$$

und $Y_0 \longrightarrow X_0$ ist ein Standard-Etale-Morphismus, d.h.

$$Y_0 = \mathrm{Spec}\ C_0 \text{ mit } C_0 = (B_0)_{F_0},\ B_0 = A_0[T]/(P_0),\ F_0 \in A_0[T]$$

und einem normierten Polynom $P_0 \in A_0[T]$ mit

$$(P_0, P'_0)_{F_0} = A_0[T]_{F_0}. \qquad (1)$$

Wir wählen ein normiertes Polynom $P \in A[T]$, dessen Restklasse in $A_0[T]$ gleich $P_0$ ist, und ein Polynom $F \in A[T]$ mit der Restklasse $F_0$. Dann gilt

$$A_0[T]_{F_0} = A[T]_F/IA[T]_F$$

und die Identität (1) bekommt die Gestalt

$$(P, P')_F + IA[T]_F = A[T]_F.$$

Weil IA[T] nilpotent ist, ergibt sich nach dem Lemma von Nakayama sogar

$$(P, P')_F = A[T]_F.$$

Mit

$$C := B_F,\ B = A[T]/(P)$$

gilt dann

$$C_0 \cong C \otimes_A A_0,$$

und der natürliche Homomorphismus $A \longrightarrow C$ definiert einen Standard-Etale-Morphismus

$$Y \longrightarrow X,$$

aus dem durch Anwenden von $\times_X X_0$ gerade der gegebene Etale-Morphismus

$$Y_0 \longrightarrow X_0$$

entsteht.
**QED**.

### 2.3.4 Charakterisierung der formal glatten Morphismen

Sei f: $Y \longrightarrow X$ ein Morphismus lokal endlichen Typs. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) f ist formal glatt.

(ii) Für jeden Punkt $y \in Y$ gibt es affine offene Umgebungen

$$y \in V \subseteq Y \text{ und } x := f(y) \in U \subseteq X$$

mit $f(V) \subseteq U$ derart, daß die Einschränkung $f|_V: V \longrightarrow U$ zerfällt in eine Komposition

$$V \longrightarrow V' \longrightarrow U$$

von Schema-Morphismen mit $V \longrightarrow V'$ etale und $V' = \mathbb{A}^n_U \longrightarrow U$ die natürliche Projektion eines affinen Raums über U auf dessen Basis U.

(iii) Für jeden Punkt $y \in Y$ gibt es affine offene Umgebungen

$$y \in V = \operatorname{Spec} C \subseteq Y \text{ und } x := f(y) \in U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$$

mit $f(V) \subseteq U$ und

$$C = A[T_1,...,T_n]/(P_1,...,P_m),\ m \le n,$$

wobei die Restklassen der m×m-Minoren der Matrix $(\frac{\partial F_i}{\partial T_j})$ in C das Einheitsideal erzeugen.

(iv) f ist ein flacher Morphismus, und für jeden geometrischen Punkt

$$\bar{x}:\operatorname{Spec} \bar{k} \longrightarrow X$$

ist die Faser $Y_{\bar{x}} \longrightarrow \bar{x}$ formal glatt.

(v) f ist ein flacher Morphismus, und für jeden geometrischen Punkt

$$\bar{x}:\operatorname{Spec} \bar{k} \longrightarrow X$$

ist die Faser $Y_{\bar{x}} \longrightarrow \bar{x}$ regulär.

(vi) f ist ein flacher Morphismus, und die Garbe $\Omega_{Y/X}$ ist eine lokal freie Garbe, deren Rang gleich der relativen Dimension von Y/X ist.[45]

**Beweis** siehe Demazure & Gabriel: Groupes Algébriques I, Géometrie algébrique, géneralite´s, groupes commutifs, Masson, Paris 1970.

**Bemerkungen**

(i) Ist f ein Morphismus endlichen Typs, bedeuten die Bedingungen (iv) und (v) gerade, daß f eine Familie von nicht-singulären Varietäten ist.

(ii) Ist f ein Morphimus endlichen Typs, so sind nach Bedingung (ii) die Etale-Morphismen gerade die quasi-endlichen glatten Morphismen.

### 2.3.5 Existenz von Anhebungen entlang glatter Morphismen

Sei f: $Y \twoheadrightarrow X$ ein glatter surjektiver Morphismus mit X quasi-kompakt. Dann existiert ein ein surjektiver Etal-Morphismus g: $X' \twoheadrightarrow X$ mit X' affin und ein kommutatives Diagramm von Schema-Morphismen

[45] Für nicht-singuläre Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist diese Bedingung äquivalent zur Glattheit von f im Sinne von Hartshorne (vgl. Hartshorne, Proposition III.10.4 und Theorem III.10.2.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \nwarrow \quad \nearrow^{g} & \\ & X' & \end{array}$$

Mit anderen Worten, eine Etale-Erweiterung von X läßt sich entlang f anheben.
**Beweis** siehe Grothendieck & Dieudonné: EGA IV 17.16.3.

## 2.4. Henselsche Ringe

### 2.4.1 Vereinbarungen und Bezeichnungen

In diesem Abschnitt bezeiche

$$(A, m, k)$$

einen lokalen Ring A mit dem maximalen Ideal m und dem Restekörper k = A/m. Den natürlichen Homomorphismus auf den Restekörper werden wir durch einen Querstrich beszeichnen,

$$A \longrightarrow k,\ a \mapsto \bar{a},$$

und dieselbe Bezeichnung verwenden wir auch für den induzierten Homomorphismus der Polynom-Algebren

$$A[T] \longrightarrow k[T],\ f \mapsto \bar{f},$$

welcher die Koeffizienten jedes Polynoms durch deren Restklassen ersetzt.
Zwei Polynome von k[T] heißen <u>relativ prim</u>, wenn sie in keiner Körper-Erweiterung von k eine gemeinsamen Nullstellen besitzen. Zwei Polynome $f, g \in A[T]$ heißen <u>relativ prim im engeren Sinne</u> oder auch <u>stark relativ prim</u>, wenn sie gemeinsam das 1-Ideal erzeugen,

$$(f, g)A[T].$$

Der Begriff des Henselschen Rings aximatisiert die Eigenschaften, des sogenannten Henselschen Lemmas der Zahlentheorie. Vor dessen Formulierung erinnern wir hier an den Begriff des vollständingen lokalen Rings. Für jeden lokalen Ring (A,m) und jedes Element $x \in A$ definieren wir die Ordnung von x als

$$\mathrm{ord}(x) := \mathrm{ord}_m(x) := \sup \{n \in \mathbb{Z} \mid x \in m^n\}$$

fixieren eine reelle Zahl $\rho \in (0,1)$ aus dem offenen Einheitsintervall und setzen

$$\|x\| := \rho^{\mathrm{ord}(x)},$$

wobei $\rho^{\infty} = 0$ sei. Auf diese Weise ist auf A eine Halbnorm[46] definiert, welche im Fall, daß der Ring A noethersch ist, sogar eine Norm[47] ist. Wir könen den Ring A bezüglich dieser Norm vervollständigen und erhalten wieder einen lokalen Ring

$$\hat{A} := \varprojlim_{n \longrightarrow \infty} A/m^n,$$

dessen Halbnorm eine Norm ist, die die Halbnorm von A fortsetzt bezüglich der natürlichen Abbildung

$$A \longrightarrow \hat{A},\ x \mapsto (x \bmod m^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

---

[46] Es gilt die $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$ für $y \in A$ und x aus A oder $\mathbb{Z}$, und es gilt die Dreiecksungleichung.

[47] $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(diese Abbildung ist injektiv im noetherschen Fall) und in welchem jede Cauchy-Folge konververt. Man nennt $\hat{A}$ die Vervollständigung von A (bezüglich der natürlichen Topologie). Es das maximale Ideal von $\hat{A}$ wird vom Bild des maximalen Ideals von A erzeugt,

$$\hat{m} = m\hat{A},$$

und die natürlichen Abbildung $A \longrightarrow \hat{A}$ induziert einen Isomorphismus der Restekörper

$$k \xrightarrow{\cong} k(\hat{A}) = \hat{A}/\hat{m}.$$

Im noeterschen Fall ist die natürliche Abbildung $A \longrightarrow \hat{A}$, flach, also etale.

### 2.4.2 Henselsches Lemma

Seien (A, m, k) ein vollständiger lokaler Ring und $f \in A[T]$ ein normiertes Polynom mit

$$\bar{f} = g_0 h_0$$

und relativ primen normierten Polynomen $g_0, h_0 \in k[T]$, so gibt es normierte Polynome

$$g, h \in A[T]$$

mit

$$f = g \bullet h$$

und

$$\bar{g} = g_0,\ \bar{h} = h_0.$$

**Beweis**: siehe Matsumura, H.: Commuative rings theory, Theorem 8.3 oder - im Fall von diskreten Bewertungsringen - Cassels & Fröhlich, Algebraic number theory, Appendix C zu Kapitel II.
**QED**.
Ein nicht notwendig vollständiger lokaler Ring, für den dieses Lemma trotzdem gilt, heißt Henselscher Ring.
**Bemerkungen**
(i) Die Polynome g und h des Henselschen Lemmas sind automatisch relativ prim im engeren Sinne. Allgemeiner gilt für Polynome

$$f, g \in A[T] \text{ mit } f \text{ normiert,}$$

deren Restklassen in k[T] relativ prim sind, daß dann f und g relativ prim im engeren Sinne sind.
(ii) Die Zerlegung von f im Henselschen Lemma in die Faktoren g und h ist eindeutig.

**Beweis**. Zu (i). Sei

$$M := A[T]/(f,g).$$

Weil f normiert ist, ist M ein endlich erzeugter A-Modul. Weil $\bar{f}$ und $\bar{g}$ relativ prim in k[T] sind, gilt

$$M/mM = k[T]//(\bar{f}, \bar{g}) = 0,$$

also

$$M = mM.$$

also nach Nakayama M = 0.
Zu (ii). Sei

$$f = gh = g'h'$$

mit normierten Polynomen g' und h', deren Restklassen gleich $g_0$ bzw. $h_0$ sind. Weil

$$\bar{g} \text{ und } \bar{h} = \bar{h}'$$

relativ prim sind, sind g und h' relativ prim im engeren Sinne. Es gibt also Polynome $r,s \in A[T]$ mit

$$1 = gr + h's.$$

Multiplikation mit g' liefert

$$\begin{aligned} g' &= g'gr + g'h's \\ &= g'gr + fs \\ &= g'gr + ghs \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, g teit g'. Da beiden Polynome normiert sind und denselben Grad $\deg g_0$ besitzten, müssen sie gleich sein,

$$g' = g.$$

Damit gilt aber auch

$$h' = h.$$

**QED**.

### 2.4.3 Eigenschaften Henselscher Ringe

Sei $x \in X := \operatorname{Spec} A$ der abgeschlossene Punkt (d.h. $x = m$). Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) A ist ein Henselscher Ring.

(ii) Jede endliche A-Algebra B zerfällt in ein direktes Produkt

$$B = \prod_{i=1}^{n} B_i ,$$

wobei die Faktoren Lokalisierungen von B bezüglich maximaler Ideale von B sind,

$$B_i \cong B_{m_i} \text{ mit } m_i \text{ maximal in } B.$$

(iii) Für jeden quasi-endlichen separierten Morphismus $f: Y \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$ zerfällt Y in eine disjunkte Vereinigung

$$Y = Y_0 \vee Y_1 \vee \ldots \vee Y_n$$

mit Schemata $Y_i$ , welche endlich über X sind mit

$Y_i$ = Spektrum eines lokalen Rings welcher endlich über A ist für $i > 0$ und

$x \notin f(X_0)$.

(iv) Jeder Etal-Morphismus $f: Y \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$, für welchen die Faser über x einen Punkt $y \in f^{-1}(x)$ mit $k(y) = k(x)$ enthält, besitzt einen Schnitt $s: Y \longrightarrow X$.
Aussage (iv) ist äquivalent zu den folgenden Spezialfällen dieser Aussage.
(iv)' Y = Spec B mit einer endlichen lokalen Etal-Algebra über A.
(iv)" f ist ein Standard-Etal-Morphismus.

(v) <u>Satz über implizite Funktionen</u>. Seien $f_1, \ldots , f_n \in A[T_1, \ldots , T_n]$ Polynome, welche modulo m eine gemeinsame Nullstelle $a = (a_1, \ldots , a_n) \in k^n$ besitzen, d.h.

$$\bar{f}_i(a) = 0 \text{ für } i = 1,\ldots,n,$$

wobei

$$\det \left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial T_i}(a)\right) \neq 0$$

gilt. Dann gibt es eine gemeinsame Nullstelle $b \in A^n$ der $f_i$ ,

$$f_i(b) = 0 \text{ für } i = 1,...,n,$$

mit $\overline{b} = a$.

(vi) Sei $f \in A[T]$ ein Polynom, dessen Restklasse modulo m über k in zwei teilerfrende Faktoren zerfällt,

$$\overline{f} = g_0 h_0$$

mit einem normierten Polynom $g_0$. Dann zerfällt f über A in ein Produkt

$$f = g \bullet h$$

mit g normiert und $\overline{g} = g_0$, $\overline{h} = h_0$.

**Beweis**. (i) $\Rightarrow$ (ii).
Weil B endlich ist über A, liegt jedes maximale Ideal von B über dem maximalen Ideal m von A.

1. Schritt. Eigenschaften idempotenter Elemente eines kommutativen Rings R mit 1.
Ein idempotentes Element von R ist ein Element $x \in R - 0$ mit $x^2 = x$. Das Element 1 ist idempotent und heißt tiviales idempotentes Element. Sei x ein nicht-triviales idempotentes Element. Dann ist

a) 1-x ein nicht-triviales idempotentes Element.
b) Rx ist ein kommutativer Ring mit 1 mit dem Einselement x.
c) Sei

$$1 = x_1 + ... + x_n$$

eine Zerlegung des Einselements von R in eine Summen von nicht-trivialen idempotenten Elementen von R mit

$$x_i x_j = 0 \text{ für } i \neq j.$$

(Beispiel: x nicht-trivialen idempotentes Element, $x_1 = x$, $x_2 = 1-x$, $n = 2$).

Dann ist

$$R \longrightarrow Rx_1 \times ... \times Rx_n \text{ , } t \mapsto (tx_1 \text{ , ... , } tx_n)$$

ein Isomorphismus von kommutativen Ringen mit.

Folgerung
d) Lokale Ringe besitzten nur das triviale idempotente Element.
e) Sei

$$R = R_1 \times ... \times R_n$$

eine Zerlegung von R in ein direktes Produkt lokaler Ringe. Dann sind die idempotenten Elmente von R gerade die Elemente der Gestalt

$$(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n),$$

wobei alle Koordinaten $\varepsilon_i$ gleich Null oder Eins sind (und nicht alle gleich Null).

Beweis der Aussagen des ersten Schritts.
Zu a). Nach Wahl von x gilt

$$(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2 = 1 - 2x + x = 1-x.$$

Also ist x idempotent (und offensichtlich nicht-trivial).
Zu b). Wegen

$$rx + sx = (r+s)x$$
$$(rx)(sx) = rsx^2 = rsx$$

Ist Rx homomorphes Bild von R bezüglich des Homomorphismus

$$R \longrightarrow Rx, r \mapsto rx.$$

Mit R ist deshalb auch Rx ein kommutativer Ring mit 1.
<u>Zu c)</u>. Es gilt

$$rx_i \bullet sx_i = rs \bullet x_i^2 = rsx_i$$

Deshalb ist die Abbildung ein Homomorphismus von Ringen mit 1. Die Abbildung ist surjektiv: für $r_1,\ldots,r_n \in R$ haben wir ein $t \in R$ zu finden mit

$$tx_i = r_i x \text{ für } i = 1, \ldots , n.$$

Sei $t = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$. Dann gilt für jedes j:

$$tx_j \quad = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i x_j = r_j x_j^2 = r_j x_j$$

Die Abbildung ist injektiv: sei $t \in R$ ein Element mit $tx_i = 0$ für jedes i. Dann gilt

$$t = t\bullet(x_1 + \ldots + x_n) = \sum_{i=1}^{n} tx_i = 0.$$

<u>Zu d)</u>. Sei x ein nicht-triviales idempotentes Element des lokalen Rings (R,M). Als homorphe Bilder von R sind dann auch Rx und R(1-x) lokale Ringe. Wegen

$$R \cong Rx \times R(1\text{-}x)$$

besitzt R die maximalen Ideale $Mx \times R(1\text{-}x)$ und $Rx \times M(1\text{-}x)$, ist somit nicht lokal.
<u>Zu e)</u>. Jedes der angegebenen Elemente ist offensichtlich idempotent. Sei umgekehrt

$$x = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$$

idempotent. Dann gilt

$$(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) = x = x^2 = (\varepsilon_1^2,\ldots,\varepsilon_n^2)$$

also

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^2 \text{ für } i = 1,\ldots,n.$$

Auf Grund von d) ist jedes der $\varepsilon_i$ gleich 0 oder 1.

<u>2. Schritt</u>. Der Fall $B = A[T]/(f)$ mit einem normierten Polynom $f \in A[T]$.

Betrachten wir den Fall, daß $\bar f$ Potenz eines irreduziblen Polynoms ist, sagen wir

$$\bar f = \bar g^n \text{ mit } g \in A[T],\ \bar g \text{ irreduzibel.}$$

Jedes maximale Ideal von B hat die Gestalt M/(f) mit einem maximalen Ideal M von A[T] mit

$$(f) \subseteq M \subseteq A[T].$$

Weil M/(f) über m liegt, folgt[48]

$$mA[T] \subseteq M.$$

[48] Man betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & A[T] \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd}$$

Es folgt $g^n \in (f) + mA[T] \subseteq M$, also $g \in M$, also

$$(g, m)A[T] \subseteq M.$$

Nun ist

$$A[T]/(g, m)A[T] \cong k[T]/(\bar{g}).$$

Rechts steht ein Köper, debb $\bar{g}$ ist nach Annahme irreduzibel. Also ist (g,m)A[T] ein maximales Ideal, dh. es ist

$$M = (g, m) A[T].$$

Wir haben gezeigt, B besitzt das einzige maximale Ideal (g,m)A[T]/(f), d.h. B ist lokal. Die Behauptung (ii) gilt also.

Wir haben noch den Fall zu betrachten, daß $\bar{f}$ nicht als Potenz eines irreduziblen Polynoms geschrieben werden kann, d.h. wir haben den Fall zu betrachten, daß $\bar{f}$ die Gestalt

$$\bar{f} = g_0 \bullet h_0$$

hat mit teilerfremden Polynomen $g_0$ und $h_0$ von k[T]. Wir können dabei annehmen, daß die beiden Faktoren normiert sind. Nach (i) ist dann

$$f = g \bullet h$$

mit normierten Polynomen g und h von A[T], welche teilerfremd im engeren Sinne sind. Nach den Argumenten im Beweis des Chinesischen Restesatzes[49] gilt

$$B = A[T]/(f) \xrightarrow{\cong} A[T]/(g) \times A[T]/(h).$$

Die Wiederholung der obigen Argumente mit A[T]/(f) und A[T]/(h) anstelle von A[T]/(f) liefert nach endlich vielen Schritten eine Zerlegung von B in ein Produkt von lokalen Ringen (weil mit jedem Schritt der Grad der beteiligten Polynome kleiner wird).

<u>3. Schritt</u>. Der allgemeine Fall.
Die Behauptungt gilt trivialerweise, falls B ein lokaler Ring ist. Sei also B nicht-lokal.

Es reicht zu zeigen, B besitzt ein nicht-triviales idempotentes Element $x \in B$, denn dann hat man eine Zerlegung in ein direktes Produkt

$$B = Bx \times B(1-x),$$

und durch Wiederholen der Argumentation mit den beiden direkten Faktoren erhält man nach endlich vielen Schritten eine Zerlegung von B in ein direktes Produkt lokaler Ringe.[50] Beweisen wir die Existens eines solchen Elements x.

Da jedes maximale Idealvon B über m liegt, ist auch B/mB nicht-lokal. Nun ist B/mB als endlich erzeugter k-Vektorraum artinsch, zerfällt also in ein direktes Produkt lokaler

---

[49] Weil g und h teilerfremd im engeren Sinne sind, gibt es Polynome g', h' mit

$$gg' + hh' = 1.$$

Die Abbildung ist surjektiv, denn für $a, b \in A[T]$ und $t = agg' + bhh'$ gilt

$$t \bmod h = agg' \bmod h = a(gg' + hh') \bmod h = a \bmod h.$$
$$t \bmod g = bhh' \bmod g = b(gg' + hh') \bmod g = b \bmod g.$$

Die Abbildung ist injektiv: für $a \in A[T]$ mit

$$a = gG \text{ und } a = hH \text{ mit Polynomen } G,H \in A[T].$$

Es folgt

$$a = a(gg' + hh') = hHgg' + gGhh' = gh\bullet(Hg' + Gh') = f\bullet(Hg'+Gh').$$

Die Restklasse von a in A[T]/(f) ist gleich Null.

[50] Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab, weil der endlich-dimensionale Vektorraum B/mB Produkt von höchstens endlich vielen direkten Faktoren sein kann.

Ringe. Deren Anzahl ist, da B/mB nicht lokal ist mindestens zwei. Damit besitzt B/mB ein nicht-triviales idempotentes Element. Es gibt damit ein Element

$$b \in B$$

dessen Restklasse

$$\overline{b} \in B/mB$$

ein nicht-triviales idempotentes Element ist. Weil B als A-Modul endlich erzeugt ist, gibt es ein normiertes Polynom[51]

$$f \in A[T] \text{ mit } f(b) = 0.$$

Wir setzen

$$C := A[T]/(f)$$

und bezeichnen mit

$$\varphi: C \longrightarrow B, \overline{T} \mapsto b,$$

den A-Algebra-Homomorphismus, welcher die Restklasse $\overline{T}$ von T in b abbildet. Sei weiter

$$\psi: C \longrightarrow D$$

ein beliebiger Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1. Nach dem zweiten Schritt zerfällt C in ein direktes Produkt lokaler Ringe, sagen wir

$$C = C_1 \times \ldots \times C_n.$$

Die idempotenten Elemente von C sind nach dem ersten Schritt gerade diejenigen Elemente $\neq 0$, deren sämliche Koordinaten bezüglich dieser Zerlegung gleich 0 oder 1 sind. Identifizieren wir $C_i$ mit dem Teilring der Elemente von C, deren Koordinaten mit eventueller Ausnahme der i-ten sämtlich gleich 0 sind. Dann gilt

$$1 = 1_1 + 1_2 + \ldots + 1_n,$$

wenn $1_i$ das Einselement von $C_i$ bezeichnet. Durch Anwenden von $\psi$ erhalten wir eine Zerlegung des Einselements von $\psi(C)$,

$$\psi(1) = \psi(1_1) + \psi(1_2) + \ldots + \psi(1_n)$$

in eine Summe von Idempotenten, wobei die Produkte von je zwei verschiedenen der Summanden gleich Null ist. Deshalb gilt

$$\psi(C) = \psi(C_1) \times \ldots \times \psi(C_n) \tag{1}$$

wobei man den i-ten Faktor auf der rechten Seite weglassen kann, wenn $\psi(1_i) = 0$ ist. Die letzte Identität ist eine Zerlegung von $\psi(C)$ in ein Produkt lokaler Ringe. Die idempotenten Elemente von $\psi(C)$ ist also wieder diejenigen mit den Koordinaten 0 und 1. Diese Aussage ist insbesondere richtig, wenn $\psi$ die Zusammensetzung

$$\psi: C \longrightarrow \varphi(C) \subseteq B \longrightarrow B/mB$$

von $\varphi$ mit dem natürlichen Homomorphismus $B \longrightarrow B/mB$ ist. Das idempoente Element $\overline{b} \in B/mB$ ist damit ein Element, dessen Koordinaten bezüglich der Zerlegung (1) sämtlich 0 oder 1 sind. Damit ist aber

---

[51] Die Potenzen von b erzeugen einen endlich erzeugten A-Teilmodul von B, d.h. die Kette der Teilmoduln

$$A + Ab + Ab^2 + \ldots + Ab^i$$

ist stationär. Es gibt also ein i, für welches $b^{i+1}$ eine Linearkombination niedrigerer Potenzen von b ist.

$$\overline{b} = \psi(x)$$

mit einem idempotenten Element $x \in C$. Dann ist aber auch $\varphi(x) \in \varphi(C) \subseteq B$ ein idempotentes Element von B. Dieses ist nicht-trivial, weil dessen Restklasse $\overline{b}$ in B/mB nicht-trivial ist.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Nach dem Hauptsatz von Zariski zerfällt der Morphismus f: Y $\longrightarrow$ X in eine offene Einbetttung und einen endlichen Morphismus, d.h. f hat die Gestalt

$$f: U \hookrightarrow Y := \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A = X$$

mit einer endlichen A-Algebra B und einer offenen Teilmenge U von Spec B, wobei der linke Morphismus gerade die natürliche Einbettung von U in Spec B bezeichne. Nach (ii) gilt

$$B \cong B_1 \times \dots \times B_n \,, B_i := B_{m_i} = \mathcal{O}_{Y,m_i}$$

mit maximalen Idealen $m_i$ von B. Mit B sind auch die $B_i$ endlich über A.[52]

Wir erhalten damit eine Zerlegung von Y in disjunkte Teilmengen

$$Y = \operatorname{Spec} B = \operatorname{Spec} B_1 \vee \dots \vee B_n.$$

(die gleichzeitig offen und abgeschlossen in Y sind). Falls $m_i$ in U liegt, so ist der lokale Ring von U in $m_i$ gleich dem lokalen Ring von Y in $m_i$,

$$\mathcal{O}_{U,m_i} = \mathcal{O}_{Y,m_i} = B_{m_i} = B_i.$$

Weil U offen ist, liegt mit $m_i$ auch jedes Primunterideal von $m_i$ in U, d.h. es gilt

$$\operatorname{Spec} B_i \subset U.$$

Wir haben gezeigt, die folgende Menge liegt ganz in U:

$$Y_* := \vee \{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,y} \mid y \text{ ist abgeschlossen in } Y \text{ und } y \in U\}.$$

Diese Menge ist gleichzeitig offen und abgeschlossen in Y. Damit ist sie aber auch offen und abgeschlossen in der offenen Teilmenge U von Y, d.h. es gilt

$$U = Y_* \vee Z$$

Wir haben noch zu zeigen, der abgeschlossene Punkt m von X = Spec A liegt nicht im Bild f(Z). Angenommen, es gibt ein $z \in Z$ mit f(z) = m. Dann ist z ein Primideal B, welches über m liegt. Weil B eine endliche A-Algebra ist und m ein maximales Ideal von A, ist z ein maximales Ideal von B. Wegen

$$z \in Z \subseteq U$$

ist damit z ein abgeschlossener Punkt von Y = Spec B, welcher in U liegt. Nach Definition von $Y_*$ folgt

$$z \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,z} \subseteq Y_*,$$

im Widerspruch zur Annahme, daß z im Komplement von $Y_*$ liegen soll.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Seien f: Y $\longrightarrow$ ein Etal-Morphismus und $y \in f^{-1}(x)$ ein Punkt, für welchen f einen Isomophismus $k(x) \xrightarrow{\cong} k(y)$ induziert. Wir haben zu zeigen f besitzt eine Schnitt s: X $\longrightarrow$ Y. Zum Beweis können wir Y durch eine beliebig kleine offene Umgebung von y ersetzen. Wie wir wissen gibt es offene Mengen U und V mit

---

[52] Die $B_i$ sind Faktorringe von B.

$x \in U \subseteq X$, $y \in V \subseteq Y$, $f(U) \subseteq V$, $f|_V: V \longrightarrow U$ ist ein Standard-Etal-Morphismus.

Diese Situation bleibt erhalten, wenn wir U verkleinern und V durch das Urbild der verkleinerten Menge U in V ersetzten. Wir können deshalb annehmen,

$$U = D(f),\ f \in A.$$

Wegen $m \in D(f)$ gilt $f \notin m$, d.h. f ist eine Einheit in A, d.h.

$$U = D(f) = \operatorname{Spec} A_f = \operatorname{Spec} A = X.$$

Damit haben wir den Beweis auf den Fall reduziert, daß f ein Standard-Etal-Morphismus ist,

$$Y = \operatorname{Spec} C,\ C = B_b,\ B = A[T]/(f),\ f \text{ normiertes Polynom von } A[T].$$

Weil B als A-Algebra endlich ist, definiert $A \longrightarrow B$ und damit auch $A \longrightarrow C$ einen quasi-endlichen Morphismus. Als affiner Morphismus ist f separiert. Wir können also annehmen, daß quasi-endlich und separiert ist. Nach (iii) können wir durch weiteres Verkleinern von Y erreichen, daß

$$Y = \operatorname{Spec} B$$

gilt mit einer endlichen lokalen A-Algebra B. Bezeichne n deren maximales Ideal (welches automatisch über m liegt). Nach Voraussetzung induziert der natürliche Homomorphismus

$$A \longrightarrow B$$

einen Isomorphismus der Restklassenkörper

$$A/m \longrightarrow B/n.$$

Weil B etal, also flach ist über A, ist B als endlich erzeugter A-Modul sogar frei. Der Homomorphismus der Restklassenkörper kann damit aber nur dann ein Isomophismus sein, wenn B frei ist vom Rang 1 über A, d.h.

$$Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A = X$$

ist ein Isomorphismus und besitzt dammit trivialerweise einen Schnitt.

<u>(iv) ⇒ (v)</u>. Seien $f_1, \dots, f_n \in A[T_1, \dots, T_n]$ Polynome, welche modulo m eine gemeinsame Nullstelle $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ besitzen, d.h.

$$\bar f_i(a) = 0 \text{ für } i = 1,\dots,n,$$

wobei

$$\det\left(\frac{\partial \bar f_i}{\partial T_j}(a)\right) \neq 0$$

gilt. Wir haben zu zeigen, es gibt eine gemeinsame Nullstelle $b \in A^n$ der $f_i$,

$$f_i(b) = 0 \text{ für } i = 1,\dots,n,$$

mit $\bar b = a$.

Wir setzen

$$B := A[T_1, \dots, T_n]/(f_1, \dots, f_n).$$

Der surjektive A-Algebra-Homomorphismus

$$A[T] \longrightarrow k,\ f \mapsto f(a),$$

faktorisiert sich dann über B und definiert einen surjektiven A-Algebra-Homomorphismus

$$B \longrightarrow k,\ f \bmod (f_1, \dots, f_n) \mapsto f(a),$$

mit der Eigenschaft, daß das Bild Restklasse $\bar d$ der Determinanten

$$d := \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}\right)$$

nicht im Kern $N \subseteq B$ dieses Homomorphismus liegt. Man beachte, N ist ein maximale Ideal von B, welches über m liegt. Es gibt damit ein $b \in B - N$ derart mit

$$\bar{d} \text{ ist Einheit von } B_b$$

(nämlich zum Beispiel $b := \bar{d}$). Insbesondere ist der induzierte Schema-Morphismus

$$\operatorname{Spec} B_b \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

ein Standard-Etal-Morphismus. Das maximale Ideal N definiert einen über m liegenden Punkt $y \in \operatorname{Spec} B_b$ mit $k(y) = k(x)$. Nach Voraussetzung (iv) besitzt dieser Morphismus einen Schnitt, d.h. es gibt einen Homomorphismus

$$h: B_b \longrightarrow A,$$

dessen Zusammensetzung mit der natürlichen Abbildung

$$g: A \longrightarrow B_b,$$

die identische Abbildung ist.

$$hg = id$$

Bezeichne $t_i \in B_b$ das durch die i-te Unbestimmte $T_i$ repräsentierte Element und seien

$$b_i := h(t_i) \in A \text{ für } i = 1,\dots,n.$$

$$b := (b_1,\dots,b_n) \in A^n$$

Dann gilt für jedes i:

$$\begin{aligned} f_i(b) &= f_i(h(t_1),\dots, h(t_n)) \\ &= h(f_i(t_1,\dots, t_n)) \end{aligned}$$

weil h einen Schnitt definiert, d.h. ein A-Algebra-Homomorphismus ist. Wegen

$$\begin{aligned} f_i(t_1,\dots, t_n) &= f_i(T_1,\dots, T_n) \bmod (f_1, \dots , f_n) \\ &= 0 \qquad\qquad\quad \bmod (f_1, \dots , f_n) \end{aligned}$$

folgt

$$f_i(b) = 0 \text{ für jedes } i.$$

Weil h linksinvers zu g ist, ist die durch h induzierte Abbildung $B/N \longrightarrow A/m$ linksinvers zum natürlichen Isomorphismus $k = A/m \longrightarrow B/N$, stimmt also mit der Abbildung $B/N \longrightarrow k$, $f \bmod N \mapsto f(a)$ überein. Es gilt damit

$$\begin{aligned} \bar{b}_i &= b_i \bmod m \\ &= h(t_i \bmod N/(f_1, \dots , f_n)) \\ &= h(T_i \bmod N) \\ &= T_i(a) \\ &= a_i \end{aligned}$$

<u>(v) ⇒ (vi)</u>. Sei $f \in A[T]$ ein Polynom, dessen Restklasse modulo m über k in zwei teilerfrende Faktoren zerfällt,

$$\bar{f} = g_0 h_0$$

mit einem normierten Polynom $g_0$. Wir schreiben f in der Gestalt

$$f(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + ... + a_0 \text{ mit } a_i \in A \text{ für jedes i und } a_n \neq 0$$

und setzen $r = \deg g_0$.

Wir haben zu zeigen, daß die Gleichung

$$f = g \cdot h$$

mit

$$g = X_r \cdot T^r + X_{r-1} \cdot T^{r-1} + ... + X_0$$

$$h = Y_s \cdot T^s + X_{s-1} \cdot T^{s-1} + ... + Y_0$$

eine Lösung besitzt mit $X_r = 1$, für welche $\bar{g} = g_0$, $\bar{h} = h_0$ ist.

Man beachte, weil $g_0$ normiert ist und g normiert sein soll, mit mit $\bar{g} = g_0$ automatisch

$$\deg g = \deg \bar{g} = \deg g_0 = r$$

Durch Koeffizientenvergleich sehen wir, das Gleichungssystem $f = g \cdot h$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
a_0 &= X_0 Y_0 \\
a_1 &= X_0 Y_1 + X_1 Y_0 \\
a_2 &= X_0 Y_2 + X_1 Y_1 + X_2 Y_0 \\
&\dots \\
a_i &= X_0 Y_i + X_1 Y_{i-1} + ... + X_i Y_0 \qquad (1) \\
&\dots \\
a_{n-1} &= \qquad X_{r-1} Y_s + X_r Y_{s-1} \\
a_n &= \qquad X_r Y_s
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung (v) gilt der Satz über implizite Funktionen. Wegen $\bar{f} = g_0 h_0$ hat das System (1) eine Lösung modulo m in A. Die Ableitungen der rechten Seiten von (1) nach $X_0$ sind gerade die Koeffizienten von h gefolgt von Nullen. Die Ableitungen nach $X_1$ liefern ebenfalls die Koeffizienten von h, wobei eine Null vorausgeht und eine Null weniger folgt. Insgesamt erhalten wir gerade die Einträge der der Resultante von g und h,

Funktional-Determinante von (1) = Res(g,h).

Nach (v) reicht es zum Beweis der Aussage von (vi) zu zeigen, die Resultante Res(g,h) wird ungleich Null wenn wir für die $X_i$ und $Y_j$ die Koeffizienten von $g_0$ und $h_0$ einsetzen, d.h. wir haben zu zeigen,

$$\mathrm{Res}(g_0, h_0) \neq 0. \qquad (2)$$

Nun ist diese Resultante genau dann gleich Null, wenn eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $\deg g_0 < r$ und $\deg h_0 < s$.[53]

---

[53] Erhöht man den Grad von h künstlich, indem man $0 \cdot T^{s+1}$ hinzufügt, so so bekommt die Funktionaldeterminante eine zusätzliche Zeile und eine zusätzliche Spalte, wobei die zusätzliche Zeile aus lauter Nullen gefolgt vom höchsten Koeffizienten von g am Ende besteht. Dieser höchste Koeffizienet ist aber 1, d.h. die Funktionaldeterminante ändert sich nicht. Man kann also bei der

(b) $g_0$ und $h_0$ haben eine gemeinsame Nullstelle in einer Erweiterung von k.

Beide Bedingungen sind abar nach Voraussetzung nicht erfüllt. Die Resultante (2) ist somit ungleich Null,.

(vi) $\Rightarrow$ (i). Die Implikation besteht trivialerweise.

**QED**.

### 2.4.4 Folgerungen

(i) Seien A ein Henselscher lokaler Ring. Dann ist jede endliche lokale A-Algebra und insbesondere jeder Faktorring von A Henselsch.

(ii) Sei (A,m,k) ein Henselscher lokaler Ring. Dann ist der Funktor

$$(\text{endliche Etal-Algebren über A}) \longrightarrow (\text{endliche Etal-Algebren über k}),\ B \mapsto B\otimes_A k,$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

(iii) Jeder vollstängie lokale Ring A ist Henselsch.

**Beweis**. Zu (i). Die Eigenschaft, daß endliche Algebren in eine Produkt lokaler Ringe zerfallen (vgo. 2.4.3 (ii)) bleibt erhalten beim Übergang zu endlichen lokalen Algebren.

Zu (ii). Wir haben zu zeigen:

(a) Für je zwei endliche Etal-Algebren B', B" über A ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_A(B', B") \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(B'\otimes_A k, B"\otimes_A k),\ f \rightarrowtail f\otimes_A k,$$

bijektiv.

(b) Für jede endliche Etal-Algebra $\overline{B}$ über k gibt es eine endliche Etal-Algebra B über A mit $\overline{B} \cong B\otimes_A k$.

Zu (b) Wegen (i) ist mit A auch k Henselsch, d.h. $\overline{B}$ ist ein endliches Produkt von Lokalisierungen von $\overline{B}$ bezüglich maximaler Ideale. Wir könnnen deshalb annehmen $\overline{B}$ ist ein lokaler Ring. Weil $\overline{B}$ etale ist über k, ist das maximale Ideal von $\overline{B}$ das 0-Ideal, d.h. $\overline{B}$ ist ein Körper, d.h. ein endliche separable Körpererweiterung von k, also von der Gestalt

$$\overline{B} \cong k[T]/(\overline{f})$$

mit einem irreduziblen normierten Polynom $\overline{f} \in k[T]$. Seien $f \in A[T]$ ein normierter Repräsentant von $\overline{f}$ und

$$B := A[T]/(f).$$

Dann ist f irreduzibel und B frei also flach über A. Außerdem ist B endlich über A. Sei weiter n ein über m liegendes maximales Ideal von B und N desssen vollständiges Urbild in A[T] beim natürlichen Homomorphismus $A[T] \longrightarrow B$. Dann gilt

$$(m, f)A[T] \subseteq N,$$

und weil $A[T]/(m,f)A[T] \cong k[T]/(\overline{f}) \cong \overline{B}$ ein Körper ist, ist (m,f)A[T] maximal in A[T], d.h.

$$(m, f)A[T] = N \text{ also } n = (m, f)A[T]/(f)$$

Wir haben gezeigt, B ist eine lokaler Ring, m erzeugt in B das maximale Ideal, und die zu $A \longrightarrow B$ gehörige Erweiterung der Restklassenkörper $k \hookrightarrow \overline{B}$ ist separabel. Mit anderen Worten, $A \longrightarrow B$ ist eine endlich Etal-Erweiterung. Nach Konstruktion gilt

$$B\otimes_A k = \overline{B}.$$

Zu (a). Weil endliche A-Algebren in endliche direkte Produkte lokaler Ringe zerfallen, können wir beim Beweis der Bijektivität annehmen, daß B' und B" lokale Ringe sind.

---

Berechung der Determinante annehmen, daß der Koeffizient von $h_0$ im Grad s ungleich Null ist. Damit kann man sogar annehmen, daß dieser Koeffizienten gleich 1 ist, d.h. man kann den Fall (a) ignorieren.

<u>Beweis der Injektivität</u>. Seien zwei Homomorphismen von A-Algebren

$$B' \longrightarrow B''$$

gegeben, deren Bild bei $\otimes_A k$ übereinstimmt. Sie induzieren zwei separierte Etal-Morpismen

$$f,g: \text{Spec } B'' \longrightarrow \text{Spec } B'$$

(weil die Zusammensetzung mit Spec B” $\longrightarrow$ Spec A etale ist) von zusammenhängenden Schemata. Es reicht zu zeigen, die beiden Morphismen sind f und g sind gleich.

Nach Voraussetzung induzieren sie auf den Fasern des abgeschlossenen Punkts m von Spec A denselben Morphismus. Die Graphen der beiden Morphismen

$$\Gamma_f, \Gamma_g: \text{Spec } B'' \longrightarrow \text{Spec } B''\otimes_A B'$$

sind Schnitte der natürlichen Projektion

$$\text{Spec } B''\otimes_A B' \longrightarrow \text{Spec } B'' \qquad (1)$$

auf den zweiten Faktor. Die beiden Graphen stimmen überein auf den Fasern über m. Mit f und g ist auch die Projektion (1) etal. Weil Spec B” zusammenhängend ist, ist jeder Schnitt von (1) bereits durch einen einzigen seiner Werte festgelegt (nach 2.2.1)[54]. Damit sind die beiden Graphen $\Gamma_f$, $\Gamma_g$ gleich, und damit auch die beiden Morphismen f und g.

<u>Beweis der Surjetivität</u>. Sei ein Homomorphismus von endlichen Etal-Algebren über k gegeben:

$$\bar{g}: B'\otimes_A k \longrightarrow B''\otimes_A k.$$

Durch Zusammensetzen mit dem natürlichen Homomorphismus $B' \longrightarrow B'\otimes_A k$ (auf den Faktorring) erhalten wir einen Homomorphismus von A-Algebren

$$g: B' \longrightarrow B''\otimes_A k,\ b' \mapsto \bar{g}(b' \bmod mB'),$$

und damit einen Homomorphismus von A-Algebren

$$B'' \otimes_A B' \longrightarrow B''\otimes_A k,\ b''\otimes b' \mapsto b''g(b'). \qquad (2)$$

Dieser Homomorphismus ist surjektiv.[55] Es gibt deshalb übereinanderliegende maximale Ideale derart, daß die induzierte Abbildung der Restklassenkörper ein Isomorphismus ist.
Betrachten wir die natürlichen Abbildungen

$$u: B'' \longrightarrow B''\otimes_A B',\ b'' \mapsto b''\otimes 1. \qquad (3)$$

$$v: B' \longrightarrow B''\otimes_A B',\ b' \mapsto 1\otimes b'. \qquad (4)$$

Durch Zusammensetzen v mit (2) erhalten wir gerade die natürliche Abbildung auf den Faktorring $B'' \longrightarrow B''\otimes_A k$. Damit gibt es auch bezüglich (3) übereinanderliegende maximale Ideale, sodaß die induzierte Abbildung der Restkörper ein Isomorphismus ist. Als Morphismus von Etal-Algebren über A ist auch (3) etale. Nach 2.4.3 (iv) besitzt der durch (3) induzierte Morphismus

$$\text{Spec } B''\otimes_A B' \longrightarrow \text{Spec } B''$$

einen Schnitt, d.h. es gibt einen Homomorphismus von A-Algebren

---

[54] Siehe auch Milne, Etale cohomology, Corollary I.3.13
[55] Es ist ein Homomorphismus von B-Algebren und $1\otimes 1$ liegt im Bild.

$$w: B'' \otimes_A B' \longrightarrow B''$$

mit $w \circ u = \mathrm{Id}$, wobei die Zusammensetzung $w \circ v$ gerade die gegebene Abbildung auf den Fasern über m induziert.

Zu (iii). Sei (A, m, k) ein vollständiger lokaler Ring. Wir haben zu zeigen, A ist Henselsch. Es reicht zu zeigen, A genügt der Bedingung (iv) von 2.4.3. Sei also ein Etal-Morphismus

$$f: Y \longrightarrow X = \mathrm{Spec}\, A$$

mit einem Punkt $y \in f^{-1}(x)$, für welchem f einen Isomorphismus $k(x) \xrightarrow{\cong} k(y)$ induziert, wobei wir zusätzlich annehmen können, daß Y = Spec B gilt mit einer endlichen lokalen Etal-Algebra (B, n). Der Isomorphismus der Restkörper liefert einen Homomorphismus

$$s_0: B \longrightarrow B/n = k(y) \xrightarrow{\cong} k(x) = A/m.$$

Es reicht zu zeigen, dieser Homomorphismus läßt sich schrittweise anheben zu eimem Homomorphismus

$$s_i: B \longrightarrow A/m^{i+1},$$

denn zusammen definieren diese einen Homomorphismus

$$B \longrightarrow \varprojlim_{i \to \infty} A/m^{i+1} = \hat{A} = A,$$

d.h. wir erhalten den gesuchten Schnitt. Für i = 0 haben wir die gesuchte Abbildung bereits konstruiert. Wir haben noch zu zeigen, die Abbildung $s_{i-1}$ läßt sich zu einerm Homomorphismus $s_i$ anheben. Die natürliche Surjektion $A/m^{i+1} \twoheadrightarrow A/m^i$ definiert eine abgeschlossene Einbettung

$$\mathrm{Spec}\, A/m^i \hookrightarrow \mathrm{Spec}\, A/m^{i+1}.$$

Dabei ist das Teilschema durch das Ideal $m^i/m^{i+1}$ von $A/m^{i+1}$ definiert, d.h. durch ein nilpotentes Ideal. Die Frage nach der Anhebbarkeit des Homomorphismus $s_{i-1}$ zu $s_i$ übersetzt sich so in die Frage nach der Fortsetzbarkeit des durch $s_{i-1}$ definierten Morphismus

$$\mathrm{Spec}\, A/m^i \longrightarrow B$$

auf das Schema Spec $A/m^{i+1}$. Wir kennen bereits eine Situation, in welches diese Fortsetzungen stets existieren (für beliebige nilpotentene Ideale): nämlich dann wenn Spec B formal etal ist über Spec A, und wir wissen, daß Etal-Morphismen formal etale sind, d.h. die Behauptung ist richtig.
**QED**.

### 2.4.5 Verallgemeinerungen

(i) Seien A ein Henselscher Ring und $\hat{A}$ dessen Vervollständigung. Dann ist nach 2.4.4 (ii) und (iii) durch

$$\begin{pmatrix}\text{endliche}\\ \text{Etal-Algebren}\\ \text{über } A\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\text{endliche}\\ \text{Etal-Algebren}\\ \text{über } \hat{A}\end{pmatrix}, B \mapsto B \otimes_A \hat{A}$$

eine Äquivalenz von Kategorien gegeben. Sie X ein eigentliches Schema über dem Hensel-Ring A, so läßt sich diese Äquivalenz zu einer Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{pmatrix}\text{endliche}\\ \text{Etal-Schemata über}\\ X\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\text{endliche}\\ \text{Etal-Schemata über}\\ X\otimes_A \hat{A}\end{pmatrix}, Y \mapsto Y\otimes_A \hat{A}$$

fortsetzen.(vgl. [Artin 1966] und [Artin 1969]).

(ii) Aussage 2.4.4 (ii) läßt sich auch wie folgt weiter verallgemeinern.Sei A ein Henselscher Ring, X ein über A eigentliches Etal-Schema und

$$X_0 \hookrightarrow X$$

die Faser über dem abgeschlossenen Punkt von Spec A. Dann ist

$$\begin{pmatrix}\text{endliche}\\ \text{Etal-Schemata über}\\ X\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\text{endliche}\\ \text{Etal-Schemata über}\\ X_0\end{pmatrix}, Y \mapsto Y\otimes_X X_0$$

eine Äquivalenz von Kategorien.[56]

(iii) Aussage 2.4.3 (iii) besitzt die folgende Verallgemeinerung. Seien A ein Henselscher Ring und

$$f\colon Y \longrightarrow X := \operatorname{Spec} A$$

ein separierter Morphismus endlichen Typs und $y \in Y_0 := f^{-1}(x)$ ein isolierter Punkt der Faser über dem abgeschlossenen Punkt x von X, d.h. $Y_0$ zerfalle als Schema in eine disjunkte Vereinigung

$$Y_0 = Y_0' \vee Y_0'' \text{ mit } Y_0' = \{y\}.$$

Dann besitzt das Schema Y eine disjunkte Zerlegung

$$Y = Y' \vee Y''$$

derart, das die Faser über dem abgeschlossenen Punkt in Y' bzw. Y'' gleich $Y_0'$ bzw. $Y_0''$ ist. (siehe [Artin 1973, I.1.10]).

(iv) Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann sind die lokalen Ringe von X in jedem Punkt Henselsch. Zum Beweis auch für weitere analoge Beispiele siehe [Raynaud 1970].

### 2.4.6 Etale-Morphismen und lokale Isomorphismen

Seien $f\colon Y \longrightarrow X$ ein Etal-Morphismus und $y \in Y$ ein Punkt, welcher einen Isomorphismus

$$k(y) \xrightarrow{\cong} k(x),\ x := f(y),$$

induziert. Dann ist der induzierte Homomorphismus der vervollständigten lokalen Ringe

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{Y,y} \qquad (1)$$

etale. Nach 2.4.3 (iv) besitzt der induzierte Schema-Morphismus einen Schnitt und ist damit ein Isomorphismus (nach 2.2.1). Umgekehrt ist ein Morphismus von Schemata endlichen Typs über einem Körper k, für welchen die Abbildungen (1) Isomorphismen

---

[56] Der Beweis dieser Aussage im Fall eines vollständigen lokalen Rings findet sich in der Monographie [Artin 1973] und [Murre 1967]. Der allgemeine Henselsche Fall ergibt sich aus diesem Ergebnis auf Grund von Artins Approximationstheorie [Artin 1973]. Siehe auch [Artin 1969, Theorem 3.1].

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \otimes_{k(x)} k(y) \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$$

induzieren und k(y) stets separabel über k(x) ist, etale (vgl. [Hartshorne 1977], Übung III.10.4).

Unverzweigte holomorphe Abbildungen Riemannscher Flächen sind etale (da sie lokal biholomorph sind). Läßt man Singularitäten zu, ändert sich die Situation. Mit Hilfe der Tatsache, daß die Abbildung (1) in der beschriebenen Situation ein Isomorphismus ist, können wir das beweisen.

### 2.4.7 Beispiel: ein unverzweigter Morphismus, der nicht etal ist

Seien X eine Kurve über einem Körper k, mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt[57] $x_0 \in X$ und

$$f: Y \longrightarrow X$$

die Normalisierung von X in k(X).[58] Die Abbildung ist unverzweigt über $x_0$, und für jeden der beiden Punkkte $y \in f^{-1}(x_0)$ ist die natürliche Abbildung

$$\mathcal{O}_{X,x_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$$

injektiv.[59] Die induzierte Abbildung der Vervollständigungen kann kein Isomorphismus sein, denn der Ring rechts ist regulär, der Ring links jedoch nicht.[60] Damit kann die Normalisierung f nicht etal sein.

**Bemerkung**

Der lokale Ring A ist Teilring seiner Vervollständigung $\hat{A}$ (weil wir annehmen, daß alle Ring noethersch sind). Jeder lokale Ring ist damit Teilring eines Henselschen Rings. Den kleinsten unter den Henselschen Ringen, welche A enthalten werden wir Henselisierung von A nennen. Genauer definieren wir die Henseliserung von A durch eine Universalitätseigenschaft.

---

[57] d.h. lokal sieht X in einer Umgebung von $x_0$ wie zwei sich transversal schneidende glatte ebene Kurven aus.

[58] Zum Beispiel sei X = Spec $k[x,y]/(y^2-x^2-x^3)$. Die Aufblasung von X im Ursprung ist dann singularitätenfrei, alse gerade die Normalisierung von X.

[59] Die beiden lokalen Ringe sind ineinanderliegende Teilringe von k(X). Genauer, $\mathcal{O}_{Y,y}$ ist die ganze Abschließung von $\mathcal{O}_{X,x_0}$ in k(X).

[60] Im Spezialfall X = Spec $k[x,y]/(y^2-x^2-x^3)$ ist $x_0$ der Ursprung und

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,x_0} = k[[x,y]]/(f)$$

mit

$$\begin{aligned} f &= y^2-x^2-x^3 \\ &= y^2 - x^2(1+x) \\ &= (y - x\cdot\sqrt{1+x})\cdot(y + x\cdot\sqrt{1+x}). \end{aligned}$$

Dabei steht $\sqrt{1+x}$ für eine Potenzreihe, d.h. für ein wohldefiniertes Element von k[[x,y]]. Wir sehen so, daß $\hat{\mathcal{O}}_{X,x_0}$ Nullteiler besitzt, der Ring $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ dagegen nicht.

### 2.4.8 Die Henselisierung eines lokalen Rings

Sei $i: A \longrightarrow A^h$ ein lokaler Homomorphismus lokaler Ringe mit $A^h$ Henselsch. Außerdem faktorisiere sich jeder lokale Homomorphismus

$$h: A \longrightarrow A'$$

mit A' Henselsch auf genau eine Weise über i, d.h. es gebe für jedes h genau einen lokalen Homomorphismus $\tilde{h}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "h"'] & & A^h \arrow[dl, "\tilde{h}"] \\ & A' & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Dann heißt $A^h$ zusammen mit i <u>Henselisierung</u> von A.

**Bemerkungen**

(i) Nach Definition ist das Paar $(A^h, i)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, falls es existiert. Im nächsten Abschnitt werden wir die Existenz beweisen. Für den Nachweis verschiedener Eigenschaften der Henselisierung in darauf folgenden Abschnittt erweist sich der Begriff der <u>Etal-Umgebung</u> eines lokalen Rings als nützlich.

(ii) Eine <u>Etal-Umgebung</u> von A ist ein Paar (B, q) bestehend aus einer Etal-Algbra B und einem Primideal

$$q \in \operatorname{Spec} B$$

derart, daß q über dem maximalen Ideal m von A liegt,

$$m = A \cap q$$

und die induzierte Abbildung der Restekörper ein Isomorphismus ist,

$$k = A/m \xrightarrow{\cong} B/q \hookrightarrow k(q).$$

Man beachte, die Abbildung rechts ist automatisch surjektiv und q ist maximales Ideal in B.

### 2.4.9 Existenz der Henselisierung

Sei $\{H_i\}_{i\in I}$ die Familie der Henselschen lokalen Teilringe der Vervollständigung $\hat{A}$ von A, welche den Ring A vollständig enthalten,

$$A \subseteq H_i \subseteq \hat{A}.$$

Dann ist

$$A^h = \bigcap_{i\in I} H_i.$$

gerade die Henselisierung von A. Man beachte, die Familie der $H_i$ ist nicht leer, denn $\hat{A}$ ist nach 2.4.4 (iii) Henselsch.

Der Ring ist $A^h$ ist ein noetherscher lokaler Ring mit dem maximalen Ideal

$$m^h = m \cdot A^h$$

und dem Restekörper

$$A^h/m^h = k\ (= A/m).$$

Außerdem kommutiert der Übergang zur Henseliserung mit dem Übergang zum Faktorring, d.h. für jedes echte Ideal $I \subseteq A$ gilt

$$(A/I)^h = A^h/IA^h.$$

**Beweis**. Sei

$$H := \bigcap_{i\in I} H_i.$$

Bezeichne m, $m_i$, $\hat{m}$ das maximale Ideal von A, $H_i$ bzw. $\hat{A}$. Dann gilt nach Wahl der Familie

$$m \subseteq m_i \subseteq \hat{m}$$

also

$$m = A \cap \hat{m} \text{ und } m_i = H_i \cap \hat{m}.$$

Das Ideal

$$m^h := H \cap \hat{m} = H \cap H_i \cap \hat{m} = H \cap m_i \qquad (1)$$

ist ein echtes Ideal von H mit der Eigenschaft, daß jedes Element von

$$x \in H - H \cap \hat{m} = H - H \cap m_i$$

in $H_i$ eine Einheit ist, d.h. $x^{-1}$ liegt in jedem $H_i$, also auch in H. Wir haben gezeigt, H ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal (1).

Die obigen Inklusionen von Ringen und Idealen liefern Körpererweiterungen

$$k = A/m \subseteq H/m^h \subseteq H_i/m_i \subseteq \hat{A}/\hat{m}.$$

Da der Körper rechts gleich dem Körper links ist, gilt überall das Gleichheitszeichen.Sei $f \in H[T]$ ein normiertes Polynom. Eine Zerlegung von $\bar{f}$ in ein Produkt teilerfremder normierter Polynome über k

$$\bar{f} = g_0 h_0$$

liefert für jedes $i \in I$ eine Zerlegung

$$f = gh \qquad (2)$$

in ein Produkt teilerfremder normmierter Polynome $g, h \in H_i[T]$ mit

$$\bar{g} = g_0 \text{ und } \bar{h} = h_0.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung (2) ist diese Zerlegung für jedes i dieselbe, d.h. die Koeffizienten von g und h liegen in sämtlichen $H_i$ und damit in H. Wir haben gezeigt,

H ist ein Henselscher Ring.

Sei jetzt

$$\varphi: (A,m) \longrightarrow (A',m')$$

ein lokaler Homomorphismus lokaler Ringe mit A' Henselsch. Die Zusammensetzung

$$A \longrightarrow A' \hookrightarrow \hat{A}'$$

faktorisiert sich über $\hat{A}$ und liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & \hat{A} \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\hat{\varphi} \\ A' & \hookrightarrow & \hat{A}' \end{array} \qquad (3)$$

Sei H' ein Henselscher lokaler Ring mit

$$A' \subseteq H' \subseteq \hat{A}'.$$

Dann gilt

$$A \subseteq \hat{\varphi}^{-1}(H') \subseteq \hat{A}.$$

Sei $f \in \hat{\varphi}^{-1}(H')[T]$ ein normiertes Polynom. Eine Zerlegung modulo $\hat{m}$ in teilerfremde normierte Faktoren liefert dann eine Zerlegung

$$f = gh$$

von f in ebensolche Faktoren mit Koeffizienten aus $\hat{A}$. Durch Anwenden von $\hat{\varphi}$ erhalten wir eine Zerlegung mit Koeffizienten aus $\hat{A}'$. Weil H' Henselsch ist, liegen die Koeffizienten dieser Zerlegung sogar in H'. Die Koeffizienten der Polynome g und h liegen also in $\hat{\varphi}^{-1}(H')$. Wir haben gezeigt, $\hat{\varphi}^{-1}(H')$ ist Henselsch, enthält also den Ring H. Wir erhalten so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A & \hookrightarrow & H & \hookrightarrow & \hat{A} \\ \varphi\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\hat{\varphi} \\ A' & \hookrightarrow & H' & \hookrightarrow & \hat{A}' \end{array} \qquad (4)$$

für jeden Henselschen Ring H' zwischen A' und $\hat{A}'$. Dies gilt insbesondere für den Fall daß H' = A' ist. Mit anderen Worten, $\varphi$ faktorisiert sich über H. Weil $\hat{\varphi}$ durch $\varphi$ eindeutig bestimmt ist, ist diese Faktorisierung eindeutig. Wir haben geszeigt, der oben konstruierte Ring H ist gerade die Henselisierung.

Wir haben noch zu zeigen:

1. $(A/I)^h = A^h/IA^h$ für jedes echte Ideal I von A.
2. $m^h = m{\bullet}H$
3. H ist noethersch.

<u>Zu 1</u>. Es reicht zu zeigen, $A^h/IA^h$ besitzt die Universalitätseigenschaft der Henselisierung. Sei

$$h: A/I \longrightarrow B$$

ein lokaler Homomorphismus mit B Henselsch. Dann faktoriesiert sich die Zusammensetzung

$$A \xrightarrow{\rho} A/IA^h \xrightarrow{h} B$$

auf genau eine Weise über die natürliche Einbettung $A \longrightarrow A^h$, d.h. man erhält ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, two heads, "\rho"'] & A^h \arrow[d, "\widetilde{h}"] \\ A/I \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\widetilde{h}$ durch die Kommutativität des Vierecks eindeutig bestimmt.Das Bild von I $\subseteq$ A in B ist Null. Damit gilt

$$\widetilde{h}(IA^h) = 0,$$

d.h. $\widetilde{h}$ faktorisiert sich eindeutig über $A^h/IA^h$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, two heads, "\rho"'] & A^h \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\widetilde{h}"] & A^h/IA^h \arrow[dl, "h'"] \\ A/I \arrow[r, "f"] & B & \end{tikzcd}$$

Dabei ist h' durch die Kommutativität des rechten Dreiecks eindeutig bestimmt. Wir sehen so, daß $A^h/IA^h$ die Henselisierung von A/I ist.

Zu 2. Die Henselisierung von A/m ist nach 1. gerade

$$(A/m)^h = A^h/mA^h.$$

Es reicht zu zeigen, daß die Henselisierung von A/m ein Körper ist. Nun ist A/m ein Körper (und damit vollständig bezüglich der natürlichen, d.h. der 0-adischen Topologie). Weil die Henselisierung zwischen A/m und der Vervollständigung liegt, ist

$$A/m = (A/m)^h = (A/m)^{\wedge}.$$

Insbesondere ist $(A/m)^h$ ein Körper, also $mA^h$ maximal.

Zu 3.

Wir müssen an dieser Stelle an unsere Vereinbarung 1.3.8 erinnern, daß alle hier verwendeten Ringe noethersch sein sollen. Wir benötigen deshalb noch die nicht ganz triviale Aussage, daß $A^h$ ein noetherscher Ring ist. Den Beweis findet man in der Monographie [Artin 1962] (siehe III.4.2). Wir verschieben den Beweis auf das Ende des näachen Abschnitts.

**QED**.

### 2.4.10 Eigenschaften der Henselisierung

(i) $A^h$ ist gerade der direkte Limes über die Etal-Umgebungen von A.

(ii) $A^h$ ist eine Etal-Umgebung von A.

(iii) Für jede lokale Etal-Umgebung von (B,q) von A ist $B^h$ in natürlicher Weise isomorph zu $A^h$, d.h. der durch die Komposition

$$A \longrightarrow B \longrightarrow B^h$$

induzierte Homomorphismus von A-Algebren

$$A^h \longrightarrow B^h$$

ist ein Isomorphismus.

Zum **Beweis** dieser Aussage benötigen wir das folgende Lemma.

#### *2.4.10.1 Lemma*

(i) Seien (B', q') und (B", q") zwei Etal-Umgebungen von A, wobei

$$\text{Spec } B'' \text{ zusammenhängend}$$

sei. Dann existiert höchstens ein Homomorphismus von A-Algebren

$$f: B' \longrightarrow B'' \text{ mit } f^{-1}(q'') = q'.$$

(ii) Seien (B', q') und (B'', q'') zwei Etal-Umgebungen von A. Dann existiert eine Etal-Umgebung (B, q) von A mit Spec B zusammenhängend und es existerien Homomorphismen von A-Algebren

$$f': B' \longrightarrow B \text{ und } f'': B'' \longrightarrow B$$

mit

$$f'^{-1}(q) = q' \text{ und } f''^{-1}(q) = q''.$$

**Bemerkung**

Zum besseren Verständnis der Aussagen des Lemmas ist es nützlich, diese in die Sprache der Schemata zu übersetzen. Insbesondere liefert die Aussage (ii) ein kommutatives Diagramm von Morphismen affiner Schemata

$$\begin{tikzcd} & \text{Spec } B' \arrow[dr] & \\ \text{Spec } B \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Spec } A \\ & \text{Spec } B'' \arrow[ur] & \end{tikzcd}.$$

Dabei entsprechen die beiden rechten Pfeile gerade den natürlichen Einbettungen von zwei offenen Umgebungen von m in das Spektrum von A und die beiden linken Pfeile den natürlichen Einbettung einer weiteren offenen Umgebungen, die ganz in diesen beiden Umgebungen liegt.

**Beweis** des Lemmas. <u>Zu (a)</u>. Wir nehmen an, daß f existert. Dann ist der Graph

$$\Gamma_f: \text{Spec } B'' \longrightarrow \text{Spec } B'' \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } B'$$

des von f induzierten Schema-Morphismus Spec B'' $\longrightarrow$ Spec B' ein Schnitt der natürlichen Projektion auf den ersten Faktor

$$p: \text{Spec } B'' \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } B' \longrightarrow \text{Spec } B''.$$

Weil Spec B'' zusammenhängend und p ein Etal-Morphismus ist, ist jeder Schnitt von p durch jeden einzelnen seiner Werte bereits eindeutig bestimmt (vgl. 2.2.1). Damit ist aber auch

$$\text{Spec } f: \text{Spec } B'' \longrightarrow \text{Spec } B'$$

durch jeden einzelnen seiner Werte bestimmt. Wegen $f^{-1}(q'') = q'$, d.h.

$$(\text{Spec } f)(q'') = q',$$

ist damit f eindeutig bestimmt.

<u>Zu (b)</u>. Sei $C := B' \otimes_A B''$. Wir tensorieren die natürlichen Abbildungen

$$B' \twoheadrightarrow k(q') = k, b' \mapsto \bar{b}',$$

und

$$B'' \twoheadrightarrow k(q'') = k, b' \mapsto \bar{b}'',$$

und erhalten einen Homomorphismus von A-Algebren

$$C = B' \otimes_A B'' \twoheadrightarrow k \otimes_A k = k \otimes_k k = k, b' \otimes b'' \mapsto \bar{b}' \cdot \bar{b}''$$

Sei q der Kern dieses Homomorphismus. Man beachte, q ist ein maximales Ideal von C. Setzen wir diesen Homomorphismus mit den natürlichen Abbildungen

$$B' \longrightarrow C, b' \mapsto b' \otimes 1, \text{ und } B'' \longrightarrow C, b'' \mapsto 1 \otimes b'',$$

so sehen wir, daß bei diesen Zusammensetzungen die Ideale q' bzw. q'' in die Null abgebildet werden. Deshalb gilt

$$q'C \subseteq q \text{ und } q''C \subseteq q.$$

Weiter ist C eine Etal-Algebra über A. Der Punkt q von Spec C besitzt eine offene Standard-Etal-Umgebung Spec B über A. Diese ist (affin und) endlich über Spec A, also insbesondere noethersch[61] und quasi-endlich. Indem wir B durch eine offene Hauptmenge von Spec B ersetzen, erreich wir zusätzlich daß q der einzige über m liegende Punkt ist. Weil B endlich über A ist, ist damit B ein (noetherscher) lokaler Ring[62]. Sei jetzt U eine offene Hauptmenge von Spec C, die ganz in der offenen Umgebung Spec B $\subseteq$ Spec C von q liegt,

$$U = \operatorname{Spec} C_c \quad \text{mit } c \in C - q.$$

Es gilt dann

$$q \in U \subseteq \operatorname{Spec} B, \text{ B lokal mit dem maximalen Ideal qB.}$$

Weil U offen ist, liegt mit q auch jedes in q liegende Primideal in U, d.h. es gilt

$$U = \operatorname{Spec} B.$$

Insbesondere ist Spec B zusammenhängend und[63]

$$B = C_c.$$

Die Zusammensetzungen der natürlichen Abbildung C $\longrightarrow$ B mit den natürlichen Abbildungen von B' und B" ins Tensorprodukt sind A-Algebra-Homomorphismen

$$B' \longrightarrow B \text{ und } B'' \longrightarrow B$$

mit $q'B \subseteq qB$ und $q''B \subseteq qB$, d.h. wir erhalten Homomorphismen der geforderten Art.
**QED**.

**Beweis** von 2.4.10. Wir werden zunächst den in (i) beschriebenen direkten Limes $\tilde{A}$ betrachten und zeigen, daß dieser die Eigenschaften (ii) und (iii) besitzt. Danach zeigen wir, $\tilde{A}$ ist gerade die Henselisierung $A^h$.

<u>1. Schritt</u>. Konstruktion eines lokalen Rings $\tilde{A}$ mit dem maximalen Ideal $\tilde{m}$.
Auf Grund des Lemmas bilden die Etal-Umgebungen von A ein direktes System. Wir setzen

$$\tilde{A} := \varinjlim_{(B,q) \text{ Etal-Umgebung von A}} B = \bigoplus_{B,q} B / \sim^{64}$$

---

[61] weil A wei alle kommutativen Ringe mit 1 noethersch sein soll.
[62] Denn jedes maximale Ideal von B liegt über einem maximalen Ideal von A, also über m, istt also gleich q.
[63] Beide Ringe bestehen gerade aus den Schnitten der Strukturgarbe von Spec C über der offenen Menge U.
[64] Wir betrachten d(B,q) als Teilmodul der direkten Summe bezüglich der Abbildung

$$q_B = q_{B,q}: B \longrightarrow \bigoplus_{B,q} B\ ,\ b \mapsto (b\bullet\delta_B^{B'})_{B'},$$

welche jedes $b \in B$ auf das Tupel abbildet, dessen B-te Koordinate gleich b und dessen übrige Koordinaten gleich Null sind. Faktorisiert wird nach dem Teilmodul der direkten Summe, welcher erzeugt wird von den Elementen der Gestalt

$$q_{B'}(b') - q_{B''}(\varphi(b'))$$

wobei $\varphi$ die Homomorphismen

$$\varphi: B' \longrightarrow B''$$

wobei der direkte Limes über alle A-Algebra-Homomorphismen

$$\varphi: B' \longrightarrow B''$$

von Etal-Umgebungen (B',q') und (B'',q'') von A erstreckt wird mit

$$\varphi^{-1}(q'') = q'. \qquad (1)$$

Die natürliche Einbettungen von B in die direkte Summe definiert eine natürliche Abbildung

$$q_B = q_{B,q}: B \longrightarrow A^h,\ b \mapsto [\{b\bullet\delta_B^{B'}\}_{B',q'}],$$

für jede Etal-Umgebung (B,q)[65]. Wir definieren $\tilde{m}$ als direkten Limes

$$\tilde{m} := \underset{(B,q)\ \text{Etal-Umgebung von } A}{\varinjlim} q = \bigoplus_{B,q} q / \sim$$

Die natürlichen Einbettungen $q \hookrightarrow B$ definieren dann eine Abbildung

$$\tilde{m} \hookrightarrow \tilde{A}.$$

Es ist nicht schwer, einzusehen, daß diese injektiv ist.[66] Wir werden im folgenden $\tilde{m}$ mit seinem Bild in $\tilde{A}$ identifizieren. Die koordinatenweise Multiplikation versieht $\tilde{m}$ mit der Struktur eines $\tilde{A}$-Moduls, d.h. $\tilde{m}$ wird zu einem Ideal von $\tilde{A}$.

Repräsentiere $x \in q$ ein Element von $\tilde{m}$. Wegen q = mB hat dann x die Gestalt

$$x = x_1 b_1 + \ldots + x_r b_r \text{ mit } x_i \in m \text{ und } b_i \in B.$$

Dann gilt mit $q = q_{B,q}$:

$$q(x) = q(x_1\bullet 1_B)\bullet q(b_1) + \ldots + q(x_r\bullet 1_B)\bullet q(b_r) \in m\bullet\tilde{A}.$$

Es gilt deshalb

$$\tilde{m} = m\bullet\tilde{A} = q\bullet\tilde{A}$$

für jede Etal-Umgebung (B,q) von A.

Außerdem haben wir die natürlichen Abbildung

$$A \longrightarrow \tilde{A},\ a \mapsto q_B(a\bullet 1_B),$$

welche nach Wahl des direkten Systems der (B,q) nicht von der speziellen Wahl von B abhängt.[67]

---

des direkten Systems durchläuft und b' die Elemente des Definitionsbereichs von φ. Jedes Element des direkten Limes wird repräsentiert von einem Element b einer Etal-Umgebung von A. Zwei Elemente repräsentieren dasselbe Element des Limes, wenn sie bei einem φ ineinander abgebildet werden.

[65] Das Bild von $b \in B$ sei die Restklasse der Familie, deren einziges eventuell von Null verschiedenes Glied zur Etal-Umgebung (B,q) gehört und gleich b ist.

[66] Jedes Element von $\tilde{m}$ wird durch ein Element $x \in q$ aus einem q representiert. Zwei x representieren in $\tilde{m}$ dasselbe Element, wenn sie bei einem φ ineinander abgebildet werden, d.h. wenn sie dasselbe Element von $\tilde{A}$ representieren,

[67] Zu jedem weiteren B' gibt es ein B'', in welches sich B und B' abbilden lassen und in welchem $a\bullet 1_B$ und $a\bullet 1_{B'}$ dasselbe Bild $a\bullet 1_{B''}$ haben.

Das Bild von m bei dieser Abbildung liegt in $\widetilde{m}$. Die Abbildung induziert deshalb einen Homomorphismus

$$A/m \longrightarrow \widetilde{A}/\widetilde{m} = \varinjlim_{(B,q)} B/q = \varinjlim_{(B,q)} k = k,\ a + m \mapsto q_B(a\cdot 1_B) + \widetilde{m} \mapsto a\cdot 1_B + q$$

Weil die (B,q) eine Etal-Umgebungen von A ist, ist diese Abbildung ein Isomorphismus. Insbesondere ist

$$\widetilde{m} \text{ maximales Ideal von } \widetilde{A} \text{ mit } \widetilde{A}/\widetilde{m} = k.$$

Die Lokalisierungen $(B_q, qB_q)$ bilden ein finales Teilsystem im direkten System der (B,q).[68] können uns deshalb bei der Wahl des direkten Systems, welches $(\widetilde{A}, \widetilde{m})$ definiert, auf den Fall beschränken, daß B für jedes (B,q) ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal q ist. Ein Element von $\widetilde{A} - \widetilde{m}$ läßt sich deshalb durch ein Element eines B repräsentieren, welches nicht in q liegt, also eine Einheit in B ist. Damit ist aber jedes Element von $\widetilde{A} - \widetilde{m}$ eine Einheit, d.h.

$$\widetilde{m} \text{ ist einziges maximales Ideal von } \widetilde{A},$$

Der Ring $\widetilde{A}$ ist somit lokal, hat das maximale Ideal $\widetilde{m} = m\widetilde{A}$ und den Restekörper k.

$$\widetilde{A}/\widetilde{m} = k.$$

<u>2. Schritt</u>. Beweis von (ii).

Wir haben noch zu zeigen, $\widetilde{A}$ ist flach über A.
Für i > 0 gilt

$$\mathrm{Tor}_i^A(\widetilde{A}, ?) = \mathrm{Tor}_i^A(\varinjlim_{B,q} (B,q), ?) = \varinjlim_{B,q} \mathrm{Tor}_i^A(B, ?) = 0,$$

weil die Tor-Funktoren mit direkten Limites kommutieren und jedes B etal, also flach über A ist. Damit ist $\widetilde{A}$ flach über A.

<u>3. Schritt</u>. <u>Beweis von (iii)</u>.
Sei (B,q) eine lokale Etal-Umgebung von A. Dann ist jede Etal-Umgebung von B auch eine Etal-Umgebung von A. Das direkte System, welches $\widetilde{B}$ definiert, ist nach Lemma 2.4.9.1 (ii) final im direkten System, welches $\widetilde{A}$ definiert. Deshalb induziert die natürliche Abbildung $A \longrightarrow B$ einen Isomorphismus $\widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B}$.

<u>4. Schritt</u>. $\widetilde{A}$ ist Henselsche Teilalgebra von $\hat{A}$.

Seien $f: Y \longrightarrow X := \operatorname{Spec} \widetilde{A}$ ein Etal-Morphismus und $y \in Y$ ein Punkt mit dem Bild

$$f(y) = \widetilde{m},$$

für welchen f einen Isomorphismus der Restekörper induziert. Nach 2.4.3 (iii) reicht es zu zeigen, daß f einen Schnitt besitzt. Zum Beweis können wir Y durch eine beliebig kleine offene Umgebung von y ersetzen. Wir können deshalb annehmen, daß f ein Standard-Etal-Morphismus ist. Insbesondere ist dann f affin,

---

[68] Für jede Etal-Umgebung $A \longrightarrow (B,q)$ ist auch die Zusammensetzung

$$A \longrightarrow (B,q) \longrightarrow (B_q, qB_q)$$

mit der natürlichen Abbildung in den Quotientenring eine Etal-Umgebung.

$$Y = \mathrm{Spec}\, B,$$

und y ein über $\widetilde{m}$ liegendes maximales Ideal. Weil f einen Isomorphismus

$$k(m) \longrightarrow k(y)$$

induziert, ist (B,y) eine Etal-Umgebung von $\widetilde{A}$. Die natürliche Abbildung $\varphi:\widetilde{A} \longrightarrow B$ induziert deshalb einen Isomorphismus

$$\widetilde{A} =^{69} (\widetilde{A})^{\sim} \longrightarrow \widetilde{B}$$

Die Zusammensetzung

$$\widetilde{A} \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{q_B} \widetilde{B} = \widetilde{A}$$

fällt deshalb mit der natürlichen Abbildung $\widetilde{A} \longrightarrow (\widetilde{A})^{\sim}$ zusammen[70], d.h. mit der Identität,

$$q_B \circ \varphi = \mathrm{Id},$$

Es folgt

$$\mathrm{Id} = \mathrm{Spec}(\varphi)\circ\mathrm{Spec}(q_B) = f\circ\mathrm{Spec}(q_B),$$

d.h. $q_B$ definiert den gesuchten Schnitt von f.

<u>5. Schritt</u>. $\widetilde{A}$ ist isomorph zur Henselisierung $A^h$ von A.

Nach dem zweiten Schritt ist der natürliche Homomorphismus $A \xrightarrow{j} \widetilde{A}$ ein Etalmorphismus lokaler Ringe. Auf Grund der Universalitätseigenschaft der Henselisierung faktorisiert sich diese Abbildung über die natürliche Einbettung $A \xrightarrow{i} A^h$, d.h. wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A^h \\ j\downarrow & \swarrow \widetilde{j} & \\ \widetilde{A} & & \end{array}$$

Die Homomorphismen i und j sind etal und induzieren Isomorphismen der Restekörper. Insbesondere haben alle drei Ringe dieselben Hilbert-Funktionen (vgl. das Lemma zum Beweis von Bemerkung 1.3.8 (v)). Damit ist auch $\widetilde{j}$ flach, also etale, und induziert einen Isomorphismus der Restekörper. Der Etal-Morphismus

$$\mathrm{Spec}\, \widetilde{j}: \mathrm{Spec}\, \widetilde{A} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A^h$$

besitzt nach 2.4.3 (iv) einen Schnitt (weil $A^h$ Henselsch ist), d.h. Spec $A^h$ ist isomorph zu einer Zusammenhangskomponente von Spec $\widetilde{A}$. Weil $\widetilde{A}$ lokal ist, ist Spec $\widetilde{A}$ zusammenhängend. Deshalb ist Spec $\widetilde{j}$ ein Isomorphismus. Also ist auch pec $\widetilde{j}$ ein Isomorphismus.

<u>6. Schritt</u>. $A^h$ <u>ist noethersch</u>.

---

[69] Jedes Element von $(\widetilde{A})^{\sim}$ wird repräsentiert durch ein Element einer Etal-Algebra über $\widetilde{A}$, also durch eines aus einer Etal-Algebra über A, also ein Element von $\widetilde{A}$. Die Abbildung ist deshalb surjektiv. Die Injektivitt zeigt man in analoger Weise.

[70] Beide Homomorphismen haben die Universalitätseigenschaft desselben direkten Limes.

Sei

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_n \subseteq ...$$

eine aufsteigende Kette von Idealen von $A^h$. Wir haben zu zeigen, diese Kette ist stationär. Weil die Vervollständigung $\hat{A}$ von A noethersch ist, ist die Kette der Erweiterungsideale

$$I_1\hat{A} \subseteq I_2\hat{A} \subseteq ... \subseteq I_n\hat{A} \subseteq ...$$

stationär. Weil die natürliche Abbildung $A^h \longrightarrow \hat{A}$ lokal und etal , also treuflach ist, gilt

$$I_j = I_j\hat{A} \cap A^h,$$

also ist auch die Folge der $I_j$ stationär.

**QED**.

**Bemerkung**

Für jede lokale Etal-Umgebung (B,q) von (A,m) haben wir Etal-Morphismen

$$(A, m) \longrightarrow (B,q) \longrightarrow (\hat{A}, \hat{m}),$$

wobei ganz rechts die Vervollständigung von A steht. Diese sind insbesondere lokale flache Homomorphismen, also injektiv. Wenn wir die Etal-Umgebung (B,q) mit deren Bild in der Vervollständigung von A identifizieren, werden die Morphismen des direkten Systems, welche $A^h$ definieren zu natürlichen Inklusionen von Teilringen von $\hat{A}$, und der direkte Limes ist dann gerade die Vereinigung dieser Teilringe. Wir erhalten für die Henselisierung $A^h$ von A:

$$A^h = \bigcup \{ B_i \}_{i\in I}$$

wobei $\{ B_i \}_{i\in I}$ die Familie der lokalen Teilringe zwischen A und $\hat{A}$ bezeichne,

$$A \subseteq B_i \subseteq \hat{A} \text{ (als lokale Ringe)}^{71}$$

mit $B_i$ etal über A. Man beachte, die $B_i$ sind dabei Lokalisierungen von Standard-Etal-Algebren.

### 2.4.11 Henselisierung normaler lokaler Ring

Seien (A, m) ein lokaler normaler Ring mit dem Quotientenkörper

$$K := Q(A).$$

Weiter seien

$K_s$ die separable Abschließung von K

$\bar{A}$ die ganze Abschließung von A in $K_s$

$G = Gal(K_s/K)$ die Galois-Gruppe[72] von $K_s$ über K

$\bar{n} \subseteq \bar{A}$ ein über m liegendes maximales Ideal

$D := \{\sigma\in G \mid \sigma(n) = n \}$ die Zerlegungsgruppe von n über K.

$\tilde{A}$ die Lokalisierung von $\bar{A}^D$ im maximalen Ideal $\bar{n}^D = \bar{n} \cap K^D$

---

[71] d.h. die natürlichen Inklusionen sollen lokale Homomorphismen sein.

[72] Man beachte G operiert auf $\bar{A}$.

$\widetilde{n} := \overline{n}^D\widetilde{A}$ das maximale Ideal von $\widetilde{A}$.

Dann ist $\widetilde{A}$ gerade die Henselisierung von A,

$$\widetilde{A} = A^h.$$

**Bemerkungen**

(i) Eine ausführliche Beschreibung der Eigenschaften der Zerlegungsgruppe findet man im Kapitel über ganze Erweiterungen der kommutativen Algebra von Bourbaki [Bourbaki 1961]. Die Zerlegungsgruppe wird dort mit $G^Z$ bezeichnet, d.h. Bourbaki verwendet die deutsche Bezeichnung. Die hier verwendete Bezeichnung von Milne kommt vom englischen 'decomposition'. Wir geben hier einige der wichtigsten Aussagen an.

(ii) Die Zerlegungsgruppe D ist in der folgenden Situation definiert.

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & K' \\ \cup & & \cup \\ A & \hookrightarrow & A' \end{array}$$

Dabei seien A ein Integritätsbereich, K := Q(A) dessen Quotientenkörper,

$$K'/K$$

eine (nicht-notwendig endliche) Galois-Erweiterung und A' die ganze Abschließung von A in K'. Weiter sei

$$n' \in A'$$

ein maximales Ideal. Dann setzt man

$$D = D(K'/K,n') := \{\sigma\in G(K'/K) \mid \sigma(n') = n' \}.$$

Der Fixkörper der Zerlegungsgruppe heißt Zerlegungskörper,

$$K'^D := \{x \in K \mid \sigma(x) = x \text{ für } \sigma\in D\}.$$

Wir werden im folgenden stets annehmen, daß A ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper K, d.h. normal, ist.

(iii) Eine Untergruppe $H \subseteq G = G(K'/K)$ liegt genau dann ganz in der Zerlegungsgruppe, wenn n' das einzige über $n' \cap A'^H$ liegende Primideal ist [Bourbaki 1961, §2, Abschnitt 2, Proposition 4]. Der Invariantenring von D ist somit der kleinste Invariantenring zwischen A und A',

$$A \subseteq A'^D \subseteq A'$$

in welchem die verschiedenen über

$$n := n' \cap A$$

liegenden Primideale bereits verschieden sind. Im Ring $A'^D$ gibt es genau so viele verschiedene Primideale über n wie in A'. Die Zerlegung von n in A' findet also bereits in $A'^D = A' \cap K'^D$ statt. Das erklärt die Bezeichnungen "Zerlegungskörper" und "Zerlegungsgruppe".

(iv) Nach Konstruktion induziert jeder Automorphismus $\sigma \in D$ der Zerlegungsgruppe einen Automorphismus der zu n' gehörigen Erweiterung der Restekörper, sagen wir

$$D \longrightarrow \mathrm{Aut}_{k(n)}\, k(n'),\ \sigma \mapsto \overline{\sigma}. \tag{1}$$

Der Kern dieses Homomorphismus heißt Trägheitsgruppe von n' über K und wird mit

$$I = I(K'/K, n) := \{ \sigma \in D \mid \sigma(x) - x \in n' \text{ für jedes } x \in A' \}$$

bezeichnet. Die Bezeichnung kommt vom englischen ‘inertia’. Im Buch von Bourbaki wird die deutsche Bezeichnung $G^T$ verwendet.

(v) Es gelten die folgenden Aussagen.

(a) G operiert transitiv auf der Menge der Primideale von A’, welche über n liegen.

(b) k(n’) ist eine Galois-Erweiterung von k(n), und der Homomorphismus (1) induziert einen Isomorphismus

$$D/I \xrightarrow{\cong} G(k(n')/k(n)).$$

(vgl. [Bourbaki 1961, §2, Abschnitt 3, Proposition 6]

(vi) Sei L ein beliebiger Körper zwischen K und K’,

$$K \subseteq L \subseteq K'.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) Der Zerlegungskörper von n’ über L ist gleich

$$L(K'^D).$$

Ist L/K eine Galois-Erweiterung so ist der Zerlegungskörper des Primideals $n' \cap L$ von $A' \cap L$ gleich $K'^D \cap L$.

(b) Der Trägheitskörper von n’ über L ist gleich

$$L(K'^I).$$

(c) Seien X := Spec A, Y := Spec $A' \cap L$ und

$$f: Y \longrightarrow X$$

der Schema-Morphismus, welcher durch die natürliche Einbettung

$$A \hookrightarrow A' \cap L$$

induziert wird. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

1. $L \subseteq K'^D$
2. Der durch f induzierte lokale Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{X,n} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,n'\cap L}$$

ist unverzweigt und induziert einen Isomorphismus $k(n) \xrightarrow{\cong} k(n' \cap L)$ der Restekörper, d.h. der Ring rechts ist eine Etal-Umgebung des Rings links.

(vgl. [Bourbaki 1961, §2, Abschnitt 3, Proposition 7])

**Beweis** von 2.4.11. 1.Schritt. $\widetilde{A}$ ist ein Henselscher Ring.

Angenommen, der Ring $\widetilde{A}$ ist nicht Henselsch. Dann gibt es ein über $\widetilde{A}$ irreduzibles normiertes Polynom

$$f \in \widetilde{A}[T]$$

welches über dem Restekörper von $\widetilde{A}$ in zwei teilerfremde normierte Faktoren zerfällt.[73] Nach Konstruktion ist $\widetilde{A}$ ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper $K_s^D$. Die Minimalpolynome der Nullstellen von f sind also Polynome mit Koeffizienten aus $\widetilde{A}$ [74].

---

[73] Wenn keiner der irreduziblen Faktoren von f über dem Restekörper in teilfremde Faktoren zerfällt, so erhält man die Zerlegung von $\bar{f}$ durch Zusammenfassen dieser Faktoren, d.h. f ist kein Gegenbeispiel für die Hensel-Eigenschaft von $\widetilde{A}$.

[74] siehe Matsumura, Commutative rings theory, Cambridge University Press 1986, Theorem 9.2.

Diese Minimalpolynome und teilen im Ring $\widetilde{A}[T]$ das Polynom f[75], sind also gleich f. Damit gilt

$$f \text{ ist irreduzibel über } Q(\widetilde{A}) = K_s^D.$$

Wir können außdem noch annehmen[76],

$$f \text{ ist separabel über über } Q(\widetilde{A}) = K_s^D.$$

Der natürlichen Homomorphismus $A \longrightarrow \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{A}[T]/(f)$ induziert einen Homomorphismus

$$A/n\cap A \longrightarrow (\widetilde{A}/\widetilde{n})[T]/(\overline{f})$$

wobei der Ring rechts als endlich erzeugter Vektorraum über dem Körper $\widetilde{A}/\widetilde{n}$ artinsch, also ein direktes Produkt von artinschen lokalen Ringen ist. Deren Anzahl ist mindestens zwei, denn $\overline{f}$ ist nach Voraussetzung reduzibel. Es gibt eine endliche separable algebraische Erweiterung

$$K'' \text{ ( zum Beispiel } K'' = K_s^D[T]/(f)$$

von $K_s^D$ und einen Ring A” (zum Beispiel A”= $\widetilde{A}[T]/(f)$) zwischen $\widetilde{A}$ und K”,

$$\widetilde{A} \subseteq A'' \subseteq K'' \subseteq K_s,$$

mit

$$A'' \text{ ganz über } \widetilde{A} \text{ und } Q(A'') = K''$$

und der Eigenschaft, daß über $\widetilde{n}$ mindestens zwei Primideale von A” liegen.

Wir haben damit das folgende kommutative Diagramm von Inklusionen konstruiert.

---

[75] Man teile f durch eines diesser Minimalpolynome mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

[76] Andernfalls ist $f = \chi(T^p)$ mit einem normiertn Polynom $\chi \in \widetilde{A}[T]$, wobei p die Charakteristik von K bezeichne. Mit f ist auch g irreduzibel über $K_s^D$. Bezeichne $\kappa$ den Restekörper von $\widetilde{A}$. Nach Voraussetzung zerfällt $\overline{f}(T)$ in $\kappa[T]$ in teilerfremde Faktoren, $\overline{f} = \overline{gh}$ und weil $\overline{f}$ inseparabel ist, gilt

$$0 = \overline{f}' = \overline{g}'\overline{h} + \overline{gh}'.$$

Weil $\overline{g}$ und $\overline{h}$ teilerfremd sind, folgt

$$\overline{g} \mid \overline{g}' \text{ und } \overline{h} \mid \overline{h}'.$$

Da der Grad beim Übergang zur Ableitung kleiner wird, muß

$$\overline{g}' = 0 \text{ und } \overline{h}' = 0$$

gelten, d.h. $\overline{g}$ und $\overline{h}$ sind Polynome in $T^p$. Mit anderen Worten, mit $\overline{f}$ zerfällt auch $\chi$ in ein Produkt teilerfremder Faktoren. Wir können f durch $\chi$ ersetzen. Durch Wiederholen dieses Vorgangs erhalten wir nach endlich vielen Schritten ein separables Polynom.

$$\begin{array}{ccccccc}
K & \subseteq & K_s^D & \subseteq & K" & \subseteq & K_s \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
A & \subseteq & \widetilde{A} & \subseteq & A" & \subseteq & \overline{A}_{\overline{n}} \\
\| & & \cup & & \cup & & \cup \\
A & \subseteq & \overline{A}^D & \subseteq & \overline{\overline{A}} & \subseteq & \overline{A}
\end{array}$$

Dabei sei $\overline{\overline{A}}$ die ganze Abschließung von $\overline{A}^D$ in A".[77] Die Inklusionen der unteren Zeile sind ganze Erweiterungen. Weil über $\widetilde{n}$ mindestens zwei maximale Ideale von A" liegen, liegen über $\overline{n}^D$ mindestens zwei maximale Ideale von $\overline{\overline{A}}$.

Diese Situation bleibt erhalten, wenn wir den Körper K" zu einer geeigneten Galois-Erweiterung von $K_s^D$ vergrößern[78] und die Ringe A" und $\overline{\overline{A}}$ durch deren ganze Abschließungen in K" ersetzen. Wir erhalten damit die folgende Situation.

- K" ist eine Galois-Erweiterung von $K_s^D$
- $\overline{\overline{A}}$ ist die ganze Abschließung von $\overline{A}^D$ in K", d.h. $\overline{\overline{A}} = \overline{A} \cap K"$.
- Über $\overline{n} \cap K_s^D \subseteq \overline{A}^D$ liegen mindestens zwei maximale Ideale von $\overline{\overline{A}}$.

Die letzte dieser Aussagen steht aber im Widerspruch zu Bemerkung (iii), denn danach ist $\overline{n}$ das einzige über $\overline{n} \cap \overline{A}^D$ liegende maximale Ideal von $\overline{A}$. Unsere Annahme ist somit falsch und $\widetilde{A}$ ist ein Henselscher Ring.

<u>2. Schritt</u>. $\widetilde{A}$ ist die Henselisierung von A, $\widetilde{A} = A^h$.
Nach der Bemerkung am Ende von 2.4.10 ist

$$A^h = \bigcup_{i\in I} B_i ,$$

wobei die Vereinigung über alle lokalen Teilringe der Vervollständigung $\hat{A}$ erstreckt wird, welche etal über A sind. Weil A nach Voraussetzung normal sein soll, sind die $B_i$ nach 2.1.8 Etal-Algebren endlichen Typs über A. Weil die $B_i$ lokal sind, sind deren Spektren zusammenhängend. Nach 2.2.4 sind die

$$\operatorname{Spec} B_i$$

offene Teilmengen in den Spektren ganzer Abschließungen $\overline{C}$ von A in endlichen separablen Körper-Erweiterungen L/K, die keine Verzweigungspunkte von

$$\operatorname{Spec} \overline{C} \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

enthalten. Nach Bemerkung (vi)(c) bedeutet die Unverzweigtheit dieses Morphismus gerade, daß $L \subseteq K_s^D$ gilt. Es folgt

$$\overline{C} \subseteq \overline{A} \cap L \subseteq \overline{A} \cap K_s^D = \overline{A}^D$$

---

[77] Es gilt $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$ , weil $\overline{A}$ die ganze Abschließung in $K_s$ ist.

[78] zum Beispiel zum Zerfällungskörper von f

Wir gehen zu den Lokalisierungen über und erhalten

$$B_i \subseteq \widetilde{A}.$$

Da dies für alle i gilt , folgt

$$A^h \subseteq \widetilde{A}.$$

Wir müssen noch zeigen, daß auch die umgekehrte Inklusion besteht.

Nach Bemerkung (vi)(c) induziert die natürlichen Einbettung $A \hookrightarrow \overline{A}^D$ einen unverzweigten lokalen Homomorphismus

$$A \longrightarrow \widetilde{A}$$

Da beide Ringe Teilringe von $K_s$ sind, ist diese Abbildung injektiv (es ist gerade die natürliche Einbettung der beiden Teilringe ineinander). Nach 2.2.3 folgt aus der Injektivität damit sogar, daß dieser Homomorphismus etale ist. Damit ist $\widetilde{A}$ eine Etal-Umgebung von A (vgl. Bemerkung (vi)(c)), d.h. es gilt

$$\widetilde{A} \subseteq A^h.$$

**QED**.

**Bemerkung**

Als nächstes wollen wir einen Zusammenhang zwischen der Henselisierung und dem Begriff der algebraischen Potenzreihe herstellen. Zum Beweis der entsprechenden Aussage benötigen wir eine leichte Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen für Henselsche Ringe (Bedingung 2.4.3 (v)).

### 2.4.12 Implizite Funktionen

Sei $x \in X :=$ Spec A der abgeschlossene Punkt (d.h. x = m) und $c \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl[79]. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) A ist ein Henselscher Ring.

(ii) Satz über implizite Funktionen. Seien $f_1, \dots , f_n \in A[T_1, \dots , T_n]$ Polynome, welche modulo $m^c$ eine gemeinsame Nullstelle $a = (a_1, \dots , a_n) \in A^n$ besitzen, d.h.

$$f_i(a) \equiv 0 \bmod m^c \text{ für } i = 1,\dots,n,$$

wobei

$$\det \left(\frac{\partial \overline{f}_i}{\partial T_i}(a)\right) \neq 0 \bmod m$$

gelte. Dann gibt es eine gemeinsame Nullstelle $b = (b_1, \dots , b_n) \in A^n$ der $f_i$ ,

$$f_i(b) = 0 \text{ für } i = 1,\dots,n,$$

mit $b_i \equiv a_i \bmod m^c$.

**Beweis**. (ii) $\Rightarrow$ (i). Die Implikation folgt aus der Implikation (v) $\Rightarrow$ (i) von 2.4.3, denn jede Kongruenz modulo $m^c$ hat zur Folge, daß diese Komgruenz auch modulo m besteht.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Der Beweis beruht auf der Tatsache 2.3.2, daß ein Morphismus genau dann etale ist, wenn er formal etale ist. Wir erinnern deshalb zunächst an die Defintion des formal etalen Morphismus (vgl. 2.3.1).

---

[79] d.h. ein ganze Zahl ≥ 1.

Ein Morphismus $f\colon Y \longrightarrow X$ heißt formal etale, wenn für jedes X-Schema X' und jedes (lokal abgeschlossene) Teilschema

$$X'_0 \hookrightarrow X',$$

welches durch ein nilpotentes Ideal definiert ist, die natürliche Abbildung

$$\mathrm{Hom}_X(X', Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(X'_0, Y)$$

bijektiv ist. Mit anderen Worten, für jedes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X'_0 & \hookrightarrow & X' \\ {\scriptstyle g_0}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

(d.h. für jeden Schema-Morphismus $g_0$, für den dieses Diagramm kommutativ ist) gibt es genau einen Schema-Morphismus $g\colon X' \longrightarrow Y$, der sich kommutativ in dieses Diagramm einfügen läßt. Speziel für den Fall, daß f vom einem Homomorphismus

$$h\colon A \longrightarrow B$$

von kommutativen Ringen mit 1 kommt, hat dies zur Folge, daß es für jedes kommutative Diagramm von kommutativen Ringen mit 1, sagen wir

$$\begin{array}{ccc} B' & \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} & B'/N' \\ {\scriptstyle j_0}\uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

mit N' nilpotentes Ideal in B', wobei $\rho$ den natürlichen Homomorphismus bezeichne, genau einen Homomorphismus $j\colon B \longrightarrow B'$ von Ringen mit 1 gibt, der sich kommutativ in dieses Diagramm einfügen läßt.

Seien jetzt $f_1, \ldots, f_n \in A[T_1, \ldots, T_n]$ Polynome, welche modulo $m^c$ eine gemeinsame Nullstelle $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ besitzen, d.h.

$$f_i(a) \equiv 0 \bmod m^c \text{ für } i = 1,\ldots,n,$$

wobei

$$\det\left(\frac{\partial \overline{f}_i}{\partial T_j}(a)\right) \not\equiv 0 \bmod m$$

gelte. Wir setzen[80]

$$B := A[T]/(f).$$

Auf Grund der Bedingung an die Determinante ist B eine Etal-Algebra über A (vgl. Beispiel 2.1.2). Wir setzen

$$A_c := A/m^c$$

Der Kern des Homomorphismus von A-Algebren

$$A[T] \longrightarrow A_c,\ p(T) \mapsto p(a) \bmod m^c,$$

[80] Wir schreiben hier abkürzend T für $T_1, \ldots, T_n$ und f für $f_1, \ldots, f_n$.

enthält sämtliche Polynome $f_i$, faktorisiert sich deshalb über B und induziert einen Homomorphismus von A-Algebren

$$s_c: B \longrightarrow A_c\ ,\ p(T) \bmod (f) \mapsto p(a) \bmod m^c.$$

Wir erhalten damit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_{c+1} & \longrightarrow & A_c \\ \uparrow & & \uparrow s_c \\ A & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

wobei der linke vertikale und der obere horizontale Homomorphismus gerade der natürliche Homomorphismus auf den jeweiligen Faktorraum sei. Der Kern des oberen horizontalen Homomorphismus ist gerade $m^c/m^{c+1}$, ist also nilpotent. Auf Grund der Vorbmerkung gibt es damit genau einen Homomorphismus von Ringen mit 1,

$$s_{c+1}: B \longrightarrow A_{c+1}\ ,$$

der sich kommutativ in dieses Diagramm einfügen läßt.
Durch Wiederholen dieser Argumentation erhalten wir eine Folge von Homomorphismen $s_c$, $s_{c+1}$, ..., welche einen Homomorphismus

$$s.\ B \longrightarrow \hat{A} = \varprojlim_{\alpha} A_\alpha,\ b \mapsto \{s_\alpha(b)\}_{\alpha\ge c}$$

definieren. Nach Konstruktion[81] ist dann

$$b = (b_1,...,b_n) \in \hat{A},\ b_i := s(T_i \bmod (f)$$

eine Lösung des Gleichungssystems

$$f_i = 0\ ,\ i = 1,..., n.$$

Weil A nach Voraussetzung (i) Henselsch ist, gibt es außerdem eine Lösung

$$b' = (b'_1,...,b'_n) \in A$$

dieses Gleichungssystems in A. Beide Lösungen definierten Homomorphismen von A-Algebren

$$t: B \longrightarrow \hat{A},\ p(T) \bmod (f) \mapsto p(b),\ \text{und}\ t': B \longrightarrow A,\ p(T) \mapsto p(b').$$

Durch Zusammensetzen mit den natürlichen Homomorphismen

$$\hat{A} \longrightarrow \hat{A}/m^\alpha \hat{A} = A_\alpha \text{ und } A \longrightarrow A/m^\alpha = A_\alpha$$

Erhalten wir Folgen von Homomorphismen von A-Algebren

$$\{t_\alpha: B \longrightarrow A_\alpha\}_{\alpha=1,2,..} \text{ und } \{t_\alpha: B \longrightarrow A_\alpha\}_{\alpha=1,2,..}$$

und kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_{\alpha+1} & \longrightarrow & A_\alpha \\ t_{\alpha+1} \nwarrow & & \nearrow t_\alpha \\ & B & \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} A_{\alpha+1} & \longrightarrow & A_\alpha \\ t'_{\alpha+1} \nwarrow & & \nearrow t'_\alpha \\ & B & \end{array}$$

Weil $A \longrightarrow B$ formal etal ist, ist für jedes $\alpha$ die Abbildung $t_{\alpha+1}$ durch $t_\alpha$ und die Abbildung $t'_{\alpha+1}$ durch $t'_\alpha$ eindeutig festgelegt. Nach Konstruktion stimmen die

[81] vgl. den Beweis der Implikation (iv) $\Rightarrow$ (v) von 2.4.3.

Lösungen des Gleichungssystems modulo $m\hat{A}$ überein. Deshalb gilt $t_1 = t'_1$ also $t_\alpha = t'_\alpha$ für jedes $\alpha$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned}
b'_i \bmod m^c &= t'(T_i \bmod (f)) \bmod m^c && \text{(nach Definition von } t'\text{)}\\
&= t'_c(T_i \bmod (f)) && \text{(nach Definition der } t'_\alpha\text{)}\\
&= t_c(T_i \bmod (f)) && \text{(wegen } t_\alpha = t'_\alpha \text{ für alle } \alpha\text{)}\\
&= t(T_i \bmod (f)) \bmod m^c && \text{(nach Definition der } t_\alpha\text{)}\\
&= b_i \bmod m^c && \text{(nach Definition von } t\text{)}\\
&= s(T_i \bmod (f) \bmod m^c && \text{(nach Definition von } b_i\text{)}\\
&= a_i \bmod m^c && \text{(nach Konstruktion von } s\text{)}
\end{aligned}$$

**QED**.
**Bemerkung**
Aus dem Beweis der Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ergibt sich, daß die Lösung b von (ii) nicht nur existiert, sondern auch eindeutig bestimmt ist.

### 2.4.13 Henselisierung und algebraische Potenzreihen

Seien k ein Körper und

$$A = k[X_1,...,X_n]_{(X_1,...,X_n)}$$

die Lokalisierung des Polynomrings über k im maximalen Ideal $(X_1,...,X_n)$. Dann besteht die Henselisierung $A^h$ von A gerade aus den Potentzreihen von

$$\hat{A} = k[[X_1,...,X_n]].$$

welche als Elemente des Quotientenkörpers $Q(\hat{A})$ algebraisch über Q(A) sind, d.h. $A^h$ ist gerade die algebraische Abschließung von A in $\hat{A}$.[82]

**Bemerkung**
Die natürliche Einbettung

$$k[X_1,...,X_n]_{(X_1,...,X_n)} \hookrightarrow k[[X_1,...,X_n]]$$

induziert eine separable Erweiterung der Quotientenkörper.
**Beweis der Bemerkung**. Wir setzen

$R := k[X_1,...,X_n]$
$m := (X_1,...,X_n)R$
$S := k[[X_1,...,X_n]]$
$K := Q(R)$
$L := Q(S)$.

Bezeichne p die Charakteristik der obigen Körper. Wir können annehmen, $p \neq 0$. Wir haben zu zeigen, für jede Körper-Erweiterung K'/K ist der Ring

[82] Diese stimmt mit einer Lokalisierung der ganzen Abschließung überein.

$L\otimes_K K'$

reduziert, d.h. 0 ist das einzige nilpotente Element. Jedes Element von L liegt in einer endlich erzeugten Teilerweiterung L' des Körpers K. Es reicht also zu zeigen,

$L'\otimes_K K'$ ist reduziert

für jeden Körper L' mit

$K \subseteq L' \subseteq L$ und L'/K endlich erzeugt.

Nach [Matsumura 1967, (27.F) Lemma 3] reicht es zu zeigen

$L'\otimes_K K^{1/p}$ ist reduziert

für jeden Körper L' mit

$K \subseteq L' \subseteq L$ und L'/K endlich erzeugt.

Damit reicht es aber auch zu zeigen[83],

$L\otimes_K K^{1/p}$ ist reduziert.

Wir werden sogar zeigen, dieser Ring ist nullteilerfrei.

Für beliebige Körpererweiterungen K'/K gilt

$$\begin{aligned} L\otimes_K K' &\overset{84}{=} (L\otimes_R K)\otimes_K K' \\ &= L\otimes_R K' \\ &= Q(S)\otimes_R K' \end{aligned}$$

d.h. $L\otimes_K K'$ ist ein Quotientenring von $S\otimes_R K'$. Es reicht also zu zeigen, daß

$S\otimes_R K^{1/p}$ nullteilerfrei

ist. Wegen $K^{1/p} \overset{85}{=} Q(R^{1/p})$ ist dieser Ring ein Quotientenring von $S\otimes_R R^{1/p}$, d.h. es reicht zu zeigen

$S\otimes_R R^{1/p}$ ist nullteilerfrei

Wir betrachten den Homomorphismus[86]

---

[83] $K^{1/p}$ ist der Körper der p-ten Wurzeln der Elemente von K. Wir werden $K^{1/p}$ mit der K-Algebra K identifizieren, deren Struktur-Homomorphismus gerade der Übergang in die p-te Potenz ist,

$K \longrightarrow K$ , $x \mapsto x^p$.

[84] Es gilt

$$\begin{aligned} L\otimes_R K &= L\otimes_R Q(R) \\ &= S^{-1}(L) \text{ mit } S := R - \{0\} \\ &= L \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil die Elemente von S Einheiten von L sind.

[85] Wir identifizieren $R^{1/p}$ mit der R-Algebra R bezüglich des Strutur-Homomorphismus

$R \longrightarrow R$, $x \mapsto x^p$.

[86] $S^{1/p}$ sei die R-Algebra S bezüglich des Struktur-Homomorphismus

$R \longrightarrow S^{1/p}$, $x \mapsto x^p$.

Die Abbildung

$\psi: S \times R^{1/p} \longrightarrow S^{1/p}$, $(a,b) \mapsto a^p \cdot b$,

$$\varphi: S\otimes_R R^{1/p} \longrightarrow S^{1/p},\ a\otimes b \mapsto a^p\bullet b \qquad (1)$$

Weil $S^{1/p}$ als Ring isomorph zum Potenzreihenring S , also nullteilerfrei ist, reicht es zu zeigen, diese Abbildung ist injektiv.

Betrachten wir ein Element aus dem Kern von $\varphi$, sagen wir

$$x = u_1\otimes a_1 + \ldots + u_r\otimes a_r \in \mathrm{Ker}(\varphi).$$

Dann gilt

$$0 = \varphi(x) = (u_1)^p a_1 + \ldots + (u_r)^p a_r.$$

Wir fixieren eine natürlichen Zahl N und schreiben die Potenzreihen $u_i$ in der Gestalt

$$u_i = \alpha_N(u_i) + \beta_N(u_i),$$

wobei $\alpha_N(u_i)$ die Summe der Glieder von $u_i$ bis einschließlich zum Grad N ist und der zweite Summand $\beta_N(u_i)$ die Summe der übrigen Glieder umfaßt. Insbesondere ist

$$\alpha_N(u_i) \in R \text{ ein Polynom vom Grad} \le N$$

und es gilt

$$\beta_N(u_i) \in m^{N+1}S .$$

Weil S flach ist über R[87], induziert die natürliche Inklusion $R^{1/p} \hookrightarrow S^{1/p}$ eine injektive Abbbildung

$$S\otimes_R R^{1/p} \rightarrowtail S\otimes_R S^{1/p} \qquad (2)$$

Wir können also den Definitionsbereich von $\varphi$ als Teilring von $S\otimes_R S^{1/p}$ betrachten. Sei $I_N$ das Ideal

$$\begin{aligned} I_N &:= m^{N+1}\bullet S\otimes_R S^{1/p} + S\otimes_R S^{1/p}\circ m^{N+1} \\ &= m^{N+1}\bullet S\otimes_R S^{1/p} \qquad \text{(wegen } m \subseteq R) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} x &\equiv \sum_{i=1}^{r} \alpha_N(u_i)\otimes a_i \mod I_N \\ &\equiv \sum_{i=1}^{r} 1\otimes\alpha_N(u_i)^p a_i \mod I_N \qquad \text{(wegen } \alpha_N(u_i) \in R) \end{aligned}$$

---

ist bilinear über R, denn für $a \in S$, $b \in R^{1/p}$ und $x \in R$ gilt, wenn wir die R-Modul-Multiplikation von Elementen aus $R^{1/p}$ und $S^{1/p}$ mit '$\circ$' bzeichnen:

$$\psi(xa, b) = x^p a^p\bullet b = x^p\bullet\psi(a,b) = x\circ\psi(a,b)$$

und

$$\psi(a, x\circ b) = \psi(a, x^p\bullet b) = a^p\bullet x^p\bullet b = x^p\bullet\psi(a,b) = x\circ\psi(a,b).$$

[87] S ist die Vervollständigung der Lokalisierung $R_m$ von R.

$$\equiv \sum_{i=1}^{r} 1\otimes(\alpha_N(u_i)^p + \beta_N(u_i)^p)a_i \bmod I_N$$

Die letzte Kongruenz besteht wegen $\beta_N(u_i)^p \in m^{(N+1)p}S^{1/p} = S^{1/p} \circ m^{N+1}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} x &\equiv \sum_{i=1}^{r} 1\otimes u_i^p a_i \bmod I_N \\ &\equiv 1\otimes \sum_{i=1}^{r} u_i^p a_i \bmod I_N \\ &\equiv 0 \bmod \bmod I_N \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt,

$$x \in J_N := I_N \cap (S\otimes_R R^{1/p})$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es deshalb zu zeigen,

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} J_N = 0 \qquad (3)$$

Der Ring S ist als Vervollständigung des lokalen Ringes $R_m$ treuflach über $R_m$, d.h. die natürliche Inklusion

$$(R_m)^{1/p} \hookrightarrow S^{1/p}$$

ist treuflach. Durch Basiswechsel, erhalten wir den treuflachen Homomorphismus

$$S\otimes_R(R_m)^{1/p} \hookrightarrow S\otimes_R S^{1/p}$$

(vgl. [Matsumura 1967 , (4,B)]). Sei T = R - m. Dann können wir den linken Ring auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$S\otimes_R(R_m)^{1/p} = S\otimes_R(T^{-1}R)^{1/p}$$

Nun ist die p-te Potenz eines Elements genau dann eine Einheit, wenn das Element selbst eine Einheit ist. Die R-Algebren $(T^{-1}R)^{1/p}$ und $T^{-1}(R^{1/p})$ genügen daher derselben Universalitätseigenschaft und sind damit isomorph. Es folgt

$$\begin{aligned} S\otimes_R(R_m)^{1/p} &= S\otimes_R T^{-1}(R^{1/p}) \\ &= S\otimes_R T^{-1}R \otimes_R R^{1/p} \\ &= T^{-1}S \otimes_R R^{1/p} \\ &= S \otimes_R R^{1/p} \qquad \text{(die Elemente von T sind Einheiten von S)} \end{aligned}$$

Damit ist die natürliche Inklusion

$$S\otimes_R R^{1/p} \hookrightarrow S\otimes_R S^{1/p}$$

treuflach. Es folgt (vgl. Matsumura 1967 (4.C)(ii))

$$\begin{aligned} J_N &= (m^{N+1}\bullet S\otimes_R S^{1/p}) \cap (S\otimes_R R^{1/p}) \\ &= m^{N+1}\bullet S\otimes_R R^{1/p} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} R &= k[X_1,\ldots,X_n] \\ &\subseteq k^{1/p}[X_1^{1/p},\ldots,X_n^{1/p}] \qquad (= R^{1/p}) \end{aligned}$$

$$= k^{1/p}[X_1,...,X_n,T_1,...,T_n]/(T_1^p-X_1, \dots , T_n^p-X_n)$$
$$(\cong k^{1/p}[T_1,...,T_n])$$
$$\cong k^{1/p}\otimes_k k[X_1,...,X_n,T_1,...,T_n]/(T_1^p-X_1, \dots , T_n^p-X_n)$$
$$\cong k^{1/p}\otimes_k R[T_1,...,T_n]/(T_1^p-X_1, \dots , T_n^p-X_n)$$

Jedes Element von $S\otimes_R R^{1/p}$ liegt bereit in einem Teilring der Gestalt

$$S\otimes_R R'$$

mit

$$R' := k'\otimes_k R[T_1,...,T_n]/(T_1^p-X_1, \dots , T_n^p-X_n)$$

und einer endlichen Teilerweiterung k' von $k^{1/p}$,

$$k \subseteq k' \subseteq k^{1/p}, \text{ k' endlich über k.}$$

Insbesondere ist R' ein freier Modul endlichen Rangs über R, sagen wir

$$R' = R\bullet\omega_1\oplus\ldots\oplus R\bullet\omega_q$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S\otimes_R R' &= S\otimes_R(R\bullet\omega_1\oplus\ldots\oplus R\bullet\omega_q) \\ &= S\bullet\omega_1\oplus\ldots\oplus S\bullet\omega_q) \\ &= \oplus_{j=1}^n S\bullet\omega_j \end{aligned}$$

Weil S vollständig ist, können wir S mit seiner Vervollständigung identifizieren und erhalten so eine natürliche Einbettung

$$S = \hat{S} \hookrightarrow \prod_{N=1}^{\infty} S/m^{N+1}S$$

Damit haben wir auch eine Einbettung der direkten Summe, d.h.

$$\begin{aligned} S\otimes_R R' &\hookrightarrow \oplus_{j=1}^n(\prod_{N=1}^{\infty} S/m^{N+1}S)\bullet\omega_j \\ &=^{88} \prod_{N=1}^{\infty} \oplus_{j=1}^n (S/m^{N+1}S)\bullet\omega_j \\ &= \prod_{N=1}^{\infty} (S/m^{N+1}S)\otimes_R R' \\ &= \prod_{N=1}^{\infty} S\otimes_R(R'/m^{N+1}\circ R') \qquad \text{(wegen } m \subseteq R). \end{aligned}$$

Nun ist k' ein direkter Summand von $k^{1/p}$, also R' ein direkter Summand von $R^{1/p}$ und $R'/m^{N+1}\circ R'$ ein direker Summand von $R^{1/p}/m^{N+1}\circ R^{1/p}$. Wir erhalten eine natürliche Injektionen

[88] Endliche direkte Summen sind direkte Produkte.

$$R'/m^{N+1}\circ R' \hookrightarrow R^{1/p}/m^{N+1}\circ R^{1/p}$$

Durch Einsetzen erhalten wir eine natürlihe Injektion

$$S\otimes_R R' \hookrightarrow \prod_{N=1}^{\infty} S\otimes_R(R^{1/p}/m^{N+1}\circ R^{1/p})$$

$$= \prod_{N=1}^{\infty} (S\otimes_R R^{1/p}) / (m^{N+1} S\otimes_R R^{1/p}),$$

d.h.

$$S\otimes_R R' \hookrightarrow \prod_{N=1}^{\infty} S\otimes_R R^{1/p} / J_N \text{ , } s\otimes r' \mapsto \{ s\otimes r' \text{ mod } J_N\}_{N=1,2,..}$$

Auf Grund der Injektivität dieser Abbildung gilt

$$S\otimes_R R' \cap (\cap_{N=1}^{\infty} J_N) = 0.$$

Weil jedes Element von $S\otimes_R R^{1/p}$ in einer Teilalgebra der Gestalt $S\otimes_R R'$ liegt, folgt (3), d.h. es gilt die Behauptung, d.h. Q(S)/Q(R) ist tatsächlich eine separable Körpererweiterung.

**QED**.

**Beweis von 2.4.13**. Als ZPE-Ring ist der Polynomring $k[X_1,...,X_n]$ ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper. Dasselbe gilt dann aber auch für die Lokalisierung A des Polynomrings. Der Ring A genügt also den Bedingungen von 2.4.11, und wir sind in der folgenden Situation:

$$\begin{array}{ccccc}
K & \hookrightarrow & K_s^D & \hookrightarrow & K_s \\
\cup & & \cup & & \\
A & \hookrightarrow & A^h & \hookrightarrow & \hat{A} \\
& \searrow & \uparrow & & \\
& & A' := \bar{A}\cap K_s^D & &
\end{array}$$

Dabei sei

| | |
|---|---|
| $K := Q(A)$ | der Quotientenkörper von A |
| $K_s$ | eine separable Abschließung von K |
| $\bar{A}$ | die ganze Abschließung von A in $K_s$ |
| D | die Zerlegungsgruppe eines maximalen Ideals $\bar{n}$ von $\bar{A}$ über A |

$A' := \bar{A} \cap K_s^D$ die ganze Abschließung von A im Zerlegungskörper $K_s^D$

$A^h = A'_{n'}$, die Lokalisierung von A' bezüglich des maximalen Ideals

$$n' := \bar{n} \cap K_s^D$$

Insbesondere gilt

$$A^h \subseteq K_s^D \cap \hat{A},$$

d.h. $A^h$ besteht aus Elementen von $\hat{A}$, die in $K_s^D$ liegen, also algebraisch über K = Q(A) sind. Sei jetzt umgekehrt $a \in \hat{A}$ eine Potenzreihe, welche algebraisch über dem rationalen Funktionenkörper Q(A) ist. Wir haben zu zeigen, a liegt in $A^h$. Wir folgen dabei der Argumentation von [Artin 1973, Corollar 2.9] und [Nagata 1962,(44.1)].

Sei $b \in A - \{0\}$ ein Element mit der Eigenschaft, daß

$$c := ab \in \hat{A} \text{ ganz über } A$$

ist, und bezeichne

$$f(T) \in K[T]$$

das Minimalpolynom von c über A. Weil A nach Voraussetzung normal ist, gilt dann sogar

$$f(T) \in A[T].$$

(siehe Matsumura, Commutative rings theory, Cambridge University Press 1986, Theorem 9.2). Nach der Bemerkung ist f separabel, d.h. f' ist teilerfremd zu f. Da f und f' normierte Polynome sind, liefert der euklidische Algorithmus Polynome $g,h \in A[T]$ mit

$$g\bullet f + h\bullet f' = 1,$$

also

$$1 = g(c)\bullet f(c) + h(c)\bullet f'(c) = h(c)\bullet f'(c).$$

d.h. f'(c) ist Einheit in A, und die Restklasse vo f'(c) in k ist ungleich Null. Damit genügt f den Bedingungen des Satzes über implizite Funktionen. Es gibt deshalb für jede natürliche Zahl c ein

$$\tilde{c} \in A^h$$

mit $f(\tilde{c}) = 0$ und

$$\tilde{c} \equiv c \bmod \hat{m}^c \text{ für jede natürliche Zahl } c,$$

wobei $\hat{m} := (X_1,...,X_n)A[[X_1,...,X_n]]$ das maximale Ideal von $\hat{A}$ bezeichne. Falls $\tilde{c}$ von c vershieden ist, können wir ein so großes c wählen, daß die Kongruenz $\tilde{c} \equiv c$ nicht mehr besteht. Die obige Argumentation liefert dann ein weiteres $\tilde{c}$ für welches die Kongruenz auch mit dem neuen c besteht. Da ein Polynom in einer Unbestimmten nur endlich viele Nullstellen besitzt, finden wir nach endlich vielen Schritten ein

$$\tilde{c} \in A^h$$

mit $\tilde{c} = c$. Insbesondere ist $c \in A^h$. Damit gilt

$$a \in \frac{1}{b}A^h \subseteq Q(A^h) \cap \hat{A} =^{89} A^h.$$

---

[89] Man beachte, die natürliche Einbettung $A^h \longrightarrow \hat{A}$ ist etale, also insbesondere ein flacher lokaler Homomorphismus. Für jeden flachen lokalen Homomorphismus $A \longrightarrow B$ und jedes Ideal $I \subseteq A$ gilt aber

$$Q(A) \cap IB = I.$$

Die Inklusion "$\supseteq$" besteht trivialerweise. Umgekehrt hat jedes x aus dem Durchschnitt auf der linken Seite die die Gestalt

**QED**.

### 2.4.14 Erhaltung von Eigenschaften beim Henselisieren

Aus der Beschreibung der Henselisierung normaler lokaler Ringe in 2.4.11 ergibt sich, daß deren Henselisierung normal ist.

A normal $\Rightarrow A^h$ normal.

Da für beliebige lokale (noethersche) Ringe A die natürliche Einbettung $A \hookrightarrow A^h$ etale ist, ändert sich die Dimension nicht beim Übergang zur Henselisierung,

$\dim A^h = \dim A$,

und die Hilbert-Funktion bleibt unverändert,

$H^0_{A^h} = H^0_A$.

Insbesondere bleibt der Ring A regulär beim Henselisieren.

A regulär $\Rightarrow A^h$ regulär.

Es gibt weitere Eigenschaften, die erhalten bleiben. Zum Beispiel, die Eigenschaft reduziert zu sein (d.h. 0 ist das einzige nilpotente Element)[90].

A reduziert $\Rightarrow A^h$ reduziert.

### 2.4.16 $\mathcal{O}^h_{X,x}$ als direkter Limes über die Etal-Umgebungen von $x \in X$

Seien X ein (noethersches) Schema und $x \in X$. Eine Etal-Umgebung von x in X ist ein Paar

$$(X, y)$$

bestehend aus einem X-Schema Y, welches etale über X ist, und einem Punkt

$$y \in Y$$

aus der Faser über x, für welchem der Struktur-Morphismus $Y \longrightarrow X$ einen Isomorphismus der Reste-Körper induziert,

$$k(x) \xrightarrow{\cong} k(y).$$

Die zusammenhängenden Etal-Umgebungen von x bilden ein kofiltriertes inverses System, wobei der direkte Limes für den (kontravarianten) Funkter der globalen Schnitte gerade die Henselisierung des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ ist,

$$\mathcal{O}^h_{X,x} = \varinjlim_{(Y,y)} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$$

(nach 2.4.10).

### 2.4.15 Bemerkungen: streng Henselsche Ringe

(i) Die Eigenschaft, Henselsch zu sein, bedeutet gerade das Fehlen nicht-trivialer lokaler Etal-Erweiterungen, für welche die zugehörige Erweiterung der Restekörper trivial ist (nach 2.4.3 (iv)).

(ii) Ist A Henselsch und der Restekörper von A separabel abgeschlossen, so ist sogar jede lokale Etal-Erweierung von A trivial (d.h. ein Isomorphismus). Solche lokalen Ringe heißen streng Henselsch[91] oder auch streng lokal.

---

$$x = a/b \text{ mit } a,b \in A.$$

Wegen $x \in IB$ gilt $a \in bIB \cap A = bI$ (weil $A \longrightarrow B$ treuflach ist), also $x = a/b \in I$.

[90] Die Reduziertheit bleibt erhalten bei beliebigen lokalen Etal-Homomorphismen, siehe [Raynauld, 1970, Chap. VII, §2,Prop. 1]

(iii) Einen großen Teil der obigen Theorie der Henselschen Ringe kann man auf den Fall der streng Henselschen Ringe übertragen. Zum Beispiel heißt ein Paar

$$(A^{sh}, i)$$

strenge Henselisierung von A, wenn $A^{sh}$ ein streng Henselscher lokaler Ring ist und

$$i: A \longrightarrow A^{sh}$$

ein lokaler Homomorphismus, welcher universell bezüglich dieser Eigenschaft ist, d.h. jeder lokale Homomorphismus

$$f:(A,m) \longrightarrow (B,n)$$

mit Werten in einem streng Henselschen Ring B faktorisiert siche über i, d.h. man hat ein kommutatives Diagramm lokaler Homomorphismen

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A^{sh} \\ B \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Dabei soll $\widetilde{f}$ durch f und die induzierte Körper-Erweiterung der Restekörper

$$B/n \longrightarrow A^{sh}/m^{sh}$$

eindeutig festgelegt sein. Der Ring $A^{sh}$ ist bis auf (nicht-kanonische) Isomorphie eindeutig bestimmt.

(iv) Sei $k_s$ eine separable Abschließung des Restekörpers k von A. Dann gilt

$$A^{sh} = \varinjlim B,$$

wobei der direkte Limes über alle kommutativen Diagramme der Gestalt

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & k_s \\ A \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

erstreckt wird mit $A \longrightarrow B$ etale.

(v) Ist A = k ein Körper, so kann man für $A^{sh}$ eine beliebige separable Abschließung von k wählen.

(vi) Ist A ein normaler lokaler Ring, so wird $A^{sh}$ in derselben Weise wie $A^h$ in 2.4.11 konstruiert, wobei man anstelle der Zerlegungsgruppe die Trägheitsgruppe verwendet.

(vii) Ist A normal und Henselsch, so ist $A^{sh}$ die maximale unverzweigte Erweiterung von A im Sinne der Zahlentheorie.

(vii) Für jedes echte Ideal I von A gilt

$$(A/I)^{sh} = A^{sh}/IA^{sh}.$$

(viii) Seien X ein (noethersches) Schema und j: $\bar{x} \longrightarrow X$ ein geometrischer Punkt[92].

Eine Etal-Umgebung von $\bar{x}$ über X ist definiert als ein kommutatives Diagramm von Schema-Morphismen

[91] im Englischen 'strongly Henselian' also eigentlich 'stark Henselsch'. Im Deutschen scheint aber 'streng' üblicher zu sein.

[92] d.h. ein Schema-Morphismus mit einem einpunktigen Schema $\bar{x}$ dessen Restekörper algebraisch abgeschlossen ist.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & U \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

mit einem Etal-Morpismus $U \longrightarrow X$. Die zusammenhängenden Etal-Umgebungen von $\bar{x}$ bilden ein kofiltriertes inverses System. Die strenge Henselisierung des lokalen Rings von X im Bildpunkt x von $\bar{x}$ ist gerade der direkte Limes des globalen Schnittfunktors bezüglich dieses Systems,

$$\mathcal{O}^{sh}_{X,x} = \underset{\longrightarrow}{\lim}\, \Gamma(U, \mathcal{O}_U),\ x := j(\bar{x}).$$

Wir werden diesen Limes auch mit

$$\mathcal{O}^{sh}_{X,\bar{x}}$$

bezeichnen oder auch einfach mit

$$\mathcal{O}_{X,\bar{x}}.$$

(ix) Der Ring $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ ist das Analogon des lokalen Rings in der Zariski-Topologie. Für jeden Punkt $x \in X$ hat man

$$\mathcal{O}_{X,x} = \underset{\longrightarrow}{\lim}\, \Gamma(U, \mathcal{O}_U),$$

wobei der Limes über alle Zariski-offenen Umgebungen des Punkes x erstreckt wird. Den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ kann man einfach als lokalen Ring bezüglich einer etwas stärkeren Topologie ansehen.

# 3. Homotopie

## 3.1 Vorbemerkungen

(i) Die allgemeine Homotopie-Theorie für Schemata beruht auf einer Axiomatisierung der aus der algebraischen Topologie bekannten Theorie der Faserbündel [Hirschhorn 2003]. Sie ist jenseits der Möglichkeiten dieser Vorlesung. Siehe auch [Artin, Mazur 1969]. Wir beschränken uns hier auf einige grundlegende Eigenschaften der fundamentralen Gruppe $\pi_1$. Die Beweise findet man in der Monographie von Murre [Murre 1967].

(ii) Sei X ein topologischer Raum mit folgenden Eigenschaften:
X ist linear zusammenhängend.
X ist lokal zusammenhängend.
X ist lokal einfach zusammenhängend.

Für jeden Punkt $x \in X$ kann man dann die fundamentale Gruppe $\pi_1(X, x)$ auf zweierlei Weise berechnen.

a) $\pi_1(X, x)$ ist die Menge der geschlossenen Wege im Punkt x modulo Homotopie-Äquivalenz.

b) $\pi_1(X, x)$ ist die Gruppe der fasertreuen Automorphismen der universellen Überlagerung von X, welche auf X die identische Abbildung induzieren.

Für beide Möglichkeiten gibt es Hindernisse für eine Übertragung auf den Fall von Schemata. Im ersten Fall scheidert eine Übertragung an der Tatsache, daß es zu wenige geschlossene algebraische Wege gibt. Im zweiten Fall besteht das Problem darin, daß die universelle Überlagerung nicht existieren muß, zumindest nicht als Objekt der Kategorie der Schemata über X.

## 3.2 Definition der fundamentalen Gruppe

### 3.2.1 Konstruktion

Seien X ein zusammenhängendes Schema,

$$\bar{x} \longrightarrow X$$

ein geometrischer Punkt[93] und $x \in X$ der einzige Punkt im Bild dieses Morphismus.
Wir bezeichnen mit

$$\mathbf{FEt} / X$$

die Kategorie der X-Schemata, welche endlich und etale sind über X und betrachten den Funktor

$$F = \mathrm{Hom}_X(\bar{x}, ?): \mathbf{FEt} / X \longrightarrow \mathbf{Ens}.$$

Für $Y \in |\mathbf{FEt} / X|$ ist ein Element von F(Y) gerade ein kommutatives Diagramm von Schema-Morphismen

$$\begin{array}{ccc} \bar{x} & \longrightarrow & Y \\ & \searrow \swarrow & \\ & X & \end{array}$$

Ein solches Diagramm ist gerade gegeben durch einen Punkt $y \in Y$, der über x liegt und einen k(x)-Homomorphismus

$$k(y) \longrightarrow k(\bar{x}).$$

Etwas vereinfachend kann man sagen, daß F(Y) gerade aus den geometrischen Punkten der Faser über x bezüglich des Morphismus $Y \longrightarrow X$ besteht.
Man kann zeigen, dieser Funktor ist <u>pro-darstellbar</u>, d.h. es gibt in **FEt** / X ein kofiltrierendes projektives System

$$\{\varphi_{ij}: X_j \longrightarrow X_i\}_{i,j\in I, i\le j}$$

und eine Familie von Elementen

$$\{f_i \in F(X_i)\}_{i\in I}$$

mit $\varphi_{ij*}(f_i) = f_j$ derart, daß die natürliche Abbildung

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_X(X_i, Z) \xrightarrow{\cong} F(Z) \qquad (1)$$

bijektiv ist für jedes Objekt Z von **FET** / X.

**Bemerkungen**

(i) Weil die $X_i$ Objekte von **FET** / X sind, hat man ein inverses System von Morphismen

$$f_i: \bar{x} \longrightarrow X_i$$

und damit ein injektives System von Abbildungen

$$\mathrm{Hom}(X_i, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bar{x}, Z) = F(Z),$$

aus welchem sich die obige Abbildung (1) ergibt.

(ii) Wie wir wissen, stehen die Etal-Morphismen den lokalen Homöomorphismen sehr nahe. Man kann sie also als eine Art unverzweigte Überlagerungen ansehen. Die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ ist durch die Eigenschaft charakterisiert, daß sie

[93] d.h. ein Morphismus von Schemata mit $\bar{x}$ = Spec K, K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

sich über jede andere unverzweigte Überlagerung in eindeutiger Weise faktorisiert (in der Kategorie der punktierten topologischen Räume).

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & Z \arrow[d] \\ \bar{x} \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Der Isomorphismus (1) besagt, daß es für jedes Z ein $X_i$ mit dieser Eigenschaft gibt, wobei die Faktorisierung im Limes durch $Z \longrightarrow X$ eindeutig bestimmt ist. Mit anderen Worten, das inverse System der $f_i$: $\bar{x} \longrightarrow X$ hat die Universalitätseigenschaft der universellen Überlagerung im Kontext der Etal-Morphismen. Wir werden deshalb dieses System in derselben Weise verwenden wie die universelle Überlagerung in der algebraischen Topologie.

(iii) Der Einfachheit halber werden vom inversen System

$$\{\varphi_{ij}: X_j \longrightarrow X_i\}_{i\in I}$$

zusammen mit der Familie

$$\{f_i \in F(X_i)\}_{i,j\in I, i\le j}$$

als von einer <u>universellen Überlagerung</u> von X sprechen.

### 3.2.2 Automorphismen-Gruppen und Galois-Überlagerungen

Sei ein X-Schema $f: Y \longrightarrow X$ gegeben. Dann bezeichne

$$\mathrm{Aut}_X(Y)$$

die Gruppe der X-Automorphismen von Y, d.h. der Schema-Automorphismen $Y \longrightarrow Y$, welche X-Morphismen sind. Wir denken uns diese Gruppe mit der natürlichen Operation auf Y versehen:

$$\mathrm{Aut}_X(Y) \times Y \longrightarrow Y,$$

Für jedes $Y \in |\mathbf{FEt} / X|$ operiert $\mathrm{Aut}_X(Y)$ von rechts auf F(Y):[94]

$$F(Y) \times \mathrm{Aut}_X(Y) \longrightarrow F(Y),\ (\bar{x} \xrightarrow{g} Y,\ Y \xrightarrow{\sigma} Y) \mapsto \sigma^{-1} \circ g =: g \bullet \sigma.$$

[94] Für $\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}_X(Y)$ und $g \in F(Y)$ gilt

$$g\bullet(\sigma\circ\tau) = (\sigma\tau)^{-1}\circ g = \tau^{-1}\circ\sigma^{-1}\circ g = \tau^{-1}\circ(g\bullet\sigma) = (g\bullet\sigma)\bullet\tau,$$

d.h. wir erhalten tatsächlich eine Rechtsoperation. Eigentlich ist es naheliegender, die zughörige Linksoperation

$$\mathrm{Aut}_X(Y) \times F(Y) \longrightarrow F(Y),\ (\sigma, g) \mapsto \sigma_*(g) := \sigma\circ g.$$

zu betrachten. Tatsächlich spricht Murre in [M 1967] zwar von einer Rechtsopertion, führt aber alle relevanten Rechnungen für diese Linksoperation durch. Wir werden dies im folgenden ebenfalls tun.

Falls Y zusammenhängend ist, ist diese Operation <u>stark effektiv</u>, d.h. für jedes $g \in F(Y)$ ist die Abbildung

$$\mathrm{Aut}_X(Y) \longrightarrow F(Y),\ \sigma \mapsto \sigma_*(g) = \sigma\circ g, \qquad \begin{tikzcd} \bar{x} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dl] & Y \arrow[dll] \\ X & & \end{tikzcd} \tag{1}$$

injektiv. Weil Y zusammenhängend ist, ist der Automorphismus $\sigma$ bereits durch jeden seiner Werte eindeutig festgelegt (vgl. die Folgerung aus 2.2.1).
Ist Y zusammenhängend und operiert die Gruppe $\mathrm{Aut}_X(Y)$ transitiv auf $F(Y)$, d.h. die Abbildung (1) ist bijektiv für jedes $g \in F(Y)$, dann heißt $Y \longrightarrow X$ <u>Galois-Überlagerung</u> von X.

**Bemerkungen**

Für jedes Schema $Y \in |\mathbf{FEt}\ /\ X|$ gibt es eine Galois-Überlagerung $Y' \in |\mathbf{FEt}\ /\ X|$ zusammen mit einem X-Morphismus

$$Y' \longrightarrow Y.$$

Den Beweis findet man zum Beispiel in [Murre 1967, 4.4.1.8].

### 3.2.3 Definition der fundamentalen Gruppe $\pi_1(X, \bar{x})$

Seien X ein zusammenhängendes Schema,

$$\bar{x} \longrightarrow X$$

ein geometrischer Punkt, $x \in X$ der einzige Punkt im Bild dieses Morphismus und

$$\{\varphi_{ij}: X_j \longrightarrow X_i\}_{i,j\in I, i\le j} \qquad \{f_i \in F(X_i)\}_{i\in I}$$

eine universelle Überlagerung von X. Nach der Bemerkung am Ende von 3.2.2 können wir annehmen, die $X_j$ sind Galois-Überdeckungen von X. Jeder Morphismus

$$\varphi_{ij}: X_j \longrightarrow X_i$$

definiert dann eine Abbildung

$$\psi_{ij}: \mathrm{Aut}_X(X_j) \longrightarrow \mathrm{Aut}_X(X_i)$$

mit

$$\psi_{ij}(\sigma)f_i = (\varphi_{ij}\circ\sigma)_*(f_j) = \varphi_{ij}\circ\sigma\circ f_j. \tag{1}$$

Man beachte, $(\varphi_{ij}\circ\sigma)_*(f_j)$ ist ein Element von $F(X_i)$, d.h. $\psi_{ij}(\sigma)$ existiert und ist eindeutig bestimmt, weil $X_i$ eine Galois-Überlagerung von X ist.

Die definierende Bedingung für $\psi_{ij}(\sigma)$ besagt gerade, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \bar{x} \arrow[r, "f_j"] \arrow[dr, "f_i"'] & X_j \arrow[r, "\sigma"] & X_j \arrow[d, "\varphi_{ij}"] \\ & X_i \arrow[r, "\psi_{ij}(\sigma)"] & X_i \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Weil die $X_i$ als Galois-Überlagerungen zusammenhängend sind, ist nach der Folgerung von 2.2.1 auch das folgende Diagramm kommuativ.

$$\begin{array}{ccc} X_j & \xrightarrow{\sigma} & X_j \\ \varphi_{ij}\downarrow & & \downarrow\varphi_{ij} \\ X_i & \xrightarrow{\psi_{ij}(\sigma)} & X_i \end{array}$$

(die beiden Morphismen $\varphi_{ij}\circ\sigma$ und $\psi_{ij}(\sigma)\circ\varphi_{ij}$ stimmen in $f_i(\overline{x})$ überein).Dabei ist $\psi_{ij}(\sigma)$ durch die Kommutativität dieses Vierecks eindeutig festgelgt.
Setzt man zwei solche Vierecke für zwei Elemente $\sigma$, $\tau \in \mathrm{Aut}_X(X_j)$ nebeneinander, so sieht man unmittelbar, daß

$$\psi_{ij}(\sigma\tau) = \psi_{ij}(\sigma)\circ \psi_{ij}(\tau)$$

gilt. Mit anderen Worten, die Abbildungen $\psi_{ij}$ sind Homomorphismen.
Aus der Definition (1) ergibt sich für $\sigma = \psi_{\ell j}(\tau)$

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(\psi_{j\ell}(\tau))f_i &= \varphi_{ij}\circ\psi_{j\ell}(\tau)\circ f_j \\ &= \varphi_{ij}\circ\varphi_{j\ell}\circ\tau\circ f_\ell \\ &= \varphi_{i\ell}\circ\tau\circ f_\ell \end{aligned}$$

Vergleich mit (1) liefert

$$\psi_{ij}(\psi_{j\ell}(\tau)) = \psi_{i\ell}(\tau).$$

Mit anderen Worten, die Homomorphismen bilden ein inverses System. Wir definieren die <u>fundamentale Gruppe</u> von X in $\overline{x}$ als den inversen Limes dieses Systems.

$$\pi_1(X, \overline{x}) := \overset{\lim}{\longleftarrow}\ \mathrm{Aut}_X(X_i)$$

### 3.2.4 Bemerkungen

(i) Ist $\overline{x}'$ ein beliebiger anderer geometrischer Punkt von X, so ist $\pi_1(X, \overline{x}')$ isomorph zu $\pi_1(X, \overline{x})$, und dieser Isomorphismus ist bis auf innere Automorphismen von $\pi_1(X, \overline{x})$ eindeutig bestimmt.

(ii) Die oben beschriebene Konstruktion läßt sich für jeden topologischen Raum X durchführen mit
X linear zusammenhängend
X lokal zusammenhängend
X lokal einfach zusammenhängend.
Man kann dann nicht nur zeigen, daß der obige Funktor F pro-darstellbar ist, sondern sogar darstellbar, wobei das darstellende Objekt die universelle Überlagerung $\widetilde{X}$ ist. Die Gruppe $\pi_1(X, \overline{x})$ kann man dann einfach als Automorphismengruppe von $\widetilde{X}$ über X definieren,

$$\pi_1(X, \overline{x}) = \mathrm{Aut}_X\,\widetilde{X}.$$

(iii) Seien X eine glatte projektive Varietät über $\mathbb{C}$ und $X^{an}$ die zugehörige komplex-analytische Mannigfaltigkeit. Dann ist der Funktor

$$\mathbf{FEt}\,/\,X \longrightarrow (\text{endliche Etal-Überlagerungen von } X^{an}),\ Y \longrightarrow X \mapsto Y^{an} \longrightarrow X^{an},$$

eine Äquivalenz von Kategorien. Das ist im wesentlichen eine Konsequenz des Existenzsatzes von Riemann: eine endliche Überlagerung einer glatten projektiven Mannigfaltigkeit über $\mathbb{C}$ besitzt in natülicher Weise die Struktur einer algebraischen Mannigfaltigkeit über $\mathbb{C}$, siehe [Hartshorne 1977, Theorem B.3.2] oder [SGA 1, XII].
Die endichen Überlagerungen entprechen aber den endlichen Faktorgruppen der fundamentalen Gruppe. Infolge dieser Äquivalenz besitzen die Gruppe $\pi_1(X)$ und die analytische fundamentale Gruppe $\pi_1(X^{an})$ dieselben endlichen Faktorgruppen und damit dieselben Vervollständigungen bezüglich der pro-endlichen Topologien. Nach Konstruktion ist aber $\pi_1(X)$ vollständig (als projektiver Limes eines Systems endlicher Gruppen). Es gilt also

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(X^{an})^{\wedge}.$$

Die Ursache dafür, daß es für die Gruppe $\pi_1(X^{an})$ keine algebraische Definition geben kann, liegt darin begründet, daß nicht jede unverzweigte Überlagerung der projektiven Mannigfaltigkeit algebraischer Natur sein muß (also erst recht nicht in **FEt** / X liegt).[95]

(iv) Aussage (iii) läßt sich auf den Fall von nicht notwendig projektiven algebraischen Varietäten (endlichen Typs) verallgemeinern [Milne 1980, Lemma III.3.14]. Diese Tatsache ist die Grundlage für den Vergleichsatz für die Etal-Kohomoloige mit der komplexen Kohomologie [Milne 1980, Theorem III.3.12].

## 3.3 Beispiele

### 3.3.1 Spektren von Körpern

Sei X = Spec k mit einem Körper k. Als Familie der $X_i$ kann man dann die Galois-Erweiterungen

$$K_i/k \text{ mit } K_i \subseteq k(\bar{x})$$

verwenden. Die Gruppe $\pi_1(X,\bar{x})$ ist dann gerade die Galois-Gruppe über k der separablen Abschließung von k in $k(\bar{x})$,

$$\pi_1(X,\bar{x}) = G(k(\bar{x}) \cap k_s / k).$$

Ein Wechsel des Punkts $\bar{x}$ entspricht daher gerade der Wahl einer anderen separablen Abschließung.

### 3.3.2 Der Fall normaler Schemata

Seien X ein normales Schema, x der allgemeine Punkt von X und $\bar{x}$ = Spec $k(x)_{sep}$ das Spektrum der separablen Abschließung des Funktionenkörpers von X.[96] Als Familie der $X_i$ kann man die Normalisierungen von X in einem Körper $K_i$ nehmen, wobei $K_i$ die Familie der endlichen Galois-Erweiterungen von k(x) durchläuft mit

---

[95] Zum Beispiel ist die universelle Überlagerung einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht > 1 die Einheitskreisscheibe (die obere Halbedene).

[96] $k(x)_{sep}$ ist im allgemeinen nicht algebraisch abgeschlossen, d.h. $\bar{x}$ ist kein geometrischer Punkt. Wie wir wissen, finden aber alle Konstruktionen im separablen Teil der algebraischen Abschließung statt, so daß sich nichts ändert, wenn wir die algebraische Abschließung durch $k(x)_{sep}$ ersetzen.

$$K_i \subseteq k(\overline{x}),$$

für welche die Normalisierung von X in $K_i$ unverzweigt ist über X. Die Gruppe

$$\pi_1(X,\overline{x}) = G(k(x)_{un}/k(x))$$

ist dann gerade die Galois-Gruppe von $k(x)_{un} = \bigcup K_i$ der "maximalen unverzweigten Erweiterung" von k(x) in $k(\overline{x})$.

### 3.3.3 Der Fall eines Spektrums eines streng Henselschen Rings

Seien X = Spec A mit einem streng Henselschen lokalen Rings und x der abgeschlossene Punkt von X. Dann gilt für jeden geometrischen Punkt $\overline{x}$ über x:

$$\pi_1(X, \overline{x}) = \{1\}.$$

Die einzigen Objekte von **FEt** / X sind die endlichen disjunkten Vereinigungen von Exemplaren von X, und das Objekt X ist kofinal in diesem System.

**Bemerkung**

Ist X irgendein Schema und $\overline{x}$ ein geometrischer Punkt von X, so kann man sich

$$\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,\overline{x}}$$

als das algebraische Analogon einer kleinen kreisscheibenartigen Umgebung des Punktes x vorstellen. Die Trivialität von $\pi_1(X, \overline{x})$ paßt dann gut mit der Kontrahierbarkeit einer Kreisscheibe zusammen.

### 3.3.4 Der Fall eines Spektrums eines Henselschen Rings

Seien X = Spec A mit einem Henselschen Ring, $x \in X$ der abgeschlossene Punkt und $\overline{x}$ ein geometrischer Punkt über x. Dann ist der Funktor

$$\mathbf{FEt} / X \longrightarrow \mathbf{FEt} / \mathrm{Spec}\ k(x),\ \ Y \mapsto Y_x,$$

der jedes endliche Etal-Schema Y über X in dessen abgeschlossene Faser abbildet, eine Äquivalenz von Kategorien (nach 2.4.4 (ii))[97]. Damit gilt

$$\pi_1(X, \overline{x}) = \pi_1(\mathrm{Spec}\ k(x), \overline{x}).$$

### 3.3.5 Der Fall eines streng Henselschen Bewertungsrings

Seien A ein streng Henselscher diskreter Bewertungsring mit dem Quotientenkörper

$$K := Q(A) = A_\pi \text{ (für einen Parameter } \pi \text{ von A)}$$

und

$$X := \mathrm{Spec}\ K = D(\pi).$$

Das Schema X ist dann in gewisser Weise das algebraische Analogon einer punktierten Kreisscheibe in der Ebene (vgl. 3.3.3). Man sollte deshalb erwarten, daß

$$\pi_1(X, \overline{x}) = \hat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

gilt. Das ist tatsächlich so, wenn A/m die Charakteristik Null besitzt, denn die endlichen Galois-Erweiterungen K' von K sind dann sämlich Kummer-Erweiterungen [Serre 1962, IV, Proposition 8],

$$K' := K_n := K[t^{1/n}]$$

mit einem Parameter t von K. Die Abbildung

$$G(K_n/K) \longrightarrow \mu_n(K),\ \sigma \mapsto \sigma(t^{1/n})/t^{1/n},$$

[97] Man beachte, mit X ist auch jedes endliche X-Schema affin.

der Galois-Gruppe in die n-ten Einheitswurzeln ist dann ein Isomorphismus. Es folgt

$$\pi_1(X, \overline{x}) = \varprojlim \mu_n(K) = \hat{\mathbb{Z}}.$$

Im Fall positiver Charakteristik p > 0 ist dies nicht so auf Grund möglicher wilder Verzweigung. Die endlichen Galois-Erweiterungen von K mit zahmer Verzweigung sind aber Kummer-Erweiterungen [Serre 1962, IV] und die <u>zahme fundamentale Gruppe</u> ist gleich

$$\pi_1^t(X, \overline{x}) = \varprojlim_{(n,p)=1} \mu_n(K) = \hat{\mathbb{Z}}.$$

**Verallgemeinerung**

Sei A ein diskreter Bewertungsring mit dem Quotientenkörper K. Eine endliche separable Erweiterung L/K heißt <u>zahm</u> bezüglich A, wenn für jeden Bewertungsring B von L über A die durch $A \hookrightarrow B$ induzierte Erweiterung der Restkörper separabel und der Verzweigungsindex von B/A teilerfremd zur Charakteristik p von A/m ist.

Seien X ein zusammenhängendes normales Schema,

$$D = \bigcup D_i$$

eine endliche Vereinigung von Primdivisoren $D_i$ von X und $x_i$ der allgemeine Punkt von $D_i$. Ein Morphismus

$$f\colon Y \longrightarrow X$$

heißt dann Überlagerung mit zahmer Verzweigung wenn sich D so wählen läßt, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. f ist endlich und etale über X - D
2. Y ist zusammenhängend und normal.
3. Die Erweiterung der rationalen Funktionenkörper R(Y)/R(X) ist eine Erweiterung mit zahmer Verzweigung bezüglich der Ringe $\mathcal{O}_{X,x_i}$.

Die zahme fundamentale Gruppe ist gerade so definiert, daß sie diese Erweiterungen klassifiziert [GM 1971]. Ein Satz von Abhyankar verallgemeinert die Aussage, daß alle Überlagerungen mit zahmer Verzweigung Kummersch sind. Er besagt [GM 1971, 2.3], falls sich die Divisoren normal schneiden, so existiert für jede Überlagerung

$$f\colon Y \longrightarrow X$$

mit zahmer Verzweigung ein surjektiver Etal-Morphismus $X' \longrightarrow X$ derart, daß die induzierte Abbildung

$$Y \times_X X' \longrightarrow X'$$

Kummersch ist.

### 3.3.6 Der Fall der projektiven Geraden

Sei $X := \mathbb{P}^1_k$ mit einem separabel abgeschlossenen Körper k.

Ist $k = \mathbb{C}$, so ist X als topologischer Raum eine Sphäre. Die fundamentale Gruppe ist deshalb trivial,

$$\pi_1(X, \overline{x}) = \{1\}.$$

Will man das im allgemeinen Fall beweisen, so muß man die Äquivalenz der Kategorie **FEt**/X zur trivalen Kategorie beweisen, d.h. man muß zeigen, jeder endliche Etal-Morphismus

$$f\colon Y \longrightarrow X$$

mit Y zusammenhängend ist ein Isomorphismus. Bezeichne $\omega$ das Differential

$$\omega = dz$$

auf $X = \mathbb{P}^1_k$. wobei z eine affine Koordinate auf $\mathbb{A}^1_k \subseteq \mathbb{P}^1_k$ sei. Im Endlichen hat $\omega$ weder Nullstellen noch Pole. Im Fernpunkt $\infty$ hat $\omega$ einen doppelten Pol: mit $w = 1/z$ ist nämlich

$$dz = d(w^{-1}) = -w^{-2}dw.$$

Damit hat $f^*(\omega)$ über jeden Punkt der Faser $f^{-1}(\infty)$ einen doppelten Pol und ansonsten weder Nullstellen noch Pole. Der Grad des Divisors von $f^*(\omega)$ ist damit

$$\deg \operatorname{div} f^*(\omega) = -2n$$

wenn n der Grad des Morphismus f ist,

$$n := \deg f.$$

Nun ist

$$K := \operatorname{div} f^*(\omega)$$

der Divisor einer Differentialform, d.h. ein kanonischer Divisor. Nach dem Satz von Riemann-Roch hat dieser Divisor den Grad

$$2g - 2 = -2n,$$

wenn g das Geschlecht von Y bezeichnet. Wegen $g \ge 0$ folgt

$$-2n = 2g-2 \ge -2,$$

also n = 1. Mit anderen Worten, f ist ein Isomorphismus.

**Bemerkung**

Die eben bewiesene Aussage gilt auch für Morphismen

$$f: Y \longrightarrow X = \mathbb{P}^1_k$$

welche über $\mathbb{A}^1_k \subseteq \mathbb{P}^1_k$ etale und im Unendlichen nur zahm verzweigt sind. Wie eben gesehen hat $\omega$ im Fernpunkt $\infty$ von X lokal die Gestalt

$$\omega = -w^{-2}dw.$$

Ist $y \in f^{-1}(\infty)$ ein Punkt mit dem Verzweigungsindex e und $\pi$ ein lokaler Parameter in y, so gilt

$$w = u{\bullet}\pi^e,$$

mit einer Einheit u, also

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= - u^{-2}\pi^{-2e} (u{\bullet}d\pi^e + \pi^e{\bullet}du) \\ &= - u^{-2}\pi^{-2e} (ue{\bullet}\pi^{e-1}{\bullet}d\pi + \pi^e{\bullet}du) \end{aligned}$$

Weil Y nur zahm verzweigt sein soll über X, ist e teilerfremd zur Charakteristik von k, d.h. der erste Summand in Klammern ist ungleich Null, also von der Ordnung e-1. Damit ist

$$\operatorname{ord}_y f^*(\omega) = e-1 - 2e = -e - 1.$$

Weil $f^*(\omega)$ außerhalb der Faser über $\infty$ weder Nullstellen noch Pole besitzt, hat $f^*(\omega)$ damit die Polstellengesamtordnung

$$- \deg \operatorname{div} f^*(\omega) = \sum (e+1) \ge n+1$$

Man beachte, k soll separabel abgeschlossen sein, d.h. jeder Relativgrad ist 1, d.h. es ist $\sum e = \sum ef = n$. Damit gilt

$$-2 \le 2g - 2 = \deg \operatorname{div} f^*(\omega) \le -n - 1$$

also $n \leq 1$, d.h. $n = 1$, d.h. f ist ein Isomorphismus.

### 3.3.7 Der Fall eines eigentlichen Schemas über einem Hensel-Ring mit geometrisch zusammenhängender abgeschlosser Faser

Sei X ein eigentliches Schema über einem Henselschen lokalen Ring A, für welches die abgeschlossene Faser $X_0$ geometrisch zusammenhängend ist.[98] Ist $\bar{x}$ ein geometrischer Punkt von X, welcher sich über $X_0$ faktorisiert,

$$\bar{x} \longrightarrow X_0 \hookrightarrow X,$$

so gilt

$$\pi_1(X, \bar{x}) = \pi_1(X_0, \bar{x}).$$

Dies ist eine direkte Konsequenz der in 2.4.5 (ii) beschriebenen Äquivalenz von Kategorien.

### 3.3.8 Offene Teilschemata regulärer Schemata mit kleinem Komplement

Seien $U \subseteq X$ ein offenes Teilschema des regulären zusammenhängenden Schemas X mit

$$\operatorname{codim}_X X - U \geq 2,$$

und $\bar{x} \longrightarrow U$ ein geometrischer Punkt. Dann gilt

$$\pi_1(U, \bar{x}) \cong \pi_1(X, \bar{x}). \qquad (1)$$

Insbesondere ist $\pi_1(X, \bar{x})$ ein birationale Invariante für die Kategorie der vollständigen regulären Varietäten über einem Körper k, denn jede dominante rationale Abbildung solcher Varietäten ist regulär auf dem Komplement einer abgeschlossenen Teilmenge der Kodimension $\geq 2$ (siehe [Hartshorne 1977, Lemma V.5.1]).

**Bemerkungen zum Beweis**

(i) Der Beweis von (1) beruht auf der Beschreibung 3.3.2 der fundamentalen Gruppe normaler Schemata und einer genaueren Untersuchung der Eigenschaften des Verzweigungsortes von Normalisierungen.

(ii) Sei $f: Y \longrightarrow X$ ein Morphismus lokal endlichen Typs. In Bemerkung 2.1.6 haben wir gesehen, daß die Menge der Punkte $y \in Y$, in denen f verzweigt ist, ein abgeschlossene Teilmenge von Y ist, welche durch das Ideal

$$I := \operatorname{Ann}_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}$$

definiert wird. Außerdem wissen wir, daß im zahlentheoretischen Fall (X und Y sind Spektren von Dedekind-Ringen) dieses Ideal lokal von der Differente der zugehörigen Ringerweiterung erzeugt wird, d.h. dieses Ideal ist lokal ein Hauptideal. Diese Aussage besitzt eine weitgehende Verallgemeinerungen zum sogenannten Reinheitssatz (Purity of branch loci), welcher besagt, daß das durch I definierte abgeschlossene Teilschema überall von der Kodimension 1 ist. Der Reinheitssatz gilt zum Beispiel in den beiden folgenden Spezialfällen.
a) f ist treuflach und endlich.
b) X ist normal, Y ist regulär und f ist quasi-endlich und dominierend.
(vgl. [Altman & Kleiman 1970, VI.6.8], [SGA I, X.3.1 und X.3.4]).

(iii) Nach 3.3.2 erhält man die fundamentale Gruppe von X, indem man die endliche Galois-Erweiterungen L von k(X) betrachtet, für welche die Normalisierung von

[98] d.h. $X_0$ soll die Faser über dem abgeschlossenen Punkt von Spec A sein, und es soll $X_0 \otimes_k \bar{k}$ zusammenhängend sein.

X in L unverzweigt über X ist. Die fundamentale Gruppe ist gerade die Galois-Gruppe der Vereinigung aller L über k(X). In analoger Weise ergibt sich die fundamentale Gruppe von U. Zum Beweis von (1) reicht es zu zeigen, ist die Normalisierung $\widetilde{U}$ von U in L unverzweigt, so ist es auch die Normalisierung $\widetilde{X}$ von X (die Umkehrung gilt trivialerweise). Die beiden Normalisierungen unterscheiden sich aber nur um eine Menge der Kodimension ≥ 2. Der Verzweigungsort von $\widetilde{X}$ über X kann also, falls er nicht-leer ist, unmöglich ganz in $\widetilde{X}$ - $\widetilde{U}$ liegen.[99]

### 3.3.9 Eigentliche glatte Schemata über vollständigen diskreten Bewertungsringen

Sei X ein eigentliches glattes Schema über Spec A mit einem vollständigen diskreten Bewertungsring A, dessen Restekörper algebraisch abgeschlossen und von der Charakteristik p > 0 ist. Sei $\overline{K}$ die algebraische Abschließung von K := Q(A). Wir nehmen an, die allgemeine Faser

$$X_{\overline{K}}$$

und die spezielle Faser

$$X_{A/m}$$

sind zusammenhängend. Für jeden geometrischen Punkt $\overline{x}$ von $X_{\overline{K}}$ ist dann der natürliche Homomorphismus

$$\pi_1(X_{\overline{K}}, \overline{x}) \longrightarrow \pi_1(X, \overline{x})$$

surjektiv, und der Kern ist klein. Genauer, er liegt im Kern eines jeden Homomorphismus von $\pi_1(X_{\overline{K}}, \overline{x})$ mit Werten in einer endlichen Gruppe mit zu p teilerfremder Charakteristik (vgl. [SGA1, X] oder [Murre, 1967]).

### 3.3.10 Glatte projektive Kurven in der Charakteristik p

Sei $X_0$ eine glatte projektive Kurve des Geschlechts g über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik p > 0. Dann existiert ein vollständiger Bewertingsring A mit dem Restekörper k, char Q(A) = 0 und eine glatte projektive Kurve X über A mit

$$X_0 = X \otimes_A k.$$

Das ist so, weil das Hindernis für das Anheben einer glatten projektiven Varietät in einer zweiten Kohomologie-Gruppe (bezüglich der Zariski.-Topologie) liegt, für Kurven also gleich Null ist (vgl. [SGAI, III.7]).
Nach 3.3.7 gilt dann

$$\pi_1(X_0, \overline{x}) \cong \pi_1(X, \overline{x})$$

und nach 3.3.9 hat die Surjektion

$$\pi_1(X_{\overline{K}}, \overline{x}) \longrightarrow \pi_1(X, \overline{x})$$

einen kleinen Kern.

Die Existenz des Homomorphismus ergibt sich aus den Diagrammen der Gestalt

[99] Der Verzweigungsort Z hat überall die Dimension dim $\widetilde{X}$ - 1 und die Dimension von $\widetilde{X}$ - $\widetilde{U}$ ist kleiner.

$$\begin{array}{ccc} \overline{A}_i & \hookrightarrow & K_i \\ \cup & & \cup \\ A & \hookrightarrow & K \end{array}$$

Dabei sei $K := Q(A)$, $K_i$ eine endliche Galois-Erweiterung von K, für welche die Ganze Abschließung $\overline{A}_i$ von A in $K_i$ unverzweigt ist. Man beachte, jeder Automorphimus von $K_i$ über K bilded $\overline{A}_i$ in sich ab, induziert also einen Automorphismus von $\overline{A}_i$ über A. Umgekehrt induziert jeder Automorphismus von $\overline{A}_i$ über A einen Automorphismus von $K_i$ über K (so daß der Homomorphismus der fundamentalen Gruppen surjektiv ist).

Nach dem Vergleichssatz 3.2.4 (ii) ist $\pi_1(X_{\overline{K}}, \overline{x})$ die proendliche Vervollständigung der topologischen fundamentalen Gruppe einer Kurve vom Geschlecht g über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, welche wohlbekannt ist. Zusammen erhalten wir

$$\pi_1(X_0, \overline{x})^{(p)} \cong G^{(p)}.$$

Dabei bezeichne G die freie Gruppe mit 2g Erzeugern $u_i$, $v_i$ $(i = 1, \ldots ,g)$ modulo der einzigen Relation

$$(u_1 v_1 u_1^{-1} v_1^{-1}) \bullet \ldots \bullet (u_g v_g u_g^{-1} v_g^{-1}) = 1$$

und $G^{(p)}$ sei der inverse Limes $\varprojlim_i G_i$ über alle Faktorgruppen $G_i$ von G einer endlichen Ordnung, die teilerfremd zu p ist.

## 3.4 Mengen mit $\pi_1$-Operation

Seien X ein zusammenhängendes Schema und $\overline{x}$ ein geometrischer Punkt von X. Dann definiert der Funktor

$F\ \mathrm{Hom}_X(\overline{x}, ?)$: **FEt** $/X \longrightarrow \{$ endliche $\pi_1(X, \overline{x})$-Mengen mit stetiger Linksoperation $\}$

eine Äquivalenz von Kategorien.

**Beweis**: siehe SGA1.

## 3.5 Galois-Überlagerungen

Die nachfolgenden Betrachtungen haben das Ziel, die mengentheoretischen Konstruktionen im Kontext der Galois-Überlagerungen durch schematheoretische zu ersetzen.

### 3.5.1 Bezeichnung

Eiin endlicher Etal-Morphismus $Y \longrightarrow X$ von zusammenhängenden Schemata heißt nach 3.2.2 Galois-Überlagerung, wenn die Ordnung der Automorphismen-Gruppe

$$\mathrm{Aut}_X(Y)$$

gleich dem Grad von Y über X ist (siehe 3.2.2). Wir wollen an dieser Stelle diesen Begriff etwas variieren. Dazu führen wir die folgende Bezeichnung ein.

Seien X ein Schema und G eine endliche Gruppe. Wir betrachten die disjunkte Vereinigung

$$G_X := \vee_{\sigma\in G} X_\sigma$$

mit $X_\sigma$ := X für jedes σ. Man beachte, $G_X$ ist in natürlicher Weise mit einer Rechtsoperation

$$G_X \times G \longrightarrow G_X\ ,\ (x, \sigma) \mapsto x\sigma,$$

versehen, wobei für $\tau \in G$ die Einschränkung von

$$G_X = G_X \times \{\tau\} \longrightarrow G_X$$

auf $X_\sigma$ gerade die identische Abbildung $X_\sigma \longrightarrow X_{\sigma\tau}$ ist.

### 3.5.2 Eine alternative Definition der Galois-Überlagerungen

Seiein X ein Schema, G eine endliche Gruppe und Y ein X-Schema auf welchem G über X operiert[100]. Der Struktur-Morphismus $Y \longrightarrow X$ heißt Galois-Überlagerung mit der Gruppe G, falls er treuflach ist und die nachfolgend definierte Abbildung ψ ein Isomorphismus ist.[101]

$$\psi: G_Y \longrightarrow Y \times_X Y \text{ mit } \psi|_{Y_\sigma} : Y_\sigma \longrightarrow Y_\sigma \times_X Y_{\sigma^2} = Y \times_X Y,\ y \mapsto (y, y\sigma).$$

**Bemerkungen**

(i) Die X-Morphismen $Y \xrightarrow{\varphi} Y$ entsprechen auf Grund der Universalitätseigenschaft des Faserprodukts gerade den Y-Morphismen $Y \longrightarrow Y\times_X Y$

$$\begin{array}{ccccc}
Y & & \varphi & & \\
& \searrow & & \searrow & \\
& & Y\times_X Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\
& \mathrm{id}\searrow & \downarrow p_1 & & \downarrow \\
& & Y & \longrightarrow & X
\end{array}$$

Wir haben deshalb eine injektive Abbildung

$$G \hookrightarrow \mathrm{Aut}_X(Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_X(Y, Y) \cong \mathrm{Hom}_Y(Y, Y\times_X Y) \cong \mathrm{Hom}_Y(Y, G_Y)$$

Ist Y zusammenhängend, so ist ein Element der Hom-Menge rechts gerade durch ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
Y & \longrightarrow & Y_\sigma \\
\| & \swarrow & \\
Y & &
\end{array}$$

gegeben, d.h. die Hom-Menge rechts kann man mit G identifizieren. Wir erhalten

$$G = \{\text{Menge der Komponenten von } G_Y\} = \mathrm{Aut}_X(Y).$$

---

[100] durch Morphismen von rechts.

[101] $\psi|_{Y_\sigma}$ ist der Schema-Morphismus, dessen Zusammensetzung mit der ersten Projektion der identische Morphismus und dessen Zusammensetzung mit der zweiten Projektion der Morphismus σ ist.

(ii) Für je zwei Elemente $f,g \in F(Y) = \mathrm{Hom}_X(\bar{x}, Y)$ gibt es genau einen Morphismus

$$\varphi{:}\bar{x} \longrightarrow Y\times_X Y$$

für welchen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \bar{x} \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, "f"] \arrow[ddr, "g"'] & & \\ & Y\times_X Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d] \\ & Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Weil $\psi$ ein Isomorphismus sein soll, hat $\varphi$ die Gestalt $\varphi = \psi\circ\varphi'$ mit einem eindeutig bestimmenten Morphismus

$$\varphi'{:}\ \bar{x} \longrightarrow Y_\sigma \in \mathrm{Hom}(\bar{x}, G_Y).$$

Es gilt

$$g = p_1\circ\varphi = p_1\circ\psi\circ\varphi' = \varphi'$$

$$f = p_2\circ\varphi = p_2\circ\psi\circ\varphi' = \varphi'\bullet\sigma\ = \sigma\circ g.$$

Die Abbildung

$$G = \mathrm{Aut}_X(Y) \longrightarrow F(Y),\ \sigma \mapsto\ \sigma\circ g$$

ist bijektiv. Mit anderen Worten, $Y \longrightarrow X$ ist eine Galois-Überlagerung im Sinne der Definition 3.2.2. Die neue Definition unterscheidet sich von der alten darin, daß die auftretenden Mengen eine Schema-Struktur besitzten.

### 3.5.3 Kriterium für Galois-Überlagerungen

Seiein $X$ ein Schema, $G$ eine endliche Gruppe und $Y$ ein $X$-Schema auf welchem $G$ über $X$ operiert[102]. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) $f{:}Y \longrightarrow X$ ist eine Galois-Überlagerung.

(ii) Es gibt einen treuflachen Morphismus $U \longrightarrow X$ lokal endlichen Typs mit

$$Y_U \cong G_U$$

als Schemata mit $G$-Operation.

**Beweis**. Sei $U \longrightarrow X$ ein Morphismus lokal endlichen Typs. Wir betrachten den Morphismus

$$\psi{:}\ G_Y \longrightarrow Y \times_X Y$$

von 3.5.2. Durch Übergang zu den Faserprodukten mit $U$ über $Y$ erhalten wir einen Morphismus

$$\psi_U{:}\ G_U \longrightarrow Y \times_X Y \times_X U = Y \times_X Y_U = Y\times_X(U\times_U Y_U) = Y_U\times_U Y_U.$$

Dabei ist die Abbildungsvorschrift für $\psi_U$ analog zu der von $\psi$. Mit $\psi$ ist auch $\psi_U$ ein Isomorphismus, und es gilt auch die Umkehrung, falls $U \longrightarrow X$ treuflach ist.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Nach Voraussetzung ist $\psi$ ein Isomorphismus

---

[102] durch Schema-Morphismen über $X$ von rechts.

$$\psi: G_Y \longrightarrow Y \times_X Y = Y_Y \quad ,$$

d.h. die Bedingung von (ii) ist erfüllt, wenn man $Y \longrightarrow X$ als Morophismus $U \longrightarrow X$ verwendet.

<u>(ii) $\Rightarrow$ (i)</u>. Nach Voraussetzung hat man einen treuflachen Morphismus $h:U \longrightarrow X$ und einen G-äquivarienten Isomorphismus

$$\alpha:G_U \longrightarrow Y_U = U\times_X Y,\ u\sigma \mapsto (\ p_1\alpha(u\sigma),\ p_2(u\sigma))$$

Dabei bezeichne $\pi_i$ die Projektion auf den i-ten Faktor. Man beachte, jedes Element von $G_U$ läßt sich in der Gestatl $u\sigma$ schreiben mit eindeutig bestimmten Elementen $u \in U = U_e$ und $\sigma\in G$. Wegen $\pi_1\alpha\,|_U = \mathrm{Id}$ hat $\alpha$ die Gestalt[103]

$$\alpha:G_U \longrightarrow Y_U = U\times_X Y\ ,\ u\sigma \mapsto (u,\ h(u)\sigma)$$

Durch Basiswechsel mit $p_1$: $U' := U\times_X Y \longrightarrow U$ erhalten wir den Isomorphismus

$$\alpha:G_{U'} \longrightarrow Y_{U'} = U'\times_X Y,\ u'\sigma \mapsto (u',\ h(p_1(u'))\sigma)$$

Dieser entsteht aus

$$\psi: G_Y \longrightarrow Y \times_X Y = Y_Y \quad ,$$

durch den Basiswechsel $U' = U\times_X Y \longrightarrow Y$. Es reicht also zu zeigen, daß $U' \longrightarrow Y$ treuflach ist. Letzterer Morphismus entsteht aber aus dem treuflachen Morphismus

$$U \longrightarrow X$$

durch den Basiswechsel $Y \longrightarrow X$.

**QED**.

**Bemerkungen**

(i) Aus den obigen Argumenten ergibt sich, daß durch beliebigen Basiswechsel aus einer Galois-Überlagerung wieder eine Galois-Überlagerung entsteht.

(ii) Als Basiswechselmorphismus von 3.5.3 (ii) kann man den gegebenen Morphismus f verwenden, vorausgesetzt man weiß, daß f treuflach ist.

(iii) Die Eigenschaft eines Morphismus $f: Y \longrightarrow X$, eine Galois-Überlagerung mit der endlichen Gruppe G zu sein, ist eine lokale Eigenschaft: falls es eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_\alpha U_\alpha$$

von X gibt mit der Eigenschaft gibt, daß für jedes $\alpha\in I$ die Einschränkung

$$f^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha$$

eine Galois-Überlagerung mit der Gruppe G ist, so ist auch f ein Galois-Überlagerung mit der Gruppe G. Man wende zum Beweis das obige Kriterium mit dem Basiswechsel-Morphismus

$$\vee_{\alpha\in I} U_\alpha \longrightarrow X$$

an.

(iv) In Analogie zur ursprünglichen Definition der Galois-Überlagerungen kann man auch in der vorliegenden Situation zeigen, daß sich jeder endliche Etal-

[103] Man beachte, $u\sigma\in Y_\sigma$ ist gleich $u\in Y$.

Morphismus Y $\longrightarrow$ X in irgendeine Galois-Überlagerung einbetten läßt, d.h. es gibt eine Galois-Überlagerung Y'$\longrightarrow$X (mit geeignet gewählter endlicher Gruppe G),welche sich über Y $\longrightarrow$ X faktorisiert. Ist X ein normales Schema, so ergibt sich dies ziemlich direkt aus der Galois-Theorie für Körper. Der allgemeine Fall ist nicht sehr viel schwieriger (siehe [Murre, 1967, 4.4.1.8]).

(v) Sei X ein zusammenhängendes Schema mit dem geometrischen Punkt $\bar{x}$,

$$\bar{x} \longrightarrow X.$$

Weiter sei ein $\bar{x}$-punktierter Morphismus Y $\longrightarrow$ X gegeben, welcher eine Galois-Überlagerung bezüglich der Operation einer endlichen Gruppe G auf Y über X ist.

Aus der Definition der fundamentalen Gruppe als inverser Limes von Automorphismengruppen erhalten wir einen (stetigen) Gruppen-Homomorphismus

$$\pi_1(X, \bar{x}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_X(Y) = G.$$

Umgekehrt macht jeder solche stetige Gruppen-Homomorphismus mit Werten in einer endlichen Gruppe G, die Menge G zu einer $\pi_1(X, \bar{x})$-Menge. Nach 3.4 definiert der Funktor F von 3.1 eine Äquivalenz von Kategorien

$$F\ \mathrm{Hom}_X(\bar{x}, ?): \mathbf{FEt}\ /X \longrightarrow \{\text{ endliche } \pi_1(X, \bar{x})\text{-Mengen mit stetiger Linksoperation }\}$$

Es gibt also eine Galois-Überlagerung Y $\longrightarrow$ X mit

$$F(Y) \cong G$$

als Mengen mit stetiger $\pi_1(X, \bar{x})$-Operation. Wir erhalten so eine Identifikation

$$\mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(X, \bar{x}), G) = \left\{\begin{array}{c}\text{Menge Isomorphie-Klassen}\\ \bar{x}\text{-punktierter Galois-Überdeckungen}\\ \text{mit der Gruppe G}\end{array}\right\}$$

Wir werden deshalb gelegentlich die folgende Bezeichnung verwenden.

$$\pi^1(X, \bar{x}; G) := \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(X, \bar{x}), G).$$

### 3.5.4 Der Fall affiner Spektren

Sei A $\hookrightarrow$ B eine Inklusion von (kommutativen noetherschen) Ringen (mit 1) und G eine endliche Gruppe, welche auf B durch Homomorphismen von A-Algebren operiert (Wir sagen dann, G operiert auf B über A). Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Spec B $\longrightarrow$ Spec A ist eine Galois-Überlagerung mit der Galois-Gruppe G.

(ii) Es gilt
a) B ist endliche Etal-Algebra über A.
b) $\mathrm{End}_A(B)$ besitzt als linker B-Modul die (linear unabhängige) Basis[104]

$$\{\sigma \mid \sigma \in G\}$$

mit der Multiplikationstabelle

$$(b\sigma)\bullet(b'\sigma') = b\bullet\sigma(b')\bullet\sigma\sigma' \text{ für } b, b' \in B \text{ und } \sigma,\tau \in G.$$

**Zum Beweis**. (i) $\Rightarrow$ (ii).

Als Galois-Überlagerung ist Spec B $\longrightarrow$ Spec A endlich und etale. Bedingung a) ist somit trivialerweise erfüllt. Für den weiteren Beweis setzen wir

[104] Unter einer Basis verstehen wir ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

$X = \mathrm{Spec}\ A$
$Y = \mathrm{Spec}\ B$

Dann ist $G_Y$ die disjunkte Vereinigung

$$G_Y = \vee_{\sigma\in G} Y_\sigma = \mathrm{Spec}\ B[G]$$

mit

$$B[G] = \prod_{\sigma\in G} B\bullet\sigma$$

für jedes $\sigma\in G$.[105] Dabei operiert G auf dem direkten Produkt rechts durch Permutieren der Faktoren kombiniert mit der Wirkung von G auf den Elementen von B. Genauer: das Element $\tau\in G$ definiert auf $B\bullet\sigma$ die Abbildung

$$B\bullet\sigma \longrightarrow B\bullet\tau\sigma\ ,\ b\bullet\sigma \mapsto \tau(b)\bullet\tau\sigma.$$

Als B-Modul besitzt B[G] die linear unabhängigen Basis

$$\{\sigma \mid \sigma \in G\}.$$

Mit anderen Worten, Bedingung (ii)b) ist mit B[G] anstelle von $\mathrm{End}_A(B)$ erfüllt. Es reicht also zu zeigen,

$$B[G] \cong \mathrm{End}_A(B).$$

Indem wir jedes Element von G auf den zugehörigen Endomorphismus von B abbilden, erhalten wir eine B-lineare Abbildung

$$\varphi\colon B[G] \longrightarrow \mathrm{End}_A(B).$$

und damit eine Sequenz von endlich erzeugten B-Moduln

$$0 \longrightarrow B[G] \xrightarrow{\varphi} \mathrm{End}_A(B) \longrightarrow 0.$$

Es reicht zu zeigen, diese Sequenz ist exakt. Dazu reicht es zu zeigen, sie wird exakt nach Anwenden eines Funktors $\otimes_A C$ mit C treuflach über A, d.h.

$$\varphi_C\colon (B\otimes_A C)[G] \longrightarrow \mathrm{End}_C(B\otimes_A C) \qquad (1)$$

ist bijektiv[106].

Nach 3.5.3 wird nach einem treuflachen Basiswechsel $U \longrightarrow X$ das Schema $G_U$ isomorph zu $Y_U \times_U Y_U$. Nach Bemerkung 3.5.3 (ii) kann man dabei als Basiswechsel-

---

[105] Die Multiplikation auf B[G] sei dabei die koordinatenweise Multiplikation

[106] Es gilt

$$\mathrm{End}_A(B)\otimes_A C = \mathrm{Hom}_A(B,B)\otimes_A C \cong \mathrm{Hom}_C(B\otimes_A C, B\otimes_A C) = \mathrm{End}_C((B\otimes_A C).$$

Die mittlere Abbildung ist gegeben durch $(b \mapsto f(b)) \otimes c \mapsto (b\otimes c \mapsto f(b)\otimes c)$. Beim Beweis der Bijektivität kann man sich, weil Hom und $\otimes$ mit endlichen direkten Summen kommutieren, auf den Fall B = A beschränken, d.h .auf den Beweis von

$$\mathrm{Hom}_A(A,A)\otimes_A C \cong \mathrm{Hom}_C(C, C).$$

Letzteres ergibt sich aus $A\otimes_A C \cong C$.

Morphismus den Morphismus Spec B $\longrightarrow$ Spec A wählen, d.h. für U = Spec B erhält man den Isomorphismus:

$$\begin{array}{ccc} B[G]\otimes_A B & \cong & (B\otimes_A B)\otimes_B(B\otimes_A B) \\ \| & & \| \\ (B\otimes_A B)[G] & & (B\otimes_A B)\otimes_B \mathrm{Hom}_B(B\otimes_A B,B) \\ & & \| \\ & & \mathrm{End}_B(B\otimes_A B) \end{array}$$

Wir haben gezeigt, für C := B ist (1) ein Isomorphismus.

<u>(ii) $\Rightarrow$ (i)</u>. Die Eigenschaft (ii) bleibt bei Basiswechsel erhalten, insbesondere also auch beim Einschränken auf eine offene Teilmenge von Spec A. Weil die Eigenschaft, eine Galois-Überlagerung zu sein, von lokaler Natur ist, reicht es eine Überdeckung von Spec A durch affine offene Teilmengen zu finden mit der Eigenschaft, daß die Einschränkungen von

$$\text{Spec B} \longrightarrow \text{Spec A}$$

auf diese offenen Teilmengen Galois-Überlagerungen mit der Gruppe G sind. Weil der Homomorphismus A $\longrightarrow$ B endlich und etale, also lokal frei ist, können wir deshalb annehmen,

B ist ein freier (endlich erzeugter) A-Modul,

sagen wir vom Rang r,

$$B = Ae_1+...+Ae_r$$

Das Tensorprodukt $B\otimes_A B$ ist dann frei vom Rang $r^2$ über A,

Wie bisher sei

X = Spec A
Y = Spec B

Die Abbildung

$$\psi: G_Y \longrightarrow Y \times_X Y \text{ mit } \psi|_{Y_\sigma}: Y_\sigma \longrightarrow Y_\sigma \times Y_{\sigma^2}, y \mapsto (y, y\sigma).$$

der Definition 3.5.2 der Galois-Überlagerung wird induziert von eimem Ring-Homomorphismus

$$h: B\otimes_A B \longrightarrow \mathrm{End}_A(B) = B[G] = \prod_{\sigma\in G} B\cdot\sigma,\ b\otimes b' \mapsto \sum_{\sigma\in G} f_\sigma(b,b')\cdot\sigma \qquad (1)$$

von Ringen mit 1. Dabei sind die Koeffizienten durch bilineare Abbildungen

$$f_\sigma: B\times B \longrightarrow B$$

über A gegeben. Weil das Schema Spec B[G] die disjunkte Vereinigung von Exemplaren von Spec B sein soll, ist dabei das direkte Produkt B[G] mit der koordinatenweisen Multiplikation zu versehen.

Die Zusammensetzung von (1) mit der Abbildung B $\longrightarrow$ $B\otimes_A B$, b $\mapsto$ b$\otimes$1 und den Projektionen B[G] $\longrightarrow$ B auf die einzelnen direkten Faktoren ist gerade die identische Abbildung, d.h. es gilt

$$f_\sigma(b,1) = b \text{ für jedes } b \in B$$

Entsprechend ist die Zusammensetzung von (1) mit der Abbildung

$$B \longrightarrow B\otimes_A B,\ b \mapsto 1\otimes b$$

und der Projektion $B[G] \longrightarrow B$ auf den zu $\sigma\in G$ gehörigen Faktor die Abbildung $b\mapsto\sigma(b)$, d.h. es gilt

$$f_\sigma(1,b) = \sigma(b).\text{für jedes } b \in B.$$

Weil (1) ein Ringhomomorphismus ist, folgt

$$\begin{aligned} h(b\otimes b') &= h((b\otimes 1)\bullet(1\otimes b')) \\ &= h(b\otimes 1)\bullet h(1\otimes b) \\ &= (\sum_{\sigma\in G} b\bullet\sigma)\bullet(\sum_{\sigma\in G}\sigma(b')\bullet\sigma) \\ &= b\bullet \sum_{\sigma\in G}\sigma(b')\bullet\sigma \qquad \text{(koordinatenweise Multiplikation)} \end{aligned}$$

Wir haben zu zeigen, die Abbildung

$$h{:}B\otimes_A B \longrightarrow B[G],\ b\otimes b' \mapsto b\bullet \sum_{\sigma\in G}\sigma(b')\bullet\sigma, \qquad (2)$$

ist bijektiv. Weil h eine B-lineare Abbildung von freien B-Moduln desselben endlichen Rangs ist (und B noethersch ist), reicht es zu zeigen, h ist surjektiv[107].

Die Einschränkkung von $\psi$ auf $Y_\sigma$ wird induziert durch den Ring-Homomorphismus

$$B\otimes_A B \longrightarrow B\bullet\sigma \cong B,\ b\otimes b' \mapsto b\bullet\sigma(b')\bullet\sigma \mapsto b\bullet\sigma(b'). \qquad (3)$$

Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv (sie induziert gerade die Zusammensetzung der Diagonal-Einbettung mit dem Isomorphismus $1 \times \sigma$). Die Einschränkung von $\psi$ auf $Y_\sigma$ ist somit eine abgeschlossene Einbettung. Es reich deshalb, zu zeigen,

$$\psi(Y_\sigma) \cap \psi(Y_\tau) = \emptyset \text{ für } \sigma\neq\tau,$$

---

[107] Sei $h{:}\ A^r \longrightarrow A^r$ eine A-lineare Surjektion. Für jeden Teilmodul $M \subseteq A^r$ gilt dann

$$h(h^{-1}(M)) = M.$$

Die Urbilder $h^{-1}(M)$ verschiedener M sind daher verschieden. Hat h einen nicht-trivialen Kern,

$$0 \subset h^{-1}(0), \qquad \text{(echte Inklusion)}$$

so gilt auch

$$h^{-1}(0) \subset h^{-1}(h^{-1}(0)),$$

also

$$h^{-1}(h^{-1}(0)) \subset h^{-1}(h^{-1}(h^{-1}(0))),$$

usw. Wir erhalten so eine unendliche aufsteigende Kette

$$0 \subset h^{-1}(0) \subset h^{-1}(h^{-1}(0)) \subset h^{-1}(h^{-1}(h^{-1}(0))) \subset \ldots$$

von Teilmoduln von $A^r$. Also kann $A^r$ (und damit A) nicht noethersch sein.

denn dann identifiziert $\psi$ das Schema $G_Y$ mit enem abgeschlossenen Teilschema des Faserprodukts $Y \times_X Y$ und ist damit eine abgeschlossene Einbettung, d.h. (2) ist surjektiv. Bezeichne

$$I_\sigma \subseteq B\otimes_A B$$

das Ideal des abgeschlossenen Teilschemas $\psi(Y_\sigma)$ von $G_Y$, d.h. den Kern des Homomorphismus (3). Es reicht zu zeigen,

$$I_\sigma + I_\tau = B\otimes_A B \text{ für } \sigma\neq\tau. \tag{4}$$

Nach Definition von $I_\sigma$ gilt

$$\sigma(b)\otimes 1 - 1\otimes b \in I_\sigma \text{ für jedes } b \in B,$$

also

$$(\sigma(b)-\tau(b))\otimes 1 \in I_\sigma + I_\tau \text{ für } b \in B.$$

Es reicht zu zeigen, das von den Elementen der Gestalt $\sigma(b)-\tau(b)$ mit $b\in B$ erzeugte Ideal von B enthält das Einselement $1 \in B$, denn dann liegt eine Einheit in $I_\sigma + I_\tau$, und es gilt (4).
Nehmen wir an, dies ist nicht so, und führen diese Aunahme zum Widerspruch. Dann gibt es ein echtes Ideal $I \subset B$ mit

$$\sigma(b)-\tau(b) \in I \text{ für jedes } b \in B, I \text{ echtes Ideal von } B.$$

Das Ideal I liegt in einem maximalen Ideal von B. Wir können deshalb annehmen

$$I = n \text{ , } n \text{ maximales Ideal von } B.$$

Wir identifizieren die Elemente $\sigma$ und $\tau$ von $End_A(B)$ mit den zugehörigen $r\times r$-Matrizen bezüglich der Basis $\{e_i\}_{i=1,...,r}$. Die Einträge dieser Matrizen sind dann modulo n gleich,

$$\sigma = \tau \text{ mod } n. \tag{5}$$

Weiter beachten wir, das B-linear unabhängige Erzeugendensystem der $\sigma$ des Endomorphismenrings $End_A(B)$ ist auch ein $B_n$-linear unabhängiges Erzeugendensystem des $B_n$-Moduls[108]

$$End_{A_m}(B_n).$$

Dabei sei $m := A\cap n$ das maximale Ideal von A, über welchem n liegt. Analog gilt[109]

$$End_A(B)\otimes_A A/m = End_{A/m}(B/mB).$$

Die B-linear unabhängigen Elemente $\sigma$ induzieren B/mB-linear unabhängige Elemente des Endomorphismenrings rechts und damit $B_n/mB_n$-linear unabhängige Elemente von

$$End_{A/m}(B_n/mB_n).^{110} \tag{6}$$

[108] weil der Funktor $\otimes_B B_n$ mit direkten Summen kommutiert.

[109] weil $\otimes_A A/m$ mit direkten Summen kommutiert.

[110] $End_{A/m}(B/mB)$ ist ein freier Modul über B/mB vom Rang r. Also ist $End_{A/m}(B_n/mB_n)$ ein freier Modul über $B_n/mB_n$ ebenfalls vom Rang r.

Weil B etale ist über A gilt

$$nB_n = mB_n.$$

Wegen (5) sind deshalb die durch σ und τ induzierten Endomorphismen von (6) gleich. Sie können daher unmöglich Teil eines linear unabhängigen Erzeugendensystems sein. Dieser Widerspruch beweist, daß $I_\sigma + I_\tau$ für $\sigma \neq \tau$ kein echtes Ideal sind kann, d.h. es gilt (4) und damit die Behauptung.
**QED**.

### 3.6 Die fundamentale Gruppe als Gruippen-Schema

## Literatur


[A 1962] Artin, M.: Grothendieck topologies, Lecture Notes, Harvard University, Math. Dept., Cambridge Mass., 1962

[A 1966] M. Artin: Etale coverings of schemes over Hensel rings, Amer. J. Math. 88 (1966), 915-934

[A 1969] M.Artin: Algebraic approximation of structures over complete local rings), Publ. Math. IHES, 36 (1969), 23-58

[A 1973] Artin, M.: Théoremes de representabilité pour espaces algébriques, Presses de l'Université de Montréal, Montréal 1973

[AK 1970] Altman, A., Kleiman, S.: Introduction to Grothendieck duality theory, Springer Lecture Notes in Math. 146 (1970)

[AM 1969] Artin, M., Mazur, B.: Etale homotopy, Springer Lecture Notes in Math. 100, Heidelberg 1969.

[B 1961] Bourbaki, N.: Algèbre commutative, Chapitre 5: Entiers, Hermann Paris 1961

[CF 1967] Cassels,J.W.S., Fröhlich, A.: Algebraic number theory, Academic Press, London & New York 1967.

[D 1970] Deligne, P.: Equations differentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math. 163 (1970).

[D 1974] Deligne, P.: La conjecture de Weil I, Publ. Math. IHES 43 (1974) 273-307

[GD 1971] Grothendieck, A., Dieudonné, J.A.: Eléments des Géometrie Algébrique, Springer, Berlin 1971 (EGA I).

[GM 1971] Grothendieck, A., Murre, J.: The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a Scheme, Lecture Notes in Mathematics 208, Springer Heidelberg 1971

[H 1977] Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Springer, New York 1977.

[H 2003] Hirschhorn, P.S.: Model Categories and their localizations, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 2003

[K 1968] Kleiman, S.L.: Algebraic cycles and the Weil conjectures, in: Dix exposes sur la Cohomologie des schemas, North-Holland, Amsterdam 1968 (pp. 359-386).

[K 1986] Kunz, E.: Kähler differentials, Springer Wiesbaden 1986

[KPR 1980] Kurke, H., Pfister, G., Roczen, M.: Henselsche Ringe und algebraische Geometrie, Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

[M1980] Milne, J.S. Etale cohomology, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1980

[M 1967] Matsumura, H.: Commutative algebra, Benjamin, New York 1970

[M 1967] Mumford, D.: Pathologies III, Amer. J. Math. 89 (1967), 94-104.

[M 1967] Murre, J.: Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group, Tata Institute of Fundamental Research Bombay, Lecture Notes 1967.

[N 1962] Nagata, M.: Local rings, Interscience tracts in pure and applied mathematics 13, J. Wiley, New York 1962
[S 1970] Schubert, H. Kategorien I und II, Akademie-Verlag, Belin 1970.
[R 1970] Raynauld, M.: Aneaux locaux Henseliens, Lecture Notes in Math. 169, Springer Heidelberg 1970.
[S 1962] Serre, J.-P.: Corps locaux, Hermann, Paris 1962.
[SGA 1, 1971] Grothendieck, A, et al.: Revêtements étales et group fondemental, Lecture Notes in Math. 224, Springer, Heidelberg 1971.

## Index

**—A—**

Abschließung, 38
Algebra
 separable, über einem Körper, 16

**—Ä—**

Äquivalenz
 rationale, 3

**—A—**

Axiom
 Schwaches Lefschetz-, 3
 Starkes Lefschetz-, 3

**—B—**

Basis, 116

**—C—**

charakteristisches Polynom, 19
Cup-Produkt, 4

**—D—**

darstellbar
 pro-darstellbar, 102
Darstellung
 endliche, 29
diskrete Topologie, 9
Diskriminante, 19
Divisor
 Haupt-, 3
Dualität
 Poincaré, 3

**—E—**

effektiv
 stark effektiv, 104
 universell effektive Familie, 10
Element
 idempotent, 62
endliche Darstellung, Morphismus von, 29
etal, 17
Etale-Situs, 28
Etal-Morphismus, 17
 Standard-, 35
Etal-Prätopologie, 17
Etal-Sieb, 17
Etal-Topologie, 17
Etal-Überdeckung, 17
Etal-Umgebung, 75; 99; 100
 eines lokalen Rings, 75

**—F—**

Faktorisierungssatzes von Stein, 40
Familie
 universell effektiv, 10
Faser
 geometrische, 19
flach, 17
formal etale, 56
formal glatt, 56
formal unverzweigt, 56
formal unverzweigt, 56
fppf-Überdeckung
 eines affinen Schemas, 29
 eines Schemas, 29
fundamentale Gruppe, 105
 zahme, 108
fundamentale Klasse, 3

**—G—**

Galois-Überlagerung, 104; 113
Garbe, 6
Generalisierung, 48
geometrische Faser, 19
großer E-Situs, 28
Grothendieck-Prätopologie, 5
Gruppe
 proendliche, 16
 Zerlegungsgruppe, 85

**—H—**

Hauptdivisor, 3
Henselisierung
 strenge, 100
Henselisierung, 75
Henselsch
 streng Henselsch, 99

**—I—**

idempotentes Element, 62
idempotentes Element

triviales, 62
Isomorphismus
Künneth, 3

## —J—

Jacobson-Radikal, 16

## —K—

kanonische Topologie, 10
Klasse
fundamentale, 3
kleiner E-Situs, 28
Körper
separable Algebra über einem -, 16
Zerlegungskörper, 85
Künneth-Isomorphismus, 3

## —L—

Lefschetz-Axiom
schwaches, 3
starkes, 3
Lefschetz-Operator, 3
lokal
streng lokal, 99
lokal endlicher Typ eines Schema-Morphismus, 17
lokal von endlicher Darstellung, 29

## —M—

maximales Sieb, 8
Modul
über einer Gruppe, 15
Morphismus
lokal endlichen Typs, von Schemata, 17
separabler, in einem Punkt, 17
Standard-Etal-, 35

## —N—

Nisnevich-Topologie, 30
Nisnevich-Überdeckung, 30
normal, 85
Normalisierung, 38
normiertes Polynom, 30

## —O—

Operator
Lefschetz-, 3
operiert, 116
Orientierungsabbildung, 3

## —P—

Poincaré-Dualität, 3
Polynom
normiertes, 30
separables, 31
Prägarbe, 6
Prätopologie
Etal-, 17
Grothendieck-, 5
pro-darstellbar, 102
Produkt
Cup-, 4
proendliche Gruppe, 16

## —Q—

quasi-endlich, 20
quasi-kompakt, 38
quasi-separiert, 38

## —R—

Radikal
Jacobson-, 16
radikal, 55
rationale Äquivalenz, 3
reduziert, 99
Reinheitssatz, 110
relativ prim, 59
relativ prim im engeren Sinne, 59
Riemannsche Vermutung, 2

## —S—

Schema-Morphismus
lokal endlichen Typs, 17
Schwaches Lefschetz-Axiom, 3
separabel, 32
separable Algbra über einem Körper, 16
separabler Morphismus von Schemata, in einem Punkt, 17
separables Polynom, 31
Sieb, 7
Etal-, 17
maximales, 8
Situs, 9
Spezialisierung, 48
Spur, 19
Standard-Etale-Morphismus., 45
stark effektiv, 104
stark relativ prim, 59
Starkes Lefschetz-Axiom, 3
Stein
Faktorisierungssatz, 40
streng Henselsch, 99
streng lokal, 99
strenge Henselisierung, 100

## —T—

tiviales idempotentes Element, 62
Topologie
diskrete, 9
Etal-, 17
Grothendieck-Prä, 5
kanonische, 10
Trägheitsgruppe, 85
triviale Topologie, 9
Typ
lokal endlicher eines Schema-Morphismus, 17

**—Ü—**

Überdeckung
Etal-, 17
fppf-, 29
Überdeckung einer Prätopologie, 6
Überlagerung
Galois-, 113
universelle, 103

**—U—**

Umgebung
Etal-Umgebung, 99
universell effektive Familie, 10
universellen Überlagerung, 103
unverzweigt, 17; 32

**—V—**

Vereinbarung
noethersche Ringe und lokal noethersche Schemata, 16
Vermutung
Riemannsche, 2
Weilsche, 2
Vermutungen von Grothendieck, 4

**—W—**

Weil-Kohomologie, 2
Weilsche Vermutungen, 2

**—Z—**

zahm, 108
zahme fundamentale Gruppe, 108
Zariski-Situs, 28
Zerlegungsgruppe, 85
Zerlegungskörper, 85
Zu (ii), 20
Zyklen-Abbildung, 3

# Inhalt

**Bezeichnungen** 1

**1. EINLEITUNG** 2

**1.1 Zeta-Funktionen und Kohomologie-Theorien** 2

**1.2. Weil-Kohomologie** 2
1.2.1 Definition 2
1.2.2 Konstruktionsidee für Weil-Kohomologien 4

**1.2 Die Unzulänglichkeiten der Garben-Kohomologie von Schemata** 5

**1.3 Grothendieck-Topologien und Garben** 5
1.3.1 Prätopologien 5
1.3.2 Garben 6
1.3.3 Topologien 8
1.3.4 Beispiel: die kanonische Topologie einer Kategorie 9
1.3.5 Beispiel: die kanonische Topologie der Kategorie Ens 10
1.3.6 Die kanonische Topologie einer Gruppen-Operation 11
1.3.7 Proendliche Gruppen 16
1.3.8 Etal-Topologie 16
1.3.9 Eine Methode zur Konstruktion von Topologien 27
1.3.10 Die fppf-Topologie 29
1.3.11 Die Nisnevich-Topologie 30

**2. ETALE-MORPHISMEN** 30

**2.1 Die lokale Struktur von Etale-Morphismen** 30
2.1.1 Beispiel: einfach erzeugte Algebren 30
2.1.2 Beispiel: endlich erzeugte Algebren 32
2.1.3 Standard-Morphismen 35
2.1.4 Struktursatz 36
2.1.5 Offenheit des Flachheitslokus 45

2.1.6 Offenheit des Etale-Locus, Abgeschlossenheit des Verzweigungsortes 50
2.1.7 Schwacher Struktursatz 53
2.1.8 Struktursatz für normale Basen 53

**2.2 Eigenschaften von Etale-Morphismen 54**
2.2.1 Die Schnitte von Etale-Morphismen 54
2.2.2 Erhaltung von Normalität und Regularität 55
2.2.3 Kriterium für Etale-Morphismen 55
2.2.4 Struktursatz für Etale-Morphismen über normalen Schemata 55
2.2.5 Kriterien für offene Einbettungen 55

**2.3 Formale Beschreibung und Glattheit 56**
2.3.1 Definitionen 56
2.3.2 Etale-Morphismen und formale Etale-Morphismen 56
2.3.3 Topologische Invarianz des Begriffs des Etale-Morphismus 56
2.3.4 Charakterisierung der formal glatten Morphismen 58
2.3.5 Existenz von Anhebungen entlang glatter Morphismen 58

**2.4. Henselsche Ringe 59**
2.4.1 Vereinbarungen und Bezeichnungen 59
2.4.2 Henselsches Lemma 60
2.4.3 Eigenschaften Henselscher Ringe 61
2.4.4 Folgerungen 70
2.4.5 Verallgemeinerungen 72
2.4.6 Etale-Morphismen und lokale Isomorphismen 73
2.4.7 Beispiel: ein unverzweigter Morphismus, der nicht etal ist 74
2.4.8 Die Henselisierung eines lokalen Rings 75
2.4.9 Existenz der Henselisierung 75
2.4.10 Eigenschaften der Henselisierung 78
2.4.11 Henselisierung normaler lokaler Ring 84
2.4.12 Implizite Funktionen 89
2.4.13 Henselisierung und algebraische Potenzreihen 92
2.4.14 Erhaltung von Eigenschaften beim Henselisieren 99
2.4.16 $O^h_{X,x}$ als direkter Limes über die Etal-Umgebungen von x P X 99
2.4.15 Bemerkungen: streng Henselsche Ringe 99

## 3. HOMOTOPIE 101

**3.1 Vorbemerkungen 101**

**3.2 Definition der fundamentalen Gruppe 102**
3.2.1 Konstruktion 102
3.2.2 Automorphismen-Gruppen und Galois-Überlagerungen 103
3.2.3 Definition der fundamentalen Gruppe $\pi_1(X, \overline{x})$ 104
3.2.4 Bemerkungen 105

**3.3 Beispiele 106**
3.3.1 Spektren von Körpern 106
3.3.2 Der Fall normaler Schemata 106
3.3.3 Der Fall eines Spektrums eines streng Henselschen Rings 107
3.3.4 Der Fall eines Spektrums eines Henselschen Rings 107
3.3.5 Der Fall eines streng Henselschen Bewertungsrings 107
3.3.6 Der Fall der projektiven Geraden 108
3.3.7 Der Fall eines eigentlichen Schemas über einem Hensel-Ring mit geometrisch zusammenhängender abgeschlosser Faser 110

3.3.8 Offene Teilschemata regulärer Schemata mit kleinem Komplement 110
3.3.9 Eigentliche glatte Schemata über vollständigen diskreten Bewertungsringen 111
3.3.10 Glatte projektive Kurven in der Charakteristik p 111

**3.4 Mengen mit $\pi_1$-Operation** **112**

**3.5 Galois-Überlagerungen** **112**
3.5.1 Bezeichnung 112
3.5.2 Eine alternative Definition der Galois-Überlagerungen 113
3.5.3 Kriterium für Galois-Überlagerungen 114
3.5.4 Der Fall affiner Spektren 116

**3.6 Die fundamentale Gruppe als Gruippen-Schema** **121**

**LITERATUR** **121**

**INDEX** **122**

**INHALT** **124**