Kommutative Algebra

Alle Ringe in diesem Abschnitt sind, falls nicht ausdrücklich anders erwähnt, kommutativ und besitzen ein Einselement. Alle Ring-Homomorphismen bilden 1-Elemente in 1-Elemente ab.

Vorbereitungen (frei nach Matsumura)

Ideale, die nicht in einer Vereinigung von Primidealen liegen

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und I, p_1,..., p_r Ideale von A. Wir nehmen an, alle p_i mit eventueller Ausnahme von zweien sind Primideale.

Wenn dann I in keinem p_i liegt, so liegt I auch nicht in der Vereinigung der p_i.

Beweis. Wir können alle p_i weglassen, die in einem anderen p_i enthalten sind, also annehmen, daß zwischen den p_i keine Inklusionen bestehen.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach r.

<u>Der Fall</u> r = 2. Angenommen es gilt

$$I \subseteq p_1 \cup p_2. \tag{1}$$

Wir fixieren Elemente

$$x \in I - p_2 \text{ und } y \in I - p_1.$$

Wegen (1) gilt dann $x \in p_1$, also $x + y \notin p_1$. Also liegen die Elemente y und x+y beide in p_2 liegen. Dann liegt aber x in p_2 im Widerspruch zur Wahl von x.

<u>Der Fall</u> r > 2. Wir können annehmen, p_r ist ein Primideal. Auf Grund der Annahmen gilt dann

$$Ip_1\cdot\ldots\cdot p_{r-1} \not\subseteq p_r.$$

Wir fixieren ein Element

$$x \in Ip_1\cdot\ldots\cdot p_{r-1} - p_r.$$

Sei

$$S := I - (p_1\cup\ldots\cup p_{r-q}).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist S nicht leer. Angenommen, es gilt

$$I \subseteq p_1 \cup \ldots \cup p_r.$$

Dann liegt S ganz in p_r. Für $s \in S$ gilt $s + x \in S$. Weil S ganz in p_r liegen damit s und s+x in p_r, d.h. auch x muß in p_r liegen, im Widerspruch zur Wahl von x.

QED.

Bemerkung

Enthält A einen unendlichen Körper, so ist die Annahme, daß p_3 ,..., p_r Primideale sind, überflüssig: denn alle Ideale von A sind dann Vektorräume, und I kann nicht Vereinigung der endliche vielen echten Unterräume $I\cap p_i$ sein.

Chinesischer Restesatz

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und $I_1, \ldots, I_r \subseteq A$ Ideale mit

$$I_i + I_j = A \text{ für } i \neq j.$$

Dann gilt

$$I_1 \cap \ldots \cap I_r = I_1 \bullet \ldots \bullet I_r \qquad (1)$$

Der natürliche Homomorphismus

$$A \longrightarrow A/I_1 \times \ldots \times A/I_r \text{ , } a \mapsto (a \bmod I_1, \ldots, a \bmod I_r), \qquad (2)$$

ist surjektiv und hat das Ideal (1) als Kern.

Beweis: Für r = 1 ist die Aussage trivial. Wir können deshalb annehmen, es gilt

$$r > 1.$$

Sei m maximales Ideal mit

$$I_i \subseteq m.$$

Nach Voraussetzung liegt dann kein I_j mit $j \neq i$ ganz in m. Es gibt deshalb ein

$$y \in I'_i := \prod_{j \neq i} I_j \text{ ,}$$

welches nicht in m liegt, d.h.

$$I_i + I'_i$$

liegt nicht in m. Das ist richtig für jedes maximale Ideal. Das bedeutet, die obige Summe liegt in keinem maximalen Ideal, ist also gleich A. Damit kann mit $1 \in A$ in der Gestalt

$$1 = x_i + x'_i$$

schreiben, wobei der erste Summen im i-ten Ideal I_i liegt und der zweite in allen übrigen. Das Bild von x'_i bei der Abbildung (2) ist deshalb ein r-Tupel, dessen i-te Koordinate 1 und dessen übrige Koordinaten 0 sind. Folglich ist das Bild von

$$a_1 x'_1 + \ldots + a_r x'_r$$

bei (2) ein r-Tupel, dessen i-te Koordinate gleich $a_i \bmod I_i$ ist (für i = 1, ..., r). Wir haben gezeigt, (2) ist surjektiv. Der Kern von (2) ist trivialerweise der Durchschnitt auf der linken Seite von (1).

Sei jetzt a aus diesem Durchschnitt. Wir schreiben

$$a = ax_i + ax'_i.$$

Der zweite Summand rechts liegt dann im Produkt auf der rechten Seite von (1). Für den ersten Summand gilt immerhin

$$ax_i \in (I_1 \cap \ldots \cap I_r) \bullet I_i \subseteq (I_1 \cap \ldots \cap I_{i-1} \cap I_{i+1} \cap \ldots \cap I_r) \bullet I_i.$$

Nach Induktionvoraussetzung ist der erste Faktor rechts gleich dem Produkt der entsprechenden Ideale. Damit liegt aber auch der ersten Summand ax_i in der rechten Seite von (1). Wir haben gezeigt, die linke Seite von (1) liegt in der rechten. Die umgekehrte Inklusion besteht trivialerweise.

QED.

Das Radikal eines Ideals und das Nil-Radikal

Proposition

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und $S \subseteq A$ ein multiplikative abgeschlossene Teilmenge[1], welche das 0-Element nicht enthält. Dann gibt es ein Primideal p von A mit

$$S \cap p = \varnothing.$$

Beweis.Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Ideale I von A mit $I \cap S = \varnothing$. Diese Menge ist nicht leer, denn sie enthält das Null-Ideal. Nach dem Zornschen Lemma enthält die Menge ein maximales Element p. Zeigen wir, p ist ein Primideal. Dazu fixieren wir Elemente

$$x \in A - p \text{ und } y \in A - p.$$

Dann sind die Ideale $p + xA$ und $p + yA$ echt größer als p. Auf Grund der Maximalität von p haben diese Ideale gemeinsame Elemente mit S, sagen wir

$$s \in S \text{ und } s = ax \bmod p \text{ für ein } a \in A$$

und

$$t \in S \text{ und } t = by \bmod p \text{ für ein } b \in A.$$

Es folgt

$$st = abxy \bmod p \text{ und } st \in S.$$

Weil S disjunkt ist zu p, folgt $xy \in A - p$. Wir haben gezeigt, p ist ein Primideal.
QED.
Folgerung
(i) Die Menge der nilpotenten Elemente von A,

$$\mathrm{nil}(A) = \{a \in A \mid a^n = 0 \text{ für eine natürliche Zahl n}\}$$

ist gleich dem Durchschnitt aller Primideale von A und heißt Nil-Radikal von A.
(ii) Das Radikal eines Ideals I von A,

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid a^n \in I \text{ für eine natürliche Zahl}\}$$

ist gleich dem Durchschnitt allser Primideale von A, die I enthalten.
Beweis.
Zu (i) Trivialerweise liegt nil(A) in jedem Primideal von A. Sei jetzt $s \in A - \mathrm{nil}(A)$. Dann bilden die Potenzen von s eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $S \subseteq A$, welche das Nullelement nicht enthält. Auf Grund der Proposition existiert ein Primideal p von A mit

$$S \cap p = \varnothing.$$

Das Element s liegt also nicht in p und damit nicht im Durchschnitt aller Primideale.
Zu (ii). Die Behauptung folgt aus (i), weil $\sqrt{I}$ gerade das vollständige Urbild des Nil-Radikals bei der natürlichen Abbildung

$$A \longrightarrow A/I$$

ist.
QED.

Das Jacobson-Radikal und das Lemma von Nakayama

Das Jacobson-Radikal

Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Der Durchschnitt aller maximalen Ideale von A wird mit

$$\mathrm{rad}(A)$$

bezeichnet und heißt Jacobson-Radikal.
Bemerkungen

[1] d.h. mit $a, b \in S$ gilt auch $ab \in S$.

(i) Jedes Element der Gestalt 1+x mit $x \in \mathrm{rad}(A)$ ist eine Einheit von A (weil es in keinem maximalen Ideal liegt).

(ii) Ist I ein Ideal mit der Eigenschaft, daß 1+x für jedes $x \in I$ eine Einheit ist, so gilt

$$I \subseteq \mathrm{rad}(A).$$

Beweis von (ii). Angenommen, die Aussage ist falsch. Dann gibt es ein maximales Ideal m von A und ein Element

$$x \in I - m.$$

Das Element x repräsentiert dann eine Einheit von A/m, d.h. es gibt ein $y \in A$ und $z \in m$ mit

$$1 = xy + z,\ y \in A,\ z \in m.$$

Wegen $-xy \in I$ und unserer Annahme über das Ideal I, ist dann

$$1 - xy = z$$

eine Einheit von A im Widerspruch zu $z \in m$.
QED.

Das Lemma von Nakayama

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein endlich erzeugter A-Modul und $I \subseteq A$ ein Ideal. Wir nehmen an, es gilt

$$IM = M.$$

Dann gilt

$$(1+x)\bullet M = 0 \text{ für ein } x \in I.$$

Im Fall $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$ gilt sogar

$$M = 0.$$

Beweis. Wir wählen endliche viele Erzeuger von M und schreiben

$$M = Am_1 + \ldots + Am_r\ .$$

Den Beweis führen wir durch Induktion nach r. Im Fall r = 0 ist nichts zu beweisen. Sei also r > 0. Wir setzen

$$M' := M/Am_r.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $x \in I$ mit

$$(1+x)\bullet M' = 0,$$

d.h. mit

$$(1+x)\bullet M \subseteq Am_r$$

(im Fall r = 1 können wir x = 0 setzen). Wegen M = IM erhalten wir

$$(1+x)M = I(1+x)M \subseteq Im_r$$

Es gibt also ein $y \in I$ mit $(1+x)m_r = ym_r$. Damit gilt

$$(1+x-y)(1+x)M \subseteq (1+x-y)Am_r = A\bullet 0 = 0.$$

Außerdem ist

$$(1+x-y)(1+x) \equiv 1 \bmod I.$$

Wir haben damit den ersten Teil der Behauptung bewiesen. Der zweite Teil folgt aus dem ersten, weil 1+x im Fall $x \in I \subseteq \mathrm{rad}(A)$ eine Einheit ist.
QED.

Allgemeines Lemma von Nakayama

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul, N, N' $\subseteq$ M Teilmoduln und I $\subseteq$ A ein Ideal. Es gilt

$$M = N + IN'.$$

Wir nehmen außerdem an, daß eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(a) I ist nilpotent.

(b) I $\subseteq$ rad(A) und M ist endlich erzeugt.

Dann gilt

$$M = N.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$M/N = I\bullet(M/N).$$

Im Fall (a) erhalten wir

$$M/N = I^n\bullet(M/N) = 0 \text{ für hinreichend großes } n,$$

also M = N.

Im Fall (b) ist (N'+N)/N endlich erzeugt und

$$I\bullet(N'+N)/N = (IN' + N)/N = M/N \supseteq (N'+N)/N$$

also

$$I\bullet(N'+N)/N = (N'+N)/N.$$

Nach dem Lemma von Nakayama gilt

$$(N'+N)/N = 0,$$

d.h. IN' $\subseteq$ N' $\subseteq$ N und damit

$$M = N + IN' = N.$$

QED.

Filtrationen und Topologien

Definitionen

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, I ein Ideal von A und M ein A-Modul. Eine Filtration von M ist eine absteigende Folge

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \qquad (1)$$

von Teilmoduln von M. Die Filtration heißt I-zulässig, wenn $IM_i \subseteq M_{i+1}$ für alle i gilt. Sie heißt I-adisch, wenn $IM_i = M_{i+1}$ für alle i gilt. Sie heißt im wesentlichen I-adisch, wenn sie I-zulässig ist und es ein i_0 gibt mit $IM_i = M_{i+1}$ für $i \ge i_0$.

Bemerkungen

(i) Jede Filtration (1) definiert eine Topologie auf M, für welche die Mengen

$$x + M_i$$

eine Umgebungsbasis des Punktes $x \in M$ bilden. Die durch die I-adische Filtration definierte Topologie heißt I-adische Topologie von M.

(ii) Eine im wesentlichen I-adische Filtration (1) definiert die I-adische Topolgie von M, denn es gilt

$$I^iM \subseteq M_i \subseteq I^{i-i_0}M.$$

Kriterium für im wesentlichen I-adische Topologien

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, I $\subseteq$ A ein Ideal und M ein A-Modul mit einer Filtration (1). Wir nehmen an, die folgenden Bedingungen sind erfüllt.

1. Die Filtration ist I-zulässig.
2. Die Filtrationsmoduln M_i sind endlich erzeugt über A.

Seien X eine Unbestimmte, A' der graduierte Teilring

$$A' := \sum_{i=0}^{\infty} I^n X^n$$

des Polynomrings A[X] und

$$M' := \sum_{i=0}^{\infty} M_n X^n$$

die direkte Summe der Filtrationsmoduln. Mit der offensichtlichen Multiplikation ist dann M' ein graduierter A-Modul. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(i) Die Filtration der M_i ist im wesentlichen I-adisch.

(ii) M' ist ein endlich erzeugter A'-Modul.

Beweis. A' ist ein graduierter Teilring von A[X] und M' ist eine Untergruppe von $M\otimes_A A[X]$ mit $A'M' \subseteq M'$. Deshalb ist M' ein graduierter A'-Modul.

<u>(ii) ⇒ (i)</u>. Sei

$$M' = A'\xi_1 + \ldots + A'\xi_r$$

mit homogenen Elementen ξ_j der Grade d_j. Für die homogenen Elemente des Grades n erhalten wir

$$M_n X^n = \sum_{i=1}^{r} I^{n-d_i} X^{n-d_i} \bullet \xi_i ,$$

wenn wir die negativen Potenzen von I als Null definieren. Für $n > \max(d_1,\ldots,d_r)$ können wir rechts den Faktor IX ausklammern und erhalten

$$M_n X^n = IX \bullet M_{n-1} X^{n-1} ,$$

also

$$M_n = I \bullet M_{n-1},$$

Die Filtration ist somit im wesentlichen I-adisch.

<u>(i) ⇒ (ii)</u>. Sei $M_n = IM_{n-1}$ für n > d. Dann gilt

$$M_n X^n = (IX)^{n-1} M_d X^d \text{ für alle } n > d.$$

Also wird M' über A' durch den A-Modul $M_d X^d + \ldots + M_1 X + M_0$ erzeugt. Über A wird dieser Modul von endlich vielen Elementen erzeugt. Also ist M' endlich erzeugt über A'.

QED.

Lemma von Artin-Rees

Seien A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1, $I \subseteq A$ ein Ideal, M ein endlich erzeugter A-Modul und $N \subseteq M$ ein Teilmodul.

Dann gibt es eine natürliche Zahl r mit

$$I^n M \cap N = I^{n-r}(I^r M \cap N) \text{ für jedes } n > r.$$

Mit anderen Worten, die I-adische Filtration von M induziert auf N eine im wesentlichen I-adische Filtration.
Beweis. Trivialerweise gilt

$$I^n M \cap N \supseteq I^n N,$$

d.h. die Filtration der Teilmoduln $I^n M \cap N$ ist I-zulässig. Wir setzen

$$A' := \sum_{n=0}^{\infty} I^n X^n$$

und

$$N' := \sum_{n=0}^{\infty} (I^n M \cap N) X^n.$$

Dann ist N' ein graduierter A'-Modul und ein Teilmodul von

$$M' := \sum_{n=0}^{\infty} I^n M X^n = M \bullet A'$$

Als A'-Modul wird M' erzeugt von den Erzeugern von M über A. Es ist also ein endlich erzeugter A'-Modul. Weil A noethersch ist, wird I von endlich vielen Elementen erzeugt, sagen wir

$$I = A\alpha_1 + ... + A\alpha_r.$$

Dann gilt aber

$$A' = A[a_1 X, ..., a_r X],$$

d.h. A' ist als A-Algebra endlich erzeugt und damit ebenfalls noethersch. Folglich ist der Teilmodul N' von M' ebenfalls endlich erzeugt. Nach dem Kriterium für im wesentlichen I-adische Filtrationen bilden die Teilmoduln $I^n M \cap N$ eine im wesentlichen I-adische Filtration.
QED.

Durchschnittssatz von Krull

Seien A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter A-Modul. Wir setzen

$$N = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M.$$

Dann gilt IN = N.
Beweis. Nach dem Lemma von Artin-Rees gibt es eine natürliche Zahl r mit
$N = I^n M \cap N = I^{n-r} \bullet (I^r M \cap N) \subseteq IN \subseteq N$
für n > r.
QED.

Folgerung 1
Seien A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1,

$$I \subseteq \mathrm{rad}(A)$$

ein Ideal und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M = 0.$$

Mit anderen Worten, M ist separiert bezüglich der I-adischen Topologie.
Beweis. Dies folgt aus aud Durchschnittssatz von Krull und dem Lemma von Nakayama.
QED.

Folgerung 2

Seien A ein noetherscher Integritätsbereich und $I \subseteq A$ ein echtes Ideal. Dann gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0.$$

Beweis. Mit $N := \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$ gilt nach dem Krullschen Durchschnittssatz IN = N. Nach dem Lemma von Nakayama gibt ein Element $x \in I$ mit

$$(1+x)N = 0.$$

Weil I ein echtes Ideal ist, ist das Element 1+x von Null verschieden. Weil A ein Integritätsbereich ist, folgt

$$N = 0.$$

QED.

Zariski-Topologie

Definitionen

Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Die Menge aller Primideale von A heißt (affines) Spektrum von A und wird mit

$$\mathrm{Spec}\ A$$

bezeichnet. Für jedes Teilmenge $M \subseteq A$ heißt

$$V(M) := \{p \in \mathrm{Spec}\ A \mid M \subseteq p\}$$

die durch M in Spec A definierte algebraische Menge. Im Fall $M = \{m_1,...,m_n\}$ schreibt man auch

$$V(m_1,...,m_n) := V(\{m_1,...,m_n\}).$$

Die nachfolgend angegebenen Eigenschaften der algebraischen Mengen, zeigen, diese sind gerade die abgeschlossenen Mengen einer Topologie von Spec A. Diese Topologie heißt Zariski-Topologie von Spec A.

Eigenschaften algebraischer Mengen

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und

$$X := \mathrm{Spec}\ A.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $V(1) = \emptyset$.

(ii) $V(0) = \mathrm{Spec}\ A$

(iii) $V(M\bullet A) = V(M)$ für jede Teilmenge $M \subseteq A$. Dabei bezeichne $M\bullet A$ das von M erzeugte Ideal von A.

(iv) $V(M') \subseteq V(M'')$ für Teilmengen M', M" von A mit $M' \supseteq M''$.

(v) $V(I') \cup V(I'') = V(I'.I'') = V(I' \cap I'')$ für Ideale I', I" von A.

(vi) $\bigcap_{\alpha} V(I_\alpha) = V(\sum I_\alpha)$ für jede Familie von Idealen I_α von A.

(vii) $V(I) = V(\sqrt{I})$ für jedes Ideal I von A. Dabei bezeichne $\sqrt{I}$ das Radikal von I,

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid a^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

Man beachte, $\sqrt{I}$ ist wieder ein Ideal von A.

(viii) $I \subseteq \sqrt{J}$ für Ideale I, J von A mit $V(I) \supseteq V(J)$. Insbesondere gilt

$$V(I) = V(J) \Leftrightarrow \sqrt{I} = \sqrt{J}$$

für Ideale I, J von A.

(ix) $\sqrt{I} = \bigcap_{p\in V(I)} p$ für jedes Ideal I von A.

Beweis. Zu (i) und (ii). 1 liegt in keinem Primideal und 0 in jedem.
Zu (iii). Sind $m_1,...,m_n$ Elemente aus einem Primideal von A, so gilt dasselbe für jede Linearkombination der $m_1,...,m_n$ mit Koeffizienten aus A.

Zu (iv). Ist p ein Primideal mit $M' \subseteq p$, so gilt auch $M'' \subseteq p$.
Zu (v). Wegen

$$I'\bullet I'' \subseteq I'\cap I'' \subseteq I' \text{ und } I'\bullet I'' \subseteq I'\cap I'' \subseteq I''$$

gilt nach (iv)

$$V(I'\bullet I'') \supseteq V(I'\cap I'') \supseteq V(I') \text{ und } V(I'\bullet I'') \supseteq V(I'\cap I'') \supseteq V(I''),$$

also

$$V(I'\bullet I'') \supseteq V(I'\cap I'') \supseteq V(I')\cup V(I'').$$

Sei jetzt $p \in V(I'\bullet I'')$. Es reicht zu zeigen, $p \in V(I')\cup V(I'')$. Angenommen, $p \notin V(I')$. Dann gibt es ein $a \in I' - p$. Nach Voraussetzung gilt

$$p \supseteq I'\bullet I'' \supseteq a\bullet I''.$$

Weil p ein Primideal ist, welches das Element a nicht enthält, folgt $I'' \subseteq p$, also $p \in V(I'')$.
Zu (vi). Jedes Pimideal p von A gilt

$$\begin{aligned} p \in \bigcap V(I_\alpha) &\Leftrightarrow I_\alpha \subseteq p \text{ für jedes } \alpha \\ &\Leftrightarrow \sum_\alpha I_\alpha \subseteq p \text{ (weil p ein Ideal ist)} \\ &\Leftrightarrow p \in V(\sum_\alpha I_\alpha). \end{aligned}$$

Zu (vii). Mit $I \subseteq \sqrt{I}$ gilt $V(I) \supseteq V(\sqrt{I})$ (nach (iv)). Seien $p \in V(I)$ und $a \in \sqrt{I}$. Dann gibt es eine natürliche Zahl n mit $a^n \in I \subseteq p$. Weil p ein Primideal ist, folgt $a \in p$. Wir haben gezeigt, mit $p \in V(I)$ gilt $\sqrt{I} \subseteq p$, also $p \in V(\sqrt{I})$. Zusammen erhalten wir

$$V(I) = V(\sqrt{I}).$$

Zu (viii). Für $a \in I$ und $p \in V(J)$ gilt $p \in V(I)$, also $a \in I \in p$. Es gilt also

$$I \subseteq \bigcap_{p\in V(J)} p.$$

Es reicht also zu zeigen, daß (ix) gilt.
Zu (ix). Wir betrachten die natürliche Abbildung

$$\rho: A \longrightarrow \overline{A} := A/I,\ a \mapsto a + I.$$

Es reicht zu zeigen, in $\overline{A}$ gilt

$$\sqrt{0} = \bigcap \operatorname{Spec} \overline{A},$$

denn durch Übergang zu den vollständigen Urbildern bei ρ ergibt sich daraus die Behauptung. Mit anderen Worten, wir können annehmen,

$$I = 0.$$

Für jedes $a \in \sqrt{0}$ gibt es ein n mit $a^n = 0$. Damit liegt a^n in jedem Primideal, also auch a. Es gilt also

$$\sqrt{0} \subseteq \bigcap \text{Spec } A,$$

Sei jetzt $a \in \bigcap$ Spec A, d.h. a liege in jedem Primideal von A. Dann besitzt A_a keine Primideale, ist also der Nullring, d.h. es gilt $\frac{1}{a} = \frac{0}{a}$ in A_a. Das bedeutet, a•1 - 0•a wird von einer Potenz von a annulliert, d.h. a ist nilpotent in A, d.h. $a \in \sqrt{0}$. Zusammen ergibt sich

$$\sqrt{0} = \bigcap \text{Spec } \overline{A},$$

d.h. es gilt die Behauptung.

QED.

Irreduzible algebraische Mengen
Ein topologischer Raum X heißt reduzibel, wenn es zwei echte abgeschlossene Teilmengen X', X" von X gilt mit

$$X = X' \cup X''.$$

Andernfalls heißt X irreduzibel.
Beispiel
Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) V(I) ist irreduzibel (bezüglich der Zariski-Topologie).
(ii) $\sqrt{I}$ ist ein Primideal.

Beweis. <u>(ii) ⇒ (i)</u>. Sei $V(I) = V(I') \cup V(I'')$ ($= V(I'\cdot I'')$). Dann gilt

$$I'\cdot I'' \subseteq \sqrt{I}.$$

Weil $\sqrt{I}$ prim ist, folgt, $I' \subseteq \sqrt{I}$ oder $I'' \subseteq \sqrt{I}$, also $V(I') \supseteq V(I)$ oder $V(I'') \supseteq V(I)$. Da die umgekehrten Inklusionen trivialerweise bestehen, folgt

$$V(I) = V(I') \text{ oder } V(I) = V(I''),$$

d.h. V(I') und V(I") können nicht beides echte Teilmengen sein: V(I) ist irreduzibel.
<u>(i) ⇒ (ii)</u>. Angenommen, $\sqrt{I}$ ist nicht prim. Es gibt dann Elemente $f,g \in A$ mit

$$f\cdot g \in \sqrt{I} \text{ und } f \notin \sqrt{I} \text{ und } g \notin \sqrt{I}.$$

Wir setzen

$$I' := \sqrt{I} + fA \text{ und } I'' := \sqrt{I} + gA.$$

Dann sind V(I') und V(I") echte Teilmengen von V(I), denn zum Beispiel aus V(I) = V(I') würde folgen, $I' \subseteq \sqrt{I}$, also $f \in \sqrt{I}$ im Widerspruch zur Wahl von f. Es reicht zu zeigen,

$$V(I) = V(I') \cup V(I''),$$

denn dann ist V(I) reduzibel im Widerspruch zur Annahme. Die Inklusion "$\supseteq$" besteht nach Definition von I' und I". Sei $p \in V(I)$. Wegen $f\cdot g \subseteq \sqrt{I} \subseteq p$ gilt dann $f \in p$ oder $g \in p$, also $I' \subseteq p$ oder $I'' \subseteq p$, also $p \in V(I')$ oder $p \in V(I'')$, also

$$p \in V(I') \cup V(I'').$$

Zerlegung in irreduzible abgeschlossene Teilmengen im noetherschen Fall

Sei A ein noetherscher kommutativer Ring mit 1. Dann ist jede abgeschlossene Teilmengen X von Spec A Vereinigung von endlich vielen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen,

$$X = X_1 \cup ... \cup X_n \text{ mit } X_i \text{ irreduzibel.} \quad (1)$$

Insbesondere ist die Anzahl der minimalen Primideale von A endlich.

Beweis. Angenommen, es gibt ein $X = X_1$, welches sich nicht in dieser Gestalt schreiben läßt. Dann muß X reduzibel sein, sagen wir

$$X = X' \cup X''$$

mit echten abgeschlossenen Teilmengen X' und X" von X. Diese Teilmengen können nicht beide von der Gestalt (1) sein, denn dann wäre X von dieser Gestalt. Es gibt also eine echte abgeschlossene Teilmenge X_2 von X_1, die sich ebenfalls nicht in der Gestalt (1) schreiben läßt. Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine unendliche echt absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen

$$X_1 \supset X_2 \supset ...$$

von Spec A. Wir gehen zu den Radikalen der die X_i definierenden Ideale über und erhalten eine unendliche echt aufsteigende Kette von Idealen

$$I_1 \subset I_2 \subset ...$$

von A. Das ist aber unmöglich, weil A noethersch ist.

Wir haben damit insbesonder gezeigt, daß sich Spec A in der Gestalt

$$\text{Spec } A = V(p_1) \cup ... \cup V(p_n) \quad (2)$$

schreiben läßt mit endlich vielen Primidealen p_i. Jedes minimale Primideal p von A liegt in Spec A , also in einem der $V(p_1)$, ..., $V(p_n)$, sagen wir

$$p \in V(p_i).$$

Dann gilt $p_i \subseteq p$, also - weil p minimal ist - $p_i = p$. Jedes minimale p ist also gleich einem der p_i. Insbesondere ist die Anzahl der p endlich, da sie alle unter den p_i auf der rechten Seite von (2) vorkommen.

QED.

Bemerkungen

(i) Jedes Primideal eines kommativen Rings mit 1 enthält ein minimales Primideal: denn für jede durch Inklusion geordnete lineare Kette von Primidealen, ist der Durchschnitt ein Primideal. Nach dem Zornschen Lemma enthält deshalb die Menge der Primideale, die ganz in einem gegeben Primideal liegen, ein minimales Element.

(ii) Insbesondere kann man in (2) jedes p_i durch ein minimale Primideal ersetzen, d.h. (2) gilt mit

$$\{p_1, ..., p_n\} = \text{Menge der minimalen Primideale von A.}$$

(iii) Nach dem <u>Satz von Noether</u> zur <u>Primärzerlegung</u> sich jedes Ideal I eines noetherschen Rings A als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen schreiben, sagen wir,

$$I = q_1 \cap ... \cap q_n \,. \quad (3)$$

Ein Ideal $q = q_i$ von A heißt <u>Primärideal</u>, wenn für je zwei Elemente $f,g \in A$ mit

$$f \cdot g \in q$$

und der Eigenschaft, daß keine Potenz von f in q liegt, stets gilt

$$g \in q.$$

Hört in (3) das Gleichheitszeichen auf zu gelten, sobald man eines der q_i wegläßt, so heißt (3) unverkürzbare Primärzerlegung, und die q_i heißen Primärkomponenten von I.

Ein Beispiel ist die Zerlegung einer natürlichen Zahl n in ein Produkt von paarweise teilerfremden Primzahlpotenzen, sagen wir,

$$n = p_1^{n_1} \bullet \ldots \bullet p_r^{n_r}, \; p_i \text{ paarweise verschiedene Primzahlen.}$$

Mit $A = \mathbb{Z}$, $I = nA$ und $q_i = p_i^{n_i}A$ gilt dann (3), und die q_i sind Primärideale im Ring der ganzen Zahlen.

(iv) Aus (3) ergibt sich

$$V(I) = V(q_1) \cup \ldots \cup V(q_n) = V(p_1) \cup \ldots \cup V(p_n) \qquad (4)$$

mit

$$p_i := \sqrt{q_i}.$$

Aus der Definition des Primärideals folgt, daß die p_i Primideale sind, d.h. (4) ist die Zerlegung von V(I) in irreduzible Komponenten, Man kann deshalb (3) als eine arithmetische Verfeinerung der Zerlegung in irreduzible Komponenten ansehen.

(v) Der Satz von Noether macht außerdem eine Eindeutigkeitsaussage: für jedes i, für welches p_i ein minimales Primoberideal von I ist, ist q_i durch I eindeutig bestimmt. Genauer, es ist

$$q_i = IA_{p_i} \cap A.$$

Die übrigen q_i sind im allgemeinen nicht eindeutig festgelegt. Sie heißen eingebettete (Primär-)Komponenten von I.
Auf diese Weise ist für jede irreduzible Komponente $V(q_i)$ von V(I) in natürlicher Weise eine Schema-Struktur Spec A/q_i definiert (falls p_i minimale Primoberideal von I ist). Sie Zerlegung (4) von V(I) in irreduzible Komponenten verfeinert sich zu einer Zerlegung des Schemas Spec A/I in abgeschlossene Teilschemata

$$\text{Spec } A/q_i.$$

Trager und Annullatoren

Definitionen

Seien A ein Ring und M ein A-Modul. Dann heißt die Menge

$$\text{Supp}(M) = \text{Supp}_A(M) := \{p \in \text{Spec } A \mid M_p \neq 0\}$$

Träger von M über A.
Dabei bezeichne

$$M_p \cong M \otimes_A A_p = \{\frac{m}{s} \mid m \in M, s \in A\text{-}p\}$$

den Quotientenmodul von M bezüglich des Primideal p.
Der Annullator von M in A ist definiert als das folgende Ideal von A.

$$\text{Ann}(M) = \text{Ann}_A(M) := \{ a \in A \mid aM = 0 \}.$$

Beispiel

Seien A ein Ring und $I \subseteq A$ ein Ideal von A. Dann gilt

$$I = \mathrm{Ann}_A(A/I).$$

$$V(I) = \mathrm{Supp}_A(A/I).$$

Man beachte, für jedes Primideal p von A gilt

$$(A/I)_p \cong A_p/IA_p.$$

Eigenschaften

Satz 1

Seien A ein Ring und M ein A-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $M \neq 0$.

(ii) $\mathrm{Supp}_A(M) \neq \varnothing$.

(iii) $\mathrm{Ann}_A(M) \neq A$.

Beweis. Die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iii) und die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) bestehen trivialerweise. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ergibt sich aus Corollar 2 von Theorem 1 in Kapitel II, §3.3 von N. Bourbaki, Algèbre commutative. Dort wird gezeigt, daß die natürliche Abbildung

$$M \longrightarrow \prod_{p \in \mathrm{Specm}\, A} M_p$$

injektiv ist. Ist M vom Nullmodul verschieden, so gibt es also mindestens ein maximales Ideal p von A mit $M_p \neq 0$.

QED.

Satz 2

Seien A ein Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt

$$\mathrm{Supp}_A(M) = V(\mathrm{Ann}_A(M)).$$

Beweis. siehe Bourbaki, Algèbre commutative, Kapitel II, §4.4 Propositin 17.

QED.

Satz 3

Seien A ein Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und $h: A \longrightarrow B$ ein Ring-Homomorphismus. Weiter bezeichne

$$h^{\#}: \mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A,\ p \mapsto h^{-1}(p),$$

die induzierte Abbildung auf den Spektren.

Dann gilt

$$\mathrm{Supp}_B(M \otimes_A B) = (h^{\#})^{-1}(\mathrm{Supp}_A(M)).$$

Beweis. siehe Bourbaki, Algèbre commutative, Kapitel II, §4.4, Proposition 19.

QED.

Folgerung

Seien A ein Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und $h: A \longrightarrow B$ ein Ring-Homomorphismus. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $M\otimes_A B = 0$.

(ii) $\mathrm{Ann}_A(M)B = B$.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Sei $M\otimes B = 0$. Nach Satz 1 gilt dann $\mathrm{Supp}(M\otimes B) = \emptyset$, also

$$\begin{aligned}\emptyset &= \mathrm{Supp}_A(M) \quad \text{(nach Satz 3)}\\ &= V(\mathrm{Ann}_A(M)).\end{aligned}$$

Da jedes echte Ideal ganz in einem maximalen Ideal lieft, kann Ann(M) kein echtes Ideal sind. Es folgt Ann(M) = A. Dann gilt aber auch (ii).

(ii) ⇒ (i). Nach Voraussetzung (ii) liegt das 1-Element in Ann(M)B, d.h. es gilt

$$1 = a_1b_1 + ... + a_rb_r \text{ mit } a_i\in\mathrm{Ann}(M) \text{ und } b_i\in B \text{ für alle i.}$$

Für $m \in M$ und $b \in B$ erhalten wir dann in $M\otimes B$:

$$\begin{aligned} m\otimes b &= m\otimes(\sum_{i=1}^{r} a_ib_i)b\\ &= \sum_{i=1}^{r} m\otimes a_ib_ib\\ &= \sum_{i=1}^{r} ma_i\otimes b_ib \quad \text{(weil das Tensorprodukt über A genommen wurde)}\\ &= \sum_{i=1}^{r} 0\otimes b_ib \quad \text{(weil } a_i \text{ im Annullator von M liegt)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Da die Elemente der Gestalt $m\otimes b$ den Modul $M\otimes B$ erzeugen, folgt $M\otimes B = 0$.
QED.

Assoziierte Primideale und Primärzerlegung

Definition

Seien A eine noetherscher Ring und M ein A-Modul. Ein Primideal $p \in \mathrm{Spec}\, A$ ist ein zu M assoziiertes Primideal, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind.[2]

(i) Es gibt ein $m \in M$ mit $\mathrm{Ann}(m) = p$.

(ii) M enthält einen zu A/p isomorphen Teilmodul.

Die Menge der zu M assoziierten Primideale von A mit mit

$$\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}_A(M)$$

bezeichnet.

[2] Ist m ein Element wie in der ersten Bedingung, so hat die Abbildung

$A \longrightarrow M, a \mapsto am$,

den Kern Ann(m) = p, d.h. das Bild ist ein zu A/p isomorpher Teilmodul. Ist umgekehrt $N \subseteq M$ ein zu A/p isomorpher Teilmodul und

$$f: A/p \longrightarrow N$$

ein Isomorphismus, so hat das Bild $m \in M$ des 1-Elements von A/p bei f den Annullator p.

Maximale Annullatoren von Modul-Elementen
Seien A ein noetherscher Ring und M ein A-Modul. Dann liegt jedes Ideal der Menge

$$\{\mathrm{Ann}(m) \mid m \in M - \{0\}\} \qquad (1)$$

in einem maximalen Element dieser Menge. Jedes dieser maximalen Elemente liegt in

$$\mathrm{Ass}(M)$$

Beweis. Die Aussage, daß jedes Ass(m) in einem Ass(m) liegt, das maximal in (1) ist, gilt weil A noethersch ist.
Sei jetzt

$$p := \mathrm{Ass}(m)$$

maximal in der Menge (1). Wir haben zu zeigen, daß p ein Primideal ist. Seien $a,b\in A$ zwei Elemente mit

$$ab \in p \text{ und } b \notin p.$$

Dann gilt

$$bm \neq 0 \text{ und } abm = 0.$$

Damit ist Ann(bm) ein Element von (1), und trivialerweise gilt

$$\mathrm{Ann}(bm) \supseteq \mathrm{Ann}(m).$$

Weil der rechte Annullator maximal in (1) sein soll, folgt

$$a \in \mathrm{Ann}(bm) = \mathrm{Ann}(m) = p.$$

Wir haben gezeigt, p ist ein Primideal.
QED.

Moduln ohne assoziierte Primideale
Seien A ein noetherscher Ring und M ein A-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) $\mathrm{Ass}(M) = \emptyset$.
(ii) $M = 0$.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Angenommen $M \neq 0$. Dann gibt ein Element $m \in M - \{0\}$, und Ass(m) ist ein Element der Menge (1), liegt also in einem maximalen Element dieser Menge. Dieses ein assoziiertes Primideal von M. Dies steht im Widerspruch zur Annahme (i).

(ii) ⇒ (i). Angenommen Ass(M) ist nicht leer. Sei p ein solches Element. Dann gibt es ein Element $m \in M$ mit

$$\mathrm{Ann}(m) = p \neq A.$$

Das Element $m \in M$ kann nicht Null sein. Dies steht im Widerspruch zur Annahme $M = 0$.
QED.

Assoziierte Primideale und Nullteiler
Seien A ein noetherscher Ring und M ein A-Modul. Dann ist

$$\bigcup \mathrm{Ass}(M) \qquad (1)$$

gerade die Menge der Nullteiler für M (d.h. die Menge der Elemente von A, die ein Element von $M - \{0\}$ annullieren.

Beweis. Sei $a \in A$ ein Element von (1). Dann liegt a in einem Primideal der Gestalt

$$p = \mathrm{Ann}(m) \text{ mit } m \in M - \{0\}.$$

Insbesondere gilt $am = 0$, d.h. a annulliert ein von 0 verschiedenes Element von M.

Sei umgekehrt $a \in A$ ein Element, welches ein $m \in M - \{0\}$ anulliert, d.h.

$$a \in \mathrm{Ann}(m).$$

Nun liegt Ann(m) in einem maximalen Annullator eines Element von M. Ein solcher Annullator p ist ein assoziiertes Primideal von M.

$$a \in \mathrm{Ann}(m) \subseteq p \in \mathrm{Ass}(M).$$

Damit liegt a in der Menge (1).
QED.

Assoziierte Primideale und Quotienten

Seien A ein noetherscher Ring, M ein A-Modul und $S \subseteq A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Dann gilt

$$\mathrm{Ass}_A(S^{-1}M) = f(\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)) = \mathrm{Ass}_A(M) \cap \{p \in \mathrm{Spec}\, A \mid p \cap S = \varnothing\} \quad (1)$$

Dabei sei f: Spec $S^{-1}A \longrightarrow A$ induziert durch die natürliche Abbildung $A \longrightarrow S^{-1}A$.

Beweis. Sei p aus der linken Menge von (1). Dann gibt es Elemente $m \in M$ und $s \in S$ mit

$$\begin{aligned} p &= \{a \in A \mid a \cdot \frac{m}{s} = 0\} \\ &= \{a \in A \mid \frac{as}{s} \cdot \frac{m}{s} = 0\} \\ &= f(q) \end{aligned}$$

mit

$$q = \{b \in S^{-1}A \mid b \cdot \frac{m}{s}\} = \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(\frac{m}{s}). \quad (2)$$

Ein Element von q ist ein Element der Gestalt $\frac{c}{s'}$ mit $c \in A$, $s' \in S$ und $\frac{c}{s'} \cdot \frac{m}{s} = 0$. Letzteres bedeutet, daß $cm \in A$ von einem Element $s'' \in S$ annulliert wird. Weil s'' in $S^{-1}A$ eine Einheit ist, folgt $\frac{cs}{s} \in p$. Damit ist

$$q = p \cdot S^{-1}A$$

Insbesondere ist q in Primideal, d.h. p = f(q) liegt in der mittleren Menge von (1). Wir haben gezeigt, die linke Menge von (1) liegt in der mittleren.
Sei jetzt p ein Element der mittleren Menge. Dann gilt

$$p = f(q)$$

mit einem Primideal q von $S^{-1}A$ der Gestalt (2). Läge p nicht in der rechten Menge von (1), so gäbe es ein $s \in S$ mit $s \in p$. Dann würde aber $\frac{ss}{s} \in q$ gelten. Weil $\frac{ss}{s}$ eine Einheit in $S^{-1}A$ ist, wäre dann $q = S^{-1}A$. Dieser Widerspruch zeigt, daß die mittlere Menge von (1) in der rechten liegt.

Sei jetzt p eine Element der linken Menge von (1). Dann gibt es ein $m \in M$ mit

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{Ann}(m) \\ &= \{a \in A \mid am = 0\} \\ &= \{a \in A \mid a \cdot \frac{m}{s} = 0 \text{ in } S^{-1}M\} \end{aligned}$$

Man beachte, aus $a \cdot \frac{m}{s} = 0$ in $S^{-1}M$ folgt $s'am = 0$ in M für ein Element $s' \in S$, also

$$s'a \in \mathrm{Ann}(m) = p.$$

Wegen $s' \in S$ und $p \cap S = \varnothing$ folgt $s' \notin p$, also $a \in p$. Damit ist gezeigt, die rechte Menge von (1) liegt in der linken.
QED.

Assozierte Primideale und der Träger eines Moduls
Seien A ein noetherscher Ring und M ein A-Modul. Dann gilt:

(i) $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$.

(ii) Die minimalen Elemente von Supp(M) liegen in Ass(M).

Insbesondere haben Ass(M) und Supp(M) dieselben minimalen Elemente.

Beweis. Zu (i). Sei $p \in \mathrm{Ass}(M)$. Dann existiert eine exakte Sequenz von A-Moduln

$$0 \longrightarrow A/p \longrightarrow M.$$

Weil A_p flach ist über A, erhalten wir durch Anwenden des Funktors $\otimes_A A_p$ eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A_p/pA_p \longrightarrow M_p\,,$$

d.h. es gilt $p \in \mathrm{Supp}(M)$.

Zu (ii). Sei p ein minimales Element von Supp(M). Auf Grund der Identitäten, welche das Verhalten von Ass(M) beim Übergang zu Quotientenringen $S^{-1}A$ beschreiben (mit $S = A\text{-}p$) gilt

$$f(\mathrm{Ass}_{A_p}(M_p)) = \mathrm{Ass}_A(M) \cap \{q \in \mathrm{Spec}\,A \mid q \subseteq p\},$$

wenn f die Abbildung

$$f\colon \mathrm{Spes}\,A_p \longrightarrow \mathrm{Spec}\,A,\ x \mapsto x \cap A,$$

bezeichnet, welche durch die natürliche Abbildung $A \longrightarrow A_p$ induziert wird. Die Abbildung

$$\{q \in \mathrm{Spec}\,A \mid q \subseteq p\} \longrightarrow \mathrm{Spec}\,A_p,\ y \mapsto yA_p,$$

ist ein Schnitt von f. Wir sehen so, daß die folgende Äquivalenz besteht.

$$p \in \mathrm{Ass}(M) \Leftrightarrow pA_p \in \mathrm{Ass}_{A_p}(M_p).$$

Es reicht also, zu zeigen, es gilt

$$pA_p \in \mathrm{Ass}_{A_p}(M_p).$$

Wegen $pA_p \in \mathrm{Supp}_{A_p}(M_p) = f^{-1}(\mathrm{Supp}_A(M))$ ist pA_p ein minimales Element des Trägers von M_p über A_p.[3] Es reicht also, die Behauptung für A_p und M_p anstelle von A und M zu beweisen, d.h. wir können annehmen p ist nicht nur minimal, sondern auch maximal in Supp(M), d.h.

$$\mathrm{Supp}(M) = \{p\}.$$

Wegen $M \neq \emptyset$ ist Ass(M) nicht leer, und nach (i) liegt Ass(M) ganz in Supp(M). Damit gilt

$$\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Supp}(M) = \{p\}.$$

Insbesondere liegt p in Ass(M), wie behauptet.
QED.

---

[3] Durch Anwenden des Schnitts s auf ein echt kleineres Primideal im Trager von M_p erhielten wir ein echt kleineres Primideal im Träger von M.

Die minimalen Primideale von Ass(A/I) und V(I)

Seien A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1 und $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann sind die Mengen der minimalen Elemente von

$$\mathrm{Ass}(A/I) \text{ und } V(I)\ (= \mathrm{Supp}(A/I))$$

dieselben, d.h. die minimalen Elemente von Ass(A/I) sind gerade die minimalen Primoberideale von I.

Beweis. Für jedes Primoberideal p von I hat man eine Surjektion

$$A/I \twoheadrightarrow A/p$$

Durch Lokalisieren nach p sieht man, es gilt $p \in \mathrm{Supp}(A/I)$. Ist $p \in \mathrm{Spec}(A)$ kein Primoberideal von I, so enthält IA_p eine Einheit, ist also gleich A_p, d.h.

$(A/I)_p = A_p/IA_p$

ist der Nullmodul. Wir haben gezeigt

$$\mathrm{Supp}(A/I) = V(I)$$

Die Behauptung folgt damit aus der vorhergehenden Aussage.

QED.

Teilmodulketten mit Faktoren der Gestalt A/p

Sei A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1 und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gibt es endliche aufsteigende Kette von Teilmoduln, sagen wir

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M$$

sodaß für i = 1,...,r gilt

$$M_i/M_{i-1} \cong A/p_i \text{ mit } p_i \in \mathrm{Spec}(A) \qquad (1)$$

Beweis. Weil A noethersch ist und M endlich erzeugt ist über A, ist M ein noetherscher Modul.

Wegen $M \neq 0$ ist Ass(M) nicht leer, d.h. es gibt ein $p_1 \in \mathrm{Ass}(M)$ und damit einen Teilmodul $M_1 \subseteq M$ mit $M \cong A/p_1$. Falls M_1 ein echter Teilmodul von M ist, wiederholen wir diese Argumentation mit M/M_1 anstelle von M. Wir erhalten so eine echt aufsteigende Folge von Teilmoduln M_i von M, für welche (1) gilt.

Weil M noethersch ist, muß diese Folge endlich sein, d.h. das Verfahren muß abbrechen. Das bedeutet aber, es gibt einen Index r mit $M_r = M$.

QED.

Verhalten von Ass(M) bei exakten Sequenzen

Seien A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1 und

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

von A-Moduln. Dann gilt

$$\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'').$$

Beweis. Sei $p \in \mathrm{Ass}(M)$. Wir wählen einen Teilmodul

$$N \subseteq M \text{ mit } N \cong A/p.$$

Jedes von Null verschiedene Element $n \in N - \{0\}$ hat dann den Annullator p,

$$\mathrm{Ann}(n) = p.[4]$$

[4] Weil p ein Primideal ist, hat jedes Element von A/p - {0} diese Eigenschaft.

Falls $N \cap M' \neq 0$ ist, gibt es ein solches Element n in diesem Durchschnitt, d.h. es gilt

$$p \in \mathrm{Ass}(M').$$

Falls $N \cap M' = 0$ ist, wird N bei der Abbildung $M \longrightarrow M''$ isomorph auf einen Teilmodul von M" abgebildet, d.h. M" enthält einen zu N isomorphen Teilmodul. Es gilt also

$$p \in \mathrm{Ass}(M'').$$

QED.

Die Endlichkeit der Menge Ass(M)

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann ist die Menge Ass(M) endlich.

Beweis. Auf Grund der Voraussetzungen gibt es eine echt aufsteigende Folge

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M$$

sodaß für i = 1,...,r gilt

$$M_i/M_{i-1} = A/p_i \text{ mit } p_i \in \mathrm{Spec}(A).$$

Im Fall r = 0 gilt M = 0 und Ass(M) ist leer, also endlich. Im Fall r = 1 gilt

$$\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(A/p_1) = \{p_r\}.$$

Also ist auch in diesem Fall Ass(M) endlich. Sei jetzt r > 1. Dann gilt

$$\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(M_1) \cup \mathrm{Ass}(M/M_1).$$

Die Menge $\mathrm{Ass}(M_1)$ besteht, wie eben gesehen, aus einem Element, ist also endlich. Die Menge $\mathrm{Ass}(M/M_1)$ besteht nach Induktionsvoraussetzung bezüglich r aus nur endlich vielen Elementen. Also ist auch Ass(M) endlich.

QED.

Flachheit

1. Definitionen

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Für jede Sequenz von A-Moduln

$$S: \ldots \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow \ldots$$

bezeichnen wir mit $S\otimes_A M$ die Sequenz

$$\ldots \longrightarrow N'\otimes_A M \longrightarrow N\otimes_A M \longrightarrow N''\otimes_A M \longrightarrow \ldots,$$

die man aus S durch Tensorieren mit M über A erhält. Der A-Modul M heißt <u>flach</u> über A, wenn für jede exakte Sequenz S von A-Moduln die Sequenz $S\otimes_A M$ ebenfalls exakt ist. Der A-Modul M heißt <u>treuflach</u>, wenn jede Sequenz S von A-Moduln die Sequenz S genau dann exakt ist, wenn $S\otimes_A M$ es ist.

Beispiele

1. Der A-Modul A ist treuflach, weil $S\otimes_A M \cong S$ gilt für jede Sequenz S von A-Moduln.
2. Freie A-Moduln $F \neq 0$ sind treuflach, weil das Tensorprodukt mit direkten Summen kommutiert und eine direkte Summe von Sequenzen genau dann exakt ist, wenn jeder direkte Summand es ist.
3. Projektive A-Moduln P sind flach, denn es gibt stets einen A-Modul P' mit

$$F := F\oplus P'$$

frei. Für Sequenzen von S von A-Moduln gilt damit

$$\begin{aligned} S \text{ exakt} &\Leftrightarrow S\otimes_A F = S\otimes_A P \oplus S\otimes_A P' \text{ exakt} \\ &\Leftrightarrow S\otimes_A P \text{ und } S\otimes_A P' \text{ exakt} \\ &\Rightarrow S\otimes_A P \end{aligned}$$

2. Kriterium für flache Moduln

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) M ist A-flach.

(ii) Für jede exakte Sequenz S vond A-Moduln der Gestalt

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N$$

ist $S\otimes_A M$ exakt.

(iii) Für jedes endlich erzeugte Ideal I von A ist die natürliche Abbildung

$$I\otimes_A M \longrightarrow M,\ a\otimes m \mapsto am,$$

injektiv. Mit anderen Worten, diese Abbildung induziert einen Isomorphismus von A-Moduln $I\otimes_A M \xrightarrow{\cong} IM$.

(iv) $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) = 0$ für jedes endlich erzeugte Ideal I von A.

(v) $\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$ für jeden endlich erzeugten A-Modul N.

(vi) $\mathrm{Tor}_n^A(M, N) = 0$ für jeden A-Modul N und jede natürliche Zahl n.

(vii) Für beliebige Elemente $a_1,\dots,a_r \in A$ und $x_1,\dots,x_r \in M$ mit

$$a_1x_1 + \dots + a_rx_r = 0$$

gibt es Elemente $a_{ij} \in A$ und $y_j \in M$ ($i = 1,\dots r$, $j = 1,\dots,s$) mit

$$x_i = a_{i1}y_1 + \dots a_{is}y_s \quad \text{für } i = 1,\dots,r$$

und

$$a_1a_{1j} + \dots + a_ra_{rj} = 0 \text{ für } j = 1,\dots,s$$

Beweis. <u>(i) ⇒ (ii)</u>. trivial.

<u>(ii) ⇒ (vi)</u>. Ergibt sich aus der Berechnung der Tor-Funktoren mit Hilfe freier Auflösungen.

<u>(vi) ⇒ (v)</u>. trivial.

<u>(v) ⇒ (iv)</u>. trivial.

<u>(iv) ⇒ (iii)</u>. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

erhält man durch Tensorieren mit M über A eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) \longrightarrow I\otimes_A M \longrightarrow A\otimes_A M$$

Nach Voraussetzung ist der Tor-Modul links gleich Null. Die Abbildung rechts ist deshalb injektiv.

<u>(iii) ⇒ (ii)</u>.

<u>1. Schritt</u>: (iii) gilt für nicht notwendig endlich erzeugte Ideale.
Seien I ein beliebiges Ideal von A und $\{I_\alpha\}$ das direkte System der endlich erzeugten Ideale von A, welche ganz in I liegen. Dann gilt

$$I = \varinjlim_{\alpha} I_\alpha,$$

und nach Voraussetzung sind die Sequenzen

$$0 \longrightarrow I_\alpha \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_A M$$

exakt. Da das Tensorprodukt mit direkten Limites kommutiert, erhalten wir durch Übergang zum direkten Limes die Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow I \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_A M,$$

d.h. Aussage von (iii) gilt auch für nicht-notwendig endlich erzeugte Ideale I von A.
<u>2. Schritt</u>. Reduktion auf den Fall N/N' endlich erzeugt.
Wir nehmen an, die Behauptung ist richtig, falls N/N' endlich erzeugt ist.
Sei $\{N_\alpha\}$ das direkte System der endlich erzeugten Teilmoduln von N. Dann ist

$$(N_\alpha + N')/N'$$

für jedes α endlich erzeugt, d.h. aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N_\alpha + N'$$

erhält man durch Tensorieren mit M über A eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N' \otimes_A M \longrightarrow (N_\alpha + N') \otimes_A M$$

Weil das Tensorprodukt mit direkten Limites kommutiert, erhält man durch Übergang zum direkten Limes die Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow N' \otimes_A M \longrightarrow N' \otimes_A M$$

<u>3. Schritt</u>. Der Fall N/N' endlich erzeugt.
Nach Voraussetzung gibt es Elemente $n_1,\dots,n_r \in N$ mit

$$N = N' + n_1 A + \dots + n_r A.$$

Wir setzen

$$N_i := N' + n_1 A + \dots + n_i A$$

und betrachten die A-linearen Abbildungen

$$N \otimes_A M = N_0 \otimes_A M \longrightarrow N_1 \otimes_A M \longrightarrow \dots \longrightarrow N_r \otimes_A M = N \otimes_A M$$

Es reicht zu zeigen, jede dieser Abbildungen ist injektiv. Das reduziert den Beweis auf den Fall r = 1. Sei also

$$N = N' + aA$$

für ein $a \in A$. Dann wird N/N' von nur einem Element erzeugt, d.h.

$$N/N' \cong A/I$$

mit einem Ideal I von A. Insbesondere besteht eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow A/I \longrightarrow 0.$$

Wir tensorieren mit M über A und erhalten eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) \longrightarrow N' \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) = 0.$$

Zur Berechnung des Tor-Moduls betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0.$$

Wir tensorieren mit M über A und erhalten eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) \longrightarrow I\otimes_A M \longrightarrow A\otimes_A M.$$

Die A-lineare Abbildung rechts ist nach dem 1. Schritt injektiv. Der Tor-Modul links ist 0, weil A als Modul über sich selbst flach ist. Damit ist der zweite Tor-Modul der Sequenz ebenfalls Null, d.h. es gilt die Behauptung.

<u>(ii) ⇒ (i)</u>. Sei eine exakte Sequenz S von A-Moduln gegeben, sagen wir

$$S:\ldots \longrightarrow N_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} N_n \xrightarrow{d_n} N_{n-1}\otimes_A M \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots,$$

Betrachten wir die zugehörigen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_n) \longrightarrow N_n \xrightarrow{d_n} \mathrm{Im}(d_{n-1}) \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(d_{n-1}) \longrightarrow N_{n-1}$$

Nach Voraussetzung (ii) und weil das Tensorprodukt rechtsexakt ist, erhalten wir durch Tensorieren mit M über A exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_n)\otimes_A M \longrightarrow N_n\otimes_A M \xrightarrow{d_n\otimes id} \mathrm{Im}(d_{n-1})\otimes_A M \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

und

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(d_{n-1})\otimes_A M \longrightarrow N_{n-1}\otimes_A M,$$

Der rechte Morphismus $d_{n-1}\otimes id$ der ersten Sequenz ändert seinen Kern nicht, wenn man ihn mit der Injektion der zweiten zusammensetzt,
d.h. die folgende Sequenz ist exakt

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_n)\otimes_A M \longrightarrow N_n\otimes_A M \xrightarrow{d_n\otimes id} N_{n-1}\otimes_A M$$

Der linke Morphismus dieser Sequenz ändert sein Bild nicht, wenn man ihn mit der Surjektion von (1) zusammensetzt (mit n ersetzt durch n+1, man beachte, es gilt $\mathrm{Im}(d_{d+1}) = \mathrm{Ker}(d_n)$). Also ist die folgende Sequenz exakt

$$N_n\otimes_A M \xrightarrow{d_{n+1}\otimes id} N_n\otimes_A M \xrightarrow{d_n\otimes id} N_{n-1}\otimes_A M$$

Das dies für jedes n richtig ist, ist die Sequenz $S\otimes_A M$ exakt.

Wir haben noch zu zeigen, Bedinung (vii) ist äquivalent zu einer der übrigen Bedingungen.

<u>(i) ⇒ (vii)</u>. Betrachten wir die folgende exakte Sequenz von A-Moduln

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A^r \xrightarrow{\varphi} A.$$

Dabei sei φ die A-lineare Abbildung mit der Matrix $(a_1,\ldots,a_r)^T$, d.h.

$$\varphi(b_1,\ldots,b_r) = a_1 b_1 + \ldots + a_r b_r.$$

Weil M flach ist über A nach Voraussetzung (i) erhalten wir durch Tensorieren mit M über A eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K\otimes_A M \xrightarrow{\psi} M^r \xrightarrow{\varphi'} M.$$

mit

$$\varphi'(m_1,\dots,m_r) = a_1m_1 + \dots + a_rm_r.$$

Nach Voraussetzung liegt $(x_1,\dots,x_r)$ im Kern von φ', also im Bild der Injektion links. Deshalb gibt es Elemente

$$u_j := (a_{1,j}, \dots , a_{r,j}) \in K\ (\subseteq A^r) \text{ und } y_j \in M$$

mit

$$\begin{aligned}(x_1,\dots,x_r) &= \psi(\sum_j u_jy_j)\\ &= \psi(\sum_j (a_{1,j}, \dots , a_{r,j})y_j)\\ &= (\sum_j a_{1,j} y_j, \dots , \sum_j a_{r,j}y_j)\end{aligned}$$

Weil die u_j im Kern von φ liegen, gilt außerdem für jedes j:

$$0 = \sum_i a_ia_{ij}$$

Bedingung (vii) ist erfüllt.

<u>(vii) ⇒ (iii)</u>. Sei I ein endlich erzeugtes Ideal von A, sagen wir

$$I = (a_1,\dots,a_r).$$

Ein Element im Kern der natürlichen Abbildung

$$I\otimes_A M \longrightarrow M,\ a\otimes m \mapsto am,$$

hat die Gestalt

$$\xi = \sum_{i=1}^r a_i\otimes x_i \text{ mit } x_i\in M.$$

Weil ξ im Kern liegt, gilt

$$\sum_{i=1}^r a_ix_i = 0.$$

Nach Voraussetzung (vii) gibt es Elemente $a_{ij}\in A$ und $y_j\in M$ mit

$$x_i = \sum_j a_{ij}y_j \text{ für jedes i und } \sum_{i=1}^r a_ia_{ij} = 0 \text{ für jedes j.}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\xi &= \sum_{i=1}^r a_i\otimes x_i\\ &= \sum_{i=1}^r a_i\otimes \sum_j a_{ij}y_j\\ &= \sum_j \sum_{i=1}^r a_ia_{ij}\otimes y_j\end{aligned}$$

$$= \sum_j 0\otimes y_j$$
$$= 0.$$

Der Kern ist somit trivial.

QED.

3. Eigenschaften flacher Moduln

(i) Transitivität. Sei $h: A \longrightarrow B$ ein flacher Homomorphimus von kommutativen Ringen mit 1, d.h. B sei als A-Modul flach. Dann ist jeder flache B-Modul auch flach als A-Modul.
Insbesondere ist die Zusammensetzung flacher Homomorphismen flach.

(ii) Basiswechsel. Seien $h: A\longrightarrow B$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1 und M ein flacher A-Modul. Dann ist $M\otimes_A B$ ein flacher B-Modul.

(iii) Lokalisierung. Seien A ein kommutiver Ring mit 1 und $S \subseteq A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Dann ist der natürliche Homomorphismus

$$A \longrightarrow S^{-1}A,\ a \mapsto \frac{as}{s},$$

flach.

(iv) Kommutieren mit Kernen, Kokernen, Homologie. Seien A ein kommutativer Ring mit 1,

$$\varphi: N_1 \longrightarrow N_2 \text{ und } K: \dots \longrightarrow N_i \xrightarrow{d_i} N_{i-1} \longrightarrow \dots$$

eine A-lineare Abbildung bzw. ein Komplex von A-Moduln. Dann bestehen für jeden flachen A-Modul

M

natürliche Isomorphien

$$\mathrm{Ker}(\varphi\otimes_A M) \cong \mathrm{Ker}(\varphi)\otimes_A M$$
$$\mathrm{Koker}(\varphi\otimes_A M) \cong \mathrm{Koker}(\varphi)\otimes_A M$$
$$H_i(K\otimes_A M) \cong H_i(K)\otimes_A M$$

Die zweite Isomorphie besteht auch ohne die Voraussetzung der Flachheit von M.

(v) Verhalten von Tor und Ext. Seien $h: A \longrightarrow B$ ein flacher Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1 und M, N zwei A-Moduln. Dann bestehen natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N)\otimes_A B \cong \mathrm{Tor}_n^B(M\otimes_A B, N\otimes_A B)$$

für alle nicht-negativen ganzen Zahlen n. Ist A noethersch und M endlich erzeugt, so gilt außerdem

$$\mathrm{Ext}_A^n(M, N)\otimes_A B \cong \mathrm{Ext}_B^n(M\otimes_A B, N\otimes_A B).$$

(vi) Reguläre Elemente. Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein flacher A-Modul und $a \in A$ ein reguläres Element. Dann ist a auch M-regulär. Allgemeiner, sei

$$a_1,\dots,a_r \in A$$

eine semi-reguläre Sequenz von Elementen aus A, d.h. die Multiplikation mit a_{i+1} definiert einen injektiven A-linearen Endomorphismus von

$$A/(a_1,...,a_i)A$$

für i = 0,...,r-1. Dann bilden diese Elemente auch eine M-semi-reguläre Sequenz, d.h. die Multiplikation mit a_{i+1} definiert einen injektiven A-linearen Endomorphismus von

$$M/(a_1,...,a_i)M$$

(vii) Erweiterungsideale. Seien h: $A \longrightarrow B$ ein flacher Homomorphismus und I,J zwei Ideale von A. Dann gilt

$$(I \cap J)B = IB \cap JB.$$

Ist J außerdem endlich erzeugt, so gilt auch

$$(I:J)B = IB:JB.$$

Beweis. Zu (i). Sei N ein flacher B-Modul und S eine exakte Sequenz von A-Moduln. Wir haben die Exaktheit der folgenden Sequenz zu beweisen.

$$S\otimes_A N = S\otimes_A (B\otimes_B N) = (S\otimes_A B)\otimes_B N.$$

Weil N flach ist über B, reicht es zu zeigen, daß $S\otimes_A B$ exakt ist. Das ist aber der Fall, weil B flach ist über A.

Zu (ii). Sei S eine exakte Sequenz von B-Moduln. Wir haben die Exaktheit der folgenden Sequenz zu beweisen.

$$S\otimes_B(B\otimes_A M) = S\otimes_A M.$$

Diese ergibt sich aus der Exaktheit von M über A.

Zu (iii). Seien M ein A-Modul und M' ein Teilmodul von M. Wir haben zu zeigen, die natürliche Einbettung $M' \hookrightarrow M$ von M' in M induziert eine Injektion

$$M'\otimes_A S^{-1}A \longrightarrow M\otimes_A S^{-1}A,\ m\otimes\frac{a}{s} \mapsto m\otimes\frac{a}{s}.$$

Wegen[5] $M'\otimes_A S^{-1}A = S^{-1}M'$ und $M\otimes_A S^{-1}A = S^{-1}M$ hat diese Abbildung bis auf Isomorphie die Gestalt

$$S^{-1}M' \longrightarrow S^{-1}M,\ \frac{m}{s} \mapsto \frac{m}{s}.$$

Ein Element aus dem Kern hat somit die Gestalt $\frac{m}{s}$ mit $m \in M'$, $s\in S$, wobei es ein Element aus $t \in S$ gibt mit tm = 0. Dann ist aber $\frac{m}{s}$ auch in $S^{-1}M'$ das Nullelement.

Zu (iv). Sei K = Ker(φ). Aus der exakten Sequenz

---

[5] Der $S^{-1}A$-Modul $M\otimes_A S^{-1}A$ besitzt die Universalitäteigenschaft des Quotienten-Moduls $S^{-1}M$: die natürliche Abbildung

$$\varphi:M \longrightarrow U := M\otimes_A S^{-1}A,\ m \mapsto m\otimes \frac{s}{s}$$

ist A-linear, und jede A-lineare Abbildung $\varphi':M \longrightarrow U'$ mit Werten in einem $S^{-1}A$-Modul U' faktorisiert sich auf genau eine Weise über φ, denn die Abbildung

$$M \times S^{-1}A \longrightarrow U',\ (m, \frac{a}{s}) \mapsto \frac{a}{s}\cdot\varphi'(m),$$

ist bilinear über A. Auf Grund der Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts fakorisiert sie sich also auf genau eine Weise über $M \times S^{-1}A \longrightarrow U$.

U ein Modul über $S^{-1}A$ und es

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow N_1 \xrightarrow{\varphi} N_2$$

erhält man auf Grund der Flachheit von M über A die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow K\otimes_A M \longrightarrow N_1\otimes_A M \xrightarrow{\varphi\otimes M} N_2\otimes_A N$$

also

$$\mathrm{Ker}(\varphi\otimes M) \cong K\otimes_A M = \mathrm{Ker}(\varphi)\otimes_A M\,.$$

Damit besteht die erste Isomorphie. Die zweite Isomorphie erhält man durch Dualisieren der obigen Argumentation. Zum Beweis der dritten betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & N_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] & N_i \arrow[r, "d_i"] & N_{i-1} \arrow[r] & \dots \\
0 \arrow[r] & N_{i+1} \arrow[u, equal] \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Ker}(d_i) \arrow[u] \arrow[r] & H_i(K) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Der Morphismus α existiert dabei auf Grund der Universalitätseigenschaft des Kerns und ist injektiv. Die untere Zeile dieses Diagramms ist exakt (nach Definition der Homlogie). Insbesondere gilt

$$H_i(K) = \mathrm{Koker}(\alpha).$$

Wir tensorieren die obere Zeile des Diagramms mit M über A und erhalten in analoger Weise das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & N_{i+1}\otimes M \arrow[r, "d_{i+1}\otimes M"] & N_i\otimes M \arrow[r, "d_i\otimes M"] & N_{i-1}\otimes M \arrow[r] & \dots \\
0 \arrow[r] & N_{i+1}\otimes M \arrow[u, equal] \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Ker}(d_i\otimes M) \arrow[u] \arrow[r] & H_i(K\otimes M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit exakter unterer Zeile. Wegen

$$\mathrm{Ker}(d_i\otimes M) = \mathrm{Ker}(d_i)\otimes M$$

ist die untere Zeile des neuen Diagramms gerade das Tensorprodukt der unteren Zeile des alten mit M über A. Insbesondere ist $\beta = \alpha\otimes M$ und

$$H_i(K\otimes M) = \mathrm{Koker}(\beta) = \mathrm{Ker}(\alpha\otimes M) = \mathrm{Ker}(\alpha)\otimes M = H_i(K)\otimes M.$$

Zu (v). Sei

$$F_* \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine freie (also projektive) Auflösung von M über A. Dann ist

$$F_*\otimes_A B \longrightarrow M\otimes_A B \longrightarrow 0$$

eine freie Auflösung von $M\otimes_A B$ über B. Wir erhalten

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N) = H_n(F_*\otimes_A N)$$

und

$$\mathrm{Tor}_n^B(M\otimes_A B, N\otimes_A B) = H_n((F_*\otimes_A B)\otimes_B(N\otimes_A B))$$

Wegen

$$(F_*\otimes_A B)\otimes_B(N\otimes_A B) = F_*\otimes_A(B\otimes_B N)\otimes_A B$$
$$= F_*\otimes_A N\otimes_A B,$$

und der Flachheit von B über A folgt

$$\mathrm{Tor}_n^B(M\otimes_A B, N\otimes_A B) = H_n(F_*\otimes_A N\otimes_A B)$$
$$= H_n(F_*\otimes_A N)\otimes_A B$$
$$= \mathrm{Tor}_n^A(M, N)\otimes_A B$$

Ist A noethersch und M endlich erzeugt über A, so können wir annehmen, F_* besteht aus endlich erzeugten freien A-Moduln. Dann gilt aber[6]

$$\mathrm{Hom}_B(F_i\otimes_A B, N\otimes_A B) = \mathrm{Hom}_A(F_i, N)\otimes_A B,$$

und dieselben Argumente wie oben mit Hom anstelle von $\otimes$ beweisen den zweiten Teil der Behauptung.

Zu (vi) Weil a ein reguläres Element von A ist, definiert die Multiplikation mit a eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{a} A.$$

Weil M flach ist über A, entsteht durch Tensorieren mit M über A eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A\otimes M \xrightarrow{a} A\otimes M.$$

Wegen $A\otimes M \cong M$ hat diese die Gestalt

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{a} M,$$

d.h. a ist M-regulär. Allgemeiner hat man eine exakte Sequenz von A-linearen Abbildungen

$$0 \longrightarrow A/(a_1,...,a_i)A \xrightarrow{a_{i+1}} A/(a_1,...,a_i)A$$

Durch Tensorieren mit M über A erhält man eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M/(a_1,...,a_i)M \xrightarrow{a_{i+1}} M/(a_1,...,a_i)M$$

Zu (vii). Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I\cap J \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} A/I \otimes A/J$$

mit $\varphi(a) := (a \bmod I, a \bmod J)$. Durch Tensorieren mit B über A erhalten wir die exakte Sequenz[7]

$$0 \longrightarrow (I\cap J)B \longrightarrow B \xrightarrow{\psi} B/IB \oplus B/JB$$

mit $\psi(b) = (b \bmod IB, b \bmod JB)$. Damit gilt

$$(I\cap J)B = \mathrm{Ker}(\psi) = IB \cap JB.$$

Zum Beweis des zweiten Teils betrachten wir zunächst den Fall, daß J ein Hauptideal ist, sagen wir

$$J = aA.$$

[6] Für $F_i = A$ steht auf beiden Seiten $N\otimes_A B$. Für allgemeines F_i erhält man die Isomorphie, weil Hom und $\otimes$ mit endlichen direkten Summen kommutieren. Genauer: Hom überführt direkte Summen bezüglich des ersten Arguments in direkte Produkte (welche im endlichen Fall direkte Summen sind).

[7] Man beachte, es gilt $(I\cap J)\otimes B \cong (I\cap J)B$.

Die Multiplikation mit a definiert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I{:}a \longrightarrow A \xrightarrow{a} A/I \longrightarrow 0.$$

Durch Tensorieren mit B über A erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (I{:}a)B \longrightarrow B \xrightarrow{a} B/IB \longrightarrow 0.$$

Also gilt

$$(I{:}a)B = IB{:}a.$$

Für allgemeines J, sagen wir

$$J = (a_1,\dots,a_n)A$$

erhalten wir

$$IB{:}JB = \bigcap_{i=1}^n IB{:}a_i = \bigcap_{i=1}^n (I{:}a_i)B = (\bigcap_{i=1}^n (I{:}a_i))B = (I{:}J)B.$$

QED.

Beispiel 1

Seien k ein Körper, x, y Unbestimmte und

$A := k[x,y]$

$B := A/xA \cong k[y]$.

Dann ist der Faktorring B von A kein flacher A-Modul. Andernfalls wäre nämlich

$$(I \cap J)\, B = IB \cap JB$$

mit

$I := (x+y)A$ und $J = yA$.

Es gilt jedoch

$I \cap J = (xy + y^2)A$

(weil x + y und y teilfremde Polynome in A sind) und

$IB = yB$, $J = yB$ also $IB \cap JB = yB$

$(I\cap J)B = y^2B \neq yB = IB \cap JB.$

Man beachte, der durch $A \twoheadrightarrow B$ induzierten Morphismus ist eine (echte) abgeschlossene Einbettung

Spec B $\hookrightarrow$ Spec A

d.h. manche Fasern dieses Morphismus sind einpunktig und manche sind leer. Es treten also Fasern unterschiedlicher Dimension auf.

Beispiel 2

Seien k ein Körper, x,y Unbestimmte, z = y/x, und

$A := k[x,y]$

$B := k[x,y,z]$.

Dann ist B als A-Modul nicht flach. Andernfalls wäre nämlich

$$(I \cap J)\, B = IB \cap JB$$

mit

$I := xA$ und $J = yA$.

Es gilt jedoch

$I\cap J = xyA$

(weil x und y teilerfremde Polynome in A sind), also

$(I\cap J)B = xyB = x^2zB.$

Andererseits ist

$IB \cap JB = xB \cap yB = xB \cap xzB.$

Wäre $x^2zB = xzB$, so könnte man xz in der Gestalt $xz = x^2z\bullet b$ mit $b \in B$ schreiben, d.h. $1 = x\bullet b$ in $B = k[x,y,y/x] \subseteq k(x,y)$. Folglich müßte $b = 1/x$ negativen Grad[8] haben. Die Elemente von B haben aber alle einen nicht-negativen Grad.

Man beachte, der durch $A \hookrightarrow B = A[T]/(xT - y)$ induzierte Morphismus

$$\text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } A$$

hat als Faser über dem Ursprung eine Gerade. Die übrigen Fasern sind leer über den Punkten der y-Achse $x = 0$ und sie sind einpunktig über den übrigen Punkten. Es treten Fasern unterschiedlicher Dimension auf.

Beispiel 3

Seien k ein Körper, x,y,z Unbestimmte und

$$A := k[x,y]$$

$$B := k[x,y,z]/(z^2 - f(x,y)) \text{ , } f \in A.$$

Dann ist B als A-Modul isomorph zu

$$B = A + Az \cong A\oplus A,$$

d.h. B ist frei, also flach über A.

Man beachte, der durch die natürliche Abbildung $A \longrightarrow B$ induzierte Morphismus

$$\text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } A$$

hat zwei punktige Faser (wenn man die Punkte der Fasern über den Nullstellen von f doppelt zählt). Insbesondere haben alle Fasern dieselben Dimension.

Beispiel 4

Seien $h: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1. Wir nehmen an, A ist ein Hauptidealring. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) h ist flach.

(ii) B ist als A-Modul torsionsfrei, d.h. die Multiplikation mit Elementen aus A-{0} ist in B injektiv.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Weil A ein Hauptidealring, also insbesondere ein Integritätbereich ist, ist jedes von Null verschiedene Element von A regulär. Auf Grund der Flachheit von h ist es dann aber auch B-regulär.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Es reicht zu zeigen, für jedes Ideal I von A ist die Abbildung

$$I\otimes_A B \longrightarrow B,\ a\otimes b \mapsto ab, \tag{1}$$

injektiv. Für $I = 0$ ist das trivial, sei also $I \neq 0$. Weil A ein Hauptidealring ist, hat I die Gestalt

$$I = xA\ (\neq 0),$$

und ist als A-Modul isomorph zu A,

$$A \xrightarrow{\cong} xA = I,\ a \mapsto xa.$$

Durch Tensorieren des Isomorphismus mit B über A erhalten wir einen Isomorphismus

$$B \cong A\otimes_A B \xrightarrow{\cong} I\otimes_A B,\ b \mapsto 1\otimes b \mapsto x\otimes b.$$

Es reicht zu zeigen, die Zusammensetzung von (1) mit diesem Isomorphismus ist injektiv, d.h.

$$B \longrightarrow B,\ b \mapsto x\otimes b \mapsto xb,$$

ist injektiv. Wegen $I \neq 0$ ist $x \in A$ von Null verschieden. Die Injektivität ergibt sich aus der Torsionsfreiheit von B über A.

[8] Wir definieren den Grad einer rationalen Funktion als Grad des Zählers minus Grad des Nenners.

QED.

4. Flachheit über lokalen Ringen

Seien (A, m) ein lokaler Ring und M ein A-Modul. Wir nehmen an, eine der beiden folgenden Bedingungen ist erfüllt.

1. m ist nilpotent.
2. M ist endlich erzeugt über A.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) M ist flach.
(ii) M ist projektiv.
(iii) M ist frei.

Beweis. (iii) $\Rightarrow$ (ii). trivial. (siehe Anhang Kategorien).

(ii) $\Rightarrow$ (i). trivial (siehe die Beispiel unmittelbar nach der Defintion der Flachheit).

(i) $\Rightarrow$ (iii). Sei M ein flacher A-Modul. Wir wählen eine Familie

$$\{m_i\}_{i\in I}, \qquad (1)$$

von Elementen aus M, deren Restklassen in M/mM eine Vektorraumbasis über A/m bilden. Es reicht zu zeigen, die Elemente der Familie (1) bilden ein A-linear unabhängiges Erzeugendensystem von M. Es gilt dann

$$M = \sum_{i\in I} m_i A + mM$$

Indem wir diese Identität wiederholt in sich selbst einsetzen, erhalten wir

$$M = \sum_{i\in I} m_i A + m^n M \text{ für } n = 1, 2, 3,...$$

Ist m nilpotent, so ergibt sich für großes n, daß die m_i ein Erzeugendensystem von M über A bilden. Ist M endlich erzeugt, also I endlich, folgt dies aus dem Lemma von Nakayam. Wir haben noch die A-lineare Unabhängigkeit der m_i zu beweisen. Dazu reicht es, die folgende Aussage zu beweisen.

Sind $x_1,...,x_r$ endlich viele Elemente von M, deren Restklassen in M/mM linear unabhängig über A/m sind, so sind die x_i linear unabhängig über A.

Wir beweisen dies durch Induktion nach r.
Der Fall r = 1.
Sei die Restklasse von $x = x_1$ in M/mM linear unabhängig, d.h. von Null verschieden.

Sei weiter $a \in A$ ein Element mit $ax = 0$. Wir haben zu zeigen,

$$a = 0.$$

Weil M flach ist über A, gibt es Elemente

$$y_1,...,y_s \in M \text{ und } a_1,...,a_s \in A$$

mit

$$x = a_1x_1+...+a_sx_s \text{ und } aa_1= ... =aa_s = 0.$$

Nach Wahl von x ist die Restklasse von x in M/mM ein Basis-Element dieses Vektorraums, also insbesondere von Null verschieden. Dann muß aber die Restklasse eines Summand a_ix_i in M/mM ungleich Null sein, d.h. mindestens ein a_i liegt nicht in m. Dann ist dieses a_i eine Einheit in A, d.h. mit $aa_i = 0$ gilt auch $a = 0$.

Der Fall $r > 1$. Seien $a_1,\ldots,a_r \in A$ Elemente mit

$$a_1x_1+\ldots+a_rx_r = 0.$$

Wir haben zu zeigen,

$$a_1 = \ldots = a_r = 0.$$

Weil M flach ist über A, gibt es Elemente

$$y_1,\ldots,y_s \in M \text{ und } a_{i1},\ldots,a_{is} \in A$$

mit

$$x_i = a_{i1}y_1+\ldots+a_{is}y_s \text{ für } i = 1,\ldots,r \tag{2}$$

und

$$\sum_{i=1}^{r} a_i a_{ij} = 0 \text{ für } j = 1,\ldots,s \tag{3}$$

Wegen $x_r \notin mM$ gilt $a_{rj} \notin m$ für mindestens ein j. Wegen (3) und weil für dieses j das Element a_{rj} eine Einheit ist, erhalten wir

$$a_r = \sum_{i=1}^{r-1} c_i a_i \text{ mit } c_i = -a_{ij}/a_{rj}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 &= a_1x_1+\ldots+a_rx_r \\ &= a_1(x_1+ c_1x_r)+\ldots+a_{r-1}(x_{r-1}+c_{r-1}x_r) \end{aligned}$$

Die Restklassen der Elemente in Klammern in M/mM sind linear unabhängig über A/m. Nach Induktionsvoraussetzung sind die Elemente selbst linear unabhängig über A. Also gilt

$$a_1 = \ldots = a_{r-1} = 0$$

und

$$a_r = \sum_{i=1}^{r-1} c_i a_i = 0.$$

QED.

5. Kriterium für flache Homomorphismen

Sei $h: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1. Dann sind folgenden Aussagen äquivalent.

(i) h ist flach.

(ii) Für jedes $P \in \operatorname{Spec} B$ induziert h einen flachen Homomorphismus

$$A_{A\cap P} \longrightarrow B_P.$$

Dabei bezeichne $A\cap P$ das vollständige Urbild von P bei h.

(iii) Für jedes maximale Ideal P von B induziert h einen flachen Homomorphismus

$$A_{A\cap P} \longrightarrow B_P.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Weil B flach ist über A, ist $B_p = B \otimes_A A_p$ flach über A_p für jedes Primideal p von A (Basiswechsel). Dies gilt insbesondere für $p := A\cap P$. Außerdem ist B_P ein Quotientenring von B_p, also flach über A_p. Also ist B_P flach über A_p (auf Grund der Transitivität der Flachheit).

(ii) ⇒ (iii). trivial, denn jedes maximale Ideal ist ein Primideal.

(iii) ⇒ (i). Es reicht zu zeigen,

$$\mathrm{Tor}_1^A(B, M) = 0$$

für jeden A-Modul M. Da der Träger eines nicht-trivialen Moduls nicht-leer ist, reicht es zu zeigen,

$$\mathrm{Tor}_1^A(B, M)_P = 0$$

für jeden A-Modul M und jedes Primideal P von B. Nach Voraussetzung gilt

$$\mathrm{Tor}_1^{A_p}(B_P, M_p) = 0 \text{ mit } p := A \cap P.$$

Es reicht also, das nachfolgende Lemma zu beweisen.

QED.

Lemma: Verhalten der Tor-Funktoren beim Lokalisieren

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, B eine A-Algebra und P ein Primideal von B. Für jeden A-Modul M gilt dann

$$\mathrm{Tor}_i^A(B, M)_P = \mathrm{Tor}_i^{A_p}(B_P, M_p)$$

mit $p := A \cap P$.

Beweis. Sei F_* ($\longrightarrow M \longrightarrow 0$) eine freie Auflösung von M über A. Dann gilt

$$\mathrm{Tor}_i^A(B, M) = H_i(F_* \otimes_A B)$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}_i^A(B, M)_P &= \mathrm{Tor}_i^A(B, M) \otimes_B B_P \\
&= H_i(F_* \otimes_A B) \otimes_B B_P \\
&= H_i(F_* \otimes_A B \otimes_B B_P) && \text{(weil } B_P \text{ flach ist über B)} \\
&= H_i(F_* \otimes_A B_P) \\
&= H_i(F_* \otimes_A (A_p \otimes_{A_p} B_P)) && \text{(weil } B_P \text{ ein } A_p\text{-Modul ist)} \\
&= H_i((F_* \otimes_A A_p) \otimes_{A_p} B_P)
\end{aligned}$$

Weil A_p flach ist über A, ist $F_* \otimes_A A_p$ eine freie Auflösung von $M \otimes_A A_p = M_p$ über A_p. Die letzte Homologie ist damit gerade

$$\mathrm{Tor}_i^{A_p}(B_P, M_p)$$

QED.

Bemerkungen

(i) Ein Morphismus f: Y ⟶ X algebraischer Schemata heißt <u>flach</u>, wenn für jeden Punkt y ∈ Y der induziert Homorphismus $f_y^\#: \mathcal{O}_{X,f(y)} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ der lokalen Ringe flach ist.

(ii) Sei h: A ⟶ B ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) h ist flach.

(b) Der induzierte Morphismus affiner Schemata Spec B ⟶ Spec A ist flach.

(iii) Ein <u>assoziierter Punkt</u> x eines Schemas X ist ein Punkt mit der Eigenschaft, daß das maximale Ideal $m_{X,x}$ des zugehörigen lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ ein assoziiertes Primideal des Nullideals von $\mathcal{O}_{X,x}$ ist, d.h. jedes Element von $m_{X,x}$ ist ein Nullteiler. Zum Beispiel im Fall eines affinen Schemas

$$X = \operatorname{Spec} k[x_1,...,x_N]/I$$

sind gerade die assoziierten Primideale des Ideals I die assoziierten Punkte von X. Insbesondere sind die generischen Punkte der irreduziblen Komponenten von X assoziiert.

(iv) Sei f: $Y \longrightarrow X$ ein Morphismus von noetherschen Schemata mit X reduziert, irreduzibel, regulär und 1-dimensional. Dann sind folgende Aussage äquivalent
(a) f ist flach.
(b) Jeder assoziierte Punkt von Y wird in den generischen Punkt von X abgebildet.
Ist auch Y reduziert, so bedeutet (b), daß die Einschränkungen von f auf die irreduziblen Komponenten von Y dominant sind.

Beweis von (ii). Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen.

$$X := \operatorname{Spec} A,$$
$$Y := \operatorname{Spec} B,$$

Weiter sei

$$f: Y \longrightarrow X$$

der durch h induzierte Morphismus affiner Schemata. Für $y \in Y$ ist dann

$$A_{A\cap y} \longrightarrow B_y \qquad (1)$$

gerade der durch f induzierte Morphismus f induzierte Homomorphismus

$$f_y^{\#}: \mathcal{O}_{X,f(y)} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}.$$

Damit erhalten wir die folgenden Implikationen.

$$\begin{aligned} h \text{ ist flach } &\Leftrightarrow (1) \text{ ist flach für jedes } y \in \operatorname{Spec} B \text{ (nach dem obigen Kriterium)} \\ &\Leftrightarrow f_y^{\#} \text{ ist flach für jedes } y \in Y \\ &\Leftrightarrow f \text{ ist flach.} \end{aligned}$$

QED.

Beweis von (iv). <u>(a) ⇒ (b)</u>. Sei $y \in Y$ ein Punkt mit dem Bild

$$x := f(y).$$

Wir haben zu zeigen, y ist kein assoziierter Punkt von Y, falls x vom generischen Punkt von X verschieden ist, d.h. wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ ein regulärer Ring der Dimension 1 ist. Das maximale Ideal $m_{X,x}$ wird dann von einem regulären Element π erzeugt. Weil f flach ist, ist das Bild von π in $\mathcal{O}_{Y,y}$ ebenfalls ein reguläres Element. Das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{Y,y}$ besteht somit nicht nur aus Nullteilern, d.h. y ist kein assoziierter Punkt.

<u>(b) ⇒ (a)</u>. Wir haben zu zeigen, für jeden Punkt $y \in Y$ ist der lokale Homomorphismus

$$f_y^{\#}: A := \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y} =: B \text{ mit } x := f(y)$$

flach. Ist x der generische Punkt von X, so ist dies trivialerweise der Fall, weil dann A ein Körper ist. Sei x vom generischen Punkt verschieden. Dann ist A ein regulärer Ring der Dimension 1, also ein diskreter Bewertungsring und damit insbesondere ein Hauptidealring. Es reicht deshalb, zu zeigen, daß B torsionsfrei über A ist. Angenommen, B ist nicht torsionsfrei über A. Dann gibt es ein von Null verschiedenes

Element $t \in A - \{0\}$, welches Nullteiler in B ist. Insbesondere liegt das Element $t \neq 0$ dann in einem assoziierten Primideal des A-Moduls B. Das einzige von 0 verschiedene Primideal von A ist aber das maximale Ideal

$$m := m_{X,x}.$$

Also ist das maximale Ideal von A ein assoziiertes Primideal von B , d.h. es gibt ein Element $f \in B-\{0\}$ mit

$$\mathrm{Ann}_A(f) = m.$$

Sei $p \in \mathrm{Spec}\, B$ ein minimales Primoberideal von $\mathrm{Ann}_B(f)$. Dann gilt

$$mB \subseteq \mathrm{Ann}_A(f)B \subseteq \mathrm{Ann}_B(f) \subseteq p.$$

Wir betrachten p als Punkt von Y mit dem lokalen Ring

$$C := \mathcal{O}_{Y,p} = B_p.$$

Sei $\ell := m_{Y,p}$ dessen maximales Ideal. $\mathrm{Ann}_B(f)$ erzeugt dann in C ein ℓ-primäres Ideal (da ℓ einziges Primoberideal von $\mathrm{Ann}_B(f)C$ ist), d.h. es gilt

$$\ell^n \subseteq \mathrm{Ann}_B(f) \subseteq \ell.$$

für eine natürliche Zahl n. Insbesondere wird ℓ^n von f annulliert, d.h. ℓ besteht aus lauter Nullteilern.[9], d.h. p ist ein assoziierter Punkt von Y. Das vollständig Urbild von p in A ist ein Primideal, welches m enthält. Weil m maximal in A ist, ist dieses Urbild gleich m. Mit anderen Worten, es gilt

$$f(p) = x.$$

Das Bild eines assoziierten Punktes ist aber nach Voraussetzung der generische Punkt von X. Dies steht im Widerspruch zur Wahl von x. Dieser Widerspruch zeigt, daß B torsionsfrei als A-Modul, also flach, über A sein muß.
QED.

6. Kriterium für treuflache Moduln

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Dann sind folgende Aussage äquivalent.

(i) M ist treuflach über A.

(ii) M ist flach und für jeden A-Modul $N \neq 0$ gilt $M \otimes_A N \neq 0$.

(iii) M ist flach und für jedes maximale Ideal m von A gilt $mM \neq M$.

Beweis. <u>(i) ⇒ (ii)</u>. Sei M treuflach über A. Dann ist trivialerweise M flach über A. Angenommen, es wäre $M \otimes_A N = 0$. Dann erhielte man aus der Sequenz

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

durch Tensorieren mit M die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.$$

Also muß die Sequenz selbst schon exakt sein. Dann gilt aber N = 0.

<u>(ii) ⇒ (iii)</u>. Wegen $A/m \neq 0$ gilt

$$0 \neq A/m \otimes_A M \cong M/mM.$$

<u>(iii) ⇒ (ii)</u>. Sei N ein von Null verschiedener A-Modul. Wir haben zu zeigen

[9] f ist nicht identisch Null in C, denn dann wäre fs = 0 für ein $s \in B-p \subseteq B-\mathrm{Ann}_B(f)$

$$N \otimes_A M \neq 0.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein n mit

$$0 \neq n \in N.$$

Auf Grund der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow nA \longrightarrow N$$

und der A-Flachheit von M reicht es zu zeigen $M \otimes_A (nA) \neq 0$, d.h. wir können annehmen

$$N = nA \cong A/I$$

(mit $I = \mathrm{Ann}_A(n)$). Sei m ein maximales Ideal, welches I enthält. Dann ist A/m ein Faktormodul von A/I, d.h. es besteht eine exakte Sequenz

$$N \longrightarrow A/m \longrightarrow 0$$

Weil M flach ist über A, ist damit auch die Sequenz

$$M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A A/m \longrightarrow 0$$

exakt. Es reicht zu zeigen, der rechte Modul $M \otimes_A A/m$ ist ungleich Null. Das ist aber der Fall wegen $M \otimes_A A/m \cong M/mM$, und weil nach Voraussetzung $mM \neq M$ gilt.

<u>(ii) ⇒ (i)</u>. Sei

$$S: N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$$

eine Sequenz von A-Moduln mit $S \otimes_A M$ exakt. Weil M flach ist über A, kommutiert der Funktor $\otimes_A M$ mit Kernen, Kokernen und Bildern. Insbesondere gilt

$$\mathrm{Im}(g \circ f) \otimes_A M = \mathrm{Im}((g \circ f) \otimes_A M) = \mathrm{Im}((g \otimes_A M) \circ (f \otimes_A M)) = \mathrm{Im}(0) = 0.$$

Auf Grund von Voraussetzung (ii) folgt $\mathrm{Im}(g \circ f) = 0$, also

$$g \circ f = 0.$$

Wir haben gezeigt, S ist ein Komplex. Für die Homologi H(S) an der Stelle N erhalten wir (weil M flach ist über A)

$$H(S) \otimes_A M = H(S \otimes_A M) = 0$$

Nach Voraussetzung (ii) folgt H(S) = 0, d.h. S ist eine exakte Sequenz.
QED.

7. Eigenschaften treuflacher Moduln

(i) <u>Transitivität</u>. Sei $h: A \longrightarrow B$ ein <u>treuflacher Homomorphimus</u> von kommutativen Ringen mit 1, d.h. B sei als A-Modul treuflach. Dann ist jeder treuflache B-Modul auch treuflach als A-Modul.

(ii) <u>Basiswechsel</u>. Seien $h: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1 und M ein treuflacher A-Modul. Dann ist $M \otimes_A B$ ein trueflacher B-Modul.

(iii) <u>Abstieg</u>. Sei $h: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1. Falls es einen B-Modul N gibt, welcher treuflach über A und B ist, so ist h <u>treuflach</u>, d.h. B ist treuflach als A-Modul.

(iv) <u>Lokale Homomorphismen</u>.Seien $h: A \longrightarrow B$ ein lokaler Homomorphismus und M ein endlich erzeugter B-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(a) M ist treuflach über A.
(b) M ist flach über A und $\neq 0$.

Insbesondere ist der Homomorphismus genau dann treuflach, wenn er flach ist.

(vi) Ringerweiterungen. Sei h: $A \longrightarrow B$ ein treuflacher Homomorphismus von kommmutativen Ringen mit 1. Dann gelten folgende Aussagen.

(a) Für jeden A-Modul M ist die natürliche Abbildung

$$M \longrightarrow M\otimes_A B,\ m \mapsto m\otimes 1,$$

injektiv. Insbesondere ist h selbst injektiv, und A kann als Teilring von B angesehen werden.

(b) Für jedes Ideal $I \subseteq A$ gilt $IB\cap A = I$.

(c) Die durch h induzierte Abbildung

$$\mathrm{Spec}\ B \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A,\ P \mapsto A\cap P,$$

ist surjektiv.

Beweis. Zu (i). Sei N ein treuflacher B-Modul. Wir wissen bereits, daß dann N auch flach ist über A. Seien S eine Sequenz von A-Moduln mit $S\otimes_A N$ exakt. Es gilt

$$\begin{aligned} S\otimes_A N &= S\otimes_A(B\otimes_B N) \qquad \text{(weil N ein B-Modul ist)}\\ &= (S\otimes_A B)\otimes_B N \end{aligned}$$

Weil N treuflach ist über B, ist mit $S\otimes_A N$ auch $S\otimes_A B$ eine exakte Sequenz. Weil B treuflach ist über A, ist auch S exakt.

Zu (ii). Wir wissen bereits, $M\otimes_A B$ ist flach über B. Sei jetzt S eine Sequenz von B-Moduln mit $S\otimes_B(M\otimes_A B)$ exakt. Es gilt

$$\begin{aligned} S\otimes_B(M\otimes_A B) &\cong S\otimes_B(B\otimes_A M)\\ &\cong S\otimes_A M. \end{aligned}$$

Weil M treuflach über A ist, ist damit auch S exakt.

Zu (iii). Sei S eine exakte Sequenz von A-Moduln. Weil N treuflach über A ist, ist

$$S\otimes_A N \cong S\otimes_A(B\otimes_B N) \cong (S\otimes_A B)\otimes_B N \qquad (1)$$

eine exakte Sequenz. Weil N treuflach über B ist damit aber auch $S\otimes_A B$ exakt.

Sei jetzt umgekehrt S eine Sequenz, für welche $S\otimes_A B$ exakt ist. Weil N treuflach über B ist, ist dann auch die Sequenz (1) exakt. Und weil N treuflach über A ist, ist auch S selbst damit exakt.

Zu (iv). Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) besteht trivialerweise (weil auf Grund der Treuflachheit mM ein echter Teilmodul von M sein muß). Beweisen wir (b) $\Rightarrow$ (a). Sei also M ein von 0 verschiedener flacher A-Modul. Seien m und n die maximalen Ideale von A bzw. B. Wir haben zu zeigen,

$$mM \ne M.$$

Weil der Homomorphismus h lokal ist, gilt

$$mM \subseteq nM \subseteq M.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen $nM \ne M$. Wäre aber $nM = M$, so würde nach dem Lemma von Nakayama $M = 0$ gelten, im Widerspruch zur Annahme (b).

Zu (v)(a). Wir können annehmen, $M \ne 0$. Sei m ein von Null verschiedenes Element von M,

$$0 \ne m \in M,$$

d.h.

$$0 \neq Am \subseteq M.$$

Weil B flach ist über A, induziert die natürliche Einbettung $Am \hookrightarrow M$ eine Injektion

$$(0 \neq)\ Am \otimes_A B \hookrightarrow M \otimes_A B,$$

wobei der linke Modul auf Grund der treuen Flachheit von Null verschieden ist. Weil das Tensorprodukt von Elementen bilinear ist, gilt

$$0 \neq Am \otimes_A B = (m\otimes 1)B$$

(in $Am \otimes_A B$, also auch in $M\otimes_A B$). Insbesondere muß der Erzeuger $m\otimes 1$ des von Null verschiedenen Teilmoduls auf der rechten Seite ungleich Null sein, d.h. $m \otimes 1 \neq 0$ in $M\otimes_A B$. Wir haben gezeigt, die natürliche Abbildung

$$M \longrightarrow M\otimes_A B,\ m \mapsto m\otimes 1,$$

ist injektiv.

<u>Zu (v)(b)</u>. Auf Grund der Basiswechsel-Eigenschaft ist der A/I-Modul

$$B\otimes_A (A/I) \cong B/IB$$

treuflach. Die natürliche Abbildung

$$A/I \longrightarrow B/IB,\ a \bmod \mapsto h(a) \bmod IB,$$

ist damit nach (i) injektiv, d.h. es gilt

$$A \cap IB = I.$$

<u>Zu (v)(c)</u>. Sei $p \in \text{Spec } A$. Dann ist $B_p = B\otimes_A A_p$ auf Grund der Basiswechsel-Eigenschaft treuflach über A_p. Insbesondere ist $pB_p \neq B_p$. Es gibt deshalb ein maximales Ideal n' von B_p, welches pB_p enhält. Insbesondere gilt

$$n' \cap A_p \supseteq pA_p\ ,$$

und - weil pA_p maximal ist in A_p,

$$n' \cap A_p = pA_p\ .$$

Mit $n := n' \cap B$ ergibt sich

$$n \cap A = n' \cap B \cap A = n' \cap A_p \cap A = pA_p \cap A = p.$$

QED.

8. Kriterium für treuflache Homomorphismen

Sei $h: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) h ist treuflach.

(ii) h ist flach und die induzierte Abbildung $\text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } A$ ist surjektiv.

(iii) h ist flach und für jedes maximale Ideal m von A gibt es ein maximales Ideal n von B mit $n \cap A = m$.

Beweis. <u>(i) ⇒ (ii)</u>. Dies wurde gerade bewiesen.

<u>(ii) ⇒ (iii)</u>. Nach Voraussetzung (ii) gibt es zu vorgegebenen m ein $P \in \text{Spec } B$ mit

$$m = P \cap A.$$

Ist n ein maximales Ideal von B, welches P enthält, so gilt

$$m \subseteq n \cap A.$$

Weil m maximal in A ist, gilt sogar das Gleichheitszeichen.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Für jedes maximale Ideal m von A liegt mB ganz in einem Primideal n von B und ist damit insbesondere ein echtes Ideal von B,

$$mB \neq B.$$

Dann ist aber der flache Homomorphismus h sogar treuflach.

QED.

Bemerkung

Ein Morphismus f: Y $\longrightarrow$ X von Schemata heißt treuflach, wenn er flach und surjektiv ist.

9. Eigenschaften treuflacher Homomorphismen

Seien h: A $\longrightarrow$ B ein treuflacher Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1 und M ein A-Modul. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) M ist flach über A $\Leftrightarrow$ $M\otimes_A B$ ist flach über B.

(ii) M ist treuflach über A $\Leftrightarrow$ $M\otimes_A B$ ist treuflach über B.

Ist außerdem A ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul, so gilt auch die folgende Aussage.

(iii) M ist frei über A $\Leftrightarrow$ $M\otimes_A B$ ist frei über B.

Beweis. Zu (i) und (ii). Die Implikationen '$\Rightarrow$' bestehen auf Grund der Basiswechsel-Eigenschaft der Flachheit, bzw. Treuflachheit.

Seien jetzt $M\otimes_A B$ flach über B und S eine exakte Sequenz von A-Moduln. Weil B flach ist über B, ist dann auch

$$S\otimes_A B$$

exakt. Weil $M\otimes_A B$ flach ist über B, ist damit auch

$$S\otimes_B B\otimes_A M = S\otimes_A M \qquad (1)$$

exakt. Wir haben die Flachheit von M über A bewiesen.

Schließlich seien $M\otimes_A B$ treuflach über B und S ein Sequenz von A-Moduln, für welche $S\otimes_A M$ exakt ist. Wegen (1) und $M\otimes_A B$ treuflach über B ist dann aber auch S exakt. Wir haben gezeigt, M ist treuflach über A.

Zu (iii). Weil das Tensorprodukt mit direkten Summen kommutiert, gilt trivialerweise '$\Rightarrow$'. Sei jetzt umgekehrt $M\otimes_A B$ ist frei über B. Dann ist dieser Modul erst recht flach über B, d.h. nach (i) ist M flach über A. Weil A lokal und M endlich erzeugt ist, ist dann aber M sogar frei über A.

QED.

10.Beispiel: Kriterium für die Isomorphie birationaler Morphismen

Seien B ein Integritätsbereich und A $\subseteq$ B ein Teilring (mit 1), der denselben Quotientenkörper hat wie B,

$$Q(A) = Q(B).$$

Dann sind die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(i) Die natürliche Einbettung A $\hookrightarrow$ B ist treuflach.

(ii) A = B.

Beweis. Es reicht die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) zu beweisen. Sei $b \in B$. Wir haben zu zeigen, $b \in A$. Wegen $Q(A) = Q(B)$ hat b die Gestalt

$$b = u/v \text{ mit } u, v \in A.$$

Wegen $b \in B$ gilt

$$uB = bvB \subseteq vB.$$

Weil B treuflach über A sein soll, folgt

$$uA = A \cap uB \subseteq A \cap vB = vA,$$

d.h. $u = va$ für ein $a \in A$. Damit gilt

$$b = u/v = a \in A.$$

QED.

Bemerkungen

(i) Um die eben bewiesene Aussage in die Sprache der Schemata zu übersetzen, benötigen wir die Begriffe des affinen und des birationalen Morphismus. Ein Morphismus von Schemata $f: Y \longrightarrow X$ heißt affin, wenn für jede affine offene Teilmenge $U \subseteq X$ das vollständige Urbild $f^{-1}(U)$ eine affine offene Teilmenge von Y ist. Ein dominanter Morphismus $f: Y \longrightarrow X$ von integren Schemata heißt birational, wenn die induzierte Einbettung $\kappa(X) \hookrightarrow \kappa(Y)$ der rationalen Funktionenkörper ein Isomorphismus ist. Diese Bedingung ist äquivalent zu der Aussage, daß es nicht-leere offene Teilmengen $V \subseteq Y$ und $U \subseteq X$ gibt, für welche f einen Isomorphismus

$$V \xrightarrow{\cong} U$$

induziert. Mit diesen Definitionen läßt sich jetzt die oben bewiesene Aussage wie folgt formulieren.

(ii) Sei $f: Y \longrightarrow X$ eine dominanter Morphismus integrer Schemata. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(a) f ist affin, birational und flach.
(b) f ist ein Isomorphismus.

Beweis. Zum Beweis von (ii) kann man X durch eine affine offene Umgebung eines vorgegebenen Punktes ersetzen, d.h. man kann annehmen, X und Y sind affin, sagen wir

$X :=$ Spec A,
$Y :=$ Spec B.

Der Morphismus f kommt dan von einem Homomorphismus $h: A \longrightarrow B$ kommutativer Ringe mit 1. Weil X und Y integer sind, sind A und B Integritätsbereiche. Weil f dominant ist, ist h injektiv, d.h. man kann A als Teilring von B ansehen. Die Birationalität von f bedeutet dann, daß A und B denselben Quotientenkörper haben. Zusammen mit der Flachheit ergibt sich dann $A = B$, d.h. es gilt (a) $\Rightarrow$ (b). Die umgekehrte Implikation ist trivial.

QED.

11. Beispiel: Flachheit endlicher Morphismen

(i) Ein Morphismus $f: Y \longrightarrow X$ algebraischer Schemata heißt endlich, wenn für jedes affine Teilschema

$$U = \text{Spec } A \subseteq X$$

die offene Menge $f^{-1}(U)$ affin ist, sagen wir

$$f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} B \subseteq Y,$$

und die Einschränkung

$$f^{-1}(U) \longrightarrow U$$

auf den globalen Schnitten der Strukturgarben einen endlichen Homomorphismus

$$h: A \longrightarrow B$$

induziert, d.h. B ist als A-Modul endlich erzeugt (vgl. Hartshorne, Algebraic geometry, Exercise II.3.4).

(ii) Für jeden Punkt $x \in X$ ist dann

$$f^{-1}(x) = Y \times_X \operatorname{Spec} \kappa(x) = f^{-1}(U) \times_U \operatorname{Spec} \kappa(x) = \operatorname{Spec} B \otimes_A \kappa(x),$$

wobei das Tensorprodukt

$$B \otimes_A \kappa(x) := \Gamma(f^{-1}(x), \mathcal{O}_{f^{-1}(X)}) \tag{1}$$

ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Restekörper $\kappa(x)$ von x in X ist. Die $\kappa(x)$-Algebra heißt auch Faser des Homomomorphismus h im Punkt x.

(iii) Ist das Schema X noethersch, reduziert und irredzibel (und f endlich), so sind die folgenden Aussagen äquivalent.
(a) f ist flach.
(b) Die Abbildung

$$\ell: X \longrightarrow \mathbb{Z},\ x \mapsto \dim_{\kappa(x)} \Gamma(f^{-1}(x), \mathcal{O}_{f^{-1}(X)})$$

ist lokal konstant.

Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) besteht auch, wenn X nicht notwendig reduziert und irreduzibel ist.

Beweis von (iii). (a) $\Rightarrow$ (b). Sei $x \in X$ vorgegeben. Es reicht zu zeigen, daß es eine offene affine Umgebung $U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$ von x gibt, für welche

$$B := \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)$$

ein freier A-Modul ist, sagen wir

$$B \cong A^r,$$

denn dann gilt für jedes $u \in U$

$$\ell(u) = \dim_{\kappa(u)} B \otimes_A \kappa(u) = \dim_{\kappa(u)} \kappa(u)^r = r,$$

d.h. die Funktion ℓ ist auf U konstant.
Zum Beweis können wir zunächst X durch irgendeine affine Umgebung $U = \operatorname{Spec} A$ von x ersetzen (und Y durch $f^{-1}(U)$). Wir können also annehmen, X und Y sind affin,

$$X = \operatorname{Spec} A$$
$$Y = \operatorname{Spec} B$$

und f kommt von einem Homomorphismus

$$h: A \longrightarrow B$$

kommuativer Ringe mit 1, wobei B flacher und endlich erzeugter A-Modul ist. Wir lokalisieren nach $x \in \operatorname{Spec} A$ und erhalten einen flachen Homomorphismus

$$h_x: A_x \longrightarrow B_x$$

mit einem flachen und endlich erzeugten Modul B_x über A_x. Weil A_x lokaler Ring ist, ist B_x dann sogar frei über A_x, sagen wir,

$$B_x = A_x \cdot b_1 + \ldots + A_x b_r$$

mit Elementen $b_i \in B_x$, welche linear unabhängig über A_x sind. Die Elemente b_i haben die Gestalt b/s mit $b \in B$ und $s \in A\text{-}x$, wobei die $s \in A\text{-}x$ Einheiten von A_x repräsentieren und damit Einheiten von B_x. Wir können deshalb annehmen, es gilt

$$b_i \in B$$

für jedes i. Betrachten wir die exakte Sequenz von A-linearen Abbildung

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A^r \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

mit $\varphi(a_1,\ldots,a_r) := a_1 b_1 + \ldots + a_r b_r$, $K := \mathrm{Ker}(\varphi)$ und $C := \mathrm{Koker}(\varphi)$. Nach Konstruktion erhalten wir aus φ einen Isomorphismus, wenn wir mit A_x über A tensorieren. Die Sequenz bleibt dabei exakt. Es gilt also

$$K \otimes_A A_x = 0 = C \otimes_A A_x,$$

d.h.

$$K_x = 0 = C_x.$$

Jedes Element aus K bzw. C wird deshalb durch ein Element aus A-x annulliert. Da K und C endlich erzeugte A-Moduln sind, folgt

$$sK = 0 = sC \text{ für ein } s \in A\text{-}x. \qquad (3)$$

Nach Wahl von s gilt $x \in D(s)$. Wir können deshalb U = Spec A durch D(s) = Spec A_s ersetzen (und $f^{-1}(U)$ = Spec B durch $f^{-1}(D(s))$ = Spec B_s). Wegen (3) werden dabei K und C ersetzt durch $K_s = 0$ bzw. $C_s = 0$. Wegen (2) wird dadurch φ zu einem Isomorphismus. Mit anderen Worten, B wird dadurch zu einem freien A-Modul.

<u>(b) ⇒ (a)</u>. Sei jetzt X reduziert und irreduzibel und ℓ eine lokal konstante Funktion. Wir haben zu zeigen, für jeden Punkt $y \in Y$ ist der induzierte Homomophismus

$$f_x^{\#}: \mathcal{O}_{X,f(y)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

der lokalen Ringe flach. Zum Beweis können wir X durch eine so kleine affine Umgebung U = Spec A (und Y durch $f^{-1}(U)$ = Spec B) ersetzen, daß die Funktion ℓ konstant ist auf U. Wir können also annehmen,

X = Spec A,
Y = Spec B,
ℓ ist konstant

und f kommt von einem Homomorphismus

$$h: A \longrightarrow B$$

von Ringen mit 1, wobei B als A-Modul endlich erzeugt wird. Sei

$$\ell(u) = \ell \qquad \text{für jedes } u \in \text{Spec } A.$$

Für jedes maximale Ideal m von A ist dann $B \otimes_A \kappa(m) = B \otimes_A A/m = B/mB$ ein ℓ-dimensionaler Vektorraum. Wir wählen Repräsentanten $b_1,\ldots,b_\ell \in B$ einer Basis dieses Vektorraums und erhalten so (nach dem Lemma von Nakayama) ein Erzeugendensystem des A_m-Moduls B_m und damit eine exakte Sequenz von A_m-Moduln

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A_m^{\ell} \xrightarrow{\varphi} B_m \longrightarrow 0 \tag{4}$$

mit $\varphi(x_1,...,x_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} x_i b_i$. Wir tensorieren über A_m mit

$$Q(A) = A_\eta \ = \ A_\eta/\eta A_\eta = \kappa(\eta)$$

wobei hier η das Null-Ideal bezeichne, d.h. den generischen Punkt von X. Wir erhalten so eine exakte Sequenz von $\kappa(\eta)$-linearen Abbildungen

$$0 \longrightarrow K\otimes_{A_m} \kappa(\eta) \longrightarrow \kappa(\eta)^{\ell} \longrightarrow B_m \otimes_{A_m} \kappa(\eta) \longrightarrow 0. \tag{5}$$

Der Vektorraum rechts,

$$B_m \otimes_{A_m} \kappa(\eta) = B\otimes_A A_m \otimes_{A_m} \kappa(\eta) = B\otimes_A \kappa(\eta),$$

ist gerade die Faser über dem generischen Punkt η, hat also auch die Dimension ℓ. Dann ist die Surjektion von (5) aber ein Isomorphismus, d.h. es gilt

$$0 = K\otimes_{A_m} \kappa(\eta) \ = K\otimes_{A_m} Q(A).$$

Jedes Element des A_m-Moduls K wird deshalb von einem Element von A - {0} annulliert. Weil K endlich erzeugter A_m-Modul ist, gibt es sogar eine Element, welches den ganzen Modul annulliert,

$$sK = 0 \text{ in } A_m^{\ell} \text{ für ein } s \in A\text{-}\{0\}.$$

Weil A ein Integritätsbereich ist, folgt K = 0, d.h.

$$B_m \cong A_m^{\ell}.$$

Wir haben gezeigt, für jedes maximale Ideal m von A ist B_m frei, also flach, über A_m. Nach dem Kriterium für flache Homomorphismen ist B ein flacher A-Modul. Dann ist aber

$$f\colon Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A = X$$

ein flacher Morphismus von Schemata.

QED.

Bemerkungen

(i) Um die geometrische Bedeutung der Zahl

$$\ell(x) := \dim_{\kappa(x)} \Gamma(f^{-1}(x)\,,\, \mathcal{O}_{f^{-1}(X)}) = \dim_{\kappa(x)} B\otimes_A \kappa(x),$$

besser zu verstehen, wollen wir den Fall, daß $f^{-1}(x)$ reduziert ist (d.h. jeder Punkt der Faser tritt mit der Vielfachheit 1 auf) etwas näher untersuchen. Weil

$$\overline{B} := B\otimes_A \kappa(x),$$

als Vektorraum über $k := \kappa(x)$ endlich-dimensional ist, ist $\overline{B}$ als Ring artinsch, besitzt also nur endlich viele, sagen wir r, Primideale,

$$\operatorname{Spec} \overline{B} = \{m_1, \dots , m_r\},$$

wobei diese sämtlich maximal sind. Insbesondere sind diese paarweise komaximal, d.h. nach dem Chinesichen Restesatz hat man einen Isomorphismus

$$\overline{B}/m_1 \cap \dots \cap m_r = \overline{B}/m_1 \bullet \dots \bullet m_r \xrightarrow{\cong} \overline{B}/m_1 \times \dots \times \overline{B}/m_r,$$

$$b \bmod m_1 \bullet ... \bullet m_r \mapsto (b \bmod m_1,...,b \bmod m_r).$$

Nun ist $m_1 \cap ... \cap m_r$ gerade das Radikal des Ideals $\{0\}$ in $\overline{B}$, besteht also aus den nilpotenten Elementen von $\overline{B}$. Weil $\overline{B}$ reduziert sein soll, ist dieses Radikal gleich $\{0\}$, d.h. es gilt

$$\overline{B} \cong \overline{B}/m_1 \times ... \times \overline{B}/m_r,$$

Insbesondere gilt

$$\ell(x) = \dim_{\kappa(x)} \overline{B} = \sum_{i=1}^{r} \dim_{\kappa(x)} \overline{B}/m_i = \sum_{y \in f^{-1}(x)} [\kappa(y):\kappa(x)]$$

Sind die Punkte y der Faser $f^{-1}(x)$ insbesondere $\kappa(x)$-rational, d.h, $\kappa(y) = \kappa(x)$, so gilt

$$\ell(x) = \text{Anzahl der Punkte von } f^{-1}(x).$$

Die Flachheit eines endlichen Morphismus über einem integren Schemata ist deshalb äquivalent dazu, daß alle Faser $f^{-1}(x)$ aus derselben Anzahl von Punkten besteht, falls diese in geeigneter Weise mit ihren Vielfachheiten gezählt werden.

(ii) Die eben bewiesene Aussage besitzt eine Verallgemeinerung auf den Fall von Morphismen f mit Fasern beliebiger Dimension. Die Bedingung der Endlichkeit des Morphismus ist dann durch dessen Projektivität zu ersetzen, d.h. f soll (lokal) die Zusammensetzung

$$f: Y \hookrightarrow \mathbb{P}_X^N \longrightarrow X$$

aus einer abgeschlossenen Einbettung in den projektiven Raum über X und der natürlichen Projektion dieses projektiven Raums auf X sein.[10] An die Stelle der Funktion ℓ tritt dann das Hilbert-Polynom der abgeschlossenen Teilschemata im projektiven Raum. Der Beweis beruht auf den Eigenschaften der Kohomologie kohärenter Garben (vgl. Hartshorne, R.: Algebraic Geometry, Theorem III.9.9). In der Sprache der kommutativen Algebra bekommt die Aussage dann die folgende Gestalt.

(iii) Seien A ein noetherscher Integritätsbereich und

$$R := \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$$

ein graduierter Ring mit $R_0 = A$, welcher über A endlich erzeugt ist. Wir setzen

$$X := \operatorname{Spec} A$$
$$Y := \operatorname{Proj} R.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) Die natürliche Einbettung $A \hookrightarrow R$ induziert einen flachen Morphismus

$$f: Y \longrightarrow X$$

von Schemata.

(b) Das Hilbert-Polynom des graduierten Rings

$$R \otimes_A \kappa(x) = R_x / xR_x$$

ist unabhängig von $x \in \operatorname{Spec} A$.

Zum Beweis von (iii).

---

[10] Allgemeiner kann man $\mathbb{P}_X^N$ durch ein projektives Bündel über X ersetzen, d.h. ein Bündel dessen Fasern projektive Räume sind.

Der Beweis der Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) verwendetet wesentlich Eigenschaften kohärenter Garben und deren Kohomologie (und ist deshalb etwas jenseits unserer gegenwärtigen Möglichkeiten (vgl. den Beweis von Theorem III.9.9 im Buch von Hartshorne).

Den Beweis der Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) läßt sich elementar formulieren und illustriert recht gut den Zusammenhang des projektiven Falls mit dem eben behandelten Fall endlicher Morphismen. Wir beginnen mit einer Vorbemerkung.

Für jede natürliche Zahl ℓ kann man aus dem graduzierten Ring R einen neuen graduierten Ring

$$R(\ell) := \oplus_{n=0}^{\infty} R_{n\ell}$$

Nach Voraussetzung besitzt R ein endliches Erzeugendensystem über A, sagen wir

$$R = A[F_1,\dots,F_r].$$

Dabei können wir annehmen, daß die Elemente F_i von R sämtlich homogen vom positiven Grad sind: anderenfalls ersetze man die F_i durch deren homogene Bestandteile positiven Grades. Es gilt dann

$$\mathrm{Proj}\, R = D_+(F_1) \cup \dots \cup D_+(F_r) \text{ und } D_+(F_i) = \mathrm{Spec}\, R_{(F_i)}$$

$$\mathrm{Proj}\, R(\ell) = D_+(F_1^\ell) \cup \dots \cup D_+(F_r^\ell) \text{ und } D_+(F_r^\ell) = \mathrm{Spec}\, R(\ell)_{(F_i^\ell)}$$

Unmittelbar aus der Definition der Ringe $F_{(F)}$ liest man ab, das die natürliche Einbettung $R(\ell) \hookrightarrow R$ Isomorphismen $R(\ell)_{(F_i^\ell)} \xrightarrow{\cong} R_{(F_i)}$ induziert. Die zugehörigen Isomorphismen der affinen Schemata setzen sich außerdem zu einem Isomorphismus

$$\mathrm{Proj}\, R \xrightarrow{\cong} \mathrm{Proj}\, R(\ell)$$

zusammen. Zum Beweis der Implikation können wir deshalb R durch $R(\ell)$ ersetzen (mit beliebig großen ℓ). Wir können deshalb annehmen:

1. R wird über A durch endlich viele homogene Elemente des Grades 1 erzeugt.
2. Die Hilbert-Reihe von $R\otimes_A \kappa(x)$ ist unabhängig von $x \in \mathrm{Spec}\, A$.

Wegen 1 ist für jeden Grad d der homogene Bestandteil R_d ein endlich erzeugter A-Modul, also

$$R_d \otimes_A \kappa(x)$$

ein endlich-dimensionaler $\kappa(x)$-Vektorraum. Nach Voraussetzung ist dessen Dimension unabhängig von x. Wie im obigen Beweis sieht man, R_d ist lokal frei, also flach über A.[11] Dann ist aber auch die direkte Summe R der R_d flach über A. Weiter ist der Quotientenring R_F von R flach über A für jedes homogene Element F von R. Der Ring $R_{(F)}$ ist nun ein direkter Summand von R_F und als solcher ebenfalls A-flach. Weil das

[11] Bei der obigen Behandlung des Falls endlicher Morphismen Spec B $\longrightarrow$ Spec A haben wir nur die Modulstruktur von B (und nicht die Ringstruktur) benutzt.

Schema Proj R von den affinen Schemata Spec $R_{(F)}$ überdeckt wird, ist damit Proj R flach über Spec A.
QED.

12 Idealweise separierte Moduln

Unser nächstes Ziel ist der Beweis des sogenannten lokalen Kriteriums der Flachheit. Dabei geht es im Fall von Schema-Morphismen

$$f: Y \longrightarrow X$$

darum, für abgeschlossene Teilschemata

$$Z \hookrightarrow X$$

aus der Flachheit der Einschränkung

$$f^{-1}(Z) \longrightarrow Z$$

auf die Flachheit von f zu schließen. Im Fall von affinen Schemata hat man einen Homomorphismus

$$h: A \longrightarrow B$$

von kommutativen Ringen mit 1 und ein Ideal $I \subseteq A$. Gesucht sind Bedingungen an das Ideal I unter denen aus der Flachheit von

$$h\otimes_A A/I: A/I \longrightarrow B/IB$$

die Flachheit von h folgt. Dabei möchte man sich nicht auf den Fall beschränken, daß B als A-Modul endlich erzeugt ist.

Zur Formulierung des lokalen Kriteriums der Flachheit benötigt man den Begriff der idealweisen Separiertheit eines Moduls.

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul und $I \subseteq A$ ein Ideal von A.

Dann heißt M <u>idealweise separiert</u> für I, wenn für jedes endlich erzeugte Ideal $J\subseteq A$ der A-Modul $J\otimes_A M$ separiert ist in der I-adischen Topologie, d.h. wenn gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n\cdot J\otimes_A M = 0.$$

Beispiel 1

Seien $h: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe mit 1, M ein endlich erzeugter A-Modul unt $I \subseteq A$ ein Ideal mit $IB \subseteq \mathrm{rad}(B)$. Dann ist M ein idealweise separierter A-Modul für I.

Denn der Modul $J\otimes_A M$ ist als B-Modul endlich erzeugt, und die I-adische Topologie dieses Moduls ist gerade die IB-adische. Die Aussage folgt damit aus dem Durchschnittssatz von Krull für den Ring B.

Beispiel 2

Seien A ein Hauptidealring und $I \subseteq A$ ein Ideal. Jeder I-adisch separierte Modul M, d.h. jeder Modul mit

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M = 0$$

ist dann idealweise separiert für I.

Denn die Ideal J von A sind also A-Moduln isomorph zu A, d.h. es gilt $J\otimes_A M \cong M$.

Beispiel 3
Seien A ein kommutativer Ring mit 1, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein I-adisch separierter A-Modul:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M = 0$$

Falls M flach ist über A, ist dann M auch idealweise separiert für I.

Für jedes Ideal J von A gilt dann nämlich $J\otimes_A M \cong JM \subseteq M$, d.h. man kann $J\otimes_A M$ mit einem Teilmodul von M identifizieren. Damit ist aber

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n \cdot J\otimes_A M \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M = 0.$$

13. Lokales Kriterium der Flachheit

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul und $I \subseteq A$ ein Ideal. Außerdem sei eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt.
1. I ist nilpotent.
2. A ist noethersch und M ist idealweise separiert für I.

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.
(i) M ist A-flach.
(ii) $Tor_1^A(M, N) = 0$ für jeden Modul N über $A_0 := A/I$.
(iii) $M_0 := M/IM$ ist flach über A_0 und die natürliche Abbildung

$$I\otimes_A M \longrightarrow IM,\ x\otimes m \mapsto xm,$$

ist ein Isomorphismus.[12]
(iv) M_0 ist A_0-flach und $Tor_1^A(M, A_0) = 0$.
(v) M_0 ist A_0-flach und die natürlichen Abbildungen

$$I^n/I^{n+1}\otimes_{A_0} M_0 \xrightarrow{\gamma_n} I^n M/I^{n+1}M,$$

$$(x \bmod I^{n+1})\otimes(m \bmod IM) \mapsto xm \bmod I^{n+1}M,$$

sind Isomorphismen für n = 1, 2, ...
(vi) $M_n := M/I^{n+1}M$ ist flach über $A_n = A/I^{n+1}A$ für n = 0, 1, 2, ...

Die Implikationen

$$(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi)$$

bestehen aus ohne die Bedingungen 1 oder 2.
Beweis. Wir beweisen zunächst die Äquivalenz von (i) und (vi) unter der Voraussetzung, daß 1 oder 2 gilt.

Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (vi) ist gerade die Basiswechsel-Eigenschaft der Flachheit. Beweise wir also

<u>(iv) $\Rightarrow$ (i)</u>. Die Implikation besteht trivialerweise, falls I nilpotent ist. Nehmen wir also an, Bedingung 2 ist erfüllt. Es reicht zu zeigen, für jedes Ideal J von A ist die natürliche Abbildung

$$j: J\otimes_A M \longrightarrow M,\ x\otimes m \mapsto xm,$$

---

[12] Ist I ein maximales Ideal, so ist M_0 trivialerweise fläch über A_0.

injektiv. Weil nach Voraussetzung 2 für den A-Modul $J\otimes M$ separiert ist bezüglich der I-adischen Topologie, reicht es zu zeigen

$$\mathrm{Ker}(j) \subseteq I^n\bullet(J\otimes_A M) \text{ für jedes } n.$$

Für vorgegebenes n gibt es nach dem Lemma von Artin-Rees eine natürliche Zahl $k > n$ mit

$$J \cap I^k \subseteq I^n J.$$

Betrachten wir die natürlichen Abbildungen

$$J\otimes_A M \xrightarrow{f} (J/J\cap I^k)\otimes_A M \xrightarrow{g} (J/I^nJ)\otimes_A M \cong^{13} J\otimes_A M \,/\, I^n\bullet J\otimes_A M.$$

Weil M_{k-1} flach ist über A_{k-1} ist die natürliche Abbildung

$$j': (J/J\cap I^k)\otimes_A M =^{14} (J/J\cap I^k)\otimes_{k-1} M_{k-1} \longrightarrow M_{k-1}$$

injektiv, d.h. es gilt

$$\mathrm{Ker}(j) \subseteq^{15} \mathrm{Ker}(f\circ j') = \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g\circ f) = I^n\bullet J\otimes M.$$

Beweisen wir jetzt die verbleibenden Implikationen

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \Leftrightarrow \text{(iii)} \Leftrightarrow \text{(iv)} \Rightarrow \text{(v)} \Rightarrow \text{(vi)}$$

ohne die Bedingungen 1 oder w.

<u>(i) ⇒ (ii)</u>. trivial.

<u>(ii) ⇒ (iii)</u>. Sei

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von A_0-Moduln. Dann ist die folgende Sequenz exakt:

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, N'') \longrightarrow M\otimes_A N' \longrightarrow M\otimes_A N \longrightarrow M\otimes_A N'' \longrightarrow 0.$$

Der Tor-Modul links ist nach Voraussetzung gleich Null. Damit[16] ist M_0 flach über A_0.

Aus der Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0$$

erhalten wir die von

$$\mathrm{Tor}_1^A(A_0, M) \longrightarrow I\otimes_A M \longrightarrow A\otimes_A M.$$

Der Tor-Modul links ist nach Voraussetzung (ii) gleich Null, also ist die natürliche Abbildung $I\otimes_A M \longrightarrow A\otimes_A M = M$ injektiv.

<u>(iii) ⇒ (iv)</u>. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0$$

erhalten wir durch tensorieren mit M über A die exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_1^A(A, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(A_0, M) \longrightarrow I\otimes_A M \longrightarrow A\otimes_A M.$$

---

[13] Das Tensorprodukt ist rechtsexakt.

[14] Der erste Tensorfaktor wird von I^k annulliert, ist also ein Modul über A_{k-1}.

[15] $f\circ j': J\otimes_A M \longrightarrow M_{k-1}$, $x\otimes m \mapsto xm \bmod I^k M$, ist gerade die Zusammensetzung von j mit der natürlichen Surjektion $M \longrightarrow M_{k-1}$.

[16] Für A_0-Moduln stimmt der Funktor $M\otimes_A$ mit $M\otimes_{A_0}$ überein.

Der Tor-Modul links ist Null, weil A flach ist über sich selbst. Die Abbildung rechts ist injektiv nach Voraussetzung (iii). Also ist auch der zweite Tor-Modul gleich Null.

<u>(iv) ⇒ (ii)</u>. Sei N ein A_0-Modul. Wir betrachten eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

mit F_0 frei über A_0. Wir tensorieren mit M über A und erhalten eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, F_0) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, N) \longrightarrow M\otimes_A K \longrightarrow M\otimes_A F_0.$$

Da K und F_0 Moduln über A_0 sind, kann die beiden Tensorprodukte rechts durch Tensorprodukte über A_0 ersetzen und erhält eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, F_0) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, N) \longrightarrow M_0\otimes_{A_0} K \longrightarrow M_0\otimes_{A_0} F_0.$$

Weil M_0 flach ist über A_0 ist die Abbildung rechts injektiv. Der Tor-Modul links ist Null nach Voraussetzung (iv) (und weil die Tor-Funktoren mit direkten Summen kommutieren). Also gilt

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0.$$

Wir haben damit die folgenden Implikationen bewiesen.

$$(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$$

<u>(ii) ⇒ (v)</u>. Wir tensorieren die folgenden exakten Sequenzen mit M über A,

$$0 \longrightarrow I^{n+1} \longrightarrow I^n \longrightarrow I^n/I^{n+1} \longrightarrow 0$$

und erhalten ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen[17]

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & I^{n+1}\otimes M & \longrightarrow & I^n\otimes M & \longrightarrow & (I^n/I^{n+1})\otimes M & \longrightarrow 0 \\
& \alpha_{n+1}\downarrow & & \alpha_n\downarrow & & \gamma_n\downarrow & \\
0 \longrightarrow & I^{n+1}M & \longrightarrow & I^nM & \longrightarrow & I^nM/I^{n+1}M & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Die beiden linken vertikalen Abbildungen α_{n+1} und α_n sind dabei surjektiv. Nach Voraussetzung ist und der bereits bewiesenen Implikation (ii) ⇒ (iii) ist α_1 injektiv. Mit α_n ist aber auch α_{n+1} injektiv, d.h. alle α_n sind injektiv, also Isomorphismen. Dann sind aber auch alle γ_n Isomorphismen.

Es bleibt nocht die Implikation (v) ⇒ (vi) zu beweisen. Zu deren Beweis benötigen wir die folgende Aussage.

<u>Fakt</u>: Mit (ii) gilt auch $\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$ für jeden A_n-Modul N und jedes $n \ge 0$.

Wir beweisen diese Aussage durch Induktion nach n. Für n = 0 ist dies gerade die Voraussetzung (ii). Sei jetzt n > 0. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow IN \longrightarrow N \longrightarrow N/IN \longrightarrow 0$$

Durch Tensorieren mit M über A erhalten wir die exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, IN) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, N/IN)$$

---

[17] Die Exaktheit der oberen Zeile ergibt sich aus Voraussetzung (ii).

Weil N ein A_n-Modul ist sind IN und N/IN Moduln über A_{n-1}. Nach Induktionsvoraussetzung sind die beiden äußeren Tor-Moduln Null. Dann ist aber auch der mittlere Tor-Modul Null.

(v) $\Rightarrow$ (vi).
Wir haben für alle n zu zeigen, daß M_n flach ist über A_n. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Für n = 0 ist dies nach Voraussetzung (v) der Fall. Sei jetzt n > 0. Wir setzen $I_n := I/I^{n+1}$ und betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & (I^{i+1}/I^{n+1})\otimes M \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\alpha}_{i+1}"'] & (I^i/I^{n+1})\otimes M \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\alpha}_i"'] & (I^i/I^{i+1})\otimes M \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_i"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I^{i+1}M_n = I^{i+1}M/I^{n+1}M \arrow[r] & I^iM/I^{n+1}M \arrow[r] & I^iM/I^{i+1}M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung (v) sind die rechten vertikalen Abbildungen Isomorphismen. Nach dem Fünfer-Lemma ist dann aber mit $\overline{\alpha}_{i+1}$ auch $\overline{\alpha}_i$ ein Isomorphismus. Weil $\overline{\alpha}_{i+1}$ für i = n trivialerweise ein Isomorphismus ist, müssen somit alle $\overline{\alpha}_i$ Isomorphismen sein. Insbesondere ist

$$\overline{\alpha}_1: (I/I^{n+1})\otimes M \longrightarrow IM/I^{n+1}M$$

ein Isomorphismus. Wir schreiben diesen Isomorphismus in der Gestalt

$$\overline{\alpha}_1: IA_n \otimes_{A_n} M_n \longrightarrow IM_n$$

und sehen so, daß Bedingung (iii) mit M_n anstelle von M und A_n anstelle von A erfüllt ist. Auf Grund der bereits bewiesenen Implikation (iii) $\Rightarrow$ (ii) ist damit auch (ii) für M_n und A_n erfüllt. Auf Grund des eben bewiesenen Fakts erhalten wir

$$\mathrm{Tor}_1^{A_n}(M_n, N) = 0 \text{ für jeden } A_n\text{-Modul N.}$$

Mit anderen Worten M_n ist flach über A_n (für jedes n).
QED.

Projektive Moduln

Definitionen
Seien A ein Ring. Ein A-Modul heißt projektiv, falls er ein direkter Summand eines freien Moduls ist.

Satz 1
Seien A ein lokaler Ring[18] und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) M ist projektiv.
(ii) M ist flach[19].
(iii) M ist frei.
Beweis. siehe Bourbaki, Algèbre commutative, Kapitel II, §3.2, Corollar 2 zu Proposition 5.
QED.

---

[18] d.h. A besitze genau ein maximales Ideal.
[19] d.h. der Funktor $\otimes_A M$ überführt exakte Sequenzen von A-Moduln in exakte Sequenzen.

Satz 2

Seien $h: A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und M ein projektiver A-Modul. Dann ist $M \otimes_A B$ ein projektiver B-Modul.

Beweis. Das Tensorprodukt einer direkten Summe ist isomorph zur direkten Summe der Tensorprodukte der Summanden.
QED.

Folgerung

Seien A ein Ring und $f: M \longrightarrow N$ eine A-lineare Abbildung von endlich erzeugten projektiven A-Moduln desselben Rangs. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) f ist bijektiv.
(ii) f ist surjektiv.

Beweis. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial. Es reicht (ii) $\Rightarrow$ (i) zu beweise.
1. Fall. M und N sind freie A-Moduln.
Bezeichne r den gemeinsame Rang der beiden Moduln. Wir können annehmen,

$$M = N = A^r.$$

Weil f surjektiv ist, gilt dasselbe für die durch f auf der höchsten äußeren Potenz induzierte Abbildung

$$\wedge^r f: \wedge^r M \longrightarrow \wedge^r N,\ m_1\wedge...\wedge m_r \mapsto f(m_1)\wedge...\wedge f(m_r).$$

Identifiziert man $\wedge^r M$ und $\wedge^r N$ mit A, so wird diese Abbildung gerade die Multiplikation mit der Determinante von f. Es gibt deshalb ein $a \in A$ mit

$$a\bullet\det(f) = 1.$$

Insbesondere ist det(f) eine Einheit von A. Dann ist aber f umkehrbar, also bijektiv.
2. Fall. M und N beliebig.
Nach Voraussetzung ist f surjektiv. Es gibt also eine exakte Sequenz von A-linearen Abbildungen

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

(wobei K den Kern von f bezeichne). Wir haben zu zeigen $K = 0$. Dazu reicht es zu zeigen,

$$\mathrm{Supp}(K) = \varnothing,$$

d.h. es reicht zu zeigen,

$$K_p = 0 \text{ für jedes } p \in \mathrm{Spec}\, A.$$

Zum Beweis der letzteren Ausage tensorieren wir die kurze exakte Sequenz mit A_p über A und erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K_p \longrightarrow M_p \xrightarrow{f_p} N_p \longrightarrow 0$$

Weil M und N projektiv und endlich erzeugt und vom selben Rang sind über A, gilt dasselbe für M_p und N_p über A_p. Weil A_p ein lokaler Ring ist, sind M_p und N_p sogar freie Moduln. Nach dem ersten Fall folgt aus der Surjektivität von f_p sogar die Bijektivität. Dann ist aber

$$K_p = 0.$$

QED.

Diskrete Bewertungsringe

1. Definition

Ein diskreter Bewertungsring ist ein Integritätsbereich A mit genau einem maximalen Ideal $m \neq 0$, das von einem Element erzeugt wird, $m = pA$.

Beispiel

Seien $a \in U$ ein Punkt der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ und A der Ring der in einer Umgebung von a konvergenten Potenzreihen. Wir betrachten die Menge

$$m := (z-a)A$$

der konvergenten Potenzreihen mit dem Absolutglied 0. Diese bilden ein Ideal von A. Jede konvergente Potenzreihe, welche nicht in m liegt, also ein von 0 verschiedenes Absolutglied hat, ist eine Einheit in A. Deshalb ist m das einzige maximale Ideal von A. Es wird vom Element z-a erzeugt.

2. Die Ideale eines diskreten Bewertungsrings

Jedes Ideal eines diskreten Bewerungsrings A ist ein Hauptideal. Insbesondere sind diskrete Bewertungsring noethersch.
Genauer:

(i) Die einzigen Ideale von A sind 0, A und die Potenzen von $m = \pi A$.

(ii) Jedes Element von A - {0} hat die Gestalt $a\pi^n$ mit einer Einheit a von A.

Beweis. Sei

$$m = \pi A$$

das maximale Ideal von A.
<u>1. Schritt:</u> Krullscher Durchschnittsatz.
Wir setzen

$$I := \bigcap_{n=0}^{\infty} m^n.$$

Für $x \in I$ -{a}und jede natürliche Zahl n gilt dann $x \in m^n$ also,

$$x = y_n \pi^n \text{ mit } y_n \in A-\{0\}.$$

Wegen

$$(y_{n+1}\pi - y_n)\pi^n = x - x = 0$$

folgt, weil A ein Integritätsbereich ist,

$$y_n = y_{n+1}\pi = y_{n+2}\pi^2 = \dots$$

also $y_n \in I$, also auch $x = y_n \pi^n \in mI$. Wir haben gezeigt, $I = mI$. Nach dem Lemma von Nakayama folgt $I = 0$ (wegen $I \subseteq m = \mathrm{rad}(A)$).
<u>2. Schritt.</u> Jedes Ideal ist Hauptideal.
Sei I ein echtes Ideal von A. Im Fall $I = 0$ ist nichts zu beweisen. Sei also $I \neq 0$. Nach dem 1. Schritt gibt es ein n mit

$$I \subseteq m^n \text{ und } I \not\subseteq m^{n+1}.$$

Sei $x \in I - m^{n+1}$. Wegen $I \subseteq m^n$ gilt

$$x = y\pi^n \text{ mit } y \in A.$$

Wegen $x \in I - m^{n+1}$ kann y nicht m liegen, d.h. y ist eine Einheit. Es folgt

$$I \supseteq xA = y\pi^n A = \pi^n A = m^n \supseteq I,$$

also

$$I = m^n = \pi^n A.$$

Man beachte, für jedes von Null verschiedene Element x gibt es eine nicht-negative ganze Zahl n mit $x \in m^n - m^{n+1}$. Die obige Rechung mit $I = m^n$ zeigt, x hat die Gestalt

$$x = y\pi^n$$

mit einer Einheit y von A.
QED.

3. Diskrete Bewertungen

Sei K ein Körper. Eine <u>diskrete Bewertung</u>[20] auf k ist eine surjektive Abbildung

$$v: k - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

mit

1. $v(ab) = v(a) + v(b)$ für $a, b \in k - \{0\}$.
2. $v(a + b) \geq \min \{v(a), v(b)\}$

Wir setzen dann v auf k fort, indem wir setzen

$$v(0) = \infty.$$

Beispiel 1

Sei p ein Primzahl. Für jede rationale Zahl $c \in \mathbb{Q} - \{0\}$ setzen wir

$$v_p(c) = r$$

falls p in der Primfaktorzerlegung von c mit dem Exponenten $r \in \mathbb{Z}$ vorkommt.
Auf diese Weise ist eine diskrete Bewertung von $\mathbb{Q}$ definiert.

Beispiel 2

Seien k ein Körper und $K = k(X)$ der rationale Funktionenkörper in einer Unbestimmten. Weiter sei $p \in k[X]$ ein irreduzibles Polynom. Wir setzen

$$v_p(c) = r$$

falls p in der Primfaktorzerlegung von c mit dem Exponenten $r \in \mathbb{Z}$ vorkommt.
Auf diese Weise ist eine diskrete Bewertung von K definiert.

Beispiel 3

Seien k ein Körper und $K = k(X)$ der rationale Funktionenkörper in einer Unbestimmten. Jedes Element von $K - \{0\}$ hat die Gestalt

$c = a/b$ mit Polynome $a, b \in k[X]$.
Wir setzen

$$v_\infty(c) := -\deg(c) := \deg(b) - \deg(a).$$

Auf diese Weise ist eine diskrete Bewertung von K definiert.
Bemerkung

Die Konstruktion von Beispiel 2 mit $\frac{1}{X}$ anstelle von p liefert gerade die Konstruktion von Beispiel 3.

4. Der diskrete Bewertungsring zu einer diskreten Bewertung

5. Die diskrete Bewertung zu einem diskreten Bewertungsring

[20] von Rang 1

Endliche Erweiterungen

Normatisierungssatz (von E. Noether)

Seien k ein Körper und $A = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann gibt es Elemente $y_1,\dots, y_r \in A$, welche algebraisch unabhängig über k sind mit der Eigenschaft, daß A ganz ist über $k[y_1,\dots, y_r]$.

Beweis. Siehe H. Matsumura: Commutative Algebra, Benjamin, New York 1970, (14.G) Corollary 1.
QED.

Reguläre Sequenzen und freie Auflösungen

1. Freie Auflösungen

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Eine freie Auflösung vom M ist eine exakte Sequenz von A-Moduln

$$\dots \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

mit der Eigenschaft, daß die F_n für jedes n frei sind über M. Letztere bilden einen Komplex F_* dessen einzige von 0 verschiedene Homologie die 0-te ist, wobei

$$H_0(F_*) = M$$

gilt. Wir werden die Auflösung oft in der Gestalt

$$F_* \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

aufschreiben.

Bemerkungen

(i) Sei ein Erzeugendensystem des Moduls M gegeben, sagen wir

$$\{m_i\}_{i\in I}.$$

Für jeden Erzeuger m_i wählen wir ein Symbol, sage wir e_i und definieren F_0 als den freien A-Modul mit der Basis $\{e_i\}_{i\in I}$. Die A-lineare Abbildung

$$F_0 \longrightarrow M, \sum_i a_ie_i \mapsto \sum_i a_im_i\ , \tag{1}$$

ist eine Surjektion, d.h. wir erhalten eine exakte Sequenz

$$F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Sei M’ der Kern der Surjektion (1). Indem wir die gerade durchgeführte Konstruktion mit M’ anstelle von M wiederholen, erhalten wir eine Surjektion

$$F_1 \longrightarrow M', \sum_i a_ie_i \mapsto \sum_i a_im'_i\ , \tag{2}$$

Weil M’ ein Teilmodul von F_0 ist, erhalten wir durch zusammensetzen von (1) und (2) eine exakte Sequenz

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Wir fahren so fort und gewinnen auf diese Weise eine freie Auflösung von M über A. Insbesondere sehen wir, daß jeder A-Modul M eine freie Auflösung besitzt.

(ii) Ist A ein noetherscher lokaler Ring mit dem maximalen Ideal m und M ein endlich erzeugter A-Modul, so kann man das Erzeugendensystem

$$\{m_i\}_{i\in I}.$$

so wählen, daß es aus einer minimalen Anzahl von Elementen besteht: nach dem Lemma von Nakayama reicht es Elemente $m_i \in M$ zu wählen, deren Restklassen in M/mM eine Basis dieses Vektorraums über A/m bilden. Indem man dasselbe für alle Kerne tut, die in der Konstruktion von (i) auftreten, erhält man eine Auflösung, welche minimale freie Auflösung von M über A heißt.

(iii) Seien (A,m) ein noetherscher lokaler Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und

$$F_* \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine minimale freie Auflösung. Für jedes Differential $d_n: F_n \longrightarrow F_{n-1}$ gilt dann[21]

$$\mathrm{Ker}(d_n) \subseteq m\bullet F_n .$$

Insbesondere ist $d_n \otimes_A A/m: F_n/m\bullet F_n \longrightarrow F_{n-1}/m\bullet F_{n-1}$ die Null-Abbildung für jedes n. Für die Homologie der mit A/m tensorierten Auflösung erhalten wir

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, A/m) = H_n(F_* \otimes_A A/m) = F_n/m\bullet F_n$$

2. Reguläre Sequenzen

Seien A ein noetherscher kommutativer Ring mit 1 und M ein endlich erzeugter A-Module. Ein Element $a \in A$ heißt M-regulär, wenn die Multiplikation mit x in M injektiv ist, d.h. wenn die Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M$$

exakt ist. Eine Folge von Elementen $a_1, \dots, a_r \in A$ heißt M-regulär oder auch M-Sequenz, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. $M/(a_1, \dots, a_n)M \neq 0$.
2. a_i ist $M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$-regulär für $i = 1, \dots, r$.

Eine Folge von Elementen $a_1, \dots, a_r \in A$ heißt M-quasi-regulär, wenn für jedes homogene Polynom $F(X_1, \dots, X_r) \in M[X_1, \dots, X_r]$ mit Koeffizienten aus M mit

$$F(a) \in (a_1, \dots, a_r)^{\deg F+1}M$$

die Koeffizienten von F in $(a_1, \dots, a_r)M$ liegen.

Bemerkungen

(i) Wir schreiben X für die Unbestimmten $X_1, \dots, X_r$ und I für das von den Elementen $a_1, \dots, a_r$ erzeugte Ideal. Der surjektive Gruppen-Homomorphismus

---

[21] Bezeiche $\{f_i\}_{i\in I}$ die linear unabhängige Basis von F_n, die zur Konstruktion von F_n verwendet wurde.

Ein Element aus $\mathrm{Ker}(d_n)$ ist dann eine Linearkombination $\sum_i a_i f_i$ mit $\sum_i a_i d_n(f_i) = 0$. Die Restklassen der $d_n(f_i)$ in $\mathrm{Ker}(d_{n-1})/m\bullet \mathrm{Ker}(d_{n-1})$ bilden nun nach Konstruktion eine Vektorraum-Basis über A/m.

Deshalb liegen alle Koeffizienten a_i im maximalen Ideal m, d.h. es gilt $\sum_i a_i f_i \in m\bullet F_n$.

$$M[X] \longrightarrow gr_I(M),\ F(X) \mapsto f(a) \bmod I^{\deg F+1}M \text{ (für F homogen)}$$

bildet dann IM[X] vollständig in die Null ab, induziert also einen Homomorphismus

$$(M/IM)[X] \longrightarrow gr_I(M).$$

Die Quasi-Regularität der a_i des Moduls M ist dann äquivalent zur bijektivität dieses Homomorphismus.

(ii) Jede M-reguläre Sequenz ist M-quasi-regulär.

(iii) Nehmen wir an, daß eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist.

1. M ist endlich erzeugt und $I = (a_1, \dots , a_r) \subseteq \text{rad } A$.
2. A ist ein graduierter Ring, M ein graduierter A-Modul und die a_i sind homogen und haben einen positiven Grad.
3. Für die Moduln $M_i := M/(a_1, \dots , a_i)M$, $i = 0, \dots, r-1$ ist die I-adische Topologie <u>separiert</u>:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M_i = 0.$$

Dann bilden die a_i eine M-reguläre Folge, falls sie eine M-quasi-reguläre Folge bilden.

Insbesondere bleibt dann die Eigenschaft, eine reguläre Folge zu bilden, beim Permutieren der a_i erhalten.

(iv) Sei eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln gegegen, sagen wir

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Dann ist jedes Element $a \in A$, welches M'-regulär und M''-regulär ist, auch M-regulär.

Beweis von (ii).

<u>1. Schritt</u>. Seien $x \in A$ ein Element und $I = (a_1, \dots , a_r)$ ein Ideal, welches von einer quasi-regulären Sequenz $a_1, \dots , a_r \in A$ erzeugt wird. Es gelte $IM:x = IM$. Dann gilt auch

$$I^nM:x = I^nM$$

für jede natürliche Zahl n.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Für n = 1 gilt die Behauptung nach Voraussetzung. Sei jetzt n > 1. Sei ξ ein Element von M mit

$$\xi \in I^nM:x, \tag{1}$$

d.h. $x\xi \in I^nM$. Dann gilt auch $x\xi \in I^{n-1}M$, also nach Induktionsvoraussetzung

$$\xi \in I^{n-1}M.$$

Insbesondere gibt es eine homogenes Polynom der Grades n-1, sagen wir

$$F \in M[X]$$

mit $F(a) = \xi$. Auf Grund der Voraussetzung (1) gilt $xF(a) \in I^nM$. Nach Definition der Quasi-Regularität liegen dann aber die Koeffizienten von xF(X) in IM, d.h. die Koeffizienten von F(X) liegen in $IM:x = IM$. Damit gilt aber

$$\xi = F(a) \in I^nM$$

(weil F homogen vom Grad n-1 ist).

<u>2. Schritt</u>. Beweis von (ii).

Sei $a_1, \dots , a_r \in A$ eine M-reguläre Sequenz. Wir haben zu zeigen, dieses Sequenz ist M-quasi-regulär.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach r.

Sei zunächst $r = 1$ (und $a_1 = a$). Quasi-Regularität von a bedeutet, für jedes $m \in M$ besteht die Implikation

$$a^n m \in a^{n+1}M \Rightarrow m \in aM$$

Mit $a^n m \in a^{n+1}M$ gilt $a^n m = a^{n+1}m'$ mit $m'\in M$, also $a^n(m - am') = 0$. Weil a nach Voraussetzung ein M-reguläres Element ist, folgt $m - am' = 0$, also $m = am'$, d.h. es ist $m \in aM$. Die Implikation besteht tatsächlich, d.h. die einelementige Sequenz a ist M-quasi-regulär.

Sei jetzt 1. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Sequenz $a_1, \dots , a_{r-1}$ M-quasi-regulär. Sei

$$F(X) \in M[X]$$

ein homogenes Polynom des Grades d mit $F(a) \in I^{d+1}M$. Wir haben zu zeigen, die Koeffizienten von F liegen in IM. Das ist trivialerweise der Fall, wenn $d = 0$ gilt. Sei jetzt $d > 0$.

Nach Voraussetzung gibt es ein homogenes Polynom des Grades d+1, sagen wir $G(X) \in M[X]$ mit $F(a) = G(a)$. Indem wir die Koeffizienten von F modulo IM abändern, erreichen wir

$$F(a) = 0.$$

Wir schreiben

$$F(X) = F'(X_1, \dots , X_{r-1}) + X_r F''(X_1, \dots , X_r)$$

mit einem homogenen Polynom F' des Grades d, in welchem die letzte Unbestimmte nicht vorkommt und einem homogenen Polynom F" des Grades d-1. Es gilt

$$F''(a)a_r = F(a) - F'(a_1, \dots , a_{r-1}) = - F'(a_1, \dots , a_{r-1})$$

also

$$F''(a) \in (a_1, \dots , a_{r-1})^d M:a_r = (a_1, \dots , a_{r-1})^d M \subseteq I^d M, \tag{2}$$

wobei das Gleichheitszeichen in der Mitte auf Grund des ersten Schritts besteht (und weil die a_i eine reguläre Sequenz bilden). Nach Induktionsvoraussetzung bezüglich d liegen die Koeffizienten von F" in IM. Es reicht zu zeigen, dasselbe gilt auch für die Koeffizienten von F'.

Auf Grund des Gleichheitszeichnens in (2) gibt es ein homogenes Polynom des Grades d, sagen wir

$$f''(X_1, \dots , X_{r-1}) \in M[X_1, \dots , X_{r-1}],$$

mit $f''(a_1, \dots , a_{r-1}) = F''(a)$. Wir setzen

$$G(X_1, \dots , X_{r-1}) := F'(X_1, \dots , X_{r-1}) + a_r f''(X_1, \dots , X_{r-1}) \tag{3}$$

Dann gilt

$$G(a_1, \dots , a_{r-1}) = F'(a_1, \dots , a_{r-1}) + a_r f''(a_1, \dots , a_{r-1})$$
$$\in^{[22]} (a_1, \dots , a_{r-1})^d M.$$

---

[22] F' und f" sind beide homogen vom Grad d.

Weil die $a_1, \ldots, a_{r-1}$ eine M-quasi-reguläre Folge bilden, liegen die Koeffizienten von G in $(a_1, \ldots, a_{r-1})M$. Die Koeffizienten von $F'(X_1, \ldots, X_{r-1})$ müssen dann aber (wegen (3)) in IM liegen.
QED.
Beweis von (iii). Aus jeder der ersten beiden Bedingunen folgt die dritte. Es reicht also zu zeigen, die Behauptung gilt, falls die dritte Bedingung erfüllt ist. Nehmen wir an, die a_i bilden eine quasi-reguläre Sequenz.

1. Schritt. a_1 ist M-regulär.

Sei $m \in M$ ein Element mit $a_1 m = 0$. Weil Bedingung 3 erfüllt sein soll, reicht es zu zeigen,

$$m \in I^n M$$

für jede natürliche Zahl n. Weil die a_i eine M-quasi-reguläre Folge bilden sollen, gilt dies jedenfalls für n = 1. Nehmen wir jetz an, es gilt n > 1 und wir hätten bereits gezeigt

$$m \in I^{n-1} M.$$

Wir schreiben

$$m = \sum_{j=1}^{s} \mu_j(a) m_j$$

mit $m_j \in M$ und paarweise verschiednen Potenzprodukten $\mu_j(X_1,\ldots,X_r)$ des Grades n-1 in den X_i. Es gilt

$$0 = a_1 m = \sum_{j=1}^{s} a_1 \mu_j(a) m_j.$$

Weil die a_i eine M-quasi-reguläre Folge bilden, folgt $m_j \in IM$ für jedes j, also

$$m = \sum_{j=1}^{s} \mu_j(a) m_j \in I^{n-1} \cdot IM = I^n M.$$

2. Schritt. Die M-Regulariät der $a_1, \ldots, a_r$.

Sei $M' := M/a_1 M$. Es reicht zu zeigen, $a_2, \ldots, a_r$ bilden eine M'-quasi-reguläre Folge, dann nach Induktionsvoraussetzung ist die Folge dann auch M-regulär, und zusammen mit dem ersten Schritt, folgt die Behauptung. Sei

$$F(X_2, \ldots, X_r) \in M'[X_2, \ldots, X_r]$$

ein homogenes Polynom des Grades n mit Koeffizienten aus M' mit

$$F(a_2, \ldots, a_r) \in I^{n+1} M'. \tag{4}$$

Wir haben zu zeigen, die Koeffizienten von F liegen in IM'. Wegen (4) können wir die Koeffizienten von F modulo IM so abändern, daß gilt

$$F(a_2, \ldots, a_r) = 0.$$

Wir wählen einen homogenen Repräsentanten

$$G(X_2, \ldots, X_r) \in M[X_2, \ldots, X_r]$$

von F des Grades n, d.h. derart, daß gilt

$$F = G \bmod a_1 M[X_2, \ldots, X_r]$$

Dann liegt G(a) in $a_1 M$, sagen wir

$$G(a) = a_1 m \text{ mit } m \in M.$$

Wir zeigen zunächst

$$m \in I^j M \text{ für } j = 0, 1, ..., n\text{-}1. \tag{5}$$

Für j = 0 ist dies trivialerweise richtig. Nehmen wir an dies ist richtig für ein gegebenes $j \ge 0$. Dann kann man m in der Gestalt

$$m = H(a)$$

schreiben mit einem homogenen Polynom H des Grades j mit Koeffizienten aus M. Es folgt

$$a_1 H(a) = a_1 m = G(a) \in I^n M.$$

(weil G homogen vom Grad n ist), also im Fall $j \le n\text{-}2$ auch

$$a_1 H(a) \in I^{j+2} M.$$

Weil die $a_1, \dots, a_r$ eine M-quasi-reguläre Folge bilden, liegen die Koeffizienen von H in IM, d.h. es gilt

$$m = H(a) \in I^{j+1} M.$$

Damit ist (5) bewiesen. Aus (5) mit j = n-1 erhalten wir

$$G(a) = a_1 m = a_1 H(a)$$

mit einem homogenen Polynom des Grades n-1 mit Koeffizienten aus M. Mit anderen Worten, das Polynom

$$G(X_2, \dots, X_r) - X_1 H(X_1, \dots, X_r)$$

ist Null an der Stelle a. Dieses Polynom ist homogen vom Grad n. Weil die Elemente $a_1, \dots, a_r$ eine M-quasi-reguläre Folge bilden, liegen die Koeffizienten dieses Polynoms in IM. Weil in G die Unbestimmte X_1 nicht vorkommt (was für alle Glieder von $X_1 H$ der Fall ist), liegen alle Koeffizienten von G in IM. Dann liegen aber alle Koeffizienten von

$$F = G \bmod a_1 M[X_2, \dots, X_r]$$

in IM'.
QED.
Beweis von (iv). Betrachten wir das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \varphi\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dessen vertikale Pfeile die Multiplikation mit a bezeichnen. Nach dem Schlangen-Lemma hat man ein kommutatives Diagramm

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\beta) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\gamma) \longrightarrow \mathrm{Koker}(\alpha)$$

Nach Voraussetzung gilt $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\gamma) = 0$. Damit ist aber auch $\mathrm{Ker}(\beta) = 0$, d.h. a ist M-regulär.

QED.

3. Der Koszul-Komplex

Sei A ein kommutativer Ring mit 1 und $a \in A$ ein Element. Die Multiplikation mit a definiert einen in den Graden 1 und 0 konzentrierten Komplex

$$K(a) = K(a, A): 0 \longrightarrow A \xrightarrow{a} A \longrightarrow 0,$$

welcher <u>Koszul-Komplex des Elements</u> a in A heißt. Für Elemente

$$a_1,\ldots,a_r \in A$$

heißt das Tensorprodukt

$$K(\underline{a}, A) := K(a_1,\ldots,a_r, A) := K(a_1,A)\otimes_A\ldots\otimes_A K(a_2, A)$$

<u>Koszul-Komplex</u> der Sequenz $\underline{a} = \{a_1,\ldots,a_r\}$ in A. Für jeden A-Modul M heißt

$$K(\underline{a}, M) := K(\underline{a},A)\otimes_A M$$

<u>Koszul-Komplex</u> der Sequenz $\underline{a}$ in M.
Für jeden Komplex von A-Moduln C setzen wir

$$C(\underline{a}) := C\otimes K(\underline{a},A).$$

Beispiel 1: K(a,b,A)

Seien a, b $\in$ A zwei Elemente. Die Objekte der zugehörigen Koszul-Komplexe des Grades d identifizieren wir mit den homogenen Polynomen des Grades im Polynomring A[X,Y]. Wir erhalten so

$$\begin{aligned}K(a,b, A) &= K(a,A)\otimes K(b,A)\\ &= (0 \longrightarrow AX \xrightarrow{a} A \longrightarrow 0)\otimes(0 \longrightarrow AY \xrightarrow{b} A \longrightarrow 0)\\ &= 0 \longrightarrow AXY \longrightarrow AX \oplus AY \longrightarrow A \longrightarrow 0\end{aligned}$$

$$\alpha XY \mapsto \alpha aY\text{-}\alpha bX,\ \ \alpha X+\beta Y \mapsto \alpha a+\beta b$$

Beispiel 2: K(a,b,c,A)

Seien a, b, c $\in$ A drei Elemente. Die Objekte der zugehörigen Koszul-Komplexe des Grades d identifizieren wir mit den homogenen Polynomen des Grades im Polynomring A[X,Y,Z]. Wir erhalten so

$$\begin{aligned}K(a,b, A) &= K(a,A)\otimes K(b,A)\\ &= (0 \longrightarrow AXY \longrightarrow AX \oplus AY \longrightarrow A \longrightarrow 0)\otimes(0 \longrightarrow AZ \xrightarrow{c} A \longrightarrow 0)\\ &= 0 \longrightarrow AXYZ \longrightarrow AYZ \oplus AXZ\oplus AXY \longrightarrow AX \oplus AY\oplus AZ \longrightarrow A \longrightarrow 0\end{aligned}$$

Die Morphismen sind die folgenden:

$$\alpha XYZ \mapsto \alpha aYZ\text{-}\alpha bXZ+ \alpha cXY,$$

$$\alpha YZ+\beta XZ+ \gamma XY \mapsto \alpha bZ+\beta aZ+ (\gamma aY\text{-}\gamma bX) - \alpha cY - \beta cX$$

$$\alpha X+\beta Y+ \gamma Z \mapsto \alpha a+\beta b+ \gamma c.$$

Beispiel 3: K($\underline{a}$, A)

Das homogene Objekt des Grades n von K($\underline{a}$,A) kann man identifizieren mit dem homogenen Bestandteil des Grades n der äußeren Algebra über $Kx_1+\ldots+Kx_r$. Identifiziert man den Komplex mit der direkten Summe der Objekte der verschiedenen Grade, so gilt für die graduierten A-Moduln

$$K(\underline{a},A) = \wedge(Kx_1+\ldots+Kx_r)$$

Die Rand-Operatoren setzen sich zusammen zu einer A-linearen Abbildung

$$d: K(\underline{a},A) \longrightarrow K(\underline{a}, A)$$

mit

$$d(x_i) = a_i$$

und

$$d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^{\deg \omega}\omega\wedge d\eta$$

für homogene Elemente ω und η.[23] Der Koszul-Komplex wird so mit der Struktur einer super-kommutativen Algebra versehen. Insbesondere ist

$$d(x_{i_1}\bullet\ldots\bullet x_{i_s}) = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j-1} a_{i_j} x_{i_1}\bullet\ldots\bullet x_{i_{j-1}}\bullet x_{i_{j+1}}\bullet\ldots\bullet x_{i_s}$$

Beispiel 4

Seien C ein Komplex von A-Moduln und a ∈ A ein Element. Dann erhält man für das Objekt des Grades n von $C(a) = C\otimes K(a, A)$:

$$C(a)_n = C_n\otimes A \oplus C_{n-1}\otimes AX.$$

Betrachten wir die exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f} C(a)_n \xrightarrow{g} C_{n-1} \longrightarrow 0$$

mit $f(c) = (c\otimes 1, 0)$ und $g(c\otimes\alpha, c'\otimes\beta X) = c'\beta$.

Bezeichne d das Differential von C(a). Für $(c , c'X) \in C(a)_n$ erhalten wir dann

$$d(c , c'X) = (d_C(c) + (-1)^{n-1}ac' , d_C(c')X)$$

also

$$g(d(c + c'X)) = d_C(c') = d_C(g(c + c'X))$$

$$d_C(f(c)) \quad = d(c + 0X) = (d_C(c), 0) = f(d_C(c))$$

Mit anderen Worten, die exakten Sequenzen setzen sich zusammen zu einer exakten Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow C(a) \longrightarrow C[-1] \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Bemerkungen

(i) Aus der Beschreibung von $K(\underline{a},A)$ mit $a = a_1, \ldots , a_r$ in Beispiel 3 ergibt sich die entsprechende Beschreibung von $K(\underline{a}, M)$ und damit für die Homologie des Koszul-Komplexes

$H_0(\underline{a}, M) = M/(\underline{a})M.$

$H_r(\underline{a}, M) = \{m \in M \mid a_1m = \ldots = a_rm = 0\}.$

(ii) Ist $\underline{a} = a_1, \ldots , a_r$ eine M-reguläre Sequenz, so gilt

$H_i(\underline{a}, M) = 0$ für $i = 1,\ldots,r$,

d.h. $K(\underline{a},M)$ ist dann eine freie Auflösung von $M/(\underline{a})M$.

(iii) Man kann zeigen, daß der Koszul-Komplex K(a, M) für endlich erzeugte Moduln M über einem lokalen Ring (A,m) und jedes minimale Erzeugendensystem $a_1, \ldots , a_r$ von m ein Teilkomplex jeder mimimalen freien Auflösung von M über A ist (siehe Matsumua, H.: Commutative Algebra, (18E), Lemma 9 und (18F), Theorem 44). Insbesondere gilt damit auf Grund von Beispiel 3 für jeden noetherschen lokalen Ring (A, m)

$$\dim_{A/m} \mathrm{Tor}_m^A (A/m, A/m) \ge \dim_{A/m} K(a, A)_n = \binom{r}{n}$$

mit $r = \mu(m) = \dim_{A/m} m/m^2 = \mathrm{edim}\, A$.

Beweis von (ii). Im Fall r = 1 ist K(a, M) der Komplex

---

[23] Das gilt nach Definition des Tensorprodukts von Komplexen, ω und η produkte der x_i sind. Da diese Produkte die äußere Algebra erzeugen, gilt die Formel allgemein.

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{a} M \longrightarrow 0.$$

Die Homologie im Grad 1 ist, weil a ein M-reguläres Element ist,

$$\mathrm{Ker}\,(M \xrightarrow{a} M) = 0.$$

Sei jetzt $r > 1$. Die exakte Sequenz von Beispiel 4 hat im Fall

$$C = K(a_1, \dots, a_{r-1}, M)$$

die Gestalt

$$0 \longrightarrow K(a_1, \dots, a_{r-1}, M) \longrightarrow K(a_1, \dots, a_r, M) \longrightarrow K(a_1, \dots, a_{r-1}, M)[-1] \longrightarrow 0.$$

und die zugehörige lange Homologie-Sequenz die Gestalt

$$\dots \longrightarrow H_i(a_1, \dots, a_{r-1}, M) \longrightarrow H_i(a_1, \dots, a_r, M) \longrightarrow H_{i-1}(a_1, \dots, a_{r-1}, M) \longrightarrow \dots$$

Die beiden äußeren Homologie-Gruppen sind nach Induktionsvoraussetzung Null für $i \geq 2$. Also gilt

$$H_i(\underline{a}, M) = 0 \text{ für } i \geq 2.$$

Zur Berechnung der ersten Homologie betrachten wir den obige lange Homologie-Sequenz für $i = 1$:

$$H_1(a_1, \dots, a_{r-1}, M) \longrightarrow H_1(\underline{a}, M) \longrightarrow H_0(a_1, \dots, a_{r-1}, M)$$

$$\longrightarrow H_0(a_1, \dots, a_{r-1}, M) \longrightarrow H_0(\underline{a}, M) \longrightarrow 0$$

Die Homologie-Gruppe links ist Null nach Induktionsvoraussetzung. Die Sequenz bekommt mit

$$M_j := M/(a_1, \dots, a_j)M$$

die Gestalt

$$0 \longrightarrow H_1(\underline{a}, M) \longrightarrow M_{r-1} \longrightarrow M_{r-1} \longrightarrow M_r \longrightarrow 0$$

Dabei ist $M_{r-1} \longrightarrow M_{r-1}$ der Zusammenhangshomomorphismus zu (1) (d.h. es wird wird mit X multipliziert und dann X durch a_r ersetzt), also gerade die Multiplikation mit a_r. Da die a_i eine reguläre Sequenz bilden, ist diese Abbildung injektiv. Es folgt

$$H_1(\underline{a}, M) = 0.$$

QED.

4. Der Hironaka-Grothendieck-Isomorphismus

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul, $I \subseteq A$ ein Ideal von A und

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_r)$$

eine A/I-reguläre Sequenz. Betrachten wir die folgenden Aussagen.

(i) $gr_I(M)$ ist flach über $gr_I^0(A) = A/I$.

(ii) Die Folge $\underline{x}$ ist $gr_I(M)$-semi-regulär und $gr_I(M) \otimes_A A/\underline{x}A$ ist flach über $A/I \otimes_A A/\underline{x}A$.

(iii) $gr_{I+\underline{x}A}(M)$ ist flach über $A/(I+\underline{x}A)$ und der natürliche Homomorphismus

$$\varphi: gr_I(M) \otimes_A A/\underline{x}A\,[T_1, \dots, T_r] \longrightarrow gr_{I+\underline{x}A}(M)$$

ist ein Isomorphismus. Dabei sei

$$\varphi((m \bmod I^{i+1}M) \otimes (a \bmod \underline{x}A) T_1^{n_1} \cdot \dots \cdot T_r^{n_r})$$

$$= a x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{n_r} m \mod (I+\underline{x}A)^{i+i_1+\ldots+i_r+1} M$$

für $m \in I^i M$ und $a \in A$.

Es bestehen die folgenden Implikationen.

(i) ⇒ (ii) ⇒ (iii).

Ist außerdem der A-Modul $gr_I(M)$ idealweise separiert für xA, so sind die drei Bedingungen äquivalen.

Bemerkung

Der unten angegebene Beweis folgt dem Beweis in der Monographie

> Hermann, M., Vogel, W., Schmidt, R.: Theorie der normalen Flachheit, Teubner-Text zur Mathematik, Teubner, Leipzig 1977.

(Kapitel III, Satz 1.1). Man vergleiche auch

> Grothendieck, A., Dieudonné, J.: Eléments de Géométrie Algébrique VI_4, Publ. Math. I.H.E.S. 32 (1967), 19.7.1

Beweis. 1. Schritt: Beweis der Implikation (i) ⇒ (ii).

Sei

$$\overline{\underline{x}} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r)$$

die Folge der Restklassen der x_i in $\overline{A} := A/I$. Dann ist $\overline{\underline{x}}$ eine reguläre Sequenz in $\overline{A}$. Weil $gr_I(M)$ flach ist über $\overline{A}$ ist $\overline{\underline{x}}$ auch eine $gr_I(M)$-reguläre Sequenz. Der zweite Teil der Aussage von (ii) ergibt sich aus (i) durch Basiswechsel.

2. Schritt: Beweis der Implikation (ii) ⇒ (iii).

Nach Voraussetzung ist $gr_I(M)\otimes_A A/\underline{x}A$ flach über $A/I\otimes_A A/\underline{x}A \cong A/(I+\underline{x}A)$. Damit ist aber auch der Polynomring[24]

$$gr_I(M)\otimes_A A/\underline{x}A\ [T_1,\ldots,T_r]$$

flach über $A/(I+\underline{x}A)$. Die erste Aussage von (iii) ist damit eine Folge der im zweiten Teil behaupteten Isomorphie. Es reicht, den zweiten Teil von (iii) zu beweisen. Wir werden eine Verallgemeinerung der Isomophie-Aussage unter abgeschwächten Bedingungen beweisen. Genauer: es reicht, die folgende Aussage zu beweisen.

3. Schritt: Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul und

$$M = F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$$

eine absteigende Folge von A-Teilmoduln von M. Weiter seien

$$\underline{x} = (x_1,\ldots,x_r)$$

eine $gr_F(M)$-semi-reguläre Sequenz und

$$M = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots$$

die absteigende Folge von A-Teilmoduln von M mit

$$G_n := F_n + \underline{x}F_{n-1} + \underline{x}^2F_{n-2} + \ldots$$

[24] als direkte Summe von Exemplaren des Grundrings

Dann ist der natürliche Homomorphismus

$$\varphi: gr_F(M)\otimes_A A/\underline{x}A\,[T_1,...,T_r] \longrightarrow gr_G(M)$$

ein Isomophismus. Dabei sei $gr_F(M)$ der gradudierte A-Modul mit

$$gr^n_F(M) := F_n/F_{n+1}$$

und $gr_G(M)$ sei analog definiert. Weiter sei

$$\varphi((m \bmod F_{i+1})\otimes(a \bmod \underline{x}A)T_1^{n_1}\bullet...\bullet T_r^{n_r})$$
$$= ax_1^{n_1}\bullet...\bullet x_r^{n_r}m \quad \bmod\ G_{i+i_1+...+i_r+1}$$

Für die homogenen Bestandteile des Grades 0 hat φ die Gestalt

$$M/F_1 \otimes A/xA \longrightarrow M/(F_1+xM),\ (m \bmod IM)\otimes(a + xA) \mapsto am \bmod (I+xA)M,$$

d.h. φ ist im Grad 0 ein Isomorphismus. Im Grad n ist φ eine A-lineare Abbildung

$$\oplus_{i+i_1+...+i_r=n} (F_i/F_{i+1})\otimes A/xA \bullet T_1^{i_1}\bullet...\bullet T_r^{i_r} \longrightarrow G_n/G_{n+1} \text{ mit } T_i \mapsto x_i$$

und ist so nach Definition von G_n surjektiv.

Die zu beweisende Isomorphie-Aussage von (iii) ergibt sich aus der obigen für den Spezialfall

$$F_n := I^n$$

(so daß $G_n := (I+xA)^n$ gilt). Wir führen den Beweis durch Induktion nach r.

<u>Der Fall r = 1</u>.

Wir haben zu zeigen, für jedes n ist die Einschränkung von φ auf den Bestandteil des Grades n injektiv, d.h.

$$\varphi_n: E_n := \oplus^n_{i=0}\, \overline{gr}^i_F(M)\bullet T^{n-i} \longrightarrow gr^n_G(M)$$

ist injektiv mit

$$\overline{gr}^i_F(M) := gr^i_F(M)\otimes_A A/\underline{x}A = F_i/\underline{x}F_i+F_{i+1}$$

Im Grad n = 0 gilt

$$E_0 = \overline{gr}^0_F(M) = F_0/xF_0 + F_1 = G_0/G_1 = gr^0_G(M)$$

und φ_0 ist ein Isomorphismus. Betrachten wir den Grad n > 0. Wir schreiben E_n in der Gestalt

$$E_n = \overline{gr}^n_F(M) \oplus E_{n-1}\bullet T$$

und beachten, daß φ_n auf dem zweiten direkten Summanden bis auf Isomorphie die Abbildung φ_{n-1} ist. Deshalb können wir φ_n wie folgt zerlegen

$$\varphi_n: E_n = \overline{gr}^n_F(M) \oplus E_{n-1}\bullet T \xrightarrow{Id\oplus\varphi_{n-1}} \overline{gr}^n_F(M) \oplus gr^{n-1}_G(M)\bullet T \xrightarrow{\psi_n} gr^n_G(M) \quad (1)$$

mit

$$\psi_n(u + \underline{x}F_n + F_{n+1}, (v + G_n)T\,) = u + x_1 v + G_{n+1}$$

Weil nach Induktionsvoraussetzung φ_{n-1} injektiv ist, ist die linke Abbildung von (1) ein Isomorphismus. Es reicht daher, zu zeigen, daß ψ_n injektiv ist. Repräsentiere also

$$(u, v) \in F_n \times G_{n-1}$$

ein Element aus dem Kern von ψ_n. Dann gilt

$$u + x_1 v \in G_{n+1} = F_{n+1} + x_1 G_n.$$

Es gibt also Elemente

$$u' \in F_{n+1} \text{ und } v' \in G_n$$

mit

$$u + x_1 v = u' + x_1 v'.$$

Es folgt

$$x_1(v-v') = u'-u \in F_n \cap x_1 G_{n-1}. \tag{2}$$

Nach Voraussetzung ist x_1 ein $gr_F(M)$-reguläres Element. Auf Grund der exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow F_i/F_n \longrightarrow F_{i-1}/F_n \longrightarrow F_{i-1}/F_i \longrightarrow 0$$

ergibt sich damit aus der Regulärität von x_1 bezüglich des linken Moduls, die Regulariät bezüglich des mittleren. Also ist x_1 ein M/F_n-reguläres Element (für jedes n). Aus (2) folgt damit $v-v' \in F_n$, also $u'-u \in x_1F_n$.Wir erhalten

$$u \in F_{n+1} + x_1 F_n$$

und

$$v \in F_n + G_n = G_n.$$

Mit anderen Worten, (u, v) repräsentiert das Null-Element im Definitionsbereicht von ψ_n. Wir haben gezeigt, ψ_n - und damit φ_n ist injektiv.

<u>Der Fall r > 1</u>. Wir setzen

$$\begin{aligned} \underline{x}' &:= (x_1,\ldots,x_{r-1}) \\ T' &:= (T_1,\ldots,T_{r-1}) \\ T &:= (T_1,\ldots,T_r) \end{aligned}$$

Weiter bezeichne G' die absteigende Folge

$$M = G'_0 \supseteq G'_1 \supseteq G'_2 \supseteq \ldots$$

von A-Teilmoduln von M mit

$$G'_n := F_n + \underline{x}'F_{n-1} + \underline{x}'^2 F_{n-2} + \ldots$$

Dann gilt

$$G_n := G'_n + x_r G'_{n-1} + x_r^2 G'_{n-2} + \ldots$$

Mit $\underline{x}$ ist auch $\underline{x}$ eine A/I-semi-reguläre und $gr_F(M)$-semi-reguläre Sequenz. Nach Induktionsvoraussetzung ist damit der natürliche Homomorphismus

$$\varphi':gr_F(M)\otimes_A A/\underline{x}'A\,[T'] \longrightarrow gr_{G'}(M)$$

ein Isomorphismus. Außerdem ist auf Grund des Induktionsanfangs r = 1 (mit G' anstelle von F und x_r anstelle von x_1) auch der natürliche Homomorphismus

$$\psi:gr_{G'}(M)\otimes_A A/x_rA\,[T_r] \longrightarrow gr_G(M)$$

ein Isomorphismus. Man beachte, x_r ist ein reguläres Element bezüglich des Definitionsbereichs von φ' und, weil φ' ein Isomorphismus ist, auch regulär bezüglich der Wertevorrats.

Wir haben zu zeigen, der natürlich Homomophismus

$$\varphi:gr_F(M)\otimes_A A/\underline{x}A\,[T] \longrightarrow gr_G(M)$$

ist injektiv. Zum Beweis schreiben wir

$$\begin{aligned} gr_F(M)\otimes_A A/\underline{x}A\,[T] &= gr_F(M)\otimes_A A/\underline{x}'A\otimes_A A/x_rA\,[T']\,[T_r] \\ &= gr_F(M)\otimes_A A/\underline{x}'A[T']\otimes_A A/x_rA\,[T_r]. \end{aligned}$$

Mit φ' ist auch die Abbildung

$$\varphi'\otimes Id:\ gr_F(M)\otimes_A A/\underline{x}'A[T']\otimes_A A/x_rA\,[T_r] \longrightarrow gr_G(M)\otimes_A A/x_rA\,[T_r]$$

ein Isomorphismus. Die Zusammensetzung dieser Abbildung mit ψ ist damit ebenfalls ein Isomorphismus. Diese Zusammensetzung ist aber gerade φ.

<u>4. Schritt</u>. Beweis der Implikation (iii) ⇒ (i).

Wir nehmen an, $gr_I(M)$ ist idealweise separiert für $\underline{x}A$. Wir wollen zeigen,

$$\mathcal{M} := gr_I(M) \text{ ist flach über } \mathcal{A} := gr_I^0(A) = A/I.$$

Nach dem lokalen Kriterium der Flachheit reicht es zu zeigen,

$$gr^0_{xA}(\mathcal{M}) \text{ ist flach über } gr^0_{xA}(\mathcal{A}) = A/(I+\underline{x}A) \tag{1}$$

und die natürlichen Abbildungen

$$(\underline{x}A)^n/(\underline{x}A)^{n+1}\otimes_A \mathcal{M} \xrightarrow{\gamma_n} (\underline{x}A)^n M/(\underline{x}A)^{n+1}\mathcal{M}, \tag{2}$$

$$(\alpha \bmod (\underline{x}A)^{n+1})\otimes m \mapsto \alpha m \bmod (\underline{x}A)^{n+1}\mathcal{M},$$

sind Isomorphismen.

Nach Voraussetzung ist $gr_{I+\underline{x}A}(M)$ flach über $A/(I+\underline{x}A)$ und

$$gr_{I+\underline{x}A}(M) \cong gr_I(M)\otimes_A A/\underline{x}A\ [T_1,...,T_r]. \tag{3}$$

Damit ist auch der Polynomring auf der rechten Seite flach über $A/(I+\underline{x}A)$. Weil

$$gr_I(M)\otimes_A A/\underline{x}A \cong gr^0_{xA}(\mathcal{M}) \tag{4}$$

ein direkter Summand dieses Polynomrings ist, ist (4) auch flach über $A/(I+\underline{x}A)$, d.h. es gilt (1).

Wir haben noch zu zeigen, die Abbildungen γ_n von (2) sind Isomorphismen. Zum Beweis können wir anstelle der γ_n deren direkte Summe betrachten und zeigen, daß die Abbildung

$$gr_{\underline{x}A}(A)\otimes_A \mathcal{M} \longrightarrow gr_{\underline{x}A}(\mathcal{M})$$

ein Isomorphismus ist. Nach Voraussetzung ist $\underline{x}$ eine A/I-reguläre, also A/I-quasi-reguläre Sequenz, d.h.

$$gr_{\underline{x}A}(A) \cong A/\underline{x}A[T_1,...,T_r].$$

Es reicht also zu zeigen,

$$\mathcal{M}\otimes_A (A/\underline{x}A)[T_1,...,T_r] \longrightarrow gr_{\underline{x}A}(\mathcal{M})$$

ist ein Isomorphismus. Man beachte, diese Isomorphie bedeutet gerade, $\underline{x}$ ist eine $\mathcal{M}$-quasi-reguläre Sequenz und, weil $\mathcal{M}$ idealweise separiert für $\underline{x}A$ ist, $\underline{x}$ ist eine $\mathcal{M}$-requläre Sequenz. Wir haben damit den Beweis der Implikation auf die folgende Aussage reduziert.

5. Schritt. Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul,

$$M = F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq ...$$

eine absteigende Kette von A-Teilmoduln von M und

$$\underline{x} = (x_1,...,x_r)$$

eine Folge von Elementen aus A. Wir setzen

$$G_n := F_n + \underline{x}F_{n-1} + (\underline{x}A)^2F_{n-2} + ... + (\underline{x}A)^nF_0.$$

Die natürliche Surjektion

$$\varphi: gr_F(M)\otimes_A A/\underline{x}A\ [T_1,...,T_r] \longrightarrow gr_G(M)$$

sei ein Isomorphismus. Dann ist auch die natürliche Surjektion

$$\psi: gr_F(M)\otimes_A (A/\underline{x}A)[T_1,...,T_r] \longrightarrow gr_{\underline{x}A}(gr_F(M))$$

ein Isomorphismus.

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, es gibt einen surjektiven Homomorphismus

$$\chi: gr_{\underline{x}A}(gr_F(M)) \twoheadrightarrow gr_G(M) \tag{5}$$

graduierter Ringe mit 1 mit

$$\varphi = \chi\circ\psi.$$

Mit φ ist damit nämlich auch ψ injektiv, also ein Isomorphismus.

6. Schritt: Die Surjektion χ des fünften Schritts existiert, falls die folgenden Inklusionen bestehen

$$(xA)^{n-i}F_i \cap F_{i+1} \subseteq G_{n+1} \qquad \text{I(n,i)}$$

für $n \geq i \geq 0$.

Zum Beweis vergleichen wir die n-ten graduierten Bestandteile von Definitionsbereich und Wertevorrat der Abbildung (5). Es gilt

$$gr^n_G(M) = G_n/G_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} (xA)^{n-i}F_i \Big/ \sum_{i=0}^{n+1} (xA)^{n+1-i}F_i$$

und für den n-ten graduierten Bestandteil von $gr_{\underline{x}A}(gr_F(M))$, d.h. für das Bild des n-ten graduierten Bestandteil des Definitionsbereichs von ψ, erhalten wir

$$gr_{\underline{x}A}(gr_F(M)) = \oplus_{i=0}^n gr^{n-i}_{\underline{x}A} gr^i_F(M) \text{ mit}$$

$$\begin{aligned}
gr^{n-i}_{\underline{x}A}gr^{i}_{F}(M) &= (\underline{x}A)^{n-i}gr^{i}_{F}(M)/(\underline{x}A)^{n+1-i}gr^{i}_{F}(M)\\
&= ((\underline{x}A)^{n-i}F_i + F_{i+1}) / ((\underline{x}A)^{n+1-i}F_i + F_{i+1})\\
&= (\underline{x}A)^{n-i}F_i / (\underline{x}A)^{n-i}F_i \cap ((\underline{x}A)^{n+1-i}F_i + F_{i+1})\\
&= (\underline{x}A)^{n-i}F_i / ((\underline{x}A)^{n+1-i}F_i + (\underline{x}A)^{n-i}F_i \cap F_{i+1})
\end{aligned}$$

Auf Grund der Inklusionen I(n, i) können wir im zweiten Summanden des Nenners F_{i+1} durch G_{n+1} ersetzen und vergrößern dadurch den Nenner. Deshalb induziert die identische Abbildung des Zählers eine Surjektion

$$\begin{aligned}
gr^{n-i}_{\underline{x}A}gr^{i}_{F}(M) \twoheadrightarrow\ & (\underline{x}A)^{n-i}F_i / ((\underline{x}A)^{n+1-i}F_i + (\underline{x}A)^{n-i}F_i \cap G_{n+1})\\
&\cong (\underline{x}A)^{n-i}F_i + G_{n+1} / (\underline{x}A)^{n+1-i}F_i + G_{n+1}\\
&= (\underline{x}A)^{n-i}F_i + G_{n+1} / G_{n+1}\\
&\subseteq G_n / G_{n+1}\\
&= gr^{n}_{G}(M)
\end{aligned}$$

Das Bild dieser Abbildung enthält alle Elemente von $gr^{n}_{G}(M)$, welche durch den i-ten Summanden von G_n repräsentiert werden. Die Abbildungen setzen sich deshalb zu einer Surjektion χ zusammen. Die Relation $\varphi = \chi\circ\psi$. kann man dadurch beweisen, daß man sie für die Elemente eines Erzeugendensystems des A/(I+xA)-Moduls

$$gr_F(M)\otimes_A (A/\underline{x}A)[T_1,...,T_r]$$

testet. Bezeichne [x] die Restklasse des Elements x. Dann gilt für $m \in F_i$, $a\in A$ und ein Potenzprodukt $\mu(T)$ des Grades n-i in den Unbestimmten

$$\chi(\psi([m]\otimes[a\mu(T)]) = \chi([a\mu(x)m]) = [a\mu(x)m] = \varphi([m]\otimes[a\mu(T)]).$$

Es gilt also tatsächlich $\varphi = \chi\circ\psi$. Es bleiben noch die Inklusionen des 6. Schritts zu beweisen, d.h. es reicht zu zeigen:

<u>7. Schritt</u>: Aus der Injektivität des surjektiven Homomorphismus

$$\varphi: gr_F(M)\otimes_A A/\underline{x}A\ [T_1,...,T_r] \longrightarrow gr_G(M)$$

folgen die Inklusionen I(n,i) des sechsten Schritts

$$(xA)^{n-i}F_i \cap F_{i+1} \subseteq G_{n+1} \qquad I(n,i)$$

für $n \geq i \geq 0$.

Die Beweis-Idee besteht darin, den natürlichen Homomorphismen φ zur gegebenen Filtration F mit den entsprechenden Homomorphismen zu vergleichen, die man für andere Filtrationen erhält. Betrachten wir die um die nicht-negative ganze Zahl p verschobene Filtration F[p] mit

$$F[p]_n := F_{p+n}$$

die zu dieser gehörigen Filtration G[p] mit

$$\begin{aligned}
G[p]_n &:= \sum_{i=0}^{n} (xA)^{n-i}F[p]_i = \sum_{i=0}^{n} (xA)^{n-i}F_{p+i}\\
&= F_{p+n} + (\underline{x}A)F_{p+n-1} + ... + (\underline{x}A)^nF_p
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten $G[p]_n$ entsteht aus G_{n+p} indem man alle Summanden mit einer höheren als n-Potenz von $(x\underline{A})$ wegläßt. Insbesondere ist

$$G_{n+p} = G[p]_n + (xA)^{n+1}G_{p-1} \tag{6}$$

und direkt aus der Definition von $G[p]_n$ liest man ab

$$G[p]_n \subseteq F_p \tag{7}.$$

Nach Definition von F[p] besteht eine natürliche Inklusion von A-Moduln (die homogene in homogene Elemente abbildet und den Grad um p vergrößert)

$$gr_{F[p]}(M) \hookrightarrow gr_F(M).$$

Entsprechend erhält man auch eine solche Inklusion[25]

$$i_p\colon gr_{F[p]}(M)\otimes_A A/\underline{x}A\,[T_1,...,T_r] \hookrightarrow gr_F(M)\otimes_A A/\underline{x}A\,[T_1,...,T_r].$$

Weiter induzieren die Inklusionen $G[p]_n \subseteq G_{n+p}$ (vgl. (6)) Homomorphismen

$$\lambda_p\colon\ gr_{G[p]}(M) \longrightarrow gr_G(M)$$

von A-Moduln desselben Typs. Durch Zusammensetzen mit der natürlichen Surjektion

$$\varphi[p]\colon\ gr_{F[p]}(M)\otimes_A A/\underline{x}A\,[T_1,...,T_r] \longrightarrow gr_{G[p]}(M)$$

erhalten wir eine Abbildung

$$\lambda_p\circ\varphi[p]\colon\ gr_{F[p]}(M)\otimes_A A/\underline{x}A\,[T_1,...,T_r] \longrightarrow gr_G(M),\ [m]\otimes[a\mu(T)] \mapsto [a\mu(x)m],$$

mit

$$\lambda_p\circ\varphi[p] = \varphi\circ i_p$$

Weil φ und i_p injektiv sind, gilt dasselbe für die Zusammensetzung auf der linken Seite. Weil $\varphi[p]$ surjektiv ist, ist sogar λ_p injektiv. Mit anderen Worten, es gilt

$$G[p]_n \cap G_{n+p+1} = G[p]_{n+1} \tag*{II(n,p)}$$

für alle nicht-negativen ganzen n und p. Zeigen wir, aus diesen Identitäten folgt

$$G_{n+p} \cap F_p = G[p]_n \tag*{III(n,p)}$$

für alle nicht-negativen n und p. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n (für festes p). Für n = 0 ist

$$G_p \cap F_p = F_p = G[p]_0,$$

d.h. die Identität besteht. Sei jetzt n > 0. Es gilt

$$\begin{aligned} G_{n+p} \cap F_p &= G_{n+p} \cap G_{n+p-1} \cap F_p \\ &= G_{n+p} \cap G[p]_{n-1} && \text{(nach Induktion)} \\ &= G[p]_n && \text{(nach II(n-1,p)).} \end{aligned}$$

Damit ist III(n,p) bewiesen. Zeigen wir als nächstes, es gilt

$$(\underline{x}A)^{n+1}G_p \cap F_{p+1} \subseteq G[p+1]_n \tag*{IV(n,p)}$$

für alle nicht nicht-negativen n und p. Es gilt

$$G_{n+p+1}\cap F_{p+1} = (G[p+1]_n + (xA)^{n+1}G_p)\cap F_{p+1} \qquad \text{(nach (6))}$$

---

[25] weil das Tensorprodukt Isomorphismen in Isomorphismen überführt.

$$= G[p+1]_n + (xA)^{n+1}G_p \cap F_{p+1} \qquad \text{(nach (7))}$$

Der zweite Summand rechts liegt also in der linken Seite. Wegen III(n,p+1) gilt damit IV(n,p). Aus der zuletzt bewiesenen Inklusion können wir jetzt die behauptete Inklusion I(n,i) ableiten. Wegen der Isomorphie des Morphismus φ ist

$$gr^n_G(M)$$

die direkte Summe der durch $(xA)^{n-i}F_i$ mit i = 0, ... , n erzeugten Teilmoduln. Deshalb gilt

$$((xA)^nF_0 + ... + (xA)^{n-i}F_i \cap ((\underline{x}A)^{n-i-1}F_{i+1} + (\underline{x}A)^{n-i-2}F_{i+2} +....+F_n) \subseteq G_{n+1}.$$

Nach Definition von G[n] kann man diese Inklusion auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$(xA)^{n-i}G_i \cap G[i+1]_{n-i-1} \subseteq G_{n+1}.$$

Wir ersetzen bilden links den Durchschnitt mit F_{i+1} und erhalten

$$F_{i+1} \cap (xA)^{n-i}G_i \cap G[i+1]_{n-i-1} \subseteq G_{n+1}.$$

Wegen IV(n-i-1,i) liegt der Durchschnitt der ersten beiden Moduln links ganz im dritten Modul, d.h. es gilt

$$F_{i+1} \cap (xA)^{n-i}G_i \subseteq G_{n+1}.$$

Wir verkleinern die linke Seite, indem wir G_i durch F_i ersetzen:

$$F_{i+1} \cap (xA)^{n-i}F_i \subseteq G_{n+1}.$$

Dies ist aber gerade die zu beweisende Inklusion I(n,i).
QED.

Hilbert-Funktionen (frei nach Atiyah-MacDonald)

Moduln endlicher Länge

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Ein A-Modul endlicher Länge ℓ ist ein A-Modul M mit der Eigenschaft, daß es eine echt aufsteigende Kette

$$M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_\ell$$

von A-Teilmoduln der Länge ℓ in M gibt und keine solche Kette größerer Länge. Man schreibt dann

$$\text{length}_A(M) = \ell.$$

Falls es keine solche Zahl ℓ gibt, so setzt man

$$\text{length}_A(M) = \infty.$$

Eigenschaften der Längen-Funktion

Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Die Längen-Funktion ist additiv, d.h. für jede exakte Sequenz von A-Moduln

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

gilt

$$\text{length}_A(M) = \text{length}_A(M') + \text{length}_A(M'').$$

(ii) Folgende Bedingungen sind äquivalent.

(a) $\text{length}_A(A) < \infty$.

(b) A ist artinsch.

(c) A ist noethersch und dim A = 0.
Das Jacobson-Radikal rad(A) von A ist dann nilpotent.

(iii) Sei M ein A-Modul endlicher Länge. Dann besitzt das Ideal

$$\mathrm{Ann}_A(M) := \{a \in A \mid aM = 0\}$$

eine endliche Primärzerlegung, sagen wir

$$\mathrm{Ann}_A(M) = q_1 \cap \ldots \cap q_r ,$$

deren zugehörige Primideale $m_i = \sqrt{q_i}$ maximale Ideale von A sind. Außerdem gilt

$$\mathrm{length}_A(M) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{length}_{A_{m_i}}(M_{m_i})$$

(iv) Seien f: A $\longrightarrow$ B ein lokaler Homomorphismus lokaler Ringe, $\bar{f}:\kappa_A \longrightarrow \kappa_B$ der durch f induzierte Homomorphismus der Restklassenkörper und N ein B-Modul. Dann gilt

$$\mathrm{length}_A(N) = \mathrm{length}_B(N)\cdot[\kappa_B:\kappa_A].$$

Man beachte, weil κ_A ein Körper ist, ist $\bar{f}$ als Homomorphismus von Ringen mit 1 injektiv und macht so κ_B zu einem Erweiterungskörper von κ_A.

Beweis. Zu (i). Jede Kette in M' liefert durch Anwenden von f eine solche in M. Deshalb gilt

$$\mathrm{length}_A\, M' \le \mathrm{length}_A\, M.$$

Für jede Kette in M" erhält man durch Übergang zu den vollständigen Urbildern bei g eine Kette in M. Deshalb gilt

$$\mathrm{length}_A\, M'' \le \mathrm{length}_A\, M.$$

Aus den letzten beiden Abschätzungen ergibt sich die Behauptung im Fall, daß die Länge von M' oder M" unendlich ist. Wir können deshalb annehmen,

$$\mathrm{length}_A\, M' < \infty \text{ und } \mathrm{length}_A\, M'' < \infty.$$

Seien Ketten

$$M'_0 \subset M'_1 \subset \ldots \subset M'_{\ell'}$$

und

$$M''_0 \subset M''_1 \subset \ldots \subset M''_{\ell''}$$

in M' bzw. M" gegeben mit

$$\ell' = \mathrm{length}_A M' \text{ und } \ell'' = \mathrm{length}_A M''.$$

Wir wenden auf die Moduln der ersten Kette die Abbildung f an und ersetzen die Moduln der zweiten durch die vollständigen Urbilder bei g. Die entstehenden Ketten in M lassen sich zu einer Kette zusammensetzen, deren Länge mindestens $\ell'+\ell''$ ist (man beachte, es kann $f(M'_{\ell'}) = g^{-1}(M''_0)$ sein). Damit gilt

$$\mathrm{length}_A(M') + \mathrm{length}_A(M'') = \ell'+\ell'' \le \mathrm{length}_A(M).$$

Sei jetzt eine Kette

$$M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_\ell \qquad (1)$$

in M gegeben. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

$$\ell \le \ell'+\ell''.$$

Wir können annehmen,

$$M_0 = 0 \text{ und } M_\ell = M,$$

denn andernfalls können wir die Kette verlängern, indem wir links den 0-Modul bzw. rechts den Modul M hinzufügen. Wir betrachten die nicht notwendig echt aufsteigenden Ketten

$$f^{-1}(M_0) \subseteq f^{-1}(M_1) \subseteq \ldots \subseteq f^{-1}(M_\ell) \text{ in } M' \tag{2}$$

und

$$g(M_0) \subseteq g(M_1) \subseteq \ldots \subseteq g(M_\ell) \text{ in } M'' \tag{3}$$

Wir können hier den Modul M' mit dessen Bild in M identifizieren und f mit der natürlichen Einbettung von M' in M. Angenommen, es gibt einen Index i mit

$$g(M_i) = g(M_{i+1}).$$

Jedes Element von M_{i+1} läßt sich dann modulo Ker(g) = M' so abändern, daß man ein Element von M_i erhält, d.h. $M_{i+1} \subseteq M_i + M'$, also

$$M_{i+1} = (M_i + M')\cap M_{i+1} = M_i + M'\cap M_{i+1} \tag{4}$$

Dann müssen aber

$$f^{-1}(M_{i+1}) = M'\cap M_{i+1} \text{ und } f^{-1}(M_i) = M'\cap M_i$$

verschieden sein (denn andernfalls wäre weigen (4) auch $M_{i+1} = M_i$). Wir haben gezeigt, jedesmal, wenn in (3) das Gleichheitszeichen gilt, ist die entsprechende Inklusion in (2) echt. Die Anzahl der echten Inklusionen in (2) und (3) zusammen ist somit mindestens so groß wie deren Anzahl in (1). Mit anderen Worten, es gilt

$$\ell \le \ell' + \ell''.$$

<u>Zu (ii)</u>. <u>(a) ⇒ (b)</u>.Wäre A nicht nicht artinsch, so könnte man eine beliebig lange echt aufsteigende Kette von Idealen von A angeben.

<u>Zu (ii)</u>. <u>(b) ⇒ (c)</u>.[26]

<u>1. Schritt</u>. Jedes Primideal von A ist maximal (also auch minimal, d.h. dim A = 0).

Sei p ein Primideal von A. Dann ist $\bar{A} := A/p$ ein artinscher Integritätsbereich. Sei x ein von Null verschiedenes Element von $\bar{A}$. Die Potenzen des von x erzeugten Ideals bilden eine absteigende Kette von Idealen. Diese Kette muß stationär sein, d.h. es gibt ein n mit

$$x^n\bar{A} = x^{n+1}\bar{A},$$

d.h. $x^n = x^{n+1}\cdot a$ für ein $a \in \bar{A}$. Weil $\bar{A}$ ein Integritätsbereich ist, folgt $1 = x\cdot a$, d.h. x ist eine Einheit. Wir haben gezeigt, $\bar{A}$ ist ein Körper, d.h. p ist maximales Ideal.

<u>2. Schritt</u>. Die Anzahl der maximalen Ideale von A ist endlich.

Andernfalls gäbe es eine unendliche Folge von paarweise verschiedenen maximalen Idealen

$$m_1, m_2, m_3, \ldots$$

Die zugehörigen Folge der Durchschnitte

$$m_1, m_1\cap m_2, m_1\cap m_2\cap m_3, \ldots$$

muß, weil A artinsch ist, stationär sein, d.h. es gibt ein n mit

---

[26] Wir verwenden hier die Existenz der Primärzerlegung in noetherschen Ringen A: Jedes Ideal I von A hat die Gestalt

$$I = q_1\cap\ldots\cap q_r$$

mit q_i primär: $a\cdot b \in q$ impliziert $b\in q$, wenn keine Potenz von a in q liegt. Die Radikale $p_i := \sqrt{q_i}$ der q_i sind dann Primideale. Die minimalen Primoberideale von I kommen unter den p_i vor. Insbesondere ist die Anzahl ersterer endlich.

$$m_{n+1} \supseteq m_1 \cap ... \cap m_{n+1} = m_1 \cap ... \cap m_n \supseteq m_1 \bullet ... \bullet m_n$$

Weil m_{n+1} ein Primideal ist, muß einer der Faktoren rechts in m_{n+1} liegen, also gleich m_{n+1} sein. Das steht im Widerspruch dazu, daß die m_i paarweise verschieden sein sollen.

<u>3. Schritt</u>. Das Jacobson-Ideal rad(A) ist nilpotent.

Sei N := rad(A). Man beachte, weil jedes Primideal von A maximal ist, ist N gleichzeitig das Nil-Radikal von A,

$N = rad(A) = \sqrt{0}$,

d.h. jedes Element von N ist nilpotent.

Weil A artinsch ist, ist die Folge der Potenzen von N stationär, sagen wir

$$I := N^n = N^{n+1} = N^{n+2} = ...$$

Angenommen, I ist nicht das Nullideal. Wir betrachten die Menge

$$M := \{J \mid J \text{ ist Ideal von A mit } IJ \neq 0\}.$$

Diese Mengen ist nicht leer, weil I in M liegt. Weil A Artinsch ist, besitzt diese Menge ein minimales Element, sagen wir

$$L \in M.$$

Wegen $LI \neq 0$ gibt es ein $x \in L$ mit $xI \neq 0$. Wegen $xA \subseteq L$ und der Minimalität von L folgt

$$L = xA.$$

Wegen $(xI)I = xI^2 = xI \neq 0$ und $xI \subseteq xA = L$ und der Minimalität von L folgt

$$xI = L = xA.$$

Deshalb gibt es ein $y \in I$ mit

$$x = xy = xy^2 = ... = xy^j = ...$$

Wegen $y \in I = N^n \subseteq N = \sqrt{0}$ ist y nilpotent, also x = 0. Das steht aber im Widerspruch zur Wahl von x. Die Annahme, daß I von Nullideal verschieden ist, muß falsch sein, d.h. $N = \sqrt{0}$ ist nilpotent.

Zum Beweis der Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) bleibt noch die folgende Aussage zu beweisen.

<u>4. Schritt:</u> A ist noethersch.

Es reicht zu zeigen, daß A als Modul über sich selbst von endlicher Länge ist,

$$\text{length}_A(A) < \infty.$$

Seien

$$m_1,...,m_r$$

die maximalen Ideale von A (deren Anzahl nach dem 2.Schritt endlich ist). Nach dem 3.Schritt gibt es eine Folge von Idealen in A, sagen wir

$$A = I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_s = 0$$

mit $I_{j+1} = m_{i(j)} I_j$. Wegen der Additivität der Längenfunktion reicht es zu zeigen

$$\text{length}_A(I_j/m_{i(j)} I_j) < \infty.$$

Weil A artinsch ist, ist jedes I_j ein artinscher A-Modul. Also ist auch $I_j/m_{i(j)} I_j$ als A-Modul artinsch. Letzterer Modul ist aber ein Vektorraum über $A/m_{i(j)}$ und als solcher artinsch, also von endlicher Länge.

Man beachte, wir haben hier auch die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) bewiesen. Zum Beweis von (ii) reicht es deshalb, noch die folgende Implikation zu beweise.

<u>Zu (ii). (c) $\Rightarrow$ (a).</u>

Betrachtem wir die Primärzerlegung des Nilradikals von A,

$$N := \sqrt{0} = m_1 \cap \ldots \cap m_r.$$

Die m_i sind dann gerade die minimalen Primideale von A. Insbesondere ist deren Anzahl endlich. Wegen dim A = 0, sind die m_i gleichzeitig die maximalen Ideale von A.

Das Ideal N besteht aus nilpotenten Elementen und ist - weil A noethersch ist - endlich erzeugt. Damit ist N nilpotent, sagen wir

$$N^n = 0.$$

Wie im Beweis des 4. Schritt erhalten wir eine absteigende Kette von Idealen I_j von A, wobei die A-Moduln I_j diesmal noethersch sind. Das hat aber ebenfalls zur Folge, daß die Vektorräume $I_j/m_{i(j)} I_j$ endlich-dimensional sind, und wie im 4. Schritt folgt, daß A als Modul über sich selbst von endlicher Länge ist.

Zu (iii). Als Modul endlicher Länge ist M über A endlich erzeugt, sagen wir

$$M = Ax_1 + \ldots + Ax_s$$

Ein Element von a annulliert M genau, dann wenn es alle Erzeuger x_i annuliert. Die A-lineare Abbildung

$$A \longrightarrow M \oplus \ldots \oplus M,\ a \mapsto (ax_1, \ldots, ax_s),$$

besitzt den Kern $\mathrm{Ann}_A(M)$, d.h. $A/\mathrm{Ann}_A(M)$ läßt sich mit einem Teilmodul der direkten Summe rechts identifizieren und besitzt deshalb enliche Länge,

$$\mathrm{length}_A(A/\mathrm{Ann}_A(M)) < \infty.$$

Insbesondere ist der Ring $A/\mathrm{Ann}_A(M)$ noethersch und das Nullideal besitzt eine endliche Primärzerlegung. Durch Übergang zu den inversen Bildern beim natürlichen Homomorphismus

$$A \longrightarrow A/\mathrm{Ann}_A(M)$$

erhalten wir die Primärzerlegung von $\mathrm{Ann}_A(M)$ in A. Weil $A/\mathrm{Ann}_A(M)$ von endlicher Länge ist, sind alle seine Primideale maximal. Die Primideale zur Primärzerlegung von $\mathrm{Ann}_A(M)$ sind somit maximal in A. Berechnen wir die Länge

$$\ell = \mathrm{length}_A(M)$$

und wählen dazu eine echt aufsteigende Kette der Länge ℓ,

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_\ell = M$$

von Teilmoduln von A. Nach Wahl dieser Kette, gibt es keinen Teilmodul von M, der echt zwischen zwei benachbarten M_i liegt. Insbesondere gilt

$$\mathrm{length}_A(M_i/M_{i+1}) = 1 \text{ für jedes i.}$$

Insbesondere wird M_i/M_{i+1} von jedem seiner von 0 verschiedenen Elemente erzeugt, d.h. es gibt eine A-lineare Surjektion

$$A \longrightarrow M_i/M_{i+1}.$$

Weil die Länge des Faktormoduls gleich 1 ist, muß der Kern dieser Surjektion ein maximales Ideal sein, sagen wir

$$M_i/M_{i+1} \cong A/m_{i(j)}\ . \tag{5}$$

Wegen der Additivität der Längenfunktion gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{length}_A(M) &= \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{length}_A(M_i/M_{i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \# \{j \mid i(j) = i\}\end{aligned}$$

Der i-te Summand der letzten Summe ist dabei gerade die Anzahl der Summanden der ersten Summe (die alle gleich 1 sind) mit $i(j) = i$. Damit gilt,

$$\begin{aligned}i(j) = i &\Leftrightarrow m_i = m_{i(j)} \\ &\Leftrightarrow m_i A_{m_i} = m_{i(j)} A_{m_i} \\ &\Leftrightarrow m_{i(j)} A_{m_i} \text{ echtes Ideal von } A_{m_i} \\ &\Leftrightarrow (A/m_{i(j)})_{m_i} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (M_i/M_{i+1})_{m_i} \neq 0 \qquad \text{(wegen (5))} \\ &\Leftrightarrow (M_i)_{m_i} \neq (M_{i+1})_{m_i}\end{aligned}$$

Die Anzahl der j mit $i(j) = i$ ist damit gleich der Länge vom M_{m_i} über A_{m_i}, d.h. es gilt die behauptete Formel.

Zu (iv). Jede Kette von B-Teilmoduln von N ist auch eine Kette von A-Teilmoduln von N. Deshalb ist die Länge von N über A unendlich, falls dies die Länge von N über B ist. Wir können deshalb annehmen,

$$r := \mathrm{length}_B(N) < \infty.$$

Betrachten wir eine Kette von B-Teilmoduln der Länge r von N, sagen wir,

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_r = N.$$

Dann gilt $\mathrm{length}_B(N_i/N_{i-1}) = 1$ für $i = 1, \ldots r$, also

$$N_i/N_{i-1} \cong \kappa_B.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{length}_A(N) &= \sum_{i=1}^{r} \mathrm{length}_A(N_i/N_{i-1}) \\ &= r \bullet \mathrm{length}_A(\kappa_B) \\ &= r \bullet \mathrm{length}_{\kappa_A}(\kappa_B) \\ &= \mathrm{length}_B(N) \bullet [\kappa_B : \kappa_A].\end{aligned}$$

QED.

Die Hilbert-Funktion eines graduierten Moduls[27]

Seien $R = \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$ ein graduierter Ring mit R_0 noethersch, welcher als Algebra über R_0 endlich erzeugt ist,

$$R = R_0[x_1,...,x_s], \quad (\deg x_i = d_i)$$

mit endlich vielen homogenen Elementen x_i. Weiter sei M ein graduierter R-Modul, d.h. die additive Gruppe von M zerfalle in eine direkte Summe

$$M = \oplus_{n=n_0}^{\infty} M_n \text{ mit } n_0 \in \mathbb{Z}$$

und es gelte

$$R_m M_n \subseteq M_{m+n}\ .$$

Wir nehmen, hier an, daß M als R-Modul endlich erzeugt ist. Dann kann man M als R-Modul sogar durch endlich viele homogene Elemente über R erzeugen,

$$m_1,...,m_t \qquad (\deg m_j = e_j \in \mathbb{Z}).$$

Jedes Element von M_n kann man dann in der Gestalt

$$\sum_{j=1}^{t} r_j m_j$$

schreiben, mit homogenen Polynomen r_j des Grades $n - e_j$ in den x_i. Insbesondere wird M_n als R_0-Modul endlich erzeugt (wobei man als Erzeuger die Elemente der Gestalt $\mu_j m_j$ verwenden kann. Dabei durchlaufe μ_j die Potenzprodukte in den x_i des Grades $n - e_j$).

Schließlich nehmen wir an, daß die R_0-Moduln M_n sogar von enlicher Länge sind. In dieser Situation betrachten wir die formale Potenzreihe,

$$H_M := \sum_{n=0}^{\infty} \text{length}_{R_0}(M_n) \in \mathbb{Q}[[T]]$$

welche wir Hilbert-Reihe des Moduls M nennen wollen. Die Zugehörige Funktion

$$H_M: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ n \mapsto H_M(n) := \text{length}_{R_0}(M_n),$$

bezeichnen wir mit demselben Symbol und sprechen in diesem Kontext von der Hilbert-Funktion von M.

Rationalität der Hilbert-Reihe

Die Hilbert-Reihe ist eine rationale Funktion in T der Gestalt

$$H_M = \frac{p(T)}{\prod_{i=1}^{s} (1-T^{d_i})}$$

mit einem ganzzahligen Polynom $p(T) \in \mathbb{Z}[T]$. Die Polstellenordnung dieses Polynoms an der Stelle T = 1 wird mit

$$d(M)$$

---

[27] Die hier gewählte Definition der Hilbert-Funktion ist sehr viel allgemeiner gewählt als die von uns im Haupttext benötigte. Der nachfolgende Beweis der Polynomialität der Hilbert-Funktion ist sehr viel einfacher mit dieser komplizierteren Definition als er es mit der uns eigentlich interessierenden Hilbert-Funktion wäre.

bezeichnet.
Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Anzahl der s der Erzeuger x_i von R über R_0.
<u>Der Fall s = 0</u>. Es gilt dann $R_n = 0$ für alle positiven n, d.h. es ist $R = R_0$. Weil M endlich erzeugt ist über R, gilt damit $M_n = 0$ für alle hinreichend großen n (genau, wenn n größer ist als alle Grade der endlich vielen Erzeuger). Dann ist aber H_M ein Polynom, wie behauptet.
<u>Der Fall s > 0</u>. Die Multiplikation mit x_s definiert eine R-lineare Abbildung, deren Kokern wir mit C und deren Kern wir mit K bezeichnen. Wir erhalten so eine exakte Sequenz von R-linearen Abbildungen

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M[-d_i] \xrightarrow{x_s} M \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

Dabei sollen die eckigen Klammern eine Gradverschiebung im Modul M bezeichnen, die sicherstellt, das die betrachteten Abbildungen homogene Elemente in homogene Elemente desselben Grades abbilden. Im Grad n erhalten wir eine exakte Sequenz von R_0-linearen Abbildungen

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M_{n-d_i} \xrightarrow{x_s} M_n \longrightarrow L_n \longrightarrow 0.$$

Wegen der Additivität der Längen-Funktion erhalten wir

$$\mathrm{length}_{R_0}(K_n) - \mathrm{length}_{R_0}(M_{n-d_i}) + \mathrm{length}_{R_0}(M_n) - \mathrm{length}_{R_0}(L_n) = 0,$$

also

$$(1-T^{d_i})H_M = H_L - H_K$$

Nach Konstruktion werden die R-Moduln L und K von x_s annulliert, sind also sogar Moduln über $R/x_sR = R_0[\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{s-1}]$, wenn $\bar{x}_i$ die Restklasse von x_i in R/x_sR bezeichnet. Nach Induktionsvoraussetzung haben H_L und H_K die behauptete Gestalt (mit s-1 ansgtelle von s). Dann hat aber auch H_M die behauptete Gestalt.
QED.

Existenz des Hilbert-Polynoms im Fall von Erzeugern des Grades 1
Sind die Erzeuger x_i des graduierten Rings R sämtlich vom Grad 1, so gibt es ein Polynom

$$P_M(T) \in \mathbb{Q}[T]$$

des Grade d(M) - 1 mit rationalen Koeffizienten und eine ganze Zahl n_0 mit

$$H_M(n) = P_M(n) \text{ für jedes } n \geq n_0.$$

Dieses Polynom heißt <u>Hilbert-Polynom</u> von M.
Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$H_M = \frac{p(T)}{(1-T)^s}$$

Sei $p(T) = \sum_{i=0}^{N} a_i T^i$. Wir können annehmen, p(T) ist teilerfremd to 1-T. Dann gilt

$$d(M) = s \text{ und } \sum_{i=0}^{N} a_i \neq 0. \tag{6}$$

Wegen

$$\frac{1}{(1-T)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n-1}{s-1} \cdot T^n$$

erhalten wir

$$H_M(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot \binom{s+n-i-1}{s-1}.$$

Der i-te Summand ist ein Polynom des Grades s-1 mit dem höchsten Koeffizienten

$$a_i \cdot \frac{1}{(s-1)!}$$

Wegen der zweiten Bedinung (6) erhalten wir ein Polynom des Grades s-1 = d(M)-1.
QED.

Dimension (frei nach Matsumura)

1. Definitionen

Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Eine endliche echt absteigende Folge von n+1 Primidealen von A,

$$p_0 \subset \dots \subset p_n$$

heißt Primidealkette der Länge n. Wenn es kein Primideal gibt, das echt zwischen zwei Primidealen dieser Kette liegt, sprechen wir auch von einer maximalen Primidealkette von p_0 nach p_n.

Für $p \in$ Spec A heißt das Supremum über alle Längen aller solcher Ketten mit $p_n = p$ Höhe von p und wird mit

$$\mathrm{ht}(p)$$

bezeichnet. Für jedes echte Ideal $I \subseteq A$ definieren wir die Höhe von I als das Infimum über alle Höhen aller Primoberideale von I,

$$\mathrm{ht}(I) := \inf \{\mathrm{ht}(p) \mid I \subseteq p \in \mathrm{Spec}\, A\}.$$

Die Dimension von A oder auch Krull-Dimension ist definiert als das Supremum über alle Höhen aller Primideale von A,

$$\dim A := \sup \{\mathrm{ht}(p) \mid p \in \mathrm{Spec}\, A\}.$$

Für A-Moduln M definieren wir die Dimension von M als

$$\dim M := \dim A/\mathrm{Ann}(M).$$

Beispiele

(i) Die Bedingung ht(p) = 0 an ein Primideal p gleichbedeutend damit, daß p ein minimales Primideal ist.

(ii) Ist dim A endlich, so ist diese Zahl der Länge der längsten Primidealkette von A.

(iii) $\mathrm{ht}(p) = \dim A_p$ für Primideale p von A.

(iv) $\dim (A/I) + \mathrm{ht}(I) \le \dim A$.

(v) Die Dimension eines Körpers ist gleich 0.

(vi) Die Dimension eines Hauptidealrings (welcher kein Körper ist) ist 1.

Beweis von (iv). Ist einer der Summanden links unendlich, so ist die Behauptung trivial. Sei also

$$a := \dim(A/I) < \infty \text{ und } b := \mathrm{ht}(I) < \infty.$$

Wir wählen eine Primidealkette der Länge a in A/I und gehen zu den Urbildern der Primideal in A über. Wir erhalten eine Kette

$$p_0 \supset \dots \supset p_a$$

von Primidealen in A der Länge a mit $p_a \supseteq I$. Nach Definition von ht(I) gibt es eine Kette der Länge b in A, die mit p_a beginnt. Zusammen erhalten wir eine Kette der Länge a+b, d.h. es gilt $a+b \le \dim A$.

QED.

Beweis von (vi). Seien A ein Hauptidealring und $p \subset q$ zwei echt ineinander liegende Primideale. Beide sind nach Voraussetzung Hauptideale, sagen wir

$$p = xA \text{ und } q = yA.$$

Wegen $p \subset q$ liegt x in q, ist also ein Vielfaches von y, sagen wir

$$x = ya.$$

Das Element a kann keine Einheit sein, denn dann wäre p = q. Aus denselben Gründen kann y nicht in p liegen. Weil p ein Primideal ist, muß dann a in p liegen, sagen wir

$$a = xb.$$

Es folgt

$$0 = x - ya = x - yxb = x(1-yb).$$

Weil q = yA als Primideal ein echtes Ideal ist, kann y keine Einheit sein, d.h. der zweite Faktor rechts ist nicht Null. Weil A als Hauptidealring keine Nullteiler besitzt, folgt x = 0, d.h. p = 0. Wir haben gezeigt:

Das einzige Primideal von A, welches nicht maximal ist, ist das Nullideal.

Insbesondere ist die Dimension von A höchstens gleich 1,

$$\dim A \le 1.$$

Wäre die Dimension kleiner als 1, so wäre das Nullideal von A maximal, d.h. A wäre ein Körper, im Widerspruch zur Annahme.

QED.

2. Charakterisierung der 0-dimensionalen Moduln

Seien A ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $\dim M = 0$.

(ii) A/Ann(M) ist artinsch.

(iii) $\text{length}(A/\text{Ann}(M)) < \infty$.

(iv) $\text{length}_A(M) < \infty$.

Beweis. Die Aussagen ergeben sich aus den Eigenschaften (ii) der Längen-Funktion:. Zunächst gilt

$\dim M = 0$	$\Leftrightarrow \dim A/\text{Ann}(M) = 0$	(nach Defintion von dim M)
	$\Leftrightarrow \text{length}(A/\text{Ann}(M)) < \infty$	(weil A noethersch ist)
	$\Leftrightarrow$ A/Ann(M) artinsch.	

Es gilt also

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)} \Leftrightarrow \text{(iii)}.$$

Weil M endlich erzeugt ist, sagen wir $M = Am_1 + \dots + Am_r$, hat man eine Surjektion

$$A\oplus\dots\oplus A \twoheadrightarrow M,\ (a_1,\dots,a_r) \mapsto \sum_{i=1}^{r} a_i m_i.$$

Ändert man eines der a_i um ein Element von Ann(M) ab, so bleibt die Summen rechts unverändert. Die Abbildung induziert somit eine Surjektion

$$(A/\mathrm{Ann}(M)) \oplus \ldots \oplus (A/\mathrm{Ann}(M)) \twoheadrightarrow M.$$

Es folgt

$$\mathrm{length}(M) \le r\bullet\mathrm{length}(A/\mathrm{Ann}(M)).$$

Also gilt

$$\text{(iii)} \Rightarrow \text{(iv)}.$$

Weiter hat man eine Abbildung

$$A \longrightarrow M\oplus\ldots\oplus M,\ a \mapsto (am_1,\ldots,am_r),$$

deren Kern gerade der Annullator von M ist, also eine Injektion

$$A/\mathrm{Ann}(M) \hookrightarrow M\oplus\ldots\oplus M.$$

Deshalb gilt

$$\mathrm{length}(A/\mathrm{Ann}(M)) \le r\bullet\mathrm{length}(M).$$

Insbesondere erhalten wir

$$\text{(iv)} \Rightarrow \text{(iii)}.$$

Zusammen ergibt sich die Behauptung.
QED.

3. Definitionsideale semi-lokaler Ringe, Hilbert-Polynome und die Zahl d(M)

Seien A ein noetherscher semi-lokaler Ring, d.h. die Anzahl der maximalen Ideale von A sei endlich, und

$$m = \mathrm{rad}(A)$$

dessen Jacobson-Radikal, d.h. der Durchschnitt der endlich vielen maximalen Ideale.

Ein Definitionsideal von A ist ein Ideal $I \subseteq A$, welches zwischen zwei Potenzenb von m liegt, sagen wir

$$m^\nu \subseteq I \subseteq m$$

für eine natürliche Zahl ν.

Bemerkungen

(i) Ein Ideal $I \subseteq m$ ist genau dann ein Definitionsideal, wenn $\mathrm{length}(A/I) < \infty$ gilt.

(ii) Seien I ein Definitionsideal von A und M ein endlich erzeugter A-Modul. Wir betrachten die direkten Summen

$$\mathrm{gr}(A) := \mathrm{gr}_I(A) := \oplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^n$$

und

$$\mathrm{gr}(M) := \mathrm{gr}_I(M) := \oplus_{n=0}^{\infty} I^nM/I^nM.$$

Die Multiplikation der Elemente von A mit Elementen von M definiert A-bilineare Abbildungen

$$I^a \times I^b M \longrightarrow I^{a+b}M$$

und damit A-bilineare Abbildungen

$$I^a/I^{a+1} \times I^b/I^{b+1}M \longrightarrow I^{a+b}M/I^{a+b+1}M.$$

Für M = A ergibt sich, daß gr(A) auf diese Weise die Struktur eines graduierten Rings bekommt. Für allgemeines M sehen wir, gr(M) hat so die Struktur eines graduierten Moduls über gr(A).

Nach Wahl von I ist der homogene Bestandteil $\mathrm{gr}^0(A) = A/I$ des Grades 0 von gr(A) artinsch, also auch noethersch. Außerdem wird gr(A) von Elementen des Grades 1, welche I/I^2 über A/I erzeugen, als A/I-Algebra erzeugt. Der Ring ist somit über A/I endlich erzugt.

Analog wird gr(M) von Elementen des Grades 1, welche IM/I^2M über A/I erzeugen, als Modul über gr(A) erzeugt und ist damit über gr(A) endlich erzeugt. Das hat zur Folge, daß jeder homogene Bestandteil von gr(M) ein endlich erzeugter Modul über A/I ist. Mit A/I haben damit diese homogenene Bestandteile von gr(M) eine endliche Länge über A. Die Hilbert-Funktion

$$H_{gr(M)}(n) = \text{length}_A(I^nM/I^{n+1}M)$$

des graduierten gr(A)-Moduls gr(M) ist damit wohldefiniert. Wir betrachten die Summen-Transformierte

$$H^1_{gr(M)}(n) = \text{length}_A(M/I^{n+1}M).$$

Weil gr(M) von Elementen des Grades 1 über gr(A) erzeugt wird, gibt es eine Polynom

$$\chi(M, I; T) \in \mathbb{Q}[T]$$

mit rationalen Koeffizienten und eine natürliche Zahle n_0 mit

$$H^1_{gr(M)}(n) = \chi(M, I; n) \text{ für jedes n mit } n \geq n_0.$$

Dieses Polynom heißt <u>Hilbert-Polynom</u> des Moduls M bezüglich I.

(iii) Der Grad des Hilbert-Polynoms $\chi(M, I; n)$ hängt nicht von der speziellen Wahl des Definitionsideals I ab und wird mit

$$d(M)$$

bezeichnet. Unser nächstes Ziel besteht darin, diese Zahl mit der Dimension von M zu vergleichen.

(iv) Falls A ein Definitionsideal mit r Erzeugenden besitzt, so gilt

$$d(M) \leq r.$$

(v) Man beachte, die Anzahl der Erzeuger eines Defintionsideals steht in Beziehung zu unseren heuristischen Vorstellungen von der Dimension. Seien

$$A = k[x_1,...,x_n]/J, \; x \in \text{Spec } A$$

und

$$\dim A_x = \dim_x A = r,$$

d.h. $V(J) \subseteq \mathbb{A}^n_k$ soll r-dimensional im Punkt x sein. Dann sollte es eine Hyperfläche $f_1 = 0$ durch den Punkt x geben mit

$$\dim_x V(J) \cap V(f_1) = r-1.$$

Indem wir diesen Vorgang wiederholen, erhalten wir eine Folge von Polynomen

$$f_1, \dots, f_r \in k[x_1,...,x_n]$$

mit

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \dim_x V(J) \cap V(f_1) \cap \dots \cap V(f_r) \\ &= \dim_x V(J + (f_1,...,f_r)) \\ &= \dim_x k[x_1,...,x_n]/ (J + (f_1,...,f_r)) \\ &= \dim_x A/((\overline{f}_1,..., \overline{f}_r)) \text{ mit } \overline{f}_i = f_i \bmod J. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, es in A_x ein von r Elementen erzeugtes Definitionsdeal I.

Beweis von (i). Seien $m_1,..., m_r$ die maximalen Ideale von A. Für jede natürliche Zahl ν gibt es dann eine Kette von Idealen

$$A = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_r$$

mit

1. $I_r \subseteq (m_1 \bullet ... \bullet m_r)^\nu$ $\qquad (\subseteq (m_1 \cap ... \cap m_r)^\nu = m^\nu)$
2. $I_{i+1} = m_{j(i)} \bullet I_i$ für jedes i.

Insbesondere ist I_i/I_{i+1} ein endlich-dimensionaler $A/m_{j(i)}$-Vektorraum, also als A-Modul von endlicher Länge. Dann ist aber A/I_r von endlicher Länge. Wegen Bedingung von 1 folgt

$$\text{length}(A/m^\nu) < \infty \text{ für jedes } \nu.$$

Ist I ein Definitionsideal, so ist A/I ein Faktorring eines A/m^ν also ebenfalls von endlicher Länge.

Sei umgekehrt A/I von endlicher Länge. Wegen $I \subseteq m$ ist dann $m \bullet A/I$ der Durchschnitt der maximalen Ideale von A/I, d.h.

$$m \bullet A/I = \text{rad } A/I.$$

Wie wir oben gesehen haben, ist das Radikal für Ringe endlicher Länge nilpotent (vgl. Schritt 3 im Beweis der Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) der Eigenschaften (ii) der Längen-Funktion). Also liegt eine Potenz von m in I.

QED.

Beweis von (iii). Seien I und J zwei Definitionsideale von A. Dann gibt es eine natürliche Zahl s mit

$$J^s \subseteq I.$$

Also gilt für jedes n

$$\chi(M, I, n) = \text{length}(M/I^{n+1}M) \le \text{length}(M/I^{s(n+1)}) = \chi(M, J, ns + s - 1).$$

Insbesondere kann der Grad bezüglich I nicht größer sein als der bezüglich J. Aus Symmetrie-Gründen müssen die beiden Grade gleich sein, d.h. d(M) hängt nicht von der speziellen Wahl des Definitionsideals ab.

QED.

Beweis von (iv). Sei I ein Definitionsideal von A, welches von r Elementen erzeugt wird,

$$I = (\alpha_1, ..., \alpha_r)A.$$

Dann wird gr(A) von den r-Anfangsformen

$$\alpha_i \bmod I^2 \in \text{gr}(A)$$

über A/I erzeugt. Da diese Anfangsformen den Grad 1 haben, bekommt die Formel für die Hilbert-Reihe von gr(M) die Gestalt

$$H_{\text{gr}(M)} = \frac{p(T)}{(1-T)^r}$$

Für die Polstellenordung erhalten wir also

$$d(\text{gr}(M)) \le r.$$

Das zugehörige Hilberpolynom $P_{\text{gr}(M)}$ hat somit einen Grad $d(\text{gr}(M)) - 1 \le r-1$. Durch Übergang zur Summentransformierten erhalten wir ein Polynom $\chi(M, I, n)$ vom Grad $\le r$, wie behauptet.

QED.

4. Verhalten des Hilbert-Polynoms bei exakten Sequenzen

Seien A ein noetherscher semi-lokaler Ring, I ein Definitionsideal von A und

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von endlich erzeugten A-Moduln. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) $\quad d(M) = \max(d(M'), d(M''))$.

(ii) $\chi(M, I, T) - \chi(M', I, T) - \chi(M'', I, T)$ ist ein Polynom in T eines Grades < d(M).

Beweis. Wir identifizieren M' mit einem Teilmodul von M. Wegen $M'' \cong M/M'$ gilt

$$\begin{aligned}\chi(M'', I, n) &= \text{length}(M''/I^{n+1}IM'')\\ &= \text{length}(M/I^{n+1}M + M')\\ &\le \text{length}(M/I^{n+1}M)\\ &= \chi(M, I; n)\end{aligned}$$

also

$$d(M'') \le d(M).$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\chi(M, I, n) - \chi(M'', I, n) &= \text{length}(M/I^{n+1}M) - \text{length}(M/I^{n+1}M + M')\\ &= \text{length}((I^{n+1}M + M') / I^{n+1}M)\\ &= \text{length}(M'/M' \cap I^{n+1}M)\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Artin-Rees gibt es ein r mit $M' \cap I^{n+1}M \subseteq I^{n-r+1}M$ für n > r. Trivialerweise gilt $I^{n+1}M' \subseteq M' \cap I^{n+1}M$. Zusammen erhalten wir

$$\chi(M', I, n) \ge \chi(M, I, n) - \chi(M'', I, n) \ge \chi(M', I, n-r)$$

Das Polynom $\chi(M', I, n)$ hat also denselben Grad wie $\chi(M, I, n) - \chi(M'', I, n)$ und denselben höchsten Koeffizienten. Insbesondere gilt (ii).

Gehört zu M und M" derselbe Grad, so ist der Grad zu M' kleiner oder gleich, d.h. es gilt (i).
Gehören zu M und M" unterschiedliche Grad, dann ist der Grad zu M" kleiner und die Grade zu M' und M sind gleich, d.h. (i) gilt ebenfalls.
QED.

5. Eigenschaften von d(M)

Sei A ein noetherscher semi-lokaler Ring. Es gilt

(i) $d(A) \ge \dim(A)$.

(ii) Für jeden endlich erzeugten A-Modul $M \ne 0$ und jedes Element $x \in \text{rad } A$ gilt $d(M) \ge d(M/xM) \ge d(M) - 1$.

(iii) Für jeden endlich erzeugten A-Modul $M \ne 0$ mit $\dim(M) = r$ gibt es Elemente $x_1,...,x_r \in \text{rad } A$ mit $\text{length}(M/(x_1,...,x_r)M) < \infty$.

Beweis. Zu (i). Bezeichne m das Jacobson-Radikal von A. Wir führen den Beweis durch Induktion nach d(A). Im Fall d(A) = 0 ist $\chi(A, m, n) = \text{length}(A/m^n)$ für große n konstant, d.h. es gibt ein r mit

$$m^r = m^{r+1} = ...$$

Nach dem Durchschnittsatz von Krull gilt damit $m^r = 0$. Insbesondere ist

$$\text{length}(A) = \text{length}(A/m^r) = \chi(A, m, r-1)$$

endlich, also dim(A) = 0.
Sei jetzt d(A) > 0. Im Fall dim A = 0 gilt die Behauptung trivialerweise. Nehmen wir also an,

$$\dim A > 0.$$

Wir betrachten eine Primidealkette der Länge e > 0, sagen wir

$$p_0 \supset p_1 \supset .. \supset p_{e-1} \supset p_e =: p.$$

Sei $x \in p_{e-1} - p$. Dann gilt

$$\dim A/(xA+p) \ge e-1.$$

Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow A/p \xrightarrow{x} A/p \longrightarrow A/(xA + p) \longrightarrow 0$$

lesen wir ab, daß $\chi(A/p, I, T)$ - $\chi(A/p, I, T)$ - $\chi(A/(xA+p), I, T)$ einen Grad < d(A/p) hat, d.h. es gilt

$$d(A/(xA+p)) < d(A/p) \le d(A).$$

Zusammen erhalten wir $e \le d(A)$. Damit gilt (i).

Insbesondere ist damit gezeigt, daß die Dimension noetherscher semi-lokaler Ring A endlich ist.

Zu (ii). Die ersten Ungleichung gilt trivialerweise. Sei I ein Definitionsideal,welches das Element x enthält. Dann gilt

$$\begin{aligned}\chi(M/xM, I, n) &= \mathrm{length}(M/xM + I^{n+1}M)\\ &= \mathrm{length}(M/I^{n+1}M) - \mathrm{length}((xM + I^{n+1}M)/I^{n+1}M).\end{aligned}$$

Wegen

$$(xM + I^{n+1}M)/I^{n+1}M \cong xM/xM\cap I^{n+1}M \cong{}^{28}\ M/I^{n+1}M{:}x$$

und $I^nM \subseteq I^{n+1}M{:}x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\chi(M/xM, I, n) &\le \mathrm{length}(M/I^{n+1}M) - \mathrm{length}(M/I^nM)\\ &= \chi(M, I, n) - \chi(M,I, n-1).\end{aligned}$$

Also gilt $d(M/xM) \ge d(M) - 1$.

Zu (iii). Sei I ein Definitionsideal von A. Im Fall r = dim(M) = 0 hat auf Grund der Charakterisierung der 0-dimensionalen Moduln, M eine endliche Länge,

$$\mathrm{lengt}(M) < \infty.$$

Die Behauptung ist somit richtig.

Sei jetzt r > 0. Wegen r = dim M = dim A/Ann(M) sind die Primoberideale p von Ann(M) mit

$$\dim(A/p) = r$$

minimale Primoberideale von Ann(M). Deren Anzahl ist somit endlich. Bezeichnen wir diese mit

$$p_1, \dots , p_t.$$

Wegen r > 0 liegt kein maximales Ideal von A ganz in einem der p_i. Weil A semi-lokal ist, d.h. die Anzahl der maximalen Ideale ist endlich, liegt auch das Produkt der maximalen Ideale in keinem p_i. Erst recht gilt

$$\mathrm{rad}(A) \not\subseteq p_i \text{ für } i = 1,\dots,t.$$

Deshalb gibt es ein $x_1 \in \mathrm{rad}(A)$, welches in keinem p_i liegt. Der Annullator von M/x_1M enthält $\mathrm{Ann}(M) + x_1A$, also keines der p_i. Es gilt also

$$\dim (M/x_1M) \le \dim(M) - 1.$$

Die Behauptung folgt jetzt auf Grund der Induktionsvoraussetzung (bzgl. dim (M)).
QED.

6. Beschreibung der Dimension eines Moduls

Seien A ein noetherscher semi-lokaler Ring und

$$M \ne 0$$

ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt

---

[28] Die Multiplikation mit x definiert eine Surjektion $M \longrightarrow xM/xM\cap I^{n+1}M$ mit deren Kern gerade $I^{n+1}M{:}x$ ist.

$$\dim(M) = d(M) = \inf\{r \mid \text{es gibt } x_1,...,x_r \in \sqrt{0} \text{ mit } \mathrm{length}(M/(_1,...,x_r)M) < \infty\}$$

Beweis. Wir wählen Elemente $x_1,...,x_r \in \mathrm{rad}(A)$ mit

$$\mathrm{length}(M/(x_1,...,x_r)M) < \infty.$$

Da sich d(M) beim Faktorisierung nach einem Element von rad(A) höchstens um 1 sinkt (vgl. Eigenschaften von d(M)), folgt

$$d(M) \le r.$$

Da es auf jeden Fall dim(M) Elemente x_i mit der angegebenen Eigenschaft gibt, gilt für das kleinstmögliche r

$$r \le \dim(M).$$

Zusammen erhalten wir

$$d(M) \le \dim(M).$$

Für M = A gilt damit auf Grund der oben bewiesenen Eigenschaften von d sogar

$$d(A) = \dim(A) \qquad (1)$$

Auf Grund der Eigenschaften assoziierter Primideale[29] gibt es eine Folge von Teilmoduln von M, sagen wir

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset ... \subset M_s = M$$

derart[30], daß für i = 1,...,s gilt

$$M_i/M_{i-1} \cong A/p_i \text{ mit } p_i \in \mathrm{Spec}\, A.$$

Offensichtlich gilt

$$p_i \supseteq \mathrm{Ann}(M), \qquad (2)$$

und auf Grund des Verhaltens von Ass(M) bezüglich exakter Sequenzen

$$\mathrm{Ass}(M) \subseteq \{p_1, ... , p_s\}.$$

Wegen Supp(M) = V(Ann(M)) sind alle minimalen Primoberideale von Ann(M) auch solche von Supp(M) und liegen damit in Ass(M), und damit in der Menge der p_i. Damit gilt

$$\begin{aligned} d(M) &= \max\{d(A/p_i) \mid i = 1,...,s\} && \text{(Verh. von } \chi(M,I;n) \text{ bei ex. Sequenzen)}\\ &= \max\{\dim A/p_i \mid i=1,...,s\} && \text{(wegen (1))}\\ &= \dim A/\mathrm{Ann}(M) && \text{(wegen (2))}\\ &= \dim(M) && \text{(Definition von dim(M))} \end{aligned}$$

Damit gilt d(M) = r = dim(M), wenn man r minimal wählt.

---

[29] Für den weiteren Beweis benötigen wir die folgenden Eigenschaften der Menge assoziierten Primideale eines A-Moduls M, welche mit

$$\mathrm{Ass}_A(M) := \{p \in \mathrm{Spec}(A) \mid M \text{ besitzt einen zu } A/p \text{ isomorphen Teilmodul}\}$$

bezeichnet wird:

(i) $\mathrm{Ass}(M) = \emptyset \Leftrightarrow M = 0$.

(ii) Die minimalen Elemente von Ass(M) und Supp(M) sind dieselben.

(ii) Für exakte Sequenzen $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ von A-Moduln gilt

$$\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'').$$

(iii) Ass(A/p) = {p} für Primideale A.

[30] Wegen $M \ne 0$ gibt es einen Teilmodul M_1, der isomorph ist zu A/p_1 mit $p_1 \in \mathrm{Spec}\, A$. Durch Wiederholen der Konstruktin mit M/M_1 anstelle von M erhält man die übrigen Teilmoduln. Weil M noethersch ist, muß die Folge der M_i, die man so erhält, endlich sein.

QED.

7. Durchschnitte mit Hyperflächen

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, $I \subsetneq A$ ein echtes Ideal und $f \in A$ ein Element. Es gelte

$$\dim V(I) = d < \infty.$$

Wir nehmen weiter an, jede Primidealkette in A/I, deren Länge sich durch hinzufügen von Primidealen sich nicht vergrößern läßt, habe die Länge d.[31]

Wir setzen

$$X = V(I) \text{ und } H = V(f).$$

Dann hat jede irreduzible Komponente von

$$X \cap H$$

die Dimensin d-1 oder d. Der zweite Fall tritt nur dann ein, wenn die Komponente zugleich Komponente von X ist.
Man beachte, wir schließen hier den Fall, daß der Durchschnitt leer ist nicht aus.

Beweis. <u>1. Schritt</u>. Der Fall X irreduzibel.
Wir können dann annehmen,

$$I = p \in \operatorname{Spec} A$$

ist ein Primideal. Im Fall $f \in p$ gilt $X \subseteq H$, also $X \cap H = X$ ist irreduzibel von der Dimension d. Betrachten wir den Fall

$$f \notin p.$$

Jede irreduzible Komponente von $X \cap H = V(p+fA)$ hat dann die Gestalt V(q) mit einem Primideal mit

$$p + fA \subseteq q.$$

Die aufsteigenden Primidealketten, welche mit q anfangen sind somit echt kürzer als die mit p anfangenden, d.h. es gilt

$$\dim V(q) < \dim V(p) = \dim V(I) = \dim X = d.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es, zu zeigen die Zahl links $\geq$ d-1, d.h. es reicht zu zeigen,

$$d-1 \leq \dim_x X \cap H \qquad (= \dim V(p+fA)) = \dim A/(p+fA))$$

---

[31] Mit anderen Worten, es gelte

$$\dim_x V(I) = d$$

für jeden abgeschlossenen Punkt x von V(I).

Falls A/I endlich erzeugte Algebra über einem Körper k ist, ist dies äquivalent zur Äquidimensionalität von V(I), denn die lokalen Dimensionen der Komponenten von V(I) in ihren abgeschlossenen Punkten hängen dann nicht von der speziellen Wahl des Punktes ab.

Man beachte, für nicht-notwendig abgeschlossene Punkte y gilt dann

$$\dim_y V(I) = \operatorname{codim}_{V(I)} \overline{\{y\}}.$$

Für abgeschlossen Punkte $x \in \overline{\{y\}}$ gilt erhalten wir im Ring $B = (A/I)_x$ nämlich

$$\begin{aligned} \dim_y V(I) &= \dim B_y = \operatorname{ht} y \\ &= \dim B - \dim B/y \quad \text{(B endlich erzeugt über k)} \\ &= d - \dim V(y) \\ &= d - \dim \overline{\{y\}} \end{aligned}$$

für jeden abgeschlossenen Punkt x von $X\cap H$. Zur Berechnung der lokalen Dimension auf der rechten Seite, können wir A durch den lokalen Ring von X im Punkt x ersetzen (wegen unserer Annahme bezüglich der Primidealketten von A/I bleibt dabei die Dimension von X unverändert). Wegen $x \in H = V(f)$ liegt dann f im maximalen Ideal x von A, d.h. im Radikal von A.

Mit $M := A/p$ gilt $M/fM = (A/p)/f\bullet(A/p) = (A/p) / (fA + p)/p = A/(p + fA)$ gilt

$$\begin{aligned} \dim X \cap H &= \dim M/fM \\ &= d(M/fM) \\ &\geq d(M) - 1 \\ &= \dim A/p - 1 \\ &= \dim X - 1 \\ &= d-1. \end{aligned}$$

<u>2. Schritt</u>: X beliebig.
Es gilt

$$X \cap H = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$$

mit Y_i irreduzibel und abgeschlossen mit $\dim Y_i = d$ oder $= d-1$, denn dies ist richtig wenn man X durch eine Komponente von X ersetzt (nach dem ersten Schritt) und X ist die Vereinigung seiner Komponenten. Läßt man auf der rechten Seite alle überflüssigen Y_i weg, so erhält man gerade die Zerlegung von $X\cap H$ in irreduzible Komponenten und die Aussage gilt in gleicher Weise für die verbleibenden Y_i.

QED.

8. Die Dimension des $\mathbb{A}_k^N$

Sei k ein Körper. Dann gilt $\dim \mathbb{A}_k^N = N$.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach N.

<u>Der Fall</u> N = 0.
Es gilt

$$\dim \mathbb{A}_k^0 = \dim k = 0,$$

weil k ein Körper ist.

<u>Der Fall</u> N = 1.
Es gilt

$$\dim \mathbb{A}_k^1 = \dim k[x] = 1,$$

weil k[x] ein Hauptidealring ist.

<u>Der Fall</u> N > 1.
Wir setzen $A := k[x_1,...,x_N]$, $I := (0)$ und $f := x_N$. Dann ist

$$X := V(I) = \mathrm{Spec}\, k[x_1,...,x_N] = \mathbb{A}_k^N$$

und

$$H := V(f) = \mathrm{Spec}\, k[x_1,...,x_N]/(x_N) = \mathrm{Spec}\, kk[x_1,...,x_{N-1}] = \mathbb{A}_k^{N-1}$$

Insbesondere ist

$$X \cap H = H$$

irreduzibel, und die einzige Komponente des Durchschnitts ist keine Komponente von X (weil die einzige Komponente von X gleich X ist). Damit gilt

$$\dim H = \dim X - 1.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt außerdem

$$\dim H = N - 1.$$

Damit ist

$$\dim \mathbb{A}_k^N = \dim X = \dim H + 1 = (n-1) + 1 = n.$$

QED.

9. Verhalten der Dimension bei lokalen Homomorphismen

Sei $h: (A,m) \longrightarrow (B,n)$ ein lokaler Homomorphismus lokaler noetherscher Ringe. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) $\dim B \le \dim A + \dim B/mB$.

(ii) In (i) gilt das Gleichheitszeichen, falls h flach ist.

Beweis. Zu (i). Wir setkzen

$$a := \dim A$$
$$b := \dim B$$
$$f := \dim \overline{B} \text{ mit } \overline{B} := B/mB.$$

Dann gibt es ein Definitionsideal $I \subseteq A$ mit

$$a = \mu_A(I)$$

und ein Ideal $J \subseteq B$ mit

$$f = \mu_B(J)$$

derart, daß $J\bullet\overline{B}$ ein Definitionsideal ist. Wählen natürliche Zahlen r und s mit

$$m^r \subseteq I \; (\subseteq m)$$

bzw.

$$n^s \subseteq J + mB \; (\subseteq n).$$

Dann gilt

$$n^{rs} \subseteq (J+mB)^r \subseteq m^rB + J \subseteq IB + J \subseteq n.$$

Insbesondere ist $IB + J$ ein Definitionsideal von B, und es gilt

$$\dim B \le \mu_B(IB + J) \le \mu_B(IB) + \mu_B(J) \le \mu_A(I) + f = a + f = \dim A + \dim \overline{B}.$$

Zu (ii). 1. Schritt. $\dim \overline{B} = 0$.

Nach Voraussetzung ist das maximale Ideal von $\overline{B}$ nilpotent, d.h. mB ist ein Definitionsideal von B. Deshalb gilt

$$\dim B = \deg H^1_{mB}$$

Außerdem gilt für jede nicht-negative ganze Zahl n

$$\begin{aligned}
H^0_{mB}(n) &= \text{length}_B(m^nB/m^{n+1}B) \\
&= \text{length}_{B/mB}(m^n\otimes_A B/m^{n+1}\otimes_A B) \quad \text{(weil B flach ist über A)} \\
&= \text{length}_{B/mB}(m^n/m^{n+1}\otimes_A B) \quad \text{(weile } \otimes \text{ rechtsexakt ist)} \\
&=^{32} \text{length}_{B/mB}(m^n/m^{n+1}\otimes_{A/m} A/m\otimes_A B) \\
&= \text{length}_{B/mB}(m^n/m^{n+1}\otimes_{A/m} B/mB)
\end{aligned}$$

[32] m^n/m^{n+1} ist ein A/m-Modul.

Das letzte Tensorprodukt ist isomorph zu einer direkten Summe von Exemplaren von B/mB, wobei die Anzahl der Exemplare gleich $\dim_{A/m} m^n/m^{n+1} = H^0_A(n)$ ist. Es gilt also für jedes n

$$H^0_{mB}(n) \qquad = H^0_A(n)\cdot \mathrm{length}_{B/mB}(B/mB),$$

also auch

$$H^1_{mB} \qquad = H^1_A\cdot \mathrm{length}_{B/mB}(B/mB).$$

Die beiden Polynome zu H^1_{mB} und H^1_A unterscheiden sich nur um den konstanten Faktor length(B/mB), haben also denselben Grad. Damit ist

$$\dim B = \deg H^1_A = \dim A.$$

<u>2. Schritt</u>. Der Fall beliebiger Dimension von B.

Sei $p \in \mathrm{Spec}\, B$ ein Primideal mit

$$mB \subseteq p \text{ und } \dim B/p = \dim \overline{B}.$$

Dann ist p ein minimales Primoberideal von mB. Inbesondere gilt für die Lokalisierung

$$\dim B_p/mB_p = 0.$$

Außerdem ist die Zusammensetzung flacher Homomorphismen

$$A \xrightarrow{h} B \longrightarrow B_p$$

und nach Wahl von p auch lokal. Auf Grund des ersten Schrittes gilt

$$\dim A = \dim B_p.$$

Außerdem besteht nach Definition der Dimension mit Hilfe von Primidealketten die Abschätzung

$$\dim B_p + \dim B/p \le \dim B,$$

also

$$\dim A + \dim B/pB \le \dim B.$$

Auf Grund von (i) gilt sogar das Gleichheitszeichen.

QED.

Reguläre lokale Ringe

1 Nicht-singuläre Schemata

Ein lokaler noetherscher Ring A mit dem maximalen Ideal m heißt <u>regulär</u> oder auch <u>nicht-singulär</u>, falls die natürliche Surjektion

$$S_{A/m}(m/m^2) \twoheadrightarrow gr_n(A),$$

ein Isomorphismus ist. Andernfalls heißt A <u>singulär</u>. Ein Punkt $x \in X$ eines noetherschen Schemas heißt <u>regulär</u> oder auch <u>nicht-singulär</u>, falls der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär ist, d.h. falls die natürliche Einbettung

$$C_{X,x} \hookrightarrow T_x(X)$$

des Tangentialkegels in den Tangentialraum im Punkt x ein Isomorphismus von Schemata ist. Andernfalls heißt x <u>singulär</u>.

Ein noethersches Schema heißt <u>regulär</u> oder auch <u>nicht-singulär</u>, wenn alle seine Punkte regulär sind. Andernfalls heißt es <u>singulär</u>. Ein noetherscher Ring A heißt <u>regulär</u> oder <u>nicht-singulär</u>, falls Spec A regulär ist. Andernfalls heißt A <u>singulär</u>.

2 Charakterisierung der regulären lokalen noetherschen Ringe

Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit dem maximalen Ideal m. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) A ist regulär.

(ii) dim A = edim A.

(iii) $gr_m(A)$ ist isomorph zu einem Polynomring über A/m.

(iv) $H_{gr_m(A)} = \frac{1}{(1-T)^d}$ mit d = dim A.

(v) Das irrelevante Ideal von $gr_m(A)$ wird von homogenen Elementen des Grades 1 erzeugt, die eine reguläre Folge bilden.

(vi) m wird von einer <u>regulären Sequenz</u>[33] erzeugt.

(vii) Der Koszul-Komplex K(<u>a</u>,A) eines Erzeugendensystems a des maximalen Ideals m von A ist eine freie Auflösung der Länge dim A von A/m über A.

(viii) $Tor_i^A(A/m, A/m) = 0$ für alle i > dim A.

(ix) $Tor_i^A(A/m, M) = 0$ für alle i > dim A und jeden A-Modul M.

(x) Für jeden endlich erzeugten A-Modul M besitzt jede minimale freie Auflösung von M über A eine Länge ≤ dim A.

(vii) A hat eine endliche homologische Dimension, d.h. es gibt eine Zahl d derart, daß es für jeden endlich erzeugten A-Modul m eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F_d \longrightarrow F_{d-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

gibt mit endlich erzeugten freien Moduln F_i.

(viii) Die homologische Dimension von A ist gleich dim A.

(ix) Es gibt für den A-Modul M = A/m eine exakte Sequenz wie in (v).

Falls A regulär ist, bestehen die regulären Folgen, welche m erzeugen, aus dim A Elementen.

Beweis. Sei

$$d := \dim A.$$

<u>*(i) ⇒ (ii)*</u>.

Nach Voraussetzung gibt es einen Isomorphismus über κ = A/m,

$$\kappa[x_1,\ldots,x_e] \xrightarrow{\cong} gr_m(A) \tag{1}$$

mit

$$\text{edim } A \quad = \dim_\kappa m/m^2 \qquad \text{(nach Definition von edim)}$$

---

[33] Seinen A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul und $x_1,\ldots,x_r$ eine endliche Folge von Elementen aus A. Diese Folge heißt M-<u>regulär</u>, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind.

1. $M/(x_1,\ldots,x_r)M \neq 0$.
2. Die Multiplikation mit x_i definiert eine Injektion $M/(x_1,\ldots,x_{i-1})M \longrightarrow M/(x_1,\ldots,x_{i-1})M$ für i = 1,...,r.

Eine reguläre Folge in A ist eine A-reguläre Folge.

$$
\begin{aligned}
&= e && \text{(wegen (1))}\\
&= \dim \kappa[x_1,...,x_e] && \text{(Dimension von Polynomringen)}\\
&= \dim gr_m(A) && \text{(wegen (1))}\\
&= \dim A && \text{(Dimension des Tangentialkegels)}
\end{aligned}
$$

(ii) ⇒ (i).

Betrachten wir die natürliche Surjektion

$$\kappa[x_1,...,x_e] \twoheadrightarrow gr_m(A) \tag{2}$$

wobei links der affine Koordinatenring des Tangentialraums steht, d.h.

$$e = \text{edim } A.$$

Aus der Surjektivität folgt

$$\text{edim } A = e = \dim \kappa[x_1,...,x_e] \ge \dim gr_m(A) = \dim A$$

Da links in (2) ein Integritätsbereich steht, ist die Dimension jedes echten Faktorraums echt kleiner als e. Aus der Annahme von (ii) folgt also die Injektivität (2), und damit die Bijektivität.

(i) ⇒ (iii).

trivial.

(iii) ⇒ (i).

Sei $gr_m(A) \cong A/m\,[x_1,...,x_r]$. Dann gilt

$$\dim A = \dim gr_m(A) = \dim_{A/m} A/m\,[x_1,...,x_r] = r$$

und

$$\text{edim } A = \dim_{A/m} m/m^2 = \dim_{A/m} x_1\bullet A/m + ... + x_r\bullet A/m = r$$

also dim A = edim A, d.h. A ist regulär.

(i) ⇒ (iv).

Nach Voraussetzung gibt es einen Isomorphismus

$$gr_m(A) \cong \kappa[x_1,...,x_e]$$

mit e = edim A = dim A. Also ist $H_{gr_m(A)} = \frac{1}{(1-T)^e}$.

(iv) ⇒ (i).

Nach Voraussetzung gilt

$$\text{edim } A = H_{gr_m(A)}(1) = d$$

und

$$
\begin{aligned}
\dim A &= \dim gr_m(A) && \text{(Dimension des Tangentialkegels)}\\
&= \deg H_{gr_m(A)} + 1 && \text{(Dimension projektiver Schemata)}\\
&= \deg H^1_{gr_m(A)} && \text{(Grad von Summentransformierten)}\\
&= d && \text{(Polstellenordnung der Hilbert-Reihe)}
\end{aligned}
$$

Zusammen folgt edim A = dim A, d.h. A ist regulär.

(i) ⇒ (v).

Nach Voraussetzung ist $gr_m(A)$ isomorph zu einem Polynomring, sagen wir

$$gr_m(A) = R := \kappa\,[x_1,...,x_r]$$

mit $\kappa = A/m$, und das irrelevante Ideal hat die Gestalt

$$J = (x_1,...,x_r)R.$$

Außerdem gilt $R/(x_1,...,x_{i-1})R = \kappa\,[x_i,...,x_r]$. Insbesondere ist die Multiplikation mit x_i eine injektive Abbildung in diesem Polynomring. Zusammen sehen wir, $x_1,...,x_r$ ist eine reguläre Folge, die das irrelevante Ideal J erzeugt.

(v) ⇒ (vi).

Seien $a_1,...,a_r \in m$ Elemente, mit der Eigenschaft, daß die

$$x_i := a_i + m^2 \in gr_m(A)$$

das irrelevante Ideal erzeugen und eine reguläre Folge bilden. Dann gilt

$$m \subseteq (\,a_1,...,a_r\,) + m^2 \subseteq m.$$

nach dem Lemma von Nakayama folgt $m = (\,a_1,...,a_r)$. Nach Voraussetzung ist die Multiplikation mit x_1 in $gr_m(A)$ injektiv. Für $a \in m^n$ mit $aa_1 \in m^{n+2}$ gilt dann

$$(a + m^{n+1})\bullet x_1 = (aa_1 + m^{n+2}) = 0,$$

also $a + m^{n+1} = 0$, also $a \in m^{n+1}$. Wir haben gezeigt,

$$m^{n+2}:a_1 \cap m^n \subseteq m^{n+1}.$$

Insbesondere erhalten wir für n = 0 die Inklusion

$$m^2:a_1 \subseteq m^1,$$

und damit für n = 1

$$m^3:a_1 \subseteq m^3:a_1 \cap m^1 \subseteq m^2.$$

Induktiv ergibt sich,

$$m^{n+2}:a_1 \subseteq m^{n+1}$$

und wegen $a_1 \in m$ sogar

$$m^{n+2}:a_1 = m^{n+1}. \tag{3}$$

Dann liegt aber $0:a_1$ in jeder Potenz von m. Nach dem Durchschnittsatz von Krull folgt $0:a_1 = 0$, d.h. die Multiplikation mit a_1 ist eine injektive Abbildung $A \longrightarrow A$. Insbesondere ist damit die Behauptung im Fall r = 1 bewiesen.

Sei jetzt r > 1. Es gilt

$$\begin{aligned} gr_m(A/a_1A) &= \oplus\, m^n + a_1A/m^{n+1} + a_1A \\ &= \oplus\, m^n/m^{n+1} + a_1A \cap m^n \end{aligned}$$

$$= \oplus\, m^n/m^{n+1} + a_1 \cdot m^n : a_1$$
$$= \oplus\, m^n/m^{n+1} + a_1 \cdot m^{n-1} \qquad \text{(wegen (3))}$$
$$= gr_m(A)/x_1 gr_m(A)$$

Wir setzen

$\bar{A} := A/a_1A$

$\bar{a}_i := a_i \bmod a_1A$ für $i = 2,...,r$

$\bar{m} := m\bar{A}$

$\bar{x}_i := \bar{a}_i + \bar{m}^2 = a_i + m^2 + a_1A/a_1A = x_i \bmod x_1 gr_m(A)$

Dann bilden die $\bar{x}_i$ mit $i = 2,...,r$ eine reguläre Sequenz in

$$gr_{\bar{m}}(\bar{A}) = gr_m(A)/x_1 gr_m(A)$$

Nach Induktionsvorausetzung bezüglich r bilden die $\bar{a}_i$ mit $i = 2,...,r$ eine reguläre Sequenz in $\bar{A} := A/a_1A$. Zusammen sehen wir, die a_i mit $i = 1,...,r$ bilden eine reguläre Sequenz in A.

<u>(vi) ⇒ (i)</u>.

Sei $m = (a_1,...,a_r)A$ mit einer regulären Sequenz $a_1,...,a_r$. Wir zeigen durch Induktion nach r, daß A ein regulärer Ring der Dimension r ist.

<u>Der Fall r = 0</u>. Das maximale Ideal m ist das Null-Ideal und A ein Körper. Insbesondere ist

$$\dim A = 0 = \operatorname{edim} A$$

(und die Anzahl der Erzeuger von m ist gleich der Dimension von A).
<u>Der Fall r > 0</u>. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\bar{A} := A/a_1A.$$

ein regulärer Ring der Dimension r-1,

$$\bar{A} \text{ regulär, } \dim \bar{A} = r-1,\ \operatorname{edim} \bar{A} = r-1.$$

Weil die Multiplikation mit a_1 in A eine injektive Abbildung ist, liegt a_1 in keinem assoziierten Primideal des A-Moduls A. Insbesondere liegt a_1 damit in keinem minimalen Primoberideal von

$$\operatorname{Ann}(A) = 0,$$

d.h. in keinem minimalen Primideal von A. Es folgt $\dim \bar{A} < \dim A$, also

$$\dim A = \dim \bar{A} + 1 = (r-1) + 1 = r.$$

Weil m von r Elementen erzeugt wird, folgt

$$\dim A = r \ge \operatorname{edim} A.$$

Da die umgekehrt Ungleichung immer besteht, folgt dim A = edim A, d.h. A ist regulär (von der Dimension r).

<u>(i) ⇒ (vii)</u>.

siehe die Definition des Koszul-Komplexes im Anhang.

(vii) ⇒ (viii).

Wir tensorieren den Koszul-Komplex K(a, A) mit A/m über A. Das der Koszul-Komplex in allen Graden > dim A gleich Null ist, gilt dasselbe für dessen Homologie, d.h. es ist

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/m, A/m) = 0.$$

(viii) ⇒ (ix).

Sei zunächst M ein Modul endlicher Länge. Wir führen den Beweis durch Induktion nach

$$\ell := \mathrm{length}_A(M).$$

Im Fall $\ell = 1$ ist M isomorph zu A/m und die Aussage gilt nach Voraussetzung. Sei jetzt $\ell > 1$. Wir fixieren einen Teilmodul M' ⊆ M der Länge 1 und betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0.$$

Wir wenden den Funktor $\otimes_A M$ und erhalten eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/m, M') \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^A(A/m, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^A(A/m, M/M').$$

Der Tor-Modul rechts ist Null nach Induktionsvoraussetzung, weil M/M' eine kleinere Länge hat als M. Der Tor-Moduln links ist Null weil M' die Länge 1 hat. Damit ist auch der Modul in der Mitte Null, d.h. die Behauptung gilt für Moduln endlicher Länge.
Sei jetzt M ein endlicher erzeugter A-Modul. Insbesondere gilt dann

$$\dim M \le \dim A = \mathrm{ht}(m) < \infty.$$

Wir führen den Beweis durch Induktion nach d = dim M. Im Fall d = 0 ist die Länge von M endlich, d.h. die Behauptung gilt in diesem Fall. Sei jetzt d > 0. Wir betrachten ein Kette von Teilmoduln

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$$

mit $M_j/M_{j-1} = A/p_j$ und $p_j \in \mathrm{Spec}\, A$ für j = 1,..., n. Es reicht zu zeigen,

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/m, M_j/M_{j-1}) = 0 \text{ für alle j und alle } i > \dim A.$$

Es gilt Ann(M) ⊆ p_j für jedes i, also

$$\dim A/p_j \le \dim A/\mathrm{Ann}(M) = \dim M.$$

Damit ist der Beweis auf den Fall M = A/p mit dim A/p = d, p ∈ Spec A reduziert. Wir fixieren eine Element a ∈ m - p und betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A/p \xrightarrow{a} A/p \longrightarrow A/(p + aA) \longrightarrow 0$$

und die zugehörige lange Kohomologie-Sequenz

$$T := \mathrm{Tor}_i^A(A/m, A/p) \xrightarrow{a} \mathrm{Tor}_i^A(A/m, A/p) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^A(A/(p + aA)).$$

Weil a nicht in p liegt gilt dim A/(p+aA) < dim A/p = d, d.h. der rechte Tor-Modul ist Null nach Induktionsvoraussetzung. Die Abbildung links ist somit surjektiv, d.h. es gilt

$$T = aT \subseteq mT \subseteq T$$

Weil A/p ein endlich erzeugter A-Modul ist, gilt dassebe für T. Nach dem Lemma von Nakayama folgt T = 0. Damit ist die Behauptung für endlich erzeugte A-Moduln bewiesen. Sei jetzt M ein beliebiger A-Modul. Wir betrachten das induktive System $\{M_\alpha\}$ der endlich erzeugten Teilmoduln von M. Dann gilt

$$M = \varinjlim_{\alpha} M_\alpha$$

also

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/m, M) = \mathrm{Tor}_i^A(A/m, \varinjlim_{\alpha} M_\alpha) = \varinjlim_{\alpha} \mathrm{Tor}_i^A(A/m, M_\alpha) = \varinjlim_{\alpha} 0 = 0$$

für $i > \dim A$.

(ix) ⇒ (x).

Sei

$$\ldots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine minimale freie Auflösung von M über A, d.h. für n = 0, 1, ... (und $M = F_{-1}$) entsteht F_n aus $\mathrm{Ker}(d_{n-1})$, indem man ein Erzeugendensystem $\{f_i\}$ von $\mathrm{Ker}(d_{n-1})$ derart wählt, daß die Restklassen der f_i in $\mathrm{Ker}(f_{n-1})/m\mathrm{Ker}(f_{n-1})$ eine Vektorraumbasis über A/m bilden. Als F_n wählt man dann den von den f_i frei erzeugten A-Modul und als Abbildung $d_n: F_n \longrightarrow F_{n-1}$ die A-lineare Abbildung, die den i-ten freien Erzeuger von F_n auf f_i abbildet. Nach Wahl der f_i liegen für jede lineare Relation der f_i, sagen wir

$$\sum_i a_i f_i = 0,\ a_i \in A,$$

deren Koeffizienten a_i in m, d.h. es gilt

$$\mathrm{Ker}\, d_n \subseteq m\bullet F_n\,,$$

d.h.

$$d_n \otimes_A A/m = 0.$$

Insbesondere ist

$$\mathrm{Tor}_n^A(A/m, M) = F_n/m\bullet F_n.$$

Nach Voraussetzung (ix) ist dann aber $F_n/m\bullet F_n = 0$ für $n > \dim A$, also

$$F_n = 0 \text{ für } n > \dim A.$$

(x) ⇒ (viii).

trivial: man wähle eine minimale freie Auflösung von A/m über A. Diese hat eine Länge $\le \dim A$. Tensorieren mit A/m über A liefert $\mathrm{Tor}_i^A(A/m, A/m) = 0$ für alle $i > \dim A$.

Wir haben gezeigt,

$$(viii) \Leftrightarrow (ix) \Leftrightarrow (x)$$

und

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi) \Leftrightarrow (vii) \Rightarrow (viii).$$

Die noch fehlende Implikation (viii) ⇒ (vii) liegt etwas jenseits der Möglichkeiten dieser Vorlesung (vgl. Matsumura, Commutative algebra, (18.G), Theorem 45). Es fehlt noch der Vergleich von injektiver, projektiver und globaler Dimension und die Auslander-Buchbaum-Formel proj.dim M + depth M = dim A.

QED.

Bemerkung
Eine wichtige Konsequenz der homologischen Charakterisierungen der regulären Ringe ist die Tatsache, daß die Lokalisierung eines regulären lokalen Rings regulär ist.

3 Eigenschaften regulärer lokaler Ringe
Sei (A, m) ein regulärer noetherscher lokaler Ring. Dann gelten folgende Aussagen.
(i) A ist ein Integritätsbereich.
(ii) A ist ein diskreter Bewertungsring im Fall dim A = 1.

Beweis. Zu (i). Angenommen es gibt zwei von Null verschiedene Elemente $a,b \in A$ mit

$$ab = 0.$$

Weil a und b von Null verschieden sind, gibt es natürliche Zahlen r und s mit

$$a \in m^r - m^{r+1} \text{ und } b \in m^s - m^{s+1}$$

(nach dem Krullschen Durchschnittssatz). Wir betrachten die Anfangsformen

$$in(a) = a + m^{r+1}$$
$$in(b) = b + m^{s+1}$$

von a und b in $gr_m(A)$. Es gilt

$$in(a) \bullet inb(b) = 0.$$

Weil A regulär ist, ist $gr_m(A)$ ein Polynomring über einem Körper, also nullteilerfrei.

Also gilt in(a) = 0 oder in(b) = 0, d.h. $a \in m^{r+1}$ oder $b \in m^{s+1}$. Das steht aber im Widerspruch zur Wahl von r bzw. s.
Zu (ii). Nach Voraussetzung ist das maximale Ideal von A ein Hauptideal, sagen wir

$$m = \pi A.$$

Sei $a \in A$ ein beliebiges von Null verschiedenes Element von A. Nach dem Krullschen Durchschnittsatz gibt es eine natürliche Zahl r mit

$$a \in m^r - m^{r+1}.$$

Es gilt also $a = u \bullet \pi^r$ mit einer Einheit u von A. Wir setzen

$$v(a) := r.$$

Dann gilt für $a,b \in A-\{0\}$

$$v(ab) = v(a) + v(b) \tag{1}$$

und

$$v(a+b) \geq \min \{v(a), v(b)\}. \tag{2}$$

Für jedes von Null verschiedene Element

$$x = \frac{a}{b}, \ a, b \in A-\{0\}$$

des Quotientenkörpers

$$K := Q(A)$$

setzen wir

$$v(x) = v(a) - v(b).$$

Wegen (1) hängt diese Definition nicht von der speziellen Darstellung von x als Quotient zweier Elemente von A ab. Auf diese Weise ist daher eine Abbildung

$$v: K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$

definiert, für welche die Bedingungen (1) und (2) gelten. Wegen $v(\pi) = 1$ ist diese Abbildung surjektiv. Nach Konstruktion gilt

$$v(u \bullet \pi^r) = r \text{ für } u \in A^* \text{ und } r \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere gilt

$$A := \{x \in K \mid x = 0 \text{ oder } v(x) \geq 0\}.$$

Mit anderen Worten, A ist der Bewertungsring zur diskreten Bewertung v des Körpers K.
QED.

Literatur

B A.: Introduction to the theory of categories and functors, Wiley-Interscience 1968

Bass, H.: Algebraic K-theory, Benjamin, New York 1968

Bourbaki, N.: Algèbre commutative, Hermann Paris 1961-1965

Demazure, M., Gabriel, P.: Introduction ot algebraic geometry and algebraic groups, North Holland 1980

De Rham, G.: Varieties differentiables, Paris 1954.

Fulton, W.: Intersection theory, Springer, Berlin 1984

Godement, R.: Topologie Algebrique et theorie des faisceaux, Hermann, Paris 1960

Hermann, M., Vogel, W., Schmidt, R.: Theorie der normalen Flachheit, Teubner-Text zur Mathematik, Teubner, Leipzig 1977.

Hirsch, M.W.: Differential topology, Springer, New York 1994

Hartshorne, R: Algebraic geometry, Springer 1977

MacLane, S.: Categories. For the working mathematician, Springer 1972

Matsumura, H.: Commutative Algebra, Benjamin, New York 1970

Matsumura, H.: Commutative ring theory, Cambridge University Press 1986

Milnor, D.: Morse theory, Princeton University Press 1963

Mitchell, B.: Theory of categories, Academic Press 1965

Serre, J.-P.: Algèbre locale - Multiplicités, Lecture Notes in Math. 11 (1965), Springer Verlag.

Weil, A.: Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc., Coll. Publ. 29, Providence 1962.

Index

—H—

—I—

—J—

—K—

—L—

—M—

—N—

—P—

—Q—

—R—

—S—

—T—

Inhalt