Algebraische Geometrie und Zahlentheorie
Eine Einführung in die Weilsche Vermutung zu den Nullstellen der Zeta-Funktion

Ort und Zeit der Vorlesung:
Mo 13.15-14.45 Hs 15
Mi 09.15-10.45 Hs 15

Bezeichnungen

$\mathcal{A}$-Mod Kategorie der Moduln über der Garbe $\mathcal{A}$ von kommutativen Ringen mit 1, vgl. 2.9.1

$Sh_X(\mathcal{C})$ Kategorie der Garben auf dem topologischen Raum X mit Werten in der Kategorie $\mathcal{C}$, vgl. 2.3

1. Vorbemerkungen

Gegenstand dieser Vorlesung ist die Anwendung der algebraischen Geometrie auf Probleme der Zahlentheorie.

Genauer: wir wollen ein Prolblem der Zahlentheorie beschreiben, welches in der Mathematik des vergangenen Jahrhunderts eine zentrale Rollen gespielt hat, und angeben, wie es mit Hilfe von Begriffen und Konstruktionen der modernen algebraischen Geometrie gelöst wurde.

Mehr noch, wir wollen dieses Problem als Motivation für die Einführung dieser Begriffe verwenden.

1.1 Diophantische Gleichungen

Das Problem, welches wir zu diesem Zweck ausgewählt haben, sind die sogenannten Weilschen Vermutungen. Es geht dabei um ein Problem der Theorie diophantischen Gleichungssysteme, d.h. um Eigenschaften von polynomialen Gleichungssystemen

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, \dots , x_n) = 0 \\ &\dots \\ &f_m(x_1, \dots , x_n) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten

$$f_1, \dots, f_m \in \mathbb{Z}[x_1, \dots , x_n]$$

und deren Lösungen in ganzen oder rationalen Zahlen.

Die Theorie der diophantischen Gleichungen ist insofern eine schwierige Diszilplin, als daß selbst einfachste allgemeine Fragen nicht beantwortet werden können.

Zum Beispiel forderte Hilbert 1900 in seinem Milleniumsvortrag die mathematische Gemeinde auf, ein Verfahren zu entwickeln, mit welchen man in endlich vielen Schritten entscheiden kan eine diophantische Gleichung eine Lösung besitzt. Es gab dazu viele vergebliche Versuche einen Algorithmus zu finden. In den sechziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts konnte schließlich gezeigt werden, daß dieses <u>zehnte Hilbertsche Problem</u> keine Lösung besitzt: für jeden endlichen Automaten (Tjurin-Maschine) gibt es eine diophantische Gleichung, für welche der Automat nicht entscheiden kann, ob diese Gleichung lösbar ist.

Es gibt inzwischen Theorien und Sätze, die darauf hinweisen, daß sich möglicherweise jedes mathematische Problem in die Gestalt eines diophantischen Gleichungssystems bringen läßt.[1]

Bei der Formulierung von Vermutungen im Kontext der Theorie der diophantischen Gleichungen ist deshalb eine gewissen Vorsicht und auch eine gewisse Bescheidenheit angebracht.

Bei den Weilschen Vermutungen geht es um die Tatsache, daß jede ganzzahlige Lösung des System (1) auch eine Lösung dieses System modulo einer ganzen Zahl liefert. Insbesondere erhält man für jede ganzzahlige Lösung von (1) eine Lösung mit Koordinaten in jedem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$.

Für Lösungen von (1) im $\mathbb{F}_q$-Vektorraum $\mathbb{F}_q^n$ ist die Situation völlig anders: da dieser Vektorraum nur endlich viele Punkte besitzt, kann man einfach durch Probieren in endlich vielen Schritten sämtliche Lösungen finden. Insbesondere weiß man dann, ob es überhaupt eine Lösung gibt und wieviele es sind.

Bei den Weilschen Vermutungen geht es um die Anzahl der Lösungen von (1) über den Körpern

$$\mathbb{F}_{q^r}$$

für die verschiedenen Werte von r,

$$r = 1, 2, 3, \ldots$$

Eine Konsequenz dieser Vermutungen ist es, daß man die Lösungszahl für sämtliche r kennt, wenn man sie nur für endlich aber hinreichend viele r findet.

1.2 Zur Geschichte der Weilschen Vermutungen

Eine eine erste Formulierung der Weilschen Vermutungen im Fall algebraischer Kurven d.h. im Fall, daß die Lösungsmenge des Systems (1) im $\mathbb{C}^n$ (komplex) eindimensional ist, wurde 1924 von Emil Artin gegeben.

Die Vermutungen für algebraische Kurven über endlichen Körpern wurden 1949 von Weil bewiesen. Dieser Beweis basiert bereits auf der entscheidenden Idee, welche letztlich zum Beweis der Vermutungen im allgemeinen Fall führten.

Die Idee besteht darin, eine Theorie zu entwickeln, die es gestattet, Analoga bekannter Sätze der algebraischen Topologie für die Objekte der algebraischen Geometrie zu formulieren und zu beweisen.

Von besonderen Interesse ist dabei der Fixpunkt-Satz von Lefschetz, der die Anzahl der Fixpunkte einer stetigen Abbildung

$$f: X \longrightarrow X$$

mit Hilfe der linearen Abbildungen $H_i(f): H_i(X, \mathbb{R}) \longrightarrow H_i(X, \mathbb{R})$ berechnet, die f auf den singulären Homologie-Gruppen von X induziert.

---

[1] Mit anderen Worten, Hilbert hatte ein völlig falsche Vorstellung von der Natur der diophantischen Gleichungen.

Eine frühe Formulierung des Fixpunktsatzes ist die folgende (vgl. Spanier: Algebraic topology). Ist X ein kompaktes Polyeder der Dimension n und ist

$$\lambda(f) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n} \operatorname{Tr} H_i(f)$$

von Null verschieden, so besitzt f einen Fixpunkt. Eine genauere Untersuchung gestatet es, $\lambda(f)$ als Anzahl der Fixpunkte von f zu interpretieren (wobei manche Fixpunkte mit Vielfachheiten zu zählen sind).

Im Beweis von Weil wurden Kohomologie-Gruppen für algebraische Kurven definiert und für diese Kohomologie-Gruppen der Fixpunktsatz von Lefschetz bewiesen. Die Vermutungen von Artin ergaben sich daraus als eine Folgerung.

Weil formulierte daraufhin seine Vermutungen für beliebige Dimensionen und schlug vor, zu deren Beweis eine Kohomologie-Theorie für algebraische Varietäten beliebiger Dimension zu entwickeln.

Die Entwicklung einer solchen Theorie hat Jahrzehnte des vergangenen Jahrhunderts in Anspruch genommen und geschah unter Beteiligung sehr vieler Mathematiker. Die klassische algebraische Geometrie wurde in eine neue Sprache übersetzt und dadurch sehr weitgehend verallgemeinert.

Die Weil-Vermutungen wurden 1980 durch Pierre Deligne bewiesen. Eine Konsequenz der Weil-Vermutungen war der Beweis von Uralt-Vermutungen von Gauß über Exponential-Summen.

Ohne die neu geschaffene Sprache der algebraischen Geometrie, wäre der Beweis anderer wichtiger Vermutungen in der Vergangenheit undenkbar gewesen. Das gilt insbesonder für

- den Satz von Hironaka über die Auflösbarkeit von Singularitäten in der Charakteristik 0.
- die Mordell-Vermutung über die Menge der rationalen Punkte einer algebraischen Gruppe,
- die Existenz der Moduli-Varietäten algebraischer Kurven und schließlich
- den großen Fermatschen Satz.

Außerdem hat die Entwicklung dieser Theorie viele andere Dispziplinen beeinflußt, die ebenfalls versuchten die Sätze der algebraischen Topologie in eine für die Disziplin passende Sprache zu übersetzen. Dies gilt insbesondere für die Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten, die globale Theorie der elliptischen Differentialgleichungen (Index-Satz von Atiyah-Singer) aber auch für die mathematische Logik. Es entstand schließlich die Topos-Theorie, die es gestattet Homologie- und Kohomologie-Theorien in beliebigen mathematischen Disziplinen zu konstruieren.

In dieser Vorlesung wollen wir versuchen, die Entwicklung der algebraischen Geometrie im vergangenen Jahrhundert zu beschreiben, wie sie durch den Versuch die Weil-Vermutungen zu beweisen, motiviert wurde.

1.3 Eine erste Formuliertung der Weil-Vermutungen

1.3.1 Affine algebraische Schemata

Definition

Zur Formulierung der Weil-Vermutungen müssen wir zunächst den Begriff der diophantischen Gleichung verallgemeinern.

Zunächst ersetzen wir $\mathbb{Z}$ durch einen beliebigen kommutativen Ring A mit 1 und betrachten ein polynomiales Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, \dots , x_n) = 0 \\ &\dots \\ &f_m(x_1, \dots , x_n) = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

mit Koeffizienten aus A,

$$f_1, \dots, f_m \in A[x_1, \dots , x_n]$$

Für jede kommutative A-Algebra B (d.h. für jeden Homomorphismus $h: A \longrightarrow B$ von kommutativen Ringen mit 1) betrachten wir die Menge

$$X(B) := \{ b := (b_1, \dots , b_n) \in B^n \mid f_1(b) = \dots = f_m(b) = 0\}$$

Dabei bezeichne $f_i(b)$ das Element von B, welches man erhält, indem man zunächst h auf die Koeffizienten von f_i anwendet und so ein Polynomb f_i^h mit Koeffizienten aus B gewinnt und dann in dieses Polynom die Koordinaten von b einsetzt,

$$f_i(b) := f_i^h(b).$$

Die Menge X(B) heißt Menge der B-<u>rationalen Lösungen</u> des Gleichungssystem (1). Es ist leicht zu sehen, daß so ein Funktor

$$X: A\text{-Alg} \longrightarrow \text{Ens},\ B \mapsto X(B),$$

von der Kategorie der kommutativen A-Algebren in die Kategorie der Mengen definiert ist. Einen Funktor, der zu einem Funkter dieser Gestalt isomorph ist, heißt <u>affine algebraische Menge</u> oder auch <u>affines Schema</u>. Speziell den Funktor X nennt man auch das durch das Gleichungssystem (1) definierte Schema und bezeichnet ihn mit

$$\text{Sp}(A).$$

Diese Bezeichnung soll an Spec(A) erinnern - das später zu definierende Spektrum des Rings A. Wir werden sehen, daß man Sp(A) und Spec (A) auseinander berechnen kann, sodaß es egal ist, ob man X = Sp(A) oder Spec(A) betrachtet. Die Elemente von X(B) heißen dann B-<u>rationale Punkte</u> von X.

Um die Abhängigkeit von X von den Gleichungen f_i auszudrücken, schreibt man auch

$$X = V(f_1, \dots, f_m).$$

Mit den gerade eingeführten Bezeichnungen bedeutet die Lösung des diophantischen Gleichungssystem (1) über $A = \mathbb{Z}$ gerade die Bestimmung der Menge $X(\mathbb{Z})$ der $\mathbb{Z}$-rationalen Punkte von X bzw. der Menge $X(\mathbb{Q})$ der rationalen Punkte bzw. $\mathbb{Q}$-rationalen Punkte von X.

Darstellbarkeit der affinen Schemata

Ist die Menge der Gleichungen (1) leer, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} X(B) = B^n & = & \text{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[x_1, \dots , x_n], B). \\ (h(x_1), \dots , h(x_n)) & \leftarrow\!\shortmid & h \end{array}$$

Man beachte, eine A-Algbra-Homomorphismus $A[x_1, \ldots , x_n] \longrightarrow B$ ist bereits eindeutig festgelegt, wenn man die Bilder der Unbestimmten x_i kennt. Umgekehrt kann man die Bilder der x_i in B beliebig vorgeben und erhält so einen A-Algebra-Homomorphismus. Die Hom-Menge rechts kann man also mit der Menge der n-Tupel mit Koordinaten aus B identifizieren.

Die Menge der Punkte des B^n, die den Gleichungen (1) genügen, entspricht dabei gerade den Homomorphismen h mit

$$0 = f_i^h(h(x_1), \ldots , h(x_n)) = h(f_i(x_1, \ldots , x_n)),$$

d.h. X(B) kann man gerade mit der Menge der Homomorphismen identifizieren, die alle f_i in die Null abbilden.

$$X(B) = \{h \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[x_1, \ldots , x_n], B) \mid h(f_i) = 0 \text{ für alle } i \}$$

Mit den f_i wird aber auch jede Linarekombination der f_i mit Koeffizienten aus dem Polynomring $A[x_1, \ldots , x_n]$ in die Null abgebildet, d.h. das gesamte von den f_i erzeugte Ideal

$$(f_1, \ldots , f_m) := \{p_1 f_1 + \ldots + p_m f_m \mid p_1, \ldots, p_m \in A[x_1, \ldots , x_n]\}$$

wird in die Null geschickt. Nach dem Homomorphiesatz sind die Homomorphismen mit dieser Eigenschaft gerade diejenigen, die sich über den natürlichen Homomorphismus

$$A[x_1, \ldots , x_n] \longrightarrow A[x_1, \ldots , x_n]/(f_1, \ldots , f_m)$$

faktorisieren. Wir können deshalb X(B) mit der Menge der auf dem Faktorring definierten Homomorphismen identifizieren,

$$X(B) = \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}} (A[x_1, \ldots , x_n]/(f_1, \ldots , f_m), B).$$

Im allgemeinen Fall ist das affine Schema X gerade der Hom-Funktor

$$X = \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}} (A[x_1, \ldots , x_n]/(f_1, \ldots , f_m), \ ?),$$

der durch den Faktorring

$$A[x_1, \ldots , x_n]/(f_1, \ldots , f_m) \tag{2}$$

dargestellt wird. Da das darstellende Objekt bis auf natürliche Isomorphie durch den Funktor eindeutig bestimmt ist, haben wir so eine Identifikation der affinen Schemata mit den Faktorringen der Gestalt (2). Diese heißen auch <u>Koordinatenringe</u> des Schemas.

Läßt man jetzt noch beliebig viele Unbestimmte im Gleichungssystem (1) zu (also auch unendlich viele) und auch beliebig viele Gleichungen, d.h. in (2) tritt anstelle der x_i eine beliebige Familie von Unbestimmten und anstelle der f_i ein beliebige Familie von Polynomen auf, so sieht man daß jede beliebige A-Algebra in der (2) entsprechenden Gestalt auftreten kann.
Die Kategorie der affinen Schemata über A wird so mit der Kategorie der A-Algebren identifiziert, und die Theorie der diophantischen Gleichungen wird zur Theorie der Algebren über einem kommutativen Ring mit 1, d.h. zur kommutativen Algebra.

Topologie
Die eben eingeführte Verallgemeinerung reicht immer noch nicht aus zur Formulierung der Weil-Vermutungen. Wir müssen noch eine weitere Art von algebraischen Schemata einführen: die projektiven Schemata.

Das hängt damit zusammen, daß man in der Mathemaktik tiefliegende Aussagen meist nur dann formulieren kann, wenn in irgendeiner Weise Endlichkeitsbedingungen oder Kompaktheitsbedingungen erfüllt sind, und damit, daß die Teilmengen

$$X(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ oder } X(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^n$$

(im Fall A = $\mathbb{Z}$) eher selten kompakt sind (nämlich nur, wenn sie endlich sind). Wir brauchen deshalb irgendeine Art Kompaktifizierung dieser Mengen, die deren algebraische Natur erhält.

Um von Kompaktheit zu reden, benötigt man eine Topologie. Für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ist das kein Problem. Wir wollen anstelle von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ aber beliebige kommutative Ringe mit 1 zulassen und brauchen deshalb einen Ersatz für die gewöhnliche Topologie der reellen oder komplexen Vektorräume. Eine erste Wahl für eine solche Topologie ist die sogenannte Zariski-Topololgie. Man erhält sie, indem man für jede A-Algebra B die abgeschlossenen Mengen von

$$X(B)$$

angibt. Jedenfalls ist klar, daß sich die Menge X(B) verkleinert, wenn man zu den Gleichungen (1) weitere polynomiale Gleichungen hinzufügt (eventuell auch unendlich viele). Die so entstehenden Teilmengen von X(B) sind nach Definition gerade die abgeschlossenen Mengen der Zariski-Topologie von X(B). Es ist leicht zu sehen, daß auf diese Weise tatsächlich eine Topolgie auf X(B) definiert ist.

1.3.4 Der projektive Raum

Die Idee für die Kompaktifizierung besteht darin, den affinen Raum in einen Raum einzubetten, der kompakt ist, und dann die affinen Mengen in diesem Raum abzuschließen. Auf diese Weise erhält man Mengen, die kompakt sind, und für die man dann die Weil-Vermutungen formulieren und beweisen kann.

Über dem Körper der komplexen Zahlen kann man den $\mathbb{C}^n$ in den n-dimensionalen projektiven Raum einbetten,

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} := \{[x_0,...,x_n] \mid (x_0,...,x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - 0\}$$

Dabei sei

$$[x_0,...,x_n] := (x_0,...,x_n)\cdot\mathbb{C}$$

die Gerade durch den Ursprung und den Punkt $(x_0,...,x_n)$. Die x_i heißen projektive Koordinaten des Punktes $[x_0,...,x_n]$ von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Zwei (n+1)-Tupel beschreiben genau dann denselben Punkt, wenn sie proportional zueinander sind:

$$[x_0,...,x_n] = [y_0,...,y_n] \Leftrightarrow (x_0,...,x_n) = \lambda\cdot(y_0,...,y_n) \text{ für eine } \lambda\in\mathbb{C}-0.$$

Nach Definition gibt es eine Abbildung

$$\mathbb{C}^{n+1} - 0 \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \ (x_0,...,x_n) \mapsto [x_0,...,x_n],$$

deren Fasern gerade die Geraden durch den Ursprung sind, aus denen man den Ursprung entfernt hat. Man kann diese Abbildung zur Definitoin einer Topologie auf dem projektiven Raum verwenden: eine Teilmenge des $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ wird als offen definiert, wenn deren Urbild offen ist.

Der projektive Raum ist als stetiges Bild der (2n+2)-Sphäre kompakt:

$$S^{2n+2} := \{(x_0,...,x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |x_0|^2+...+|x_n|^2 = 1\}$$

ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, und die Abbildung

$$S^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}},\ (x_0,...,x_n) \mapsto [x_0,...,x_n],$$

ist stetig und surjektiv, denn jeder Vektor von $\mathbb{C}^{n+1}$-0 = $\mathbb{R}^{2n+2}$-0 ist proportional zu einem Vektor der Länge 1.

Den affinen Raum $\mathbb{C}^n$ kann man auf viele verschiedene Arten in den projektiven Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ einbetten. Eine Einbettung ist die folgende.

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}\ ,\ (x_1,...,x_n) \mapsto [1, x_1,...,x_n].$$

Man sieht sofort, diese Abbildung ist injektiv (und stetig), denn zwei proportionale Tupel mit der 0-ten Koordinate 1 sind gleich. Das Bild dieser Abbildung besteht gerade aus allen Punkten, deren 0-te Koordinate ungleich Null ist,

$$U_0 := \{[x_0,...,x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid x_0 \neq 0\}.$$

Der $\mathbb{C}^n$ wird so mit einer offenen Teilmenge des projektiven Raums identifiziert. Die Umkehrung der Einbettung hat die Gestalt

$$U_0 \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}\ , [x_0,...,x_n] \mapsto (\frac{x_1}{x_0}, ... , \frac{x_n}{x_0}).$$

Wir haben uns jetzt mit der Frage zu befassen, welche Mengen man erhält, wenn man durch Polynome definierte Teilmengen des $\mathbb{C}^n$ im projektiven Raum abschließt. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall von affinen Schemata, die durch ein Polynom definiert sind. Der Fall einer beliebigen Menge von Polynomen wird analog behandelt. Sei also

$$X = V(f) \text{ mit } f \in \mathbb{C}[x_1,...,x_n],$$

d.h.

$$X(\mathbb{C}) = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{C}^n \mid f(x_1,...,x_n) = 0\}$$

Als Teilmenge des projektiven Raums hat $X(\mathbb{C})$ die Gestalt

$$\begin{aligned} X(\mathbb{C}) &= \{[x_0,...,x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid x_0 \neq 0, f(\frac{x_1}{x_0}, ... , \frac{x_n}{x_0}) = 0 \} \\ &= \{[x_0,...,x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid x_0 \neq 0, x_0^d \bullet f(\frac{x_1}{x_0}, ... , \frac{x_n}{x_0}) = 0 \} \end{aligned}$$

Weil x_0 in allen Punkten von Null verschieden ist, können wir den Exponenten in der zweiten Darstellung beliebig wählen. Insbesondere können wir

$$d = \deg f$$

setzen. Dann ist die definierende Gleichung

$$x_0^d \bullet f(\frac{x_1}{x_0}, ... , \frac{x_n}{x_0}) = 0 \qquad (3)$$

ein Polynom des Grades d, in welchen alle auftretenden Potenzprodukte denselben Grad d besitzen, also ein <u>homogenes Polynom</u> vom Grad d. Dieses Polynom ist dabei kein Vielfaches von x_0 (dann hätte f einen Grad < d), d.h. die Hyperebene

$$x_0 = 0$$

ist in der Nullstellenmenge von (3) nicht enthalten und schneidet diese Nullstellenmenge in einer echten (und damit nirgends dichten) Teilmenge. Das bedeutet aber, die Abschließung von $X(\mathbb{C})$ im projektiven Raum ist gerade durch die Nullstellen von (3) gegeben.

$$\overline{X(\mathbb{C})} = \{[x_0,...,x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid x_0^d \cdot f(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) = 0 \}$$

Die <u>projektive Abschließung</u> von $X(\mathbb{C})$, d.h. die Abschließung von $X(\mathbb{C})$ im projektiven Raum erhält man, indem man die definierende Gleichung von $X(\mathbb{C})$ homogenisiert. Setzt man x_0 erhält man die alte definierende Gleichung $f = 0$ zurück (wie es der Fall sein sollte):

$$\overline{X(\mathbb{C})} \cap \mathbb{C}^n = X(\mathbb{C}).$$

Die analogen Aussagen sind auch richtig für Mengen $X(\mathbb{C})$, die durch beliebig viele Gleichungen definiert sind: die Abschließungen der Mengen $X(\mathbb{C})$ im projektiven Raum sind durch homogene Polynome definiert.

Die Umkehrung ist auch richtig: durch homogene Gleichungen definierte Mengen im projektiven Raum sind Abschließungen von polynomial definierten Mengen des affinen Raums (wobei man eine geeignete Einbettung von $\mathbb{C}^n$ in den projektiven Raum wählen muß).

Wir haben jetzt den projektiven Raum in derselben Weise als Funktor zu definieren, wie wir das im affinen Fall getan haben, d.h. für jeden kommutativen Ring A mit 1 und jeden Homomorphismus $h: A \longrightarrow B$ von Ring mit haber wir die Menge

$$\mathbb{P}^n_A(B)$$

zu definieren. Ist B = K ein Körper, so sollte

$$\mathbb{P}^n_A(K) = \text{Menge der 1-dimensionalen Unterräume von } K^{n+1}$$

sein. Das Problem bei der Verallgemeinerung auf den Fall von Ringen ist die Tatsache, daß der Begriff der Dimension eines Vektorraums auf den Fall von Moduln über Ringen verschiedene Verallgemeinerungen besitzt, nämlich den Begriff der <u>Länge eines Moduls</u>, den Begriff der <u>Dimension im Sinne der kommutativen Algebra</u> (der durch die maximale Länge von aufsteigenden Ketten irreduzibler Unterräume definiert ist) und den Begriff des <u>Rangs</u>.

Der Begriff der Länge kommt hier nicht in Frage, weil im Fall beliebiger Ringe die Länge von Moduln so gut wie immer unendlich ist.

Der Begriff der Dimension in Sinne der kommutativen Algebra fällt aus denselben Gründen: im Fall beliebiger Ringe sind die auftretenden Dimension unendlich.

Bleibt der Begriff des Rangs. Man könnte also definieren

$$\mathbb{P}^n_A(B) = \text{Menge der Teilmoduln des Rangs 1 von } B^{n+1}$$

Zur Erinnerung: der Rang eines Moduls über dem Ring B ist definiert als die Maximalzahl B-linear unabhängiger Elemente des Moduls.

Diese Definition ignoriert jedoch eine wichtige Eigenschaft des projektiven Raums. Erinnert wir uns an die Entstehung des projektiven Raums in der Renaissance:
a) Die wichtigste Invariante der euklidischen Geometrie ist der Abstand. Die Automorphismen, des euklidischen Raums sind diejenigen,die den Abstand zweier

Punkte invariant lassen, d.h. die Bewegungen. In der euklidischen Geometrie betrachtet man zwei Objekte als im wesentlichen gleich, wenn sie sich durch eine Bewegung ineiander überführen lassen.
b) In der affinen Geometrie ist der Abstand keine wohldefinierte Invariante mehr, weil in der Ähnlichkeitsgeometrie Objekte, die durch Streckungen und Stauchungen ineinander übergehen, als im wesentlichen gleich angesehen werden. Invariant bleiben aber alle Winkel.
c) In der projektiven Geometrie ist der Winkel (zum Beispiel zwischen zwei Geraden) kein wohldefinierte Invariante mehr. Bei projektiven Transformationen kann sich der Winkel ändern. Die zentrale Invarianten der projektiven Geometrie ist das Doppelverhältnis. Eine Konsequenz der Invarianz des Doppelverhältnisses ist es, daß auch die Eigenschaft zweier Vektoren, senkrecht aufeinander zu stehen, erhalten bleibt. Diese Eigenschaft ist im wesentlichen sogar äquivalent zur Invarianz des Doppelverhältnisses.

Die Erhaltung der Orthogonalität hat zur Folge, daß es im projektiven Raum zu jedem linearen Unterraum ein orthogonales Komplement gibt, und die Eigenschaft zweier linearer Unterräume orthogonale Komplemente voneinander zu sein, bei projektiven Transformationen erhalten bleibt. Die Eigenschaft, orthogonale Komplemente voneinander zur sein, entspricht im affinen gerade der Bedingung, daß der Gesamtraum direkte Summe der beiden betrachteten Unterräume ist.

Die obige Definition ist insofern problematisch, als daß beliebige Teilmoduln des Rangs 1 keine direkten Summanden sein müssen. Es liegt deshalb nahe, dies als Bedingung zu fordern. Wir erhalten so die folgende Defintion, die sich später auch als die ‘richtige’ erweisen wird:

$$\mathbb{P}^n_A(B) = \text{Menge der direkten Summanden des Rangs 1 von } B^{n+1}$$

Auf diese Weise ist ein Funktor

$$\mathbb{P}^n_A: A\text{-Alg} \longrightarrow \text{Ens},\ B \mapsto \mathbb{P}^n_A(B),$$

definiert, der auch projektiver n-Raum genannt wird. Für jeden Homomorphismus $h:B \longrightarrow B'$ von Ringen mit 1 ist die zugehörige Abbildung durch das Tensorprodukt definiert:

$$\mathbb{P}^n_A(B) \longrightarrow \mathbb{P}^n_A(B'),\ M \mapsto M\otimes_B B'.$$

Eine leichte Variation dieser Definition führt übrigens zu einer weiter Reihe von Funktoren, die ebenfalls eine große Bedeutung in der algebraische Geometrie besitzen. Für je zwei natürliche Zahlen n und r kann man setzen

$$G^{n,r}_A(B) := \text{Menge der direkten Summanden des Rangs r von } B^{n+r}.$$

Der so definierte Funktor

$$G^{n,r}_A: A\text{-Alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

heißt <u>Graßmann-Schema</u> oder auch <u>Graßmann-Varietät</u>. Wie im Fall der projektiven Räume wird die Funktorialität durch das Tensorprodukt realisiert.

Offensichtlich ist

$$\mathbb{P}^n_A = G^{n,1}_A.$$

$G^{n,r}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit (die sich in einen komplexen projektiven Raum einbetten läßt), deren Punkte gerade den r-dimensionalen komplex-linearen Unterräumen des $\mathbb{C}^{n+r}$ entsprechen.

1.3.5 Projektive algebraische Schemata

Wir haben noch den Funktor zu definieren, der den Teilmengen des projektiven Raums entspricht, die Nullstellen von Familien homogener Polynome sind. Dabei kann man im projektiven Raum eine Topologie so einführen, daß diese Teilmengen gerade den abgeschlossenen Teilmengen des projektiven Raums entsprechen.

Wir werden so vorgehen, daß wir zunächst den Begriff des offenen Teilfunktors eines projektiven Schemas definieren, wobei die Definition so gewählt wird, daß diese Teilfunktoren gerade den offenen Teilmengen des projektiven Raums entsprechen.

Die Komplemente dieser offenen Teilfunktoren (d.h. die abgeschlossenen Teilfunktoren) sind dann gerade die uns interessierenden Objekte, die wir projektive Schemata nennen werden.

Bei der Definition der offenen Teilfunktoren beachten wir zunächst, daß der gewöhnliche projektive Raum eine offene Überdeckung durch affine Mengen besitzt:

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = U_0 \cup \ldots \cup U_n$$

mit

$$U_i = \{[x_0,\ldots,x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid x_i \neq 0\}.$$

Jedes der U_i kann man mit $\mathbb{C}^n$ identifizieren. Jedes der U_i ist eine offene Teilmenge des projektiven Raums. Eine Teilmenge von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ ist deshalb genau dann offen, wenn ihr Durchschnitt mit allen U_i offen ist. Für jeden Morphismus algebraischer Varietäten über den komplexen Zahlen,

$$\varphi: X \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

und jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ ist trivialerweise $\varphi^{-1}(U)$ offen in X. Die gerade durchgeführten Betrachtungen zeigen, daß in gewissem Sinne auch die Umkehrung gilt:

$U \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ ist offen

$\Leftrightarrow$ $\varphi^{-1}(U)$ ist offen in X für jeden Morphismus $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ mit X affin.

Wir haben jetzt diese Tatsache in die Sprache der Funktoren zu übersetzen. Dazu benötigen wir den Begriff des affinen Spektrums.

Das Spektrum eines kommatativen Rings mit 1

Sei A ein kommativer Ring mit 1. Das Spekturm von A ist ein topologischer Raum, der mit

$$\text{Spec } A$$

bezeichnet wird, auf welchen der Begriff der <u>regulären Funktion</u> definiert ist (das Analogon der holomorphen Funktion auf einer komplexen Mannigfaltigkeit). Diese Funktionen bilden einen kommutativen Ring mit 1, der sich mit A identifizieren läßt.

Wir werden uns hier zunächst darauf beschränkten, das Spektrum als Menge und als topologischen Raum zu definieren.

Spec als Menge

Die Definition von Spec A als Menge ist einfach:

Spec A = Menge der Primideale von A.

Die Elemente von A als Funktionen auf Spec A.

Jedem Element von A läßt sich auch in recht einfacher Weise eine Abbildung zuordnen:

Für $p \in$ Spec A und $f \in A$ setzen wir
$f(p) :=$ f mod p
= Bild von f beim natürlichen Homomorphismus
$A \longrightarrow A/p \subseteq Q(A/p) =: \kappa(p)$.

Der Körper $\kappa(p)$ heißt Restekörper des Punktes p. Durch diese Definition wird dem Element f die ebenfalls mit f bezeichnete Funktion

$$f\colon \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \bigcup \kappa(p),\ p \mapsto f(p), \tag{1}$$

zugeordnet, die ihre Werte in der disjunkten Vereinigung der Restekörper annimmt.

Diese Definition mag exotisch aussehen. Immerhin lassen sich die so definierten Funktionen addieren und multiplizieren, indem man ihre Werte addiert bzw. multipliziert. Wir erhalten so einen kommutativen Ring mit 1, dessen Elemente solche Funktionen sind.

Kommen wir zur Topologie. Für jede Teilmenge $M \subseteq A$ definieren wir die Menge der gemeinsamen Nullstellen der als Funktionen aufgefaßten Elemente von M:

$$V(M) := \{p \in \mathrm{Spec}\, A \mid f(p) = 0 \text{ für jedes } f \in M\} = \{p \in \mathrm{Spec}\, A \mid M \subseteq p\}$$

Eigenschaften der Mengen V(M).

(i) Für jede Teilmenge $M \subseteq A$ des Rings A gilt
$$V(M) = V(M \bullet A)$$
wobei $M \bullet A$ das von M in A erzeugte Ideal bezeichne.

(ii) Für Ideale J', J'', J_i von A gilt
$$V(J') \cap V(J'') = V(J' \bullet J'') = V(J' \cap J'')$$
$$\bigcap_{i \in I} V(J_i) = V(\sum_{i \in I} J_i)$$
$$V(A) = \emptyset$$
$$V(\{0\}) = \mathrm{Spec}\, A.$$

Die Mengen der Gestalt V(M) sind also gerade die abgeschlossenen Mengen einer Topologie von Spec A, die wir Zariski-Topolgie von Spec A nennen wollen. Wir werden Spec A stets als topologischen Raum, der mit der Zariski-Topologie versehen ist, betrachten. Die zu den V(M) gehörigen offenen Mengen werden mit

$$D(M) \quad = \text{Spec } A - V(I) = \{p \in \text{Spec } A \mid M \not\subseteq p\}$$

bezeichnet. Falls M aus nur einem Element f besteht, nennt man D(f) <u>offene Hauptmenge</u>,

$$D(f) \quad = \{p \in \text{Spec } A \mid f \notin p\} = \{p \in \text{Spec } A \mid f(p) \neq 0\}.$$

Das Besondere an diesen Mengen ist, daß sie eine Topologie-Basis der Zariski-Topologie bilden:

<u>Jede offene Menge von Spec A ist Vereinigung offener Hauptmengen</u>.

<u>Beweis</u>. Es reicht zu zeigen, für jedes Ideal I von A gilt

$$D(I) = \bigcup_{f\in I} D(f).$$

Für jedes $p \in$ Spec A gilt:

$$\begin{aligned} p \in D(I) \quad &\Leftrightarrow I \not\subseteq p \\ &\Leftrightarrow \text{es gibt ein } f \in I \text{ mit } f \notin p \\ &\Leftrightarrow \text{es gibt ein } f \in I \text{ mit } p \in D(f). \end{aligned}$$

<u>QED</u>.

Mit Hilfe der offenen Hauptmengen sieht man leicht, daß Spec A quasi-kompakt ist:

<u>Jede offene Überdeckung von Spec A enthält eine endliche Teilfamilie, die Spec A überdeckt</u>.

<u>Beweis</u>. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Spec A. Wir haben zu zeigen, endlich viele der U_i überdecken Spec A. Wir schreiben jedes U_i als Vereinigung offener Hauptmengen und erhalten so eine Überdeckung von Spec A durch offene Hauptmengen. Es reicht zu zeigen, diese letztere Überdeckung besitzt eine endliche Teilfamilie, die bereits Spec A überdeckt.

Wir können also annehmen, die U_i sind offene Hauptmengen, sagen wir

$$U_i = D(f_i),\ f_i \in A.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Spec } A &= \bigcup_{i\in I} D(f_i) \\ &= \bigcup_{i\in I} \text{Spec } A - V(f_i A) \\ &= \text{Spec } A - \bigcap_{i\in I} V(f_i A) \\ &= \text{Spec } A - V(\sum_i f_i A) \end{aligned}$$

d.h. es ist

$$V(\sum_i f_i A) = \varnothing.$$

Mit anderen Worten, kein Primideal von A enthält das Ideal $\sum_i f_i A$. Es muß also

$$\sum_i f_i A = A$$

gelten. Insbesondere liegt 1 in diesem Ideal, sagen wir

$$1 = a_1 f_{i_1} + ... + a_r f_{i_r} .$$

Es folgt

$$\sum_{j=1}^{r} f_{i_j} A = A.$$

Wir führen die obige Rechnung rückwärts aus mit der endlichen Summe $\sum_{j=1}^{r}$ anstelle der Summe $\sum_i$ und erhalten

$$\text{Spec } A = \bigcup_{j=1}^{r} D(f_{i_j}).$$

Dies ist die gesuchte endliche Überdeckung.

<u>QED</u>.

Als nächstes wollen wir uns von der funktoriellen Natur der gerade durchgeführten Konstruktion überzeugen.

<u>Spec als Funktor</u>

Für jeden Homomorphismus h: A $\longrightarrow$ A' von Ringen mit 1 ist durch

$$h^{\#}: \text{Spec } A' \longrightarrow \text{Spec } A,\ p' \mapsto h^{-1}(p'),$$

eine stetige Abbildung definiert: für Ideale I von A gilt nämlich

$$p \in (h^{\#})^{-1}V(I) \Leftrightarrow h^{\#}(p) \in V(I) \Leftrightarrow I \subseteq h^{\#}(p) = h^{-1}(p') \Leftrightarrow h(I) \subseteq p'$$
$$\Leftrightarrow p' \in V(h(I)),$$

d.h.

$$(h^{\#})^{-1}V(I) = V(h(I)).$$

Mit anderen Worten, das Urbild einer abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen, d.h. $h^{\#}$ ist eine stetige Abbildung.

Die Abbildung, die jedem Ring dessen Spektrum zuordnet, wird auf diese Weise zum kontravarianten Funktor,

$$\text{Spec: (kommutative Ringe mit 1)}^0 \longrightarrow \text{Top},\ A \mapsto \text{Spec } A,\ h \mapsto h^{\#}.$$

<u>Ein Mangel der Konstruktion</u>

Die hier eingeführten Funktionen der Gestalt (1) sind zwar recht nützlich. Es sind aber nicht die Sorte von Funktionen, die es uns gestatten werden, A als Ring von Funktionen zu betrachten, die auf Spec(A) definiert sind.

Für die Abbildungen der Gestalt (1) besteht zum Beispiel die Implikation

$$f^2 = 0 \Rightarrow f = 0,$$

weil ihre Werte in einem Körper liegen. Der Ring

$$A = \mathbb{C}[x]/(x^2)$$

besitzt aber Elemente, die dieser Implikation nicht genügen. A kann also niemals als ein Ring von Funktionen der Gestalt (1) aufgefaßt werden. Um unser Ziel trotzdem zu erreichen, werden wir den Funktionen-Begriff verallgemeinern müssen, was uns zum Begriff der Garbe führen wird.

Spektren und klassische algebraische Geometrie

Seien k ein Körper,

$$A = k[x]/J \text{ mit } x = x_1,...,x_n \text{ und } J = (f_1,...,f_m).$$

Weiter sei $p = (p_1,...,p_n) \in k^n$ eine gemeinsame Nullstelle der f_i ,

$$f_1(p) = ... = f_m(p) = 0.$$

Dann liegen die f_i im Kern der Auswertungsabbildung

$$\varphi_p: k[x] \longrightarrow k,\ f(x) \mapsto f(p),$$

die Abbildung faktorisiert sich also über die natürliche Abbildung $k[x] \longrightarrow A$ und definiert so einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\overline{\varphi}_p : A \longrightarrow k.$$

Als k-Algebra-Homomorphismus ist $\overline{\varphi}_p$ surjektiv, induziert also einen Isomorphismus

$$A/\ker(\overline{\varphi}_p) \cong k.$$

Insbesondere ist

$$\ker(\overline{\varphi}_p) = (x_1\text{-}p_1, ... , x_n - p_n)/J$$

ein maximales Ideal, also insbesondere ein Primideal. Wir haben damit eine Abbildung

$$\{p \in k^n \mid f_1(p) = ... = f_m(p) = 0\} \longrightarrow \operatorname{Spec}\ k[x]/J$$

$$p = (p_1,...,p_n) \qquad \mapsto (x_1\text{-}p_1, ... , x_n - p_n) \bmod J$$

Diese Abbildung ist injektiv. Ist k algebraisch abgeschlossen, so besteht ihr Bild nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gerade aus den maximalen Idealen von A = k[x]/J.

Ersetzt man also in der obigen Konstruktion die Primideale durch die maximalen Ideale, d.h. betrachtet man anstelle von Spec A das <u>maximale Spektrum</u>,

Specm A := Menge der maximalen Ideale von A,

so erhält man gerade die Situation der klassischen algebraischen Geometrie.

Insbesondere entsprechen die oben definierten zu $f \in A = k[x]/J$ gehörigen Funktionen

$$\mathrm{Specm}\, A \longrightarrow \kappa(p),\ f \mapsto f(p)$$

gerade der gewöhnlichen Auswertung an der Stelle p:

Für $p = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)/J$ gilt nach Definition

$$f(p) = \text{Bild von } f \in A = k[x]/J \text{ bei der natürlichen Abb. } A \longrightarrow A/p \subseteq k(A/p).$$

Wird f durch das Polynom $\tilde{f} \in k[x]$ repräsentiert, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(p) &= f \bmod p \\ &=^{2} \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) \bmod (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n) \\ &= \tilde{f}(p_1, \dots, p_n) \bmod (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n) \\ &=^{3} \tilde{f}(p_1, \dots, p_n) \in k \end{aligned}$$

<u>Probleme</u>:

1) Wir wollen nicht annehmen, daß k algebraisch abgeschlosen ist.
2) Ersetzt man Spec durch Specm, so ist die Konstuktion nicht mehr funktoriell. Sei zum Beispiel

   $$h: k[x] \longrightarrow k(x)$$

   die natürliche Einbettung des Polynomrings in seinen Quotientenkörper. Das einzige maximale Ideal von k(x) ist das Nullideal 0. Sein vollständiges Urbild bei h ist das Nullideal des Polynomrings. Letzteres ist nicht maximal in k[x] (wenn die Anzahl der Unbestimmten $\neq 0$ ist). Also induziert h keine Abbildung der maximalen Spektren.

Ändern wir jetzt die Situation etwas ab und betrachten die Nullstellen der f_i mit Koordinaten in einer Körpererweiterung K von k:

$$p = (p_1, \dots, p_n) \in K^n \text{ mit}$$
$$f_1(p) = \dots = f_m(p) = 0.$$

Die Auswertung in p definiert dann k-Algebra-Homomorphismen

$$\varphi_p: k[x] \longrightarrow K,\ f(x) \mapsto f(p),$$
$$\overline{\varphi}_p : A \longrightarrow K,\ A := k[x]/J,\ J := (f_1, \dots, f_m).$$

Da $\overline{\varphi}_p$ nicht mehr surjektiv sein muß, erhalten wir nur noch eine injektive (und nicht mehr notwendig surjektive) Abbildung

$$A/\ker(\overline{\varphi}_p) \hookrightarrow K.$$

Insbesondere können wir nur noch sagen, daß $\ker(\overline{\varphi}_p)$ ein Primideal ist. Das Bild der Abbildung

$$\{p \in K^n \mid f_1(p) = \dots = f_m(p) = 0\} \longrightarrow \mathrm{Spec}\ k[x]/J$$

---

[2] Wir verwenden $A/p = (k[x]/J)/(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)/J = k[x]/x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$

[3] Wir verwenden $A/p = k[x]/x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n) = k$

$$p \mapsto \ker(\overline{\varphi}_p)$$

muß nicht mehr in der Menge der maximalen Ideal von A = k[x]/J liegen. Es ist sogar leicht zu sehen, daß es für jedes Primideal von Spec A eine Körpererweiterung K von k und eine Nullstelle p der f_i mit Koordinaten in K gibt, die in dieses Primideal abgebildet wird. Man kann also Spec A als die Menge der gemeinsamen Nullstellen der f_i in allen Körpererweiterungen von k auffassen.[4]

Sei nämlich $\wp \in$ Spec A. Dann ist $A/\wp$ eine nullteilerfreie k-Algebra, der Quotientenkörper

$$K := Q(A/\wp)$$

also eine Körpererweiterung von k. Sei $\alpha_i \in K$ das Bild von x_i bei der Zusammensetzung natürlicher Abbildungen

$$\varphi{:}k[x] \xrightarrow{\rho} k[x]/J = A \xrightarrow{\sigma} A/\wp \hookrightarrow Q(A/\wp) = K.$$

Dann gilt

$$\alpha = (\alpha_1,\ldots, \alpha_n) \in K^n$$

und

$$\begin{aligned} f_i(\alpha) &= f_i(\varphi(x)) && \text{(nach Definition von } \alpha) \\ &= \varphi(f_i(x)) && \text{(weil } \varphi \text{ ein k-Algebra-Homomorphismus ist)} \\ &= \sigma(\rho(f_i)) \\ &= \sigma(0) && \text{(wegen } f_i \in J) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, α ist eine gemeinsame Nullstelle der f_i mit Koordinaten aus K.

Behauptung: das zu α gehörige Primideal von A ist gerade $\wp$., d.h.

$$\ker(\overline{\varphi}_\alpha) = \wp.$$

Das Bild von x_i bei φ ist nach Defintion gerade α_i. Das Bild eines Polynoms $F \in k[x]$ ist deshalb gerade

$$\varphi(F)) = \varphi(F(x_1,\ldots,x_n)) = F(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)) = F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = F(\alpha).$$

Die Auswertung an der Stelle α,

$$\varphi_\alpha\colon k[x] \longrightarrow \kappa(\alpha) = K,\ F \mapsto F(\alpha) = \varphi(F),$$

ist damit gerade φ. Durch Faktorisierung über die natürliche Abbildung $\rho\colon A \longrightarrow A/J$ erhalten wir gerade

$$\overline{\varphi}_\alpha = \sigma,$$

d.h. es ist $\ker(\overline{\varphi}_\alpha) = \ker(\sigma) = \wp$.

<u>Beispiel</u>

$$A = k[x,y]/(y^2-x^3) = k[t^2,t^3],\ x \mapsto t^2,\ y \mapsto t^3.$$

Spec (A) enthält außer den gewöhnlichen Punkten der semikubischen Parabel noch den weitern Punkt

[4] Über k konjugierte Nullstellen gehören dabei allerdings zum selben Primideal.

$$(t^2, t^3) \in k(t), \text{ t ein Unsbestimmte.}$$

Das zugehörige Primideal ist gerade das Nullideal des Intergritätsbereichts A. Ein Punkt wie der Punkt (t^2, t^3), der zum Null-Ideal eines Integritätsbereichs gehört, heißt auch allgemeiner Punkt.

Einen weiteren allgemeinen Punkt der Kurve $y^2 = x^3$ erhält man, indem man die Unbestimmte t durch eine andere, sagen wir s, ersetzt. Die Punkte (t^2, t^3) und (s^2, s^3) sind konjugiert, wie dies für Punkte zum selben Primideal der Fall sein sollte: der k-Automorphismus der rationalen Funktionenkörper

$$k(s) \longrightarrow k(t), s \mapsto t,$$

überführt (s^2, s^3) in (t^2, t^3).

Teilfunktoren

Sei P: A-Alg $\longrightarrow$ Ens ein Funktor . Ein Teilfunktor von P, ist ein Funktor

$$F: \text{A-Alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

mit

$$F(B) \subseteq P(B)$$

für jede A-Algebra B, wobei diese Einbettungen einen funktoriellen Morphismus definieren, d.h. für jeden Homomorphismus h: B $\longrightarrow$ B' von A-Algebren ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(B) & \subseteq & P(B) \\ F(h)\downarrow & & \downarrow P(h) \\ F(B') & \subseteq & P(B') \end{array}$$

kommutativ.

Wir werden oft

$$F \subseteq P$$

schreiben, um auszudrücken, daß F ein Teilfunktor von P ist.

Bemerkungen

(i) Unser nächstes Ziel ist es jetzt, unter Verwendung der offenen Teilmengen D(I) $\subseteq$ Spec A den Begriff des offenen Teilfunktors zu definieren.

(ii) Wir werden diese Definition zunächst für affine Schemata angeben.

(iii) In einem weitern Schritt verallgemeinern wir diese Definition auf beliebige Funktoren

$$\text{A-Alg} \longrightarrow \text{Ens}.$$

(iv) Insbesondere können wir dann von den offenen Teilfunktoren von

$$\mathbb{P}^n_A: \text{A-Alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

sprechen. Die zugehörigen komplementären abgeschlossenen Teilfunktoren sind dann die von uns benötigten projektiven Schemata.

Offene Teilfunktoren affiner Schemata

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und $I \subseteq A$ ein Ideal von A.
Wir haben jetzt für jede A-Algebra B diejenigen Elemente von

$$Sp(A)(B) = \mathrm{Hom}_{A\text{-}Alg}(A, B)$$

zu bestimmen, die der durch I definierten offenen Menge D(I) entspricht.
Sei

$$h: A \longrightarrow B$$

ein Homorphismus von Ringen mit 1, d.h. ein Element von Sp(A)(B). Wir betrachten die durch h definierte stetige Abbildung

$$h^{\#}: \mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A,\ p \mapsto h^{-1}(p),$$

und werden h als zur offenen Menge D(I) gehörig betrachten, wenn das Bild von $h^{\#}$ ganz in D(I) liegt, d.h. wenn gilt

$$h \text{ gehört zur offenen Menge } D(I) \Leftrightarrow h^{\#}(\mathrm{Spec}\, B) \subseteq D(I).$$

Diese Bedingung ist äquivalent zur Bedingung

$$\mathrm{Spec}\, B = (h^{\#})^{-1}(D(I)) = D(h(I)) = D(h(I)B).$$

d.h. zu

$$V(h(I)B) = \emptyset.$$

Mit anderen Worten, kein Primideal von B enthält das Ideal h(I)B, d.h. es gilt

$$h(I)\bullet B = B.$$

<u>Definition</u>
Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Ein <u>offener Teilfunktor</u> von

$$Sp(A): A\text{-}Alg \longrightarrow Ens$$

ist ein Teilfunktor $F \subseteq Sp(A)$ mit der Eigenschaft, daß es ein Ideal $I \subseteq A$ gibt mit

$$F(B) = \{h \in Sp(A)(B) \mid h(I)B = B\}$$

für jede A-Algebra B. Bezeichnung:

$$Sp(A)_I := F.$$

<u>Beispiel</u>
Seien A ein kommutativer Ring mit 1, $s \in A$ ein Element und

$$h: A \longrightarrow A_s = \{\frac{a}{s^n} \mid a \in A,\ n = 0, 1,2, ...\}$$

der natürliche Homomorphismus in den Quotientenring bezüglich der Potenzen von s. Für jede A-Algebra B induziert h eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} Sp(A)_s(B) & \longrightarrow & Sp(A)(B) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathrm{Hom}_{A\text{-}Alg}(A_s,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A\text{-}Alg}(A,B) \\ \varphi & \mapsto & \varphi\circ h \end{array}$$

Diese Abbildungen setzen sich zusammen zu einem funktoriellen Morphismus

$$Sp(A)_s \longrightarrow Sp(A)$$

von Funktoren auf A-Alg mit Werten in Ens. Auf Grund der Universalitätseigenschaft der Quotientenringe sind die natürlichen Homomorphismen

$$Sp_s(A)(B) \longrightarrow Sp(A)(B)$$

injektiv (d.h. $Sp(A)_s$ sich als Teilfunktor von Sp(A) auffassen) und das Bild besteht gerade aus denjenigen Homomorphismen, welche $s \in A$ in eine Einheit von B abbilden, d.h.

$$Sp(A)_s (B) = \{f \in Sp(A)(B) \mid h(s)B = B \}$$

Mit anderen Worten, $Sp(A)_s$ ist der offene Teilfunktor von Sp(A) zum Ideal I = sA.

Spezialfall

$A = k[x]$

$s = x \in A$

Es gilt

$$A_s = k[x, \frac{1}{x}] = k[x,y](xy - 1).$$

Dann beschreibt Spec(A) die affine Gerade und Spec A_s die Hyperbel $xy - 1 = 0$ in der affinen Ebene.

Das Bild von Spec(A_s) in Spec(A) kann man sich als das Bild der Hyperbel $xy - 1 = 0$ bei der Projektion der Ebene auf die x-Achse vorstellen, d.h. Spec(A_s) läßt sich mit der punktierten affinen Geraden ohne den Ursprung identifizieren.

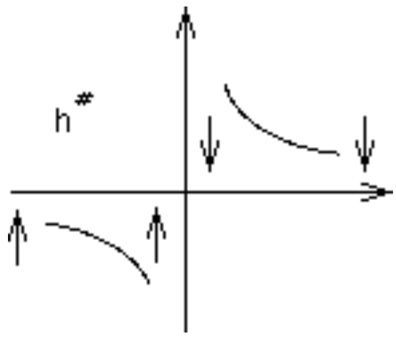
Die natürliche Einbettung

$$A = k[x] \overset{h}{\hookrightarrow} k[x, 1/x] = k[x,y]/(xy - 1) = A_s$$

Induziert auf den Spektren gerade die Projektion parallel zu y-Achse der Hyperbel

$$xy = 1$$

auf die x-Achse, d.h. $h^{\#}$ identifiziert die Hyperbel mit der affinen Geraden, aus welcher der Ursprung entfernt wurde.



Offene Teilfunktoren

Seien P: A-Alg $\longrightarrow$ Ens ein Funktor und F: A-Alg $\longrightarrow$ Ens ein Teilfunktor von P.

Der Teilfunktor F von P heißt <u>offen</u>, wenn für jede A-Algebra B und jeden Morphismus

$$f: Sp(B) \longrightarrow P|_{B\text{-}Alg}$$

von Funktoren auf der Kategorie B-Alg das vollständige Urbild bei f des Teilfunktors $F|_{B\text{-Alg}}$ in Sp(B) ein offener Teilfunktor von Sp(B) ist.

$$\begin{array}{ccc} Sp(B) & \xrightarrow{f} & P|_{B\text{-Alg}} \\ \cup & & \cup \\ f^{-1}(F) & \longrightarrow & F|_{B\text{-Alg}} \end{array}$$

Genauer, der Teilfunktor $f^{-1}(F)$ von Sp(B) mit

$$f^{-1}(F)(C) = f_C^{-1}(F(C))$$

für jede B-Algebra C ist offen in Sp(B). Dabei bezeichne f_C die durch f induzierte Abbildung

$$f_C\colon Sp(B)(C) \longrightarrow P(C).$$

Die Funktoren der Gestalt

$$A\text{-Alg} \longrightarrow Ens,\ B \mapsto P(B)\text{-}F(B),$$

mit F offen heißen dann <u>abgeschlossene Teilfunktoren</u> von P.

Ein Funktor P: A-Alg $\longrightarrow$ Ens heißt <u>lokal</u>[5], wenn für jede A-Algebra B und jede Familie $\{b_i\}_{i\in I}$ von Elementen aus B mit

---

[5] vgl. Demazure & Gabriel: Introduction to algebraic geometry and algebraic groups, Chapter I, §1.3.11. Später werden wir die Elemente der Menge P(B) mit Funktionen auf der Menge Spec(B) identifizieren. Den Funktor P kann man dann als Funktor auffassen, der den offenen Mengen gewisser topologischer Räume Mengen zuordnet. Die Forderung der Lokalität entspricht dann gerade der Bedingung, daß der in dieser Weise betrachtete Funktor eine Garbe ist.
Bedingung (1) bedeutet nämlich gerade, es gilt

$$Spec\ B = \bigcup_{i\in I} D(b_i),$$

wobei die natürliche Abbildung auf den Quotientenring $B \longrightarrow B_{b_i}$ die Menge $D(b_i)$ mit Spec B_{b_i} identifiziert,

$$D(b_i) = Spce\ B_{b_i}.$$

Analog hat man

$$D(b_i) \cap D(b_j) = D(b_i b_j) = Spec\ B_{b_i b_j}.$$

Die Injektivität von α übersetzt sich dann in die Aussage, daß zwei Funktionen auf Spec(B), deren Einschränkungen auf jedes der $D(b_i)$ gleich sind, selbst schon gleich sind. Die obige Beschreibung des Bildes von α bedeutet, daß jede Familie $\{f_i\}_{i\in I}$ von Funktionen mit der Eigenschaft, daß f_i auf $D(b_i)$ definiert ist und f_i und f_j auf $D(b_i) \cap D(b_j)$ übereinstimmen, durch Einschränken einer auf Spec(B) definierten Funktion entsteht. Dies sind gerade die Garben-Axiome.

$$\sum_{i\in I} b_i B = B \tag{1}$$

die folgende Sequenz exakt ist in dem Sinne, daß α gerade der Differenzkern der .

$$P(B) \xrightarrow{\alpha} \prod_{i\in I} P(B_{b_i}) \overset{\beta}{\underset{\gamma}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} P(B_{b_i b_j})$$

Abbildungen β und γ ist. Genauer: α ist injektiv und hat als Bild die Menge der Elemente des Proodukts in der Mitte, in denen β und γ denselben Wert haben.

Dabei sei α die Abbildung, deren i-te Koordinaten-Funktion

$$P(B) \longrightarrow P(B_{b_i})$$

gerade durch Anwenden von P auf die natürliche Abbildung $B \longrightarrow B_{b_i}$, $b \mapsto b/1$ in den Quotienten-Ring ist. Weiter sei β die Abbildung, deren Koordinatenfunktion zum Paar (i,j) die folgende Komposition ist

$$\prod_{i\in I} P(B_{b_i}) \longrightarrow P(B_{b_i}) \longrightarrow P(B_{b_i b_j}).$$

Dabei sei die erste Abbildung links die Projektion auf den i-ten direkten Faktor und die zweite Abbildung rechts entstehe durch Anwenden von P auf die natürliche Abbildung in den Quotienenring $B_{b_i} \longrightarrow B_{b_i b_j} = (B_{b_i})_{b_j}$. Abbildung γ sei in derselben Weise wie β definiert, nur daß die Rollen von i und j zu vertauschen sind (d.h. die Koordinaten-Funktion von γ zum Paar (i,j) ist gerade die Koordinatenfunktion von β zum Paar (j,i)).

<u>Beispiel</u>: der Funktor $\mathbb{P}^n_A$

Der Funktor $\mathbb{P}^n_A$: A-Alg $\longrightarrow$ Ens ist ein Beispiel für einen lokalen Funktor. Der Beweis ist technisch etwas zu aufwendig für diese Vorlesung. Wir verweisen deshal auf das Buch von Demazure & Gabriel: Introduction to algebraic geometry and algebraic groups (Chapter I, §1.3.13).

Ein (algebraisches) <u>Schema</u> über dem Ring A ist ein lokaler Funktor

$$X: \text{A-Alg} \longrightarrow \text{Ens},$$

der eine Überdeckung durch offene Teilfunktoren besitzt, welche affine Schemata sind, d.h. es gibt eine Familie $\{U_i\}_{i\in I}$ von offenen Teilfunktoren von X, welche affine Schemata sind mit

$$X(B) = \bigcup_{i\in I} U_i(B) \tag{2}$$

für jede A-Algebra B, welche ein Körper ist.

<u>Bemerkungen</u>

(i) Es stellt sich hier die Frage, warum man sich bei der letzten Bedingung auf Körper beschränkt. Zur Motivierung stellen wir uns die Elemente von X(B) wieder als auf Spec B definierte Funktionen vor. Ist B ein Körper, so besteht Spec B aus genau einem Punkt. Bedingung (2) bedeutet dann gerade, daß das Bild dieses Punktes genau dann in X liegt, wenn es in einem der U_i liegt.

(ii) Schon im Fall, daß B das direkte Produkt eines Körpers mit sich selbst ist, Spec B also aus zwei Punkten besteht, kann man leicht einen Morphismus auf Spec B finden, bei welchem die beiden Bildpunkte nicht im selben U_i liegen.

Offenheitskriterium

Seien X: A-Alg $\longrightarrow$ Ens ein Funktor und $U \subseteq X$ ein Teilfunktor. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) $U \subseteq X$ ist offen.

(ii) Für jede A-Algebra B und jedes Element $\beta \in X(B)$ gibt es ein Ideal $J \subseteq B$, sodaß für jeden Homomorphismus ℓ: B $\longrightarrow$ C von Ringen mit 1 gilt.

$$X(\ell)\beta \in U(C) \Leftrightarrow \ell(J)C = C.$$

Beweis. Nach Definition ist die Offenheit von U in X äquivalent zu der Bedingung, daß es für jede A-Algebra B und jeden funktoriellen Morphismus f: $Sp(B) \longrightarrow X|_{B\text{-Alg}}$ ein Ideal J von B gibt mit

$$f^{-1}(U(C)) = \{\ell \in Sp(B)(C) \mid \ell(J)C = C\}$$

d.h. für jeden Homomorphismus ℓ: B $\longrightarrow$ C von Ringen mit 1 gilt

$$\ell \in f^{-1}(U(C)) \Leftrightarrow \ell(J)C = C.$$

Nun ist

$$f^{-1}(U(C)) = \{ \ell \in Sp(B)(C) \mid f(\ell) \in U(C)\}$$

Weil f ein funktorieller Morphismus ist, besteht ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Sp(B)(C) & \xrightarrow{f} & X(C) \\ Sp(\ell)\uparrow & & \uparrow X(\ell) \\ Sp(B)(B) & \xrightarrow{f} & X(B) \end{array}$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} f^{-1}(U(C)) &= \{\ell : B \longrightarrow C \mid f(\ell) \in U(C)\} \\ &= \{\ell : B \longrightarrow C \mid X(\ell)f(Id_B) \in U(C) \} \end{aligned}$$

Die Offenheitsbedingung bekommt damit die Gestalt

$$X(\ell)f(Id_B) \in U(C) \Leftrightarrow \ell(J)C = C.$$

Dies ist gerade Bedingung (ii) für $\beta = f(Id_B)$. Bedingung (ii) ist damit hinreichend.

Umgekehrt gibt es für jedes $\beta \in X(B)$ einen funktoriellen Morphismus

$$f: Sp(B) \longrightarrow X|_{B\text{-Alg}} \text{ mit } f(Id_B) = \beta.$$

Für Homomorphismen h: B $\longrightarrow$ C von Ringen mit 1 definiert man f durch

$$f_C: Sp(B)(C) \longrightarrow X(C),\ B \xrightarrow{x} C \mapsto X(x)(\beta).$$

Wir haben gezeigt, jedes Element $\beta\in X(B)$ hat die Gestalt $f(Id_B)$ mit einem geeigneten funktoriellen Morphismus. Bedingung (ii) ist damit notwendig.
QED.

Der Funktor $\mathbb{P}^n_A$ als algebraisches Schema

Die Tatsache, daß sich der n-dimensionale projektive Raum durch die offenen Teilmengen $U_0, \dots, U_n$ überdecken läßt, übersetzt sich gerade in die Aussage, daß der Funktor $\mathbb{P}^n_A$ ein algebraisches Schema ist.

Genauer:
Sei $i:Q \hookrightarrow A^{n+1}$ ein direkter Summand vom Rang n von A^{n+1}. Für jede A-Algebra B identifizieren wir $Q\otimes_A B$ mit seinem Bild bei

$$i\otimes B: Q\otimes_A B \longrightarrow A^{n+1}\otimes_A B = B^{n+1}$$

Wir betrachten die natürliche Abbildung

$$\pi_B: B^{n+1} \longrightarrow B^{n+1}/Q\otimes_A B.$$

Weiter sei

$$U_Q: A\text{-Alg} \longrightarrow Ens$$

der Teilfunktor von $\mathbb{P}^n_A$ mit

$$\begin{aligned} U_Q(B) &:= \text{Menge der zu } Q\otimes_A B \text{ komplementären Teilmoduln}^6 \text{ von } B^{n+1} \\ &= \{M \in \mathbb{P}^n_A(B) \mid \pi_B|_M \text{ ist ein Isomorphismus }\} \end{aligned}$$

Behauptung:

(i) U_Q ist für jedes Q ein offener Teilfunktor von $\mathbb{P}^n_A$.

(ii) Die U_Q bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{P}^n_A$ wenn Q die Teilmoduln der Gestalt

$$Q_i = A\bullet e_0+\dots+Ae_{i-1}+Ae_{i+1}+\dots+A\bullet e_n$$

durchläuft.

(iii) U_{Q_i} ist für jedes i isomorph zum affinen Raum $\mathbb{A}^n_A = Sp(A[x_1,\dots,x_n])$.

Beweis. Zu (iii). Wir beschränken uns auf den Fall i = 0. Die anderen Fälle werden analog behandelt. Für $Q = Q_0 = A\bullet e_1+\dots+A\bullet e_n$ ist

$$\mathbb{A}^n_A(B) = B^n \longrightarrow U_Q(B),\ (b_1,\dots,b_n) \mapsto (1,b_1,\dots,b_n)\bullet B \qquad (1)$$

wohldefiniert.

Für jedes $M\in U_Q(B)$ enthält M ein Element m, welches bei

$$\pi_B: B^{n+1} \longrightarrow B^{n+1}/Q_0\otimes_A B = Be_0$$

---

[6] Man beachte, als direkte Summanden von B^{n+1} sind diese komplementären Moduln M endlich erzeugt: es gibt eine B-lineare Surjektion $B^{n+1} \longrightarrow M$.

in e_0 übergeht, d.h. ein Element von der Gestalt

$$m = (1,b_1,...,b_n).$$

Da das Bild von π_B von e_0 erzeugt wird und die Einschränkung von π_B auf M ein Isomorphismus ist, wird M von m erzeugt. Mit anderen Worten, M liegt im Bild von (1). Die Abbildung (1) ist damit bijektiv, d.h.

$$U_Q \cong \mathbb{A}^n_A$$

ist das affine Schema zum Polynomring in n Unbestimmten.

Zu (ii). Sei B ein Körper. Die Elemente $M \subseteq \mathbb{P}^n_A(B)$ sind dann gerade die Teilvektorräume der Dimension 1 von B^{n+1}. Die Vektoren aus Q_i haben als i-te Koordinate die Null. Für die Vektoren aus dem Durchschnitt gilt dies für alle i, d.h. der Durchschnitt der Q_i ist der Null-Vektorraum. Deshalb liegt M nicht im Durchschnitt der Q_i. Sei jetzt i so gewählt, daß M nicht in Q_i liegt. Dann ist M komplementär zu Q_i, d.h.

$$M \in U_{Q_i}(B).$$

Wir haben gezeigt, die U_{Q_i} überdecken $\mathbb{P}^n_A$.

Zu (i). Wir haben zu zeigen, für jede A-Algebra B, jedes $\beta\in\mathbb{P}^n_A(B)$ gibt es ein Ideal J $\subseteq$ B, sodaß für jeden Homomorphismus h: B $\longrightarrow$ C von Ringen 1 gilt

$$\mathbb{P}^n_A(h)\beta \in U_Q(C) \Leftrightarrow h(J)C = C.$$

Sei also $\beta\in \mathbb{P}^n_A(B)$ ein direkter Summand von B^{n+1} vom Rang 1. Der Modul

$$\mathbb{P}^n_A(h)\beta = \beta\otimes_B C$$

ist genau dann komplementär zu $Q\otimes_A C$, wenn die Einschränkung von π_C auf $\beta\otimes_B C$ ein Isomorphismus ist:

$$\mathbb{P}^n_A(h)\beta \in U_Q(C) \Leftrightarrow \nu_C := \pi_C|\beta\otimes_B C : \beta\otimes_B C \longrightarrow C^{n+1}/Q\otimes_A C \text{ bijektiv.}$$

Da ν_C eine C-lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten projektiven C-Moduln desselben Rangs ist, ist die Bijektivität äquivalent zur Surjektivität,[7] d.h. äquivalent zu

$$0 = \text{coker } \nu_C = (\text{coker } \nu_B)\otimes_B C$$

Sei J der Annullator von coker ν_B. Dann ist die letzte Bedingung genau dann erfüllt, wenn gilt[8]

$$h(J)C = C.$$

QED.

---

[7] siehe den Anhang ‘Kommutative Algebra’, Abschnitt ‘projektive Moduln’.
[8] siehe den Anhang ‘Kommutative Algebra’, Abschnitt ‘Träger und Annullatoren’.

Projektive Schemata

Ein <u>projektives Schema</u> über dem Ring A ist ein abgeschlossener Teilfunktor des Funktors $\mathbb{P}^n_A$.

Wir sind jetzt soweit, den wichtigsten Gegenstand der Weil-Vermutungen zu definieren.

1.3.6 Die Zeta-Funktion eines projektive Schemas

Seien k ein endlicher Körper und

$$X: k\text{-Alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

ein projektives Schema über k. Weiter bezeichne k_r die Erweiterung vom Grad r des Körpers k und

$$N_r := N_r(X) := \# X(k_r)$$

die Anzahl der k^r-rationalen Punkte von X. Dann heißt die formale Potenzreihe mit rationalen Koeffizienten

$$Z(t) = Z(X, t) := \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} N_i(X)\cdot\frac{t^i}{i}\right)$$

<u>Zeta-Funktion</u> von X.

Beispiel

Seien $k = \mathbb{F}_q$ der Körper mit $q = p^f$ Elementen $X = \mathbb{P}^1_k$ die projektive Gerade. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^1_k(k_r) &= \{[x,y] \mid (x,y) \in (k_r)^2 - \{0\}\} \\
&= U_0 \cup \{[0,y] \mid (x,y) \in (k_r)^2 - \{0\}\} \\
&= U_0 \cup \{[0,1]\}
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
N_r &= \# U_0 + 1 \\
&= \# k_r + 1 \\
&= q^r + 1
\end{aligned}$$

denn k_r ist ein r-dimensionaler Vektorraum über dem q-elementigen Körper k. Damit ist

$$Z(\mathbb{P}^1_k, t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} (q^i + 1)\cdot\frac{t^i}{i}\right)$$

Wegen $\log(1-t) = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i}$ erhalten wir

$$Z(\mathbb{P}^1_k, t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)}$$

Man beachte, es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-t)(1-qt)} &= \exp\left(\log\left(\frac{1}{(1-t)(1-qt)}\right)\right) \\
&= \exp(-\log(1-t) - \log(1-qt))
\end{aligned}$$

$$= \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(qt)^i}{i}\Big)$$
$$= \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} (q^i+1)\bullet\frac{t^i}{i}\Big)$$
$$= Z(t).$$

Die Zeta-Funktion der projektiven Geraden ist also eine rationale Funktion.

Bemerkungen

(i) Uns fehlt noch ein Begriff zur Formulierung der Weil-Vermutungen, nämlich der Begriff des glatten Schemas. Glatte Schemata sind solche ohne Singularitäten, zum Beispiel Kurven ohne Selbstschnitte oder Spitzen. Über den komplexen Zahlen bedeutet die Bedingung der Glattheit, daß die Schemata komplexe Mannigfaltigkeiten sind.

(ii) Leider ist eine formale Defintion des glatten Schemas komplexer und technischer als die bisher eingeführten Begriffe. Wir werden die Definition deshalbt auf später verschieben und Weil-Vermutugen formulieren ohne diese Definition vorher anzugeben. Sie sollten deshalb im Auge behalten, daß die betrachteten Schemata noch eine weitere Bedingung erfüllen müssen, die erst später präzise angegeben wird.

(iii) Der unten verwendete Begriff der Irreduzibilität ist einfacher Natur: ein Schema heißt reduzibel, wenn es Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilvarietäten ist, und andernfalls irreduzibel.

1.3.7 Die Weil-Vermutungen

Seien k ein endlicher Körper,

$$X: k\text{-Alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

ein glattes irreduzibles projektives Schema der Dimension n und Z(t) dessen Zeta-Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen.

Rationalität

Z(t) ist eine rationale Funktion in t, d.h. ein Quotient von zwei Polynomen, mit rationalen Koeffizienten.

Funktionalgleichung

Es gibt eine ganze Zahl E mit[9]

$$Z\Big(\frac{1}{q^n t}\Big) = \pm\, q^{nE/2}\, t^E \bullet Z(t).$$

Analogon der Riemann-Vermutung

$$Z(t) = \frac{P_1(t)\bullet P_3(t)\bullet\ldots\bullet P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\bullet P_2(t)\bullet\ldots\bullet P_{2n}(t)}$$

Dabei sind die P_i ganzzahlige Polynome mit

$$P_0(t) = 1 - t$$
$$P_{2n}(t) = 1 - q^n t$$

[9] Die Zahl E wird genau beschrieben: es ist die Selbstschnittzahl der Diagonalen von X×X und äquivalent die höchst Chern-Klasse des Tangentialbündels von X.

$$P_i(t) = \prod_j (1 - \alpha_{ij}t) \text{ für } i = 1,...,2n-1$$

wobei die α_{ij} algebraische ganze Zahlen sind mit $|\alpha_{ij}| = q^{i/2}$.[10]

Betti-Zahlen

Sei $B_i = B_i(X)$ der Grad des Polynoms $P_i(t)$. Dann gilt

$$E = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i B_i$$

Seien

$$Y: R\text{-Alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

ein projektives irreduzibles Schema über dem Ring R der ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlenkörpers, p ein Primideal von R und

$$R \longrightarrow R/p \subseteq Q(R/p) = k$$

der natürliche Homomorphismus auf den Restklassenkörper modulo p. Dann ist jede k-Algebra auch eine R-Algebra und (weil R ganze in $\mathbb{R}$ liegt) auch jede $\mathbb{C}$-Algebra auch eine R-Algebra.

Es gelte

$$X = Y|_{k\text{-Alg}}$$
$$Z = Y|_{\mathbb{C}\text{-Alg}}$$

Dann ist für i = 0,...,2n

$$B_i = \dim_{\mathbb{R}} H^i(Z, \mathbb{R})$$

Dabei bezeichne $H^i(Z, \mathbb{R})$ die i-te singuläre Kohomologie der komplexen Mannigfaltigkeit Z.

Zur Definition der singulären Kohomologie eines topologischen Raumes

Definition

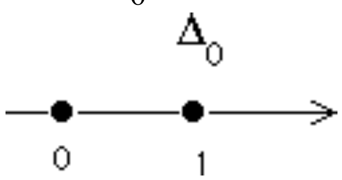
Für jede nicht-negative ganze Zahl n ist das n-dimensionale Standard-Simplex definiert als der folgende topologische Unterraum des $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\Delta_n := \{(x_0, ... , x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \text{ für jedes } i \}$$

Beispiele

Für n = 0 besteht Δ_n offensichtlich aus nur einem Punkt auf der reellen Geraden,

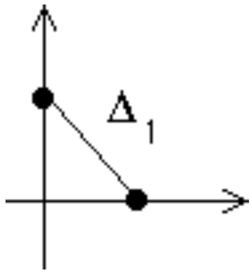
$$\Delta_0 = \{1\}.$$



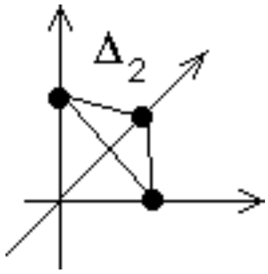
[10] Man kann zeigen, diese Bedingungen bestimmen die Polynome P_i eindeutig, falls sie existieren.

Die Bedingungen $|\alpha_{ij}| = q^{i/2}$ implizieren, die Nullstellen von P_i liegen auf der Geraden mit dem Realteil i/2.

Für n = 1 ist Δ_n die Strecke der reellen Ebene, welche die Punkte (1,0) und (0,1) verbindet.



Für n = 2 ist Δ_n das Dreieck im Raum mit den Ecken (1,0,0), (0,1,0) und (0,0,1).



Für n = 3 ist Δ_n ein Tetraeder im 4-dimensionalen Raum.

Definition

Sei X ein topologischer Raum. Ein singuläres n-Simplex oder auch n-dimensionales singuläres Simplex von X ist eine stetige Abbildung

$$\sigma: \Delta_n \longrightarrow X.$$

Bemerkungen

(i) Im Fall n = 0 ist σ im wesentlichen dasselbe wie ein Punkt. Im Fall n = 1 verbindet man mit σ die Vorstellung einer Kurve in X, im Fall n = 2 die eines gekrümmten Dreiecks, im Fall n = 3 die eines gekrümmten Tetraeders, usw.

(ii) Das Wort singulär soll darauf hinweisen, daß diese geometrischen Objekte entarten können, im Extremfall zu einem Punkt, wenn σ eine konstante Abbildung ist. Wir müssen das Entarten zulassen, weil andernfalls die zu konstruierenden Homologie- und Kohomologie-Gruppe keine Funktoren wären.

Definition

Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie[11]. Ein Komplex K über $\mathcal{C}$ besteht aus einer Folge von Morphismen aus $\mathcal{C}$ der Gestalt

$$K: \ldots \longrightarrow K_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} K_i \xrightarrow{d_i} K_{i-1} \longrightarrow \ldots$$

mit $d_i \circ d_{i+1} = 0$[12] für jedes i. Das Objekt K_i heißt dann der Bestandteil des Grades i von K oder auch die Komponente des Grades i von K. Manchmal sagt man auch Dimension anstelle von Grad. Der Morphismus d_i heißt i-ter Randoperator von K oder auch i-tes Differential.

Seien K und L zwei Komplexe über $\mathcal{C}$. Ein Morphismus

---

[11] Es sollen Kerne, Kokerne (also auch Bilder) und ein Nullobjekt existieren. Weiter sollen die Hom-Funktoren Werte in der Kategorie der abelscen Gruppen annehmen, d.h. für jedes Objekt X von $\mathcal{C}$ erhält man Funktoren

$$h^X: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, ?) : \mathcal{C} \longrightarrow Ab \text{ und } h_X: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, X): \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Ab.$$

[12] Jede Hom-Menge einer additiven Kategorie enthält als abelsche Gruppe genau ein 0-Element. Es ist gerade der eindeutig bestimmte Morphismus, der sich über ein Null-Objekt faktorisiert.

$$f:K \longrightarrow L$$

von Komplexen über $\mathcal{C}$ ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots\longrightarrow & K_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & K_i & \xrightarrow{d_i} & K_{i-1} & \longrightarrow\dots \\ & {\scriptstyle f_{i+1}}\downarrow & & {\scriptstyle f_i}\downarrow & & {\scriptstyle f_{i-1}}\downarrow & \\ \dots\longrightarrow & L_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & L_i & \xrightarrow{d_i} & L_{i-1} & \longrightarrow\dots \end{array},$$

dessen obere Zeile gerade der Komplex K und dessen untere Zeile der Komplex L ist. Das Objekt

$$H_i(K) := \mathrm{Ker}(d_i)/\mathrm{Im}(d_{i+1})$$

heißt i-tes <u>Homologie-Objekt</u> oder auch i-te <u>Homologie</u> von K.

<u>Bemerkungen</u>

(i) Die Komplexe über $\mathcal{C}$ bilden zusammen mit den so definierten Morphismen (und der offensichtlichen Morphismen-Komposition) eine Kategorie

$$\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$$

welche wieder additiv ist.

(ii) Für jedes i definiert die i-te Homologie einen Funktor

$$H_i: \mathcal{C}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{C},\ K \mapsto H_i(K).$$

Dieser Funktor ist additiv, d.h. für je zwei Komplexe K und L ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(K,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_i(K), H_i(L)),\ K \xrightarrow{f} L \mapsto H_i(K) \xrightarrow{H_i(f)} H_i(L),$$

ein Gruppen-Homomorphismus.

<u>Bezeichnungen</u>

$$K^i := K_{-i},\ d^i := d_{-i},\ H^i := H_{-i}$$

<u>Beispiel</u>

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}$:= Ab die Kategorie der abelschen Gruppen. Für jede nicht-negative ganze Zahl n sei

$$S_n(X)$$

die von den singulären n-Simplexen von X erzeugte freie abelsche Gruppe. Die so definierten abelschen Gruppen bilden einen Komplex

$$S(X)$$

mit den wie folgt definierten Randoperatoren

$$d_n: S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X),$$

welcher singulärer Komplex heißt.

Zur Definition von d_n genügt es, die Werte von d_n auf den Elementen eines freien Erzeugendensystems anzugeben, d.h. es reicht

$$d_n(\sigma)$$

zu definieren für jedes n-Simplex $\sigma: \Delta_n \longrightarrow X$. Dazu betrachten wir die i-te <u>Randabbildung</u>

$$\varepsilon_i:\Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n,\ (x_0,\dots,x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots , x_{i-1} , 0, x_i , \dots , x_{n-1})$$

welche das (n-1)-Standardsimplex mit der der i-ten Seite des n-Standardsimplex identifiziert (d.h. mit der Seite, die der i-ten Ecke gegenüberliegt). Die

Zusammensetzungen von σ mit den Abbildungen ε_i sind singuläre (n-1)-Simplexe des Raums X. Wir setzen

$$d_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma\circ\varepsilon_i .$$

<u>Zum Beweis der Komplex-Eigenschaft</u>.

$$d_{n-1}\circ d_n = 0.$$

Das Simplex $\sigma\circ\varepsilon_i$ entsteht aus σ durch Weglassen der i-ten Ecke. Wendet man den Randoperator zweimal an, so werden auf alle möglichen Weisen zwei Ecken weggelassen und aus den Ergebnissen eine vorzeichenbehaftete Summe gebildet. Für je zwei Indizes i, j werden die i-te und die j-te Ecke zweimal weggelassen: einmal zuerst die i-te und dann die j-te und zum anderen erst die j-te und dann die i-te. Im Fall $i < j$ ist das zugehörige Vorzeichen im ersten Fall

$$(-1)^{i+j-1}$$

und im zweiten Fall

$$(-1)^{i+j}.$$

Die Vorzeichen sind unterschiedlich, d.h. die beiden Summanden heben sich weg.

<u>Bemerkungen</u>

(i) Der Übergang zum singulären Komplex definiert einen Funktor

$$S: \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Ab}^{\mathbb{Z}},\ X \mapsto S(X).$$

Für jede stetige Abbildung f: X $\longrightarrow$ X' bildet der zugehörige Komplex-Morphismus

$$S(f): S(X) \longrightarrow S(X')$$

das Simplex $\sigma: \Delta_n \longrightarrow X$ von X ab in das Simplex $f\circ\sigma: \Delta_n \longrightarrow X \longrightarrow X'$ von X'. Man beachte die Simplexe σ von X bilden freien Erzeugendensysteme der $S_n(X)$.

(ii) Die Zusammensetzung des Funktors S mit dem Funktor H_i heißt i-te <u>singuläre Homologie</u>. Bezeichnung:

$$H_i(X) := H_i(S(X)).$$

(iii) Sei A ein abelsche Gruppe. Die Zusammensetzung der Funktoren S, $\otimes$A und H_i heißt i-te <u>singuläre Homologie mit Koeffizienten</u> in A. Bezeichnung:

$$H_i(X,A) := H_i(S(X)\otimes_{\mathbb{Z}} A).$$

Man beachte, ist A ein Ring, so liegen die Werte dieses Funktors in der Kategorie der Moduln Mod-A über diesem Ring. Ist A ein Körper, so erhält man insbesondere Vektorräume.

(iv) Sei A eine abelsche Gruppe. Die Zusammensetzung der Funktoren S, h_A und H^i heißt i-te <u>singuläre Kohomologie mit Koeffizienten</u> in A. Bezeichnung:

$$H^i(X,A) := H^i(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(S(X), A)).$$

Man beachte, der singuläre Komplex S(X) hat die Gestalt

$$\ldots\longrightarrow S_2(X)\longrightarrow S_1(X)\longrightarrow S_0(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots,$$

sodaß man nach Anwenden des kontravarianten Hom-Funktors einen Komplex der Gestalt

$$.. \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(S_0(X), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S_1(X), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S_2(X), A) \longrightarrow ..$$

erhält.

Der Fall der projektiven Geraden

Für $X = \mathbb{P}^1_k$ mit einem Körper aus $q = p^f$ Elementen haben wir bereits gesehen,

$$Z(\mathbb{P}^1_k, t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)}$$

ist eine rationale Funktion. Durch direktes Nachrechnen sieht man, es besteht die Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} Z(\tfrac{1}{qt}) &= \frac{1}{(1-1/(qt))(1-q/(qt))} \\ &= \frac{q^2t^2}{(qt-1)(qt-q)} \\ &= \frac{qt^2}{(1-qt)(1-t)} \\ &= qt^2 Z(t) \end{aligned}$$

mit E = 2.

Dies soll gerade die <u>Selbstschnittzahl</u> der Diagonalen

$$\Delta \subset \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$$

sein. Die Diagonale ist durch die Gleichung

$$ad - bc = 0$$

gegeben. Identifiziert man $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ vermittels der Einbettung

$$\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \hookrightarrow \mathbb{P}^3_k,\ ([a,b],[c,d]) \mapsto [ac,ad,bc,bd],$$

mit der Quadrik

$$Q := V(xw - yz) \subseteq \mathbb{P}^3_k$$

so wird die Diagonale gerade zu der Kurve mit der Gleichung

$$y = z.$$

Da das Schnittverhalten von Flächen im $\mathbb{P}^3_k$ nur von deren Grad abhängt, können wir statt Δ mit sich selbst auch Δ mit einer beliebigen anderen Hyperebene schneiden, sagen wir mit $x = z$. Wir erhalten für die Schnittmenge die Gleichungen

$$\begin{aligned} X &:= x - z &&= 0 \\ Y &:= y - z &&= 0 \\ &(X+z)w - (Y+z)z &&= 0 \end{aligned}$$

d.h.

$$X = 0,\ Y = 0,\ zw - z^2 = 0.$$

d.h.

$$X = 0,\ Y = 0,\ z(w - z) = 0.$$

In den neuen Koordinaten X, Y, z, w erhalten wir die Punkte [0,0,0,1] und [0,0,1,1] als Schnittmenge, d.h.

$$\Delta \cdot \Delta = 2.$$

Das Analog der Riemannschen Vermutung gilt trivialerweise mit

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 - t \\ P_1(t) &= 1 \\ P_2(t) &= 1 - qt \end{aligned}$$

Die Polynome haben die Grade $B_0 = 1$, $B_1 = 0$, $B_2 = 1$. Nun ist k eine $\mathbb{Z}$-Algebra bezüglich der Algebra

$$\mathbb{Z} \longrightarrow k,\ n \mapsto n\bullet 1_k\ ,$$

und es gilt

$$\mathbb{P}^1_k = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}|_{k\text{-Alg}}$$
$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}|_{\mathbb{C}\text{-Alg}}$$

Nach den Weilschen Vermutungen über die Betti-Zahlen, müssen die Betti-Zahlen der komplexen projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ gerade 1, 0 und 1 sein.

$$B_i = \dim_{\mathbb{R}} H^i(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}) \text{ für } i = 0, 1, 2.$$

Nun ist $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ aber gerade die Riemannsche Zahlenkugel. Die angegebenen Betti-Zahlen bedeuten gerade folgendes:

$B_0 = 1$: Je zwei Punkte im $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ unterscheiden sich um einen Rand, d.h. sie lassen sich durch eine Kurve verbinden.

$B_1 = 0$: Jede geschlossene Kurve im $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ist Rand eines Flächenstücks.

$B_2 = 1$: Jede randlose Fläche im $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ bildet zusammen mit einem Vielfachen von $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ einen Rand.

<u>Bemerkungen</u>

(i) Zum Vergleich, die Betti-Zahlen eines Torus sind 1, 2, 1.

(ii) Allgemein kann man zeigen, B_0 ist die Dimension der $\mathbb{R}$-Vektorraums, der von den linearen Zusammenhängskomponenten erzeugt wird. Die obigen Betti-Zalen B_0 drücken also nur aus, daß die 2-Sphäre und der Torus linear zusammenhängend sind.

(iii) Allgemein kann man zeigen, eine kompakte n-Mannigfaltigkeit hat die Betti-Zahl B_n wenn sie orientierbar ist und andernfalls die Betti-Zahl $B_n = 0$. Die obigen Betti-Zahlen B_2 drücken also nur aus, daß die Sphäre und der Torus orientierbar sind.

(iv) Die Berechnung der (Ko-) Homologie-Gruppen ist Gegenstand der algebraischen Topologie aber auch der Differentialtopologie. Klassische Lehrbücher in diesem Kontext sind zum Beispiel die folgenden.
Milnor: Morse theory, Princeton University Press 1963
Hirsch: Differential topology, Springer, New York 1994
De Rham: Varieties differentiables, Paris 1954.

1.3.8 Zum weiteren Verlauf

Unser Ziel im weiteren ist eine genauere und weniger formale Beschreibung der oben auftretenden Begriffe und eine formal korrekte Einführung der Begriffe, die noch nicht definiert wurden.

Insbesondere wollen wir für die ‘Schemata’ genannten Funktoren X eine geometrischere Beschreibung finden: wir wollen X(B) interpretieren als Menge von

Funktionen Spec(B) $\longrightarrow$ X mit einem geeignet gewählten Raum X. Dies zwingt uns, den Funktionenbegriff zu axiomatisieren durch die Einführung des Begriffs der Garbe. Das klassische Lehrbuch zur Garben-Theorie ist das von Godement,

Godement, R.: Topologie algebrique et theorie des faisceaux, Hermann, Paris.

Die von uns benötigten Teile der Garben-Theorie (zusammen mit den für uns wichtigen Beispielen) findet man im Buch von Hartshorn zur algebraischen Geometrie.

Danach wollen wir eine Kohomologie-Theorie entwickeln, die Garbenkohomologie der algebraischen Schemata.

Diese ist leider nicht die Kohomologie-Theorie, die wir für den Beweis der Weil-Vermutungen brauchen und die sich Etal-Kohomologie nennt. Wir werden aber die Eigenschaften der Etal-Kohomologie beschreiben und angeben, wie sich daraus die Weil-Vermutungen ableiten.

2. Garben

2.1 Topologische Räume als Kategorien

Sei X ein topologischer Raum. Wir identifizieren X mit der wie folgt definierten Kategorie, welche ebenfalls mit X bezeichnet wird.

Die Objekte der Kategorie X sind gerade die offenen Mengen von X,

$$Ob(X) = |\mathcal{X}| := \{U \subseteq X \mid U \text{ offen in } X\}.$$

Die Morphismen von X sind die natürlichen Einbettungen offener Mengen ineinander, d.h. für je zwei offenen Mengen U', U" von X besteht

$$\mathrm{Hom}_X(U', U'')$$

nur aus der natürlichen Einbettung $U' \hookrightarrow U''$ von U' in U", falls U' eine Teilmenge von U" ist, und andernfalls ist diese Hom-Menge leer. Die Morphismenkomposition in dieser Kategorie ist die gewöhnliche Zusammensetzung von Abbildungen.

2.2 Prägarben

Seien X ein topologisdcher Raum und $\mathcal{C}$ eine Katorie. Eine <u>Prägarbe</u> auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ ist ein kontravarianter Funktor auf X mit Werten in $\mathcal{C}$, d.h. ein Funktor

$$F: X^{op} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Dabei bezeichne $\mathcal{D}^{op}$ für jede Kategorie $\mathcal{D}$ die zu $\mathcal{D}$ duale Kategorie.
Jeder offenen Menge U von X wird also ein Objekt

$$F(U) \in \mathcal{C}$$

zu geordnet. Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Mengen sind, so heißen die Elemente von F(U) auch <u>Schnitte</u> von F über U. Für

$$s \in F(U)$$

sagt man auch, s ist ein auf U <u>definierter</u> Schnitt von F.

Für je zwei offene Mengen U',U" $\in$X mit U' $\subseteq$ U" hat man einen Morphismus von $\mathcal{C}$, der Restriktion von F heißt und wie folgt bezeichnet wird.

$$\rho^{U'}_{U''}: F(U'') \longrightarrow F(U').$$

Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Mengen sind, und ist $s \in F(U")$ ein Schnitt von F über ", schreibt man auch

$$s|_{U'} := \rho^{U'}_{U"}(s)$$

und nennt s die Einschränkung von s auf U'. Für jeden Punkt $x \in X$ bilden die offenen Mengen von X, welche den Punkt x enthalten ein (kofiltriertes) inverses System der Kategorie X, also ein (filtrieres) direktes System im Dual von X. Der direkte Limes

$$F_x := \varinjlim_{x \in U} F(U)$$

heißt Halm von F im Punkt x.

Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Mengen[13] sind, so heißen die Elemente der Menge F_x Keime. Einen Keim kann man als Äquivalenzklasse auf der Menge der Paare

$$(U, s)$$

auffassen mit

$U \subseteq X$ offene Umgebung von x und $s \in F(U)$.

Dabei werden zwei Paare (U', s') und (U", s") als äquivalent angesehen, wenn es eine offene Menge $W \subseteq X$ gibt mit

$$x \in W \subseteq U' \cap U" \text{ und } s'|_W = s"|_W.$$

Die durch den Schnitt $s \in F(U)$ definierte Äquivalenzklasse wird mit

$$s_x$$

bezeichnet und heißt Keim von s im Punkt $x \in U$.
Die Menge der Äquivalenzklassen ist dann wieder ein Objekt der Kategorie $\mathcal{C}$.[14]
Ein Morphismus $F \longrightarrow G$ von Prägarben $F, G: X^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$ ist eine natürliche Transformation (oder auch funktorieller Morphismus).

Beispiel 1

Seien X und Y zwei topologische Räume. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ sei

$$C_X(U) := \mathrm{Hom}_{Top}(U, Y)$$

die Menge der stetien Abbildungen $U \longrightarrow Y$. Dann ist C_X eine Prägarbe auf X mit Werten in der Kategorie **Ens** der Mengen. Ist Y ein topologischer Ring, zum Beispiel

$$Y = \mathbb{R},$$

---

[13] Genauer: die Mengen sollen mit gewissen Operationen

$$(s_1, \dots, s_n) \mapsto \omega(s_1, \dots, s_n)$$

versehen sein, wobei die Restriktionen der Prägarbe F mit diesen Operationen kommutieren,

$$\rho(\omega(s_1, \dots, s_n)) = \omega(\rho(s_1), \dots, \rho(s_n)).$$

[14] Die Operationen auf F_x werden repräsentantenweise definiert:

$$\omega((s_1)_x, \dots, (s_n)_x) := \omega(s_1, \dots, s_n)_x.$$

Diese Definition ist korrekt, weil die Restriktionen von F mit ω kommutieren.

so ist C_X sogar eine Prägarbe mit Werten in der Kategorie der Ringe, d.h. eine Garbe von Ringen.

Beispiel 2

Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ sei

$$\Gamma_f(U) := \{s\colon U \longrightarrow Y \mid s \text{ stetig und } f\circ s = Id_U\}$$

die Menge der auf U definierten Schnitte von f. Dann ist Γ_f eine Prägarbe von Mengen.

Sind die Fasern von f Mengen, die mit gewissen Operationen ω versehen sind, so definieren diese Abbildungen auf den Faserproddukten[15]

$$X\times_Y\ldots\times_Y X \longrightarrow X,\ (x_1, \ldots , x_n) \mapsto \omega(x_1, \ldots , x_n).$$

Ist letztere Abbildung stetig, so läßt sich die Operation ω auf die Mengen der Schnitte von Γ_f fortsetzen, d.h. Γ_f ist eine Prägarbe mit Werten in einer entsprechenden Kategorie.

Beispiel 3

Sei $X = \mathbb{R}^n$. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ sei

$$C^r_X(U) := \{f\colon U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist r-mal stetig differenzierbar}\}$$

Dann ist C^r_X eine Prägarbe von Ringen für $r = 0, 1, \ldots , \infty$)

Bezeichnet

$$C^\omega_X(U)$$

die Menge der Funktionen $U \longrightarrow \mathbb{R}$, die sich in jedem Punkt von U lokal in eine Potenzreihe entwickeln lassen (d.h. die Taylor-Entwicklung konvergiert), so ist

$$C^\omega_X$$

eine Prägarbe von Ringen. Für $x \in X$ ist der Halm

$$C^\omega_{X,x}$$

gerade der Ring der in x konvergenten Potenzreihen mit reellen Koeffizienten.

Beispiel 4

Sei $X = \mathbb{C}^n$. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ sei

$$\mathcal{O}_X(U)$$

die Menge der holomorphen[16] Funktionen $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann ist $\mathcal{O}_X$ eine Prägarbe von Ringen. Für $x \in X$ ist der Halm

---

[15] Ein Punkt von $X\times_Y\ldots\times_Y X$ ist ein n-Tupel von Punkten aus X, dessen sämtliche Koordinaten in derselben Faser von f liegen.

[16] d.h. $f=f(z_1,\ldots,z_n)$ ist stetig differenzierbar als Funktion der Real- und Imaginärteile der z_i und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0$$

$$\mathcal{O}_{X,x}$$

gerade der Ring der in x konvergenten Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten.

Beispiel 5

Sei Spec A das Spektrum eines kommutativen Rings A mit 1, versehen mit der Zariski-Topologie[17]. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ sei

$$\mathcal{O}_X(U)$$

die Menge der auf U definierten regulären Funktionen, d.h. der Funktionen, die sich lokal als Quotienten von Elementen aus A schreiben lassen. Genauer, die Schnitte von $\mathcal{O}_X$ über U sind die Abbildungen

$$f\colon U \longrightarrow \vee_{x\in \mathrm{Spec}\, A}\ A_x\ ,$$

welche auf U definiert sind, welche Werte in der disjunkten Vereinigung der Lokalisierungen A_x von A in den Primidealen x von A annehmen und welche die folgendne Bedingungen erfüllen.

1. $f(x) \in A_x$ für jedes $x \in U$.
2. Für jedes $x \in U$ gibt es eine offene Menge W und Elemente $u, v \in A$ mit
   (a) $x \in W \subseteq U$.
   (b) v liegt in keinem Primideal von W.
   (c) $f(w) = \frac{u}{v} \in A_w$ für jedes $w \in W$.

Dann ist $\mathcal{O}_X$ eine Garbe von kommutativen Ringen mit 1 auf X mit

(i) $\mathcal{O}_{X,x} = A_x$ für jedes $x \in X$.

(ii) $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$ für jedes $f \in A$.

(iii) $\mathcal{O}_X(X) = A$.[18]

<u>Beweis</u> Siehe Hartshorne: Algebraic geometry, Proposition II.2.2. An dieser Stelle wird sogar gezeigt, daß $\mathcal{O}_X$ eine Garbe ist. Der Beweis ist vergleichsweise technisch.

Einen einfachereren Beweis in einem Spezialfall, bei welchem die Beweisidee etwas besser erkennbar ist, findet man im Buch von Schafarevic:

Scharfarevic: Basic algebraic geometry, Part II, Chapter V, § 2.3.

<u>QED</u>.

---

für jedes i (d.h. f ist Lösung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen). Äquivalent: f läßt sich lokal in jedem Punkt $a = (a_1,...,a_n) \in U$ in eine konvergente Potenzreihe

$$\sum_{v_1,...,v_n} a_{v_1,...,v_n} (z_1-a_1)^{v_1} \bullet ... \bullet (z_n-a_n)^{v_n}$$

entwickeln.

[17] d.h. die abgeschlossenene Mengen sind geraden die Mengen der Gestalt

$$V(M) := \{x \in \mathrm{Spec}\, A \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } f \in M\} \text{ mit } M \subseteq A.$$

Dabei sei f(x) gerade das Bild von f bei der natürlichen Abbildung $A \longrightarrow A/x$.

[18] Das ist gerade die Aussage von (ii) im Fall f = 1.

Vereinbarung

Im folgenden sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Mengen mit gewissen Operationen und deren Morphismen Abbildungen sind, die diese Operationen respektieren.

2.3 Garben

Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine <u>Garbe</u> auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ ist eine Prägarbe

$$F: X^{op} \longrightarrow \mathcal{C},$$

mit der Eigenschaft, daß für jede offene Menge $U \subseteq X$ und jede offene Überdeckung

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i$$

die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Zwei Schnitte s', s" von F über U sind genau dann gleich, wenn ihre Einschränkungen auf alle U_i gleich sind:

$$s' = s" \Leftrightarrow s'|_{U_i} = s"|_{U_i} \text{ für jedes } i \ni I.$$

(ii) Für jede Familie $(s_i)_{i\in I}$ von Schnitten $s_i \in F(U_i)$ mit

$$s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j} \text{ für je zwei } i, j \in I$$

gibt es einen Schnitt $s \in F(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für jedes $i\in I$.

Bemerkungen

(i) Der Garben-Begrif axiomatisiert die Tatsache, daß sich die meisten Arten von Funktionen, die in der Mathematik eine Rolle spielen, lokal definieren lassen.

(ii) Die beiden Axiome drückt man oft auch dadurch aus, daß man sagt, die folgende Sequenz ist exakt.

$$F(U) \xrightarrow{\beta} \prod_{i\in I} F(U_i) \underset{\alpha"}{\overset{\alpha'}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} F(U_i\cap U_j)$$

Dabei sei β der Morphismus,

$$s \mapsto (s|_{U_i})_{i\in I},$$

α' der Morphismus

$$(s_i)_{i\in I} \mapsto (s_i|_{U_i\cap U_j})_{i,j\in I},$$

und α" der Morphismus

$$(s_i)_{i\in I} \mapsto (s_j|_{U_i\cap U_j})_{i,j\in I}.$$

Die Forderung der Exaktheit soll dabei bedeuten, daß β injektiv sein soll und ein Element x des direkten Produkts in der Mitte genau dann im Bild von β liegt, wenn es bei α' und α" dasselbe Bild hat:

$$x \in \mathrm{Im}(\beta) \Leftrightarrow \alpha'(x) = \alpha"(x).$$

(iii) Die in 2.2 angegebenen Beispiele für Prägarben sind sogar Garben.

(iv) Der Etal-Raum. Jede Garbe F: X $\longrightarrow$ Ens mit Werten in der Kategorie der Mengen ist isomorph zur Garbe der Schnitte einer stetigen Abbildung

$$\pi{:}Y \longrightarrow X.$$

Den topologischen Raum kann man wie folgt konstruktieren. Als Menge ist

$$Y := \vee_{x\in X} F_x$$

die disjunkte Vereinigung der Halme von F. Die stetige Abbildung π bildet alle Elemente von F_x in x ab,

$$\pi(F_x) = \{x\},$$

und als Topologie von Y nimmt man die stärkste Topologie (die mit den meisten offenen Mengen) mit der Eigenschaft, daß für jeden Schnitt $s \in F(U)$ von F die Abbildung

$$U \longrightarrow Y,\ x \mapsto s_x \text{ (:= Halm von s in x)},$$

stetig ist. Man kann dann zeigen, die Fasern von π sind diskret und π ist ein lokaler Homöomorphismus. Der Raum Y zusammen mit dieser Abbildung π heißt Etal-Raum der Garbe F.

(vii) Die Garben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ bilden eine Kategorie, die mit

$$Sh_X(\mathcal{C})$$

bezeichnet wird. Ist $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie, so gilt dasselbe für $Sh_X(\mathcal{C})$. Eine Garbe mit Werten in Ab heißt abelsche Garbe.

2.4 Lokale Definition von Garben

Seien X ein topologischer Raumd mit der Topologie-Basis $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit unendlichen direkten Produkten und Differenzkernen Es gelte:

(i) Für jedes $U \in \mathcal{B}$ sei ein $F(U) \in \mathcal{C}$ gegeben.

(ii) Für je zwei $U, V \in \mathcal{B}$ mit $U \subseteq V$ sei ein Morphismus

$$F(V) \longrightarrow F(U),\ s \mapsto s|_U,$$

von $\mathcal{C}$ gegeben, der für U = V gerade der identische Morphismus sei.

(iii) Für je drei $U, V, W \in \mathcal{B}$ mit $U \subseteq V \subseteq W$ sei das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} F(W) & \longrightarrow & F(V) \\ & \nwarrow \ \nearrow & \\ & F(U) & \end{array}$$

(iv) Für jedes $U \in \mathcal{B}$, jede Überdeckung

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i$$

von U durch offene Mengen $U_i \in \mathcal{B}$ und jede Familie $(s_i)_{i\in I}$ von Elementen

$$s_i \in F(U_i)$$

mit

$$s_i|_V = s_j|_V \text{ für je zwei } i, j \in I \text{ und jedes } V\in\mathcal{B} \text{ mit } U\subseteq U_i \cap U_j$$

existiere genau ein Schnitt $s \in F(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für jedes $i\in I$.

Dann gibt es bis auf Isomophie genau eine Garbe $\widetilde{F}$ auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ mit

$$\widetilde{F}(U) = F(U)$$

für jedes $U \in\mathcal{B}$, deren Restriktionen zwischen den Mengen aus $\mathcal{B}$ mit den oben angegebenen Morphismen übereinstimmen.

Beweis. Für $U \subseteq$ offen überdecke man U durch die offenen Mengen von $\mathcal{B}$, die ganz in U enthalten sind, d.h. man schreibe

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i ,$$

wobei $\{U_i\}_{i\in I}$ die Familie der offenen Teilmengen von U sei, die Elemente von $\mathcal{B}$ sind. Dann kann man

$$F(U) := \text{Differenzkern von } \alpha' \text{ und } \alpha''$$

setzen, wobei α' und α'' die Morphismen von Bemerkung 2.3. (ii) seien.
QED.

Beispiel 1
Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Dann bilden die offenen Hauptmengen

$$D(f) := \{x \in \text{Spec } A \mid f(x) \neq 0\} = \{x \in \text{Spec } A \mid f \notin x\}$$

eine Topologie-Basis für die Zariski-Topologie von Spec A. Wir setzen

$$F(D(f)) = A_f$$

und für $D(f) \subseteq D(g)$ sei

$$F(D(g)) \longrightarrow F(D(f))$$

die natürliche Abbildung $A_g \longrightarrow A_f$.[19] Die so definierten Abbildung genügen den obigen Bedingungen an F, und liefern eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Garbe F mit

$F(D(f)) = A_f$. Dies ist gerade die oben definierte Strukturgarbe des Spectrums von A,

$$F = \mathcal{O}_X , X = \text{Spec } A.$$

Für eine explite Überprüfung von Bedingung (iv) in einem allgemeineren Fall, siehe das erste Beispiel von 3.2.3.

Beispiel 2
Sei

---

[19] $D(f) \subseteq D(g)$ bedeutet, für jedes Primideal x von A mit $f\notin x$ gilt $g\notin x$. Mit anderen Worten, es besteht die Implikation

$$xA_f \text{ echt} \Rightarrow xA_g \text{ echt.}$$

Weil jedes echte Ideal in einem Primideal liegt, ergibt sich damit für jedes Ideal I von A:

$$IA_f \text{ echt} \Rightarrow IA_g \text{ echt.}$$

Speziell für $I = gA$ sehen wir so, daß gA_f nicht echt ist, also g eine Einheit in A_f. Die natürliche Abbildung $A \longrightarrow A_f$ faktorisiert sich also über A_g und induziert so die Abbildung $A_g \longrightarrow A_f$.

$$R = \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$$

ein graduierter kommutativer Ring mit 1.[20] Wir schreiben

$$R_+ := \oplus_{n=1}^{\infty} R_n$$

für das irrelevante Ideal von R und setzen

$$X := \mathrm{Proj}\, R := \{p \subseteq R \mid p \text{ homogenes Primideal mit } R_+ \not\subseteq p\}.$$

Für jede Menge $M \subseteq R$ von homogenen Elementen von R setzen wir

$$V(M) := \{p \in \mathrm{Proj}\, R \mid M \subseteq p\}.$$

Die Mengen der Gestalt V(M) bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie von Proj R, welche Zariski-Topologie von Proj R heißt. Für jedes homogene Element F von R ist die Menge

$$D_+(F) := \mathrm{Proj}\, R - V(\{F\}) = \{ p \in \mathrm{Proj}\, R \mid F \notin p\}$$

offen in der Zariski-Topologie und heißt offene Hauptmenge zu F. Die offenen Hauptmengen bilden eine Topologie-Basis für die Zariski-Topologie. Man kann sich dabei sogar auf offene Hauptmengen zu homogenen Elementen positiven Grades beschränken.[21]

---

[20] Mit anderen Worten, die additive Gruppe des Rings R zerfalle in der angegebenen Weise in eine dirrekte Summe von Untergruppen R_n, wobei

$$R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$$

gelte für beliebige nicht-negative ganze Zahlen i und j.
Sei zum Beispiel R der Polynomring $R := k[X_0,...,X_N]$ über dem Körper k und

$$R_n := \sum_{i_0+...+i_N=n} X_0^{i_0} \cdot ... \cdot X_N^{i_N}$$

bestehe aus den homogenen Polynomen des Grades n.

[21] Für $f \in R_0$ gilt

$$V(fF \mid F \in R_+ \text{ homogen}) = \{P \in \mathrm{Proj}\, R \mid fF \in P \text{ für alle } F \in R_+ \text{ homogen}\}$$

Weil es für jedes $P \in \mathrm{Proj}\, R$ ein homogenes $F \in R_+$ gibt, welches nicht in P liegt, und weil P ein Primideal ist, folgt

$$V(fF \mid F \in R_+ \text{ homogen}) = \{P \in \mathrm{Proj}\, R \mid f \in P\} = V(f),$$

also

$$V(f) = \bigcap_{F \in R_+ \text{ homogen}} D(fF).$$

Wir gehen zu den Komplementen in Proj R über und erhalten

$$D_+(f) = \bigcup_{F \in R_+ \text{ homogen}} D_+(fF).$$

Man kann also die $D_+(f)$ mit $f \in R_0$ weglassen, ohne daß die Eigenschaft, Topologiebasis zu sein, verloren geht.

Wir setzen[22]

$$\mathcal{O}_X(D_+(F)) := R_{(F)} := \{\frac{U}{F^n} \in R_F \mid U \in R \text{ homogen vom Grad } n\bullet\deg F\} \qquad (1)$$

für jedes homogene $F \in R_+$

Für je zwei homogene Elemente F und G von R mit $D_+(F) \subseteq D_+(G)$ führen wir die Abbildung

$$\mathcal{O}_X(D_+(G)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_+(F)) \qquad (2)$$

ein, die gerade die natürliche Abbildung

$$R_{(G)} \longrightarrow R_{(F)}$$

sei (d.h. die natürliche Abbildung $R_G \longrightarrow R_F$ eingeschränkt auf die Elemente Null-ten Grades). Die Ringe (1) genügen zusammen mit den Homomorphismen (2) den Bedingungen der obigen Aussage und definieren so eine Garbe $\mathcal{O}_X$ von Ringen mit 1, deren Halme gerade die Ringe

$$\mathcal{O}_{X,p} = R_{(P)} := \{\frac{U}{V} \in R_p \mid U, V \text{ homogen vom gleiche Grad}, V \notin p\}$$

und welche Strukturgarbe von X := Proj R heißt. Der Raum X zusammen mit dieser Garbe heißt projektives Spektrum von R.

2.5 Die Garbe zu einer Prägarbe

Seien X ein topologischer Raum und F eine Prägarbe. Dann kann man in derselben Weise wie für Garben, den Etal-Raum

$$\pi: Y \longrightarrow X$$

von F konstruieren. Die Garbe der Schnitte von π wird mit

$$\widetilde{F}$$

bezeichnet und heißt die zu F gehörige (oder assoziierte) Garbe. Nach Konstruktion definiert jeder Schnitt $s \in F(U)$ von F einen Schnitt $\widetilde{s} \in \widetilde{F}(U)$. Wir erhalten so Morphismen

$$F(U) \longrightarrow \widetilde{F}(U)$$

für beliebige offene Mengen U von X. Diese setzen sich zu einem Prägarben-Morphismus

$$\varphi: F \longrightarrow \widetilde{F} \qquad (1)$$

fort. Dieser ist in dem Sinne universell, daß sich jeder Prägarben-Morphismus

$$F \longrightarrow G$$

mit Werten in einer Garbe G auf genau eine Weise über (1) faktorisiert. Man erhält so eine bijektive Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{Sh_X(\mathcal{C})}(\widetilde{F}, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{Prägarben}_X(\mathcal{C})}(F, G),\ \xi \mapsto \xi\circ\varphi,$$

---

[22] Dies ist gerade die Menge der homogenen Elemente des Grades 0 von R_F bezüglich der natürlichen $\mathbb{Z}$-Graduierung von R_F.

für jede Garbe $G \in Sh_X(\mathcal{C})$. Diese Abbildungen setzen sich fort zu einem Isomorphimus von Hom-Funkotren. Die Zuordnung

$$F \mapsto \tilde{F}$$

wird damit zu einem Funktor

$$\text{Prägarben}_X(\mathcal{C}) \longrightarrow Sh_X(\mathcal{C}),$$

der linksadjungiert ist zur natürlichen Einbettung

$$Sh_X(\mathcal{C}) \hookrightarrow \text{Prägarben}_X(\mathcal{C}).$$

Bemerkungen

(i) Der Übergang zur assoziierten Garbe kommutiert mit direkten Limites.[23]

(ii) Der natürliche Morphismus $F \longrightarrow \tilde{F}$ induziert für jeden Punkt x des topologischen Raums einen Isomorphismus $F_x \longrightarrow \tilde{F}_x$.[24]

(iii) Für jede Garbe F ist der natürliche Morphismus $F \longrightarrow \tilde{F}$ ein Isomorphismus.

---

[23] Weil der kontravariante Hom-Funkor direkte Limites in inverse überführt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{Sh}((\varinjlim_i F_i)^{\sim}, G) &= \mathrm{Hom}_{Presh}(\varinjlim_i F_i, G)\\ &= \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{Presh}(F_i, G)\\ &= \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{Sh}(\tilde{F}_i, G)\\ &= \mathrm{Hom}_{Sh}(\varinjlim_i \tilde{F}_i, G)\end{aligned}$$

[24] Bezeichne $\pi: E \longrightarrow X$ den Etalraum von F. Sind s_x und t_x zwei Keime von F_x, deren Bilder in $\tilde{F}_x$ gleich sind. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x, so daß die Keime von Schnitten $s,t \in F(U)$ kommen und die zugehörigen Abbildungen

$$U \longrightarrow E,\ u \mapsto s_u \text{ und } u \mapsto t_u,$$

gleich sind. Insbesondere sind dann s_x und t_x gleich. Die Abbildung $F_x \longrightarrow \tilde{F}_x$ ist somit injektiv.

Sei jetzt $\alpha \in \tilde{F}_x$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x und einen Schnitt $a: U \longrightarrow E$ des Etaltraums welcher den Keim α repräsentiert. Sei

$$s_x = a(x) \in F_x \subseteq E.$$

Wir können U so klein wählen, daß der Keim s_x von einem Schnitt $s \in F(U)$ kommt. Dann sind die Abbildungen

$$a: U \longrightarrow E \text{ und } \tilde{s}: U \longrightarrow E$$

Schnitte von $\pi: E \longrightarrow X$, die im Punkt x denselben Wert s_x haben. Nun $\pi: E \longrightarrow X$ ein lokaler Homöomorphismus. Diese Schnitte stimmen also lokal in einer Umgebung von x mit der Umkehrung von π überein, sind dort also gleich. Die Keime von a und $\tilde{s}$ in x sind deshalb gleich, d.h. $\alpha = a_x$ ist das Bild von s_x bei der Abbildung $F_x \longrightarrow \tilde{F}_x$.

2.6 Direkte Bilder von Garben

Seien f: X $\longrightarrow$ Y eine stetige Abbildung und F eine Garbe auf X. Für jede offene Menge V $\subseteq$ Y setzen wir

$$(f_*F)(V) := F(f^{-1}(V)).$$

Für je zwei offenen Mengen V', V" von Y mit V' $\subseteq$ V", sei

$$\rho^{V'}_{V''}: f_*F(V'') \longrightarrow f_*F(V')$$

gerade der Restriktionsmoprhismus

$$F(f^{-1}(V'')) \longrightarrow F(f^{-1}(V')).$$

Auf diese Weise ist eine Garbe f_*F auf Y definiert, die <u>direktes Bild</u> von F entlang f heißt. Für jede stetige Abbildung f definiert f_* einen Funktor

$$f_*. \mathrm{Sh}_X(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Sh}_Y(\mathcal{C}),$$

welcher <u>direktes Bild</u> entlang f heißt. Außerdem ist der Übergang zum direkten Bild funktoriell:

(i) $g_*f_* = (gf)_*$ für je zwei stetige Abbildungen f:X$\longrightarrow$Y und g:Y$\longrightarrow$Z.

(ii) $id_* = id$.

Bemerkung
Der Funktor ist leicht zu definieren und schwer zu berechnen. Wir werden später einen Funktor f* kennenlernen, von dem man das Gegenteil sagen könnte: er ist schwer zu definieren und leicht zu berechnen. Dabei hängen die beiden Funktoren eng miteinander zusammen. Ein erster Schritt hin zu diesem Funktor stellt der nächste Abschnitt dar.

2.7 Topologische inverse Bilder von Garben

Seien f: X $\longrightarrow$ Y eine stetige Abbildung und G eine Garabe auf Y. Für jede offene Mengen U $\subseteq$ X betrachten wir das projektive System der offenen Mengen von Y, welche die Menge f(U) enthalten, und setzen[25]

$$\tilde{f}G(U) := \varinjlim_{f(U)\subseteq V} G(V).$$

Für je zwei offene Mengen U', U" von X mit U' $\subseteq$ U" definiert die Universalitätseigenschaft des direkten Limes einen Morphismus

$$\rho^{V'}_{V''}: \tilde{f}G(U'') \longrightarrow \tilde{f}G(U').$$

Auf diese Weise ist eine Prägarbe auf X definiert. Die zugehörige Garbe wird mit $f^{-1}G$ bezeichnet und heißt <u>topologisches inverses Bild</u> von F entlang f. Für jede stetige Abbildung f definiert f^{-1} einen Funktor

$$f^{-1}:\mathrm{Sh}_Y(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Sh}_X(\mathcal{C}),$$

welcher <u>topologisches inverses Bild</u> heißt.
Beispiel 1

---

[25] Wie im Fall des Halms einer Garbe in einem Punkt kann man die Schnitte von $\tilde{f}G(U)$ beschreiben als Äquivalenzklassen von Schnitten von G, die auf einer Umgebung von f(U) definiert sind, wobei zwei solche Schnitt als äquivalent anzusehen sind, wenn deren Einschränkungen auf eine Umgebung von f(U) gleich sind.

Seien X ein topologischer Raum, F eine Garbe auf X, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und

$$i: U \hookrightarrow X$$

die natürlichen Einbettung. Jede offene Teilmenge U' von U ist auch offen in X. Deshalb gilt

$$\tilde{i}F(U') := \varinjlim_{U' \subseteq V} F(V) = F(U').$$

Insbesondere ist $\tilde{i}F$ bereits eine Garbe und

$$i^{-1}F(U') = F(U')$$

für jede offene Teilmenge U' von U. Die Garben $i^{-1}F$ und F stimmen für alle Teilmengen $U' \subseteq U$ überein, d.h. $i^{-1}F$ ist gerade die Einschränkung des Funktors F auf die Teilkategorie U. Man schreibt deshalb auch

$$i^{-1}F = F|_U$$

Beispiel 2

Seien X ein topologischer Raum, F eine Garbe auf X, $x \in X$ und

$$i: \{x\} \hookrightarrow X$$

die natürliche Einbettung. Da der einpunktige topologische Raum nur eine einzige nicht-leere Menge besitzt, kann man jede Garbe mit ihrem Wert auf dieser Menge identifizieren, d.h. man hat eine Isomorphie von Kategorien

$$Sh_{\{x\}}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{S},\ G \mapsto G(\{x\}).$$

Für die einzige nicht-leere offene Menge {x} des Unterraums {x} gilt

$$\tilde{i}F(\{x\}) := \varinjlim_{x' \subseteq V} F(V) = F_x.$$

d.h. das inverse Bild entlang i ist gerade der Übergang zum Halm in s,

$$i^{-1}F = F_x .$$

Bemerkungen

(i) Der Übergang zum topologischen inversen Bild ist (ko-)funktoriell:
  (a) $f^{-1}g^{-1} = (gf)^{-1}$ für je zwei stetige Abbildungen $f:X \longrightarrow Y$ und $g:Y \longrightarrow Z$.
  (b) $id^{-1} = id$.

(ii) Es gibt für jede stetige Abbildung $f:X \longrightarrow Y$, jede Garbe F auf X und jede Garbe G auf Y eine Bijektion[26]

---

[26] Für jeden funktoriellen Morphismus $\xi: G \longrightarrow f_*F$, jede offene Menge $U \subseteq X$ und jede offene Menge $V \subseteq Y$ mit $f(U) \subseteq V$ hat man einen Morphismus

$$G(V) \xrightarrow{\xi} F(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\rho} F(U).$$

Die Universalitätseigenschaft des direkten Limes führt zu einem Morphismus

$$\tilde{f}G(U) := \varinjlim_{f(U) \subseteq V} G(V) \longrightarrow F(U)$$

$$\mathrm{Hom}_{Sh_X(\mathcal{C})}(f^{-1}G, F) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{Sh_Y(\mathcal{C})}(G, f_*F),$$

welche sich funktoriell bezüglich F und G verhält. Mit anderen Worten, f^{-1} ist linksadjungiert zu f_* und f_* ist rechtsadjungiert zu f^{-1}. Insbesondere sind die beiden Funktoren durcheinander bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

(iii) Wir schreiben hier f^{-1} und nicht f*, weil wir die Bezeichung f* für die später zu definierenden inversen Bilder in der Kategorie der algebraischen Schemata reservieren wollen.

2.8 Exaktheit

Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ist $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie, so gilt dasselbe auch für die Kategorien

$$Sh_X(\mathcal{C}) \text{ und } Presh_X(\mathcal{C})$$

der Garben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ und analog für die Kategorie der Prägarben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$.

2.8.1 Kerne und Kokerne von Prägarben

Sei

$$F \xrightarrow{\varphi} G$$

ein Morphismus von Prägarben auf dem topologischen Raum X mit Werten in der abelschen Kategorie $\mathcal{C}$. Dann hat man für jede offene Menge U von X das Teilobjekt

$$K(U) := \mathrm{Ker}(F(U) \xrightarrow{\varphi_U} G(U))$$

Diese Teilobjekte setzen sich zusammen zu einer Teilgarbe K von F, welche die Universalitätseigenschaft eines Kerns von $F \longrightarrow G$ besitzt.
Analog hat man für jedes U ein Faktorobjekt

$$C(U) := \mathrm{Koker}(F(U) \xrightarrow{\varphi_U} G(U)).$$

Diese Faktorobjekte setzen sich zusammen zu einer Faktorgarbe C von G, welche die Universalitätseigenschaft eines Kokerns von $F \longrightarrow G$.

Diese Aussagen gelten auch analog für Bilder und Kobilder von Prägarben Morphismen. Insbesondere ist die Prägarbe

$$U \mapsto \mathrm{Im}(\varphi_U)$$

gerade das Bild von φ,

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Koker}(\varphi)) = \mathrm{Im}(\varphi).$$

Eine Sequenz von Prägarben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$, sagen wir

$$\ldots \longrightarrow F_{i+1} \longrightarrow F_i \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow \ldots$$

ist genau dann exakt, wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$ die zugehörige Sequenz der Schnitte

---

für jedes offene $U \subseteq X$ und damit zu einem Prägarben-Morphismus $\tilde{f}G \longrightarrow F$. Weil F eine Garbe ist, induziert letzterer einen Garben-Morpshismus $f^{-1}G \longrightarrow F$.

$$\ldots \longrightarrow F_{i+1}(U) \longrightarrow F_i(U) \longrightarrow F_{i-1}(U) \longrightarrow \ldots$$

exakt ist.

Bemerkungen

(i) Ist $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie und x ein Punkt des topologischen Raumes, so ist der Übergang zu den Halmen ein exakter Funktor.[27]

(ii) Ist $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie, so ist der Übergang zur assoziierten Garbe ein exakter Funktor.[28]

---

[27] Seien

$$F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F''$$

eine exakte Sequenz von Prägarben auf X und $x \in X$. Weil der Übergang zum Halm in x ein additiver Funktor ist, gilt mit $\beta\circ\alpha = 0$ auch $\beta_x \circ \alpha_x = 0$, also

$$\mathrm{Im}\ \alpha_x \subseteq \mathrm{Ker}\ \beta_x.$$

Sei jetzt s_x im Kern von β_x. Wir wählen eine offene Umgebung U von x derart, daß s_x von einem Schnitt $s \in F(U)$ kommt. Dann ist der Keim von $\beta(s)$ in x gleich Null. Wir können deshalb U so klein wählen, daß gilt

$$\beta(s) = 0.$$

Dann gibt es aber einen Schnitt $t \in F'(U)$ mit $\alpha(t) = s$. Es folgt

$$\alpha_x(t_x) = \alpha(t)_x = s_x.$$

Wir haben gezeigt, es gilt sogar

$$\mathrm{Im}\ \alpha_x = \mathrm{Ker}\ \beta_x.$$

[28] Alle Hom-Funktoren mit Werten in einer abelschen Kategorien sind linksexakt, insbesondere ist also

$$F \mapsto \mathrm{Hom}_{Presh}(F, G) = \mathrm{Hom}_{Sh}(\widetilde{F}, G)$$

linksexakt. Für jede exakte Sequenz von Prägarben

$$0 \longrightarrow F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'' \longrightarrow 0$$

und jede Garbe G erhält man also eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\widetilde{F}'', G) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}(\widetilde{F}, G) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(\widetilde{F}', G) \qquad (1)$$

Betrachten wir die zugehörige Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{F}' \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} \widetilde{F} \xrightarrow{\widetilde{\beta}} \widetilde{F}'' \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

Weil (1) exakt ist in der Mitte, hat jeder auf $\widetilde{F}$ definierte Morphismus, dessen Zusammensetzung mit $\widetilde{\alpha}$ gleich 0 ist, die Eigenschaft, daß er sich über $\widetilde{\beta}$ faktorisiert. Weil (1) an der linken Stelle exakt ist, ist die Faktorisierung eindeutig. Mit anderen Worten, $\widetilde{\beta}$ ist der Kokern von $\widetilde{\alpha}$, d.h. die Sequenz (2) ist in der Mitte exakt. Die Exaktheit von (1) an der linken Stelle übersetzt sich gerade in die Aussage, daß $\widetilde{\beta}$ ein Epimorphismus ist, d.h. (2) ist an der rechten Stelle exakt.
Die Exaktheit von (2) an der linken Stelle ergibt sich aus der Tatsache, daß der Übergang zu den Halmen ein exakter Funktor ist zusammen mit den Garben-Axiomen.

2.8.2 Kerne und Kokerne von Garben

Sei

$$F \longrightarrow G$$

ein Morphismus von Garben auf dem topologischen Raum X mit Werten in der abelschen Kategorie $\mathcal{C}$. Dann kann man diesen als Morphismus in der Kategorie der Prägarben auffassen und dort den Kern bilden. Die so definierte Prägarbe ist automatisch eine Garbe und hat die Universalitätseigenschaft eines Kerns auch in der Kategorie der Garben.

Der Kokern dieses Morphismus in der Prägarben-Kategorie ist im allgemeinen keine Garbe. Man kann jedoch zur assoziierten Garbe übergehen. Die so gewonnene Garbe hat dann die Universalitätseigenschaft eine Kokerns.

In analoger Weise erhält man das Bild eines Garben-Morphismus, indem man zunächst das Bild in der Prägarben-Kategorie bildet und dann zur assoziierten Garbe übergeht.[29]

Bemerkungen

(i) Die Garben-Kategorie $Sh_X(\mathcal{C})$ besitzt Kerne, Kokerne und Bilder, und der Begriff der Exaktheit von Garben-Sequenzen ist wohldefiniert.

(ii) Sind

$$F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F''$$

zwei Morphismen von Garben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$, deren Zusammensetzung gleich Null ist, so gilt

$$\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Im}(\beta). \qquad (1)$$

Für jeden Punkt $x \in X$ erhalten wir somit einen injektiven Morphismus

$$\mathrm{Im}(\alpha)_x \hookrightarrow \mathrm{Im}(\beta)_x \qquad (2)$$

von $\mathcal{C}$. Dies ist trivialerweise ein Isomorphismus, falls in (1) das Gleichheitszeichen gilt. Auf Grund der Garben-Axiome gilt aber auch die Umkehrung: sind die Morphismen (2) für jeden Punkt x von X Isomorphismen, so gilt in (1) das Gleichheitszeichen.[30]

---

[29] Sei f: $F \longrightarrow G$ ein Garben-Morphismus. Wir bezeichnen hier mit Ker, Koker und Im die Konstruktionen in der Prägarben-Kategorie und kennzeichnen die entsprechenden Konstruktionen in der Garben-Kategorie durch ein $\sim$. Aus Bemerkung 2.7.1(ii) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f)^{\sim} &= (\mathrm{Ker}(\mathrm{Koker}(f))^{\sim} && \text{(nach Definition des Bildes)}\\
&= \mathrm{Ker}(\,\mathrm{Koker}(f)^{\sim}\,) && \text{(weil exakte Funktoren mit Kernen kommutieren)}\\
&= \mathrm{Ker}(\,\mathrm{Koker}^{\sim}(f)) && \text{(nach Definition des Kokerns von Garben)}\\
&= \mathrm{Ker}^{\sim}(\mathrm{Koker}^{\sim}(f)) && \text{(Weil Prägarbenkern auch Garbenkerne sind)}
\end{aligned}$$

Mit andern Worten, $\mathrm{Im}(f)^{\sim}$ ist tatsächlich das Bild von f in der Garben-Kategorie.

[30] Seien F eine Garbe auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ und

$$G \subseteq F$$

eine Teilgabe mit $G_x = F_x$ für jeden Punkt x. Wir haben zu zeigen, dann gilt G = F.

Sei $s \in F(U)$ ein Schnitt von F über der offenen Menge U. Für jedes $x \in U$ ist dann $s_x \in F_x$ Keim eines Schnitts von G, d.h. es gibt eine offene Menge U_x mit $x \in U_x \subseteq U$ und einen Schnitt

$$t(x) \in G(U_x) \text{ mit } t(x)_x = s_x.$$

(iii) Seien

$$F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'' \qquad (3)$$

zwei Morphismen von Garben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$. Diese bilden genau dann eine exakte Sequenz, wenn für jeden Punkt x von X die zugehörige Sequenz der Halme

$$F'_x \xrightarrow{\alpha_x} F_x \xrightarrow{\beta_x} F''_x \qquad (4)$$

exakt ist.[31]

2.8.3 Beispiel

Wir geben hier ein Beispiel an, welches zeigen soll, daß sich die Konstruktion des Kokerns in der Garben-Kategorie von der in der Prägarben-Kategorie unterscheidet. Da das Bild eines Morphismus definiert ist als der Kern des Kokerns, reicht es einen Garben-Morphismus anzugeben, dessen Bild in der Kategorie der Garben verschieden ist von dessen Bild in der Kategorie der Prägarben.
Es reicht also, einen Morphismus von Garben anzugeben, der in der Kategorie der Garben surjektiv ist, diese Eigenschaft also Prägarben-Morphismus jedoch nicht besitzt.

Seien X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe. Bezeichne

$$G_X$$

die Garbe der lokal konstanten Abbildungen auf X mit Werten in G, d.h. für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist

$$G_X(U)$$

Nach Definition des Keim-Begriffs sind dann die Einschränkungen von t(x) und s auf eine geeignete Umgebung von x gleich (als Schnitte von F). Wir können deshalb U_x so wählen, daß gilt

$$t(x) = s|_{U_x}$$

Dann genügt aber die Familie der Paare $(U_x, t(x))$ den Bedingungen des zweiten Garben-Axioms, d.h. es gibt einen Schnitt $t \in G(U)$ mit $t|_{U_x} = t(x) = s|_{U_x}$ für alle x. Auf Grund des ersten Garben-Axioms erhalten wir

$$s = t \in G(U).$$

[31] Nach Bemerkung 2.7.1(i) folgt aus der Exaktheit von (3) die der Sequenzen (4). Seien umgekehrt die Sequenzen (4) exakt. Dann gilt für jedes $x \in X$

$$(\beta\circ\alpha)_x = \beta_x\circ\alpha_x = 0.$$

Für jeden Punkt x gibt es somit eine Umgebung, auf welcher $\beta\circ\alpha$ identisch Null ist. Auf Grund des ersten Garben-Axioms ist dann aber $\beta\circ\alpha = 0$, d.h. es gilt

$$\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta).$$

Zum Beweis des Gleichheitszeichens reicht es zu zeigen,

$$\mathrm{Im}(\alpha)_x = \mathrm{Ker}(\beta)_x \text{ für jedes } x \in X.$$

Weil der Übergang zum Halm in x ein exakter Funktor ist, kommutiert dieser Funktor mit dem Übergang zum Kern, mit dem Übergang zum Korkern und mit dem Übergang zum Bild. Es reicht also zu zeigen,

$$\mathrm{Im}(\alpha_x) = \mathrm{Ker}(\beta_x) \text{ für jedes } x \in X.$$

Das ist aber der Fall, weil die Sequenzen (4) exakt sein sollen.

die abelsche Gruppe der lokal konstanten Abbildungen $s:U \longrightarrow G$. Mit anderen Worten, für jeden Punkt von U gebe es eine Umgebung, auf welcher s konstant ist. Versieht man G mit der diskreten Topologie, so ist dies gerade die Garbe der stetigen Abbildungen auf X mit Werten in G. Sei jetzt Y ein Unterraum und

$$i: Y \hookrightarrow X$$

die natürliche Einbettung. Durch Einschränken von Abbildungen auf Y ist ein Garben-Morphismus

$$\varphi: G_X \longrightarrow i_* G_Y$$

definiert. Genauer: für jede offene Menge U von X erhält man eine Abbildung

$$G_X(U) \longrightarrow (i_* G_Y)(U) = G_Y(U \cap Y),\ s \mapsto s|_{U \cap Y},$$

und diese Abbildungen setzen sich zu einem Garben-Morphismus zusammen.

Betrachten wir jetzt den Spezialfall

$$X = \mathbb{R},\ Y = \{0, 1\},$$

Dann ist der Garben-Morphismus φ surjektiv: Die Halme von $i_* G_Y$ in den Punkten $x \in \mathbb{R}$ sind Null für $x \notin \{0, 1\}$ und werden für $x \in \{0, 1\}$ durch Funktion gegeben, die in einer Umgebung von x konstant ist und dort genau einen Wert aus G annimmt. Diese Funktion repräsentiert aber auch ein Element von $G_{X,x}$, und dieses ist ein Urbild des gegebenen Elements von $(i_* G_Y)_x$.

Damit ist gezeigt, φ ist als Garben-Morphismus surjektv.

Als Prägarben-Morphismus kann φ jedoch nicht surjektiv sein, dann dann wäre

$$G_X(X) \longrightarrow (i_* G_Y)(X) = G_Y(Y)$$

surjektiv. Dem ist aber nicht so: weil $X = \mathbb{R}$ zusammenhängend ist, sind alle Elemente von $G_X(X)$ konstante Funktionen. In $G_Y(Y)$ liegt jedoch zum Beispiel die Funktion, welche in 0 den Wert 0 und in 1 den Wert 1 hat (also nicht konstant ist).

3. Algebraische Schemata

3.1 Definition

Ein <u>geometrischer Raum</u>[32] $(X, \mathcal{O}_X)$ besteht aus einem topologischen Raum X und einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von kommutativen Ringen mit 1 auf X, deren Halme

$$\mathcal{O}_{X,x}$$

$(x \in X)$ lokale Ringe sind. Das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ wird mit

$$m_{X,x}$$

bezeichnet.

Bemerkung

Die Schnitte von $\mathcal{O}_X$ einer offenen Menge $U \subseteq X$ sind in den meisten Fällen gewisse auf U definierte Funktionen, die die Struktur des topologischen Raums X bestimmen. Die Elemente von $m_{X,x}$ sind dabei meist Keime von Funktionen, die in x den Wert 0 annehmen.

---

[32] Englisch: locally ringed space.

Beispiel 1
Seien X ein topologischer Raum und

$$\mathcal{O}_X = C_X$$

die Garbe der stetigen Funktionen mit Werten in den reellen Zahlen. Ist $x \in X$ ein Punkt und

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die auf einer offenen Umgebung $U \subseteq X$ von x definiert ist und in x einen von Null verschiedenen Wert annimmt,

$$f(x) \neq 0,$$

so ist die Funktion $y \mapsto 1/f(y)$ auf einer Umgebung von x definiert und dort stetig. Mit anderen Worten, der Keim von f in x ist eine Einheit von $\mathcal{O}_{X,x}$. Die Keime der Funktionen, die in x eine Nullstelle haben, bilden ein Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$, und zwar das einzige maximale Ideal. Insbesondere ist $\mathcal{O}_{X,x}$ für jedes x ein lokaler Ring.
Damit sist (X $\mathcal{O}_X$) ein geometrischer Raum.

Beispiel 2
Seien X eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{O}_X = C^r_X$ die Garbe der r-mal stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen (mit $r = 0, 1, \dots , \infty, \omega$). Dieselben Argumente wie im vorangehenden Beispiel zeigen, daß dann (X, $\mathcal{O}_X$) ein geometrischer Raum ist.

Im Fall $r = \omega$ ist $\mathcal{O}_{X,x}$ gerade der Ring der Potenzreihen mit reellen Koeffizienten, die in einer Umgebung von x konvergieren.

Beispiel 3
Seien X eine offene Menge des $\mathbb{C}^n$ und $\mathcal{O}_X$ die Garbe der holomorphen Funktionen. Dann ist (X, $\mathcal{O}_X$) ein geometrischer Raum, dessen lokale Ringe gerade Ringe von konvergenten Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten sind.

Beispiel 4
Seien A ein kommutativer Ring mit 1, X = Spec A und $\mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe von X. Dann ist (X, $\mathcal{O}_X$) ein geometrischer Raun, dessen lokale Ring gerade die Lokalisierungen von A in den Primidealen von A sind,

$$\mathcal{O}_{X,x} = A_x \text{ für } x \in X = \operatorname{Spec} A.$$

3.2 Morphismen geometrischer Räume, Schemata

3.2.1 Definitionen und Beispiele

Seien (X, $\mathcal{O}_X$) und (Y, $\mathcal{O}_Y$) geometrische Räume. Ein Morphismus

$$(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

geometrischer Räume besteht aus einer stetigen Abbildung

$$f: X \longrightarrow Y$$

und einem Morphismus

$$f^{\#}: \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$$

von Garben von Ringen mit 1, wobei die folgende zusätzliche Bedingung erfüllt sei.

Für jeden Punkt $x \in X$ und jede offene Umgebung V des Punktes $y = f(x)$ betrachten wir den Morphismus

$$\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X(Y) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}\,.$$

Aus der Universalitätseigenschaft des direkten Limes $\mathcal{O}_{X,x}$ erhalten wir einen Homomorphismus von Ringen mit 1,

$$f_x: \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}\,,\ y = f(x). \tag{1}$$

Als zusätzliche Bedingung wird gefordert, daß dieser Homomorphismus lokal sein sein soll für jeden Punkt $x \in X$, d.h. er soll die maximalen Ideale dieser lokalen Ringe ineinander abbilden:

$$f_x(m_{Y,y}) \subseteq m_{X,x} \text{ für jedes } x \in X.$$

Bemerkungen

(i) In vielen Fällen ist der Morphismus $f^{\#}$ gerade die Verpflanzung entlang f, d.h. für jede offene Menge $V \subseteq Y$ überführt die Abbildung

$$f^{\#}: \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)),\ s \mapsto s \circ f,$$

die auf V definierte Funktion s in die Zusammensetzung $s \circ f$ (welches eine auf f^{-1} (V) definierte Funktion ist). Hat dabei s im Punkt $y = f(x)$ eine Nullstelle, so hat die Zusammensetzung $s \circ f$ in x eine Nullstellen. Die Verpflanzung entlang f bildet also die Keime aus $m_{Y,y}$ in solche von $m_{X,x}$ ab.

(ii) Wir werden später sehen, daß in einem gewissen Sinne durch den Garbenmorphismus $f^{\#}$ auf Grund der Lokalität der Homomorphismen (1) auch umgekehrt die stetige Abbildund f festgelegt ist.

(iii) Die geometrischen Räume bilden zusammen mit den gerade definierten Morphismen eine Kategorie.

(iv) Die wichtigsten Klassen von geometrischen Räumen sind dadurch definiert, daß deren Struktur lokal festgelegt wird.

Beispiel 1

Eine <u>topologische n-Mannigfaltigkeit</u> ist ein geometrischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ mit der Eigschaft, daß X ein Hausdorff-Raum ist und es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x gibt derart, daß der geometrische Raum $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ isomorph ist zum $\mathbb{R}^n$ mit der Garbe der stetigen Funktionen,

$$(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong (\mathbb{R}^n, C_{\mathbb{R}^n}).$$

Beispiel 2

Für $r = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \omega$ ist eine n-<u>Mannigfaltigkeit der Classe C^r</u> oder auch r-mal <u>stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit</u> ein geometrischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ mit der Eigenschaft, daß X ein Hausdorff-Raum ist und es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x gibt derart, daß der geometrische Raum $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ isomorph ist zu einer offenen Mengen V des $\mathbb{R}^n$ mit der Garbe der stetig r-mal differenzierbaren Funktionen,

$$(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong (V, C^r_V).$$

Im Fall $r = \infty$ heißt $(X, \mathcal{O}_X)$ auch glatte Mannigfaltigkeit und im Fall $r = \omega$ auch analytische Mannigfaltigkeit.

Beispiel 3
Eine komplexe n-Mannigfaltigkeit ist ein geometrischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ mit der Eigschaft, daß es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x gibt derart, daß der geometrische Raum $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ isomorph ist zu einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{C}^n$ mit der Garbe der holomorphen Funktionen,

$$(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong (V, \mathcal{O}_V).$$

Beispiel 4
Ein algebrarisches Schema ist ein geometrischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ mit der Eigschaft, daß es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x gibt und einen kommutativen Ring A mit 1 derart, daß der geometrische Raum $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ isomorph ist zum affinen Spektrum von A mit der Garbe der regulären Funktionen, d.h. der Strukturgarbe,

$$(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong (\mathrm{Spec}\ A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}).$$

3.2.2 Modul-Garben

Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{A}$ eine Garbe von kommutativen Ringen mit 1 auf X. Eine Garbe von $\mathcal{A}$-Moduln oder auch einfach ein $\mathcal{A}$-Modul ist eine Garbe $\mathcal{M}$ von abelschen Gruppen auf X mit folgenden Eigenschaften.

1. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist $\mathcal{M}(U)$ ein $\mathcal{A}(U)$-Modul.
2. Für je zwei offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ mit $V \subseteq U$ ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(U)\times\mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \mathcal{M}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}(V)\times\mathcal{M}(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}(V) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (a,m) & \mapsto & am, \quad m'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ (a|_V, m|_V) & & m''|_V \\ (a',m') & \mapsto & a'm' \end{array}$$

Dabei sollen die horizontalen Pfeile die Modul-Muliplikation bezeichnen, und die vertikalen Pfeile durch die Garben-Restriktionen definiert sein.

Seien $\mathcal{M}'$ und $\mathcal{M}''$ zwei $\mathcal{A}$-Moduln und

$$f: \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}''$$

ein Morphismus von Garben abelscher Gruppen. Dieser Morphismus heißt Morphismus von Modul-Garben über $\mathcal{A}$ oder auch einfach $\mathcal{A}$-lineare Abbildung,

Bemerkungen

(i) Die Modul-Garben über der Ringgarbe $\mathcal{A}$ bilden zusammen mit den $\mathcal{A}$-linearen Abbildungen eine abelsche Kategorie

$$\mathcal{A}\text{-Mod}.$$

Die Kerne und Kokerne von $\mathcal{A}$-linearen Abbildungen werden in derselben Weise gebildet wie in der Kategorie $Sh_X(Ab)$ der abelschen Garben auf X.[33] Die Hom-Mengen dieser Kategorie bezeichnet man oft auch in der folgenden Weise.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}',\mathcal{M}'') := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\text{-}Mod}(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')$$

(ii) Hom-Garben. Für je zwei $\mathcal{A}$-Moduln $\mathcal{M}'$ und $\mathcal{M}''$ definiert der Hom-Funktor eine Prägarbe

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}|_U}(\mathcal{M}'|_U, \mathcal{M}''|_U).$$

Man beachte, eine $\mathcal{A}|_U$-lineare Abbildung $\varphi: \mathcal{M}'|_U \longrightarrow \mathcal{M}''|_U$ liefert durch Einschränken auf eine offene Teilmenge $V \subseteq U$ eine $\mathcal{A}|_V$-lineare Abbildung. Aus den Garben-Axiomen für $\mathcal{M}'$ und $\mathcal{M}''$ ergibt sich, daß die Prägarbe sogar eine Garbe ist. Sie wird mit

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')$$

bezeichnet. Für jeden Schnitt $a \in \mathcal{A}(U)$ und jede $\mathcal{A}|_U$-lineare Abbildung

$$\varphi: \mathcal{M}'|_U \longrightarrow \mathcal{M}''|_U$$

ist eine $\mathcal{A}|_U$-lineare Abbildung

$$a\bullet\varphi: \mathcal{M}'|_U \longrightarrow \mathcal{M}''|_U$$

definiert, die über den offenen Teilmengen $V \subseteq U$ mit $a|_V$ multipliziert. Auf diese Weise wird die Garbe $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')$ zum $\mathcal{A}$-Modul. Nach Konstruktion gilt

$$\Gamma(X\,,\ \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}',\mathcal{M}'').$$

(iii) Tensorprodukte. Für je zwei $\mathcal{A}$-Moduln $\mathcal{M}'$ und $\mathcal{M}''$ definiert das Tensorprodukt eine Prägare

$$U \mapsto \mathcal{M}'(U)\otimes_{\mathcal{A}(U)}\mathcal{M}''(U).$$

Die assoziierte Garbe wird mit

$$\mathcal{M}'\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}''$$

und heißt Tensorprodukt von $\mathcal{M}'$ und $\mathcal{M}''$ über $\mathcal{A}$. Sie hat wieder die Struktur eines $\mathcal{A}$-Moduls und besitzt die Universalitätseigenschaften eines Tensorprodukts[34]:

---

[33] Die Kerne und Kokern von $\mathcal{A}$-linearen Abbildungen in der Kategorie der abelschen Garben haben automatisch die Struktur von $\mathcal{A}$-Moduln.

[34] Auf Grund der Universalitätseigenschaft des gewöhnlichen Tensorprodukts bestehen natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathcal{M}'(U)\otimes_{\mathcal{A}(U)}\mathcal{M}''(U), \mathcal{M}(U)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathcal{M}'(U), \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathcal{M}''(U), \mathcal{M}(U))).$$

für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$. Diese setzen sich zusammen zu natürlichen Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}|_U}(\mathcal{M}'|_U\otimes_{\mathcal{A}|_U}\mathcal{M}''|_U, \mathcal{M}|_U) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}|_U}(\mathcal{M}'|_U, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}|_U}(\mathcal{M}''|_U, \mathcal{M}|_U)).$$

für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$. Die linke Hom-Menge kann man auch in der Gestalt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\text{-Mod}}(\mathcal{M}'\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}'', \mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\text{-Mod}}(\mathcal{M}', \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}'', \mathcal{M})).$$

(iv) Direkte Bilder. Seien $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung, $\mathcal{A}$ eine Garben von kommutativen Ringen mit 1 auf X und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{A}$-Modul. Dann ist das direkte Bild

$$f_*\mathcal{A}$$

eine Garbe von kommutativen Ringen mit 1 und

$$f_*\mathcal{M}$$

hat die Struktur eines $f_*\mathcal{A}$-Moduls.

(v) Inverse Bilder. Seien $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung, $\mathcal{B}$ eine Garbe von kommutativen Ringen mit 1 auf Y und $\mathcal{N}$ ein $\mathcal{B}$-Modul. Dann ist das inverse Bild

$$f^{-1}\mathcal{B},\ f^{-1}\mathcal{B}(U) := \varinjlim_{f(U)\subseteq V \text{ offen in } Y} \mathcal{B}(V)$$

eine Garbe von kommutativen Ringen mit 1 und

$$f^{-1}\mathcal{N},\ f^{-1}\mathcal{N}(U) := \varinjlim_{f(U)\subseteq V \text{ offen in } Y} \mathcal{N}(V)$$

hat die Struktur eines $f^{-1}\mathcal{B}$-Moduls.

Genauer, werden die Elemente $\alpha, \beta\in f^{-1}\mathcal{B}(U)$ repräsentiert durch Schnitte

$$a \in \mathcal{B}(V),\ b \in \mathcal{B}(W)$$

mit offenen Mengen V, W von Y mit $f(U) \subseteq V$ und $f(U) \subseteq W$, so werden Summe und Produkt von α und β repräsentiert durch die Schnitte

$$a|_{V\cap W} + b|_{V\cap W} \text{ bzw. } a|_{V\cap W} \cdot b|_{V\cap W}$$

von $\mathcal{B}(V\cap W)$. Analog, werden die Elemente $\alpha\in f^{-1}\mathcal{B}(U)$ und $\mu\in f^{-1}\mathcal{N}(U)$ repräsentiert durch Schnitte

$$a \in \mathcal{B}(V),\ n \in \mathcal{N}(W)$$

mit offenen Mengen V, W von Y mit $f(U) \subseteq V$ und $f(U) \subseteq W$, so wird das Produkt $\alpha\cdot\mu$ repräsentiert durch den Schnitt

$$a|_{V\cap W} \cdot m|_{V\cap W}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}|_U}((\mathcal{M}'\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}'')|_U, \mathcal{M}|_U)$$

schreiben und die Hom-Garbe auf der rechten Seite als

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}'', \mathcal{M})|_U$$

Wir erhalten so einen natürlichen Isomorphismus

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}'\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}'', \mathcal{M})(U) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}', \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}'', \mathcal{M}))(U).$$

für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$. Diese Isomorphismen setzen sich zusammen zu einem Isomorphismus

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}'\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}'', \mathcal{M}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}', \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}'', \mathcal{M})).$$

Durch Übergang zu den globalen Schnitten erhält man die Behauptung.

von $\mathcal{N}(V\bigcap W)$.

(vi) Der inverse Bild-Funktor f^*.Es ist naheliegend zu fragen, ob die Funktoren f_* und f^{-1} sind auch in der Kategorie der Moduln adjungiert sind. Genauer, seien

$$f: X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung, $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Garben von kommutativen Ringen mit 1 auf X bzw. Y, $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{A}$-Modul und $\mathcal{N}$ ein $\mathcal{B}$-Modul. Wir fragen dann nach der Existenz von Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\text{-Mod}}(f^{-1}\mathcal{N}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\text{-Mod}}(\mathcal{N}, f_*\mathcal{M}) \quad (?).$$

Zunächst muß man feststellen, daß die beiden Hom-Mengen nicht definiert sind. Der Modul $f^{-1}\mathcal{N}$ ist nur ein $f^{-1}\mathcal{B}$-Modul und im allgemeinen kein $\mathcal{A}$-Modul. Der Modul $f_*\mathcal{M}$ ist nur ein $f_*\mathcal{A}$-Modul im allgemeinen kein $\mathcal{B}$-Modul. Das zweite Problem könnte man mit Hilfe eines Homomorphismus

$$\mathcal{B} \longrightarrow f_*\mathcal{A} \qquad (1)$$

von Ring-Garben mit 1 lösen, durch den $f_*\mathcal{M}$ eine $\mathcal{B}$-Modul-Struktur bekäme. Einen solchen Homomorphismus hätte man zum Beispiel zur Verfügung, wenn

$$f: (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$$

ein Morphismus geometrischer Räume wäre. Bleibt das zweite Problem. Man könnte auf $f^{-1}\mathcal{N}$ erzwingen, indem man den Modul durch das Tensorprodukt

$$f^*\mathcal{N} := f^{-1}\mathcal{N}\otimes_{f^{-1}\mathcal{B}}\mathcal{A}$$

ersetzt. Man beachte, der Morphismus induziert einen Morphismus

$$f^{-1}\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

von Ring-Garben mit 1, so das Tensorprodukt wohldefiniert ist. Auf Grund der Universalitätseigenschaft es Tensorprodukts hat man

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\text{-Mod}}(f^*\mathcal{N}, \mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{f^{-1}(\mathcal{B})}(f^{-1}\mathcal{N}, \mathcal{M}).$$

Betrachten wir das folgende kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{Sh_X(Ab)}(f^{-1}\mathcal{N},\mathcal{N}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{Sh_Y(Ab)}(\mathcal{N},f_*\mathcal{M}) \\
\bigcup & & \bigcup \\
\mathrm{Hom}_{f^{-1}(\mathcal{B})}(f^{-1}\mathcal{N},\mathcal{N}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\text{-Mod}}(\mathcal{N},f_*\mathcal{M})
\end{array}$$

Der obere Isomorphismus kommt dabei von der Tatsache, daß die Funktoren f^{-1} und f_* in der Kategorie der abelschen Garben adjungiert sind. Ein Morphismus

$$\varphi:\ f^{-1}\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$$

der linken oberen Hom-Menge wird dabei wie folgt abgebildet. Sein Bild bei diesem Isomorphismus ist gerade die Zusammensetzung

$$\mathcal{N} \xrightarrow{\xi_\mathcal{N}} f_*f^{-1}\mathcal{N} \xrightarrow{f_*\varphi} f_*\mathcal{M},$$

wobei sich der linke Morphismus $\xi_{\mathcal{N}}$ aus dem identischen Morphismus

$$f^{-1}\mathcal{N} \longrightarrow f^{-1}\mathcal{N}$$

durch Anwenden von f_* ergibt:

$$\mathcal{N}(V) = \varinjlim_{f(f^{-1}(V)) \subseteq W} \mathcal{N}(W) = f^{-1}\mathcal{N}(f^{-1}(V)) \longrightarrow f^{-1}\mathcal{N}(f^{-1}(V)) = f_* f^{-1}\mathcal{N}(V)$$

Da $\mathcal{N}$ ein $\mathcal{B}$-Modul ist, ist $\xi_{\mathcal{N}}$ eine $\mathcal{B}$-lineare Abbildung. Ist φ eine $f^{-1}(\mathcal{B})$-lineare Abbildung, so ist $f_*\varphi$ zumindest $f_*f^{-1}(\mathcal{B})$-linear, also wegen der natürlichen Abbildung[35]

$$\mathcal{B} \longrightarrow f_*f^{-1}(\mathcal{B})$$

auch $\mathcal{B}$-linear. Die untere linke Hom-Menge wird also in die untere rechte Hom-Menge abgebildet.
Betrachten wir anstelle des oberen horizontalen Isomorphismus dessen Inverses. Eine $\mathcal{B}$-lineare Abbildung

$$\psi: \mathcal{N} \longrightarrow f_*M$$

geht dabei über in die Zusammensetzung

$$f^{-1}\mathcal{N} \xrightarrow{f^{-1}\psi} f^{-1}f_*M \xrightarrow{\eta_M} M$$

Die erste Abbildung ist $f^{-1}\mathcal{B}$-linear, die zweite $\mathcal{A}$-linear, wegen (1) also auch linear über $f^{-1}\mathcal{B}$. Die beiden unteren Hom-Mengen werden also auch bei der inversen Abbildung ineinander abgebildet. Der Isomorphismus in der Kategorie der abelschen Garben induziert also einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\text{-Mod}}(f^*\mathcal{N}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\text{-Mod}}(\mathcal{N}, f_*\mathcal{M}).$$

Der Funktor

$$f^*: \mathcal{B}\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{A}\text{-Mod},$$

heißt <u>inverses Bild</u> entlang f (von Modul-Garben). Wir haben gezeigt, dieser Funktor ist linksadjungiert zum direkten Bild-Funktor.

3.2.3 Beispiele für Modul-Garben

Beispiel: Modul-Garben auf affinen Spektren

Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Die Konstruktion der Struktur-Garbe $\mathcal{O}_X$ des affinen Spektrums

$$X := \mathrm{Spec}\, A$$

läßt sich dann dahingehend verallgemeinern, daß man für jeden A-Modul M einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\widetilde{M}$ erhält.

---

[35] die durch die identische Abbildung von $f^{-1}(\mathcal{B})$ induziert wird.

Die Garbe $\mathcal{O}_X$ wurde konstruiert, indem man sie zunächst für jede offene Hauptmenge D(f) von X festlegte,

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f ,$$

und für je zwei offenen Hauptmengen D(f) und D(g) mit $D(g) \subseteq D(f)$ einen natürlichen Homomorphismus

$$A_f \longrightarrow A_g$$

definierte (über die Universalitätseigenschaft der Quotientenringe). Schließlich wurde gezeigt, daß diese Konstrukte die vier Bedingungen von 2.4 erfüllen.

Wir gehen jetzt in derselben Weise vor, wobei wir die obigen Konstrukte noch mit dem Modul M über A tensorieren. Wir erhalten so

$$\widetilde{M}(D(f)) := M_f$$

für jede offene Hauptmenge D(f) von X und einen Homomorphismus

$$M_f \longrightarrow M_g \tag{1}$$

für je zwei offene Hauptmengen D(f) und D(g) mit $D(g) \subseteq D(f)$.
Die ersten drei Bedingungen von 2.4 ergeben sich dann aus den entsprechenden Bedingungen für M = A durch Tensorieren mit M. Es bleibt noch die vierte Bedingung zu überprüfen.

Sei also eine offene Überdeckung

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i$$

einer offenen Hauptmenge U = D(f) durch offene Hauptmenge $U_i = D(f_i)$ gegeben und eine Familie $(s_i)_{i\in I}$ mit

$$s_i \in \widetilde{M}(U_i)$$

und

$$s_i|_V = s_j|_V \tag{2}$$

für je zwei $i,j \in I$ und jede offene Hauptmenge $V = D(g)$ mit $V \subseteq U_i \cap U_j$. Wir haben zu zeigen, es gibt dann genau ein $s \in \widetilde{M}(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$.

Zum Beweis können wir A durch A_f ersetzen, also annehmen, daß f = 1 ist und

$$\bigcup_{i\in I} D(f_i) = \text{Spec } A. \tag{3}$$

gilt. Die Restriktion

$$\widetilde{M}(U) \longrightarrow \widetilde{M}(U_i)$$

ist dann gerade die natürliche Abbildung $M \longrightarrow M_{f_i}$ in den Quotienenmodul. Weil X quasi-kompakt ist, können wir annehem die Überdeckung ist endlich, sagen wir

$$I = \{1,...,r\}.$$

Wir schreiben

$$s_i = m_i/g_i \text{ mit } g_i := f_i^{n(i)},\ m_i \in A \text{ und } n(i) \in \mathbb{N}.$$

Weil I endlich ist, könen wir durch Erweitern erreichen, daß

$$n(i) = n$$
unabhängig von i ist. Nach Voraussetzung (2) sind die Elemente
$$m_i/g_i \text{ und } m_j/g_j$$
im Quotientenmodul $M_{f_if_j} = M_{g_ig_j}$ gleich. Es gibt daher eine Potenz von g_ig_j , welche das Element $m_ig_j - m_jg_i \in M$ annulliert, sagen wir
$$0 = (m_ig_j - m_jg_i)(g_ig_j)^s = (m_ig_i^s)\bullet g_j^{s+1} - (m_jg_j^s)\bullet g_i^{s+1}.$$
Indem wir den Bruch $s_i = m_i/g_i$ für jedes i mit g_i^s erweitern, erreichen wir, daß gilt
$$0 = m_ig_j - m_jg_i \tag{4}$$
für alle i und alle j.

Auf Grund von (3) liegt jedes Primideal $p \in \text{Spec } A$ in einem $D(f_i)$, d.h. $f_i \notin p$, $g_i \notin p$, d.h. kein Primideal enthält alle g_i. Das von den g_i erzeugte Ideal ist gleich A, d.h. es gilt
$$1 = a_1g_1 + ... + a_rg_r \text{ mit } a_j \in A \text{ für alle j.}$$
Wir setzen
$$s := a_1m_1 + ... + a_rm_r$$
Dann gilt
$$\begin{aligned} sg_i &= a_1g_im_1 + ... + a_rg_im_r \\ &= a_1g_1m_i + ... + a_rg_rm_i \qquad \text{(wegen (4))} \\ &= (a_1g_1 + ... + a_rg_r)m_i \\ &= m_i \end{aligned}$$
d.h. in $M_{f_i} = M_{g_i}$ ist
$$s = m_i/g_i = s_i$$
Wir damit ein Element $s \in M = \widetilde{M}(U)$ gefunden mit $s|_{U_i} = s_i$ in $M_{f_i} = \widetilde{M}(U_i)$. Sei t ein weiteres solches Element. Dann liegt s - t im Kern der Abbildung
$$M \longrightarrow M_{f_1} \times ... \times M_{f_r}$$
Es reicht also zu zeigen, der Kern dieser Abbildung ist trivial. Sei $m \in M$ ein Element aus dem Kern. Dann wird m für jedes i von einer Potenz von f_i annulliert, sagen wir
$$f_i^{m(i)} \in \text{Ann } m.$$
Nun enthält kein Primideal p von A alle f_i, also auch nicht alle $f_i^{m(i)}$, d.h. das von den $f_i^{m(i)}$ erzeugte Ideal ist gleich A. Damit gilt aber $A \subseteq \text{Ann } m$, also $1 \in \text{Ann } m$, also
$$0 = 1\bullet m = m.$$
QED.

Beispiel: direkte Bilder von Modulgarben im affinen Fall

Seien h: $A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1 und
$$f: Y := \text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } A =: X$$

der zugehörige Morphismus der affinen Spektren. Dann gilt für jeden B-Modul N,

$$f_*\widetilde{N} = \widetilde{N},$$

wobei sich links der Schlangen-Operator auf die B-Modulstruktur von N und recht auf die A-Modulstruktur von N bezieht.
Beweis. Für jede offene Hauptmenge D(f) von X = Spec A gilt

$$\begin{aligned}(f_*\widetilde{N})(D(f)) &= \widetilde{N}(f^{-1}(D(f)))\\ &= \widetilde{N}(D(h(f))\\ &= N_{h(f)}\\ &= N\otimes_B B_{h(f)}\\ &= N\otimes_B B\otimes_A A_f && \text{(Universalitätseigenschaft von } B_{h(f)})\\ &= N\otimes_A A_f && \text{(N ist ein B-Modul)}\\ &= N_f\end{aligned}$$

QED.

Beispiel: inverse Bilder von Modulgarben im affinen Fall

Seien h: A $\longrightarrow$ B ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1 und

$$f\colon Y := \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A =: X$$

der zugehörige Morphismus der affinen Spektren. Dann besteht für jeden A-Modul M eine natürliche Isomorphie

$$f^*\widetilde{M} \cong (M\otimes_A B)^{\sim}.$$

Beweis. Für jeden $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{N}$ gilt

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\,(M\otimes_A B)^{\sim}, \mathcal{N}) \cong^{36} \operatorname{Hom}_B(M\otimes_A B, \mathcal{N}(Y))$$

---

[36] Der Übergang zu den globalen Schnitten definiert einen Homomorphismus

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\,(M\otimes_A B)^{\sim}, \mathcal{N}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_B(M\otimes_A B, \mathcal{N}(Y)) \qquad (*)$$

von abelschen Gruppen. Sei umgekehrt

$$M\otimes_A B \longrightarrow \mathcal{N}(Y)$$

eine B-lineare Abbildung. Für jede offene Hauptmenge D(f) von Spec B können wir diese mit der Restriktion auf D(f) zusammensetzen,

$$M\otimes_A B \longrightarrow \mathcal{N}(Y) \longrightarrow \mathcal{N}(D(f)).$$

Der Modul rechts ist ein Modul über $\mathcal{O}_Y(D(f)) = B_f$. Die Abbildung faktorisiert sich deshalb über

$$M\otimes_A B\otimes_B B_f = M\otimes_A B_f = (M\otimes_A B)^{\sim}(D(f)),$$

d.h. wir erhalten einen Homomorphismus

$$(M\otimes_A B)^{\sim}(D(f)) \longrightarrow \mathcal{N}(D(f)),$$

und damit ein Garben-Homomorphismus

$$(M\otimes_A B)^{\sim} \longrightarrow \mathcal{N}.$$

$$\cong^{37} \mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{N}(Y))$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, f_*\mathcal{N})$$

Wobei die letzte Isomorphie sich in derselben Weise ergibt wie die erste. Damit gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\,(M\otimes_A B)^{\sim}, \mathcal{N}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f^*\widetilde{M}, \mathcal{N}).$$

für jeden $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{N}$. Auf Grund der Eindeutigkeit des darstellenden Objekts erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus

$$f^*\widetilde{M} \cong (M\otimes_A B)^{\sim}.$$

QED.

Beispiel: das Ideal eines abgeschlossenen Teilschemas

Seien X ein Schema und $i:Y \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Teilschema. Dann definiert i einen Homomorphismus

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y \tag{1}$$

von Garben kommutativer Ringe mit.1. Der Kern dieses Homomorphismus ist ein Ideal

$$I_Y \hookrightarrow \mathcal{O}_X$$

(d.h. ein $\mathcal{O}_X$-Modul, der Teilmodul von $\mathcal{O}_X$ ist), welcher <u>Ideal-Garbe</u> von Y in $\mathcal{O}_X$ heißt oder auch einfach <u>Ideal</u> von Y in $\mathcal{O}_X$.

Bemerkungen

(i) Nach Konstruktion besteht eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

Durch Übergang zu den globalben Schnitten erhalten wir den alten Homomorphismus zurück. Wir haben gezeigt, (*) besitzt einen Schnitt, ist also insbesonder surjektiv. Sei jetzt

$$\varphi:\ (M\otimes_A B)^{\sim} \longrightarrow \mathcal{N}$$

aus dem Kern von (*) und $s \in M\otimes_A B_f$ ein Schnitt von $(M\otimes_A B)^{\sim}$ über offenen Hauptmenge D(f). Dann hat s die Gestalt $s = \sum_{i=1}^{r} m_i\otimes b_i/f^{n(i)}$ mit $m_i \in M$, $b_i\in B$, $n(i) \in \mathbb{N}$. Weil die Summe endlich ist, können wir durch Erweitern der Brüche erreichen, daß n(i) = n unabhängig von i ist. Also gilt, weil φ eine $\mathcal{O}_Y$-lineare Abbildung

$$f^n\varphi(s) = \sum_{i=1}^{r} f^n\varphi(m_i\otimes b_i/f^n) = \varphi(\sum_{i=1}^{r} m_i\otimes b_i) = 0$$

denn $\sum_{i=1}^{r} m_i\otimes b_i$ ist eine globaler Schnitt und die Bilder globaler Schnitte sind Null. Weil f eine Einheit von $\mathcal{O}_Y(D(f))$ ist, folgt $\varphi(s) = 0$. Wir haben gezeigt, (*) ist ein Isomorphismus.

[37] Auf Grund der Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts.

(ii) Sei speziel A ein kommutativer Ring mit 1, $I \subseteq A$ ein Ideal und i die Einbettung, welche durch den natürlichen Homomorphismus $h\colon A \longrightarrow A/I$ definiert ist.

$$X := \mathrm{Spec}\ A,\ Y := \mathrm{Spec}\ A/I,\ i\colon Y \hookrightarrow X \text{ induziert durch } h.$$

Für jede offene Hauptmenge D(f) von X entsteht die durch (1) induzierte Abbildung

$$A_f = \mathcal{O}_X(D(f)) \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y(D(f)) = \mathcal{O}_Y(i^{-1}(D(f))) = \mathcal{O}_Y(D(h(f))) = (A/I)_{h(f)}$$

durch Tensorieren von h mit A_f über A. Für den Kern des Ideals von Y erhalten wir

$$I_Y(D(f)) = IA_t = I \otimes_A A_t$$

d.h , das Ideal von Y in $\mathcal{O}_X$ ist gerade

$$I_Y = \widetilde{I}.$$

(iii) Für jeden $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{N}$ ist $i_*\mathcal{N}$ ein $i_*\mathcal{O}_Y$-Modul und $i_*\mathcal{O}_Y$ ist seinerseits ein $\mathcal{O}_X$-Modul, welcher von I_Y annulliert wird. Der Übergang zum direkten Bild definiert so einen Funktor

$$i_*\colon \mathcal{O}_Y\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod},$$

mit der Eigenschaft, daß

$$I_Y \bullet i_*\mathcal{N} = 0$$

gilt für jeden $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{N}$.

(iv) Umgekehrt ist für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ das inverse Bild $i^*\mathcal{M}$ ein Modul über

$$i^*\mathcal{O}_X = i^{-1}\mathcal{O}_X \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y.$$

Wir erhalten so einen Funktor

$$i^*\colon \mathcal{O}_X\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{O}_Y\text{-Mod},\ \mathcal{M} \mapsto i^*\mathcal{M}.$$

Weil i^* linksadjungiert ist zu i_* definiert der identische Morphismus $i^*\mathcal{M} \longrightarrow i^*\mathcal{M}$ einen Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$\mathcal{M} \longrightarrow i_*i^*\mathcal{M}. \tag{1}$$

(v) Im Spezialfall

$$X = \mathrm{Spec}\ A,\ Y := \mathrm{Spec}\ A/I,\ \mathcal{M} = \widetilde{M}$$

erhalten wir aus (1) für die auf den globalen Schnitten induzierte Abbildung gerade die natürliche Abbildung

$$M = \Gamma(X, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(X, i_*i^*\mathcal{M}) = \Gamma(Y, i^*\mathcal{M}) = M \otimes_A A/I = M/IM$$

auf den Faktormodul. Wird $\mathcal{M}$ vom Ideal I_Y annulliert, so gilt insbesondere IM = 0, und diese Abbildung ist ein Isomorphismus. Moduln, die lokal von der Gestalt $\widetilde{M}$ sind heißen kohärente Moduln. Der Funktor i_* induziert so eine Äquivalenz der kohärenten Moduln auf Y mit den kohärenten Moduln auf X, die von der Idealgarbe I_Y annulliert werden. Wir werden deshalb oft keinen Unterschied zwischen dieser Art von $\mathcal{O}_X$-Moduln und den entsprechenden $\mathcal{O}_Y$-Moduln machen.

Beispiel: Modul-Garben auf projektiven Spektren

3.3 Projektive Spektren

Seien

$$R := \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$$

eine graduierter Ring (kommutativ mit 1) und

$$X := \text{Proj } R$$

die Menge der homogenen Primideale, welche das irrelevante Ideal R_+ nicht enthalten, versehen mit der Zariski-Topologie und

$$\mathcal{O}_X$$

die in Beispiel 2 von 2.4 konstruierte Strukturgarbe von X. Dann ist

$$(X, \mathcal{O}_X)$$

ein algebraisches Schema.

Beweis. Seien $F \in R$ ein homogenes Element von R_+ und

$$U := D_+(F) := \{P \in \text{Spec } R \mid P \text{ homogen}, F \notin P\}$$

die durch F definierte offene Hauptmenge. Wie wir wissen, bilden diese offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis von X, also insbesondere eine offene Überdeckung. Es reicht also zu zeigen,

$$(U, \mathcal{O}_X|_U)$$

ist isomorph zu einem affinen Spektrum (für jedes F). Für $P \in U$, d.h. $F \notin P$, ist

$$PR_F$$

ein Primideal des Quotienten-Rings R_F. Weil F homogen ist, hat R_F die Struktur eines (ganzzahlig) graduierten Rings. Bezeichne

$$R_{(F)} := \{\frac{U}{F^n} \in R_F \mid U \in R \text{ homogen vom Grad } n \cdot \deg F\}$$

den homogenen Bestandteil des Grade 0 von R_F. Dies ist ein Teilring von R_F, welcher das Einselement enthält. Insbesondere ist

$$p := PR_F \cap R_{(F)}$$

ein Primideal von $R_{(F)}$. Wir haben damit eine Abbildung

$$\varphi: D_+(F) \longrightarrow \text{Spec } R_{(F)}, P \mapsto p := PR_F \cap R_{(F)}. \qquad (1)$$

konstruiert.

<u>1. Schritt</u>. φ ist injektiv.

Seien $P', P'' \in D_+(F)$ Punkte mit $P'R_F \cap R_{(F)} = P''R_F \cap R_{(F)}$. Für jedes homogene $U \in P'$ gilt dann

$$\frac{U^{\deg F}}{F^{\deg U}} \in P'R_F \cap R_{(F)} = P''R_F \cap R_{(F)} \subseteq P''R_F.$$

Es gibt somit eine natürliche Zahl n mit

$$F^n \cdot U^{\deg F} \in P''.$$

Weil P" ein Primideal ist und F nicht in P" liegt folgt, U $\in$ P". Wir haben gezeigt, P' $\subseteq$ P". Die umgekehrte Inklusion ergibt sich aus Symmeterie-Gründen.

<u>2. Schritt</u>. φ ist surjektiv.[38]

Sei $p \in \mathrm{Spec}\, R_{(F)}$ ein vorgegebens Primideal. Für jede nicht-negative ganze Zahl n setzen wir

$$p_n := \{ x \in R_n \mid \frac{x^{\deg F}}{F^n} \in p\}.$$

Die Menge p_n ist offensichtlich eine additive Untergruppe von S_n , und es gilt

$$p_0 = p.$$

Für $x \in R_m$ und $y \in p_n$ gilt

$$\frac{(xy)^{\deg F}}{F^{m+n}} = \frac{x^{\deg F}}{F^m} \bullet \frac{y^{\deg F}}{F^n} .$$

Der erste Faktor rechts ist ein Element von $R_{(F)}$ und der zweite Faktor liegt nach Definition von p_n in p. Also liegt auch das Produkt in p, d.h. es ist $xy \in p_{m+n}$. Wir haben gezeigt,

$$R_m \bullet p_n \subseteq p_{m+n} .$$

Insbesondere ist damit

$$P := \oplus_0^\infty p_n$$

ein Ideal von R. Weil p ein echtes Ideal von $R_{(F)}$ ist, gilt

$$F \notin P.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} PR_F \cap R_{(F)} &= \{\frac{U}{F^n} \mid U \in P \text{ homogen vom Grad } n\bullet\deg F\} \\ &= \{\frac{U}{F^n} \mid U \in R_{n\bullet\deg F}, \frac{U^{\deg F}}{F^{n\bullet\deg F}} \in p\} \\ &= p \qquad\qquad \text{(weil p ein Primideal ist).} \end{aligned}$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es somit zu zeigen,

P ist ein Primideal von R.

Seien x, y $\in$ R zwei Elemente, mit xy $\in$ P liegen. Wir haben zu zeigen, einer der beiden Faktoren liegt in P.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Anzahl der von Null verschiedenen homogenen Bestandteile von x plus der Anzahl der von Null verschiedenen homogenen Bestandteile von y.

Falls einer der beiden Faktoren x bzw. y Null ist, d.h. die Anzahl der homogenen Summanden ist 0, ist die Behauptung trivial. Die Induktion beginnt damit mit der Anzahl 2, d.h. der Induktionsanfang entspricht der gerade der Situation, daß x und y homogen sind.

<u>Induktionsanfang</u>: x und y sind homogen.

---

[38] vgl. EGA II, 2.3.6 und 2.1.9.

Sei $x \in R_a$ und $y \in R_b$. Wegen $xy \in P$, d.h. $xy \in p_{a+b}$ gilt dann

$$\frac{(xy)^{\deg F}}{F^{a+b}} \in p,$$

d.h. $\frac{x^{\deg F}}{F^a} \bullet \frac{x^{\deg F}}{F^b} \in p$. Weil p ein Primideal ist, folgt

$$\frac{x^{\deg F}}{F^a} \in p \text{ oder } \frac{x^{\deg F}}{F^b} \in p,$$

also $x \in p_a \subseteq p$ oder $y \in p_b \subseteq P$.

<u>Induktionsschritt</u>.

Bezeichne $x_a \in R_a$ den homogenen Bestandteil niedrigsten Grades, der ungleich Null ist, und analog sei $y_b \in R_b$ definiert. Dann ist $x_a y_b$ der homogenen Bestandteil niedrigsten Grades von xy, der ungleich Null ist. Mit $xy \in P$ gilt also auch $x_a y_b \in P$, also $x_a \in P$ oder $y_b \in P$, also

$$(x - x_a)y \in P \text{ bzw. } x(y-y_b) \in P.$$

Im ersten Fall gilt auf Grund der Induktionsvoraussetzung

$$x - x_a \in P \text{ oder } y \in P,$$

und wegen $x_a \in P$ folgt die Behauptung. Im zweiten Fall gilt auf Grund der Induktionsvoraussetzung

$$x \in P \text{ oder } y-y_b \in P,$$

und wegen $y_b \in P$ folgt die Behauptung.

<u>3. Schritt</u>. Die Unterraum-Topologie von $D_+(F) \subseteq \operatorname{Proj} R$ entspricht bei (1) der Zariski-Topologie von $\operatorname{Spec} R_{(F)}$.

Sei $G \in R$ ein weiteres homogenes Element. Für $P \in D_+(F)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} P \in D_+(F) \cap D_+(G) &\Leftrightarrow G \notin P \\ &\Leftrightarrow^{39} G \notin PR_F \\ &\Leftrightarrow g := \frac{G^{\deg F}}{F^{\deg G}} \notin PR_F \cap R_{(F)} \\ &\Leftrightarrow g \notin \varphi(P) \qquad (\varphi \text{ bezeichnet die Abbildung (1)}) \\ &\Leftrightarrow \varphi(P) \in D(g) \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt,

$$\varphi(D_+(F) \cap D_+(G)) = D(g),$$

[39] Wegen $PR_F \cap R = P$ für jedes Primideal P mit $F \notin P$.

d.h. die Durchschnitte von $D_+(F)$ mit offenen Hauptmengen entsprechen bei φ gewissen offenen Hauptmengen von Spec $R_{(F)}$. Insbesondere ist φ eine offene Abbildung.

Sei umgekehrt $g \in R_{(F)}$ vorgegeben, d.h.

$$g = \frac{U}{F^n} \text{ mit } U \in R \text{ homogen vom Grad } n\bullet\deg F.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi(P) \in D(g) \quad &\Leftrightarrow g \notin \varphi(P) = PR_F \cap R_{(F)} \\ &\Leftrightarrow U \notin PR_F \\ &\Leftrightarrow U \notin P \\ &\Leftrightarrow P \in D_+(U).\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, das Urbild einer offenen Hauptmenge von Spec $R_{(F)}$ bei φ ist offen. Mit anderen Worten, φ ist stetig, also insgesamt ein Homöomorphismus.

Wir können deshalb bei Bedarf im folgenden, den topologiischen Raum $D_+(F)$ mit dem topologischen Raum Spec $R_{(F)}$ identifizieren. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß die folgende Aussage gilt:

<u>4. Schritt.</u> $\mathcal{O}_X|_{D_+(F)} \cong \mathcal{O}_{\text{Spec } R_{(F)}}$.

Zum Beweis reicht es zu zeigen, die beiden Garben haben auf einer Topologie-Basis dieselben Schnitte und dieselben Restriktionen (vgl. 2.4). Dazu reicht es zu zeigen, für jedes homogene Element $G \in R$ gilt

$$\mathcal{O}_X(D_+(F) \cap D_+(G)) = \mathcal{O}_{\text{Spec } R_{(F)}}(\varphi(D_+(F) \cap D_+(G)))$$

Beim Beweis des dritten Schrittes haben wir gesehen

$$\varphi(D_+(F) \cap D_+(G)) = D(g) \text{ mit } g := \frac{G^{\deg F}}{F^{\deg G}}$$

Es reicht also zu zeigen,

$$\mathcal{O}_X(D_+(FG)) = \mathcal{O}_{\text{Spec } R_{(F)}}(D(g)).$$

Nach Definition der beiden Garben reicht es zu zeigen,

$$R_{(FG)} = (R_{(F)})_g \tag{2}$$

Der Ring auf der linken Seite besteht aus den homogenen Elementen des Grades 0 von

$$\begin{aligned} R_{FG} &= (R_F)_G = R_F[1/G] && \text{in } (R_F)_G \\ &= R_F[1/G^{\deg F}] && (\text{wegen } \tfrac{1}{G} = \tfrac{G^{\deg F - 1}}{G^{\deg F}}) \\ &= R_F[1/g] && (\text{weil } F \text{ eine Einheit in } R_F \text{ ist}) \\ &=^{40} (R_F)_g \end{aligned}$$

[40] Die Universalitätseigenschaft des Quotientenrings liefert eine Abbildung

Weil g homogen vom Grad 0 ist, folgt die Behauptung (2).

QED.

3.4 Eine affine Überdeckung von Proj R

Seien R ein graduierter Ring, X = Proj R und $\{F_i\}_{i\in I}$ eine Familie von homogenen Elementen, die das irrelevente Ideal von R erzeugen. Dann gilt

$$X = \bigcup_{i\in I} D_+(F_i).$$

Beweis. Sei $P \in X$. Weil das irrelevante Ideal von R nicht vollständig in P liegt, gibt es ein homogenes Element F mit

$$F \notin P.$$

Weil F im irrelevanten Ideal liegt, läßt es sich als Linearkombination der F_i schreiben, sagen wir

$$F = \sum_{i\in I} G_i F_i.$$

Wegen $F\notin P$ können somit nicht alle F_i in P liegen, sagen wir $F_{i_o} \notin P$. Dann gilt aber

$$P \in D_+(F_{i_o})$$

QED.

Beispiel: der projektive Raum

Seien k ein Körper und

$$R := k[X_0, \dots , X_N]$$

der Polynomring über k mit der üblichen Graduierung (vgl. die erste Fußnote zu Beispiel 2 von 2.4). Dann gilt

$$\text{Proj } R = D_+(X_0)\cup D_+(X_1)\cup\dots\cup D_+(X_N).$$

Dabei ist

$$D_+(X_i) = \text{Spec } R_{(X_i)} = \text{Spec } k[\frac{X_0}{X_i}, \dots , \frac{X_N}{X_i}] \cong \mathbb{A}_k^N$$

gerade der N-dimensionale affine Raum über k. Das projektive Spektrum von R wird also von N+1 Exemplaren des N-dimensionalen affinen Raums überdeckt. Der abgeschlossene Punkt

$$(\alpha_0, \dots , \alpha_{i-1},\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_N)$$

des affinen Raum ist durch das Primideal

$$(R_F)_g \longrightarrow R_F[1/g], \frac{a}{g^n} \mapsto a\bullet(1/g)^n,$$

welche surjektiv ist (man bringe die Polynome in 1/g auf den Hauptnenner). Wegen

$$R_F[1/g] = R_F[1/G] = (R_F)_G$$

besteht der Kern aus den Quotienten $\frac{a}{g^n}$, deren Zähler $a \in R_F$ von einer G-Potenz annulliert wird. Das ist aber genau dann der Fall, wenn er von einer Potenz von g annulliert wird. Mit anderen Worten, der Kern ist trivial.

$$p := (\frac{X_0}{X_i} - \alpha_0, \dots, \frac{X_{i-1}}{X_i} - \alpha_{i-1}, \frac{X_{i+1}}{X_i} - \alpha_{i+1}, \dots, \frac{X_N}{X_i} - \alpha_N) \text{ von Spec } R_{(X_i)}$$

gegeben. Mit $\alpha_i := 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} pR_{X_i} &= (\frac{X_0}{X_i} - \alpha_0, \dots, \frac{X_N}{X_i} - \alpha_N)R_{X_i} \\ &= (X_0 - \alpha_0 X_i, \dots, X_N - \alpha_N X_i)R_{X_i}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} pR_{X_i} \cap R &= (X_0 - \alpha_0 X_i, \dots, X_N - \alpha_N X_i)R \\ &= (\alpha_i X_0 - \alpha_0 X_i, \dots, \alpha_i X_N - \alpha_N X_i)R \\ &= (\alpha_u X_v - \alpha_v X_v \mid u, v = 0, \dots, N)R \end{aligned}$$

Man beachte, das letzte Ideal bleibt unverändert, wenn man alle α_j mit demselben Element aus k* multipliziert.
Ist der Körper k algebraisch abgeschlossen, so entsprechen die abgeschlossenen Punkte von

$$D_+(X_i)$$

also gerade den (N+1)-Tupeln mit Koordinaten aus k, deren i-te Koordinate von Null verschieden ist.
Zusammen ergibt sich, daß die abgeschlossenen Punkte von Proj R gerade den (N+1)-Tupeln mit Koordinaten aus k entsprechen mit mindestens einer von Null verschiedenen Koordinate, wobei proportianale Tupel denselben Punkt beschreiben.

Die abgeschlossenen Punkte von Proj R enstprechen also gerade den Punkten des N-dimensionalen projektiven Raums über k. Deshalb wird auch das Schema Proj R mit

$$\mathbb{P}_k^N := \text{Proj } k[X_0, \dots, X_N]$$

bezeichnet und heißt (für beliebige Körper k) ebenfalls projektiver Raum über k.

3.5 Die globalen Schnitte der Strukturgarbe des $\mathbb{P}_k^N$

Seien k ein Körper und

$$X := \mathbb{P}_k^N = \text{Proj } k[X_0, \dots, X_N]$$

der N-dimensionale projektive Raum über k. Dann gilt

$$\Gamma(\mathcal{O}_X) := \mathcal{O}_X(X) = k,$$

d.h. jede auf ganz X definierte reguläre Funktion ist konstanat.
Bemerkung
Für N = 1 und k = $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{P}_k^N$ gerade die Riemannsche Zahlenkugel. Jede reguläre Funktion auf der Riemannschen Zahlenkugel ist somit konstant. Der Satz kann als algebraisches Analogon zum Satz von Liouville angesehen werden.
Beweis. Wir schreiben

$$X = U_0 \cup \dots \cup U_N \text{ mit } U_i := D(X_i) = \text{Spec } k[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_N}{X_i}].$$

Weite sei $\xi := (0) \in X$ der durch das Null-Ideal gegebene “allgemeine Punkt” von X. Er liegt in jedem der U_i und ist dort durch das Null-Ideal von $k[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_N}{X_i}]$ gegeben. Insbesondere gilt

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = k[\frac{X_0}{X_0}, \dots, \frac{X_N}{X_0}]_{(0)} = k(\frac{X_0}{X_0}, \dots, \frac{X_N}{X_0}).$$

Die Garben-Restriktionen definieren einen injektiven Homomorphismus

$$\Gamma(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_0)\times\dots\times\mathcal{O}_X(U_0),\ s \mapsto (s|_{U_0},\dots,s|_{U_N})$$

(auf Grund es ersten Garben-Axioms). Wir können $\Gamma(\mathcal{O}_X)$ somit als Teiring des direkten Produkts auf der rechten Seite ansehen, d.h. als Teilring des direkten Produkts der Polynomringe

$$k[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_N}{X_i}]$$

Die natürliche Abbildung $\mathcal{O}_X(U_i) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$ in den Halm ist gerade die natürliche Einbettung

$$k[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_N}{X_i}] \hookrightarrow k(\frac{X_0}{X_0}, \dots, \frac{X_N}{X_0}).$$

Die Menge $\Gamma(\mathcal{O}_X)$ besteht somit aus (N+1)-Tupeln

$$(F_0, \dots, F_N) \text{ mit } F_i \in k[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_N}{X_i}],$$

mit der Eigenschaft, daß die Koordinaten dieser Tupel im Halm $\mathcal{O}_{X,\xi}$, dasselbe Bild haben, d.h.

$$F_0 = \dots = F_N \text{ in } k(\frac{X_0}{X_0}, \dots, \frac{X_N}{X_0}) \subseteq k(X_0, \dots, X_N)$$

Wir schreiben

$$F_i = \frac{U_i}{X_i^{n(i)}} \text{ mit } U_i \in k[X_0,\dots,X_N] \text{ homogen vom Grad } n(i).$$

Dabei können wir annehmen, daß F_i teilerfremd zu X_i ist. Für je zwei verschiedene Indizes i,j gilt dann

$$U_i \cdot X_j^{n(j)} = U_j \cdot X_i^{n(i)}$$

Nach Wahl der U_i folgt $X_i^{n(i)} \mid X_j^{n(j)}$, also n(i) = 0 für alle i. Insbesondere sind die F_i die Polynome vom Grad 0, d.h. Elemente von k. Wir haben gezeigt, $\Gamma(\mathcal{O}_X)$ läßt sich identifizieren mit einer Teilmenge von

$$\{(c, ..., c) \mid c \in k\} \cong k$$

Da sich jedes Element von k als global definierte reguläre Funktion ansehen läßt, folgt

$$\Gamma(\mathcal{O}_X) = k.$$

QED.

3.6 Projektive Varietäten

Seien k ein Körper,

$$R := k[X_0, ... , X_N]$$

der Polynomring über k mit der üblichen Graduierung und

$$I \subseteq R$$

ein homogenes Ideal. Die Punkte von

$$\text{Proj } R/I$$

entsprechen dann gerade den Punkten P ∈ Proj R mit $I \subseteq P$, d.h. als Punkt-Menge kann man Proj R/I identifizieren mit der abgeschlossenen Teilmenge

$$\text{Proj } R/I = V(I) = \{ P \in \text{Proj } R \mid I \subseteq P \}$$

Sei jetzt

$$P = [\alpha_0, ... , \alpha_N] = [\frac{\alpha_0}{\alpha_i}, ... , 1 , ... , \frac{\alpha_N}{\alpha_i}]$$

ein k-rationaler Punkt, dessen i-te Koordinate von Null verschieden ist, d.h. ein Punkt der Gestalt

$$P = (X_0 - \alpha_0, ... ,X_N - \alpha_N) = (X_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_i}, ... , X_i - 1 , ... , X_N - \frac{\alpha_N}{\alpha_i}).$$

Liegt P in V(I), d.h. gilt $I \subseteq P$, so ist jedes homogene Polynom F aus I eine Linearkombination der Polynome $X_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_i}, ... , X_i - 1 , ... , X_N - \frac{\alpha_N}{\alpha_i}$. Insbesondere ist

$$0 = F(\frac{\alpha_0}{\alpha_i}, ... , 1 , ... , \frac{\alpha_N}{\alpha_i}) = (1/\alpha_i)^{\deg F} \cdot F(\alpha_0, ... , \alpha_N).$$

also

$$F(\alpha_0, ... , \alpha_N) = 0.$$

Umgekehrt ist jedes homogene Polynom mit der Nullstelle $(\alpha_0, ... , \alpha_N)$ eine Linearekombination der der $X_i - \alpha_i$.[41] Ist also $(\alpha_0, ... , \alpha_N)$ eine gemeinsame Nullstelle der homogenen Polynome aus I, so gilt $I \subseteq P$, d.h. $P \in V(I)$.

---

[41] Man betrachte die Taylorentwicklung des Polynoms F im Punkt $(\alpha_0, ... , \alpha_N)$.

Wir haben gezeigt, die k-rationalen Punkte von V(I) entsprechen gerade den gemeinsamen Nullstellen der homogenen Polynome aus I.

Die analoge Aussage gilt auch[42] für die nicht-notwendig k-rationalen Punkte von Proj P, d.h.die Punkte von

$$V(I) = \mathrm{Proj}\, R/I$$

entsprechen gerade den gemeinsamen Nullstellen der homogenen Polynome aus I. Man erhält dann

$$\mathrm{Proj}\, R/I = \{[\alpha_0,....\alpha_N] \mid \alpha_i \in \bar{k}\ ,\ F(\alpha_0,....\alpha_N) = 0 \text{ für } F{\in}I \text{ homogen}\}/{\sim}$$

Dabei bezeichne $\bar{k}$ die algebraische Abschließung und die Äquivalenz-Relation $\sim$ identifiziere konjugierte Punkte, d.h. Punkte im selben Orbit der Automorphismen-Gruppe von $\bar{k}/k$ liegen.

3.7. Der projektive Raum über Spec A

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und

$$R = A[X_0, \ldots , X_N]$$

der graduierte Ring mit

---

[42] Ist $P \in \mathrm{Proj}\, R$ ein Punkt, dessen i-te Koordinate ungleich Null ist, d.h. $X_i \notin P$, so bedeutet $P \in V(I)$, daß der P entsprechende Punkt von $\mathrm{Spec}\, R_{(X_i)}$ Nullstelle der inhomogenen Polynome $F/X_i^{\deg F}$ mit $F \in I$ ist. Allgemeiner:

Für $P \in V(I)$ und homogenes $F \notin P$ gilt:

$$I \subseteq P$$
$$IR_F \subseteq PR_F$$
$$IR_F \cap R_{(F)} \subseteq p := PR_F \cap R_{(F)}\ ,$$

d.h. jedes $f \in IR_F \cap R_{(F)}$ hat im P entsprechenden Punkt $p \in \mathrm{Spec}\, R_{(F)}$ eine Nullstelle. Man beachte, die Elemente der Gestalt f sind Quotitenten aus homogenen Elementen von I und einer Potenz von F.

Sei umgekehrt $f(p) = 0$ für jedes $f \in IR_F \cap R_{(F)}$, d.h. es gelte

$$IR_F \cap R_{(F)} \subseteq PR_F \cap R_{(F)}.$$

Für jedes homogene $U \in I$ gilt dann auch

$$\frac{U^a}{F^b} \in IR_F \cap R_{(F)} \subseteq PR_F \cap R_{(F)} \subseteq PR_F,$$

wenn man a und b so wählt, daß im Zähler und Nenner homogene Polynome desselben Grades stehen. Es folgt $U^a \cdot F^c \in P$ (mit c geeignet). Weil F nicht in P liegt und P ein Primideal ist, erhalten wir $U \in P$. Wir haben gezeigt $I \subseteq P$, d.h. $P \in V(I)$.

Die homogenen Polynome von R lassen sich als globale Schnitte eines Vektorraumbündels auf Proj R betrachten. Die Punkte von $P \in V(I)$ sind dann gerade die gemeinsamen Nullstellen der Schnitte, die in I liegen.

$$R_n = \sum_{i_0+\ldots+i_N=n} A\bullet X_0^{i_0}\bullet\ldots\bullet X_N^{i_N}$$

Für jedes $P \in \mathrm{Proj}\ R$ ist

$$p := A \cap P$$

ein Primideal von A, d.h. man hat eine Abbildung

$$\varphi: \mathrm{Proj}\ R \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A,\ P \mapsto A \cap P.$$

Für $f \in A \subseteq R$ gilt

$$\varphi(P) \in D(f) \Leftrightarrow f \notin A \cap P \Leftrightarrow f \notin P \Leftrightarrow P \in D_+(f),$$

d.h.

$$\varphi^{-1}(D(f)) = D_+(f).$$

Das Urbild einer offenen Hauptmenge von Spec A bei φ ist eine offene Hauptmenge von Proj R. Insbesondere ist die Abbildung φ stetig.

Außerdem ist

$$D_+(f) = D_+(fX_0) \cup \ldots \cup D_+(fX_n)$$

also auf Grund der Garben-Axiome

$$\mathcal{O}_X(D_+(f)) \subseteq \mathcal{O}_X(D_+(fX_0)) \times \ldots \times \mathcal{O}_X(D_+(fX_N))$$

mit

$$\mathcal{O}_X(D_+(fX_i)) = R_{(fX_i)} = (R_f)_{(X_i)} = A_f[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_N}{X_i}]$$

Dieselben Betrachtungen wie in A1/4.2.5 mit $A_f[X_0, \ldots, X_N]$ anstelle des Polynomrings $k[X_0, \ldots, X_N]$ zeigen[43]

$$\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(D(f))) = \mathcal{O}_X(D_+(f)) = A_f = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(D(f)) \text{ für jedes } f \in A.$$

Nach 2.4 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\varphi^{\#}: \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A} \xrightarrow{\cong} \varphi_*\mathcal{O}_X$$

und damit einen Morphismus von geometrischen Räumen

$$(\varphi, \varphi^{\#}): (\mathrm{Proj}\ R, \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\ R}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}\ A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}).$$

Für jeden abgeschlossen Punkt $p \in \mathrm{Spec}\ A$ ist

$$\varphi^{-1}(V(p)) = \varphi^{-1}(\mathrm{Spec}\ A/p)$$

eine abgeschlossene Teilmenge von Proj R. Man kann zeigen, diese ist gerade durch das homogene Ideal

---

[43] Anstelle des rationalen Funktionenkörpers $k(X_0, \ldots, X_N)$ muß man dabei den Quotientenring

$$A(X_0, \ldots, X_N)$$

von $A[X_0, \ldots, X_N]$ bezüglich der multiplikativen Menge $S \subseteq A[X_0, \ldots, X_N]$ der Nicht-Nullteiler betrachten. Ein Polynom $f \in A[X_0, \ldots, X_N] - \{0\}$ dabei genau dann ein Nullteiler, wenn alle seine Koeffizienten von ein und demselben Element aus A - {0} annulliert werden, vgl. Nagata, Local Rings,das Kapitel über Quotientenringe.

$$p\bullet R = p\bullet A[X_0, \ldots X_n]$$

definiert und läßt sich damit mit dem Schema

$$\mathrm{Proj}\ R/pR = \mathrm{Proj}\ (A/p)[X_0, \ldots X_n] = \mathbb{P}^N_{A/p}\ .$$

Die Fasern der Abbildung φ sind also projektive Räume über den Körpern A/p. Wir schreiben

$$\mathbb{P}^N_A := \mathrm{Proj}\ A[X_0, \ldots X_n]$$

und nennen dieses Schema auch <u>N-dimensionalen projektiven Raum</u> über A bzw. über Spec A.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Proj}\ R & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Spec}\ A \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{Proj}\ R/pR & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\ A/p \\ \| & & \| \\ \mathbb{P}^N_{A/p} & & \mathrm{Spec}\ A/p \end{array}$$

Man beachte, für $A = \mathbb{Z}$ sind Fasern von φ projektive Räume über den Körpern der Gestalt $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p$ (und die Faser über dem allgemeinen Punkt der Raum $\mathbb{P}^N_{\mathbb{Q}}$).

3.8 Abgeschlossen Einbettungen

Ein Morphismus von Schemata

$$f: X \longrightarrow Y$$

heißt abgeschlossene Einbettung, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

1. f(X) ist eine abgeschlossene Teilmenge von Y.
2. f induziert einen Homöomorphismus $X \longrightarrow f(X)$.
3. Für jeden Punkt $x \in X$ ist die induziete Abbildung $f_x: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ surjektiv.

Bemerkungen

(i) Seien Y eine komplexe Mannigfaltigkeit, $X \subseteq Y$ eine Teilmannigfaltigkeit und

$$f \in \mathcal{O}_{X,x}$$

eine Potenzreihe, die auf X in einer Umgebung des Punktes $x \in X$ konvergiert. Aus der Formel für den Konvergenzradius von f ergibt sich, daß dann f auch im umgebenden Raum Y in der Nähe von x konvergiert. Mit anderen Worten, die Einschränkung auf X der holomorphen Funktionen von Y definiert zusammen mit der natürlichen Einbettung $X \hookrightarrow Y$ eine Morphismus geometrischer Räume

$$(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y),$$

für welchen obige Bedingung 3 erfüllt ist.

(ii) Ein Morphismus affiner Schemata

$$f: \mathrm{Spec}\ A \longrightarrow \mathrm{Spec}\ B$$

ist genau dann eine abgeschlossene Einbettung, wenn $A \cong B/J$ mit einem Ideal J gilt und f der Morphismus zum Ring-Homomorphismus

$$B \longrightarrow B/J \cong A$$

ist.

Zum Beweis von (ii).
Im Fall A = B/J ist erhält man die Abbildungen

$$f_x: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

aus der natürlichen Surjektion

$$B \twoheadrightarrow B/J = A$$

durch Übergang zu den Lokalisierungen bezüglich der Primideale

$$x \in \operatorname{Spec} B/J = V(J) \subseteq \operatorname{Spec} B.$$

Diese sind somit von der Gestalt

$$B_x \longrightarrow (B/J)_x = B_x/JB_x,$$

also insbesondere surjektiv.

Ist f eine abgeschlossene Einbettung, so ist der Garben-Morphismus

$$f^{\#}:\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$$

surjektiv, d.h. man hat eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}$-Moduln

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B} \xrightarrow{f^{\#}} f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \longrightarrow 0.$$

Übergang zu den globalen Schnitten liefert

$$0 \longrightarrow I(\operatorname{Spec} B) \longrightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(\operatorname{Spec} B) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} B)) \longrightarrow H^1(\operatorname{Spec} B, I)$$

d.h.

$$0 \longrightarrow \Gamma(I) \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow H^1(\operatorname{Spec} B, I).$$

Die Behauptung folgt jetzt mit J := Γ(I) aus dem Satz von Serre, nach welchem die Kohomologie kohärenter Garben für affine Schemata trivial ist.
QED.

3.9 Eine abgeschlossene Einbettung projektiver Spektren

Seien R ein graduierter Ring, $I \subseteq R$ ein homogenes Ideal und

$$\rho: R \longrightarrow R/I$$

die natürliche Abbildung auf den Faktorring. Letztere induziert eine Abbildung

$$\rho^*: \operatorname{Proj} R/I \xrightarrow{\cong} V(I) \subseteq \operatorname{Proj} R,\ P \mapsto \rho^{-1}(P),$$

welche das projektive Spektrum Proj R/I als Menge mit V(I) identifiziert. Für $F \in R$ homogen und $P \in \operatorname{Proj} R/I$ gilt

$$\begin{aligned} P \in (\rho^*)^{-1}(D_+(F)) &\Leftrightarrow \rho^*(P) \in D_+(F) \\ &\Leftrightarrow F \notin \rho^{-1}(P) \\ &\Leftrightarrow \rho(F) \notin P \\ &\Leftrightarrow P \in D_+(\rho(F)), \end{aligned}$$

d.h.

$$(\rho^*)^{-1}(D_+(F)) = D_+(\rho(F)).$$

Insbesondere ist ρ^* eine stetige Abbildung. Weiter induziert ρ für jedes homogene F eine Surjektion

$$R_F \twoheadrightarrow (R/I)_F = (R/I)_{\overline{F}} \text{ mit } \overline{F} := \rho(F)$$

die den Grad homogener Elemente unverändert läßt,
also eine Surjektion

$$R_{(F)} \twoheadrightarrow (R/I)_{(F)} = R_{(\overline{F})}$$

auf den Elementen des Grades 0, d.h.

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\text{Proj } R}(D_+(F)) \twoheadrightarrow\ & \mathcal{O}_{\text{Proj } R/I}(D_+(\overline{F})) \\ &= \mathcal{O}_{\text{Proj } R/I}((\rho^*)^{-1}(D_+(F))) \qquad (1)\\ &= (\rho^*)_*\mathcal{O}_{\text{Proj } R/I}(\mathcal{O}_{\text{Proj } R/I}).\end{aligned}$$

Diese Homomorphismen setzen sich zusammen zu einen Homomorphismus von Ring-Garben

$$(\rho^*)^{\#}: \mathcal{O}_{\text{Proj } R} \longrightarrow (\rho^*)_*\mathcal{O}_{\text{Proj } R/I}\,.$$

Zusammen erhalten wir einen Morphismus geometrischer Räume

$$(\rho^*, (\rho^*)^{\#}): (\text{Proj } R/I, \mathcal{O}_{\text{Proj } R/I}) \longrightarrow (\text{Proj } R, \mathcal{O}_{\text{Proj } R}),$$

Welcher die abgeschlossene Teilmenge $V(I) \subseteq \text{Proj } R$ mit dem Schema Proj R/I identifiziert. Wegen der Surjektivität der Homomorphismen (1) handelt es sich um eine abgeschlossene Einbettung.

3.10 Kategorien von Schemata

Die Schemata bilden zusammen mit den Morphismen von geometrischen Räumen eine Kategorie, die mit

$$\text{Sch}$$

bezeichnet wird.
Die Schemata, welche zu einem Schema der Gestalt Spec A isomorph sind, bilden eine volle Teilkategorie von Sch, welche <u>Kategorie der affinen Schemata</u> heißt und isomorph ist zum Dual der Kategorie der kommutativen Ringe mit 1.

Sei S ein Schema. Eine <u>Schema über S</u> oder auch <u>S-Schema</u> ist ein Morphismus von Schemata

$$\varphi: X \longrightarrow S.$$

Der Morphismus φ heißt dann auch <u>Struktur-Morphismus</u> des S-Schemas X. Im Fall

$$S = \text{Spec } A$$

sagt man auch, X ist eine <u>Schema über A</u> oder auch <u>ein A-Schema</u>.
Ein <u>Morphismus von S-Schemata</u> oder auch <u>S-Morphismus</u> ist ein Schema-Morphismus

$$f: X \longrightarrow Y,$$

wobei X und Y Schemata über S sind und das folgende Diagramm kommutativ ist,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Dabei seien φ und ψ die Struktur-Morphismen von X bzw. Y.

Die S-Schemata bilden zusammen mit den S-Morphismen für jedes Schema S eine Kategorie, welche mit

$$\mathrm{Sch}/S$$

bezeichnet wird.

Beispiel 1

Für jeden Homomorphismus h: $A \longrightarrow B$ von kommutativen Ringen mit 1 gibt des zugehörigen Schema-Morphismus

$$\mathrm{Spec}\ B \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A,$$

dem Schema Spec B die Struktur eines A-Schemas. Da es für jeden kommutativen Ring A mit 1 genau einen Homomorphismus

$$\mathbb{Z} \longrightarrow A$$

gibt, besitzt jedes affine Schema Spec A die Struktur eines $\mathbb{Z}$-Schemas. Dies gilt insbesondere für die affinen Schemata, die ein vorgegebenes Schema überdecken. Weil die Morphismen

$$\mathrm{Spec}\ A \longrightarrow \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$$

eindeutig bestimmt sind, setzen sie sich zu einem auf dem ganzen Schema definierten Morphismus mit Werten in Spec $\mathbb{Z}$ zusammen. Jedes Schema besitzt somit auf genau eine Weise die Struktur eines $\mathbb{Z}$-Schemas,

$$\mathrm{Sch} = \mathrm{Sch}/\mathbb{Z}.$$

Beispiel 2

Nach 3.7 besitzt $\mathbb{P}^N_A = \mathrm{Proj}\ A[X_0,\ldots,X_N]$ für jeden kommutativen Ring mit 1 die Struktur eines Schemas über A.

Nach 3.9 definiert jedes homogene Ideal $I \subseteq A[X_0,\ldots,X_N]$ ein abgeschlossenes Teilschema von $\mathbb{P}^N_A$. Dieses bekommt so ebenfalls die Struktur eines A-Schemas:

$$V(I) \hookrightarrow \mathbb{P}^N_A \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A.$$

3.11 Faserprodukte

Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und

$$f: X \longrightarrow Z \text{ und } g: Y \longrightarrow Z$$

zwei Morphismen von $\mathcal{C}$ mit demselben Ziel Z. Das Faserprodukt von f und g ist ein Objekt

$$W := X\times_Z Y$$

von $\mathcal{C}$ zusamme mit zwei Morphismen

$$f':W \longrightarrow X \text{ und } g':W \longrightarrow Y,$$

für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f'} & X \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

kommutativ ist und welche im folgenden Sinne universell sind bezüglich der angegebenen Eigenschaft: für je zwei Morphismen

$$f'': W'' \longrightarrow X \text{ und } g'': W'' \longrightarrow Y,$$

für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W'' & \xrightarrow{f''} & X \\ g''\downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

kommutiv ist, gibt es genau eine Morphismus φ:W" $\longrightarrow$ W mit f" = f'$\circ\varphi$ und g" = g'$\circ\varphi$.

Bemerkungen

(i) In der Kategorie Ens hat die Menge

$$X\times_Z Y = \{(x, y) \in X\times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

zusammen mit den natürlichen Projektionen

$$X\times_Z Y \longrightarrow X, (x,y) \mapsto x,$$

$$X\times_Z Y \longrightarrow Y, (x,y) \mapsto y,$$

gerade die Universalitätseigenschaft des Faserprodukts.

(ii) Durch die obige Beschreibung des Faserprodukts in Ens kann die allgemeine Universalitätseigenschaft des Faserprodukts in die Gestalt einer Bijektion bringen: die Universalitätseigenschaft in der Kategorie $\mathcal{C}$ besagt gerade, daß die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W'', X\times_Z Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W'',X) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W'',Z)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W'',Y),$$

$$W''\xrightarrow{\varphi} X\times_Z Y \quad \mapsto \quad (W''\xrightarrow{f'\circ\varphi}X, \quad W''\xrightarrow{g'\circ\varphi}Y)$$

bijektiv ist für jedes Objekt W" von $\mathcal{C}$.

(iii) Ist Z ein terminales Objekt (zum Beispiel eine einelementige Menge in Ens), so fällt das Faserprodukt über Z gerade mit dem gewöhnlichen Produkt zusammen,

$$X\times_Z Y = X \times Y \text{ für Z terminal.}$$

(iii) Nach (ii) überführt der kovariante Hom-Funktor $h^{W''}(?)$ = Hom(W", ?) Faserprodukte in Faserprodukte.

(iv) Je zwei Morphismen von affinen Schemata

$$\mathrm{Spec}\, A \longrightarrow \mathrm{Spec}\, C \text{ und } \mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, C$$

werden definiert durch die zugehöriben Ring-Homomorphismen

$$\varphi: C \longrightarrow A \text{ und } \psi: C \longrightarrow B.$$

Diese wiederum definieren Ring-Homomorphismen

$$A \longrightarrow A\otimes_C B,\ a \mapsto a\otimes 1, \text{ und } B \longrightarrow A\otimes_C B,\ b \mapsto 1\otimes b,$$

und damit Morphismen affiner Schemata

$$\mathrm{Spec}\, A\otimes_C B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A \text{ und } \mathrm{Spec}\, A\otimes_C B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, B.$$

Aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \psi\downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & A\otimes_C B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} c & \mapsto & \varphi(c) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi(c) & \mapsto & \varphi(c)\otimes 1 = 1\otimes\psi(c) \end{array}$$

ergibt sich die Kommutativität des zugehörigen Diagramms affiner Schemata

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ A\otimes_C B & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\ A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\ B & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\ C \end{array}$$

Die Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts übersetzt sich dabei gerade in die Aussage, daß Spec $A\otimes_C B$ gerade das Faserprodukt

$$\mathrm{Spec}\ A \times_{\mathrm{Spec}\ C} \mathrm{Spec}\ B$$

ist:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}(\mathrm{Spec}\ R, \mathrm{Spec}\ A\otimes_C B) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-Alg}}(A\otimes_C B, R)$$

$$= \{ \varphi: A\times B \longrightarrow R \mid \varphi \text{ bilinear über } C \}$$

$$=^{44} \{ (A \xrightarrow{f} R, B \xrightarrow{g} R) \mid f, g\in \mathrm{Mor}(\mathbb{Z}\text{-Alg}), f(c\bullet 1_A) = g(c\bullet 1_B) \}$$

$$= \mathrm{Hom}(A, R) \times_{\mathrm{Hom}(C,R)} \mathrm{Hom}(B, R)$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}(\mathrm{Spec}\ R, \mathrm{Spec}\ A) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}(\mathrm{Spec}\ R,\mathrm{Spec}\ C)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}(\mathrm{Spec}\ R, \mathrm{Spec}\ B)$$

Mit anderen Worten, Spec $A\otimes_C B$ hat in der Kategorie der affinen Spektren die Universalitätseigenschaft des Faserprodukts Spec $A\times_{\mathrm{Spec}\ C}$ Spec B.

(v) Aus der vorhergehende Aussage kann man die Existenz der Faserprodukte beliebiger Paare von Schema-Morphismen

$$X \longrightarrow Z \text{ und } Y \longrightarrow Z \tag{1}$$

ableiten: man überdecke Z durch affine Schemata und mache dasselbe für deren Urbilder in X und Y. Danach bilde man die zugehörigen Faserprodukte affiner Schemata und klebe die Ergebnisse in geeigneter Weise zusammen. Vom Ergebnis kann man zeigen, daß es die Universalitätseigenschaft des Faserprodukts der Morphismen (1) hat.

Beispiel 1

$$\mathbb{P}^N_A\otimes_C B := \mathbb{P}^N_{\mathrm{Spec}\ A}\times_{\mathrm{Spec}\ C} \mathrm{Spec}\ B = \mathbb{P}^N_{A\otimes_C B}$$

Sei $R := A[X]$ mit $X = X_0,\dots,X_N$. Betrachten wir das projektive Schema links und dessen offene Hauptmengen. Diese sind gerade die affinen Spektren der Ringe der folgenden Gestalt

$$R_{(F)}\otimes_C B = (R_F\otimes_C B)_0 = (\bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F^n} A[X] \otimes_C B)_0$$

$$= (\bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F^n} (A\otimes_C B)[X])_0$$

$$= (A\otimes_C B)[X]_{(F\otimes 1)},$$

d.h. die offenen Hauptmengen den projektiven Raums über $A\otimes_C B$.

Beispiel 2

---

[44] Für gegebenes φ setze man f(a) := φ(a,1) und g(b) = φ(1,b). Wegen φ(c•a, b) = φ(a, c•b) besteht dann die angegebene Identität für f und g.
Für gegebenes f und g setze man φ(a,b) = f(a)g(b). Weil f und g der angegebenen Identiät genügen, gilt dann φ(c•a, b) = φ(a, c•b).

Für jeden Morphismus f: $X \longrightarrow Y$ von Schemata und jede Einbettung i: $V \hookrightarrow Y$ einer offenen Teilmenge V in Y läßt sich die Projektion des Faserprodukts

$$X\times_Y V \longrightarrow V$$

in natürlicher Weise identifizieren mit der Einschränkung

$$f^{-1}(V) \longrightarrow V$$

von f auf V: es ist nicht schwer zu sehen, daß der letztere Morphismus zusammen mit der der natürlichen Einbettung $f^{-1}(V) \hookrightarrow X$ die Universalitätseigenschaft des Faserprodjukts $X\times_Y V$ besitzt. Offensichtlich ist

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \cup & & \cup \\ f^{-1}(U) & \longrightarrow & U \end{array}$$

kommutativ, und jeder Morphismus g: $W \longrightarrow X$, für welchen sich $f\circ g$ sich über die natürliche Einbettung $U \hookrightarrow Y$ faktorisiert, faktorisiert sich über $f^{-1}(U)$.

Dies kann man als Motivation für die Bezeichnung Faserprodukt ansehen: das Faserprodukt mit U ist gerade die “Faser” $f^{-1}(U)$ über U.
Analog kann man das Faserprodukt von f: $X \longrightarrow Y$ mit einer abgeschlossenen Einbettung $Z \hookrightarrow Y$ als Einschränkung $f^{-1}(Z) \longrightarrow Z$ von f auf die Faser über Z interpretieren, das Schema

$$f^{-1}(Z) := X\times_Y Z$$

heißt <u>schematheoretischen vollständiges Urbild</u> von Z bei f.

3.12 Projektive Morphismen

Ein Morphismus von Schemata

$$f: X \longrightarrow Y$$

heißt <u>projektiv</u>, wenn er lokal von der Gestalt

$$Z \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N_B \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec} B \qquad (1)$$

ist. Dabei seien B ein kommutativer Ring mit 1, φ der Morphismus von 3.7 und i eine abgeschlossene Einbettung. Genauer: für jedes Punkt $y \in Y$ gebe es eine affine Umgebung

$$\operatorname{Spec} B = V \subseteq Y\ ,\ y \in V$$

derart, daß der durch f induzierte Schema-Morphismus

$$f^{-1}(V) \longrightarrow V$$

in der angebenen Weise zerfällt in eine abgeschlossene Einbettung in einen projektiven Raum über einem affinen Spektrum und den natürlichen Morphismus auf das Basis-Spektrum.

Man sagt in der beschriebenen Situation auch, X ist <u>projektiv</u> über Y bezüglich f und spricht vom <u>Struktur-Morphismus</u> f des projektiven Schemas X über Y. Ein Schema X heißt <u>projektiv</u> (über dem Körper k), wenn es projektiv über Spec k ist.

Bemerkungen

(i) Projektive Morphismen sind abgeschlossen, d.h. sie bilden abgeschlossen Teilmengen in abgeschlossene Teilmengen ab.

(ii) Die Eigenschaft eines Morphismus projektiv zu sein, bleibt bei Basiswechsel erhalten, d.h. für jeden projektiven Morphismus

$$f: X \longrightarrow Y$$

und jeden beliebigen Morphismus $g: Y' \longrightarrow Y$ von Schemata ist der induzierte Morphismus

$$X' := X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$$

projektiv.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \supseteq & U \\ \uparrow & & \uparrow g & & \uparrow \\ X' & \longrightarrow & Y' & \supseteq & V \end{array}$$

Seien

$$U := \operatorname{Spec} B \subseteq Y$$

derart, daß $f^{-1}(U) \longrightarrow U$ die Gestalt (1) hat und

$$V := \operatorname{Spec} C \subseteq g^{-1}(U)$$

eine affine Umgebung, so ist die Einschränkung

$$X \times_Y V \longrightarrow V$$

von $X' \longrightarrow Y'$ auf V von der Gestalt

$$Z \otimes_B C \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N_B \otimes_B C \xrightarrow{\varphi} (\operatorname{Spec} B) \otimes_B C$$

$$\begin{array}{ccccc} Z \otimes_B C & \overset{i \otimes C}{\hookrightarrow} & \mathbb{P}^N_B \otimes_B C & \xrightarrow{\varphi \otimes C} & (\operatorname{Spec} B) \otimes_B C \\ & & \| & & \| \\ & & \mathbb{P}^N_C & \longrightarrow & \operatorname{Spec} C \end{array}$$

Man beachte, das Faserprodukt überführt abgeschlossene Einbettungen in abgeschlossene Einbettungen: ein Morphismus der Gestalt

$$\operatorname{Spec} R/J \longrightarrow \operatorname{Spec} R$$

wird durch tensorieren mit einer einer R-Algebra S zu einem Morphismus der Gestalt

$$\operatorname{Spec} (R/J) \otimes_R S \longrightarrow \operatorname{Spec} R \otimes_R S$$

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} (R/J) \otimes_R S & \longrightarrow & \operatorname{Spec} R \otimes_R S \\ \| & & \| \\ \operatorname{Spec} S/JS & \longrightarrow & \operatorname{Spec} S \end{array}$$

Das Gleichheitszeichen rechts ergibt sich aus der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts.

(iii) Wegen (i) und (ii) sind projektibve Morphismen universell abgeschlossen, d.h. sie bilden abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen ab, und diese Eigenschafte bleibt bei Basiswechsel erhalten. (Separierte) Morphismen (endlichen Typs) mit dieser Eigenschaft heißen auch <u>eigentlich</u>. Projektive Morphismen sind eigentlich. Es gibt eigentliche Morphismen, die nicht projektiv sind.[45] Die projektiven Morphismen bilden den Kontext, in welchem sich die

[45] vgl. Anhang B des Buches von Hartshorne: Algebraic geometry.

meisten zentralen Sätze der algebraischen Geometrie in natürlicher Wesie formulieren lassen.

(iii) Sind

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

Morphismen von Schemata mit der Eigenschaft, daß die Zusammensetzung $g\circ f$ projektiv ist, so ist auch f projektiv.

3.13 Beschreibung von Morphismen

3.13.1 Affiner Fall

Betrachten wir die folgenden Morphismen:

$$\mathrm{Spec}\ B \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Spec}\ A \hookrightarrow \mathbb{A}_k^N = \mathrm{Spec}\ k[x_1,\dots,x_N]$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec}\ B & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Spec}\ A \hookrightarrow \mathbb{A}_k^N & = & \mathrm{Spec}\ k[x_1,\dots,x_N] \\ & & \downarrow x_i & & \downarrow \\ & & \mathbb{A}_k^1 & & \mathrm{Spec}\ k[x_i] \end{array}$$

mit einem Körper k, welche von k-Algebra-Homomorphismen induziert werden:

$$\begin{array}{ccc} B \longleftarrow A & \overset{\rho}{\twoheadleftarrow} & k[x_1,\dots,x_N] \\ & & \cup \\ & & k[x_i] \end{array}$$

Der Homomorphismus $k[x_i] \longrightarrow B$ ist als k-Algebra-Homomorphismus durch ein Element $f_i \in B$ festgelegt, nämlich durch das Bild von x_i. Dabei kann man f_i als die Verpflanzung entlang φ der i-ten Koordinatenfunktion

$$x_i\colon \mathbb{A}_k^N \longrightarrow \mathbb{A}_k^1,\ p \mapsto x_i(p),$$

betrachten, d.h. $x_i \circ \varphi$ entspricht gerade der Abbildung

$$x_i \circ \varphi\colon \mathrm{Spec}\ B \longrightarrow \mathbb{A}_k^1,\ p \mapsto f_i(p).$$

Der Morphismus φ ist durch die Bilder der x_i in B gegeben:

$$\varphi\colon \mathrm{Spec}\ B \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A \hookrightarrow \mathbb{A}_k^N,\ p \mapsto (f_1(p), \dots, f_N(p)).$$

Als zugehörigen Morphismus der (globalen Schnitte der) Strukturgarben erhalten wir

$$B \longleftarrow k[x_1,...,x_N]$$

$$P(f_1, \dots , f_N) \leftarrow\!\shortmid P(x_1,...,x_N).$$

Dieser faktorisiert sich über den natürlichen Homomorphismus

$$\rho\colon k[x_1,...,x_N] \twoheadrightarrow A = k[x_1,...,x_N]/I,$$

d.h. die definierenden Gleichungen $\alpha \in I$ von Spec A in $\mathbb{A}_k^N$ werden in die Null abgebildet:

$$\alpha(f_1, \dots , f_N) = 0 \text{ für } \alpha \in I.$$

Umgekehrt definiert jedes N-Tupel von Elementen aus B, welches dieser Bedingung genügt, einen Morphismus

$$\mathrm{Spec}\ B \longrightarrow \mathbb{A}_k^N,$$

der sich über die natürliche Einbettung Spec A $\hookrightarrow \mathbb{A}_k^N$ faktorisiert.

3.13.2 Projektiver Fall

Betrachten wir die folgenden Morphismen von algebraischen Schemata.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\varphi} Y & \hookrightarrow & \mathbb{P}_k^N & = D_+(Y_0)\cup\dots\cup D_+(Y_N) \\ \cap & & & \| & . \\ \mathbb{P}_k^M & & & \mathrm{Proj}\ k[Y_0 \ \dots \ Y_N] & \end{array}$$

Lokal über $U := D_+(Y_i)$ erhalten wir einen Morphismus der Gestalt

$$\begin{array}{cl} \mathrm{Spec}\ B & \subseteq \varphi^{-1}(U) \longrightarrow U = \mathrm{Spec}\ k[Y_0,...,Y_N]_{(Y_i)} \\ \cap & \\ \mathrm{Spec}\ k[X_0,...,X_M]_{(F)} & \end{array}$$

welcher von Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{c} B \xleftarrow{h} k[\frac{Y_0}{Y_i},\dots,\frac{Y_n}{Y_i}] \\ \uparrow\!\!\uparrow \rho \\ k[X_0 \ \dots \ X_M]_{(F)} \end{array}$$

kommt. Die Bilder f_j der $\frac{Y_j}{Y_i}$ lassen sich repräsentieren durch homogene Quotienten $\frac{F_j}{F^n}$ mit deg F_j = n•deg F. O.B.d.A. können wir annehmen n = 1 (da sich F durch F^n ersetzen läßt). Damit ist h die Zusammensetzung des k-Algebra-Homomorphismus

$$k[\frac{Y_0}{Y_i}, ..., \frac{Y_N}{Y_i}] \longrightarrow k[X_0,...,X_M]_{(F)}, \frac{Y_j}{Y_i} \mapsto \frac{F_j}{F},$$

mit dem natürlichen Homomorphismus ρ auf den Faktorring. Diesen Homomorphismus kann man sich entstanden denken aus dem k-Algebra-Homomorphismus (der homogen vom Grad deg F ist)

$$k[Y_0,...,Y_N] \longrightarrow k[X_0,...,X_M], Y_j \mapsto F_j,$$

(mit $F_i := F$). Auf Spec B $\subseteq \mathbb{P}^M_k$ ist damit φ gegeben durch

$$\varphi|_{\text{Spec B}} : \text{Spec B} \hookrightarrow \mathbb{P}^M_k \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{P}^N_k, p \mapsto [F_0(p),...,F_N(p)].$$

Wegen φ(Spec B) $\subseteq$ X gilt

$$\alpha(F_0,...,F_N) \in I := \text{Ideal von X in } \mathbb{P}^M_k$$

für alle $\alpha \in J$:= Ideal von Y in $\mathbb{P}^N_k$.

Zusammenfassung

(i) Seien k ein Körper,

$$X = V(I) \subseteq \mathbb{P}^M_k \text{ und } Y = V(J) \subseteq \mathbb{P}^N_k$$

abgeschlossene Teilschemata mit den homogenen Idealen[46]

$$I \subseteq k[X_0, ... , X_M] , J \subseteq k[Y_0, ... ,Y_N]$$

und

$$f: X \longrightarrow Y$$

ein Morphismus (welcher wegen der Projektivität von X über k automatisch projektiv ist). Dann gibt es für jeden Punkt $x \in X$ homogene Polynome

$$F_0, ... , F_N \in k[X_0, ... ,X_M],$$

mit

$$G(F_0, ... , F_N) \in I \text{ für jedes } G \in J$$

die nicht alle in x gleich Null sind[47], und eine offene Umgebung

$$U \subseteq X$$

von x derart daß die Einschränkung von f auf U durch die Abbildungsvorschrift

$$U \longrightarrow \mathbb{P}^N_k , u = [u_0 , ... , u_M] \mapsto [F_0(u), ... , F_N(u)]$$

gegeben ist.[48]

[46] d.h. X = Proj $k[X_0, ... , X_M]/I$ und Y = Proj $k[Y_0, ... ,Y_N]/J$

[47] d.h. für mindestens ein i liegt die Restklasse von F_i im projektiven Koordinatenring von X,

$$F_i|_X \in R := k[X_0, ... , X_M]/I ,$$

nicht im Primideal $x \in$ Proj R. Dabei bezeichne I das homogene Ideal, welches X definiert,

$$X = V(I).$$

[48] Die homogenen Polynome F_i des Grades d definieren einen Homomorphismus graduierter Ringe

$$k[Y_0, \dots , Y_N] \longrightarrow k[X_0, \dots , X_M] \text{ , } Y_i \mapsto F_i \text{ ,}$$

(des Grades d). Nach Wahl der F_i wird dabei das Ideal J in das Ideal I abgebildet, d.h. die Abbildung induziert eine Homomorphismus graduierter Ringe

$$S:= k[Y_0, \dots , Y_N]/J \longrightarrow R:=k[X_0, \dots , X_M]/I.$$

O.B.d.A. liege die Restklasse $\overline{F}_i$ von F_i nicht in x. Weil diese das Bild der Restklasse von Y_i bei dieser Abbildung ist, erhalten wir einen Homomorphismus

$$S_{Y_i} \longrightarrow R_{F_i}$$

und damit einen Homomorphismus

$$\mathcal{O}_Y(D_+(Y_i)) = S_{(Y_i)} \longrightarrow R_{(F_i)} = \mathcal{O}_X(D_+(F_i)),$$

also einen Morphismus affiner Spektren

$$x \in D_+(F_i) = \mathrm{Spec}\ R_{(F_i)} \longrightarrow \mathrm{Spec}\ S_{(Y_i)} = D_+(Y_i).$$

Die obige Aussage soll bedeuten, daß dieser Morphismus mit dem Morphismus f in einer Umgebung von x übereinstimmt.

Anschaulich gesprochen ist ein Morphismus eine Abbildung, die lokal von der Gestalt

$$x \mapsto f(x) = (\frac{r_1(x)}{s(x)} , \dots , \frac{r_N(x)}{s(x)})$$

ist mit Polynomen $r_1, \dots , r_N$ und s, wobei s in einer Umgebung des betrachteten Punktes $x = x^0$ ungleich Null ist. O.B.d.A. liege x^0 in $D_+(X_0)$ und das Bild von x^0 in $D_+(Y_0)$. Dann können wir schreiben $x = (\frac{X_1}{U_0} , \dots , \frac{X_N}{X_0}) = \frac{X}{X_0}$ und das Bild von x hat in projektiven Koordinaten die Gestalt

$$\begin{aligned} f(x) &= [1, \frac{r_1(x)}{s(x)} , \dots , \frac{r_N(x)}{s(x)}] = [s(x), r_1(x), \dots , r_N(x)] \\ &= [s(\frac{X}{X_0}), r_1(\frac{X}{X_0}), \dots , r_N(\frac{X}{X_0})] \\ &= [X_0^m \bullet s(\frac{X}{X_0}), X_0^m \bullet r_1(\frac{X}{X_0}), \dots , X_0^m \bullet r_N(\frac{X}{X_0})] \end{aligned}$$

Für m hinreichend groß sind die projektiven Koordinaten von f(x) in der letzten Darstellung homogen vom selben Grad m, und die erste Koordinate ist in einer

(ii) Seien k ein Körper,

$$X = V(I) \subseteq \mathbb{P}_k^M \text{ und } Y = V(J) \subseteq \mathbb{P}_k^N$$

abgeschlossene Teilschemata mit den homogenen Idealen[49]

$$I \subseteq k[X_0, \dots , X_M] , J \subseteq k[Y_0, \dots ,Y_N].$$

Weiter seien eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup U_\alpha$$

von X gegeben und für jedes U_α homogene Polynome

$$F_0^\alpha, \dots , F_N^\alpha \in k[X_0, \dots ,X_M],$$

gleichen Grades mit

$$G(F_0^\alpha, \dots , F_N^\alpha) \in I \text{ für jedes } G \in J,$$

die in keinem Punkt von U_α gleichzeitig Null sind. Diese definieren für jedes α einen Morphismus von Schemata

$$f_\alpha:U_\alpha \longrightarrow Y\ (\subseteq \mathbb{P}_k^N) , u = [u_0 , \dots , u_M] \mapsto [F_0^\alpha(u), \dots , F_N^\alpha(u)].$$

Gilt außerdem für je zwei Indizes α', α''

$$F_i^{\alpha'}F_j^{\alpha''} - F_j^{\alpha'}F_i^{\alpha''} \in I \text{ für } i, j = 0, \dots , N,$$

so stimmen die Morphismen $f_{\alpha'}$ und $f_{\alpha''}$ auf $U_{\alpha'} \cap U_{\alpha''}$ überein (für je zwei Indizes α', α'') und definieren so einen Morphismus

$f: X \longrightarrow Y$ mit $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$ für jedes α.

3.13.3 Beispiel: Die Veronese-Einbettung

Seien k ein Körper, $X_0, \dots , X_N$ Unbestimmte und $\mu_0, \dots , \mu_M$ die Potenzprodukte des Grades d in den X_i. Dann ist der Morphismus

$$\mathbb{P}_k^N \longrightarrow \mathbb{P}_k^M , x = [x_0, \dots , x_N] \mapsto [\mu_0(x), \dots , \mu_M(x)],$$

eine abgeschlossene Einbettung.

Beispiel 1

Die Abbildung

Umgebung von x^0 ungleich Null (weil x^0 in $D_+(X_0)$ liegt, d.h. $U_0(x^0) \neq 0$, und $f(x^0)$ wohldefiniert ist, d.h. $s(\frac{X}{X_0}(x^0)) = s(x^0) \neq 0$.

[49] d.h. X = Proj $k[X_0, \dots , X_M]/I$ und Y = Proj $k[Y_0, \dots ,Y_N]/J$

$$\mathbb{P}^1_k \longrightarrow \mathbb{P}^2_k,\ [s,t] \mapsto [s^2, st, t^2],$$

identifiziert die projektive Gerade mit der durch die Gleichung

$$XZ - Y^2 = 0.$$

gegebenen Quadrik der projektiven Ebene. Dies ist eine Parabel $x - y^2 = 0$, wenn man V(Z) als Fernhyperebene auffaßt, und eine Hyperbel $xz - 1 = 0$, wenn man V(Y) als Fernhyperebene ansieht.

Beispiel 2

Die Abbildung

$$\mathbb{P}^1_k \longrightarrow \mathbb{P}^3_k,\ [s,t] \mapsto [s^3, s^2t, st^2, t^3],$$

identifiziert die projektive Gerade mit der durch die Gleichungenn

$$XW - YZ = 0,\ Y^2 - XZ = 0,\ Z^2 - YW = 0$$

gegebenen projektiven Raumkurve dritten Grades.

3.13.4: Die Segre-Einbettung

Die Abbildung

$$\mathbb{P}^M_k \times \mathbb{P}^N_k \longrightarrow \mathbb{P}^{(M+1)(N+1)-1},\ ([x_0, \dots, x_M], [y_0, \dots, y_N]) \mapsto [\dots, x_i y_j, \dots],$$

ist eine abgeschlossene Einbettung, welche das direkte Produkt links mit der abgeschlossenen Teilvarietät mit den folgenden Gleichungen identifiziert.

$$X_{ij}X_{k\ell} - X_{i'j'}X_{k'\ell'} = 0$$

Dabei sollen die Indizes $i, j, k, \ell, i', j', k', \ell'$ alle Werte durchlaufen mit

$$i + k = i'+k' \text{ und } j'+\ell = j + \ell'.$$

Beispiel

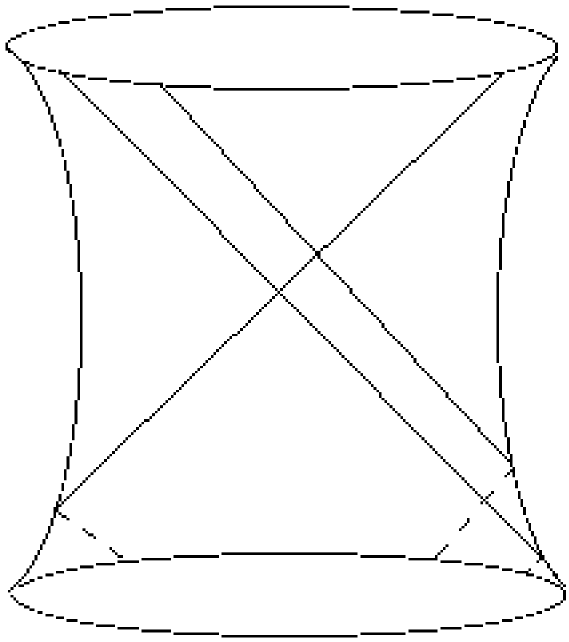
Die Segre-Einbettung identifiziert $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ mit der Quadrik des $\mathbb{P}^3_k$, welche durch die Gleichung

$$Q{:}X_{01}X_{10} - X_{00}X_{11} = 0$$

gegeben ist. Die Projektionen des Produkts $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ auf die beiden Faktoren definieren Morphismen

$$Q \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$$

deren Fasern über den rationalen Punkten sämtlich isomorph sind zur projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_k$.[50]



3.13.4 Beispiel: Aufblasung des Ursprungs im $\mathbb{A}^N_k$

Wir beginnen mit einer Betrachtung der klassischen algebraischen Geometrie. Seien

$$X := \mathbb{A}^N_k$$

der affine Raum über k der Dimension N und $\widetilde{X}$ das Teilschema von $\mathbb{A}^N_k \times \mathbb{P}^{N-1}_k$,

$$\widetilde{X} \subseteq \mathbb{A}^N_k \times \mathbb{P}^{N-1}_k,$$

mit den Gleichungen

$$x_i Y_j - x_j Y_i = 0 \; (i, j = 1, \ldots , N) \tag{1}$$

Dabei seien $x_1, \ldots , x_N$ die affinen Koordinaten des $\mathbb{A}^N_k$ und $Y_1, \ldots , Y_N$ die projektiven Koordinaten des $\mathbb{P}^{N-1}_k$. Weiter sei

$$\pi : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{A}^N_k$$

---

[50] Die Faserprodukte dieser Morphismen mit den natürlichen Einbettungen $\{x\} \hookrightarrow \mathbb{P}^1_k$ der abgeschlossenen Punkte von $\mathbb{P}^1_k$ sind isomorph zu projektiven Geraden über den Restekörpern $\kappa(x)$ dieser Punkte.

die Einschränkung auf $\widetilde{X}$ der Projektion $p_1: \mathbb{A}^N_k \times \mathbb{P}^{N-1}_k \longrightarrow \mathbb{A}^N_k$ auf den ersten Faktor. Für jeden rationalen Punkt

$$a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{A}^N_k,\ a_1, \dots, a_N \in k,$$

der vom Ursprung verschieden ist, sagen wir $a_i \neq 0$, besteht

$$\pi^{-1}(a)$$

aus den Punkten der Gestalt $(a,[y_1, \dots, y_N])$ mit

$$a_i y_j - a_j y_i = 0,$$

d.h. mit $y_j = \frac{a_j}{a_i} y_i$ für alle j, d.h. es ist

$$[y_1, \dots, y_N] = [\frac{a_1}{a_i} y_i, \dots, \frac{a_N}{a_i} y_i] = [a_1, \dots, a_N] =: [a].$$

Die Faser über a besteht also aus nur einem Punkt,

$$\pi^{-1}(a) = \{(a, [a])\} \text{ für } a \neq 0. \qquad (2)$$

Die zweite Koordinate ist also durch die erste eindeutig festgelegt. Dagegen kann für a = 0 die zweite Koordinate beliebig sein: sind in (1) die "kleinen" Koordinaten gleich Null, so können die "großen" beliebig sein, d.h.

$$\pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{P}^{N-1}_k \qquad (3)$$

Die Identitäten (2) und (3) sprechen dafür, daß man X und $\widetilde{X}$ identifizieren kann, wenn man aus X den Punkt 0 und aus $\widetilde{X}$ den Ausnahme-Divisor[51] $\{0\} \times \mathbb{P}^{N-1}_k$ entfernt. Genauer: die Abbildung

$$\mathbb{A}^N_k - \{0\} \longrightarrow \widetilde{X} - \pi^{-1}(0),\ a \mapsto (a, [a]),$$

ist in allen Punkten regulär und ist invers zu π, also ein Isomorphismus von Schemata.

Zusammengefaßt kann man sagen, daß $\widetilde{X}$ aus X dadurch entsteht, daß aus X der Punkt 0 entfernt und der Divisor $\mathbb{P}^{N-1}_k$ hinzugefügt wird. Die Abbildung π heißt Aufblasung,

---

[51] Ein (Weil-) Divisor eines Schemas $\widetilde{X}$ ist eine formale ganzzahlige Linearkombination von irreduziblen abgeschlossenen Teilschemata von $\widetilde{X}$, deren Dimension um 1 kleiner ist als die von $\widetilde{X}$. Der Begriff kommt aus der Theorie der Riemannschen Flächen, wo es sich als nützlich erwiesen hat, formale Linearkombinationen von Punkten zu betrachten, um das Polstellen-Nullstellen-Verhalten von meromorphen Funktionen zu untersuchen.

von X im Punkt 0. Analog definiert man die Aufblasung von X in einem beliebigen anderen rationalen Punkt von X.

Bemerkung zum Ausnahme Divisor.

Nach (1) und (2) ist für jede Gerade

$$g = ka$$

durch den Ursprung das V das vollständige Urbild

$$\pi^{-1}(g) = E \bigcup \tilde{g}$$

die Vereinigung des Ausnahme-Divisors $E := \{0\}\times\mathbb{P}_k^{N-1}$ mit einer abgeschlossenen Teilvarietät

$$\tilde{g} \subseteq \tilde{X}$$

die bei π isomorph auf g abgebildet wird. Die Kurve $\tilde{g}$ heißt strikte Transformierte von g bei π. Sie schneidet sich mit dem Ausnahme-Divisor in genau einem Punkt,

$$\tilde{g} \bigcap E = \{ (a, [a])\}.$$

Umgekehrt gibt es zu jeden (rationalen) Punkt $p = (a, [a]) \in E$ des Ausnahme-Divisors genau eine Gerade $g = ka$ durch den Ursprung, so daß sich die strikte Transformierte mit E in p schneidet.

Die (rationalen) Punkte von E entsprechen also gerade den Geraden von X durch den Urspung (oder den möglichen Richtungen in 0, die es auf X gibt).

Formale Beschreibung der Aufblasung.

Übersetzen wir die obige Konstruktion in die Sprache der Schemata. Es gilt

$$X = \text{Spec } A \text{ mit } A:= k[x_1, \dots , x_N]$$

und

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_k^N\times\mathbb{P}_k^{N-1} &= \text{Spec } A \times_k \text{Proj } k[Y_1, \dots , Y_N] \\ &= \text{Proj } A\otimes_k k[Y_1, \dots , Y_N] \\ &= \text{Proj } A[Y_1, \dots , Y_N] \\ &= \text{Proj } A[Y]\end{aligned}$$

Der Ursprung $0 \in X$ entspricht gerade dem maximalen Ideal

$$m := (x_1, \dots , x_N).$$

Die abgeschlossene Teilvarietät $\tilde{X}$ wird durch das Ideal I von $A[Y_1, \dots , Y_N]$ definiert,

$$I := (x_iY_j - x_jY_i \mid i,j = 1,...,N \} \subseteq A[Y]$$

welches von den linken Seiten von (1) erzeugt wird. Betrachten wir den Homomorphismus graduierter Ringe

$$h: A[Y] \longrightarrow \oplus_{n=0}^{\infty} m^n$$

mit $h(p(Y)) = p(x) \in m^n$ für jedes homogene Polynom $p \in A[Y]$ des Grades n. Für

$$p = x_iY_j - x_jY_i$$

gilt $h(p) = x_ix_j - x_jx_i = 0$. Die Erzeuger des Ideals I liegen also im Kern von h, d.h. es gilt

$$I \subseteq \text{Ker}(h).$$

Durch direktes Nachrechnen sieht man, daß sogar das Gleichheitszeichen gilt, d.h. es ist

$$A[Y]/I = \oplus_{n=0}^{\infty} m^n ,$$

also

$$\tilde{X} = \text{Proj} \oplus_{n=0}^{\infty} m^n$$

3.13.5 Aufblasung eines affinen Schemas entlang eines abgeschlossenen Teilschemas.

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und $I \subseteq A$ ein Ideal und R die graduierte A-Algebra

$$R := \oplus_{n=0}^{\infty} R_n \text{ mit } R_n := I^n$$

Dann induziert die natürliche Einbettung

$$A = R_0 \hookrightarrow R$$

einen Morphismus von Schemata

$$\pi: \tilde{X} := \text{Proj } R \longrightarrow \text{Spec } A = X,\ p \mapsto A \cap p,$$

welcher Aufblasung von X entlang des abgeschlossenen Teilschemas

$$Y := V(I) \subseteq \text{Spec } A = X$$

heißt. Dieser Morphismus induziert einen Isomorphismus (offener Teilschemata)

$$\tilde{X} - \pi^{-1}(Y) \longrightarrow X - Y. \qquad (1)$$

Das Teilschema

$$\pi^{-1}(Y) \qquad (2)$$

ist ein effektiver (Cartier-) <u>Divisor</u> [52] von $\widetilde{X}$ und als Schema isomorph zu

$$\pi^{-1}(Y) \cong \operatorname{Proj} \oplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}. \tag{3}$$

Es heißt Ausnahme-Divisor der Aufblasung π.

Beispiel

In der Situation des vorangehenden Abschnitts kann man

$$m^n/m^{n+1}$$

identifizieren mit dem k-Vektorraum, der von den Potenzprodukten des Grades n in x_1, ... , x_N erzeugt wird. Der graduierte Ring

$$\oplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1} \cong k[x_1, \dots , x_N]$$

ist somit isomorph zum Polynomring in n Unbestimmten. Der Ausnahme-Divisor

$$\operatorname{Proj} \oplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1} \cong \mathbb{P}_k^{N-1}$$

ist der projektive Raum der Dimension N-1 über k.

Beweis. <u>1. Schritt</u>. Der Morphismus (1) ist ein Isomorphismus.

Die offenen Hauptmengen $D(f) \subseteq \operatorname{Spec} A$ mit $f \in I$ liegen im Komplent des Zentrums $Y = V(I)$ und bilden eine offene Überdeckung dieses Komplements. Es reicht also zu zeigen, die Einschränkungen

$$\widetilde{X} - \pi^{-1}(D(f)) \longrightarrow D(f) \tag{4}$$

von (1) sind Isomorphismen. Die Morphismen

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} = \operatorname{Proj} R & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A \\ & & \cup \\ & & D(f) \end{array}$$

kommen von den Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} R \hookleftarrow R_0 = & A \\ & \downarrow \\ & A_f \end{array}$$

---

[52] Ein (effektiver) Cartier-Divisor D eines Schemas $\widetilde{X}$ ist ein abgeschlossenes Teilschema von $\widetilde{X}$, welches sich lokal durch nur eine Gleichung definieren läßt, wobei diese Gleichung kein Nullteiler von $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ ist. Genauer: für jeden Punkt $x \in \widetilde{X}$ gibt es eine affine Umgebung $U = \operatorname{Spec} A \subseteq \widetilde{X}$ von x und einen Nicht-Nullteiler $f \in A$ mit

$$D \cap U = V(f) \qquad \text{(in } U = \operatorname{Spec} A).$$

Die Nicht-Nullteiler-Bedingung sorgt gerade dafür, daß die Dimension von D in jedem Punkt um 1 kleiner ist als die von $\widetilde{X}$.

Also wird (4) induziert durch den natürlichen Homomorphismus von Ringen mit 1,

$$A_f \longrightarrow R\otimes_A A_f = \oplus_{n=0}^{\infty} (I^n \otimes_A A_f) = \oplus_{n=0}^{\infty} I^n A_f$$

Wegen $f^n \in I^n$ enthält $I^n A_f$ eine Einheit des Rings A_f, d.h. es ist $I^n A_f = A_f$, d.h. es ist

$$R\otimes_A A_f = \oplus_{n=0}^{\infty} A_f = A_f[T]$$

mit einer Unbestimmten T. Damit bekommt (4) die Gestalt

$$\mathrm{Proj}\, B[T] \longrightarrow \mathrm{Spec}\, B,\ p \mapsto p\cap B,$$

mit $B = A_f$. Da das irrelevante Ideal von B[T] vom Element T erzeugt wird, gilt

$$\mathrm{Proj}\, B[T] = D_+(T) = \mathrm{Spec}\, B[T]_{(T)}$$

und

$$B[T]_{(T)} = \{\frac{bT^n}{T^n} \mid b \in B\} = B.$$

Mit anderen Worten, (4) hat bis auf Isomorphie die Gestalt

$$\mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, B$$

und wird von der identischen Abbildung $B \longrightarrow B$ induziert.

<u>2. Schritt</u>. Das abgeschlossene Teilschema (2) ist ein effektiver Cartier-Divisor.

Die Elemente $f \in I$, aufgefaßt als homogene Elemente des Grades 1 von

$$R = \oplus_{n=0}^{\infty} I$$

erzeugen das irrelevante Ideal von R (weil für jedes n die Potenz I^n von Potenzprodukten des Grades n solcher Elemente erzeugt wird). Deshalb bilden die affinene offenen Teilschemata der Gestalt

$$D_+(f) := \mathrm{Spec}\, R_{(f)}$$

eine offene Überdeckung von $\widetilde{X}$, und π ist lokal von der Gestalt

$$\mathrm{Spec}\, R_{(f)} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A,$$

d.h. wird lokal induziert von den natürlichen Abbildungen

$$h: A \longrightarrow R_{(f)} = \{\frac{a}{f^n} \mid a \in I^n\} \quad (\subseteq R_f)$$

$$= \bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{I^n}{f^n}$$

$$= A[\tfrac{I}{f}] \qquad\qquad (\subseteq A_t).$$

Die Aufblasung π ist somit lokal von der Gestalt

$$\pi_f : D_+(f) = \operatorname{Spec} A[\tfrac{I}{f}] \longrightarrow \operatorname{Spec} A,\ f \in I.$$

Betrachten wir jetzt die Faser des Zentrums $Y = V(I)$. Die Morphismen

$$\begin{array}{ccc} D_+(f) = \operatorname{Spec} A[\tfrac{I}{f}] & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A \\ & & \bigcup \\ & & V(I) \end{array}$$

kommen von den Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} A[\tfrac{I}{f}] & \longleftarrow & A \\ & & \downarrow \\ & & A/I \end{array}$$

Das abgeschlossene Teilschema $\pi^{-1}(Y)$ ist also auf $D_+(f)$ isomorph zu

$$\operatorname{Spec} A[\tfrac{I}{f}] \otimes_A A/I = \operatorname{Spec} A[\tfrac{I}{f}]/IA[\tfrac{I}{f}]$$

wird also auf $D_+(f)$ durch das Ideal

$$IA[\tfrac{I}{f}]$$

von $A[\tfrac{I}{f}]$ $(\subseteq A_t)$ definiert. Wegen

$$fA[\tfrac{I}{f}] \subseteq IA[\tfrac{I}{f}] = f \cdot \tfrac{I}{f} A[\tfrac{I}{f}] \subseteq fA[\tfrac{I}{f}]$$

gilt $IA[\tfrac{I}{f}] = fA[\tfrac{I}{f}]$, d.h. das Ideal wird vom Element f erzeugt. Dieser Erzeuger f ist außerdem ein Nicht-Nullteiler von $A[\tfrac{I}{f}]$ $(\subseteq A_t)$.

<u>3. Schritt</u>. Der Ausnahme-Divisor ist als abgeschlossenes Teilschema von $\widetilde{X}$ isomorph zur rechten Seite von (3).

Durch die natürliche Surjektion

$$R := \oplus_{n=0}^{\infty} I^n \longrightarrow \oplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1} =: S$$

wird die rechte Seite von (3) ein abgeschlossenes Teilschema von $\widetilde{X}$. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß es lokal durch dasselbe Ideal definiert wird wie der Ausnahme-Divisor. Die natürliche Einbettung $\operatorname{Proj} S \hookrightarrow \operatorname{Proj} R$ ist auf $D_+(f)$, $f \in I$, von der Gestalt Spec $S_{(\overline{f})} \hookrightarrow R_{(f)}$, wenn $\overline{f} \in I/I^2$ das Bild von f beim natürlichen Homomorphismus $R \longrightarrow S$ bezeichnet. Lokal wird die natürliche Einbettung also von der natürlichen Surjektion

$$R_{(f)} \twoheadrightarrow S_{(\overline{f})} \tag{5}$$

induziert. Das Ideal der rechten Seite von (3) in $D_+(f)$ ist somit gerade der Kern des Homomorphismus (5).

Den Ring links haben wir oben bereits beschrieben,

$$R_{(f)} = A[\frac{I}{f}].$$

Wegen $S = R/IR$ folgt $S_f = (RIR)_f = R_f/IR_f$. Der Kern von (5) ist somit die Einschränkung des Kerns von

$$R_f \longrightarrow R_f/IR_f$$

auf die Elemente des Grades 0. Das gesuchte Ideal ist somit gleich $IR_f \cap R_{(f)}$. Zum Beweis der Behauptung, reicht es zu zeigen,

$$IR_f \cap R_{(f)} = fR_{(f)}.$$

Wegen $f \in I$ gilt trivialerweise "$\supseteq$". Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Ein Element des Grades 0 von IR_f ist eine Linearkombination mit Koeffizienten aus I von Elementen des Grades 0 aus R_f. Es kann also in der Gestalt

$$\alpha = \frac{a}{f^n} \text{ mit } a \in I^{n+1}$$

geschrieben werden. Dann gilt aber

$$\alpha = f\bullet\frac{a}{f^{n+1}} \in fR_{(f)}$$

QED.

Bemerkungen

(i) Sei k ein Körper. In der klassischen algebraischen Geometrie hat man einen Morphismus

$$\mathbb{A}_k^{N+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_k^N,\ a \mapsto [a],$$

der jeden vom Ursprung verschiedenen Punkt a abbildet auf die Gerade durch a und den Ursprung. Für jedes homogene Ideal $J \subseteq k[X_0,...,X_N]$ induziert diese Abbildung außerhalb des Ursprungs 0 einen Morphismus

$$\pi: X' - \{0\} \longrightarrow X$$

der durch J definierten affinen algebraischen Menge

$$X' := V(J) \subseteq \mathbb{A}_k^{N+1}$$

auf die durch J definierte projektive algebraische Menge

$$X := V(J) \subseteq \mathbb{P}_k^N.$$

Für jeden Punkt $[a] = ka \in X$ ist

$$\pi^{-1}([a]) = [a] - \{0\}$$

die Gerade durch a und den Ursprung, wobei der Ursprung entfernt wurde.

Die affine Menge $V(J) \subseteq \mathbb{A}_k^{N+1}$ ist für homogene Ideal J ein <u>Kegel</u> mit der Spitze 0, d.h. eine algebraische Menge mit der Eigenschaft, daß mit jedem Punkt die Verbindungsgerade mit dem Ursprung ganz in der Menge liegt. Für jeden (kommutativen) graduierten Ring R (mit 1) nennt man deshalb

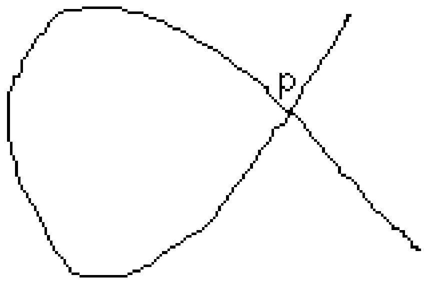
$$\text{Spec } R$$

den <u>affinen Kegel</u> über dem projektiven Schema Proj R.

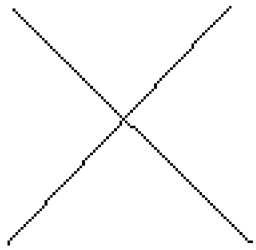
(ii) Den affinen Kegel über dem Ausnahme-Divisor,

$$\text{Spec } \oplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}, \tag{1}$$

kann man im klassichen Kontext identifizieren mit der Menge der Tangenten an X in den Punkten von V(I). Die Punkte des Ausnahme-Divisors entsprechen also wieder den möglichen Richtungen in den Punkten von V(I). Das Schema (1) heißt deshalb auch <u>Tangentialkegel</u> von X entlang V(I).



X



Tangentialkegel von X im Punkt p

(ii) <u>Die Ideal-Garbe eines abgeschlossenen Teilschemas</u>. Um den Begriff der Aufblasung auf den Fall nicht notwendig affiner Schemata zu verallgemeinern, brauchen wir eine Beschreibung der abgeschlossenen Teilschemata mit Hilfe von Garben. Zu jeder abgeschlossenen Einbettung

$$i: Y \hookrightarrow X$$

von Schemata gehört eine Surjektion von Ring-Garben

$$i^{\#}: \mathcal{O}_X \longrightarrow i_* \mathcal{O}_Y$$

also eine exakte Sequenz von Garben

$$0 \longrightarrow I_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_* \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0,$$

wobe I_Y eine Garbe von Idealen von $\mathcal{O}_X$ ist. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ besteht

$$I_Y(U)$$

aus den regulären Funktionen auf U, welche auf $U \cap Y$ gleich Null sind. Umgekehrt ist durch die Ideal-Garbe I_Y das abgeschlossene Teilschema Y von X festgelegt. Für affine offene Teilmengen U = Spec A von X ist $I_Y(U)$ gerade das Ideal von $\mathcal{O}_X(U) = A$, welches das Teilschema $Y \cap U$ von U definiert. Für jede affine offene Teilmenge $U \subseteq X$ kann man dann die Aufblasung

$$\pi_U: \mathrm{Proj} \oplus_{n=0}^{\infty} I_Y(U)^n \longrightarrow \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_X(U) = U \qquad (2)$$

betrachten. Für je zwei solche affine offene Mengen U' und U" und beliebige offene Mengen $U \subseteq U' \cap U''$ sind dann die vollständigen Urbilder von U bezüglich der Aufblasungen von U' und U" isomorph zur Aufblasung von U.

Man kann deshalb die Aufblasungen (2) entlang dieser gemeinsamen Urbilder identifizieren und erhält so einen über ganz X definierten Morphismus

$$\pi\colon \mathrm{Proj}\ \oplus_{n=0}^{\infty} I_Y^n \longrightarrow X$$

der die Konstruktion der Aufblsung im affinen Fall verallgemeinert. So ist π außerhalb der Punkte über dem Zentrum Y ein Isomorphismus, die Faser über dem Zentrum ist ein Cartier-Divisoer, den man mit

$$\mathrm{Proj}\ \oplus_{n=0}^{\infty} I_Y^n/I_Y^{n+1}$$

identifizieren kann. Für jede affine offene Teilmenge $U \subseteq X$ erhält man durch Einschränken auf U eine Aufblasung der Gestalt (2).

(iii) Nicht jede Ideal-Garbe von $\mathcal{O}_X$ ist die Garbe eines abgeschlossenen Teilschemas von X. Um Ideal-Garben zu abgeschlossenen Teilschemata zu erhalten, muß man eine Zusatzforderung stellen: man muß von fordern, daß es sich um sogenannte <u>kohärente</u> Garben handelt. Um die Bedingung der Kohärenz zu verstehen, ist es sinnvoll sie im Zusammenhang mit dem Begriff des <u>Vektorraumbündels</u> zu betrachten, den wir demnächst behandeln werden.

(iv) Aufblasungen lassen sich durch eine Universalitätseigenschaft beschreiben: jeder Morphismus

$$f\colon X' \longrightarrow X,$$

für welchen $f^{-1}(Y)$ ein effektiver Cartier-Divisor ist, faktoriseirt sich eindeutig über die Aufblasing von X mit dem Zentrum Y.

(v) Jeder Morphismus $f\colon X' \longrightarrow X$ von projektiven Schemata, der auf irgendwelchen offenen Teilmengen $U' \subseteq X$ und $U \subseteq X$ einen Isomorphismus $U \longrightarrow U'$ induziert läßt sich mit einer Aufblasung identifizieren.

3.14 Dimension

3.14.1 Vorbetrachtungen

(i) In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff der <u>Dimension</u> eines Schemas X einführen. Dies ist eine nicht-negative genze Zahl oder ∞, die wir mit

$$\dim X$$

bezeichnen werden. Gleichzeitig werden wir den Begriff der Dimension eines kommutativen Rings A mit Eins einführen,

$$\dim A.$$

Die Definitionen sind so gewählt, daß gilt

$$\dim \mathrm{Spec}\ A = \dim A.$$

Diese Definitionen sind spezifisch für die Theorie der Schemata bzw. die kommutative Algebra. Um sie von anderen Dimensionsbegriffen zu unterscheiden, nennt die hier betrachtete Dimension auch <u>Krull-Dimension</u>. Wir beginnen damit, Eigenschaften zu sammeln, die ein vernüftiger Dimensionsbegriff haben sollte.

(ii) Die Definition sollte natürlich so beschaffen sein, daß

$$\dim \mathbb{A}_k^N = \dim k[x_1,...,x_n] = n$$

gilt.

(iii) Falls ein surjektiver Morphismus f: X $\twoheadrightarrow$ Y existiert, sollte

$$\dim X \geq \dim Y$$

gelten, denn man kann sich Y aus X entstanden denken durch Identifikation der Punkte von X, die in derselben Faser von liegen. Falls die Fasern von f endlich sind, sollte sogar

$$\dim X = \dim Y$$

gelten.

(iv) Falls X ein abgeschlossenes oder offenes Teilschema von Y ist, so sollte

$$\dim X \subseteq \dim Y$$

gelten.

(v) Die Vereinigung von zwei Kurven sollte als eindimensional, die Vereinigung von zwei Flächen als zweidimensional angesehen werden. Aber welche Dimension sollte die Vereinigung einer Kurve mit einer Fläche haben ? Wegen (iv) führt dies zu folgender Antwort.

$$\dim X = \max \{\dim X', \dim X''\}$$

falls X' und X" abgeschlossene Teilschemata des Schemas X sind mit

$$X = X' \cup X''.$$

Die Frage legt aber außerdem nahe, daß es einen <u>lokalen Dimensionsbegriff</u> geben sollte, der nur von einer beliebig kleinen Umgebung eines vorgegebenen Pumktes abhängt.

(vi) Wie sich herausstellt, ist durch die obigen Bedingungen die Dimension bereits festgelegt. Wir beginnen mit dem Fall spezieller affiner Schemata

$$X = \text{Spec } A.$$

3.14.2 Die Dimension eines reduzierten, irreduziblen affinen Schemas endlichen Typs (Dimension und Transzendenzgrad)

Seien k ein Körper und

$$X = \text{Spec } A$$

ein reduziertes irreduzibles affines Schema endlichen Types über k. Dann ist die Dimension von X gerade der Transzendenzgrad des Quotientenkörpers von A,

$$\dim X = \text{tr-deg } Q(A).$$

Bemerkungen

(i) Die Bedingung <u>reduziert</u> zu sein, bedeutet, daß die Werte der Strukturgarbe von X Ringe ohne nilpotente Elemente (außer der Null selbst) sind.

(ii) Die Bedingung irreduzibel zu sein, bedeutet, daß der topologische Raum X nicht Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Unterräumen ist.

(iii) Die Bedingung, <u>endlichen Typs</u> über k zu sein, bedeutet hier, daß A als k-Algebra endlich erzeugt ist,

$$A = k[\alpha_1,...,\alpha_n].$$

Allgemeiner, ein Morphismus von Schemata φ: X $\longrightarrow$ Y heißt <u>lokal vom endlichen Typ</u>, wenn es für jedes y $\in$ Y ein affine offene Umgebung V = Spec B von y gibt, sodaß jeder Punkt

$$x \in \varphi^{-1}(V)$$

eine affine Umgebung U = Spec A besitzt, so daß durch die Einschränkung

$$\varphi_U: \text{Spec } A = U \longrightarrow V = \text{Spec } B$$

der Ring A zu einer endlich erzeugten B-Algebra wird. Kann man V sogar derart wählen, daß sich $\varphi^{-1}(V)$ durch endlich viele offenen Mengen U der beschriebenen Art überdecken läßt, so sagt man φ ist ein <u>Morphismus endlichen Typs</u>. Im Spezialfall Y = Spec A, sagt man auch, X ist vom <u>endlichen Typ</u> über A (bzw. <u>lokal vom endlichen Typ</u>).

(iv) Zusammen bedeuten die Bedingungen, daß X affines Spektrum einer endlich erzeugten nullteilerfreien k-Algebra ist[53] .

<u>Beweisskitze</u>.
Der Quotientenkörper

$$Q(A) = k(\alpha_1,...,\alpha_n)$$

besitzt einen Transzendenzgrad ≤ n, sagen wir

$$m := \text{tr-deg}_k\, Q(A) \le n.$$

Sei $\beta_1, ... \beta_m$ eine Transzendenzbasis von Q(A) über k, d.h. Q(A) sei algebraisch über $k(\beta_1, ... \beta_m)$. Zeigen wir, die β_i kann man bereits in A finden. Dazu schreiben wir

$$\beta_i = a_i/a \text{ mit } a_1,...,a_m,a \in A.$$

---

[53] Weil X affin ist, gilt

$$X = \text{Spec } A.$$

Weil X vom endlichen Typ ist über k, ist $A = k[\alpha_1,...,\alpha_n]$ und insbesondere ein Noetherscher Ring. Die Menge der minimalen Primideale ist insbesondere endlich, sagen wir gleich

$$\{p_1,...,p_m\}.$$

Dann ist aber

$$X = \text{Spec } A = V(p_1) \cup ... \cup V(p_m).$$

Weil X irreduzibel ist, folgt m = 1. Sei p das einzige minimale Primideal. Ein von Null verschiedenes Element $f \in p$ liegt dann in jedem Primideal von A, d.h. A_f besitzt kein Primideal, d.h. A_f ist der Null-Ring. Die $1 \in A$ wird somit von einer Potenz von f annulliert, d.h. f ist nilpotent. Weil X reduziert ist, besitzt $A = \mathcal{O}_X(X)$ keine solchen Elemente f. Wir haben gezeigt, p ist das Null-Ideal, d.h. A ist ein Integritätbereich.

Sind die a_i algebraisch unabhängig, so ist nichts zu beweisen. Sind sie algebraisch abhängig, so gilt für ein i,

$$\begin{aligned} m-1 &\geq \text{tr-deg}_k\, k(a_1,...,a_{i-1},a_{i+1}...,a_m) \\ &= \text{tr-deg}_k\, k(a_1,...,a_m) \\ &\geq \text{tr-deg}\, k(a_1,...,a_m,a) - 1 \\ &= \text{tr-deg}\, Q(A) \\ &= m-1 \end{aligned}$$

d.h. a ist algebraisch unabhängig von $a_1,...,a_m$ also auch von $a_1,...,a_{i-1},a_{i+1}...,a_m$.
In jedem Fall gibt es m Elemente in A, welche algebraisch unabhängig über k sind. Wir können annehmen,

$$\beta_1, ... \beta_m \in A.$$

Nach Konstruktion ist jedes Element von A algebraisch über $k(\beta_1, ... \beta_m)$. Der Normalisierungssatz der kommutativen Algebra[54] sagt aus, daß man die β_i sogar so wählen kann, daß

$$A \text{ ganz über } R := k[\beta_1, ... \beta_m]$$

ist. Weil A endlich erzeugt ist über über k, also erst recht über $k[\beta_1, ... \beta_m]$, bedeutet dies,

A ist ein endlich erzeugter R-Modul,

sagen wir

$$A = R\bullet u_1+...+R\bullet u_\ell \qquad (1)$$

Die natürliche Inklusion $R = k[\beta_1, ... \beta_m] \hookrightarrow A$ induziert einem Morphismus affiner Schemata

$$f\colon \text{Spec } A \longrightarrow \text{Spec } R = \text{Spec } k[\beta_1, ... \beta_m] = \mathbb{A}^m_k$$

Für jeden Punkt $x \in \text{Spec } R$ gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \text{Spec } A \times_R \text{Spec } \kappa(x) \\ &= \text{Spec } A\otimes_R \kappa(x) \end{aligned}$$

Wegen (1) ist $A\otimes_R\kappa(x)$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\kappa(x)$. Für jedes Primideal ist p von $A\otimes_R\kappa(x)$ ist der Faktorring

$$A\otimes_R\kappa(x)/p$$

---

[54] von E. Noether, siehe den Anhang Kommutative Algebra, Endliche Erweiterungen.

eine endlich-dimensionale $\kappa(x)$-Algebra ohne Nullteiler, d.h. ein Körper. Jedes Primideal von $A\otimes_R\kappa(x)$ ist somit maximal und damit auch minimal. Weil der Ring $A\otimes_R\kappa(x)$ als endlich erzeugte $\kappa(x)$-Algebra noethersch ist, ist die Anzahl dieser Primideale endlich, d.h.

$$\mathrm{Spec}\ A\otimes_R\kappa(x)$$

ist endlich. Der Morphismus f hat somit endliche Fasern. Nach (iii) erhalten wir

$$\dim \mathrm{Spec}\ A = \dim \mathbb{A}_k^m = m = \text{tr-deg}\ Q(A).$$

Wir haben damit eine erste Dimensionsformel bewiesen.

3.14.3 Der Fall noetherscher affiner Schemata (Dimension und Primidealketten)

Seien jetzt k ein Körper, A eine beliebige noethersche k-Algebra und

$$X = \mathrm{Spec}\ A.$$

Dann besitzt A nur endlich viele minimale Primideale, sagen wir $p_1, \dots , p_n$, und es gilt

$$X = V(p_1) \cup \dots \cup V(p_n).$$

Nach unseren Bedingungen an den Dimensionsbegriff ist dann

$$\dim X = \max \{ \dim \mathrm{Spec}\ A/p_i \mid i = 1, \dots , n \}. \tag{1}$$

Da A/p_i eine nullteilerfreie k-Algebra ist, sollte

$$\dim \mathrm{Spec}\ A/p_i = \text{tr.-deg.}_k\ Q(A/p_i)$$

Sei jetzt p irgendein Primideal von A. Dann gibt es ein i und ein maximales Ideal m von A mit

$$m \supseteq p \supseteq p_i .$$

Nach dem Nullstellensatz von Hilbert gilt außerdem (wenn A endlich erzeugte k-Algebra ist)

p maximal in A $\Leftrightarrow$ Q(A/p) ist algebraisch über k.

Mit anderen Worten, wenn p von m verschieden, also nicht maximal ist, gilt

$$\text{tr.-deg}_k\ Q(A/p) \ge 1,$$

d.h. A enthält mindestens ein über k transzendentes Element. Im Fall endlich erzeugter k-Algebren A kann man zeigen,

$\text{tr.-deg}_k\ Q(A/p) = 1 \Leftrightarrow$ p ist maximal unter allen echten Primidealen in m.

Treibt man diese Betrachtungen noch etwas weiter, ergibt sich

$$\text{tr-deg}_k Q(A/p_i) = \sup\{\ell \mid \text{es gibt eine Kette von Primidealen } p_i = p^0 \subset p^1 \subset \dots \subset p^\ell\}$$

Eine echt aufsteigende Kette

$$p^0 \subset p^1 \subset \dots \subset p^\ell$$

von Primidealen p^j von A heißt auch Primidealkette der <u>Länge</u> ℓ in A, welche mit p^0 beginnt und mit p^ℓ endet. Zusammen mit (1) erhalten wir damit

$$\dim X = \sup \{\ell \mid \text{es gibt eine Primidealkette der Länge } \ell \text{ in } A\}$$

Da die Primideale von A gerade den irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von Spec A entsprechen, kann man anstelle der Primidealketten auch echt absteigende Ketten

$$X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_\ell$$

von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen betrachten (die mit X_0 beginnen und X_ℓ enden). Die Zahl ℓ heißt dann ebenfalls Länge einer solchen Kette. Das legt die nachfolgenden Dimensionsdefinitionen nahe.

3.14.4 Definitionen

Sei X ein algebraisches Schema. Dann ist die Dimension

$$\dim X$$

von X definiert als das Supremum über alle nicht-negativen ganzen Zahlen ℓ mit der Eigenschaft, daß es eine echt absteigende Kette

$$X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_\ell$$

von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen X_i gibt.

Beschränkt man sich auf Ketten mit der Eigenschaft, daß X_ℓ einen vorgegebenen nicht notwendig abgeschlossenen Punkt $x \in X$ enthält, so wird die zugehörige Zahl mit

$$\dim_x X$$

bezeichnet und heißt (lokale) Dimension von X in x.

Seien X ein Schema und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Teilschema. Dann heißt

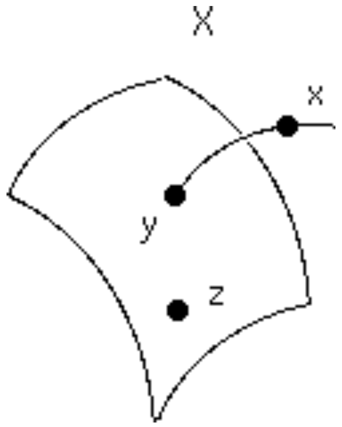
$$\operatorname{codim}_X Y := \dim X - \dim Y$$

Kodimension von Y in X. Ist außerdem $y \in Y$ ein Punkt, so heißt

$$\operatorname{codim}_{X,y} Y := \dim_y X - \dim_y Y$$

(lokale) Kodimension von Y in X im Punkt y.

Das Schema X heißt equidimensional, wenn $\dim_x X$ für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X$ denselben Wert hat.



$\dim_x X = 1$ (die Kurve liegt auf keiner Fläche)

$\dim_y X = 2$

$\dim_z X = 2$

Bemerkungen

(i) Unmittelbar aus den Definitionen folgt

$$\dim X = \sup \{\dim_x X \mid x \in X\}.$$

Da sich jede Kette von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen verlängert werden kann, wenn sie mit einem Teilschema endet, das einen nicht-abgeschlossenen Punkt enthält (jedes Primideal liegt in einem maximalen Ideal), gilt sogar

$$\dim X = \sup \{\dim_x X \mid x \in X, x \text{ abgeschlossen}\}.$$

(ii) Sei $Y \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Teilschema. Wir nehmen an, X und Y sind equidimensional (und exzellent). Dann kann man

$$\mathrm{codim}_X Y$$

beschreiben als die Anzahl der Gleichungen, die man braucht um Y als Teilmenge von X (nicht als Teilschema!) zu definieren, zumindest gilt dies lokal in einer Umgebung der Punkte einer dicht liegenden offenen Teilmenge von X. Aus dieser Beschreibung ergibt sich

$$\mathrm{codim}_X Y' \cap Y'' \le \mathrm{codim}_X Y' + \mathrm{codim}_X Y''$$

für je zwei equidimensionale abgeschlossene Teilschemata Y', Y" von X. Denn zur lokalen Definition des Durchschnitts kann man die lokalen Gleichungen von Y' zusammen mit denen von Y" verwenden (wobei eventuel manche dieser Gleichungen nicht benötigt werden).

(iii) In der Abschätzung von (ii) braucht nicht das Gleichheitszeichen zu gelten. Zum Beispiel ist das nicht der Fall für Y' = Y" (und positiver Kodimension). Gilt das Gleichheitszeichen aber doch, so sagt man, Y' und Y" schneiden sich regulär.

(iv) Irreduzible Schemata endlichen Typs sind equidimensional. Im Fall von Schemata endlichen Typs bedeutet Equidimensionalität gerade, daß alle irreduziblen Komponenten dieselbe Dimension besitzen.

(v) Wir werden gleich sehen, die Dimension eines Schemata hängt nicht von dessen infinitesimaler Struktur ab in dem Sinne, daß die doppelt gezählte y-Achse der x-y-Ebene mit der Gleichung

$$y^2 = 0$$

(genauer das Schema Spec $k[x,y]/(y^2)$) dieselbe Dimension hat wie die einfach gezählte y-Achse mit der Gleichung

$$y = 0$$

(d.h. das Schema Spec $k[x,y]/(y^2)$). Allgemeiner, für jeden kommutativen Ring A mit 1 haben

$$\text{Spec } A \text{ und Spec } A/\sqrt{0}$$

dieselbe Dimension. Das liegt einfach daran, daß $\sqrt{0}$ in jedem Primideal von A liegt. Unser Ziel im nächsten Abschnitt ist es, diese Aussage auf den Fall beliebiger Schemata zu verallgemeinern.

3.15.5 Das zu einem Schema gehörige reduzierte Schema

Ein kommutativer Ring A mit 1 heißt reduziert, wenn 0 das einzige nilpotente Element ist. Zum Beispiel ist für jeden kommutativen Ring A der Ring

$$A_{red} := A/\sqrt{0}\ .$$

reduziert. Ein Schema X mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ heißt reduziert, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert ist.

Kriterium

Ein Schema X ist genau dann reduziert, wenn sämtliche lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ reduziert sind.

Beweis. Die Bedingung ist notwendig. Sei X reduziert. Ist $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ ein nilpotentes Element, sagen wir $f^n = 0$, so läßt sich f durch einen Schnitt $s \in \mathcal{O}_X(U)$ über einer offenen Umgebung U von x repräsentieren mit $s^n = 0$. Da X reduziert ist, folgt s = 0, also f = 0. Wir haben gezeigt, die lokalen Ringe eines reduzierten Schemas sind reduziert.

Die Bedingung ist hinreichend. Seien die Halme von $\mathcal{O}_X$ reduziert, und sei $s \in \mathcal{O}_X(U)$ ein nilpotenter Schnitt von $\mathcal{O}_X$, sagen wir $s^n = 0$. Die Keime von s in den Punkten von U haben dann eine n-te Potenz, die ebenfalls 0 ist. Da die Halme von $\mathcal{O}_X$ reduziert sind, sind damit die Keime von s in allen Punkten von U gleich Null. Dann besitzt aber U eine offene Überdeckung, auf deren Mengen s gleich Null ist. Damit muß aber s selbst gleich Null sein.

QED.

Beispiel 1

Spec A_{red} ist reduziertes Schema für jeden kommutativen Ring A mit 1. Nach dem Kriterium reicht es zu zeigen, für jedes Primideal p von A ist

$$(A_{red})_p = A_p/\sqrt{0\bullet A}A_p$$

reduziert. Dazu wiederum reicht es zu zeigen,

$$\sqrt{0\bullet A}\bullet A_p = \sqrt{0\bullet A_p}.$$

Jedes Element der linken Seite ist eine A_p-Linearkombination von nilpotenten Elementen von A, also selbst nilpotent, also ein Element der rechten Seite.

Sei umgekehrt $\alpha \in A_p$ ein Element der rechten Seite. Wir schreiben α in der Gestalt

$$\alpha = \frac{a}{s} \text{ mit } a \in A \text{ und } s \in A - p.$$

Weil α nilpotent ist, wird eine Potenz von a, sagen wir a^n von einem Element $t \in A\text{-}p$ annulliert. Dann gilt $(at)^n = 0$, d.h. $at \in \sqrt{0\bullet A}$. Also ist

$$\alpha = \frac{a}{s} = at\bullet\frac{1}{st} \in \sqrt{0\bullet A}\bullet A_p$$

ein Element der linken Seite.

Bemerkungen

(i) Auf Grund der obigen Argumentation gilt für jeden kommutativen Ring A mit 1 und jedes Primideal p von A,

$$(A_{red})_p = (A_p)_{red}$$

(genauer, die natürlichen Surjektion $A \longrightarrow A_{red}$ induziert einen natürlichen Isomorphismus zwischen diesen beiden Ringen).

(ii) Dieselbe Argumentation zeigt

$$(A_{red})_{\bar f} = (A_f)_{red}$$

für jedes Element $f \in A$ und dessen Bild $\bar f$ beim natürlichen Homomorphismus $A \longrightarrow A_{red}$, d.h. es gilt

$$\mathcal{O}_{Spec(A_{red})}(D(\bar f)) = (\mathcal{O}_{Spec\ A}(D(f)))_{red}$$

(iii) Seien X = Spec A, Y = Spec(A_{red}). Als topologische Räume kann man X und Y identifizieren. Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_Y$ ist dann gerade die assoziierte Garben zur Prägarbe

$$F: U \mapsto (\mathcal{O}_X(U))_{red}$$

Beweis von (iii).

Sei

$$U = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$$

eine Überdeckung durch offene Hauptmengen. Betrachten wir Abbildungen

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(D(f_i)) \longrightarrow \prod_{i,j\in I} F(D(f_i f_j))$$

$$s \mapsto (s|_{D(f_i)})_{i\in I} \quad (s_i)_{i\in I} \mapsto (s_i - s_j)_{i,j\in I}.$$

Weil F ein Funktor ist, liegt das Bild der ersten Abbildung im Kern der zweiten. Nach (ii) gilt aber

$$F(D(f_i)) = (A_{f_i})_{red} = (A_{red})_{\overline{f}_i} = \mathcal{O}_Y(D(f_i))$$

und analog

$$F(D(f_i f_j)) = \mathcal{O}_Y(D(f_i f_j)).$$

Auf Grund der Garbenaxiome ist der Kern der zweiten Abbildung gerade $\mathcal{O}_Y(U)$. Wir erhalten so für jedes offene U eine natürliche Abbildung $F(U) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(U)$. Diese Abbildungen setzen sich zu einem Prägarben-Morphismus

$$F \longrightarrow \mathcal{O}_Y,$$

zusammen, wobei wir über den offenen Hauptmengen nach (ii) Isomorphismen erhalten. Da die offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis bilden, induziert dieser Morphismus Isomorphismen der Halme. Weil $\mathcal{O}_Y$ eine Garbe ist, induziert der Morphismus außerden einen Morphismus

$$\widetilde{F} \longrightarrow \mathcal{O}_Y$$

der assoziierten Garbe $\widetilde{F}$ mit Werten in $\mathcal{O}_Y$. Da sich beim Übergang zur assoziierten Garbe die Halme nicht ändern, induziert der letzte Morphismus auf den Halmen ebensfalls Isomorphismen. Als Morphismus von Garben ist es somit selbst ein Isomorphismus.

QED.

Beispiel 2

Sei X ein Schema. Dann ist durch

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)_{red}$$

eine Prägarbe von kommutativen Ringen mit 1 definiert. Die assoziierte Garbe wird mit $\mathcal{O}_{X_{red}}$ bezeichnet. Der topologische Raum X zusammen mit Ring-Garbe $\mathcal{O}_{X_{red}}$ ist ein reduziertes Schema und wird mit X_{red} bezeichnet,

$$X_{red} = X \text{ mit der Strukturgarbe } \mathcal{O}_{X_{red}}.$$

Es heißt das zu X gehörige <u>reduzierte Schema</u> oder auch <u>Reduktion des Schemas</u> X.

Es ist ein abgeschlossenes Teilschema von X,

$$X_{red} \hookrightarrow X \tag{1}$$

und besitzt dieselben offenen und damit dieselben abgeschlossenen Teilmengen wie X. Insbesondere hat es dieselbe Dimension und dieselben lokalen Dimensionen wie X.

Das reduzierte Teilschema X_{red} läßt sich durch folgende Universalitätseigenschaft charakterisieren:

> Jeder Morphismus von Schemata $Y \longrightarrow X$ mit Y reduziert faktorisiert sich auf genau eine Weise über die natürliche Einbettung (1).

Beweis. 1. Schritt. $(X, \mathcal{O}_{X_{red}})$ ist ein Schema.
Es reicht zu zeigen, für jede affine offene Teilmenge U = Spec A von X ist

$$(U, \mathcal{O}_{X_{red}}|_U)$$

ein affines Schema.

Weil $\mathcal{O}_{X_{red}}$ eine Garbe ist, ist $\mathcal{O}_{X_{red}}$ bis auf Isomorphie die Garbe der Schnitte des Etal-Raums

$$\pi: E := \vee_{x\in X} \mathcal{O}_{X_{red},x} \longrightarrow X.$$

Indem wir X durch U = Spec A und E durch $\pi^{-1}(U)$ ersetzen, erhalten wir gerade den Etalraum von $\mathcal{O}_{U_{red}} = \mathcal{O}_{Spec(A_{red})}$.[55] Es gilt also

$$\mathcal{O}_{X_{red}}|_U = \mathcal{O}_{U_{red}},$$

d.h. es reicht zu zeigen,

$$(U, \mathcal{O}_{U_{red}}) \text{ mit } U = \text{Spec } A$$

ist ein affines Schema.
Zum Beweis betrachten wir die natürliche Einbettung

$$i: \text{Spec } A_{red} \hookrightarrow \text{Spec } A.$$

Die zugrunde liegende Abbildung topologischer Räume ist ein Homöomorphismus (und kann als die identische Abbildung angesehen werden)[56]. Der Garben-Morphismus

$$\mathcal{O}_{\text{Spec } A} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{Spec(A_{red})}$$

---

[55] Die Halme der Garbe $\mathcal{O}_{X_{red}}$ in den Punkten von U ändern sich nicht, wenn man X durch U ersetzt. Nach Beispiel 1 gilt deshalb

$$\mathcal{O}_{X_{red},x} = \mathcal{O}_{U_{red},x} = \mathcal{O}_{(\text{Spec } A)_{red},x} = \mathcal{O}_{Spec(A_{red}),x},$$

d.h. über U = Spec A ist E gerade der Etal-Raum der Strukturgarbe von $Spec(A_{red})$.

[56] Sei $\rho: A \longrightarrow A_{red}$ die natürliche Abbildung auf den Faktorring. Da das Radikal von A in jedem Primideal von A liegt, ist die Abbildung

$\text{Spec } A_{red} \longrightarrow \text{Spec } A,\ p \mapsto \rho^{-1}(p)$,

bijektiv, d.h. wir können die beiden Mengen mit Hilfe dieser Abbildung identifizieren, und ρ wird so zur identischen Abbildung. Beide Mengen haben dieselben abgeschlossenen Teilmengen (wegen $\sqrt{0} \subseteq \sqrt{I}$ für jedes Ideal I von A).

definiert für jede offene Menge U einen Ring-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{red})}(U).$$

Weil $\mathrm{Spec}(A_{red})$ ein reduziertes Schema ist, induziert dieser einen Ring-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(U)/\sqrt{0} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{red})}(U)$$

Zusammen definieren diese Ringhomomorphismen einen Homomorphismus von Prägarben auf Spec A. Da $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{red})}$ eine Garbe ist, induziert dieser einen Homomorphismus von Garben

$$\mathcal{O}_{(\mathrm{Spec}\ A)_{red}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A_{red}}.$$

Es reicht zu zeigen, dies ist ein Isomorphismus. Dazu reicht es zu zeigen, daß auf den Halmen Isomorphismen induziert werden.

Weil die Halme der assoziierten Garbe gleich denen der Prägarbe sind, erhalten wir für $p \in \mathrm{Spec}\ A$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{(\mathrm{Spec}\ A)_{red},p} &= \text{Halm in } p \text{ von } U \mapsto \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(U)/\sqrt{0} \\
&= \varinjlim_{p\in U} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(U)/\sqrt{0} \\
&=^{57} \varinjlim_{p\in D(f)} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(D(f))/\sqrt{0} \\
&= \varinjlim_{p\in D(f)} A_f/\sqrt{0} \\
&=^{58} \varinjlim_{p\in D(f)} (A/\sqrt{0})_f \\
&= \varinjlim_{p\in U} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\sqrt{0})}(U) \\
&= \varinjlim_{p\in U} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{red})}(U)
\end{aligned}$$

<u>2. Schritt</u>: $\mathrm{Spec}(A_{red}) \cong (\mathrm{Spec}\ A)_{red}$

Im ersten Schritt haben wir gerade gezeigt, der Homomorphismus der Strukturgarben zur natürliche Einbettung $\mathrm{Spec}\ A_{red} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\ A$ definiert einen solche Isomorphismus.

<u>3. Schritt</u>: X_{red} ist ein reduziertes Schema.

Nach dem 1. und 2. Schritt ist X_{red} lokal von der Gestalt $\mathrm{Spec}(A_{red})$. Insbesondere sind die Halme von X_{red} reduzierte Ringe, d.h. X_{red} ist ein reduziertes Schema.

<u>4. Schritt</u>. X_{red} besitzt dieselben offenen und abgeschlossenen Teilmengen.

Nach Definition von X_{red} entsteht X_{red} aus X, indem man lediglich die Strukturgarbe abändert, jedoch nicht den zugrundeliegenden topologischen Raum.

---

[57] die offenen Hauptmengen bilden eine Topologie-Basis und bilden damit ein finales System.

[58] Die Operation des Reduzierens kommutiert mit der Quotientenbildung, vgl. Beispiel 1.

<u>5. Schritt</u>: X_{red} ist abgeschlossenes Teilschema von X.

Nach Definition sind $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_{X_{red}}$ Garben auf demselben topologischen Raum X.

Die Garbe $\mathcal{O}_{X_{red}}$ ist die assoziierte Garbe zur Prägarbe

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)/\sqrt{0}$$

Die natürliche Abbildung auf den Faktorring definiert deshalb einen Prägarben-Homomorphismus auf $\mathcal{O}_X$ mit Werten in dieser Prägarbe. Durch Zusammensetzung mit dem Morphismus der Prägarbe in die assoziierte Garbe erhalten wir einen Garben-Morphismus

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{red}} \tag{2}$$

von Garben auf X.

Wie wir im ersten Schritt gesehen haben, hat dieser lokal über den affinen offenen Teilmengen U = Spec A von X die Gestalt

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A_{red}}$$

des Morphismus, der von der natürlichen Einbettung Spec $A_{red} \hookrightarrow$ Spec A kommt, d.h. von der natürlichen Abbildung $A \longrightarrow A_{red}$ auf den Faktorraum. Insbesondere sind die Ringhomorphismen, die auf den lokalen Ringen induziert werden, surjektiv. Der durch (2) gegebene Morphismus von Schemata

$$X_{red} \longrightarrow X$$

(der auf den zugrundeliegenden topologischen Räumen die identische Abbildun ist) ist damit eine abgeschlossene Einbettung.

<u>6. Schritt</u>: Universalitätseigenschaft von X_{red}.

Sei f: Y $\longrightarrow$ X eine Morphismus von Schemata mit Y reduziert. Der zugehörige Garben-Morphismus

$$f^{\#}: \mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y$$

definiert für jedes offene Menge $U \subseteq X$ einen Homomorphismus von Ringen mit 1^,

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)).$$

Weil Y reduziert ist, liegt das Ideal $\sqrt{0}$ von $\mathcal{O}_X(U)$ im Kern dieser Abbildung, d.h. wir erhalten Homomorphismen

$$\mathcal{O}_X(U)/\sqrt{0} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)),$$

die sich zu einem Prägarben-Morphismus zusammensetzen. Da rechts eine Garbe steht, induziert dieser Prägarben-Morphismus einen Garben-Morphismus

$$\mathcal{O}_{X_{red}} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y.$$

Fassen wir die stetige Abbildung f: Y $\longrightarrow$ X als eine Abbildung mit Werten im topologischen Raum X_{red} auf, so erhalten wir auf diese Weise einen Morphismus von Schemata

$$f_{red}: Y \longrightarrow X_{red}.$$

Dessen Zusammensetzung mit der natürlichen Einbettung $X_{red} \hookrightarrow X$ ist nach Konstruktion gerade der gegebene Morphismus f. Es ist nicht schwer, einzusehen, daß f_{red} durch f eindeutig festgelegt ist.

QED.

Bemerkungen

(i) Wie wir wissen, reicht es zur Bestimmung der Dimension eines Schemas, die lokalen Dimensionen in den abgeschlossenen Punkten eines Schemas zu kennen. Wir wollen uns deahalb an dieser Stelle mit den Berechnungsmöglichkeiten der lokalen Dimension beschäftigen.

(ii) Wie sich herausstellen wird, reicht zur Bestimmung von $\dim_x X$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ von X im Punkt x. Man kann diese Dimension an ganz unterschiedlichen Daten des Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ ablesen. Die wichtigsten davon sind die folgenden.

a) Die Primidealketten in $\mathcal{O}_{X,x}$.

b) Der Grad des Hilbert-Polynoms von $\mathcal{O}_{X,x}$.

c) An der Minimalzahl der Erzeuger von Definitionsidealen.

Wir wollen diesen Zusammen mit der lokalen Dimension im folgenden etwas genauer beschreiben. Dabei beschränken wir uns auf den Fall der noetherschen Schemata X, d.h. der Schemata, für welche jede aufsteigende Kette von offenen Teilschemata stationär ist.

3.14.5 Lokale Dimension und Primidealketten in $\mathcal{O}_{X,x}$

Seien X ein noethersches Schema und $x \in X$ ein Punkt. Dann gilt

$$\dim_x X = \dim \mathcal{O}_{X,x}.$$

Beweis. Wir fixieren ein offenes affines Teilschema

$$U = \operatorname{Spec} A \subseteq X \text{ mit } x \in U.$$

Sei

$$X_0 \supset X_1 \supset ... \supset X_\ell \tag{1}$$

eine echt absteigende Kette von irreduziblen abgeschlossenen Teilschemata von X mit

$$x \in X_\ell.$$

Die Durchschnitt $X_i \cap U$ dieser Teilschemata mit U sind nicht leer, da x in diesen Durchschnitten liegt. Außerdem liegt, die Abschließung von $X_i \cap U$ ganz in X_i,

$$\overline{(X_i \cap U)} \subseteq X_i.$$

Weil X_i irreduzibel ist, liegt jede nicht-leere offene Teilmenge dicht[59] in X_i, d.h. es gilt sogar

---

[59] Sei Y irreduzibel und $U \subseteq Y$ offen und nicht dicht in Y. Dann gilt

$$Y = (Y\text{-}U) \cup \bar{U}$$

$$(X_i \cap U)^{-} = X_i.$$

Für unterschiedliche i sind damit die Durchschnitte $X_i \cap U$ verschieden. Wir erhalten eine echt absteigende Kette

$$X_0 \cap U \supset X_1 \cap U \supset \ldots \supset X_\ell \cap U$$

von abgeschlossenen irreduziblen[60] Teilmengen von U = Spec A. Wir wählen Primideale p_i mit $V(p_i) = X_i \cap U$ und erhalten so eine echt aufsteigende Kette

$$p_0 \subset p_1 \subset \ldots \subset p_\ell \qquad (2)$$

Wegen $x \in X_\ell \cap U = V(p_\ell)$ gilt außerdem $p_\ell \subseteq x$. Wir lokalisierung nach x und erhalten[61]

$$p_0 A_x \subset p_1 A_x \subset \ldots \subset p_\ell A_x$$

Wir haben gezeigt, also $\ell \le \dim_x X$ folgt $\ell \le \dim A_x$. Nun ist aber $A_x = \mathcal{O}_{X,x}$, d.h. es gilt

$$\dim_x X \le \dim \mathcal{O}_{X,x}. \qquad (3)$$

Umgekehrt erhält man aus einer echt aufsteigenden Primidealkette in A_x durch Übergang zu den vollständigen Urbildern in A eine echt aufsteigende Primidealkette (2), also eine echt absteigende Kette von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von U = Spec A. Durch Übergang zu den Abschließungen in X entsteht eine echt absteigende Kette (1) in X. Es gilt deshalb sogar das Gleichheitszeichen in (3).
QED.

3.14.6 Die Hilbert-Funktion eines noetherschen lokalen Rings

Sei (A, m) ein noetherscher lokaler Ring A mit dem einzigen maximalen Ideal m. Dann werden die Potenzen des maximalen Ideals m wie alle Ideale von A von jeweils endlich vielen Elementen erzeugt. Die Faktoren

$$m^n/m^{n+1}$$

sind endlich erzeugte A-Moduln, welche von m annulliert werden, d.h. es sind endlich-dimensionale Vektorräume über dem Körper A/m,

$$H^0_A(n) := \dim_{A/m} m^n/m^{n+1} < \infty$$

für jede nicht-negative ganze Zahl n (die 0-te Potenz von m soll gleich A sein). Für negatives n setzen wir

---

mit echten offenen Teilmengen Y - U und $\overline{U}$ von Y. Das steht aber im Widerspruch zu Irreduzibilität von Y.

[60] Offene Teilmengen U von irreduziblen Mengen Y sind irreduzibel: sei $U = F' \cup F''$ mit F', F'' abgeschlossen in U und von U verschieden. Dann gibt es Punkte

$$x \in U - F'' \text{ und } y \in U - F'$$

mit einer zu F'' bzw. F' disjunkten offene Umgebung. Insbesondere liegt x nicht in der Abschließung von F'' und y nicht in der von F'. Wegen $U = F' \cup F''$ folgt durch Übergang zu den Abschließungen

$$Y = \overline{U} = \overline{F'} \cup \overline{F''}.$$

Weil x nicht in $\overline{F''}$ und y nicht in $\overline{F'}$ liegt, stehen rechts echte abgeschlossene Teilmengen von Y. Das ist aber nicht möglich, da Y irreduzibel sein soll.

[61] Die Inklusionen bleiben echt, weil für multiplikativ abgeschlossene Teilmengen $S \subseteq A$ und Primideale p von A mit $S \cap p = \emptyset$ gilt

$$pA_S \cap A = p.$$

$$H^0_A(n) = 0 \text{ für } n < 0.$$

Auf diese Weise ist dann eine Funktion

$$H^0_A : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

definiert, welche Hilbert-Funktion des lokalen Rings A heißt. Induktiv definiert man

$$H^{i+1}_A(n) = H^i_A(n) + H^i_A(n-1) + ... + H^i_A(0)$$

und nennt H^i_A i-te Summen-Transformierte der Hilbert-Funktion. Die erste Summen-Transformiert H^1_A heißt auch Hilbert-Samuel-Funktion von A. Es gilt

$$H^1_A(n) := \text{length}_A(A/m^{n+1}).$$

Dabei ist die Länge $\text{length}_A(M)$ eines A-Moduls M definiert als das Supremum über alle nicht-negativen ganzen Zahlen ℓ für die es eine echt aufsteigende Kette

$$M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_\ell \tag{1}$$

von Teilmoduln von M gibt.

Mit denselben Symbol wie die Funktionen bezeichnet man auch die zugehörigen Potenzreihen

$$H^i_A = H^i_A(0) + H^i_A(1){\bullet}T^1 + H^i_A(2){\bullet}T^2 + H^i_A(3){\bullet}T^3 + ...$$

Man spricht dann auch von der Hilbert-Reihe (i = 0), der Hilbert-Samuel-Ringe (i = 1) bzw. der i-ten Summentransformierten der Hilbert-Reihe. Nach Definition gilt

$$H^{i+1}_A = \frac{1}{1-T} \bullet H^i_A ,$$

also

$$H^i_A = \frac{H^0_A}{(1-T)^i}$$

Seien jetzt $R = \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$ ein graduierter Ring und M ein graduierter R-Modul, d.h. M zerfalle in eine direkte Summe von additiven Untergruppen

$$M = \oplus_{n=k}^{\infty} M_n$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ und $R_a{\bullet}M_b \subseteq M_{a+b}$. Falls jedes M_n als R_0-Modul eine endliche Länge hat, so setzt man

$$H^0_{R,M}(n) := \text{length}_{R_0}(M_n)$$

und spricht von der Hilbert-Funktion des graduierten R-Moduls M bzw. von dessen Hilbert-Reihe. Im Fall M = R schreibt man auch

$$H^0_R = H^0_{R,R}$$

Beispiel 1

Sei (A, m) ein noetherscher lokaler Ring und

$$gr_m(A) := \oplus_{n=0}^{\infty} m^n/m^{n+1}$$

der zugehörige graduierte Ring (bezüglich der Potenzen des maximalen Ideals). Dann gilt

$$H^0_A = H^0_{gr_m(A)}$$

Beispiel 2
Seien R ein graduierter Ring, dessen homogene Bestandteile R_n von Moduln endlicher Länge über R_0 sind, und x eine Unbestimmte. Dann besitzt der Polynom-Ring

$$R[x]$$

die Struktur eines graduierten Rings mit

$$R[x]_n = R_0 \bullet x^n + R_1 \bullet x^{n-1} + \ldots + R_n.$$

Die homogenen Bestandteile von R[x] sind ebenfalls Moduln endlicher Länge über $R[x]_0 = R_0$, und des gilt

$$H^0_{R[x]}(n) = H^0_R(n) + H^0_R(n-1) + \ldots + H^0_R(0),$$

d.h. für die Reihen gilt

$$H^0_{R[x]} = \frac{1}{1-T} \bullet H^0_R$$

Beispiel 3
Seien k ein Körper und $R = k[x_1,\ldots,x_N]$ der Polynomring mit der üblichen Graduierung. Wir fassen k als graduierten Ring auf, dessen sämtliche homogene Bestandteile positiven Grades gleich Null sind. Durch wiederholtes anwenden von Beispiel 2 erhalten wir für die Hilbert-Reihen

$$H^0_k = 1$$

$$H^0_R = \frac{1}{(1-T)^N}$$

und für die Hilbert-Funktionen

$$H^0_{k[x_1]}(n) = 1 \quad \text{für } n \geq 0.$$

$$H^0_{k[x_1,x_2]}(n) = n+1 \quad \text{für } n \geq 0.$$

$$H^0_{k[x_1,x_2,x_3]}(n) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \binom{n+2}{2} \text{für } n \geq 0.$$

$$H^0_R(n) = \binom{N+n-1}{N-1} \quad \text{für } n \geq 0.$$ [62]

Insbesondere ist die Hilbert-Funktion eines Polynom-Rings in N Unbestimmten für Argumente ≥ 0 ein Polynom des Grades N-1.
Der Potenzreihenring

$$A = k[[x_1,\ldots,x_d]]$$

ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $m = (x_1,\ldots,x_d)$ der zugehörige graduierte Ring ist isomorph zum Polynomring in d Unbestimmten,

$$gr_m(A) \cong k[x_1,\ldots,x_d].$$

Insbesondere ist

$$H^0_A(n) = H^0_{gr_m(A)}(n)$$

für n ≥ 0 ein Polynom des Grades d-1 in n und entsprechend die Hilbert-Samuel-Funktion

$$H^1_A(n)$$

ein Polynom des Grades d.

[62] Für N = 1 und N = 2 ist dies offensichtlich richtig. Die übrigen Fälle ergeben sich durch Induktion mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks.

Beispiel 4
Sei (A, m) ein noetherscher lokaler Ring der Dimension 0. Dann ist m das einzige Primideal von A, und insbesondere ist

$$\sqrt{0} = \text{Durchschnitt aller Primideale} = m.$$

Das Ideal m ist wird von endlich vielen Elementen erzeugt, die sämtlich nilpotent sind. Deshalb ist m selbst nilpotent, es gibt ein n_0 mit

$$m^n = 0 \text{ für } n \geq n_0.$$

Damit ist

$$H^0_A(n) = 0 \text{ für } n \geq n_0$$

also ist

$$H^1_A(n)$$

unabhängig von n für $n \geq n_0$, also ein Polynom des Grades 0.

3.14.7 Lokale Dimension, Hilbert-Funktionen und Definitionsideale

Sei X ein noethersches Schema und $x \in X$ ein Punkt. Dann stimmt die lokale Dimension von X in x überein

$$\dim_x X = \dim \mathcal{O}_{X,x} = \deg H^1_{\mathcal{O}_{X,x}}$$

mit dem Grad des Hilbert-Polynoms zur Hilbert-Funktion von $\mathcal{O}_{X,x}$ und gleichermaßen mit der minimalen Anzahl der Erzeuger eines Definitionsideals von $\mathcal{O}_{X,x}$.
(siehe Anhang Kommutative Algebra).

3.14.8 Die Dimension des $\mathbb{P}^N_k$

Sei k ein Körper. Dann gilt

$$\dim \mathbb{P}^N_k = N.$$

Beweis.Jeder Punkt des $\mathbb{P}^N_k$ besitzt eine offene Umgebung, die isomorph ist zum $\mathbb{A}^N_k$. Jede lokale Dimension von $\mathbb{P}^N_k$ ist deshalb gleich der lokalen Dimension des entsprechenden Punktes des $\mathbb{A}^N_k$. Es folgt

$$\dim \mathbb{P}^N_k = \dim \mathbb{A}^N_k = N.$$

QED.

3.14.9 Satz von der Dimension der Faser

Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein dominanter Morphismus[63] von integren[64] Schemata vom endlichen Typs[65] über einem Körper k.

---

[63] d.h. f(X) liege dicht in Y.
[64] (englich 'integral'), d.h. die Schnitte der Strukturgarbe sind keine Nullteiler (bilden Integritätsbereiche). Das ist äquivalent zur Forderung, daß das Schema irreduzibel ist und die Strukturgarbe keine nilpotenten Elemente besitzt. Für jede affine Umgebung U = Spec A des Schemas ist dann das Nullideal 0 ein Punkt η von U mit der Eigenschaft daß die Abschließung von $\{\eta\}$ in U

(i) Seien $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ irreduzible Teilmengen mit

(a) $f(X') \subseteq Y'$.

(b) $f|_{X'}: X' \longrightarrow Y'$ dominant.[66]

(c) X' ist irreduzible Komponente von $f^{-1}(Y')$.

Dann gilt $\mathrm{codim}_X X' \le \mathrm{codim}_Y Y'$.

(ii) Sei $e = \dim X - \dim Y$ die <u>relative Dimension</u> von f. Für $y \in f(X)$ hat dann jede Komponente von $f^{-1}(y)$ eine Dimension $\ge e$.

(iii) Es gibt eine dichte offene Teilmenge $U \subseteq X$ derart, daß für $y \in f(U)$ jede Komponente von $f^{-1}(y) \cap U$ die Dimension e hat.

(iv) Für jede ganze Zahl h sei

$$E_h := \{x \in X \mid \begin{array}{c}\text{Es gibt eine irreduzible Komponente}\\ Z \text{ von } f^{-1}(f(x)) \text{ mit } x\in Z \text{ und } \dim Z \ge h\end{array}\}$$

Dann gilt:

(a) E_h ist abgeschlossen in X.

(b) E_h ist für $h > e$ nirgends dicht in X.

(c) $E_h = X$ für $h = e$.

Beweis. Siehe Hartshorne: Algebraic geometry, Ex. II.3.22, oder Shafarevich: Basis algebraic geometry, Part I, Chapter 1, §6, Section 3.
QED.

Folgerung

---

gleich U ist. Weil U dicht liegt im Schema, ist die Abschließung von $\{\eta\}$ im Schema das ganze Schema. Ein solcher Punkt heißt <u>generischer Punkt</u> oder auch <u>allgemeiner Punkt</u> des Schemas. Weil $\{\eta\}$ als einelementige Menge irreduzibel ist, gilt dasselbe für deren Abschließung, d.h. die irreduziblen Schemata sind gerade die Schemata, die einen generischen Punkt besitzen. Jedes irreduzible Schema besitzt dabei genau einen generische Punkt: seien U und V nicht-leere affine offene Teilschemata, $u \in U$ und $v \in V$ deren generische Punkte. Weil $U \cap V$ nicht leer ist, können wir ein weiteres nicht-leeres offenes affines Teilschema $W \subseteq U\cap V$ wählen und einen weiteren generischen Punkt $w \in W$. Wegen

$w \in W \subseteq U\cap V \subseteq U$

ist w eines der Primideale von U. Insbesondere liegt w in der Abschließung von {u} in U, d.h. es gilt

$$u \subseteq w.$$

Weil die Abschließung von {w} im Schema das ganze Schema ist, ist die Abschließung von {w} in U gleich U. Insbesondere liegt u in der Abschließung von {w}, d.h. es gilt

$$w \subseteq u.$$

Wir haben gezeigt, w = u. Aus Symmetrie-Gründen gilt auch w = v, also u = v. Wir haben gezeigt, je zwei generische Punkte sind gleich.

Beispiel: Seien $X = \mathrm{Spec}\ k[x, y]/(x^2-y^3)$ die semi-kubische Parabel und t eine Unbestimmte. Dann ist der Punkt (t^3,t^2) mit Koordinaten in der Erweiterung k(t) von k ein generischer Punkt von X.

[65] Ein Schema X über einem Ring A heißt vom endlichen Typ über A, wenn X Vereinigung von endlich vielen affinen Schemata Spec B ist mit B endlich erzeugte Algebra über A.

[66] Damit liegt eine offene Teilmenge von Y' in f(X'), d.h. das Bild enthält den generischen Punkt von Y'. Liegt umgekehrt der allgemeine Punkt von Y' in f(X'), so liegt die Abschließung des allgemeinen Punkt (d.h. Y') ganz in der Abschließung von f(X'), d.h. es gilt (b).

Sei f: X $\longrightarrow$ Y ein eigentlicher surjektiver Morphismus von reduzierten Schemata endlichen Typs über einem Körper k. Weiter seien die folgenden Bedingungen erfüllt.

(i) Y ist irreduzibel.
(ii) Die Fasern $f^{-1}(y)$ sind irreduzibel für alle $y \in Y$.
(iii) Die Dimension der Fasern $f^{-1}(y)$ ist unabhängig von y.

Dann ist X irreduzibel.

Beweis. Sei n die gemeinsame Dimension der Fasern,

$$n := \dim f^{-1}(y) \text{ für } y \in Y.$$

Angenommen, X ist reduzibel. Wir betrachten die Zerlegung in irreduzible Komponenten, sagen wir

$$X = X_1 \cup ... \cup X_r.$$

Weil f surjektiv ist, folgt

$$Y = f(X) = f(X_1) \cup ... \cup f(X_r).$$

Weil f eigentlich ist, sind die $f(X_i)$ abgeschlossene Teilschemata. Weil Y irreduzibel ist, muß $f(X_i) = Y$ gelten für mindestens ein i. Wir können annehmen, dies ist der Fall für genau die ersten s Indizes i,

$$f(X_i) = Y \Leftrightarrow i \in \{1,...,s\}.$$

Wir entfernen die Bilder, für die das nicht der Fall ist aus Y und setzen

$$Y' := Y - (f(X_{s+1}) \cup ... \cup f(X_r)).$$

Dies ist eine offene Teilmenge von Y. Wir schreiben

$$X' := f^{-1}(Y') = X'_1 \cup ... \cup X'_r, \quad X'_i := X_i \cap f^{-1}(Y'),$$

mit X'_i offen in X_i und nicht leer. Insbesondere ist mit X_i auch X'_i irreduzibel. Wir versehen X'_i mit der Struktur eines reduzierten Teilschemas von X und betrachten die durch f induzierten Morphismen

$$f_i: X'_i \longrightarrow Y', i = 1, ... , s.$$

Der Morphismus f_i ist gerade die Einschränkung von $f|_{X_i}$ auf X'_i.

Sei

$$m_i := \min \{\dim f_i^{-1}(y) \mid y \in Y'\}.$$

Nach dem Satz von der Dimension der Faser gibt es eine nicht-leere (also dichte) offene Menge

$$U \subseteq Y'$$

mit

$$m_i := \dim f_i^{-1}(y) \text{ für } y \in U.$$

Nach Wahl der Mengen X'_i und der Abbildungen f_i liegt für $y \in U$ jeder Punkt der Faser $f^{-1}(y)$ in einem der X'_i und damit in einer der Fasern $f_i^{-1}(y)$, d.h. es ist

$$f^{-1}(y) = f_1^{-1}(y) \cup ... \cup f_s^{-1}(y).$$

Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(y)$ irreduzibel von der Dimension n. Die m_i sind Dimensionen abgeschlossener Teilmengen und damit höchstens gleich n. Wegen der Irreduzibilität von $f^{-1}(y)$ muß diese Faser gleich einem der $f_i^{-1}(y)$ sein, sagen wir für ein $y \in U$ und $i = 1$. Dann gilt aber, weil die Dimension der Fasern über U konstant ist,

$$m_1 = \dim f_1^{-1}(y) = n \text{ für alle } y \in U.$$

Nun besteht U gerade aus Punkten von Y, in denen die Dimension der Fasern von $f|_{X_1}$ minimal ist. Wegen $f|_{X_1} = f_1$ über den Punkten von U hat die Dimension der Fasern dort aber auch den maximalen Wert n. Es folgt

$$\dim f|_{X_1}^{-1}(y) = \dim f^{-1}(y) \text{ für alle } y \in Y.$$

Dann kann aber $f|_{X_1}^{-1}(y)$ keine echte abgeschlossene Teilmenge der irreduziblen Menge $f^{-1}(y)$ sein (denn dann hätte sie eine kleinere Dimension). Es gilt also

$$f|_{X_1}^{-1}(y) = f^{-1}(y) \text{ für alle } y \in Y.$$

Jeder Punkt von X liegt in einer der Fasern von f, also auch in einer der Fasern von $f|_{X_1}$ und damit in X_1. Wir haben gezeigt X liegt ganz in der Teilmenge X_1, d.h. es ist

$$X = X_1.$$

Insbesondere ist X irreduzibel.

QED.

Beispiel (der affine Kegel über einem projektiven Schema)

Seien k ein Körper und $x_0, \dots, x_N$ Unbestimmte. Wir betrachten den Morphismus

$$f\colon \mathbb{A}_k^N - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_k^N,\ (x_0, \dots, x_N) \mapsto [x_0, \dots, x_N] \qquad (1)$$

Auf der offenen Hauptmenge $D(x_i)$ hat der Morphismus die Gestalt

$$D(x_i) \longrightarrow D_+(x_i) = \mathbb{A}_k^N,\ (x_0, \dots, x_N) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_N}{x_i}\right). \qquad (2)$$

Etwas verkürzend können wir auch sagen, der Morphismus ist lokal auf $D(x_i)$ durch die Vorschrift[67]

$$x \mapsto \left(\frac{1}{x_i} x\right)'$$

gegeben und analog auf $D(x_j)$ durch

$$x \mapsto \left(\frac{1}{x_j} x\right)'$$

Dies ist verträglich mit den Isomorphismen, welche den $\mathbb{A}_k^N$ mit $D_+(x_i)$ bzw. $D_+(x_j)$ identifizieren:

$$\mathbb{A}_k^N \longrightarrow D_+(x_i),\ \left(\frac{1}{x_i} x\right)' \mapsto \left[\frac{1}{x_i} x\right] = [x]$$

[67] Der Strich soll bedeuten, daß die i-te Koordinate des (N+1)-Tupels gestrichen wurde.

$$\mathbb{A}^N_k \longrightarrow D_+(x_j),\ (\frac{1}{x_j}x)' \mapsto [\frac{1}{x_j}x] = [x]$$

In beiden Fällen liefern die Zusammensetzungen dieser Abbildungen mit der entsprechenden Abbildung (2) gerade die Abbildung (1).

Die lokal definierten Morphismen (2) verheften sich deshalb zu einem global definierten Morphismus. Für jedes projektive Teilschema

$$X \subseteq \mathbb{P}^N_k$$

induziert f einen Morphismus

$$f^{-1}(X) \longrightarrow X. \tag{3}$$

Dabei ist

$$C_X := f^{-1}(X) \cup \{0\} \tag{4}$$

gerade das affine Teilschema des $\mathbb{A}^N_k$ welches dort durch dieselben Gleichungen definiert wird wie X im $\mathbb{P}^N_k$ (nur aufgefaßt als affine Gleichungen). Das Schema (4) heißt <u>affiner Kegel</u> über X. Die Fasern von (3) sind affine Geraden, aus denen der Urspung entfernt wurde. Insbesondere sind alle Fasern irreduzibel und von der Dimension 1. Auf Grund der obigen Folgerung ist mit X auch der affine Kegel über X irreduzibel und hat die Dimension

$$\dim C_X = \dim X + 1. \tag{5}$$

Für nicht notwendig irreduzibles X kann man X in irreduzble Komponenten zerlegen, sagen wir

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$$

Versieht man alle Schemate mit ihrer reduzierten Struktur, so erhält man

$$C_X = C_{X_1} \cup \ldots \cup C_{X_r}.$$

Deshalb ist (5) auch für reduzible (nicht notwendig reduzierte) Teilschemata des projektiven Raums richtig.

3.14.10 Die Hilbert-Funktion eines projektiven Schemas

Seien $R = k[x_0, \ldots , x_N]$, $I \subseteq R$ ein homogenes Ideal und

$$A := R/I$$

Weiter bezeichne

$$m = (x_0, \ldots , x_N)$$

das Ideal des Ursprungs im affinen Raum und

$$gr_m(A) := \oplus_{n=0}^{\infty} m^n \cdot A/m^{n+1} \cdot A$$

den zugehörigen graduierten Ring.[68] Die Länge der graduierten Bestandteile von $gr_m(A)$ über $gr^0_m(A) = R/m = k$ ist dann endlich und die Hilbert-Funktion

$$H_{gr_m(A)}$$

---

[68] Weil I homogen ist, ist $gr_m(A)$ isomorph zu R/I: $\dim_k gr^n_m(A)$ ist die Maximalzahl von Potenzprodukte des Grades n in den Unbestimmten $x_0, \ldots , x_N$, welche modulo der homogenen Polynome des Grades n aus I linear unabhängig sind.

von $gr_m(A)$ als Modul über sich selbst ist wohldefiniert. Der Grad des zugehörigen Hilbert-Polynoms ist gerade die Dimension des durch I definierten projektiven Schemas.

$$\dim \text{Proj } R/I = \deg H_{gr_m(A)}.$$

Beweis. Weil die Dimension des affinen Kegels über Proj R/I um 1 größer ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim \text{Proj } R/I &= \dim \text{Spec } R/I - 1 \\ &=^{69} \dim \text{Spec } (R/I)_m - 1 \\ &= \dim (R/I)_m - 1 \end{aligned}$$

Als einziges maximales Ideal von $(R/I)_m$ ist $m\bullet(R/I)_m$ ein Definitionsideal. Damit ist

$$c \quad = \deg \chi((R/I)_m, m(R/I)_m, T) - 1$$

Für große n sind die Werte des Polynoms auf der rechten Seite an der Stelle T = n geraden die Längen des n-ten graduierten Bestandteils von

$$gr_{m\bullet(R/I)_m}((R/I)_m). \tag{1}$$

Wir wollen jetzt diese Länge mit der entsprechenden Länge vergleichen, die zu

$$gr_m(R/I) \tag{2}$$

gehört[70]. Nun entsteht (1) aus (2), indem man nach m lokalisiert. Die Längen zu (2) sind aber gerade Summen von Längen von Lokalisierungen bezüglich der assoziierten Primideale des Annullators von (2). Nun wird (2) durch m annulliert,

$$m\bullet\, gr_m(R/I) = 0,$$

d.h.

$$m \subseteq \text{Ann}_R\, gr_m(R/I).$$

Jedes assoziierte Primideal enthält damit m, und ist damit gleich m (weil m maximal ist in R). Damit ist m das einzige assoziierte Primideal (der graduierten Bestandteile von)

---

[69] Wir nutzen hier die Tatsache, daß R/I eine endlich erzeugte k-Algebra is und jede Komponente von Spec R/I den Punkt m enthält. Man beachte, die lokalen Dimensionen der einzelnen irreduziblen Komponenten sind in allen abgeschlossenen Punkten dieselben.
Genauer: ein kommutativer Ring A mit 1 heißt katenär , wenn für je zwei Primideale p und q dieses Rings mit $p \subseteq q$ jede maximale Primidealkette von p nach q von derselben endlichen Länge.
Insbesondere ist dann

$$ht(q) = ht(p) + ht(q/p).$$

Der Ring A heißt universell katenär, d.h. wenn A noethersch ist und jede endlich erzeugte A-Algebra katenär ist.
Endlich erzeugte Algebren über einem Körper k sind universell katenär.
Endlich erzeugte Integritätsbereiche A über einem Körper haben außerdem die Eigenschaft, daß

$$\dim A = ht(p) + \dim A/p$$

gilt für jedes Primideal p von A (vgl. Matsumura, Commutative algebra 14.H). Speziell für maximale Ideale x von A, d.h. für abgeschlossene Punkte von X = Spec A ist dann

$$\dim_x X = \dim X,$$

d.h. in allen abgeschlossenen Punkten hat X dieselbe Dimension.

[70] Man kann zeigen, die beiden graduierten Ringe sind isomorph.

$gr_m(R/I)$. Deren Länge ändert sich also nicht, wenn wir bezüglich m lokalisieren. Wir haben gezeigt,

$$\dim \operatorname{Proj} R/I = \deg H^1_{gr_m(R/I)} - 1$$

d.h.

$$\dim \operatorname{Proj} R/I = \deg H^0_{gr_m(R/I)}$$

QED.

Bemerkung

Die Dimension des n-ten graduierten Bestandteils von R/I über dem Grundkörper ändert sich nicht, wenn man k durch einen größeren Körper ersetzt. Insbesondere ist für jede Körpererweiterung K/k

$$\dim \operatorname{Proj} R/I = \dim \operatorname{Proj} (R/I)\otimes_k K.$$

Beispiel

Die Hilbert-Reihe des N-dimensionalen projektiven Raums

$$\mathbb{P}^N_k = \operatorname{Proj} k[x_0,...,x_N]$$

ist gleich

$$H^0_{k[x_0,...,x_N]} = \frac{1}{(1-T)^N}.$$

Insbesondere ist

$$\dim \mathbb{P}^N_k = d(k[x_0,...,x_N]) = N.$$

3.14.11 Durchschnitte mit Hyperebenen im projektiven Raum

Seien k ein Körper, $X \subseteq \mathbb{P}^N_k$ eine equidimensionale abgeschlossene Teilmenge und

$$H = V(F) \subset \mathbb{P}^N_k$$

eine Hyperfläche. Wir setzen

$$d := \dim X.$$

Dann gilt

$$\dim X \cap H \ge d-1$$[71],

und jede irreduzible Komponente von $X\cap H$ besitzt die Dimension d-1 oder d. Der zweite Fall tritt nur für Komponenten von $X\cap H$ ein, die auch Komponenten von X sind.

Beweis. 1. Schritt: $X\cap H$ ist nicht leer im Fall $d \ge 1$

Wir betrachten den affinen Kegel über $X\cap H$. Es gilt

$$C_{X\cap H} = C_X \cap C_H \tag{1}$$

Die Kegel C_X und C_H sind durch homogene Ideale I bzw. J des projektiven Koordinatenrings $R := k[x_0 , ... , x_N]$ von $\mathbb{P}^N_k$ definiert. Insbesondere liegen diese Ideale ganz im irrelevanten Ideal

$$m := (x_0 , ... , x_N)R,$$

[71] Insbesondere ist der Durchschnitt im Fall $d \ge 1$ nicht leer.

d.h. m ist ein Punkt aus dem Durchschnitt der affinen Mengen auf der rechten Seite von (1). Insbesondere ist (1) nicht leer. Jede Komponente des Durchschnitts von (1) hat eine Dimension

$$\geq \dim C_X - 1 = (\dim X + 1) - 1 = d \geq 1.$$

Deshalb kann (1) nicht nur aus dem Punkt m bestehen (denn dann wäre die Dimension dieses Durchschnitt gleich 0). Es gibt also einen von m verschiedenen Punkt des affinen Kegels $C_{X \cap H}$. Mit Hilfe der natürlichen Abbildung

$$C_{X\cap H} - \{m\} \longrightarrow X \cap H$$

erhalten wir einen Punkt von $X \cap H$.

2. Schritt. der Fall k algebraisch abgeschlossen.

Sei $Z \subseteq X \cap H$ eine irreduzible Komponente. Wir fixieren einen Punkt

$$z \in Z$$

und wählen eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{P}^N_k$ dieses Punktes z, welche isomorph ist zum affinen Raum,

$$U \cong \mathbb{A}^N_k.$$

Es gilt

$$z \in Z \cap U \subseteq (X \cap U) \cap (H \cap U)$$

Die affine Menge $Z \cap U$ ist eine irreduzible Komponente des Durchschnitts von $X \cap U$ mit der affinen Hyperfläche $H \cap U$.[72] Es folgt

$$\dim X\cap U - 1 \leq \dim Z \cap U \leq \dim X \cap U \leq \dim X = d \qquad (2)$$

Wir lassen U eine Familie von offenen Mengen des projektiven Raums durchlaufen, welche Z überdecken, und erhalten

$$\dim Z \leq d.$$

Weil dim X gleich dem Supremum über alle lokalen Dimensionen ist (und dieses endlich ist) gibt es einen Punkt $x \in X$ mit

$$\dim X = \dim_x X.$$

Wir könen U so wählen, daß U außer einem Punkt z von Z auch den Punkt x enthält.[73] Es folgt

$$\begin{aligned} d - 1 = \dim X - 1 &= \dim_x X - 1 \\ &\leq \dim X \cap U - 1 && \text{(wegen } x \in X \cap U) \\ &\leq \dim Z \cap U && \text{(wegen (2))} \\ &\leq \dim Z. \end{aligned}$$

3. Schritt. k beliebig.

---

[72] $Z \cap U$ ist irreduzibel, weil jede nicht-leere offene Teilmenge von $Z \cap U$ dicht liegt in der irreduziblen Menge Z, also erst recht in $Z \cap U$.

Durchläuft Z die Komponenten von $X \cap H$ die U schneiden, so erhält man eine Darstellung von $X \cap H \cap U$ als Vereinigung der irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen $Z \cap U$. Kein dieser Teilmengen $Z \cap U$ kann man weglassen, weil man sonst Z in der Darstellung von $X \cap H$ weglassen könnte.

[73] Wegen k algebraisch abgeschlossen, also k unendlich, können wir eine Hyperebene so wählen, daß sie die beiden Punkte z und x meidet. Deren Komplement ist ein geeignetes U.

Wir schreiben

$$X = V(I), H = V(F)$$

mit einem homogenen Ideal $I \subseteq R := k[x_0,...,x_n]$ und einem homogenen Polynom F. Die Hilbert-Funktion der projektiven Koordinatenringe

$$R/I, R/FR, R/(I+FR)$$

von X, H und $X\bigcap H$ ändern sich nicht, wenn man k durch die algebraische Abschließung von k ersetzt. Die Behauptung ist damit auf die Aussage des ersten Schritts reduziert.
QED.

3.24.12 Durchschnitte abgeschlossener Teilschemata im $\mathbb{P}_k^N$

Seien k ein Körper und X, Y zwei equidimensionale abgeschlossene Teilmengen im N-dimensionalen projektiven N-Raum $\mathbb{P}_k^N$. Dann besitzt jede irreduzible Komponente von

$$X \bigcap Y$$

eine Dimension ≥ dim X + dim Y - N. Insbesondere gilt

$$\mathrm{codim}_X X\bigcap Y \le \mathrm{codim}_{\mathbb{P}_k^N} Y.$$

Falls für eine Komponente C des Durchschnitts sogar das Gleichheitszeichen gilt, sagt man, X und Y schneiden sich <u>eigentlich</u> in C. Falls dies für jede Komponente gilt, so sagt man X und Y schneiden sich <u>eigentlich</u>.
Beweis. Wir schreiben

$$\mathbb{P}_k^N = \mathrm{Proj}\ R \text{ mit } R := k[x_0,...,x_N]$$
$$X := \mathrm{Proj}\ R//I$$
$$Y := \mathrm{Proj}\ R/J$$

mit homogenen Idealen I und J von $k[x_0,...,x_n]$. Für den Durchschnitt erhalten wir[74]

$$X\bigcap Y = \mathrm{Proj}\ k[x_0,...,x_N]/(I+J).$$

Dabei ist

$$k[x_0,...,x_N]/(I+J) = k[x_0,...,x_N,y_0,...,y_N]/(I,J',x_0-y_0,...,x_N-y_N).$$

wobei J' das Ideal von $k[y_0,...,y_N]$ bezeichne, das aus J ensteht, wenn man jede Unbestimme x_i durch y_i ersetzt. Wir erhalten so

$$k[x_0,...,x_N]/(I+J) = (k[x_0,...,x_N]/I \otimes_k k[y_0,...,y_N]/J) / (x_0-y_0,...,x_N-y_N)$$
$$= (R/I \otimes_k R/J)/(x_0-y_0,...,x_N-y_N)$$

d.h.

$$X\bigcap Y = (X \times Y)' \bigcap \Delta$$

Dabei betrachten wir (X×Y)' als abgeschlossenes Teilschema von

$$\mathbb{P}_k^{2N+1} = \mathrm{Proj}\ k[x_0,...,x_N,y_0,...,y_N]$$

welches durch das durch I und J erzeugte homogene Ideal gegegen ist. Mit anderen Worten (X×Y)' ist das projektive Teilschema mit dem affinen Kegel $C_X \times C_Y$.

[74] Genauer: rechts steht ein abgeschlossenes Teilschema des projektiven Raums, dessen zugrundeliegender topologischer Raum gerade $X\bigcap Y$ ist. Man kann die Identität als Definition (für Teilschemate eines gegebenen projektiven Raums) ansehen.

Mit

$$\Delta := V(x_0-y_0,\ldots,x_N-y_N)$$

bezeichnen wir die Diagonale des Projektiven Raums $\mathbb{P}_k^{2N+1}$ mit dem definierenden Ideal

$$(x_0-y_0,\ldots,x_N-y_N)$$

Wir wenden den Satz von der Dimension der Faser auf die natürliche Projektion

$$C_X \times C_Y \longrightarrow C_X,\ (x,y) \longrightarrow x$$

(genauer, auf die analogen Abbildungen, die man erhält, wenn man die Mengen X und Y durch deren irreduzible Komponenten ersetzt), und erhalten

$$\dim C_X \times C_Y = \dim C_X + \dim C_Y = \dim X + \dim Y + 2,$$

also

$$\dim (X \times Y)' = \dim X + \dim Y + 1$$

Weil Δ der Durchschnitt von N+1 Hyperflächen ist, erhalten wir für jede Komponent C von $X \cap Y$ die Abschätzung

$$\dim C \ge \dim X + \dim Y + 1 - N - 1.$$

QED.

3.15 Bemerkungen zur Schnitt-Theorie

3.15.1 Der Grad eines projektiven Schemas

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und X eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{P}_k^N$. Dann kann man eine Hyperebene H wählen, die keine der Komponenten von X enthält,[75] also X eigentlich schneidet. Durch Wiederholen dieser Konstruktion findet man

$$d := \dim X$$

Hyperebenen $H_1,\ldots,H_n$ derart, daß

$$\dim X \cap H_1 \cap \ldots \cap H_d = 0$$

ist, d.h. der Durchschnitt besteht aus endlich vielen Punkten. Man kann zeigen, die Anzahl der Punkte aus diesem Durchschnitts ist nach oben beschränkt und für fast alle solcher Hyperebenen-n-Tupel gleich. Man nennt diese Anzahl Grad von X und bezeichnet sie mit

$$\deg X := \max \{\# X \cap L \mid L \subseteq \mathbb{P}_k^N \text{ linearer Unterraum mit } \dim X \cap L = 0\}$$

Indem man die Punkte aus $X \cap L$ mit geeigneter Weise mehrfach zählt (zum Beispiel, wenn L aus Tangenten in diesem Punkt besteht), kann man sogar erreichen, daß die Anhzahl der Punkte für jedes L mit codim L = d dieselbe ist.

3.15.2 Der ebene Fall

Sei $F \in k[x_0,x_1,x_2]$ homogen vom Grad d und

$$X := D(F) \subseteq \mathbb{P}_k^2$$

Weiter sei H eine Hyperfläche, welche X eigentlich schneidet. Durch eine geeignete Wahl der Koordinaten erreicht man,

$$H = D(x_0).$$

---

[75] Man wähle auf jeder Komponente einen Punkt mit Koordinaten aus k und zu diesen endlich vielen Punkten eine Hyperebene, die keinen dieser Punkte enthält.

Weil der Schnitt eigentlich ist, ist x_0 kein Teiler von F. Insbesondere ist $F(0,x_1,x_2)$ homogen vom Grad d. Der Durchschnitt $X \cap H$ ist auf der projektiven Geraden H durch die Gleichung

$$F(0,x_1,x_2) = 0$$

gegeben. Als homogenes Polynom in zwei Unbestimmten ist aber $F(0,x_1,x_2)$ von der Gestalt[76]

$$F(0,x_1,x_2) = c(a_1x_1-b_1x_2)^{n_1}\bullet\ldots\bullet(a_rx_1-b_rx_2)^{n_r}$$

wobei wir annehmen können, daß keine zwei der Paare (a_i,b_i) proportional sind, d.h. keine zwei der Punkte Punkte $[a_i,b_i]$ sind gleich. Zählt man $[a_i,b_i]$ mit der Vielfachheit n_i so erhält man als Anzahl der Schnittpunkte von X und H gerade

$$\sum_{i=1}^{r} n_i = \deg F = d.$$

Für die Hilbert-Reihe $H = H_X = H_{k[x_0,x_1,x_2]/F}$ des Schemas $X = V(F) = \mathrm{Proj}\, k[x_0,x_1,x_2]/(F)$ gilt auf Grund der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow k[x_0,x_1,x_2] \xrightarrow{F} k[x_0,x_1,x_2] \longrightarrow k[x_0,x_1,x_2]/(F) \longrightarrow 0$$

$$0 \quad = T^d H_{k[x_0,x_1,x_2]} - H_{k[x_0,x_1,x_2]} + H_{k[x_0,x_1,x_2]/F'}$$

d.h. es ist

$$\begin{aligned} H &= (1-T^d)\bullet H_{k[x_0,x_1,x_2]} \\ &= (1-T^d)/(1-T)^3 \\ &= \frac{1+T+..+T^{d-1}}{(1-T)^2} \\ &= (1+T+\ldots+T^d)\bullet \sum_{i=0}^{n} \binom{N+n-1}{N-1}\bullet T^n \qquad \text{mit } N = 2 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} H(n) &= \binom{n+1}{1} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-d+1}{1} \qquad \text{(d Summanden)} \\ &= d\bullet n + \text{const.} \end{aligned}$$

Der Grad von X ist also gerade der höchts Koeffizient des Hilbert-Polynoms. Allgemein kann man zeigen

$$H_X(n) = \frac{\deg X}{d!}\bullet n^n + \text{Glieder kleineren Grades}$$

für beliebige reduzierte projektive Schemata der Dimension Dimension d. Diese Identität gestattet eine Definition des <u>Grades</u> für nicht notwendig reduzierte projektive Schemate über einem nicht notwendig allgebraisch abgeschlossenen Körper k.

---

[76] Man betrachte das Polynom $F(0,1,x_2/x_1)$ bzw. $F(0,x_1/x_2,1)$ und nutze die Tatsache, daß jedes Polynom in einer Unbestimmten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper in Linearfaktoren zerfällt.

3.14.3 Die Schnitt-Vielfachheit projektiver Teilschemata und der Satz von Bezout

Seien X und Y abgeschlossene Teilschemata des projektiven Raums $\mathbb{P}_k^N$ über einem Körper k. Wir nehmen an, daß sich X und Y eigentlich schneiden und komplementäre Dimensionen besitzen, d.h. es gelte

$$\dim X \cap Y = 0.$$

Für jeden Punkt p von $X \cap Y$ kann man dann eine natürliche Zahl

$$i(p, X, Y)$$

definieren mit der Eigenschaft, daß der Satz von Bezout gilt:

$$\deg X \cdot \deg Y = \sum_p i(p, X, Y) \cdot \deg C$$

wobei die Summe rechts über alle Punkte von $X \cap Y$ erstreckt wird.

Bemerkungen

Der ebene Fall (N = 2) wurde bereits von Newton und Bezout behandelt. Die Definition der Schnitt-Multiplizität im allgemeinen Fall ist erst in der Mitte des vergangenen Jahrhunderts gelungen. Man braucht dazu Methoden der homologischen Algebra, die erst dann zur Verfügung standen.

Den ersten Existenzbeweis für diese Zahl durch A. Weil findet man in der Monographie

> Weil, A.: Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc., Coll. Publ. 29, Providence 1962.

Die erste kompakte Formel für diese Zahl findet man in

> Serre, J.-P.: Algèbre locale - Multiplicités, Lecture Notes in Math. 11 (1965), Springer Verlag.

Das Standard-Lehrbuch zur Schnitt-Theorie von Schemata ist das Buch von

> Fulton, W.: Intersection theory, Springer, Berlin 1984

Wir beschränken uns hier auf die Beschreibung des von Newton und Bezout behandelten ebenen Falls.

3.14.4 Der ebene Fall

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F,G \in k[x,y,z]$ homogene Polynome der Grade d bzw. e und

$$X := D(F)$$
$$Y := D(G)$$

die zugehörigen Kurven in der projektiven Ebene $\mathbb{P}_k^2$. Wir nehmen an, die beiden Kurven schneiden sich eigentlich (d.h. sie haben keine gemeinsamen Komponenten, d.h. F und G sind teilerfremd). Dann ist die Menge

$$X \cap Y$$

endlich. O.B.d.A. sei

$$e \le d.$$

O.B.d.A. enthalte die Hyperebene V(x) keinen der Punkte von $X \cap Y$, d.h.

$$X \cap Y \subseteq \mathbb{P}_k^2 - H = \mathbb{A}_k^2$$

Wenn wir x = 1 setzen, können wir y und z als Koordinaten im $\mathbb{A}_k^2$ ansehen. Durch eine Drehung des y-z-Koordinatensystems können wir noch erreichen, daß daß die z-Koordinaten der verschiedenen Punkte von $X \cap Y$ verschieden sind.

Wir schreiben

$$F(x, y,z) = F_0(x,y)\bullet z^d + F_1(x,y)\bullet z^{d-1} + \ldots + F_d(x,y)$$

$$G(x, y,z) = G_0(x,y)\bullet z^e + G_1(x,y)\bullet z^{e-1} + \ldots + G_e(x,y)$$

mit homogenen Polynomen F_i und G_j in x und y der Grade i und j

Betrachten wir das Polynom

$$D(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} F_0 z^d & F_1 z^{d-1} & \ldots & F_d z^0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & F_0 z^d & .. & F_{d-1} z^1 & F_d z^0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ G_0 z^d & G_1 z^{d-1} & \ldots & G_e z^{d-e} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & G_0 z^d & \ldots & G_{e-1} z^{d-e+1} & G_e z^{d-e} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Jeder Eintrag der Matrix ist ein homogenes Polynom des Grades d. Deshalb ist D(x,y,z) homogen vom Grade $d(d+e) = d^2+de$. Entwickelt man die Determinante d-mal nach der ersten Spalte, so sieht man, D(x,y,z) ist durch $z^d\bullet\ldots\bullet z^d = z^{d^2}$ teilbar, und der Quotient ist ein Polynom in x und y:

$$D(x,y,z) = E(x,y)\bullet z^{d^2},\quad E(x,y) \text{ homogen vom Grad de.}$$

Damit ist

$$\mathrm{Res}_z(F,G) = E(x,y) \quad = \det \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & \ldots & F_d & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & F_0 & .. & F_{d-1} & F_d & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots\ldots & & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ G_0 & G_1 & \ldots & G_e & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & G_0 & \ldots & G_{e-1} & G_e & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

homogen vom Grad de. Dies ist aber gerade die Resultante von F und G bezüglich z, d.h. dieses Polynom ist genau gleich Null in einem Punkt (x,y) = (a,b), wenn

F(a,b,z) und G(a,b,z)

eine gemeinsame Nullstelle besitzen.

Weil die Hyperebene H = V(x) keine gemeinsame Nullstelle von F und G enthält, ist E(0,y) nicht identisch 0, d.h. E(x,y) ist nicht durch x teilbar. Insbesonder ist

E(1,y) ein Polynom des Grades de in y.

Für x = 1, d.h. in den Punkten von

$$\mathbb{P}^2_k - H = \mathbb{A}^2_k$$

bekommen aber die Gleichungen von X und Y die Gestalt

$$X\colon f(y,z) := F(1,y,z) = 0$$
$$Y\colon g(y,z) := G(1,y,z) = 0$$

Aus den obigen Entwicklungen von F und G nach den Potenzen von z erhalten wir Entwicklungen

$$f(y, z) = f_0(y)\bullet z^d + f_1(y)\bullet z^{d-1} + \ldots + f_d(y)$$
$$g(y,z) = g_0(y)\bullet z^e + g_1(y)\bullet z^{e-1} + \ldots + g_e(y)$$

mit

$$f_i(y) = F_i(1,y) \text{ und } g_j(y) := F_j(1,y)$$

Es folgt

$$\mathrm{Res}_z(f,g) = E(1,y) = \det \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_0 & \cdot\cdot & f_{d-1} & f_d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_0 & g_1 & \cdots & g_e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_0 & \cdots & g_{e-1} & g_e & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & & \end{pmatrix}$$

ist ein Polynom des Grades de, hat also de Nullstellen, wenn man diese mit ihren Vielfachheiten zählt. Nun ist aber $y = c \in k$ genau dann eine Nullstelle der Resultante, wenn es ein $z = d \in k$ gilbt mit $f(c,d) = g(c,d) = 0$. Mit anderen Worten, die Nullstellen der Resultante entsprechen gerade den Punkten von $X \bigcap Y$. Die Anzahl der Punkte von $X \bigcap Y$ ist somit gleich $d\bullet e$ (wenn man diese mit ihren Vielfachheiten zählt).

3.15.5 Lineare und rationale Äquivalenz

Seien X und Y abgeschlossene Teilschemata des projektiven Raums $\mathbb{P}^N_k$ über einem Körper k, die sich eigentlich schneiden und komplementäre Dimension besitzen. Dann ist die Zahl

$$(X\bullet Y) := \sum_p i(p, X, Y)\bullet \deg C,$$

wobei über die Punkte des Durchschnitts $X\bigcap Y$ summiert wird, wohldefiniert und heißt Schnitt-Zahl oder Schnitt-Index oder Schnitt-Multiplizität von X und Y.

Nach dem Satz von Bezout hängt diese Zahl nur von den Graden von X und Y ab. Es liegt deshalb nahe, Äquivalenzklassen von Teilschemata des projektiven Raums zu betrachten, die so beschaffen sind, daß die Schnitt-Zahl nur von den Äquivalenz-Klassen statt von deren Repräsentanten abhängt.

Genau dies ist Gegenstand der Schnitt-Theorie algebraischer Schemata. Statt Teilschemata betrachtet man formale ganzzahlige Linearkombinationen

$$n_1X_1 + \ldots + n_rX_r,\ n_i \in \mathbb{Z},$$

von reduzierten und irreduziblen Teilschemata X_i von vorgegebener Kodimension c und nennt diese c-Zyklen. Man kann solche Linearkombinationen als eine vergröberte

Variante der Primärzerlegung eines equidimensionalen Schemas ansehen und setzt die Definition der Schnitt-Zahl linear fort,

$$(\sum_{i=1}^{r} n_i X_i \bullet \sum_{j=1}^{s} m_j Y_j) := \sum_{i=1}^{r} \bullet \sum_{i=1}^{r} n_i m_j (X_i \bullet Y_j)$$

und geht dann zu den Äquivalenzklassen über. Die Äquivalenz-Klassen wählt man so, daß gilt:

1. Die Schnitt-Zahl hängt nur von den Äquivalenz-Klassen der Zyklen ab.
2. Je zwei Zyklen lassen sich äquivalent so abändern, daß sich jedes X_i mit jedem Y_j eigentliche scheidet (die Schnitt-Zahl also wohldefiniert ist).

Man erreicht so, daß die Schnitt-Zahl für je zwei beliebige Klassen definiert ist. Man kann die Definition der Schnitt-Zahl außerdem noch auf den Fall erweitern, daß man auf die Forderung der komplementären Dimension verzichtet. Das Schnitt-Produkt von zwei Zyklen der Kodimensionen a und b ist dann ein Zyklus der Kodimension der Kodimension a+b, dessen Äquivalenzklasse nur von den Äquivalenzklassen der beiden Faktoren abhängt. Bezeichne

$$\mathrm{Ch}^a$$

die abelsche Gruppe der Äquivalenzklassen der Kodimension a (für a = 0 erhält man $\mathbb{Z}$) Das Schnitt-Produkt definiert dann Abbildungen

$$\mathrm{Ch}^a \times \mathrm{Ch}^b \longrightarrow \mathrm{Ch}^{a+b}$$

Die direkte Summe

$$\mathrm{Ch} := \oplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ch}^n$$

bekommt so die Struktur eines graduierten Rings, welcher Chow-Ring des $\mathbb{P}_k^N$ heißt. Die Konstruktionen funktionieren auch, wenn man den projektiven Raum durch eine beliebiges eigentliches reduziertes und irreduzibles Schema über einem Körper ersetzt, daß keine singulären Punkte besitzt.

Die zu definierende Äquivalenz-Relation hei0t im Fall der Kodimension 1 lineare Äquivalenz und im allgemeinen Fall rationale Äquivalenz.

Ein Zylus der Kodimension 1 (im Z := $\mathbb{P}_k^N$ eigentlichen, reduzierten , irreduziblen und simgularitätenfreien Schema Z, auf welchem das Schnitt-Produkt eingeführt werden soll) heißt auch Divisor, genauer Weil-Divisor. Zwei Divisoren heißen linear äquivalent, wenn ihre Differenz der Nullstellen-Polstellen-Divisore einer rationalen Funktion auf Z ist.

Zur Definition des letzteren beachten wir, daß eine rationale Funktion

$$f \in k(Z)$$

lokal von der Gestalt $f = \frac{s}{t}$ ist mit lokal definierten regulären Funktionen s, t. Weil Z singularitätenfrei ist, können wir s und t so wählen, daß der größte gemeinsame Teiler gleich 1 ist. Der Nullstellen-Divisoer f ist dann lokal durch die Gleichung s = 0 und der Polstellen-Divisor durch die Gleichung t = 0 gegeben. Durch diese Gleichungen sind Hyperflächen auf Z gegeben, d.h. Teilmengen der Kodimension 1. Zur Definition des Nullstellen-Polstellen-Divisors führen wir für jeden irreduzible abgeschlossene Teilmenge

$$W \subset Z$$

der Kodimension 1 eine Abbildung

$$v_W : k(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

ein, die jeder rationalen Funktion $f \in k(Z) - \{0\}$ die natürliche Zahl n zuordnet,

$$v_W(f) = n,$$

wenn f eine n-fache Nullstelle entlang W besitzt, für welche

$$v_W(f) = -n$$

gilt, wenn f einen n-fachen Pol entlang W besitzt, und für welche

$$v_W(f) = 0$$

gilt, wenn es auf W einen Punkt gibt, in welchem f regulär ist und keine Nullstelle besitzt. Außerdem setzen wir

$$v_W(0) = \infty.$$

Beispiel 1

Sei $Z = \mathbb{P}^1_k$. Dann gilt $k(Z) = k(\mathbb{A}^1_k) = k(T)$ mit einer Unbestimmten T. Weiter sei $p \in Z$ ein Punkt mit der Koordinate $a \in k$.

Für jede rationale Funktion $f \in k(T)$ setzen wir

$$v_p(f) = n\ (\in \mathbb{Z}),$$

wenn in der Primfaktorszerlegung von f das Polynom T - a mit der n-ten Potenz vorkommt, und

$$v_\infty(f) = n,$$

wenn in der Primfaktorzerlegung von f(1/T) das Polynom T mit der n-ten Potenz vorkommt (d.h. $v_\infty(f) = -\deg(f)$).

Beispiel 2

Sei $Z = \mathbb{P}^N_k$. Dann gilt $k(Z) = k(\mathbb{A}^N_k) = k(T_1,\dots,T_N)$ mit Unbestimmten $T_1,\dots,T_N$.

Weiter seien $\varphi \in k[T_1,\dots,T_N]$ ein irreduzibles Polynom und

$p := \varphi k[T_1,\dots,T_N] \in \operatorname{Spec} k[T_1,\dots,T_N] = \mathbb{A}^N_k \subset \mathbb{P}^N_k$

das von φ erzeugte Primideal und

$$W := \overline{V(p)}$$

die Abschließung der irreduziblen Menge $V(p) \subseteq \mathbb{A}^N_k$ im projektiven Raum. Für jede rationale Funktion $f \in k(T_1,\dots,T_N)$ setzen wir

$$v_W(f) := v_p(f) := n \in \mathbb{Z},$$

wenn in der Primfaktorzerlegung von f das Polynom φ mit der Potenz n vorkommt.

Allgemeiner Fall

Im allgemeine Fall betrachtet man den generischen Punkt ξ von W und den lokalen Ring

$$\mathcal{O}_{Z,\xi}$$

von Z im Punkt ξ. Weil W die Kodimension 1 hat, ist dies ein lokaler Ring der Dimension 1. Auf Grund der Singularitätenfreiheit von Z kann man zeigen, daß das maximale Ideal dieses Rings ein Hauptideal ist, sagen wir

$$m_{Z,\xi} = \pi\mathcal{O}_{Z,\xi},$$

und damit insbesondere ein ZPE-Ring.
Für jede rationale Funktion

$$f \in k(Z) = Q(\mathcal{O}_{Z,\xi})$$

setzen wir

$$v_W(f) = n,$$

wenn in der Primfaktorzerlegung von f das Element π in der n-ten Potenz vorkommt.

Außerdem setzen wir

$$\operatorname{div}(f) := \sum_W v_W(f) \cdot W.$$

wobei rechts über alle irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen W von Z summiert wird. Weil in der Primfaktorzerlegung von f nur endlich viele Faktoren vorkommen, ist diese Summe endlich, d.h. rechts steht ein Divisor, der <u>Nullstellen-Polstellen-Divisor</u> der rationalen Funktion f. Zwei Divisoren heißen <u>linear äquivalent</u>, wenn ihre Differnz ein Divisor der Gestalt div(f) ist.

Diese Definition läßt sich auf den Fall beliebiger Z (die Singularitäten haben können) verallgemeinern, indem man anstelle der Funktionen v_W alle diskreten Bewertungen des Rangs 1 von k(Z) betrachtet, die trivial auf k sind.

Zwei Zyklen der Kodimension c heißen <u>rational äquivalent</u>, wenn es endlich viele irreduzible abgeschlossene Teilmengen

$$W_1, ..., W_r \subseteq Z$$

der Kodimension c-1 gibt und rationale Funktionen

$$f_1 \in k(W_1), ... , f_r \in k(W_r)$$

derart, daß die Differenz der beiden Zyklen die Gestalt

$$\operatorname{div}(f_1) + ... + \operatorname{div}(f_r)$$

besizt.

3.16 Singularitäten

3.16.1 Der Tangentialraum eines Schemas in einem Punkt

Seien X ein Schema und $x \in X$ ein Punkt. Die Elemente des lokalen Rings

$$\mathcal{O}_{X,x}$$

von X in x kann man sich als Potenzreihen-Entwicklungen der in einer Umgebung von x regulären Funktionen auf X vorstellen. Die Elemente des maximalen Ideals

$$m_{X,x}$$

entsprechen dann gerade den Potenzreiben, deren Absolutglied gleich Null ist, und die Elemente von dessen Quadrat,

$$m_{X,x}^2$$

den Potenzreihen, die im Grad zwei beginnen (d.h. deren Absolutglied und deren lineares Glied Null ist). Die Elemente von

$$m_{X,x}/m_{X,x}^2 \tag{1}$$

stehen dann für Potenreihen ohne Absolutglied, deren Glieder eines Grades > 1 ignoriert werden, d.h. Vektorraum steht für die Lineargleider von Taylor-Entwicklungen regulärer Funktionen, die in einer Umgebung von x auf X definiert sind. Diese linearen Funktionen darf man sich allerdings nicht mehr als Funktionen vorstellen, die auf einer Umgebung $U \subseteq X$ von x definiert sind: ihre Konstruktion hängt von der Wahl der Umgebung ab und von der Wahl der lokalen Koordinaten auf U (selbst für den Fall daß X eine komplexe Mannigfaltigkeit ist). Man hat sich die Elemente von (1) vielmehr als lineare Funktionen vorzustellen, die auf dem Tangentialraum von X im Punkt x definiert sind. Wir nennen deshalb den Vektorraum (1) über $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x}$ auch <u>Kotangentialraum</u> von X im Punkt x und bezeichnen ihn mit

$$T^*_{X,x} := m_{X,x}/m^2_{X,x}$$

Der zugehörige duale Vektorraum heißt <u>Tangentialraum</u> von X im Punkt x oder auch <u>Zariski-Tangentialraum</u>. Er wird mit

$$T_{X,x} := \mathrm{Hom}_{k(x)}(T^*_{X,x}, k(x))$$

bezeichnet.

Da nach Definition die Elemente des Kotangentialraums die linearen Funktionen auf dem Tangentialraum sind, kann man die von diesen erzeugte k(x)-Algebra als Koordinatenring des Tangentialraums auffassen, und diesen so die Struktur eines affinen Schemas geben. Genauer, man bildet die von $T^*_{X,x}$ über k(x) erzeugte symmetrische Algebra

$$S_{k(x)}(T^*_{X,x}).$$

Diese ist isomorph zu einer Polynom-Algebra über k(x) in

$$d = \dim T^*_{X,x}$$

Unbestimmten. Das affine Schema

$$T_x(X) := \mathrm{Spec}\, S_{k(x)}(T^*_{X,x})$$

ist deshalb isomorph zum d-dimensionalen affinen Raum $\mathbb{A}^d_{k(x)}$ und heißt <u>Tangentialraum</u> von X im Punkt x (mit dessen natürlicher Schema-Struktur).

Bemerkungen

(i) Für jeden Morphismus f: $X \longrightarrow Y$ von Schemata und jeden Punkt $x \in X$ hat man einen lokalen Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \tag{2}$$

der zugehörigen lokalen Ringe auf X bzw. Y und damit eine k(y)-lineare Abbildung

$$m_{Y,f(x)}/m^2_{Y,f(x)} \longrightarrow m_{X,x}/m^2_{X,x}\ . \tag{3}$$

Auf diese Weise ist ein kontra-varianter Funktor

$$(X, x) \mapsto (T^*_{X,x}, k(x))$$

auf der Kategorie der punktierten Schemata mit Werten in der Kategorie der Vektorräume Vect (über allen Körpern) definiert[77].

[77] Die Objekte sind Paare (V, K) bestehend aus einem Körper K und einem K-Vektorraum V. Ein Morphismus

$$(V, K) \longrightarrow (W, L)$$

besteht aus einer Einbettung i: $K \hookrightarrow L$ (oder, was dasselbe bedeutet, einem Homomorphismus von Ringen mit 1) und i-linearen Abbildung f: $V \longrightarrow W$, d.h. es gelte

(ii) Zusammen mit der durch (2) induzierten Abbildung der Restklassenkörper

$$k(y) \longrightarrow k(x),$$

indziert die lineare (3) Abbildung einen Homorphismus von Ringen mit 1,

$$S_{k(y)}(m_{Y,f(x)}/m^2_{Y,f(x)}) \longrightarrow S_{k(x)}(m_{X,x}/m^2_{X,x}),$$

auf den zugehörigen symmetrischen Algebren und damit einen Morphismus affiner Schemata

$$T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y).$$

Auf diese Weise ist ein Funktor von der Kategorie der punktierten Schemata mit Werten in der Kategorie der affinen Schemata definiert.

Beispiel 1

Seien $k = \mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen,

$$Y := \mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[x,y]$$
$$f := x^2 + y^2 - 1$$
$$X := V(f)$$

und

$$f: X \hookrightarrow Y$$

die natürliche Einbettung. Für $p := (a,b) \in X$ sind die zugehörigen maximalen Ideale der affinen Ebene bzw. der Kreislinea gleich

$$m_{Y,p} = (x - a, y - b)$$
$$m_{X,p} = (x - a, y - b) \bmod (f).$$

Die induzierte Abbildung der Kotangentialräume ist die natürliche Abbildung auf den Faktorraum

$$m_{Y,p}/m^2_{Y,p} \longrightarrow m_{X,p}/m^2_{X,p},\ \alpha\bullet x + \beta\bullet y \mapsto \alpha\bullet x + \beta\bullet y \bmod (f), \qquad (4)$$

Wegen

$$f = x^2 + y^2 - 1 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + 2ax + 2by - 2$$

kann man die Abbildung auch in der folgenden Gestalt Schreiben

$$k\bullet(x-a) + k\bullet(y-b) \longrightarrow k\bullet(x-a) + k\bullet(y-b) / k\bullet(ax+by - 1)$$

Wir führen jetzt die lineare Koordinatentransformation

$$R := x - a$$
$$S := y - b$$

(d.h. der Punkt (a,b) bekommt die Koordinaten (0,0)). Dann gilt

$$ax + by - 1 = a(R+a) + b(S+b) = aR + bS$$

Abbildung (4) bekommt die Gestalt

$$k\bullet R + k\bullet S \longrightarrow k\bullet R + k\bullet S / k\bullet(aR+bS).$$

Der Vektorraum rechts ist 1-dimensional. Die auf den symmetrischen Algebren induzierte Abbildung hat also die Gestalt

$$k[R, S] \longrightarrow k[T]$$

und ihr Kern ist das von aR+bS erzeugte Ideal. Die induzierte Abbildung der affinen Spektren ist eine abgeschlossen Einbettung

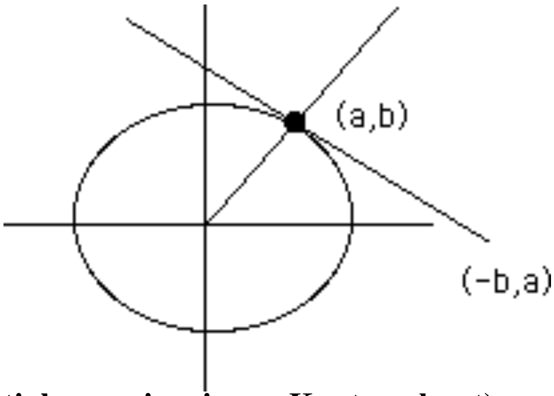
$$\operatorname{Spec} k[T] \hookrightarrow \operatorname{Spec} k[R,S]$$

$$f(c'\bullet v' + c''\bullet v'') = i(c')\bullet f(v') + i(c'')\bullet f(v'')$$

für $c', c' \in K$ und $v', v'' \in V$.

welche die affine Gerade $T_p(X) = \mathbb{A}_k^1$ mit der Gerade V(aR+bS) der affinen Ebene identiziert. Dies nach Wahl der Koordinaten eine Gerade durch den Punkt p mit den Koordinaten R = 0 und S = 0 und besteht aus allen Punkten (R,S) die zu (a,b) orthogonal sind

$$< (R,S), (a,b)> = aR + bS = 0.$$



Beispiel 2 (Tangentialraum in einem Knoten, knot)
Seien k ein Körper,

$$Y := \mathbb{A}_k^2 = \mathrm{Spec}\ k[x,y]$$
$$f := y^2 - x^2 - x^3$$
$$X := V(f)$$

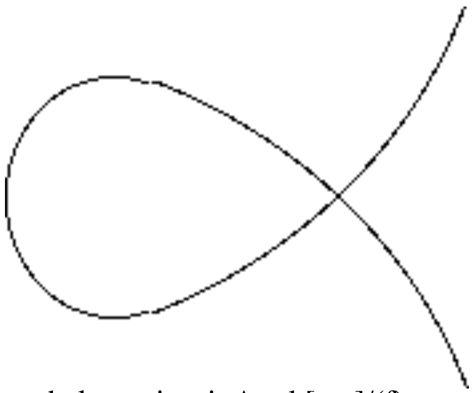
und

$$m = (x , y)$$

das Ideal des Ursprungs. Dann gilt $f \in m$, d.h.

$$m \in V(f) = X.$$

Bestimmen wir den Tangentialraum von X im Punkt m.



Für den Kotangentialraum erhalten wir mit A = k[x,y]/(f),

$$\begin{aligned} m\cdot A/m^2\cdot A &= m + fk[x,y]/m^2 + + fk[x,y] \\ &= m/m^2 \qquad (\text{wegen } f \in m^2) \\ &= k\cdot x + k\cdot y \qquad (\subseteq k[x,y]) \end{aligned}$$

mit anderen Worten, der Kotangentialraum ist 2-dimensional, und es gilt

$$T_m(X) = \mathbb{A}_k^2 .$$

Der Tangentialraum einer Kurve kann also 2-dimensional sein. Wir werden später sehen, das liegt daran, daß sich die Kurve im Punkt m nicht (auch nicht lokal) in einen 1-dimensionalen affinen Raum einbetten läßt. Man zeigen, in allen anderen abgeschlossenen Punkten ist der Tangentialraum dieser Kurve 1-dimensional.

Beispiel 3 (Tangentialraum in einer Spitze, cusp)
Seien k ein Körper,

$$Y := \mathbb{A}_k^2 = \operatorname{Spec} k[x,y]$$

$$f := y^3 - x^2$$

$$X := V(f)$$

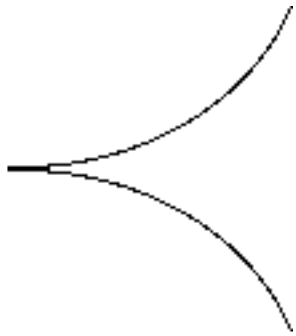
und

$$m = (x , y)$$

das Ideal des Ursprungs. Dann gilt $f \in m$, d.h.

$$m \in V(f) = X.$$

Bestimmen wir den Tangentialraum von X im Punkt m.



Für den Kotangentialraum erhalten wir mit $A = k[x,y]/(f)$,

$$\begin{aligned} m\bullet A/m^2\bullet A &= m + fk[x,y]/m^2 + + fk[x,y] \\ &= m/m^2 \qquad (\text{wegen } f \in m^2) \\ &= k\bullet x + k\bullet y \qquad (\subseteq k[x,y]) \end{aligned}$$

mit anderen Worten, der Kotangentialraum ist wieder 2-dimensional, und es gilt

$$T_m(X) = \mathbb{A}_k^2 .$$

Man kann zeigen, in allen anderen abgeschlossenen Punkten der Kurve ist der Tangentialraum 1-dimensional.

Beispiel 4 (Tangentialraum in einem nicht-abgeschlossenen Punkt)
Seien k ein Körper,

$$R := k[x_1,...,x_N]$$

ein Polynomring in N Unbestimmten und

$$p := (x_{r+1},...,x_N)R.$$

Für den lokalen Ring im Punkt p erhalten wir

$$R_p = k(x_1,...,x_r)[x_{r+1},...,x_N]_p = K[x_{r+1},...,x_N]_P$$

mit $K := k(x_1,...,x_r)$ und $P := (x_{r+1},...,x_N)K(x_{r+1},...,x_N)$. Für den Kotangentialraum erhalten wir

$$P/P^2 = K\bullet x_{r+1}+...+K\bullet x_N \qquad (\subseteq K(x_{r+1},...,x_N)).$$

Abgesehen vom vergrößerten Grundkörper K ist der Tangentialraum von der Dimension N-r. Das Primideal P definiert einen r-dimensionalen linearen Unterraum V(p) von

$$\operatorname{Spec} R = \mathbb{A}_k^N$$

Über dem vergrößerten Grundkörper, d.h. in

$$\mathrm{Spec}\ R\otimes_k K = \mathbb{A}_K^N$$

ist der Tangentialraum $T_{X,p}$ in gewisser Weise der Tangentialraum eines zu V(p) komplementären Unterraums (in einem abgeschlossenen Punkt).

Diese Situation ist in gewisser Weise typisch für den allgemeinen Fall (von Schemata Spec A endlichen Typs über einem Körper und integren abgeschlossenen Teilschemata $V(p) \subseteq \mathrm{Spec}\ A$). Man kann zeigen, es gibt stets eine offene Teilmenge $U \subseteq V(p)$ derart, daß man $T_{X,p}$ identifizieren kann mit dem Tangentialraum in einem abgeschlossenen Punkt eines zu p komplementären Unterraums (betrachtet über dem Restekörper $\kappa(p)$ von p.

3.16.2 Der Tangentialkegel einer klasischen algebraischen Mengen

Wir beginnen mit einigen Betrachtungen im Konstext der klassischen algebraischen Geometrie (vgl. Schafarevich: Basic algebraic geometry).

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper,

$$X = V(I) \subseteq \mathbb{A}_k^N$$

eine abgeschlossene Teilmenge und

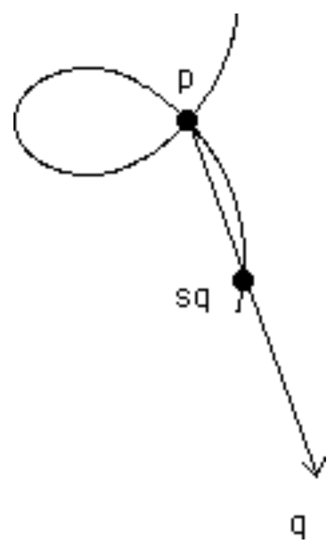
$$p \in X$$

ein (abgeschlossener) Punkt. Indem wir p als Ursprung im $\mathbb{A}_k^N$ ansehen, identifizieren wir $\mathbb{A}_k^N$ mit einem N-dimensionalen k-Vektorraum, sagen wir

$$p = (0,...,0) \in k^N = \mathbb{A}_k^N.$$

Sei

$$\tilde{X} := \{(a,t\} \in k^N \times k \mid t\bullet a \in X \}$$



die Menge aller Paare, besteht aus einem Vektor a und einer Zahl $t\in k$ mit der Eigenschaft, daß Angriffspunkt 0 und Spitze $t\bullet a$ des t-fachen des Vektors a auf X liegen. Durch Einsetzen des Ausdruckts $t\bullet a$ in die Gleichungen von X erhalten wir die

Gleichungen der algebraischen Menge $\tilde{X}$, welche so zu einer abgeschlossenen Teilmenge des $\mathbb{A}_k^N \times A_k^1 = \mathbb{A}_k^{N+1}$ wird.

Betrachten wir die beiden Projektionen

$$\varphi\colon \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{A}_k^N,\ (a,t) \mapsto a,$$

$$\psi\colon \tilde{X} \longrightarrow A_k^1,\ (a,t) \mapsto t..$$

Die Menge $\tilde{X}$ sich als Vereinigung von zwei abgeschlossenen Teilmengen schreiben, sagen wir

$$\tilde{X} = \tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2$$

wobei

$$\tilde{X}_2 := \mathbb{A}_k^N \times \{0\} = \psi^{-1}(0).$$

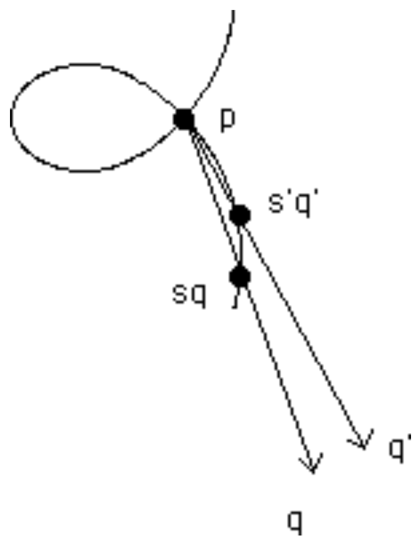
den verschiedenen Darstellungen t•a des Nullvektors mit dem Angriffspunkt im Ursprung entspricht, und $\tilde{X}_1$ die Abschließung des Komplements von $\tilde{X}_2$ ist,

$$\tilde{X}_1 := \overline{\psi^{-1}(\mathbb{A}_k^1 - \{0\})}$$

Die ersten Koordinaten der Menge $\tilde{X}_1$ enthält alle Geraden durch $p \in X$, welche X in mindestens einem weiteren Punkt schneiden, d.h. die Sekanten von X durch p, und deren Grenzlagen die Tangenten in p. Letztere entsprechen gerade den Punkten, deren zweite Koordinate gleich Null ist. Die Menge

$$C_{X,p} := \varphi(\tilde{X}_1 \cap \psi^{-1}(0))$$

heißt deshalb <u>Tangentialkegel</u> von X im Punkt p.



Es gilt

$$C_{X,p} = V(\mathrm{in}_p(f) \mid f \in I).$$

Für jedes Polynom $f \in k[x_0,..,x_N] - \{0\}$ bezeichne dabei $\mathrm{in}_p(f)$ die <u>Anfangsform</u> von f im Punkt p, d.h. das Glied des Grades n der Taylor-Entwicklung von f im Punkt p, wenn diese im Grad n beginnt, d.h. wenn alle Glieder eines Grades < n identisch Null sind und das Glied des Grades n von Null verschieden ist. Der Grad n heißt dann Anfangsgrad von f in p und wird mit

$$\text{indeg}(f) := n$$

bezeichnet.

Beweis. Wie bisher können wir O.B.d.A. annehmen, p = o ist der Ursprung. Es gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{X} &= \{(x,t) \in k^{N+1} \mid f(s\cdot q) = 0 \text{ für } f \in I\} \\
\tilde{X}_1 &= \text{Abschließung von } \{(x,t) \in k^{N+1} \mid f(t\cdot q) = 0 \text{ für } f \in I, t \neq 0\} \\
&= \text{Abschließung von } \{(x,t) \in k^{N+1} \mid f(t\cdot q) = 0 \text{ für } f \in I\} \cap D(t)
\end{aligned}$$

Wir entwickelt f(t•x) nach den Potenzen von t,

$$\begin{aligned}
f(t\cdot x) &= f_0(x) + t\cdot f_1(x) + t^2 f_2(x) + \ldots \\
&= t^{\text{indeg}(f)}\cdot f_{\text{indeg}(f)}(x) + t^{\text{indeg}(f)+1}\cdot f_{\text{indeg}(f)+1}(x) + \ldots
\end{aligned}$$

wenn $f_i(x)$ den homogenen Bestandteil des Grades i bezeichnet. Damit ist $\tilde{X}_1$ die Abschließung der Menge

$$\begin{aligned}
&D(t) \cap \{(x,t) \in k^{N+1} \mid 0 = f_0(x) + t\cdot f_1(x) + t^2 f_2(x) + \ldots \text{ für } f \in I\} \\
&=D(t) \cap \{(x,t) \in k^{N+1} \mid 0 = t^{\ell}\cdot f_{\ell}(x) + t^{\ell+1} f_{\ell+1}(x) + \ldots , f \in I, \ell = \text{indeg}(f)\} \\
&=D(t) \cap \{(x,t) \in k^{N+1} \mid 0 = f_{\ell}(x) + t\cdot f_{\ell+1}(x) + \ldots , f \in I, \ell = \text{indeg}(f)\}
\end{aligned}$$

Weil $\mathbb{A}_k^{N+1}$ irreduzibel ist, hat D(t) mit jeder nicht-leeren offenen Mengen einen gemeinsamen Punkt. Für die Abschließung erhalten wir also

$$\tilde{X}_1 = \{ (x,t) \in k^{N+1} \mid 0 = f_{\ell}(x) + t\cdot f_{\ell+1}(x) + \ldots , f \in I, \ell = \text{indeg}(f)\}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
(\tilde{X}_1 \cap \psi^{-1}(0) &= \{ (x,t) \in k^{N+1} \mid 0 = f_{\ell}(x) \text{ für } f \in I, \ell = \text{indeg}(f)\} \\
&= \{ (x,t) \in k^{N+1} \mid 0 = \text{in}_p(f)(x) \text{ für } f \in I\}
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
C_{X,p} &= \psi(\tilde{X}_1 \cap \psi^{-1}(0)) \\
&= \{ x \in k^N \mid 0 = \text{in}_p(f)(x) \text{ für } f \in I\} \\
&= V(\{\text{in}_p(f) \mid f \in I\})
\end{aligned}$$

QED.

Beispiel 1

Seien

$$\begin{aligned}
&f := y^2 - x^2 - x^3 \\
&X := V(f) = V(fk[x,y] \\
&p := (0,0).
\end{aligned}$$

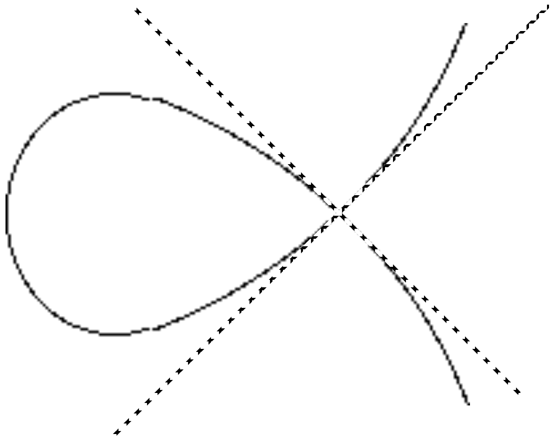
Dann gilt

$$\text{in}_p(f) = y^2 - x^2$$

also

$$C_{X,p} = V(y^2 - x^2)$$

Der Tangentialkegel der Kurve X im Ursprung besteht also aus zwei sich schneidenden Geraden.



Beispiel 2
Seien

$f := y^2 - x^3$
$X := V(f) = V(fk[x,y]$
$p := (0,0).$

Dann gilt

$in_p(f) = y^2$

also

$C_{X,p} = V(y^2)$

Der Tangentialkegel der semikubischen Parabel X im Ursprung besteht also aus der (doppelt zu zählenden) x-Achse.

3.14.3 Der Koordinatenring des Tangentialkegels

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und $I \subseteq A$, $m \subseteq A$ zwei Ideale. Dann ist Kern der natürlichen Abbildung

$$gr_m(A) \longrightarrow gr_m(A/I)$$

das Ideal

$$in_m(I) := \oplus_{n=0}^{\infty} (I \cap m^n + m^{n+1})/m^{n+1} \cong \oplus_{n=0}^{\infty} m^n \cap I/m^{n+1} \cap I,$$

welches Anfangsideal von I in $gr_m(A)$ heißt. Es wird erzeugt von den Anfangsformen

$$in_m(f) := f + m^{\ell+1} \in gr_m^{\ell}(A), \ell := indeg(f),$$

der Elemente $f \in I$ mit einem endlichen Anfangsgrad,

$$indeg(f) := inf \{d \mid d \text{ nicht negativ ganz mit } f \in m^d\}.$$

Bemerkung
Die im vorangehenden Abschnitt betrachtete Situation entspricht dem Fall

$$A = k[x_1,..., x_N] \text{ und } m = (x_1,..., x_N),$$

wenn man für den dort betrachteten Punkt $p = (p_1,...,p_N)$ den Ursprung nimmt, und, wenn nicht, dem Fall

$$A = k[x_1,..., x_N] \text{ und } m = (x_1-p_1,..., x_N-p_N).$$

Beweis. Es gilt

$gr_m^n(A) \qquad = m^n/m^{n+1}$

$$\begin{aligned} gr^n_m(A/I) &= (m^n+I)/(m^{n+1}+I) \\ &\cong m^n/m^n\bigcap(m^{n+1}+I) \\ &= m^n/(m^{n+1} + m^n\bigcap I) \end{aligned}$$

Die natürliche Abbildung $gr_m(A) \longrightarrow gr_m(A/I)$ hat also im Grad n den Kern

$$in^n_m(I) := \quad (m^n\bigcap I + m^{n+1})/m^{n+1} \cong m^n\bigcap I/m^{n+1}\bigcap I.$$

Die von Null verschiedenen homogenen Elemente des Grades n dieses Ideals sind gerade von der Gestalt

$$in(f) = f + m^{n+1} \text{ mit } f \in m^n\bigcap I - m^{n+1},$$

d.h. es sind die Anfangsformen des Grades n der Elemente von I. Diese erzeugen trivialerweise das Anfangsformenideal.
QED.

1.14.4 Der Tangentialkegel eines Schemas in einem Punkt

Seien X ein Schema und $x \in X$ ein Punkt. Dann heißt

$$C_{X,x} := \operatorname{Spec} gr_{m_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x})$$

Tangentialkegel von X im Punkt x. Dabei bezeichne $m_{X,x}$ das maximale Ideal des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ vom X im Punkt x.

Bemerkungen

(i) Jeder Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ von Schemata induziert für jeden Punkt $x \in X$ einen lokalen Homomorphismus $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$, also Homomorphismen

$$m^n_{Y,f(x)}/m^{n+1}_{Y,f(x)} \longrightarrow m^n_{X,x}/m^{n+1}_{X,x}$$

für jedes nicht-negative ganze n, die sich zu einem Homomorphismus

$$gr_{Y,f(x)}(\mathcal{O}_{Y,f(x)}) \longrightarrow gr_{X,x}(\mathcal{O}_{X,x})$$

graduierter Ringe mit 1 zusammensetzen. Letztere wiederum definieren einen Morphismus von Schemata

$$C_{X,x} \longrightarrow C_{Y,f(x)}$$

Auf diese Weise ist ein Funktor $(X, x) \mapsto C_{X,x}$ von der Kategorie der punktierten Schemata (X,x) mit Werten in der Kategorie der affinen Schemata (mit Kegel-Struktur) definiert.

(ii) Für jeden Punkt $x \in X$ eines Schemas X ist die Dimension des Tangentialkegels von X in x gerade die lokale Dimension von X in x,

$$\dim_x X = \dim C_{X,x}.$$

(iii) Fragen wir nach der Beziehung zwischen Tangentialraum und Tangentialkegel. Seien X ein Schema und $x\in X$ ein Punkt. Wir verwenden die Bezeichnungen

$$A := \mathcal{O}_{X,x}\ , m := m_{X,x}.$$

Auf Grund der Universalitätseigenschaft der symmetrischen Algebren induziert die natürliche Einbettung

$$m/m^2 \hookrightarrow gr_m(A),$$

welche den A/m-Vektorraum links mit dem homogenen Bestandteil des Grades 1 der Algebra links identifiziert, einen Homomorphismus

$$S_{A/m}(m/m^2) \twoheadrightarrow gr_m(A) \qquad (1)$$

von Algebren über dem Körper $A/m = \kappa(x)$. Der Homomorphismus ist surjektiv, weil die Algebra links von ihren homogenen Elementen des Grades 1 erzeugt wird (über A/m). Wir erhalten so eine abgeschlossene Einbettung

$$C_{X,x} = \text{Spec } gr_m(A) \hookrightarrow \text{Spec } S_{A/m}(m/m^2) = T_x(X) = \mathbb{A}^e_{\kappa(x)} \qquad (2)$$

des Tangentialkegels in den Tangentialraum. Jede Einbettung des Tangentialkegels in einen affinen Raum $\mathbb{A}^d_{\kappa(x)}$ kommt von einer Surjektion

$$S_{A/m}(V) \twoheadrightarrow gr_m(A)$$

einer symmetrischen Algebra eines A/m-Vektorraums V. Weil (1) in den Graden 0 und 1 ein Isomorphismus ist, hat im hier vorliegenden Fall die Dimension dieses Vektorraum V den kleinstmöglichen Wert

$$e := \dim_{A/m} m/m^2.$$

Die Zahl e heißt deshalb auch <u>Einbettungsdimension</u> von X im Punkt x und wird mit

$$\text{edim}_x X := \text{edim } \mathcal{O}_{X,x} \dim_{A/m} m/m^2 =^{78} \mu_A(m).$$

bezeichnet. Es ist die Dimension, die ein affiner Raum mindestens haben muß, damit man den Tangentialkegel in diesen Raum einbetten kann. Dies ein notwendige Bedingung für die lokale Einbettbarkeit von X in diesen Raum. Für Schemata lokal endlichen Typs ist die Bedingung auch hinreichend dafür, daß man eine affine Umgebung von X in x finden kann, die abgeschlossene Teilmenge dieses affinen Raums ist.
Insbesondere sehen wir, der Tangentialraum von X in x ist der kleinste affine Raum $\mathbb{A}^N_k$, welcher den Tangentialkegel von X in x enthält.

(iv) Für jedes Schema X und jeden Punkt $x \in X$ gilt

$$\text{edim}_x X \ge \dim_x X$$

(v) Für die abgeschlossenen Punkte

$$m = (x_1 - a_1, \ldots, x_N - a_N) \in \mathbb{A}^N_k$$

eines affinen Raums $\mathbb{A}^N_k$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist (1) trivialerweise ein Isomorphismus, d.h.

$$C_{X,x} = T_x(X)$$

Tangentialkegel und Tangentialraum stimmen als Schemata überein.

Beweis von (ii). Mit $A = \mathcal{O}_{X,x}$ und $m = m_{X,x}$ gilt

$$\dim_x X \qquad = \dim A$$

---

[78] Für kommutative Rings A mit 1 und A-Moduln M bezeichne

$$\mu_A(M)$$

die minimale Anzahl der Elemente eines Erzeugendensystems von M über A. Im Fall endlich erzeugter Moduln M über lokalen Ringen (A,m) ist dies nach dem Lemma von Nakayma gerade die Vektorraum-Dimension

$$\mu_A(M) = \dim_{A/m} M/mM.$$

$$
\begin{aligned}
&= \deg H^1_{gr_m(A)} \\
&= \deg H^0_{gr_m(A)} + 1 \\
&= \dim \operatorname{Proj} gr_m(A) + 1 \\
&= \dim \operatorname{Spec} gr_m(A) \\
&= \dim C_{X,x}
\end{aligned}
$$

QED.

Beweis von (iv). Auf Grund der natürlichen Surjektion (1) gilt

$$\operatorname{edim}_x X = \dim S_{A/m}(m/m^2) \geq \dim_{A/m} gr_m(A) = \dim C_{X,x} = \dim_x X.$$

QED.

3.14.5 Nicht-singuläre Schemata

Ein lokaler noetherscher Ring A mit dem maximalen Ideal m heißt regulär oder auch nicht-singulär, falls die natürliche Surjektion

$$S_{A/m}(m/m^2) \twoheadrightarrow gr_n(A),$$

ein Isomorphismus ist. Andernfalls heißt A singulär. Ein Punkt $x \in X$ eines noetherschen Schemas heißt regulär oder auch nicht-singulär, falls der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär ist, d.h. falls die natürliche Einbettung

$$C_{X,x} \hookrightarrow T_x(X)$$

des Tangentialkegels in den Tangentialraum im Punkt x ein Isomorphismus von Schemata ist. Andernfalls heißt x singulär.

Ein noethersches Schema heißt regulär oder auch nicht-singulär, wenn alle seine Punkte regulär sind. Andernfalls heißt es singulär. Ein noetherscher Ring A heißt regulär oder nicht-singulär, falls Spec A regulär ist. Andernfalls heißt A singulär.

3.14.6 Charakterisierung der regulären lokalen noetherschen Ringe

Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit dem maximalen Ideal m. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) A ist regulär.

(ii) dim A = edim A.

(iii) $gr_m(A)$ ist isomorph zu einem Polynomring über A/m.

(iv) $H_{gr_m(A)} = \frac{1}{(1-T)^d}$ mit d = dim A.

(v) Das irrelevante Ideal von $gr_m(A)$ wird von homogenen Elementen des Grades 1 erzeugt, die eine reguläre Folge bilden.

(vi) m wird von einer regulären Sequenz[79] erzeugt.

---

[79] Seinen A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul und $x_1,...,x_r$ eine endliche Folge von Elementen aus A. Diese Folge heißt M-regulär, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind.

1. $M/(x_1,...,x_r)M \neq 0$.
2. Die Multiplikation mit x_i definiert eine Injektion $M/(x_1,...,x_{i-1})M \longrightarrow M/(x_1,...,x_{i-1})M$ für i = 1,...,r.

Eine reguläre Folge in A ist eine A-reguläre Folge.

(vii) Der Koszul-Komplex $K(\underline{a},A)$ eines Erzeugendensystems a des maximalen Ideals m von A ist eine freie Auflösung der Länge dim A von A/m über A.

(viii) $\mathrm{Tor}_i^A(A/m, A/m) = 0$ für alle $i > \dim A$.

(ix) $\mathrm{Tor}_i^A(A/m, M) = 0$ für alle $i > \dim A$ und jeden A-Modul M.

(x) Für jeden endlich erzeugten A-Modul M besitzt jede minimale freie Auflösung von M über A eine Länge $\le \dim A$.

(vii) A hat eine endliche homologische Dimension, d.h. es gibt eine Zahl d derart, daß es für jeden endlich erzeugten A-Modul m eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F_d \longrightarrow F_{d-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

gibt mit endlich erzeugten freien Moduln F_i.

(viii) Die homologische Dimension von A ist gleich dim A.

(ix) Es gibt für den A-Modul M = A/m eine exakte Sequenz wie in (v).

Falls A regulär ist, bestehen die regulären Folgen, welche m erzeugen, aus dim A Elementen.

Beweis. Sei

$$d := \dim A.$$

***(i) ⇒ (ii)*.**

Nach Voraussetzung gibt es einen Isomorphismus über $\kappa = A/m$,

$$\kappa[x_1,\ldots,x_e] \xrightarrow{\cong} gr_m(A) \tag{1}$$

mit

edim A	$= \dim_\kappa m/m^2$	(nach Definition von edim)
	$= e$	(wegen (1))
	$= \dim \kappa[x_1,\ldots,x_e]$	(Dimension von Polynomringen)
	$= \dim gr_m(A)$	(wegen (1))
	$= \dim A$	(Dimension des Tangentialkegels)

***(ii) ⇒ (i)*.**

Betrachten wir die natürliche Surjektion

$$\kappa[x_1,\ldots,x_e] \twoheadrightarrow gr_m(A) \tag{2}$$

wobei links der affine Koordinatenring des Tangentialraums steht, d.h.

$$e = \mathrm{edim}\, A.$$

Aus der Surjektivität folgt

$$\mathrm{edim}\, A = e = \dim \kappa[x_1,\ldots,x_e] \ge \dim gr_m(A) = \dim A$$

Da links in (2) ein Integritätsbereich steht, ist die Dimension jedes echten Faktorraums echt kleiner als e. Aus der Annahme von (ii) folgt also die Injektivität (2), und damit die Bijektivität.

(i) ⇒ (iii).
trivial.

(iii) ⇒ (i).
Sei $gr_m(A) \cong A/m\,[x_1,...,x_r]$. Dann gilt

$$\dim A = \dim gr_m(A) = \dim_{A/m} A/m\,[x_1,...,x_r] = r$$

und

$$\text{edim } A = \dim_{A/m} m/m^2 = \dim_{A/m} x_1 \bullet A/m + ... + x_r \bullet A/m = r$$

also dim A = edim A, d.h. A ist regulär.

(i) ⇒ (iv).
Nach Voraussetzung gibt es einen Isomorphismus

$$gr_m(A) \cong \kappa[x_1,...,x_e]$$

mit e = edim A = dim A. Also ist $H_{gr_m(A)} = \frac{1}{(1-T)^e}$.

(iv) ⇒ (i).
Nach Voraussetzung gilt

$$\text{edim } A = H_{gr_m(A)}(1) = d$$

und

$$\begin{aligned} \dim A &= \dim gr_m(A) && \text{(Dimension des Tangentialkegels)} \\ &= \deg H_{gr_m(A)} + 1 && \text{(Dimension projektiver Schemata)} \\ &= \deg H^1_{gr_m(A)} && \text{(Grad von Summentransformierten)} \\ &= d && \text{(Polstellenordnung der Hilbert-Reihe)} \end{aligned}$$

Zusammen folgt edim A = dim A, d.h. A ist regulär.

(i) ⇒ (v).
Nach Voraussetzung ist $gr_m(A)$ isomorph zu einem Polynomring, sagen wir

$$gr_m(A) = R := \kappa\,[x_1,...,x_r]$$

mit κ = A/m, und das irrelevante Ideal hat die Gestalt

$$J = (x_1,...,x_r)R.$$

Außerdem gilt $R/(x_1,...,x_{i-1})R = \kappa\,[x_i,...,x_r]$. Insbesondere ist die Multiplikation mit x_i eine injektive Abbildung in diesem Polynomring. Zusammen sehen wir, $x_1,...,x_r$ ist eine reguläre Folge, die das irrelevante Ideal J erzeugt.

(v) ⇒ (vi).

Seien $a_1,...,a_r \in m$ Elemente, mit der Eigenschaft, daß die

$$x_i := a_i + m^2 \in gr_m(A)$$

das irrelevante Ideal erzeugen und eine reguläre Folge bilden. Dann gilt

$$m \subseteq (a_1,...,a_r) + m^2 \subseteq m.$$

nach dem Lemma von Nakayama folgt $m = (a_1,...,a_r)$. Nach Voraussetzung ist die Multiplikation mit x_1 in $gr_m(A)$ injektiv. Für $a \in m^n$ mit $aa_1 \in m^{n+2}$ gilt dann

$$(a + m^{n+1})\bullet x_1 = (aa_1 + m^{n+2}) = 0,$$

also $a + m^{n+1} = 0$, also $a \in m^{n+1}$. Wir haben gezeigt,

$$m^{n+2}:a_1 \cap m^n \subseteq m^{n+1}.$$

Insbesondere erhalten wir für n = 0 die Inklusion

$$m^2:a_1 \subseteq m^1,$$

und damit für n = 1

$$m^3:a_1 \subseteq m^3:a_1 \cap m^1 \subseteq m^2.$$

Induktiv ergibt sich,

$$m^{n+2}:a_1 \subseteq m^{n+1}$$

und wegen $a_1 \in m$ sogar

$$m^{n+2}:a_1 = m^{n+1}. \qquad (3)$$

Dann liegt aber $0:a_1$ in jeder Potenz von m. Nach dem Durchschnittsatz von Krull folgt $0:a_1 = 0$, d.h. die Multiplikation mit a_1 ist eine injektive Abbildung $A \longrightarrow A$. Insbesondere ist damit die Behauptung im Fall r = 1 bewiesen.

Sei jetzt r > 1. Es gilt

$$\begin{aligned} gr_m(A/a_1A) &= \oplus\, m^n+a_1A/m^{n+1}+a_1A \\ &= \oplus\, m^n/m^{n+1}+a_1A\cap m^n \\ &= \oplus\, m^n/m^{n+1}+a_1\bullet m^n:a_1 \\ &= \oplus\, m^n/m^{n+1}+a_1\bullet m^{n-1} && \text{(wegen (3))} \\ &= gr_m(A)/x_1gr_m(A) \end{aligned}$$

Wir setzen

$\overline{A} := A/a_1A$

$\overline{a}_i := a_i \bmod a_1A$ für i = 2,...,r

$\overline{m} := m\overline{A}$

$\overline{x}_i := \overline{a}_i + \overline{m}^2 = a_i + m^2 + a_1A/a_1A = x_i \bmod x_1gr_m(A)$

Dann bilden die $\overline{x}_i$ mit i = 2,...,r eine reguläre Sequenz in

$$gr_{\overline{m}}(\overline{A}) = gr_m(A)/x_1gr_m(A)$$

Nach Induktionsvorausetzung bezüglich r bilden die $\overline{a}_i$ mit i = 2,...,r eine reguläre Sequenz in $\overline{A} := A/a_1A$. Zusammen sehen wir, die a_i mit i = 1,...,r bilden eine reguläre Sequenz in A.

(vi) ⇒ (i).

Sei $m = (a_1,...,a_r)A$ mit einer regulären Sequenz $a_1,...,a_r$. Wir zeigen durch Induktion nach r, daß A ein regulärer Ring der Dimension r ist.

<u>Der Fall r = 0</u>. Das maximale Ideal m ist das Null-Ideal und A ein Körper. Insbesondere ist

$$\dim A = 0 = \operatorname{edim} A$$

(und die Anzahl der Erzeuger von m ist gleich der Dimension von A).
<u>Der Fall r > 0</u>. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\overline{A} := A/a_1A.$$

ein regulärer Ring der Dimension r-1,

$$\overline{A} \text{ regulär, } \dim \overline{A} = r\text{-}1, \operatorname{edim} \overline{A} = r\text{-}1.$$

Weil die Multiplikation mit a_1 in A eine injektive Abbildung ist, liegt a_1 in keinem assoziierten Primideal des A-Moduls A. Insbesondere liegt a_1 damit in keinem minimalen Primoberideal von

$$\operatorname{Ann}(A) = 0,$$

d.h. in keinem minimalen Primideal von A. Es folgt $\dim \overline{A} < \dim A$, also

$$\dim A = \dim \overline{A} + 1 = (r-1) + 1 = r.$$

Weil m von r Elementen erzeugt wird, folgt

$$\dim A = r \ge \operatorname{edim} A.$$

Da die umgekehrt Ungleichung immer besteht, folgt dim A = edim A, d.h. A ist regulär (von der Dimension r).

(i) ⇒ (vii).

siehe die Definition des Koszul-Komplexes im Anhang.

(vii) ⇒ (viii).

Wir tensorieren den Koszul-Komplex $K(\underline{a}, A)$ mit A/m über A. Das der Koszul-Komplex in allen Graden > dim A gleich Null ist, gilt dasselbe für dessen Homologie, d.h. es ist

$$\operatorname{Tor}_i^A(A/m, A/m) = 0.$$

(viii) ⇒ (ix).

Sei zunächst M ein Modul endlicher Länge. Wir führen den Beweis durch Induktion nach

$$\ell := \operatorname{length}_A(M).$$

Im Fall $\ell = 1$ ist M isomorph zu A/m und die Aussage gilt nach Voraussetzung. Sei jetzt $\ell > 1$. Wir fixieren einen Teilmodul $M' \subseteq M$ der Länge 1 und betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0.$$

Wir wenden den Funktor $\otimes_A M$ und erhalten eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/m, M') \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^A(A/m, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^A(A/m, M/M').$$

Der Tor-Modul rechts ist Null nach Induktionsvoraussetzung, weil M/M' eine kleinere Länge hat als M. Der Tor-Moduln links ist Null weil M' die Länge 1 hat. Damit ist auch der Modul in der Mitte Null, d.h. die Behauptung gilt für Moduln endlicher Länge.
Sei jetzt M ein endlicher erzeugter A-Modul. Insbesondere gilt dann

$$\dim M \le \dim A = ht(m) < \infty.$$

Wir führen den Beweis durch Induktion nach d = dim M. Im Fall d = 0 ist die Länge von M endlich, d.h. die Behauptung gilt in diesem Fall. Sei jetzt d > 0. Wir betrachten ein Kette von Teilmoduln

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$$

mit $M_j/M_{j-1} = A/p_j$ und $p_j \in \mathrm{Spec}\, A$ für j = 1,..., n. Es reicht zu zeigen,

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/m, M_j/M_{j-1}) = 0 \text{ für alle j und alle i > dim A.}$$

Es gilt $\mathrm{Ann}(M) \subseteq p_j$ für jedes i, also

$$\dim A/p_j \le \dim A/\mathrm{Ann}(M) = \dim M.$$

Damit ist der Beweis auf den Fall M = A/p mit dim A/p = d, p ∈ Spec A reduziert. Wir fixieren eine Element a ∈ m - p und betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A/p \xrightarrow{a} A/p \longrightarrow A/(p + aA) \longrightarrow 0$$

und die zugehörige lange Kohomologie-Sequenz

$$T := \mathrm{Tor}_i^A(A/m, A/p) \xrightarrow{a} \mathrm{Tor}_i^A(A/m, A/p) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^A(A/(p + aA)).$$

Weil a nicht in p liegt gilt dim A/(p+aA) < dim A/p = d, d.h. der rechte Tor-Modul ist Null nach Induktionsvoraussetzung. Die Abbildung links ist somit surjektiv, d.h. es gilt

$$T = aT \subseteq mT \subseteq T$$

Weil A/p ein endlich erzeugter A-Modul ist, gilt dassebe für T. Nach dem Lemma von Nakayama folgt T = 0. Damit ist die Behauptung für endlich erzeugte A-Moduln bewiesen. Sei jetzt M ein beliebiger A-Modul. Wir betrachten das induktive System $\{M_\alpha\}$ der endlich erzeugten Teilmoduln von M. Dann gilt

$$M = \varinjlim_{\alpha} M_\alpha$$

also

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/m, M) = \mathrm{Tor}_i^A(A/m, \varinjlim_{\alpha} M_\alpha) = \varinjlim_{\alpha} \mathrm{Tor}_i^A(A/m, M_\alpha) = \varinjlim_{\alpha} 0 = 0$$

für i > dim A.

(ix) ⇒ (x).

Sei

$$\ldots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine minimale freie Auflösung von M über A, d.h. für n = 0, 1, ... (und $M = F_{-1}$) entsteht F_n aus $\mathrm{Ker}(d_{n-1})$, indem man ein Erzeugendensystem $\{f_i\}$ von $\mathrm{Ker}(d_{n-1})$ derart wählt, daß die Restklassen der f_i in $\mathrm{Ker}(f_{n-1})/m\mathrm{Ker}(f_{n-1})$ eine Vektorraumbasis über A/m bilden. Als F_n wählt man dann den von den f_i frei erzeugten A-Modul und als

Abbildung $d_n: F_n \longrightarrow F_{n-1}$ die A-lineare Abbildung, die den i-ten freien Erzeuger von F_n auf f_i abbildet. Nach Wahl der f_i liegen für jede lineare Relation der f_i, sagen wir

$$\sum_i a_i f_i = 0,\ a_i \in A,$$

deren Koeffizienten a_i in m, d.h. es gilt

$$\mathrm{Ker}\ d_n \subseteq m\bullet F_n\ ,$$

d.h.

$$d_n \otimes_A A/m = 0.$$

Insbesondere ist

$$\mathrm{Tor}_n^A(A/m, M) = F_n/m\bullet F_n.$$

Nach Voraussetzung (ix) ist dann aber $F_n/m\bullet F_n = 0$ für $n > \dim A$, also

$$F_n = 0 \text{ für } n > \dim A.$$

<u>(x) $\Rightarrow$ (viii)</u>.

trivial: man wähle eine minimale freie Auflösung von A/m über A. Diese hat eine Länge $\le \dim A$. Tensorieren mit A/m über A liefert $\mathrm{Tor}_i^A(A/m, A/m) = 0$ für alle $i > \dim A$.

Wir haben gezeigt,

$$\text{(viii)} \Leftrightarrow \text{(ix)} \Leftrightarrow \text{(x)}$$

und

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)} \Leftrightarrow \text{(iii)} \Leftrightarrow \text{(iv)} \Leftrightarrow \text{(v)} \Leftrightarrow \text{(vi)} \Leftrightarrow \text{(vii)} \Rightarrow \text{(viii)}.$$

Die noch fehlende Implikation (viii) $\Rightarrow$ (vii) liegt etwas jenseits der Möglichkeiten dieser Vorlesung (vgl. Matsumura, Commutative algebra, (18.G), Theorem 45). Es fehlt noch der Vergleich von injektiver, projektiver und globaler Dimension und die Auslander-Buchbaum-Formel proj.dim M + depth M = dim A.

QED.

Bemerkung

Eine wichtige Konsequenz der homologischen Charakterisierungen der regulären Ringe ist die Tatsache, daß die Lokalisierung eines regulären lokalen Rings regulär ist.

3.14.7 Eigenschaften regulärer lokaler Ringe

Sei (A, m) ein regulärer noetherscher lokaler Ring. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) A ist ein Integritätsbereich.

(ii) A ist ein diskreter Bewertungsring im Fall dim A = 1.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Angenommen es gibt zwei von Null verschiedene Elemente $a,b \in A$ mit

$$ab = 0.$$

Weil a und b von Null verschieden sind, gibt es natürliche Zahlen r und s mit

$$a \in m^r\text{-}m^{r+1} \text{ und } b \in m^s\text{-}m^{s+1}$$

(nach dem Krullschen Durchschnittssatz). Wir betrachten die Anfangsformen

$$\mathrm{in}(a) = a + m^{r+1}$$

$$\mathrm{in}(b) = b + m^{s+1}$$

von a und b in $gr_m(A)$. Es gilt

$$in(a)\bullet inb(b) = 0.$$

Weil A regulär ist, ist $gr_m(A)$ ein Polynomring über einem Körper, also nullteilerfrei.

Also gilt $in(a) = 0$ oder $in(b) = 0$, d.h. $a \in m^{r+1}$ oder $b\in m^{s+1}$. Das steht aber im Widerspruch zur Wahl von r bzw. s.

Zu (ii). Nach Voraussetzung ist das maximale Ideal von A ein Hauptideal, sagen wir

$$m = \pi A.$$

Sei $a \in A$ ein beliebiges von Null verschiedenes Element von A. Nach dem Krullschen Durchschnittsatz gibt es eine natürliche Zahl r mit

$$a \in m^r - m^{r+1}.$$

Es gilt also $a = u\bullet\pi^r$ mit einer Einheit u von A. Wir setzen

$$v(a) := r.$$

Dann gilt für $a,b \in A-\{0\}$

$$v(ab) = v(a) + v(b) \tag{1}$$

und

$$v(a+b) \ge \min \{v(a), v(b) \}. \tag{2}$$

Für jedes von Null verschiedene Element

$$x = \frac{a}{b},\ a, b \in A-\{0\}$$

des Quotientenkörpers

$$K := Q(A)$$

setzen wir

$$v(x) = v(a) - v(b).$$

Wegen (1) hängt diese Definition nicht von der speziellen Darstellung von x als Quotient zweier Elemente von A ab. Auf diese Weise ist daher eine Abbildung

$$v: K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$

definiert, für welche die Bedingungen (1) und (2) gelten. Wegen $v(\pi) = 1$ ist diese Abbildung surjektiv. Nach Konstruktion gilt

$$v(u\bullet\pi^r) = r \text{ für } u\in A^* \text{ und } r\in\mathbb{Z}.$$

Insbesondere gilt

$$A := \{x\in K \mid x = 0 \text{ oder } v(x) \ge 0\}.$$

Mit anderen Worten, A ist der Bewertungsring zur diskreten Bewertung v des Körpers K.

QED.

3.17 Zur Auflösung der Singularitäten

3.17.1 Normal-flache Teilschemata, zulässige Zentren und Aufblasungen

Seien X ein Schema, $Y \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Teilschema, $I_Y \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ die Idealgarbe von Y in $\mathcal{O}_X$ und $y \in Y$ ein Punkt. Dann heißt X normal-flach in y entlang Y, wenn der $\mathcal{O}_Y$-Modul

$$gr_Y(\mathcal{O}_X) := \oplus_{n=0}^{\infty} I_Y^n/I_Y^{n+1} \tag{1}$$

flach ist im Punkt y, d.h. der $\mathcal{O}_{Y,y}$-Modul

$$gr_{I_{Y,y}}(\mathcal{O}_{X,y}) := \oplus_{n=0}^{\infty} I_Y^n/I_Y^{n+1} \tag{2}$$

ist flach. Ist Y außerdem nicht-singulär im Punkt y, so heißt Y in y zulässiges Zentrum (im Sinne von Hironaka). Ist X in allen Punkten von Y normal-flach entlang Y und Y in allen Punkten nicht-singulär, so heißt Y zulässiges Zentrum (im Sinne von Hironaka). Eine zulässige Aufblasung ist eine Aufblasung mit zulässigem Zentrum.

Bemerkungen

(i) Der $\mathcal{O}_X$-Modul (1) wird von I_Y annulliert, kann also als $\mathcal{O}_Y$-Modul aufgefaßt werden und insbesondera als Garbe auf Y. Er ist eine Faktorgarbe der symmetrischen Garbe

$$S_{\mathcal{O}_Y}(I_Y/I_Y^2) \tag{3}$$

über dem graduierten Bestandteil des Grades 1. Die natürliche Surjektion

$$S_{\mathcal{O}_Y}(I_Y/I_Y^2) \twoheadrightarrow gr_Y(\mathcal{O}_X)$$

definiert eine abgeschlossene Einbettung

$$\text{Spec } gr_Y(\mathcal{O}_X) \hookrightarrow \text{Spec } S_{\mathcal{O}_Y}(I_Y/I_Y^2), \tag{4}$$

wobei über den affinen offenen Mengen die hier auftretenden Spektren mit den gewöhnlichen Spektren übereinstimmt, wenn die beteiligten Garben durch deren globale Schnitte ersetzt.

(ii) Sei X lokal noetersch und $Y \hookrightarrow X$ nicht-singulär und zuläassing. Die direkten Summanden von (2) sind dann flach in jedem Punkt $y \in Y$. Die von (1) sind damit lokal frei. Lokal über hinreichend kleinen offenen Mengen ist damit (3) eine Polynom-Algebra und deren Spektrum ein triviales Bündel von affinen Räumen über diesen offenen Mengen. Damit ist das rechte Spektrum von (4) ein Bündel von affinen Räumen. Das linke Spektrum ist ein Teilbündel, dessen Fasern affine Kegel projektiver Schemata sind. Auf Grund des Hironaka-Grothendieck-Isomorphismus

$$gr_{m_{X,y}}(\mathcal{O}_{X,y}) \cong gr^0_{m_{X,y}} gr_{I_{Y,y}}(\mathcal{O}_{X,y})[T_1,...,T_d] \text{ mit } d := \dim_y Y$$

sind die Fasern des linken Bündels von (4) über den Punkten $y \in Y$ Teilkegel des Tangentialkegels

$$C_y(X)$$

mit den Gleichungen $T_1 = ... = T_d = 0$. Die T_i entsprechen dabei Elementen

$$t_1 , ... , t_d \in m_{X,y}$$

die ein minimales Erzeugenden System von $m_{Y,y}$ representieren, d.h. derart daß gilt

$$m_{Y,y} = I_{Y,y} + t_1\mathcal{O}_{m_{X,y}} +, ... , t_d\mathcal{O}_{m_{X,y}} \text{ , d minimal}$$

d.h.

$$\{y\} = V(m_{Y,y}) \qquad = V(I_{Y,y}) \cap V(t_1) \cap ... \cap V(t_d)$$

Die T_i entsprechen einem minimalen System von Hyperflächen, die lokal in einer Umgebung von y aus dem nicht-singulären Teilschema Y den Punkt y herausschneiden, also gewissermaßen einen zu Y transversalen Raum komplementärer Dimension definieren. In diesem Sinne kann man

$$N_Y = \text{Spec } gr_Y(\mathcal{O}_X)$$

als Bündel ansehen, dessen Fasern $N_{Y,y}$ in den Punkten $y \in Y$ zu Y in y orthogonale Kegel sind. In den Punkten $y \in Y$ hat der Tangentialkegel in erster Näherung die Gestalt

$$C_y(X) \approx N_{Y,y} \times Y.$$

3.17.2 Zur Auflösung der Singularitäten nach Hironaka

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und X ein eigentliches reduziertes und irreduzibles Schema über k. Dann gibt es einen Morphismus eigentlicher Schemata

$$\pi: \hat{X} \longrightarrow X$$

mit folgenden Eigenschaften.

1. $\hat{X}$ ist nicht-singulär.
2. π ist die Zusammensetzung von endlich vielen zulässigen Aufblasungen, deren Zentren ganz im singulären Ort liegen.

Bemerkungen

(i) Sei $S \subseteq X$ der singuläre Ort von X. Dann ist die Einschränkung

$$\hat{X} - \pi^{-1}(S) \longrightarrow X - S$$

von π auf das Komplement des vollständigen Urbilds von S ein Isomorphismus. Insbesondere ist π also ein birationaler Isomorphismus, d.h. induziert einen Isomorphismus der Funktionenkörper $k(X) \xrightarrow{\cong} k(\hat{X})$

(ii) Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so gibt es eine endliche algebraische Erweiterungen K von k derart, daß die Aussage für das K-Schema $X \otimes_k K$ immer noch richtig ist.

(iii) Beseitigung der Fundamentalpunkte. Ist f: Y - - ->X eine rationale Abbildugn eigentlicher Schemata über k (die einen Isomorphismus der Funktionenkörper induziert), so gibt es ein kommuatives Diagramm von eigentlichen k-Schemata und rataionalen Abbildungen

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ Y \arrow[rr, dashed, "f"] & & X \end{tikzcd}$$

mit folgenden Eigenschaften.

1. α ist eine Zusammensetzung von zulässigen Aufblasungen.
2. β ist ein Morphismus von Schemata.

Der **Beweis** erfolgt durch eine sehr komplizierte Induktion, vgl.

Hironaka, H.: Resolution of singularities of an variety over a field of characteristik zero, Annals of Math. 79 (1964) 109-203 and 205-336

Für eine leichter zu lesenden Variante des Beweises mit vielen Beispielen, vgl.

Hauser, H.: The Hironaka theorem on resolution of singularities, Bull. Amer. Math. Soc. 40-3 (2003), 323-403

3.17.2 Zur Auflösung der Singularitäten nach De Jong

Der Satz von de Jong ist im Gegensatz zur Auflösung der Singularitäten nach Hironaka in allen Charakteristiken gültig. Der konstruierte Morphismus

$$\pi: \hat{X} \longrightarrow X$$

mit $\hat{X}$ ist im allgemeinen kein birationaler Morphismus, sondern induziert eine endliche Körpererweiterung der rationalen Funktionenkörper. Die Fasern von π bestehen über dem Komplement einer echten abgeschlossenen Teilmenge $Z \subseteq X$ aus n Punkten, wenn $n := [k(\hat{X}):k(X)]$ der Grad der Körpererweiterung der Funktionenkörper ist. Die Menge Z liegt im allgemeinen nichht im singulären Ort von X.

Die Beweis-Idee besteht darin, X so abzuändern, daß X ein Faserbündel über einer Varietät kleinerer Dimension wird und dann die Singuläritäten dieser kleineren Variatät aufzulösen, vgl.

De Jong,A.J.:Smoothness, semi-stability and alterations, Publ. Math. I.H.E.S. 83 (1996), 51-93

3.18 Kohärente Garben

Wie in der Physik spielen auch in der algebraischen Geometrie Vektorfelder eine zentrale Rolle. Vektorfelder sind Schnitt von Vektorraumbündeln. Wir haben uns deshalb zunächst mit letzteren zu beschäftigen.

Um mit Vektorraumbündeln gut umgehen zu können, sollte es möglichst viele Operation geben, die man mit diesen durchführen kann. Dies wird uns zum Begriff der kohärenten Garbe führen.

3.18.1 Vektorraumbündel und lokal freie Garben

Wir beginnen mit einer Beschreibung der Situation in der Kategorie der komplexen Mannigfaltigkeit, welche ganz analog ist zur Situation in der Theorie der Schemata.

Ein (komplexes) Vektorraumbündel auf einer komplexen Mannigfaltigkeit ist eine holomorphe Abbildung

$$f: Y \longrightarrow X \qquad (1)$$

von komplexen Mannigfaltigkeiten, die lokal von der Gestalt

$$\mathbb{C}^n \times U \longrightarrow U,\ (v,u) \mapsto u,$$

ist, wobei U eine geeignete offene Überdeckung von X durchlaufen soll. Ein Beispiel für ein solches Vektorraumbündel ist das Tangentialbündel, dessen Fasern

$$T_x X := f^{-1}(x)$$

gerade die Tangentialräume an die Manngfaltigkeit X sind.

Bündel der Gestalt

$$f: \mathbb{C}^n \times X \longrightarrow X,\ (v,x) \mapsto x,$$

heißen triviale Vektorraumbündel. Die Faser von f über dem Punkt $x \in X$ identifiziert man dabei of mit dem $\mathbb{C}^n$,

$$f^{-1}(x) = \mathbb{C}^n\times\{x\} = \mathbb{C}^n, (v, x) \mapsto v$$

(t in der offensichtlichen Weise).
Genauer kann man sich ein beliebiges Vektorraumbündel (1) entstanden denken durch Verheften einer Familie von trivialen Bündeln

$$\{f_i: \mathbb{C}^n\times U_i \longrightarrow U_i\}_{i\in I},$$

wobei die U_i eine Überdeckung des Raumes X durchlaufen. Für je zwei Indizes $i,j \in I$ und jeden Punkt $x\in U_i\cap U_j$ wählt man eine Abbildung, die die Fasern von f_i und f_j über x identifiziert, wobei die Vektorraum-Struktur der Fasern berücksichtigt werden soll. Man wählt also einen Isomorphismus von Vektorräumen

$$\varphi_{ij}: f_i^{-1}(x) = \mathbb{C}^n\times\{x\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^n\times\{x\} = f_j^{-1}(x), (v, x) \mapsto (g_{ij}(x)v, x).$$

welcher durch eine Matrix $g_{ij}(x) \in GL(n, \mathbb{C})$ gegeben ist, und betrachtet die Punkte

$$(v,x) \in f_i^{-1}(x) \text{ und } (g_{ij}(x)v, x) \in f_j^{-1}(x)$$

als ein und denselben Punkt des Bündels (1). Dabei fordet man im Fall der komplexen Mannigfaltigkeiten, daß die Abbildungen

$$g_{ij}: U_i\cap U_j \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}), i,j \in I, \tag{2}$$

holomorph sind. Dabei lßt man den Fall $i = j$ zu und wählt für $g_{ii}(x)$ die Einheitsmatrix. Für beliebige zwei i und j müssen dabei $g_{ij}(x)$ und $g_{ji}(x)$ zu einander inverse Matrizen sein. Allgemeiner muß für je drei Indizes $\alpha,\beta,\gamma \in I$ die Abbildung

$$g_{\gamma\alpha}\circ g_{\beta\gamma}\circ g_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma \longrightarrow GL(n,\mathbb{C}), x \mapsto g_{\gamma\alpha}(g_{\beta\gamma}(g_{\alpha\beta}(x))),$$

konstant gleich der Einheitsmatrix sein (d.h. in jeden Punkt die identische lineare Abbildung definieren). Das bedeutet gerade, daß die verschiedenen Identifikationen zusammenpassen, d.h. idenifiziert man für $x \in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ die Fasern

$$f_\alpha^{-1}(x) \text{ und } f_\beta^{-1}(x) \text{ mit Hilfe von } g_{\alpha\beta}(x)$$

und anschließend die Fasern

$$f_\beta^{-1}(x) \text{ und } f_\gamma^{-1}(x) \text{ mit Hilfe von } g_{\beta\gamma}(x),$$

so läußt es auf dasselbe hinaus, als wenn man

$$f_\alpha^{-1}(x) \text{ und } f_\gamma^{-1}(x) \text{ mit Hilfe von } g_{\alpha\gamma}(x)$$

identifiziert. Dabei kann man anstelle des $\mathbb{C}^n$ einen beliebigen Vektorraum V (über einem beliebigen Körper K) wählen. An die Stelle der GL(n, $\mathbb{C}$) tritt dann die Automorphismengruppe des Vektorraums. Im Fall von glatten Mannigfaltigkeiten fordert man, daß $K = \mathbb{R}$ ist und die g_{ij} glett sind, im Fall algebraischer Varietäten kann K beliebig sein und die g_{ij} müssen reguläre Abbildungen sind.

Eine Familie von Abbildungen

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{Aut}(V),\ i,j \in I,$$

mit

$$g_{\gamma\alpha} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\alpha\beta} = \mathrm{Id} \text{ für alle Punkte von } x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \qquad (1)$$

heißt System von <u>Übergangsfunktionen</u>. Jedes System von Übergangsfunktionen definiert ein Vektorraumbündel. Umgekehrt kann man für jedes Vektorraumbündel

$$f: Y \longrightarrow X$$

eine offene Überdeckung von X und ein System von Übergangsfunktionen finden. Die Bedingungen (1) heißen auch <u>Kozykel-Bedingungen</u> des Systems.

3.18.2 Isomorphie von Vektorraumbündeln

Seien eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

und ein System von Übergangsfunktionen

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{Aut}(V),\ i,j \in I,$$

gegeben. Wenn man für jedes i den Vektorraum V durch einen Isomorphismus

$$h_i: V \xrightarrow{\cong} W$$

mit einen anderen Vektorraum W identifiziert und dann die trivialen Bündel

$$W \times U_i \longrightarrow U_i$$

mit Hilfe der g_{ij} und der Identifizierungen h_i zusammenklebt, so bekommt man bis auf Isomorphie dasselbe Bündel. Genauer: das Bündel zu den Übergangsfunktionen g_{ij} ist isomorph zum Bündel mit den Übergangsfunktionen

$$g'_{ij} = h_j \circ g_{ij} \circ h_i^{-1} \quad (1)$$

Verschiedene Systeme von Übergangsfunktionen können also zu isomorphen Bündeln führen. In einem gewissen Sinne ist die gerade gefundene Bedingung nicht nur notwendig sondern auch hinreichende für die Isomorphie zwei Vektorraumbündel. Man nennt zwei Systeme $\{g_{ij}\}$ und $\{g'_{ij}\}$, die in dieser Relation zueinander stehen, auch <u>kohomolog</u>.

Genauer ist die Situation die folgende. Seien zwei System von Übergangsfunktionen auf einem Raum X gegeben, sagen wir

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{Aut}(V),\ i,j \in I,$$

und

$$g'_{ij}: U'_i \cap U'_j \longrightarrow \mathrm{Aut}(V),\ i,j \in I'.$$

Dann kann man die beiden Überdeckungen zunächst durch deren gemeinsame Verfeinerung ersetzen, d.h. den Raum durch die Mengen $U_i \cap U'_j$ überdecken. Durch Einschränken der Übergangsfunktionen auf diese Durchschnitte erhält man wieder zwei Systeme, die den Kozykel-Bedingungen genügen, also Systeme von Übergangsfunktionen bilden, und damit dieselben beiden Bündel beschreiben.

Die beiden Ausgangssysteme beschreiben genau dann isomorphe Bündel, wenn es nach Übergang zur gemeinsamen Verfeinerung der Überdeckungen Automorphismen h_i gibt, so daß die Bedingungen (1) erfüllt sind.

Zwei Systeme von Übergangsfunktionen zu verschiedenen Überdeckungen heißen <u>kohomolog</u>, wenn sie nach Übergang zu einer gemeinsamen Verfeinerung der Überdeckungen kohomolog werden.

3.18.3 Die Garbe der Schnitte eines Vektorraumbündels

Seien

$$f: Y \longrightarrow X$$

ein komplexes Vektorraumbündel vom Rang n und $U \subseteq X$ eine offene Menge mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung

$$f^{-1}(U) \longrightarrow U$$

trival , d.h. bis auf Isomorphie das Bündel

$$\mathbb{C}^n \times U \longrightarrow U,\ (v,x) \mapsto x,$$

ist. Die entsprechenden Isomoprhismen heißen auch <u>lokale Trivialisierungen</u> des Bündels. Die holomorphen Schnitte des Vektorraumbündels f über U kann man dann identifizieren mit den n-Tupeln von holomorphen auf U definierten Funktionen. Die Garbe Γ_f der holomorphen Schnitte von f hat also die Eigenschaft, daß es für jeden Punkt von X eine offene Umgebung $U \subseteq X$ gibt mit

$$\Gamma_f|_U \cong \mathcal{O}_U^n.$$

Mit anderen Worten, die Garbe Γ_f ist lokal isomorph zu einer direkten Summe von n Exemplaren der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ der holomorphen Funktionen auf X. Solche Garben heißen <u>lokal frei</u> vom <u>Rang</u> n.

Seien $\mathcal{L}$ eine lokal freie Garbe vom Rang n auf X und

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i$$

eine offene Überdeckung von X. Weite sei für jedes $i\in I$ ein Isomorphismus von Modulgraben

$$\mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\psi_i} \mathcal{O}^n_{U_i}$$

gegeben. Für je zwei Indizes $i,j \in I$ hat man dann Isomorphismen

$$\varphi_{ij}: \mathcal{O}^n_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{\psi_i^{-1}} \mathcal{L}|_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{\psi_j} \mathcal{O}^n_{U_i\cap U_j}$$

Jedes der φ_{ij} ist durch eine n×n-Matrix von holomorphen Funktionen gegeben, kann also als holomorphie Abbildung

$$\varphi_{ij}: U_i\cap U_j \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}),$$

aufgefaßt werden. Durch direktes Nachrechnen sieht man, die φ_{ij} bilden ein System von Übergangsfunktionen. Zum Beispiel gilt auf $U_i\cap U_j$:

$$\varphi_{ij}\circ\varphi_{ji} = \psi_j\circ\psi_i^{-1}\circ\, \psi_i\circ\psi_j^{-1} = \mathrm{Id}.$$

Umgekehrt kann man ein System von Übergangsfunktion φ_{ij} verwenden, um die freien Garben $\mathcal{O}^n_{U_i}$ zu verheften zu einer lokal freien Garbe auf X, die über den offenen Mengen U_i frei ist.

Die Bedingung für die Isomorphie zweier lokal freier Garben, die man auf diese Weise erhält, ist dieselbe wie für Vektorraumbündel (siehe oben).

Bemerkungen

(i) Die obigen Betrachtungen kann man in analoger Weise für differenzierbare Mannigfaltigkeiten und glatte Funktionen oder für algebraische Schemata und reguläre Funktionen durchführen. Es gelten die analogen Aussagen.

(ii) Wie wir gesehen haben, gehört zu jedem Vektorraumbündel die Garbe $\mathcal{L}$ der Schnitte in dieses Bündel. Die Isomorphen ψ_i kommen dabei gerade von den lokalen Trivialisierungen des Bündel und heißen deshalb auch <u>lokale Trivialisierungen</u> der Garbe $\mathcal{L}$. Die zu diesen Trivialisierungen gehörigen Übergangsfunktionen sind gerade die Übergangsfunktionen des Bündels.

(iii) Umgekehrt kann man zu jeder lokal freien Garbe ein System von Übergangsfunktionen finden. Dieses definiert ein Bündel, dessen Schnittgarbe zu diesen Übergangsfunktionen gehört, also isomoprh zur Ausgangsgarbe is.

(iv) Seien jetzt $\mathcal{L}$ eine lokal freie Garbe auf X mit den lokalen Trivialisierungen

$$\mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\psi_i} \mathcal{O}^n_{U_i}, \ i \in I, \ X = \bigcup_{i\in I} U_i .$$

Ein globaler Schnitt s der Garbe $\mathcal{L}$ ist dann gegeben durch ein Familie von Schnitten

$$s_i = \psi_i(s|_{U_i}) \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^n_{U_i}), \ i \in I,$$

welche der folgenden Bedingung genügen.

$$\varphi_{ij}(s_i|_{U_i \cap U_j}) = (\psi_j \circ \psi_i^{-1})\psi_i(s|_{U_i \cap U_j}) = \psi_j(s|_{U_i \cap U_j}) = s_j|_{U_i \cap U_j}$$

d.h.

$$\varphi_{ij}(s_i|_{U_i \cap U_j}) = s_j|_{U_i \cap U_j} \text{ für } i,j \in I. \tag{1}$$

Umgekehrt definiert jede Familie von Schnitten

$$s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^n_{U_i}), \ i \in I,$$

welche den Bedingungen (1) genügen einen eindeutig bestimmten globalen Schnitt s von $\mathcal{L}$ mit $s_i = \psi_i(s|_{U_i})$ für jedes $i \in I$.

(v) Betrachten wir jetzt den Spezialfall, daß X ein irreduzibles Schema ist (und $\mathcal{L}$ eine lokal freie Garbe),

X irreduzibles Schema, $\mathcal{L}$ lokal freie Garbe auf X.

Weiter sei $s \in \Gamma(U, \mathcal{L})$ ein lokaler Schnitt von $\mathcal{L}$. Weil X irreduzibel ist, sind sämtliche Durchschnitte $U \cap U_i$ nicht leer, und die obige Konstruktion liefert von Schnitte

$$s_i \in \Gamma(U \cap U_i\, , \mathcal{O}^n_{U_i}),$$

d.h. rationale Funktionen auf den U_i , welche den Bedingungen (1) genügen. Zunächst besteht die Gleicheit auf der Menge $U \cap U_i \cap U_j$. Weil letztere Menge aber dickt liegt in $U_i \cap U_j$ und die Menge der Punkte, in denen zwei rationale Funktionen gleich sind, abgeschlossen ist, besteht die Gleichheit sogar auf $U \cap U_i$. e dieser Situation, die s_i definieren einen <u>globalen rationalen Schnitt</u> von $\mathcal{L}$. Mit anderen Worten jeder lokale Schnitt von $\mathcal{L}$ laßt sich als globaler rationaler Schnitt von $\mathcal{L}$ auffassen.

(vi) Nehmen wir jetzt an, die Garbe hat den Rang 1,

$\mathcal{L}$ umkehrbare Garbe auf dem irreduziblen Schema X,

und der Schnitt s ist nicht identisch Null,

$$s \neq 0.$$

Die Übergangsfunktionen sind dann durch Matrizen gegeben,

$$\varphi_{ij}(f) = g_{ij} \bullet f,$$

und die Matrizen haben im Fall umkehrbarer Garben das Format 1×1, d.h. die g_{ij} sind reguläre Funktionen die als Schnitte der Strukturgarbe umkehrbar sind,

$$g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j\, , \mathcal{O}^*_X\ ).$$

Die Relationen (1) bekommen damit die Gestalt

$$g_{ij} \bullet s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}\ ,$$

d.h.

$$g_{ij} = s_i^{-1}|_{U_i \cap U_j} \bullet s_i|_{U_i \cap U_j}.$$

Wir sehen so, jeder von Null verschiedene Schnitt legt die Übergangsfunktionen des Bündels und damit das Bündel selbst bis auf Isomorphie fest.

3.18.4 Rationale Schnitte und Cartier-Divisoren

Seien X ein Schema und D ein Cartier-Divisor mit den lokalen Gleichungen

$$f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{M}_X), X = \bigcup_{i\in I} U_i .$$

Dabei sei $\mathcal{M}_X$ die Garbe der rationalen Funktionen auf X, d.h. die assoziierte Garbe zur Prägarbe

$$U \mapsto Q(\mathcal{O}_X(U)),$$

die jeder offenen Menge den vollen Quotientenring[80] von $\mathcal{O}_X(U)$ zuordnet. Für je zwei Indizes i, j ∈ I gilt dann nach Definition[81]

$$f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*).$$

Durch direktes Nachrechnen sieht man, die $g_{ij} := f_i/f_j$ bilden ein System von Übergangsfunktionen einer umkehrbaren Garbe $\mathcal{L}$ auf X, und die lokalen Gleichungen f_i definieren einen von Null verschiedenen Schnitt.

Bemerkungen

(i) Für jede global definierte rationale Funktion f liefert der Cartier-Divisor

$$D + \mathrm{div}(f)$$

mit den lokalen Gleichungen $f_i \bullet f$ dieselben Quotienten $g_{ij} = f_i/f_j$ und damit einen weiteren Schnitt desselben Bündels. Mit anderen Worten, linear äquivalente Divisoren, d.h. solche, die sich um einen Hauptdiviaor div(f) unterscheiden, kann man als verschiedene Schnitte derselben umkehrbaren Garbe ansehen.

(ii) Seien umgekehrt zwei Cartier-Divisoren D' und D" gegeben mit den lokalen Gleichungen $\{f'_i\}$ bzw. $\{f''_i\}$, welche Schnitte desselben Bündels beschreiben. Der Einfachheit halber nehmen wir an, die Gleichungen gehören zur selben offenen Überdeckung

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i$$

(andernfalls gehe man zur gemeinsamen Verfeinerung der Überdeckungen über). Bezeichnen wir die Übergangsfunktionen des Bündels mit g_{ij} [82], so gilt

$$f'_i/f'_j = g_{ij} = f''_i/f''_j \text{ auf } U_i \cap U_j,$$

d.h. es gilt

---

[80] Die Nennermenge besteht gerade aus den Nicht-Nullteilern von $\mathcal{O}_X(U)$. Ist X Noethersch, so ist die Prägarbe bereits eine Garbe.

[81] Die f_i sind nach Definition keine Nullsteiler der $\mathcal{O}_X(U_i)$ und f_i/f_j hat über $U_i \cap U_j$ weder Nullstellen noch Pole.

[82] Durch weiteres Verfeinern der Überdeckung findet man ein System von Übergangsfunktionen zur Überdeckung durch die U_i.

$$f'_i/f''_i = f'_j/f''_j.$$

Es gibt damit eine global definiert rationale Funktion f mit $f = f'_i/f''_i$ auf U_i. Wegen

$$f'_i = f \bullet f''_i$$

gilt

$$D' = \mathrm{div}(f) + D'',$$

d.h. die Divisoren sind linear äquivalent.

(iii) Seien k ein Körper und X ein eigentliches integres k-Schema. Wir nehmen an, k ist algebraisch abgeschlossen ins $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$[83]. Seien D' und D'' zwei linear äquivalente Cartier-Divisoren mit den lokalen Gleichungen $\{f'_i\}$ bzw. $\{f''_i\}$. Wir nehmen wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, die lokalen Gleichungen gehören zur selben offenen Überdeckung

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i$$

und fragen nach den Beziehungen zwischen den Gleichungen, falls D' = D'' gilt. Auf jeden Fall gilt

$$D' = \mathrm{div}(f) + D''$$

mit einer globalen rationalen Funktion f. Aus D' = D'' folgt div(f) = 0, d.h. f hat weder Nullstellen noch Pole. Insbesondere gilt

$$f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

Weil X eigentlich ist über k, ist $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ein k-Algebra, welche also k-Vektorraum endliche Dimension besitzt (nach dem Proper-Mapping-Theorem). Insbesondere ist f algebraisch über k, also $f \in k$. Wir sehen so, zwei Cartier-Divisoren auf X sind genau dann gleich, wenn sie sich um einen konstanten Faktor unterscheidein.

Für jede umkehrbare Garbe $\mathcal{L}$ auf X kann man so aus dem k-Vektorraum der globalen Schnitte von $\mathcal{L}$ durch Identifizieren proportionaler Schnitte gerade die Menge

$$|\mathcal{L}| := \Gamma(X, \mathcal{L})/k^*$$

der Divisoren zum Bündel $\mathcal{L}$, d.h. der Cartier-Divisoren auf X, die einen Schnitt von $\mathcal{L}$ definieren. Dies ist ein projektiver Raum über k, der aus linear äquivalenten Divisoren besteht. Er heißt auch vollständiges lineares System der umkehrbaren Garbe $\mathcal{L}$.

(iv) Beispiel. Im projektiven Raum

$$X = \mathbb{P}^n_k$$

definieren je zwei homogene Polynome F und G desselben Grades linear äquivalente Divisoren, denn F/G definiert eine rationale Funktion auf dem $\mathbb{P}^n_k$. Für jeden Grad $d \ge 0$ erhält man so eine umkehrbare Garbe auf dem Projektiven Raum, deren globale Schnitte die homogenen Polynome des Grades d sind. Diese Garbe wird mit

$$\mathcal{O}_X(d)$$

[83] Dem liegt die Vorstellung zugrunde, daß eine Funktion auf X, die Nullstelle eines Polynoms mit Koeffizienten aus k ist, eine Konstante ist, also im Konstantenkörper k von X liegen sollte. Falls k nicht algebraisch abgeschlossen ist, kann man k durch die algebraische Abschließung in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ersetzen.

bezeichnet. Man kann leicht die weiteren Garben

$$\mathcal{O}_X(-d) := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(d), \mathcal{O}_X)$$

Gibt es weitere umkehrbare Garben auf $\mathbb{P}^n_k$?

Indem man abgeschlossene Teilvarietäten

$$X \subseteq \mathbb{P}^n_k$$

mit Hyperflächen eines festen Grades schneidet, erhält man Familien von linear äquivalenten Divisoren.

3.18.5 Globale Schnitte umkehrbarer Garben und Morphismen mit Werten im projektiven Raum

Seien k ein Körper, X ein eigentliches integres k-Schema, $\mathcal{L}$ eine umkehrbare Garbe auf X und

$$s_0,\ldots,s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$$

eine Basis des k-Vektorraums der globalen Schnitte von $\mathcal{L}$. Für jede Trivialisierung

$$\mathcal{L}|_U \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_U$$

von $\mathcal{L}$ über einer offenen Menge $U \subseteq X$ definieren die s_i reguläre Funktionen $\psi(s_i|_U)$ auf U und damit einen Morphismus

$$U \longrightarrow \mathbb{P}^n_k,\ u \mapsto [\ \psi(s_0|_U)(u),\ldots,\ \psi(s_n|_U)(u))].$$

Man beachte, die $\psi(s_i|_U)$ hängen von der Wahl der Trivialisierung ab, sind also nur bis auf einen gemeinsamen Faktor festgelegt. Die Verhältnisse zwischen den $\psi(s_i|_U)$ sind aber für alle Trivialisierungen dieselben. Der Morphismus hängt damit nicht von der Wahl von ψ. Deshalb verheften sich diese lokal definierten Morphismus zu einem global definierten Morphismus, welcher wie folgt beszeichnet wird

$$\varphi{:}X \dashrightarrow \mathbb{P}^n_k,\ u \mapsto [s_0(u),\ldots,s_n(u)]. \qquad (1)$$

Bemerkungen

(i) Die obige Sprechweise ist etwas ungenau. Es kann nicht ausgeschlossen werden daß ein $u \in \mathbb{P}^n_k$ eine gemeinsame Nullstelle der s_i ist. In solchen Punkten u ist die Abbildung nicht definiert. Im allgemeinen ist (1) also nur eine rationale Abbildung. Falls der Vektorraum der globalen Schnitte gleich {0} gibt es die Abbildung (1) nicht einmal.

Ersetzt man die Basis von $\Gamma(X, \mathcal{L})$ durch eine andere, so ändert sich (1) nur um eine lineare Transformation des projektiven Raums ab. Wir werden zwischen diesen Abbildugnen keinen Unterschied machen.

(ii) Die Punkte, in denen (1) nicht definiert sind, sind diesjenigen, in denen alle s_i gleich Null sind. Dann sind aber alle globalen Schnitte von $\mathcal{L}$ in diesem Punkt Null, d.h. alle Divisoren von $|\mathcal{L}|$ gehen durch diesen Punkt. Solche Punkte heißen Fundamentalpunkte von $|\mathcal{L}|$. Damit sind folgende Aussagen äquivalent.
(a) Die Abbildung (1) ist ein Morphismus.
(b) $|\mathcal{L}|$ besitzt keine Fundamentalpunkte.

(iii) Man sagt, das lineare System $|\mathcal{L}|$ trennt die Punkte von X, wenn es für je zwei verschiedene Punkte $p, q \in X$ einen Divisor $D \in |\mathcal{L}|$ gibt mit $p \in D$ und $q \notin D$.
Folgende Aussagen sind äquivalent.
(a) Die Abbildung (1) ist ein injektiver Morphismus.
(b) $|\mathcal{L}|$ trennt die Punkte von X.

Angenommen, Bedingung (b) ist erfüllt. Dann gibt es einen globalen Schnitt s von $\mathcal{L}$ mit $s(p) = 0$ und $s(q) \neq 0$. Wir wählen s als ersten Vektor unserer Basis $\{s_i\}$. Dann hat das Bild von p bei (1) die erste projektive Koordinaten 0. Für das Bild von q gilt das nicht. Also sind die Bilder von p und q verschieden.

Die umgekehrte Implikation wird in analoger Weise bewiesen: wenn die Bilder von p und q bei (1) verschieden sind, gibt es eine Hyperebene die durch p aber nicht durch q geht. Sei F eine homogende Gleichunng dieser Hyperebene. Wir fassen F also Schnitt von $\mathcal{O}(1)$ auf. Die Verpflanzung von F entlang (1) liefert einen globalen Schnitt $\varphi^*(F)$ von $s = \varphi^*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{L}$. Dieser Schnitt ist in p gleich 0 und in q von Null verschieden. Deshalt geht der zugehörige Divisor durch p aber nicht durch q.

(iii) Man sagt, das lineare System $|\mathcal{L}|$ trennt die Richtungen, wenn es für jeden Tangentialvektor t von $|\mathcal{L}|$ einen Divisor $D \in |\mathcal{L}|$ gibt mit der Eigenschaft, daß D durch den Angriffspunkt von t geht, aber der Tangentialraum von D im Angriffspunkt den Vektor t nicht enthält. In analoger Weise wie (iii) zeigt man die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(a) Die Abbildung (1) ist eine abgeschlossene Einbettung.
(b) Das lineare System $|\mathcal{L}|$ trennt die Punkte und Richtungen.

Eine umkehrbare Garbe $\mathcal{L}$ hei´ßt <u>sehr ample</u>, wenn sie diese beiden Bedingungen erfüllt. Die zentrale Aufgabe der <u>Klassifikationstheorie</u> der algebraischen Geometrie besteht darin, in natürlicher Weise definierte sehr ample Garben auf einer gegebenen algebraischen Varietät X zu finden (d.h. Einbettungen von X in den projektiven Raum). Die wichtigste Methode zur Konstruktion sehrt ampler Garben, die der Konstruktion <u>ampler Garben</u>, das sind Garben mit einer sehr amplen Tensorpotenz, die sich kohomologisch charakterisieren lassen.

(iv) Die durch die globalen Schnitte einer umkehrbaren Garbe $\mathcal{L}$ auf dem k-Schema X definierte rationale Abbildung

$$\varphi = \varphi_{\mathcal{L}} : X \dashrightarrow \mathbb{P} := \mathrm{P}^n_k$$

ist bis auf Isomorphie dadurch charakterisiert, daß

$$\mathcal{L}|_U = \varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$$

gilt für die offene Teilmenge $U \subseteq X$ der Punkte, in denen φ regulär ist.

Insbesondere sind die Divisoren von $|\mathcal{L}|$ gerade die vollständigen Urbilder bei φ der Hyperebenen des projektiven Raums $\mathbb{P}$.

3.18.6 Ein Beispiel für einen Morphismus lokal freier Garben

Wie wir oben gesehen haben, erlauben die lokal freien und insbesondere die umkehrbaren Garben Konstruktionen, die für die algebraische Geometrie von zentraler Bedeutnng sind. Die Kategorie der lokal freien bzw. der umkehrbaren Garben hat aber auch eine nicht so angenehme Eigenschaft: sie ist nicht abelsch. Insbesondere besitzt sie im allgemeinen weder Kerne noch Kokerne.

Seien zum Beispiel, $X = \mathbb{A}^1_k$ die affine Gerade über einem Körper k und

$$t \in \mathcal{O}_X(X) = k[t]$$

eine den affinen Koordinatenring er zeugende reguläre Funktion auf X. Die Multiplikation mit t definiert eine $\mathcal{O}_X$-lineare Abbildung

$$\varphi: \mathcal{O}_X \xrightarrow{t} \mathcal{O}_X.$$

Der Kern dieser Abbildung ist trivial, weil t ein reguläres Element des Polynomrings k[t] und dessen Lokalisierungen ist d.h. man hat eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{t} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathrm{Koker}(\varphi) \longrightarrow 0.$$

Für die Schnitte über den offenen Hauptmengen D(f) von X = Spec A, A := k[t], hat diese Sequenz die Gestalt

$$0 \longrightarrow A_f \xrightarrow{t} A_f \longrightarrow (A/fA)_f \longrightarrow 0.$$

Für jeden Punkt $p \in \mathrm{Spec}\ k[t]$ erhält man für die lokalen Ringe in p die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A_p \xrightarrow{t} A_p \longrightarrow A_p/tA_p \longrightarrow 0. \qquad (1)$$

Die Fasern der zugehörigen Geraden-Bündel im Punkt p sind bis auf Isomorphie gerade die Restekörper der in der Sequenz auftretenden lokalen Ringe. Die auf den

Restekörpern induzierten linearen Abbildungen entsprechen dabei gerade den linearen Abbildungen auf den Fasern.

Ist p vom Ursprung t = 0 verschieden, $p \notin V(t)$, d.h. $t \notin p$, so ist die Multiplikation mit t eine bijektive Abbildung von A_p, d.h. es gilt

$$A_p/tA_p = 0.$$

Ist p der Ursprung, so gilt $t \in p$ und $p = tA$, d.h.

$$A_p/tA_p = (k[t]/(t))_p = k,$$

d.h. der Kokern hat im Ursprung eine 1-dimensionale Faser und in allen anderen Punkte eine Faser der Dimension 0, ist also keine lokal freie Garbe.

Der Kern von φ ist immerhin eine lokal freie Garbe vom Rang 0. Die durch (1) induzierte Abbildung auf den Fasern der Bündel,

$$0 \longrightarrow \kappa(p) \xrightarrow{t} \kappa(p) \longrightarrow \kappa(p)/t\kappa(p) \longrightarrow 0$$

ist allerdings im Ursprung nicht exakt, denn die Multiplikation mit t ist dort die Null-Abbildung, und deren Kern ist nicht-trivial. Mit anderen Worten, das Vektorraumbündel vom Rang 0 ist eigentlich nicht das, was man sich unter dem Kern dieser Abbildung vorstellen würde.

Die zu φ analoge Abbildung von komplexen Vektorraumbündeln ist gerade die folgende Abbildung von trivalen Bündeln des Rangs 1 über der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, d.h. die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\times\mathbb{C}, (v, z) \mapsto (zv, z),$$

d.h. wir multiplizieren im Punkt z mit z, die Abbildung der Fasern über $z\in\mathbb{C}$ ist die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, v \mapsto zv.$$

Für $z \neq 0$ ist dies eine bijektive Abbildung, d.h. Kern und Kokern sind 0. Im Ursprung z = 0 erhalten wir jedoch die Null-Abbildung, d.h. die Dimension der Fasern erhöht sich um 1. Kern und Kokern sind keine Vektorraumbündel mehr.

3.18.7 Ein Erweiterung der Kategorie der lokal freien Garben

Wir wollen jetzt durch eine Vergrößerung der Kategorie der lokal freien Garben dafür sorgen, daß die Kategorie Kerne und Kokern bekommt. Wie sich herausstellen wird, ist die so entstehende Kategore sogar abelsch.

Ebenso wird sich herausstellen, daß in vielen Untersuchung, an deren Anfang und Ende ausschließlich lokal freie Garben stehen, zwischenzeitlich kohärente Garben verwendet werden müssen.

Die Kategorie der koherenten Garben wird sich als die kleinste Kategorie herausstellen, die die Kategorie der lokal freien Garben enthält und abeslch ist.

Die lokal freien Garben auf X sind lokal von der Gestalt $\mathcal{O}_X^n$. Die Morphismen lokal freier Garben sind also $\mathcal{O}_X$-lineare Abbildungen, die lokal von der Gestalt

$$\mathcal{O}_X^m \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X^n$$

sind. Solche Morphismen sind durch Matrizen regulärer Funtionen gegeben. Da unsere Betrachtungen lokaler Natur sind, können wir annehmen,

$$X = \mathrm{Spac}\ A$$

ist ein affines Schema. Wir gehen zu den globalen Schnitten über und erhalten eine A-lineare Abbildung

$$A^m \longrightarrow A^n,$$

die durch eine Matrix mit Einträgen aus A gegeben ist. Der Kokern einer solchen Abbilung ist ein endlich erzeugter A-Modul,

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Falls A noethersch ist, ist umgekehrt jeder endlich erzeugte A-Modul M Teil einer solchen exakten Sequenz. Für jede offene Hauptmenge D(f) erhalten wir durch Tensorieren mit A_f über A eine exakte Sequenz

$$A_f^m \longrightarrow A_f^n \longrightarrow M_f \longrightarrow 0,$$

und entsprechende exakte Sequenzen erhalten wir durch Lokalisieren nach den Primidealen von Spec A Wir erhalten so eine exakte Sequenz

$$\mathcal{O}_X^m \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow 0.$$

Mit anderen Worten, der Kokern eines Morphismus von lokal freien Garben ist eine kohärente Garbe.

Ist X ein noethersches Schema, so ist auch umgekehrt jede kohärente Garbe lokal der Kokern eines Morphismus von freien Garben.

Analoge Betrachtungen zeigen im noetherschen Fall, daß Kerne und Kokerne von Morphismen kohärenter Garben wieder kohärent sind.

Im nicht-notwendig noetherschen Fall muß man lokal freie Garben zulassen, die unendlichen Rang haben dürfen. Diesselben Betrachtungen wir oben gelten dann mit quasi-kohärenten Garben anstelle von kohärenten.

Literatur

B A.: Introduction to the theory of categories and functors, Wiley-Interscience 1968

Bass, H.: Algebraic K-theory, Benjamin, New York 1968

Bourbaki, N.: Algèbre commutative, Hermann Paris 1961-1965

Demazure, M., Gabriel, P.: Introduction ot algebraic geometry and algebraic groups, North Holland 1980

De Jong,A.J.: Smoothness, semi-stability and alterations, Publ. Math. I.H.E.S. 83 (1996), 51-93

De Rham, G.: Varieties differentiables, Paris 1954.

Fulton, W.: Intersection theory, Springer, Berlin 1984

Godement, R.: Topologie Algebrique et theorie des faisceaux, Hermann, Paris 1960

Hirsch, M.W.: Differential topology, Springer, New York 1994

Hartshorne, R: Algebraic geometry, Springer 1977

Hauser, H.: The Hironaka theorem on resolution of singularities, Bull. Amer. Math. Soc. 40-3 (2003), 323-403

Hironaka, H.: Resolution of singularities of an variety over a field of characteristik zero, Annals of Math. 79 (1964) 109-203 and 205-336

MacLane, S.: Categories. For the working mathematician, Springer 1972

Matsumura, H.: Commutative Algebra, Benjamin, New York 1970

Matsumura, H.: Commutative ring theory, Cambridge University Press 1986

Milnor, D.: Morse theory, Princeton University Press 1963

Mitchell, B.: Theory of categories, Academic Press 1965

Serre, J.-P.: Algèbre locale - Multiplicités, Lecture Notes in Math. 11 (1965), Springer Verlag.

Weil, A.: Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc., Coll. Publ. 29, Providence 1962.

Index

Inhalt