Einführung in die Garben-Kohomologie

frei nach Hartshorne, Algebraic geometry, Kapitel III
B. Herzog, Wintersemester 2015

Mi 17.15 - 18.45 SG 3-11
Fr 15.15 - 16.45 SG 2-14

Bezeichnungen

$\check{C}^*(\mathbf{U},F)$	Čech-Komplex der Garbe F bezüglich der Überdeckung **U**, vgl. 3.12.
$\check{\mathbf{C}}^p(\mathbf{U},F)$	p-te Čech-Komplex-Garbe zur Garbe F bezüglich der Überdeckung **U**, vgl. Bemerkung 3.12(ii).
d_I	horizontales Differential eines Doppelkomplexes, vgl. 3.3.2
d_{II}	vertikales Differential eines Doppelkomplexes, vgl. 3.3.2.
Div(X)	Gruppe der Weil-Divisoren des Schemas X, vgl. 4.1.1
$\Gamma(U, F)$	die Schnitte der Garbe F über der offenen Menge U
$H^n(X, F)$	n-te Kohomologie des topologischen Raums X mit Koeffizienten in der Garbe F, vgl. 1.4.12
$\check{H}^n(\mathbf{U},F)$	n-te Čech-Kohomologie der Überdeckung **U** mit Koeffizienten in der abelschen Garbe F, vgl. 3.12.
$\check{H}^p(X,F)$	n-te Čech-Kohomologie des Raums X mit Koeffizienten in der abelschen Garbe F, vgl. 3.12.
$\mathbf{H}^n(F)$	n-te Kohomologie-Prägarbe zur abelschen Garbe F, vgl. 3.13
H_I^p	p-te horizontale Kohomologie eines Doppelkomplexes, vgl. 3.3.2.
H_{II}^q	p-te vertikale Kohomologie eines Doppelkomplexes, vgl. 3.3.2.
$m_{X,Y}$	maximales Ideal von $\mathcal{O}_{X,Y}$, vgl. 4.1.2
$\mathcal{O}_{X,Y}$	lokaler Ring des Schemas X im allgemeinen Punkt des Primdivisors Y, vgl. 4.1.2
$\mathbb{P}(X)$	Menge der Primdivisoren des Schemas X, vgl. 4.1.1
$\mathbf{R}^nF(K)$	n-te Hyperkohomologie des Funktors F bezüglich des Komplexes K, vgl.3.10
$\Rightarrow$	Symbol für die schwache Konvergenz einer Spektralsequenz, vgl. 3.2.4.
$\Rightarrow$	Symbol für die Konvergenz einer regulären Spektralsequenz, vgl. 3.2.4.

1. Einleitung

Gegenstand dieser Vorlesung ist die Kohomologie von Garben auf algebraischen Schemata. Eine besondere Rolle werden dabei die sogenannten kohärenten Garben spielen. Wir beginnen deshalb mit einer einer kurzen Beschreibung der kohärenten Garben und deren Beziehung zu den Vektorfeldern.

Die Bedeutung von Vektorfeldern in der Physik ist ganz offensichtlich. Es gibt in ihr kaum eine Disziplin, die nicht einen Ausschnitt der Wirklichkeit mit Hilfe von Vektorfeldern und deren Verallgemeinerung, den Tensorfeldern, die aus der Sicht der Mathematik ebenfalls Vektorfelder sind, mit Hilfe von Differentialgleichungen beschreibt.

1.1 Begriff des Vektorraumbündels

Vektorfelder sind Schnitte in Vektorraumbündel. Vektorraumbündel sind Abbildungen

$$\pi\colon Y \longrightarrow X,$$

wobei X und Y glatte oder analytische oder holomorphe oder wie in unserem Fall algebraische Mannigfaltigkeiten sind und π eine glatte oder analytische oder holomorphie oder reguläre algebraische Abbildung ist, deren Fasern

$$Y_x := \pi^{-1}(x),\ x \in X,$$

Vektorräume einer festen Dimension r über einem festen Körper K sind. Ein Element

$$v \in \pi^{-1}(x)$$

aus der Faser über x stellt man sich dann als Vektor mit dem Angriffspunkt x vor. Die Zahl r heißt Rang des Bündels, X heißt Basis- und Y Bündelraum des Bündels π.

In der Physik ist fast immer $K = \mathbb{R}$ und in den übrigen Fällen so gut wie immer $K = \mathbb{C}$. Wir sprechen dann von reellen oder komplexen Vektorraumbündeln über X.

Außerdem wird gefordert, daß π lokal von der Gestalt

$$K^r \times X \longrightarrow X,\ (v, x) \mapsto x, \tag{1}$$

ist. Genauer, für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U,

$$x \in U \subseteq X,\ U \text{ offen},$$

mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung des Bündels π auf U,

$$\pi^{-1}(U) \longrightarrow U \tag{2}$$

bis auf Isomorphie mit der natürlichen Projektion

$$p_2\colon K^r \times U \longrightarrow U,\ (v, x) \mapsto x,$$

übereinstimmt. Bündel der Gestalt (1) heißen auch triviale Bündel, und auf die eben beschriebene Eigenschaft bezieht man sich als auf die lokale Trivialität eines Bündels. Der Isomorphismus

$$\varphi_U\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow K^r \times U,$$

welcher die Einschränkung mit dem trivialen Bündel über U identifiziert, d.h. für welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & K^r \times U \arrow[dl, "p_2"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, heißt auch lokale Trivialisierung des Bündels über U. Für jedes $x \in U$ identifiziert er die Faser über x mit dem Vektorraum K^r, und man fordert schließlich noch, daß die Bijektionen

$$\varphi_U|_{\pi^{-1}(x)}\colon \pi^{-1}(x) \longrightarrow p_2^{-1}(x) = K^r \times \{x\} \cong K^r$$

für jedes $x \in U$ lineare Isomorphismen über K sind.

Ein Schnitt in ein glattes, analytisches, holomorphes bzw. algebraisches Bündel π über einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ ist eine glatte, analytische, holomorphe bzw. reguläre algebraischen Abbildung

$$s\colon U \longrightarrow X$$

mit $\pi \circ s = Id_U$, d.h. für jedes $x \in U$ soll s(x) in der Faser über x liegen,

$$s(x) = \pi^{-1}(x) \text{ für jedes } x \in U.$$

Mit anderen Worten, jedem Punkt $x \in U$ wird ein Vektor s(x) mit dem Angriffspunkt x zugeordnet. Die Schnitt beschreiben auf U definierte Vektorfelder.
Die Menge der Schnitte von π über U wird mit

$$\Gamma_\pi(U) = \Gamma(U, \Gamma_\pi)$$

bezeichnet. Für je zwei Schnitte $s, s' \in \Gamma_\pi(U)$ und jeden Punkt $x \in U$ liegen s(x) und s'(x) im selben Vektorraum $\pi^{-1}(x)$. Man kann also die Summe $s(x) + s'(x)$ bilden und so einen Schnit

$$s+s' \in \Gamma(U, \Gamma_\pi)$$

definieren. Es ist leicht einzusehen, daß auf diese Weise $\Gamma(U, \Gamma_\pi)$ ein K-Vektorraum wird.
Vereinbarung
Wenn wir im folgenden von Mannigfaltigkeiten sprechen werden wir stets glatte, analytische, holomorphe oder reguläre algebraische Mannigfaltigkeiten im Auge haben.

1.2. Beispiele

1.2.1 Tangentialbündel

Ein Beispiel für ein Vektorraumbündel ist das Tangentialbündel

$$\pi: TX \longrightarrow X$$

an eine Mannigfaltigkeit X, d.h. die Fasern über einen Punkt $x \in X$ bestehen gerade aus den Tangentialvektoren an X mit dem Angriffspunkt x, d.h.

$$T_x X := \pi^{-1}(x)$$

ist gerade der Tangentialraum an X im Punkt x. Die Schnitte von π sind dann gerade die gewöhnlichen (tangentialen) Vektorfelder auf X.

1.2.2 Satz vom Igel

Eine naheliegende Frage in diesem Kontext ist die Frage nach der Trivialität eines Bündels, d.h. ob das Bündel isomorph ist zu einem trivialen Bündel. Der Satz vom Igel besagt gerade, daß das Tangentialbündel der Kugeloberfläche nicht trivial ist,

$$TS^2 \text{ ist nicht trivial.}$$

Man beweist den Satz, indem man die Schnitte des Tangentialbündels betrachtet und nachweist, daß jedes (stetige tangentiale) Vektorfeld auf der Kugeloberfläche eine Nullstelle besizt. Wäre das Bündel trivial,

$$TS^2 = \mathbb{R}^2 \times S^2,$$

so wäre offensichtlich durch

$$S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times S^2, x \mapsto (v_0 , x),$$

mit einem festen von Null verschiedenen Vektor $v_0 \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstelle definiert.

1.2.3 Normalenbündel

Ist $Y \subseteq X$ eine Teilmannigfaltigkeit der Mannigfaltigkeit X, so kann man jeden Tangentialvektor an Y auch als Tangentialvektor an X auffassen. Es gilt also in natürlicher Weise

$$TY \subseteq TX$$

und für jeden Punkt $y \in Y$ liegen die Tangentialräume an y ineinander,

$$T_yY \subseteq T_yX.$$

Indem man in den Tangentialräumen von X Skalarprodukte einführt, kann man für jedes $x \in X$ das orthogonale Komplement von T_yY in T_yX definieren. Es ist in natürlicher Weise isomorph zum Faktorraum

$$N_yX = T_yX / T_yY.$$

Man kann leicht zeigen, daß sich die Vektorräume N_yX mit $y \in Y$ zu einer Mannigfaltigkeit

$$N_{Y/X}$$

zusammensetzen, und die Abbildung

$$N_{Y/X} \longrightarrow Y,$$

welche die Vektoren von N_yX in den Punkt y überführt (also jeden Vektor in seinen Angriffspunkt abbildet) die Struktur eines Vektorraumbündels besitzt. Es heiß Normalenbündel von Y in X.

Zum Beispiel ist die Oberfläche der Einheitskugel in natürlicher Weise eine Teilmannigfaltigkeit des affinen dreidimensionalen Raums,

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Das Normalenbündel S^2 im Raum besteht gerade aus den Vektoren, die auf S^2 senkrecht stehen, wobei Vektoren mit unterschiedlichen Angriffspunkten als verschieden angesehen werden. Die Fasern des Bündels entsprechen gerade den Geraden durch den Ursprung[1] sind also 1-dimensional. Man nennt solche Bündel auch Geradenbündel.

1.2.4 Bündeloperationen

So gut wie jede Konstruktion, die endlich-dimensionale Vektorräume in endlich-dimensionale Vektorräume überführt, läßt sich auf Vektorraumbündel übertragen[2]. Für je zwei Bündel

$$\pi: Y \longrightarrow X \text{ und } \pi': Y' \longrightarrow X$$

kann man wie folgt die direkte Summe bilden. Man setzt

$$Z := \bigcup_{x\in X} Y_x \oplus Y'_x =^{3} Y\times_X Y'$$

d.h .man bildet für jedes $x \in X$ die direkte Summe der Fasern über x und geht zu der Vereinigung dieser direkten Summen über. Zusammen mit der Abbildung

---

[1] Jede dieser Geraden kommt im Normalenbündel zweimal vor: je einmal für jeden der beiden Schnittpunkte der Geraden mit der Kugeloberfläche.

[2] Einen formale Formulierung und deren Beweis findet man zum Beispiel im Buch von Milnor und Stasheff über charakteristische Klassen [Mi 1974, Theorem 3.5].

[3] Die Menge $Y\times_X Y' := \{(y,y') \in Y\times Y' \mid \pi(y) = \pi'(y')\}$ heißt Faserprodukt von Y und Y' bezüglich der beiden Abbildungen π und π' (oder auch Faserprodukt der beiden Bündel).

$$Z \longrightarrow X, (y, y') \mapsto \pi(y) \ (= \pi'(y')).$$

erhält man so ein neues Vektorraumbündel über X, dessen Faser gerade die direkten Summen der Fasern der Ausgangsbündel sind.

In derselben Weise konstruiert man Tensorprodukte, Tensorpotenzen und äußere Potenzen von Bündeln.

Der Übergang zum dualen Vektorraum,

$$V \mapsto V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K),$$

definiert so für jedes Bündel das zugehörige duale Bündel.

1.2.5 Beispiele

Das Dual des Tangentialbündels $TX \longrightarrow X$ wird mit $T^*X \longrightarrow X$ bezeichnet. Seine Schnitte sind gerade die Differentialformen erster Ordnung oder auch 1-Formen auf X (über die man Kurven-Integrale bilden kann). Die i-te äußere Potenz dieses Duals

$$\wedge^i T^*X \longrightarrow X$$

besitzt als Schnitte gerade die Differentialformen i-ter Ordung oder auch i-Formen. Von besonderer Bedeuting ist die höchste äußere Potenz

$$\wedge^i T^*X \longrightarrow X, \ i := \text{Rang des Tangentialbündels.}$$

Das Bündel heißt kanonisches Bündel von X. Seine Schnitte verwendet man zum Beispiel für Volumen-Integrale.
Von besonderer Bedeutung für die Physik sind die Tensorprodukte von Exemplaren des Tangentialbündels und von Exemplaren von dessen Dual,

$$T^r_s(X) := (TX)^{\otimes r} \otimes (T^*X)^{\otimes s} \longrightarrow X.$$

Seine Schnitte sind die r-fach kontravarienten und s-fach kovarianten Tensorfelder.

1.3. Übergangsfunktionen

1.3.1 Definition: Systeme von Übergangsfunktionen

Sind $\pi: Y \longrightarrow X$ ein Vektorraumbündel,

$$U, U' \subseteq X$$

zwei offene Mengen und

$$\varphi_U: \pi^{-1}(U) \longrightarrow K^r \times U \ , \ \varphi_{U'}: \pi^{-1}(U') \longrightarrow K^r \times U'$$

zwei lokale Trivialisierungen von π, so erhält man durch Einschränken, Invertieren und Zusammensetzen eine Bijektion der Gestalt

$$K^r \times (U \cap U') \xrightarrow{\varphi_U^{-1}} \pi^{-1}(U \cap U') \xrightarrow{\varphi_{U'}} K^r \times (U \cap U'), \ (v, x) \mapsto (\psi(v,x), x),$$

wobei für jedes feste $x \in U \cap U'$ die Abbildung

$$K^r \longrightarrow K^r, \ v \mapsto \psi(v,x),$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist, d.h. es gilt

$$\psi(v,x) = g(x) \bullet v$$

mit einer umkehrbaren $r \times r$-Matrix $g(x) \in GL(r, K)$. Für jedes Vektorraumbündel π mit der Faser $V := K^r$ gibt es deshalb eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

und für je zwei Indizes $i,j \in U$ eine glatte, analytische, holomorphe bzw. reguläre Abbildung

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(V)$$

derart, daß durch die Abbildungsvorschrift

$$(v, x) \mapsto (g_{ij}(v), x),\ v \in V,\ x \in U_i \cap U_j.$$

die trivialen Bündel $V\times U_i$ und $V\times U_j$ über $U_i \cap U_j$ identifiziert werden. Das ursprüngliche Bündel kann man sich aus den trivialen Bündeln $V\times U_i$ entstanden denken durch diese Art von Identifizierungen. Man spricht auch von Verkleben oder Verheften. Die Abbildungen g_{ij} heißen Übergangsfunktionen oder Transitionsfunktionen der Bündels. Ihre Gesamtheit nennt man auch System von Übergangsfunktionen des Bündels π.

1.3.2 Die Kozykel-Bedingungen

Wenn man erst einen Punkt x von $V\times U_i$ mit einem Punkt y von $V\times U_j$ identifiziert und dann den letzteren mit einem Punkt z von $V\times U_k$, so sollte man bei der direkten Identifikation von x mit einem Punkt von $V\times U_k$ ebenfalls den Punkt z erhalten. Mit anderen Worten, für die Übergangsfunktionen gilt

$$g_{jk}(x)\circ g_{ij}(x) = g_{ik}(x) \text{ für alle } x \in U_i \cap U_j \cap U_k. \tag{1}$$

Trivialerweise gilt

$$g_{ii}(x) = x \text{ für alle } x \in U_i. \tag{2}$$

Insbesondere ergibt sich aus (1) und (2) auch

$$g_{ij}(x) = g_{ji}^{-1}(x) \text{ für alle } x \in U_i \cap U_j \tag{3}$$

und

$$g_{ki}(x)\circ g_{jk}(x)\circ g_{ij}(x) = x \text{ für alle } x \in U_i \cap U_j \cap U_k. \tag{4}$$

Umgekehrt folgen aus (2) und (4) auch die übrigen Identitäten. Diese Bedingungen heißen Kozykelbedingungen.

1.3.3 Bündel mit vorgegebenen Übergangsfunktionen

Es ist nicht schwer, einzusehen, daß es für jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ und jede Familie von glatten, analytischen, holomorphen bzw. regulären Abbildungen

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(V),$$

welche den Bedingungen (2) und (4) genügen ein Vektorraumbündel gibt, dessen Übergangsfunktionen bezüglich der gegebenen Überdeckung gerade die g_{ij}. Dieses Bündel ist sogar bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Allgemeiner, für je zwei Systeme von Übergangsfunktionen

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(V),$$

und

$$g'_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(V),$$

(zu derselben offenen Überdeckung) erhält man genau dann isomorphe Bündel, wenn es eine Familie von glatten, analytischen, holomorphen bzw. regulären Abbildungen

$$h_i: U_i \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(V)$$

gibt mit

$$g'_{ij}(x) = h_j^{-1}(x)\circ g_{ij}(x)\circ h_i(x) \text{ für alle } x \in U_i \cap U_j \qquad (5)$$

Man sagt auch, zwei Systeme von Übergangsfunktionen sind <u>kohomolog</u>, wenn die Bedingungen (5) für je zwei $i,j \in I$ erfüllt sind (d.h. wenn die zugehörigen Bündel isomorph sind).

Genauer, sind $\pi: Y \longrightarrow X$ und $\pi': Y' \longrightarrow X$ die Vektorraumbündel zu den Systemen von Übergangsfunktionen $\{g_{ij}\}$ bzw. $\{g'_{ij}\}$, und sind diese Bündel isomorph, so sind insbesondere auch die eingeschränkten Bündel

$$\pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \text{ und } \pi'^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$$

für jedes i isomorph. Letztere sind aber triviale Bündel, und die lokalen Trivialisierungen von π und π' liefern Isomorphismen

$$K^r\times U_i \xrightarrow{\cong} \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} \pi'^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} K^r\times U_i\ ,\ (v, x) \mapsto (\varphi(v,x), x).$$

Die Abbildung h_i ist dann für jedes i gerade durch die folgende Bedingung definiert.

$$\varphi(v,x) := h_i(x)v \text{ für } x \in U_i \text{ und } v \in K^r$$

Falls Systeme von Übergangsfunktionen zu unterschiedlichen Überdeckungen gegeben sind, so kann man zu einer gemeinsame Verfeinerung dieser Überdeckungen übergehen. wenn die so entstehenden Systeme kohomolog sind (d.h .die zugehörigen Bündel sind isomorph), so sagt man auch von den Ausgangsystemen, daß sie <u>kohomolog</u> sind.

1.3.4 Übergangsfunktionen und Schnitte

Seien $\pi: Y \longrightarrow X$ ein Vektorraumbündel,

$$X := \bigcup_{i\in I} U_i$$

eine offene Überdeckung und für jedes $i \in I$

$$\varphi_{U_i}: \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow K^r\times U_i$$

eine lokale Trivialisierung. Ein (globaler) Schnitt $s: X \longrightarrow Y$ von π definiert dann für jedes i eine Abbildung

$$\varphi_{U_i}\circ s: U_i \longrightarrow K^r\times U_i\ ,\ x \mapsto (s_i(x), x),$$

d.h. eine Abbildung

$$s_i: U_i \longrightarrow K^r.$$

In den Punkten von $U_i\cap U_j$ gilt trivialerweise

$$\varphi_{U_j}\circ s = \varphi_{U_j}\circ\varphi_{U_i}^{-1}\circ\varphi_{U_i}\circ s$$

also, wenn wir die Übergangsfunktionen mit g_{ij} bezeichnen,

$$(s_j(x), x) = \varphi_{U_j}\circ\varphi_{U_i}^{-1}(s_i(x), x) = (g_{ij}(x)s_i(x), x),$$

also

$$s_j = g_{ij} \circ s_i \text{ auf } U_i \cap U_j.$$

Umgekehrt definiert jede Familie von glatten, analytischen, holomorphen bzw. regulären Abbildungen

$$s_i \colon U_i \longrightarrow K^r,\ i \in I,$$

mit $s_j = g_{ij} \circ s_i$ auf $U_i \cap U_j$ einen Schnitt des Vektorraumbündels.

Man beachte, im Fall von Geradenbündeln (d.h. r = 1) sind die Übergangsfunktionen

$$g_{ij} \colon U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(K) = K^*,$$

durch die Relation $s_j = g_{ij} \circ s_i$ außerhalb der Nullstellen des Schnitts bereits eindeutig festgelegt. Das bedeutet, ein einzelner Schnitt, der auf einer dichten offenen Teilmenge von X ungleich Null ist legt bereits sämtliche Übergangsfunktionen eindeutig fest (wegen deren Stetigkeit).

Die Relationen

$$s_j = g_{ij} \circ s_i \text{ auf } U_i \cap U_j \cap U$$

bestehen natürlich auch in analoger Weise für (beliebiges r und) lokale Schnitte

$$s \colon U \longrightarrow Y$$

über der Umgebung U eines gegebenen Punktes $x \in U$. Nun kann man für kleines U die Schnitte s so wählen, daß die s(x) eine Basis des K^r durchläuft. Das bedeutet aber, daß sich die g_{ij} aus der Gesamtheit aller Schnitte bestimmen lassen. Das Vektorraumbündel ist deshalb durch die Abbildung

$$U \mapsto \Gamma(U, \Gamma_\pi),$$

welche jeder offenen Menge U von X den Vektorraum der Schnitte über U zuordnet, bis auf Isomorphie festgelegt.
Diese Abbildung ist ein Beispiel für eine <u>Prägarbe</u>, d.h. einen kontravarianten Funktor

$$\Gamma_\pi \colon X \longrightarrow \mathrm{Vect}_K,$$

wobei hier X als Kategorie betrachtet wird, deren Objekte die offenen Mengen von X und deren Morphismen die natürlichen Inklusionsabbildungen dieser offenen Mengen sind. Die Bildkategorie ist die Kategorie der Vektorräume über K und K-linearen Abbildungen.
Diese Prägarbe ist sogar eine <u>Garbe</u>, d.h. sie erfüllt die beiden Garben-Axiome. Genauer: für jede offene Menge U von X und jede offene Überdeckung

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

sind die beiden folgenden Bedingungen erfüllt.

(i) Für je zwei Schnitte $s, s' \in \Gamma_\pi(U)$ mit $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$ für jedes $i \in I$ gilt $s = s'$.

(ii) Für jede Familie von Schnitten $s_i \in \Gamma_\pi(U_i)$ mit

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \text{ für } i, j \in I$$

gibt es einen Schnitt $s \in \Gamma_\pi(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für jedes $i \in I$.

Anstelle von Vektorraumbündeln werden wir im folgenden deren Schnittgarben betrachten. Wir beginnen mit einer Beschreibung der Garben, die isomorph sind zu Schnittgarben von Vektorraumbündeln.

1.4. Kohärente Garben und deren Kohomologie

1.4.1 Lokal freie Garben und Vektorraumbündel

Sei $\pi: Y \longrightarrow X$ ein Vektorraumbündel vom Rang r. Falls das Bündel trivial ist,

$$Y = K^r \times X,$$

ist die Angabe eines Schnitts äquivalent zur Angabe einer Abbildung

$$X \longrightarrow K^r,$$

was wiederum äquivalent ist zur Angabe eines r-Tupels von Funktionen

$$X \longrightarrow K.$$

Die Garbe der Schnitte von π ist deshalb isomorph zur direkten Summe

$$\Gamma_\pi \cong \mathcal{O}_X^r$$

von r Exemplaren der Strukturgarbe von X, d.h. $\mathcal{O}_X$ ist die Garbe der glatten, analytischen, holomorphen bzw. regulären Funktionen auf X. Mit anderen Worten, die Garbe Γ_π ist frei vom Rang r.

Ist $\pi: Y \longrightarrow X$ ein nicht notwendig triviales Vektorraumbündel, dann bedeutet die lokale Trivialität dieses Bündels, daß es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U gibt, so daß die Einschränkung der Schnittgarbe auf U frei vom Rang r ist,

$$\Gamma_\pi|_U \cong \mathcal{O}_U^r$$

Man nennt Garben mit dieser Eigenschaft lokal frei vom Rang r.
Sei F umgekehrt eine lokal freie Garbe vom Rang r auf X. Dann gibt es eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i$$

und Isomorphismen

$$\varphi_i: F|_{U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_i}^r.$$

Für je zwei Indizes i, j erhalben wir einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}^r_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{(\varphi_i)^{-1}} F|_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{\varphi_j} \mathcal{O}^r_{U_i\cap U_j}$$

Dieser ist durch eine umkehrbare Matrix von Schnitten aus $\mathcal{O}_{U_i\cap U_j}$ gegeben, d.h. durch eiun Abbildung

$$U_i\cap U_j \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(K^r).$$

Diese genügen der Kozyklen-Bedingung, definieren also ein Vektorraumbündel. Es ist nicht schwer, zu zeigen, die Garbe der Schnitte dieses Bündels ist isomorph zur gegebenen lokal freien Garbe.

Diese Betrachtung zeigt, die Untersuchung der Vektorraumbündel über X ist äquivalent zur Untersuchung der lokal freien Garben auf X: beide werden bis auf Isomorphie durch Systeme von Übergangsfunktionen beschrieben.

Die lokal freien Garben stehen für eine Beschreibung der Vektorraumbündel, die weniger geometrisch, d.h. weniger anschaulich ist, als die der ursprünglichen Objekte. Es stellt sich deshalb die Frage, warum wir uns überhaupt für die lokal freien Garben interessieren. Der Grund ist der, daß die Vektorraumbündel eine Kategorie bilden, die nicht besonders gute Eigenschaften hat und daß die lokal freien Garben eine Möglichkeit bieten, diese Kategorie zu verbessern.

Um diese Aussage zu formulieren, müssen wir genau angeben, welches die Morphismen sind in der Kategorie der Vektorraumbündel über der Mannigfaltigkeit X.

Zuvor erinnern wir an den Begriff der Modulgarbe.

1.4.2 Modulgarben

Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{O}$ eine Garbe von kommutativen Ringen mit 1 und $\mathcal{M}$ eine Garbe von abelschen Gruppen. Man sagt, $\mathcal{M}$ ist ein $\mathcal{O}$-Modul, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für jedes offene Menge $U \subseteq X$ ist $\mathcal{M}(U)$ ein $\mathcal{O}(U)$-Modul.

(ii) Für je zwei offene Mengen $U \subseteq V$ ist die Garben-Restriktion

$$\mathcal{M}(V) \longrightarrow \mathcal{M}(U),\ m \mapsto m|_U,$$

eine lineare Abbildung, d.h. für $m,m' \in \mathcal{M}(V)$ und $s, s' \in \mathcal{O}(V)$ gilt

$$(sm + s'm')|_U = s|_U \cdot m|_U + s'|_U \cdot m'|_U.$$

Man beachte, als Spezialfall der zweiten Bedingung ergibt sich die Kommutativität des folgenden Diagramms.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{O}(V)\times\mathcal{M}(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}(V) & \qquad & (s,m) & \mapsto & sm \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{O}(U)\times\mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \mathcal{M}(U) & & (s|_U, m|_U) & \mapsto & s|_U \cdot m|_U = (sm)|_U
\end{array}$$

Dabei seien die horizontalen Abbildungen gerade durch die Modul-Multiplikation und die vertikalen durch die Garben-Restriktionen gegeben. Im folgenden werden wir uns auf die Kommutativität dieses Diagramm beziehen, indem wir sagen, die Modul-Multiplikation ist mit den Garben-Restriktionen <u>verträglich</u>.

Wie bereits angemerkt besiten die lokal freien Garben die Struktur von Moduln über der Strukturgarben. Dies entspricht der Eigenschaften von Vektorraumbündeln, daß man zum Beispiel durch Multiplikation eines glatten Vektorfelds mit einer glatten Funktion wieder ein glatten Vektorfeld erhält.

1.4.3 Morphismen von Vektorraumbündeln

Seien $\pi: Y \longrightarrow X$ und $\pi': Y' \longrightarrow X$ zwei Vektorraumbündel. Ein <u>Morphismus</u> des Bündels π mit Werten im Bündel π' ist eine glatte, analytischen, holomorphe, regulär algebraische Abbilduing

$$f: Y \longrightarrow Y',$$

für welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y' \arrow[dl, "\pi'"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Das bedeutet, daß für jeden Punkt $x \in X$ die Faser über x in die Faser über x abgebildet wird,

$$f(Y_x) \subseteq Y'_x \text{ für jedes } x \in X.$$

Es wird weiterhin gefordert, daß die Einschränkungen von f auf diese Fasern lineare Abbildungen sind.

Ist $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und

$$\varphi_U: \pi^{-1}(U) \longrightarrow K^r \times U \text{ und } \varphi'_U: \pi'^{-1}(U) \longrightarrow K^s \times U$$

lokale Trivialisierungen von π bzw. π' über U, so definiert f eine Abbildung

$$\varphi'_U \circ \varphi_U^{-1}: K^r \times U \longrightarrow K^s \times U, (v, x) \mapsto (\gamma_U(x)v, x),$$

mit einer glatten, analytischen, holomorphen, regulären Abbildung

$$\gamma_U: U \longrightarrow K^{s\times r} \tag{1}$$

Läßt man U eine offene Überdeckung von X durchlaufen, so erhält man eine Familie von Abbildungen γ_U, welche f definieren.

Übungsaufgabe
Welche Bedingungen muß eine Familie von Abbildungen (1) erfüllen, damit durch sie ein Bündelmorphismus definiert ist.

1.4.4 Beispiel

Seien $X = \mathbb{C}$, $Y = \mathbb{C}\times X$ und

$$\pi: Y \longrightarrow X, (z,x) \mapsto x,$$

das triviale Bündel vom Rang 1 über den komplexen Zahlen. Morphismen von Vektorraumbündeln über X sind Abbildungen, die auf den Fasern lineare Abbildungen und auf der Basis die identische Abbildung induzieren.

Zum Beispiel ist für das hier betrachtete Beispiel durch

$$f: Y \longrightarrow Y, (z, x) \mapsto (x\cdot z, x),$$

ein Endomorphismus des trivialen Bündels gegeben: für jedes fest $x \in X$ ist die Abbildung $z \mapsto x\cdot z$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Außerdem wird für jedes x die Faser über x in sich selbst abgebildet. Für $x \in X - \{0\}$ induziert f auf der Faser über x die injektive Abbildung

$$Y_x \longrightarrow Y_x, (z, x) \mapsto (xz, x).$$

Diese Abbidung ist injektiv, hat also den Kern 0. Für $x = 0$ ist diese Abbildung identisch Null, hat also einen 1-dimensionalen Kern.

Analog ist der Kokern dieser Abbildungen für $x \neq 0$ von der Dimension 0 und für $x = 1$ von der Dimension 1.

Wir sehen also, die Kerne dieser Abbildungen lassen sich nicht zu einem Vektorraumbündel über X zusammensetzen, und dasselbe gilt für die Kokerne. Dieses Phänomen impliziert, daß Kerne und Kokerne von Morphismen von Vektorraumbündeln i.a. keine Vektorraumbündel sind, d.h. die Kategorie der Vektorraumbündel besitzt weder Kerne noch Kokerne, ist also insbesondere nicht abelsch.

Die zugehörigen lokal freien Garben sind insbesondere Modulgarben über der Strukturgarbe von X. Die Kategorie der Modulgarben ist eine abelsche Katorie und besitzt insbesondere Kern und Kokerne.

1.4.5 Exaktheit

Seien drei Vektorraumbündel über der Mannigfaltigkeit X gegeben, sagen wir

$$\pi': Y' \longrightarrow X, \pi: Y \longrightarrow X, \pi'': Y'' \longrightarrow X$$

und eine Folge von Bündel-Morphisem

$$\pi' \xrightarrow{f} \pi \xrightarrow{g} \pi''. \tag{1}$$

In einer solchen Situation werden wir oft auch von einer Folge von Vektorraumbündeln

$$Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y''. \tag{2}$$

sprechen und (2) als eine verkürzte Bezeichnung für die Folge (1) betrachten. Die Folge (1) bzw. (2) heißt <u>exakt</u> an der Stelle π (bzw. Y), wenn für jeden Punkt $x \in X$ die zugehörige Folge der Fasern

$$Y'_x \xrightarrow{f_x} Y_x \xrightarrow{g_x} Y''_x$$

exakt ist an der Stelle Y_x, d.h. wenn

$$\mathrm{Im}(f_x) = \mathrm{Ker}(g_x) \text{ für jedes } x \in X$$

gilt. Eine Folge aus mehr als zwei Morphismen heiß exakt, wenn sie an allen in Frage kommenden Stellen exakt ist.

Dieser Exaktheitsbegriff entspricht gerade der Exaktheit der Folgen der zugehörigen lokal freien Garben. Wir erinnern daran, eine Folge von Garben abelscher Gruppen

$$F' \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} F''$$

auf dem topologischen Raum X heißt <u>exakt</u> an der Stelle F, wenn

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$$

gilt, d.h. wenn für jeden Punkt $x \in X$ die zugehörige Folge

$$F'_x \xrightarrow{f_x} F_x \xrightarrow{g_x} F''_x$$

der <u>Halme</u> exakt ist. Dabei ist der Halm von F im Punkt ist definiert als die abelsche Gruppe der Schnittkeime von F in x,

$$F_x := \{f_x \mid f \in F(U), x \in U \subseteq X, U \text{ offen}\}$$

Der Keim f_x von $f \in F(U)$ im Punkt x ist dabei eine Äquivalenzklasse von Schnitten von F über einer Umgebung von x. Zwei Schnitt $s \in F(U)$ und $s' \in F(U')$ werden dabei als äquivalent angesehen, wenn sie in einer Umgebung von x übereinstimmen,

$$s|_W = s'|_W \text{ für eine offene Menge W von X mit } x \in W \subseteq U \cap U'$$

Im Fall von analytischen Funktionen kann man den Keim einer Funktion f im Punkt x mit deren Potenzreihe in diesem Punkt identifizieren.

1.4.6 Kohärente Garben

Sei X ein noethersches algebraisches Schema. Eine <u>kohärente Garbe</u> auf X ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$, welche lokal Kokern von freien Garben endlichen Rangs ist, d.h. für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von X,

$$x \in U \subseteq X, \text{ U offen,}$$

und eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_U$-linearen Abbildungen

$$\mathcal{O}_U^r \longrightarrow \mathcal{O}_U^s \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

mit natürlichen Zahlen r und s. Ersetzt man in der Definition die beiden freien $\mathcal{O}_U$-Moduln $\mathcal{O}_U^r$ und $\mathcal{O}_U^s$ durch beliebige freien Moduln, die auch einen unendlichen Rang haben dürfen, so bekommt man den Begriff der quasi-kohärenten Garbe.

1.4.7 Beispiel

Seien A ein kommutativer Ring mit 1,

$$X := \text{Spec } A$$

und M ein A-Modul. Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ von X läßt sich dadurch definieren, daß man sie auf den offenen Mengen der Topologie-Basis $\{D(f)\}_{f\in A}$ vorgibt:

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(D(f)) := A_f \text{ für } f\in A.$$

In analoger Weise definiert man einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\widetilde{M}$, indem man setzt

$$\Gamma(D(f), \widetilde{M}) = \widetilde{M}(D(f)) := M_f$$

Der Halm dieses Modul im Punkt $p \in \text{Spec } A$ ist gerade die Lokalisierung von M im Primideal p,

$$\widetilde{M}_p = M_p$$

Nun ist jeder Modul M Faktormodul eines freien Moduls, d.h es gibt eine exakte Sequenz von A-linearen Abbildungen

$$F \longrightarrow M \longrightarrow 0 \text{ mit F frei über A.}$$

Analog ist auch der Kern der Abbildung $F \longrightarrow M$ Faktormodul eines freien Moduls, d.h. es gibt eine exakte Sequenz

$$F' \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0 \text{ mit F' und F frei über A.} \qquad (1)$$

Für jedes $f \in A$ erhält man daraus exakte Sequenezen

$$F'_f \longrightarrow F_f \longrightarrow M_f \longrightarrow 0 \text{ mit } F'_f \text{ und } F_f \text{ frei über } A_f.$$

d.h. exakte Sequenzen

$$\widetilde{F}'(D(f)) \longrightarrow \widetilde{F}(D(f)) \longrightarrow \widetilde{M}(D(f)) \longrightarrow 0$$

Diese definieren eine Sequenz von Garben-Morphisem

$$\widetilde{F}' \longrightarrow \widetilde{F} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow 0, \qquad (2)$$

welche sogar eine Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln ist. Für $x \in X = \text{Spec } A$ ist die zugehörige Sequenz der Halme in x gerae die Sequenz,die man aus (1) erhält durch Lokalisieren im Primideal x. Letzteres ist eine eine exakte Sequenz für jedes $x \in X$, d.h. (2) ists eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln.

Weil F und F' direkte Summen von Exemplaren von A sind, sind $\widetilde{F}$ und $\widetilde{F}'$ direkte Summen von Exemplaren von $\mathcal{O}_X$, d.h. diese Moduln sind frei.

Wir haben damit gezeigt, die $\mathcal{O}_X$-Moduln der Gestalt $\widetilde{M}$ sind quasi-kohärente Garben.

Ist A ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul, so kann man für die Moduln F und F' sogar endlich erzeugte freie A-Moduln wählen, sagen wir

$$F = A^r \text{ und } F' = A^s.$$

Dann ist

$$\widetilde{F} = \mathcal{O}_X^r \text{ und } \widetilde{F}' = \mathcal{O}_X^s ,$$

und die obigen Betrachtungen zeigen, daß $\widetilde{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul ist.

Man kann zeigen, die kohärenten Garben auf dem noetherschen affinen Schema X sind gerade die $\mathcal{O}_X$-Moduln der Gestalt $\widetilde{M}$ mit M endlich erzeugter A-Modul. Beschränken uns hier auf eine Beweisskitze für diese Aussage.

1.4.8 Die kohärenten Garben auf einem noetherschen affinen Schema
Seien A ein kommutativer Ring mit 1,

$$X = \operatorname{Spec} A$$

und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul.
Dann gelten folgende Aussagen.

(i) $\mathcal{M}$ ist genau dann quasi-kohärent, wenn es einen A-Modul M gibt mit

$$\mathcal{M} \cong \widetilde{M}.$$

(ii) Sei A noethersch. Dann ist $\mathcal{M}$ genau dann kohärent, wenn es einen endlich erzeugten A-Modul gibt mit

$$\mathcal{M} \cong \widetilde{M}.$$

Der Modul M, dessen Existenz in den beiden Aussagen ausgesagt wird, ist bis auf Isomorphie eindeutig durch $\mathcal{M}$ festgelegt: es gilt

$$M \cong \Gamma(X, \mathcal{M}).$$

Beweisskitze. Der letzte Teil der Behauptung gilt trivialerweise: wenn M existiert und $\mathcal{M} \cong \widetilde{M}$ ist, so gilt

$$\begin{aligned} M &\cong \Gamma(X, \widetilde{M}) && \text{nach Definitioin von } \widetilde{M} \\ &\cong \Gamma(X, \mathcal{M}) && \text{wegen } \mathcal{M} \cong \widetilde{M}. \end{aligned}$$

Weiterhin haben wir im obigen Beispiel gerade gesehen, daß aus $\mathcal{M} \cong \widetilde{M}$ die Quasi-Kohärenz bzw. Kohärenz von $\mathcal{M}$ folgt.
Es bleibt also zu zeigen, daß aus der Quasi-Kohärenz bzw. Kohärenz von M die Existenz des Moduls M mit den angegebenen Eigenschaften folgt.

Sei also $\mathcal{M}$ Quasi-kohärent bzw. kohärent. Für jeden Punkt $x \in X$ gibt es dann eine offene Umgebung U von x und eine exakte Sequenz

$$\widetilde{F}' \longrightarrow \widetilde{F} \longrightarrow \mathcal{M}|_U \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

von $\mathcal{O}_U$-Moduln mit F' und F frei (und vom endlichen Rang im kohärenten Fall). Indem wir U geeignet verkleinern, können wir zusätzlich erreichen, daß U eine offenen Hauptmenge ist, d.h.

$$U = D(f)$$

mit einem $f \in A$. Wir wenden den Schnitt-Funktor $\Gamma(U, ?)$ an und erhalten einen Komplex[4]

$$F' \xrightarrow{\alpha} F \longrightarrow \mathcal{M}(U) \longrightarrow 0$$

von Moduln über $\mathcal{O}_X(U) = A_f$. Wir setzen $M := \mathrm{Koker}(\alpha) = F/\mathrm{Im}(\alpha)$ und erhalten auf Grund der Universalitätseigenschaften des Kokerns (oder auch auf Grund des Homomorphiesatzes) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
F' & \xrightarrow{\alpha} & F & \longrightarrow & \mathcal{M}(U) & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \uparrow & & \\
F' & \xrightarrow{\alpha} & F & \twoheadrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dessen erste Zeile ein Komplex und dessen zweite Zeile eine exakte Sequenz ist. Zu diesem Diagramm gehört ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\widetilde{F}' & \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} & \widetilde{F} & \longrightarrow & \mathcal{M}|_U & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \uparrow & & \\
\widetilde{F}' & \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} & \widetilde{F} & \twoheadrightarrow & \widetilde{M} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

von $\mathcal{O}_U$-Moduln mit exakten Zeilen Dabei stimmt die obere Zeile gerade mit der exakten Sequenz (1) überein. Durch Übergang zu den Halmen sehen wir, daß die Abbildung

$$\widetilde{M} \longrightarrow \mathcal{M}/_U$$

für jedes $x \in X$ Isomorphismen $\widetilde{M}_x \longrightarrow \mathcal{M}_x$ auf den Halmen induziert, also selbst ein Isomorphismus ist. Wir haben gezeigt, für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x, für welche $\mathcal{M}|_U$ die Gestalt $\widetilde{M}$ hat. Das bedeutet, $\mathcal{M}$ ist eine quais-kohärente bzw. kohärenten Garbe im Sinne der Definition hinter Proposition II.5.2 im Buch von Hartshorne. Nach Lemma 5.3 und Proposition 5.4 im Buch von Hartshorne hat dann aber bereits $\mathcal{M}$ selbst diese Gestalt. Damit sind die obigen Aussage bewiesen.

QED.

1.4.9 Eine alternative Beschreibung der kohärenten Garben

Seien X ein Schema und $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $\mathcal{M}$ ist genau dann quasi-kohärent, wenn für jede affine offene Teilmenge $U \subseteq X$ eine Isomorphie

$$\mathcal{M}|_U \cong \Gamma(U, \mathcal{M})^{\sim}$$

besteht. Es reicht, daß letztere Bedingung für die Teilmengen einer offenen affinen Überdeckung von X erfüllt ist.

(ii) Sei X ein noethersches Schema. Dann ist $\mathcal{M}$ genau dann kohärent, wenn für jede affine offene Teilmenge $U \subseteq X$ eine Isomorphie

[4] d.h. die Zusammensetzung von je zwei aufeinanderfolgenden Homomorphismen ist gleich Null.

$$\mathcal{M}|_U \cong \widetilde{\Gamma(U, \mathcal{M})}$$

besteht und der $\mathcal{O}_X(U)$-Modul $\Gamma(U, \mathcal{M})$ endlich erzeugt ist. Es reicht, daß diese Bedingungen für die Teilmengen einer offenen affinen Überdeckung von X erfüllt sind.
Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus der gerade bewiesenen Charakterisierung der (quasi-) kohärenten Moduln auf affinen (noehterschen) Schemata.
QED.

Bemerkung
Unser nächstes Ziel ist es, zu zeigen, die kohärenten Garben auf einem noetherschen Schema bilden eine abelsche Kategorie. Wir erinnern zunächst an die Definition.

1.4.10 Additive und abelsche Kategorien

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt additiv, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind.

1. $\mathcal{C}$ besitzt ein Nullobjekt, d.h. ein Objekt 0, mit der Eigenschaft, daß es für jedes Objekt X von $\mathcal{C}$ genau einen Morphismus
$$0 \longrightarrow X$$
gibt (d.h. 0 ist initial) und genau einen Morphismus
$$X \longrightarrow 0$$
(d.h. 0 ist terminal).
2. Für je zwei Objekte von $\mathcal{C}$ existiert deren direkte Summe und deren direktes Produkt in $\mathcal{C}$.

Eine additive Kategorie $\mathcal{C}$ heißt präabelsch, wenn außerdem noch die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

3. Jeder Morphismus von $\mathcal{C}$ besitzt einen K in $\mathcal{C}$.
4. Jeder Morphismus von $\mathcal{C}$ besitzt einen Kokern in $\mathcal{C}$.

In präabelschen Kategorien gibt es also insbesondere für jeden Morphismus
$$f: X \longrightarrow Y$$
dessen Bild
$$\mathrm{Im}(f) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$$
und desssen Kobild
$$\mathrm{Coim}(f) := \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f)).$$
Wir erhalten so für jeden Morphismus f in $\mathcal{C}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\tilde{f}"] & I \arrow[d, "i"] \\ X \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "c"] \\ K \arrow[u, "k"] & C \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Dabei sei k der Kern von f, c der Kokern von f, j der Kokern von k (d.h. das Kobild von f) und i der Kern von c (d.h. das Bild von f). Der Morphismus $\tilde{f}$ ergibt sich wie folgt.
Nach Definition von c gilt
$$c \circ f = 0.$$
Auf Grund der Universalitätseigenschaft des Kerns i von c, faktorisiert sich f über i, d.h. es gibt einen Morphismus
$$f': X \longrightarrow I \text{ mit } i \circ f' = f.$$

Insbesondere gilt

$$i\circ f'\circ k = f\circ k = 0$$

(weil k der Kern von f ist). Nun ist i als Kern (von c) ein Monomorphismus, d.h. es gilt sogar

$$f'\circ k = 0.$$

Auf Grund der Universalitätseigenschaft von j also Kokern von k, faktorisiert sich f' über j, d.h. es gibt einen Morphismus

$$\tilde{f}: J \longrightarrow I \text{ mit } \tilde{f}\circ j = f'.$$

Es folgt

$$i\circ\tilde{f}\circ j = i\circ f' = f,$$

d.h. das obere Viereck des Diagramms ist kommutativ. Es ist nicht schwer, zu zeigen, daß der Morphismus $\tilde{f}$ durch die Kommutativität des Vierecks eindeutig bestimmt ist.

Eine präabelsche Kategorie $\mathcal{C}$ heißt <u>abelsch</u>, wenn für jeden Morphismus f der zugehörige Morphismus $\tilde{f}$ ein Isomorphismus ist.

Man kann die Bedingung interpredieren als die Forderung, daß der <u>Homomorphiesatz</u> gilt. Jeder Morphismus besitzt dann eine bis auf Isomorphie eindeutige Zerlegung in einen Epimorphismus und einen Monomorphismus.

Ist $\mathcal{C}$ abelsch und f ein Monomorphismus, so ist $k = 0$, d.h. man kann für j den identischen Morphismus wählen. Der Morphismus f stimmt bis auf Isomorphie mit dem Kern i von c überein, d.h. f ist ein Kern. Wir haben gezeigt

5. Jeder Monomorphismus ist ein Kern.

Ist $\mathcal{C}$ abelsch und f ein Epimorphismus, so ist ist $c = 0$, d.h. man kann für i den identischen Morphismus wählen. Der Morphismus f stimmt bis auf Isomorphie mit dem Kokern j von k überein, d.h. f ist ein Kokern. Wir haben gezeigt,

6. Jeder Epimorphismus ist eine Kokern.

Man kann zeigen, daß umgekehrt jede präabelsche Kategorie, für welche die Bedingungen 5. und 6. erfüllt sind, abelsch ist (vgl. Schubert: Kategorien, Definition 12.1.1 und die Sätze 12.3.8 und 12.4.9).
<u>Bemerkungen</u>

(i) In jeder additiven Kategorie sind die Hom-Mengen abelsche Gruppen und die Morphismen-Komposition ist bilinear. Außerdem sind direkte Summe und direktes Produkt zweier Objekte kanonisch isomorph (vgl. Bass: Algebraic K-theory, Part I, Chapter I, §4).
(ii) Unmittelbar aus der Definition kann man ablesen, daß das Dual einer abelschen Kategorie abelsch ist. Man beachte, daß für jeden Morphismus f das zugehörige Diagramm (1) selbstdual ist.
(iii) <u>Einbettungssatz von Mitchell</u>: Jede abelsche Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Teilkategorie der Kategorie Ab der abelschen Gruppen (vgl. Bucur & Deleanu: Introduction to the theory of categories and functors, Corollary 6.34 oder Faith: Algebra I, Theorem 14.21).
(iv) Sei jetzt $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie mit unendlichen direkten Summen (AB3) und einen projektiven <u>Erzeuger</u> U, d.h. für jeden Monomorphismus $X \longrightarrow Y$, der kein Isomorphismus ist, gibt es einen Morphismus $U \longrightarrow Y$, der sich nicht über X faktoriesiert. Falls in der Kategorie sogar gilt

$$(\sup Y_i) \cap X = \sup (Y_i \cap X)$$

für jede aufsteigende Kette von Teilobjekten Y_i und jedes Teilobjekt X eines Objekts Y (AB5 falls auch AB3 gilt), so ist die Eigenschaft U, ein Erzeuger zu sein, äquivalent zur Bedingung, daß jedes Objekt Faktorobjekt einer direkten Summe von Exemplaren von U ist. Man kann dann zeigen, $\mathcal{C}$ hat genügend viele injektive Objekte, d.h. jedes Objekt ist Teilobjekt eines injektiven (vgl. Grothendieck: Sur quelques points d'algèbre homologique, Theorem 1.10.1). Sei Λ der Ring

$$\Lambda := \mathrm{Hom}(U,U).$$

Dann ist der Funktor

$$\mathcal{C} \longrightarrow \Lambda\text{-Mod}, X \mapsto \mathrm{Hom}(U, X),$$

exakt und völlig treu. Insbesondere kann man $\mathcal{C}$ als Teilkategorie der Modulkategorie Λ-Mod ansehen (vgl. Bucur & Deleanu, Beweis von Corollay 6.34).

1.4.11 Die kohärenten Garben bilden eine abelsche Kategorie

Sei X ein Schema. Dann ist die Kategorie

$$\mathcal{O}_X\text{-Mod}_{qc}$$

der quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln eine abelsche Kategorie.

Sie X ein noethersches Schema. Dann ist die Kategorie

$$\mathcal{O}_X\text{-Mod}_c$$

der kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln eine abelsche Kategorie.

Bemerkung

Nach Konstruktion ist $\mathcal{O}_X$-Mod_c die kleinste abelsche Kategorie, welche alle lokal freien Garben endlichen Rangs von X enthält, d.h. alle Vektorraumbündel über X. Die Kategorie $\mathcal{O}_X$-Mod_{qc} besitzt eine analoge Beschreibung.

Beweis. Wir haben zu zeigen, die Kategorien

$$\mathcal{O}_X\text{-Mod}_{qc} \text{ und } \mathcal{O}_X\text{-Mod}_c$$

sind abelsch.

Im nachfolgenden Beweis behandeln wir den kohärenten und den quasi-kohärenten Fall simultan, wobei wir in kohärenten Fall immer, ohne dies explizit zu erwähnen, annehmen werden, daß das Schema X noethersch ist.

Beweis von 1. Die Aussage ist tirivial: der $\mathcal{O}_X$-Modul, welcher jeder offenen Menge, die nur aus der 0 bestehende Menge zuordnet ist offensichtlich ein Null-Objekt in der Kategorie $\mathcal{O}_X$-Mod. Dieser Modul ist kohärend, als Kokern des identischen Morphismus $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$. Damit ist er auch Nullobjekt der vollen Teilkategorie $\mathcal{O}_X$-Mod_c (und von $\mathcal{O}_X$-Mod_{qc}).

Beweis von 2. Die direkte Summe von zwei exakten Sequenzen der Gestalt

$$\widetilde{F}' \longrightarrow \widetilde{F} \longrightarrow \mathcal{M}|_U \longrightarrow 0$$

über einer affinen offenen Hauptmenge U von X ist wieder eine direkte Summe dieser Gestalt. Die direkte Summe von zwei (quasi-) kohärenten Moduln genommen in der

Kategorie $\mathcal{O}_X$-Mod ist deshalb wieder ein (quasi-) kohärenter Modul. Letzterer ist aber auch in der vollen Teilkategorie $\mathcal{O}_X$-Mod_c (bzw. $\mathcal{O}_X$-Mod_{qc}) die direkte Summe der beiden Ausgangsmoduln.
Weil $\mathcal{O}_X$-Mod abelsch ist, stimmt in $\mathcal{O}_X$-Mod die direkte Summe mit dem direkten Produkt überein. Letzteres liegt damit auch in der Kategorie der (quasi-) kohärenten Moduln und ist dort ebenfalls direktes Produkt der beiden Ausgangsmoduln.
<u>Beweis von 3 und 4</u>. Sei

$$f: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$$

eine Morphismus von (quasi-) kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln. Für jede affine offene Teilmenge $U \subseteq X$ betrachten wir die durch f auf den Schnitten induzierte lineare Abbildung

$$f_U: M_U \longrightarrow N_U.$$

Diese fügt sich in eine exakte Sequenz linearer Abbildungen

$$0 \longrightarrow K_U \longrightarrow M_U \longrightarrow N_U \longrightarrow C_U \longrightarrow 0$$

von $\mathcal{C}_X(U)$-Moduln ein, wobei links der Kern K_U und rechts der Kokern C_U von f_U steht. Wir gehen zu den zugehörigen Modulgarben auf U über und erhalten eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_U$-Moduln

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}_U \longrightarrow \mathcal{M}|_U \xrightarrow{f|U} \mathcal{N}|_U \longrightarrow \widetilde{C}_U \longrightarrow 0$$

Die Exaktheit bedeutet, daß links der Kern $\widetilde{K}_U$ von f|U und rechts der Kokern $\widetilde{C}_U$ von f|U steht. Diese sind einschließlich ihrer Einschränkungen auf offene Teilmengen von U insbesondere bis auf Isomorphie durch eine Universalitätseigenschaft festgelegt. Das bedeutet, daß sich die lokal definierten Kerne zu einer global auf ganz X definierten Garbe verheften lassen, und dasselbe gibt analog für die Kokerne. Im Ergebnis erhalten wir Modulgarben, die die Universalitätseigenschafte eines Kerns bzw. eines Kokerns von f besitzen. Kern und Kokern von f exsitieren also.

<u>Beweis von 5</u>. Sei $f: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ ein Morphismus (quasi-) koherenter $\mathcal{O}_X$-Moduln. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{J} \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \mathcal{I} \arrow[d, "i"] \\ \mathcal{M} \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f"] & \mathcal{N} \arrow[d, "c"] \\ \mathcal{K} \arrow[u, "k"] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Dabei seien k der Kern von f, c der Kokern von f, j der Kokern von k (also das Kobild von f) und i der Kern von c (also das Bild von f).

Für jede affine offene Teilmenge $U \subseteq X$ betrachten wir das kommutative Diagramm von Moduln und linearen Abbildungen über $\mathcal{O}_X(U)$

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & I \\ {\scriptstyle j'}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ {\scriptstyle k'}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle c'} \\ K & & C \end{array}$$

wobei φ aus f durch Anwenden den Schnittfunktors $\Gamma(U, ?)$ entsteht, k' der Kern von φ, c' der Kokern von φ, j' der Kokern von k' und i' der Kern von c' ist. Die eindeutige Existenz der Abbildung $\tilde{\varphi}$ ergibt sich dann aus der Forderung der Kommutativität des oberen Vierecks auf Grund des Homomorphiesatzes. Ebenfalls auf Grund des Homomorphiesatzes ist $\tilde{\varphi}$ ein Isomorphismus.

Wir wenden $\tilde{}$-Funktor auf das Diagramm an und erhalten so gerade die Einschränkung des Diagramms (1) auf U. Insbesondere ist deshalb $\tilde{f}|_U$ ein Isomorphismus, d.h. $\tilde{f}$ induziert für jedes $x \in U$ einen Isomorphismus auf den Halmen. Weil die affinen offenen Teilmengen das Schema X überdecken, gilt letzteres für jedes $x \in X$, d.h. $\tilde{f}$ ist ein Isomophismus.

QED.

1.4.12 Definition der Garben-Kohomologie

Wie wir gesehen haben, ist der Schnitt-Funktor $\Gamma(U, ?)$ für U affin auf den quasi-kohärenten Garben exakt. Für beliebiges U ist dieser Funktor jedoch weit davon entfernt, exakt zu sein. Das gilt erst recht für nicht-notwendig kohärente Garben.

Der Funktor $\Gamma(U, ?)$ ist jedoch linksexakt für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ eines beliebigen topologischen Raums X.

Die rechtsabgeleiteten Funktoren von

$$\Gamma(U, ?): Sh_X(Ab) \longrightarrow Ab$$

werden mit

$$H^i(U, ?)$$

bezeichnet. Für jede Garbe abelscher Gruppen F heißt

$$H^i(U, F)$$

i-te Kohomologie von U mit Koeffizienten aus F. Um diese Kohomologie-Gruppen sprachlich von der singulären Kohomologie zu unterscheiden, sprechen wir von <u>Garben-Kohomologie</u>.

1.4.13 Zur Korrektheit der Definition

Für die Existenz der abgeleiteten Funktoren linksexakter Funktoren auf

$$\mathcal{C} := Sh_X(Ab)$$

brauchen wir die Aussage, daß diese Kategorie genügend viele injektive Objekte besitzt. Den Beweis führen wir in mehreren Schritten.

<u>1. Schritt</u>. Für jeden kommutativen Ring A mit 1 besitzt A-Mod genügend viele injektive Objekte.

Die Kategore A-Mod ist, wie wir wissen abelsch. Es ist eine AB3-Kategorie: sie besitzt unendliche direkte Summen, und sogar eine AB5-Kategorie, d.h. es gilt

$$(\sup N_i) \cap M = \sup (N_i \cap M)$$

für jede aufsteigende Kette von Teilmoduln N_i und jeden Teilmodul M eines Moduls N (weil man anstelle von sup aucb Σ schreiben kann). Außerdem ist jeder A-Modul Faktormodul eines freien A-Moduls, d.h. A ist ein erzeugendes Objekt von A-Mod. Damit bestzt M genügend viele injektive Objekte.

<u>2. Schritt</u>. Für jeden geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ besitzt die Kategorie $\mathcal{O}_X$-Mod der $\mathcal{O}_X$-Moduln genügend viele injektive Objekte.

Sei F ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist für jeden Punkt $x \in X$ der Halm F_x ein Modul über $\mathcal{C}_{X,x}$. Nach dem ersten Schritt gibt es eine $\mathcal{C}_{X,x}$-lineare inektive Abbildung

$$F_x \rightarrowtail I_x$$

mit einem injektiven $\mathcal{C}_{X,x}$-Modul I_x. Im folgenden werden wir F_x mit einem Teilmodul von I_x identifizieren. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ setzen wir

$$\mathcal{I}(U) := \prod_{x \in U} I_x$$

Auf diese Weise ist eine Garbe von $\mathcal{C}_X$-Moduln $\mathcal{I}$ definiert: für je zwei offene Mengen U und V von X mit $U \subseteq V$ sei die Restriktion

$$\mathcal{I}(V) \longrightarrow \mathcal{I}(U)$$

gerade die Abbildung, die auf den Faktoren I_x mit $x \in U$ wie die Identität und auf allen anderen Faktoren wie die Null-Abbildung wirkt. Die Multiplikation ist in der offensichtlichen Weise definiert:

$$\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{I}(U) \longrightarrow \mathcal{I}(U),\ (s,\{m_x\}_{x \in U}) \mapsto \{s_x m_x\}_{x \in U}$$

Die Multiplikation mit s wirkt auf dem Faktor I_x wie die Multiplikation mit dem Keim s_x von s im Punkt x. Eine alternative Beschreibung der Garbe $\mathcal{I}$ ist die folgende. Für $x \in X$ versehen wir den einpunktigen topologischen Raum $\{x\}$ mit der Strukturgarbe, deren globale Schnitte den Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ bilden. Der Raum $\{x\}$ wird so zum (lokalen) lokal geringten Raum. Die natürliche Einbettung dieses Raums in X definiert zusammen mit den natürlichen Abbildungen $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ einen Morphismus von lokal geringten Räumen

$$j_x : \{x\} \longrightarrow X.$$

Den Modul I_x können wir als Modul über der Strukturgarbe von $\{x\}$ auffassen. Die direkte Bildgarbe $j_{x*}(I_x)$ hat über der offenen Umgebung U von x die Schnittmenge

$$\Gamma(U, j_{x*}(I_x)) = \Gamma(j_x^{-1}(U), I_x) = \Gamma(\{x\}, I_x) = I_x$$

Damit ist die Garbe $\mathcal{I}$ gerade das Prägarben-Produkt der Garben $j_{x*}(I_x)$ und damit, weil $\mathcal{I}$ eine Garbe ist, deren Garben-Produkt,

$$\mathcal{I} = \prod_{x\in X} j_{x*}(I_x).$$

Für jede offene Menge $U \subseteq X$ betrachten wir die Abbildung

$$F(U) \longrightarrow \mathcal{I}(U),\ s \mapsto (s_x)_{x\in U},$$

die jeden Schnitt s von F über U auf die Familie von dessen Halmen $s_x \in F_x \subseteq I_x$ abbildet. Auf Grund es ersten Garben-Axioms sind alle diese Abbildungen injektiv. Sie setzen sich zu einem injektiven Garben-Morphismus

$$F \rightarrowtail \mathcal{I}$$

zusammen, d.h. F läßt sich als Teilmodul des $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{I}$ auffassen. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß der Modul $\mathcal{I}$ injektiv ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß der Funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(?, \mathcal{I}): \mathcal{O}_X\text{-Mod} \longrightarrow \mathrm{Ab},$$

exakt ist. Nun ist $\mathcal{I}$ direktes Produkt der Funktoren $j_{x*}(I_x)$, d.h. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(?, \mathcal{I})$ ist direktes Produkt der Funktoren

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(?, j_{x*}(I_x)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(j_x^{-1}\ ?\ , I_x).$$

Es reicht also die Exaktheit der letzteren zu zeigen. Letzterer Funktor ist aber die Zusammensetzung des Funktors

$$j_x^{-1}: \mathcal{O}_X\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}\text{-Mod},\ G \mapsto G_x\ ,$$

welcher exakt ist, mit dem Funktor

$$\mathcal{O}_{X,x}\text{-Mod} \longrightarrow \mathrm{Ab},\ M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(M, I_x),$$

welcher exakt ist, weil I_x nach Konstruktion injektiv ist. Insgesamt erhalten wir also einen exakten Funtor.

3. Schritt. Die Kategorie $Sh_X(Ab)$ der abelschen Garben auf dem topologischen Raum X besitzt genügend viele injektive Objekte.

Wir versehen den topologischen Raum X mit der konstanten Garbe $\mathbb{Z}$ (d.h. die Schnitte dieser Garbe sind die lokal konstanten Funktionen auf den offenen Mengen von X mit Werten in $\mathbb{Z}$). Auf diese Weise wird $(X, \mathbb{Z})$ ein geringter Raum. Die Kategorie $\mathbb{Z}$-Mod ist aber gerade die Kategorie der abelschen Garben auf X. Letztere besitzt also nach dem zweiten Schritt genügend viele injektive Objekte.

QED.

1.5 Bemerkungen zur Theorie der abgeleiteten Funktoren

1.5.1 Wiederholung: abgeleitete Funktoren

Sei $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein linksexakter Funktor abelscher Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$. Die Kategorie $\mathcal{C}$ besitze genügend viele injektive Objekte.

Dann exisiteren die <u>rechtsabgeleiteten Funktoren</u> R^iF von F. Dies sind additive Funktoren

$$R^iF : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}\ ,\ i = 0, 1, 2, ...$$

mit folgenden Eigenschaften.

(i) $R^0F = F$

(ii) $R^iF(I) = 0$ für $i > 0$ und I injektiv.

(iii) Die Funktoren R^iF bilden zusammen einen Funktor

RF: (kurze exakte Sequenzen von $\mathcal{C}$) $\longrightarrow$ (exakte Sequenzen von $\mathcal{D}$)$_{\geq 0}$

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0 \mapsto ... \longrightarrow R^iF(A') \longrightarrow R^iF(A) \longrightarrow R^iF(A'') \longrightarrow ...$$

von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von $\mathcal{C}$ in die Kategorie der exakten Sequenzen von $\mathcal{D}$, welche in nicht-negativen Graden konzentriert sind. Genauer:

(a) Für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

der Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es Morphismen δ^i: R^i-FA" $\longrightarrow R^{i+1}FA'$ von $\mathcal{D}$, genannt Zusammenhangshomomorphismen, derart daß die folgende Sequenz von $\mathcal{D}$ exakt ist.

$$0 \longrightarrow R^0F(A') \longrightarrow R^0F(A) \longrightarrow R^0F(A'') \xrightarrow{\delta^0} R^1F(A') \longrightarrow ... \qquad (1)$$

$$... \longrightarrow R^iF(A') \longrightarrow R^iF(A) \longrightarrow R^iF(A'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(A') \longrightarrow ...$$

(b) Für jeden Morphismus von kurzen exakten Sequenzen in $\mathcal{C}$, d.h. für jedes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

in $\mathcal{C}$ mit exakten Zeilen ist das folgende Viereck in $\mathcal{D}$ für jedes i exakt.

$$\begin{array}{ccc} R^iF(A'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^iF(B'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(B') \end{array}$$

Mit anderen Worten zu jedem Morphismus von kurzen exakten Sequenzen gehört ein Morphismus von kurzen exakten Sequenzen der Gestalt (1), d.h. ein kommutatives Diagramm mit zwei exakten Zeilen der Gestalt (1).

Die Funktoren $R^iF : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ und Zusammenhangshomomorphismen δ^i sind durch die angegebenen Eigenschaften bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt.

1.5.2 Zur Berechnung der Garben-Kohomologie

Seien F: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein linksexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien, wobei $\mathcal{C}$ genügend viele injektive Objekte besize. Ein Objekt I von $\mathcal{C}$ heißt <u>azyklisch</u> bezüglich F oder auch F-azyklisch, falls

$$R^iF(I) = 0$$

gilt für alle i >0. Injektive Objekte sind nach Definition der rechtsabgeleiteten Funktoren F-azyklisch für beliebige linksexakte Funktoren F.

Seien X ein beliebiges Objekt von $\mathcal{C}$ und

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \ldots \qquad (1)$$

kurz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^*$$

eine <u>azyklische Auflösung</u> von X, d.h. (1) sei eine exakte Sequenz mit I^j azyklisch bezüglich F für jedes j. Dann gibt es für jedes j einen natürlichen Isomorphismus

$$R^jF(X) \cong H^j(F(I^*)).$$

Dabei bezeichne I* den Komplex der I^j (ohne das Objekt X).

<u>Bemerkung</u>

Weil $\mathcal{C}$ genügend viele injektive Objekte besitzt, gibt es für jedes Objekt X sogar eine injektive Auflösung (die insbesondere F-azyklisch ist).

<u>Bemerkung</u>

Im folgenden werden wir bei der Berechnung der Garben-Kohomologie die verschiedendsten Funktoren vergleichen müssen. Dabei wird sich der Begriff des ∂-Funktors, der eine Variante des Axiomensystems für die abgeleiteten Funktoren darstellt, als nützlich erweisen.

1.5.6 ∂-Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ abelsche Kategorien. Ein <u>∂-Funktor</u> $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ist ein Funktor von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von $\mathcal{C}$ mit Werten in der Kategorie der exakten Sequenzen von $\mathcal{D}$, welche in den nicht-negativen Graden konzentiert ist.

$$\text{(kurze exakte Sequenzen von } \mathcal{C}) \longrightarrow \text{(exakte Sequenzen von } \mathcal{D})_{0\le \deg}$$

Genauer: ein ∂-Funktor

$$T = (T^i)_{i\ge 0} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

besteht aus einer Familie von additiven Funktoren

$$T^i: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

zusammen mit einem funktoriellen Morphismus

$$\delta^i: T^i(A'') \longrightarrow T^{i+1}(A')$$

für jedes i≥0 jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

in $\mathcal{C}$, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für jede kurze exakten Sequenz (1) in $\mathcal{C}$ ist die folgende Sequenz in $\mathcal{D}$ exakt.

$$0 \longrightarrow T^0(A') \longrightarrow T^0(A) \longrightarrow T^0(A'') \xrightarrow{\delta^0} T^1(A') \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow T^i(A') \longrightarrow T^i(A) \longrightarrow T^i(A'') \xrightarrow{\delta^i} T^{i+1}(A') \longrightarrow \ldots$$

(ii) Für jeden Morphismus von kurzen exakten Sequenzen in $\mathcal{C}$, d.h. für jede kommutative Diagramm in $\mathcal{C}$ mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (2)$$

sind die folgenden Diagramme für alle i≥0 kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} T^i(A'') & \xrightarrow{\delta^i} & T^{i+1}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^i(B'') & \xrightarrow{\delta^i} & T^{i+1}(B') \end{array}$$

1.5.7 Universelle ∂-Funktoren

Ein ∂-Funktor $T = (T^i)_{i\geq 0}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ heißt universell, wenn es für jeden ∂-Funktor

$$T' = (T'^i)_{i\geq 0}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

und jeden funktoriellen Morphismus

$$f^0: T^0 \longrightarrow T'^0$$

genau eine Familie von funktoriellen Morphismen

$$f^i: T^i \longrightarrow T'^i \text{ , } i \geq 0,$$

gibt, die mit den δ^i für jedes i kommutieren und deren erster gerade das gegebene f^0 ist. Mit anderen Worten, jeder funtorielle Morphismus f^0: $T^0 \longrightarrow T'^0$ ist die Komponente des Grades 0 eines eindeutig bestimmten Morphismus $f: T \longrightarrow T'$ von ∂-Funktoren.

<u>Bemerkungen</u>

(i) Aus der Definition geht hervor, daß es für jeden additiven Funktor

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

von abelschen Kategorien bis auf Isomorphie höchstens einen universellen ∂-Funktor $T:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ geben kann mitr $T^0 = F$.

(ii) Um die Existenz von ∂-Funktoren zu beweisen, benötigen wir ein Kriterium für die Universalität eines ∂-Funktors. Wir werden sehen, daß ∂-Funktoren, mit der Eigenschaft, <u>annullierbar</u> (Englisch ‘effaceable’) zu sein, automatisch universell sind.

1.5.8 Annullierbare Funktoren

Ein addiver Funktor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ heißt <u>annullierbar</u>, wenn es für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ einen Monomorphismus $u: A \longrightarrow B$ gibt mit $F(u) = 0$. Er heißt <u>koannullierbar</u>, wenn es für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ einen Epimorphismus $u: B \longrightarrow A$ gibt mit $F(u) = 0$.

1.5.9 Universalität der annullierbaren ∂-Funktoren

Sei $T = (T^i)_{i\geq 0}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein ∂-Funktor mit der Eigenschaft, daß jedes T^i mit $i > 0$ annullierbar ist. Dann ist T universell.

Beweis (vgl. Grothendieck, Sur quelques points d’algebre homologique, II, 2.2.1).

Zum Beweis benötigt man leicht veränderte Variante der Definition des ∂-Funktors, die man auch als Verallgemeinerung verstehen kann: wir haben den Fall zu betrachten, daß die T^i für gewisse i, die in einem Intervall liegen, sagen wir

$$i \in [a,b],$$

definiert sind, wobei die Definition ansonsten dieselbe ist. Wir werden dann sagen, der ∂-Funktor ist in den Graden a bis b <u>definiert</u>.

Zum Beweis der Behauptung reicht es, die folgende Aussage zu beweisen.

Seien $T = (T^a, T^{a+1})$ und $T' = (T'^a, T'^{a+1})$ zwei in den Graden a und a+1 definierte ∂-Funktoren mit T^{a+1} annullierbar und

$$f^a: T^a \longrightarrow T'^a$$

ein funktorieller Morphismus. Dann gibt es genau einen Morphismus von ∂-Funktoren

$$f= (f^a,f^{a+1}): T \longrightarrow T',$$

der im Grad a mit f^a übereinstimmt.

Wir haben für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ den Morphismus

$$f^{a+1}(A): T^{a+1}(A) \longrightarrow T'^{a+1}(A)$$

zu konstruieren. Dazu wählen wir einen Monomorphismus

$$u: A \longrightarrow B$$

mit $T^{a+1}(u) = 0$. Ein solcher existiert, weil T^{a+1} annullierbar ist. Wir betten u in eine kurze exakte Sequenz ein, sagen wir

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$

und betrachten das folgende zugehörige kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd}
T^a(B) \arrow[r, "T^a(v)"] \arrow[d] & T^a(C) \arrow[r, "\delta^a"] \arrow[d] & T^{a+1}(A) \arrow[r, "T^{a+1}(u)"] \arrow[d] & T^{a+1}(B) \\
T'^a(B) \arrow[r, "T'^a(v)"] & T'^a(C) \arrow[r, "\delta'^a"] & T'^{a+1}(A) &
\end{tikzcd}$$

Dabei sind die horizontalen Morphismen durch die ∂-Funktoren T und T' gegeben, und die beiden linken vertikalen Morphismen kommen von f^a.

Wegen $T^{a+1}(u) = 0$ ist δ^a epimorph und wegen der Exaktheit der oberen Zeile gerade der Kokern von $T^a(v)$. Die Existenz der rechten vertikalen Morphismus ergibt sich damit aus der Universalitätseigenschaft des Kokerns δ^a (und der Kommutativität des linken Vierecks). Weil δ^a epimorph ist, ist dieser Morphismus durch die Kommutativität des rechten Vierecks eindeutig festgelegt. Es ist gerade der gesuchte Morphismus $f^{a+1}(A)$.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß dieser Morphismus nicht von der speziellen Wahl des Moprhismus u abhängt. Der Beweis dieser Aussage ist tatsächlich eine Variante des nachfolgenden Funktorialitätsbeweises.

Wir haben noch zu zeigen, daß sich die Morphismen $f^{a+1}(A)$ zu einem funktoriellen Morphismus $f^{a+1}: T^{a+1} \longrightarrow T'^{a+1}$ zusammensetzen. Das ergibt sich durch Betrachten eines Morphismus $A \longrightarrow A_1$ und eines zugehörigen kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "u_1"] & B_1 \arrow[r, "v_1"] & C_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit $T^{a+1}(u) = T^{a+1}(u_1) = 0$. Die Morphismen u und u_1 existieren, weil T^{a+1} annullierbar ist. Als linken vertikalen Morphismus wählen wir den vorgegebenen Morphismus $A \longrightarrow A_1$. Wir ersetzen B_1 durch die direkte Summe $B \oplus B_1$ und u_1 durch die Zusammensetzung mit der natürlichen Einbettung $B_1 \longrightarrow B \oplus B_1$. Als mittleren vertikalen Morphismus können wir dann die natürliche Einbettung $B \longrightarrow B \oplus B_1$ wählen. Der verbleibende Teil der beiden Zeilen ergibt sich dann aus der Forderung von deren Exaktheit. Insbesondere ist v gerade der Kokern von u. Der rechte vertikale Morphismus ergibt sich aus der Universalitätseigenschaft des Kokerns.

Die Funktorialität des Morphismus $f^{a+1}(A)$ in A erhalten wir, indem wir die oben betrachteten Diagramme für die beiden Zeilen des letzten Diagramms untersuchen. Die Unabhängigkeit von $f^{a+1}(A)$ von der speziellen Wahl des Morphismus u ergibt sich im wesentlichen aus der Betrachtung des Spezialfalls, daß $A \longrightarrow A_1$ der identische Morphismus von A ist.
QED.

1.5.10 Abgeleitete Funktoren und universelle ∂-Funktoren

Seien F: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein linksexakter Funktor von abelschen Kategorien und $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten.

Dann bilden die rechtsabgeleiteten Funktoren von F einen universellen ∂-Funktor

$$RF = (R^iF)_{i\geq 0}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \text{ mit } R^0F = F.$$

Umgekehrt ist jeder universelle ∂-Funktor $T = (T^i)_{i\geq 0}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ mit $T^0 = F$ isomorph zum ∂-Funktor der rechtsabgeleiteten Funktoren von F.
Beweis. Nach Definition bilden die rechtsabgeleiteten Funktoren von F einen ∂-Funktor. Für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ gibt es nach Voraussetzung einen Monomorphismus

$$u: A \longrightarrow B$$

mit B injektiv. Insbesondere ist $R^iF(B) =$ für jedes $i > 0$, also auch $R^iF(u) = 0$. Die R^iF sind also für $i > 0$ annullierend. Damit ist der ∂-Funktor der R^iF universell. Die verbleibenden Aussagen ergeben sich aus der Universalität dieses Funktors.
QED.

2. Die Kohomologie von Garben auf einem topologischen Raum

2.1 Welke Garben

2.1.1 Welke Garben

Seien X ein topologischer Raum und F eine Garbe auf X. Dann heißt F welk[5], wenn deren Restriktionen sämlich surjektiv sind.
Bemerkung
Welke Garben sind deshalb interessant, weil man sie, wie wir sehen werden, zur Berechnung der Garben-Kohomologie verwenden kann.

---

[5] Englisch und Französisch ‘flasque’, Russisch ‘вялый’.

2.1.2 Eigenschaften welker Garben

(i) Für welke Garben ist der globale Schnitt-Funktor exakt. Genauer, für jeden topologischen Raum X, jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ und jede kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf X,

$$0 \longrightarrow F' \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} F'' \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

mit F' welk ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, F') \xrightarrow{f_U} \Gamma(U, F) \xrightarrow{g_U} \Gamma(U, F'') \longrightarrow 0$$

exakt.

(ii) Für jede kurze exakte Sequenz abelscher Garben

$$0 \longrightarrow F' \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} F'' \longrightarrow 0$$

auf dem topologischen Raum X mit F' und F welk ist auch F'' welk.

(iii) Für jede stetige Abbildung $f: X \longrightarrow$ topologischer Räume und jede welke Garbe F auf X ist auch f_*F welk.

(iv) Diskontinuierliche Schnitte. Sei F eine Garbe auf dem topologischen Raum X. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ setzen wir

$$C^0(U, F) := \prod_{x\in U} F_x$$

Dies sind die Schnitte über U einer welken Garbe $C^0(F)$ auf X, die die Garbe F als Teilgarbe enthält. Sie heißt Garbe der diskontinuierlichen Schnitte von F. Jede Garbe ist somit eine Teilgarbe einer welken Garbe.

(v) Direkte Limites. Seien X ein noetherscher topologischer Raum und $(F_i)_{i\in I}$ ein filtrierendes direktes System von welken Garben auf X. Dann ist auch der direkte Limes

$$\varinjlim_{i\in I} F_i$$

eine welke Garbe auf X.

(zu (i)-(iv), vgl. Aufgabe II.1.16 im Buch von Hartshorne, zu (v), vgl. Hartshorne III.2.8, zur Forderung in (v) filtrierend zu sein, vgl. Schubert, Kategorien 14.6.6).

Beweis. Zu (i). Weil der Schnittfunktor linksexakt ist, reicht es zu zeigen, g_U ist surjektiv. Sei ein Schnitt von F'' über U vorgegeben.

$$s'' \in \Gamma(U, F'').$$

Betrachten wir die folgende Menge.

$$\mathcal{M} := \{ (V,s) \mid V \subseteq U, V \text{ offen}, s \in F(V) \text{ und } g(s) = s''|_V \}.$$

Es reicht zu zeigen, daß $\mathcal{M}$ ein Paar enthält, dessen erste Koordinate gleich U ist. Wir werden dazu das Zornsche Lemma auf $\mathcal{M}$ anwenden.

Die Menge $\mathcal{M}$ ist halbgeordnet bezüglich der Relation

$$(V, t) \le (W, u) \Leftrightarrow_{\text{def}} V \subseteq W \text{ und } u|_V = t \ (\Leftrightarrow u \text{ ist eine Fortsetzung von } t \text{ auf } W).$$

Für jede Kette $\{(V_i, s_i) \mid i\in I\}$ von Elementen aus $\mathcal{M}$ gibt es auf Grund des zweiten Garben-Axioms für F einen Schnitt $s \in F(\bigcup_{i\in I} U_i)$, welcher jeden der Schnitte s_i fortsetzt, d.h. die Kette besitzt eine obere Schranke in $\mathcal{M}$.
Schließlich ist die Menge $\mathcal{M}$ nicht leer: Für jedes $x \in U$ ist die zu (1) gehörige Sequenz der Halme in x exakt. Es gibt deshalb eine offene Umgebung U_x von x mit

$$x \in U_x \subseteq U, U_x \text{ offen}$$

und einen Schnitt $s(x) \in F(U_x)$, für welchen der Keim in x das Bild s''_x hat, d.h. s'' und g(s(x)) stimmen in einer Umgebung von x überein. Indem wir U_x geeignet verkleinern, erreichen wir, daß

$$g(s(x)) = s''|_{U_x}$$

gilt. Das Paar $(U_x, s(x))$ liegt für jedes $x \in U$ in der Menge $\mathcal{M}$ und insbesondere in $\mathcal{M}$ nicht leer.
Wir haben gezeigt, $\mathcal{M}$ genügt den Bedingungen des Zornschen Lemmas, enthält also ein maximales Elment. Sie jetzt

$$(V, s)$$

ein solches maximales Element. Es reicht zu zeigen, V = U. Angenommen, dies ist nicht der Fall, d.h. V ist eine echte Teilmenge von U. Dann gibt es ein

$$x \in U\text{-}V.$$

Die Bilder bei g der Schnitte s(x) und s haben dann dieselbe Einschränkung auf $V\cap U_x$ wie s'', stimmen also dort überein. Deshalb gilt

$$s(x)|_{V\cap U_x} - s|_{V\cap U_x} \in \mathrm{Ker}(g_{V\cap U_x}) = \mathrm{Im}(f_{V\cap U_x}).$$

Es gibt einen Schnitt $\widetilde{s}' \in F'(V\cap U_x)$ mit

$$s|_{V\cap U_x} = s(x)|_{V\cap U_x} + f(\widetilde{s}') \tag{2}$$

An dieser Stelle können wir jetzt die Voraussetzung verwenden, daß F' welk sein soll: es gibt einen Schnit

$$s' \in F'(U_x) \text{ mit } s'|_{V\cap U_x} = \widetilde{s}'.$$

Die Identität (2) läßt sich deshalb in der Gestalt

$$s|_{V\cap U_x} = (s(x) + f(s'))|_{V\cap U_x}$$

schreiben. Mit anderen Worten, die Schnitte s und s(x)+ f(s') stimmen auf dem gemeinsamen Teil ihrer Definitionsbereiche überein. Es gibt damit einen Schntt

$$\widetilde{s} \in F(V \cup U_x) \text{ mit } \widetilde{s}|_V = s \text{ und } \widetilde{s}|_{U_x} = s(x) + f(s').$$

Das Bild dieses Schntts bei g hat die Einschränkungen

$$g(\widetilde{s})|_V = g(\widetilde{s}|_V) = g(s) = s''|_V$$

$$g(\widetilde{s})|_{U_x} = g(\widetilde{s}|_{U_x}) = g(s(x)+f(s')) = g(s(x))+g(f(s')) = s''|_{U_x} + 0 = s''|_{U_x}$$

Die Schnitte $g(\tilde{s})$ und s" von F" stimmen auf $V \bigcup U_x$ überein. Wir haben gezeigt, das Paar

$$(V \bigcup U_x, \tilde{s}) \text{ liegt in } \mathcal{M}.$$

Nach Konstruktion ist $\tilde{s}$ eine Fortsetzung von s. Weil (V, s) maximal in $\mathcal{M}$ ist, kann eine echte Fortsetzung nicht existieren, d.h. es ist

$$V = V \bigcup U_x.$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Wahl des Punktes x, der nicht in V aber in U_x liegt. Dieser Widerspruch zeigt, daß U = V gilt, d.h. s ist ein Urbild von s" in F(U).

<u>Zu (ii)</u>. Seien U und V offene Teilmengen von X mit $U \subseteq V$. Betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & F'(V) & \xrightarrow{f_V} & F(V) & \xrightarrow{g_V} & F''(V) & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & F'(U) & \xrightarrow{f_U} & F(U) & \xrightarrow{g_U} & F''(U) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

abelscher Gruppen und Gruppen-Homomorphismen, dessen vertikale Pfeile die entsprechenden Garben-Restriktionen sind. Die Zeilen dieses Diagramms sind, weil F' welk ist, nach (i) exakt. Weil F' und F welk sind, sind die beiden Restriktionen links surjektiv. Dann ist aber auch die rechte Restriktion als Zusammensetzung von Surjektionen eine Surjektion. Wir haben gezeigt, F" ist welk.

<u>Zu (iii)</u>. Die Aussage ist trivial, da die Restriktionen von f_*F spezielle Restriktionen von F sind.

<u>Zu (iv)</u>. Die Elemente von $C^0(U, F)$ sind Familien $(s_x)_{x\in U}$ von Keimen $s_x \in F_x$. Man kann sie auch als Funktionen

$$s: U \longrightarrow \vee_{x\in X} F_x =: E \text{ , } x \mapsto s_x$$

auf U mit Werten in der disjunkten Vereinigung E der Halme von F ansehen mit

$$s(x) \in F_x,$$

d.h. als nicht notwendig stetige Schnitte in den Etal-Raum

$$\pi: E \longrightarrow X$$

der Garbe F. Damit erhalten wir eine Garbe $C^0(F)$, deren Schnitte gewöhnliche Abbildungen und deren Restriktionsabbildungen gewöhnliche Einschränkungen gewöhnlicher Abbildungen sind.

Für jede offene Menge $U \subseteq X$ ist die Abbildung

$$F(U) \longrightarrow C^0(U, F), s \mapsto (s_x)_{x\in U},$$

die jeden Schnitt von F auf die Familie seiner Keime abbildet, wohldefiniert und injektiv. Die Gesamtheit dieser Abbildungen bildet einen injektiven Garben-Morphismus

$$F \longrightarrow C^0(F).$$

Die Garbe F wird auf diese Weise zu einer Teilgarbe von $C^0(F)$.

Man kann die Situation auch wie folgt beschreiben: F ist die Garbe der stetigen Schnitte in den Etalraum von F, und $C^0(F)$ ist die Garbe aller nicht-notwendig stetigen Schnitte in diesen Etalraum. Die Garbe F ist so in natürlicher Weise eine Teilgarbe von $C^0(F)$.

Zu (v). (Hartshorne Lemma III.2.8). Für jedes $i \in I$ und jedes Paar offener Mengen U und V mit

$$V \subseteq U$$

ist die Restriktion

$$F_i(U) \longrightarrow F_i(V). \tag{3}$$

surjektiv. Wir gehen zum direkten Limes über und erhalten Abbildungen

$$\varinjlim_{i\in I} F_i(U) \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} F_i(V). \tag{4}$$

Zeigen wir, diese Abbildungen sind surjektiv. Für vorgegebenes

$$\sigma \in \varinjlim_{i\in I} F_i(V)$$

gibt es ein $i \in I$ und ein $s \in F_i(V)$, dessen Bild im direkten Limes gerade σ ist. Weil F_i welk ist, ist s die Einschränkung eines Schnittes t über U,

$$s = t|_V \text{ mit } t \in F_i(U).$$

Betrachten wir das Bild τ von t im direkten Limes und dessen Bild bei (4). Dieses Bild wird aber repräsentiert durch das Bild von t bei (3). Es ist also gerade σ. Wir haben gezeigt, (4) ist surjektiv.

Wir haben damit gezeigt, daß die Prägarbe auf X,

$$U \mapsto \varinjlim_{i\in I} F_i(U) \tag{5}$$

welk ist.

Zum Beweis der Behauptung reicht es somit zu zeigen, im Fall eines noetherschen topologischen Raums X ist dies bereits eine Garbe (vgl. Hartshorne, Übung II.1.11). Damit ist der Beweis von Eigenschaft (v) auf die nachfolgende Aussage zurückgeführt.
QED.

Der direkte Limes von Garben auf noetherschen topologischen Räumen

Seien X ein noetherscher topologischer Raum und $(F_i)_{i\in I}$ ein filtrierendes direktes System von Garben auf X. Dann ist die Prägarbe auf X,

$$U \mapsto \varinjlim_{i\in I} F_i(U)$$

eine Garbe. Insbesondere gilt

$$\Gamma(U, \varinjlim_{i\in I} F_i) = \varinjlim_{i\in I} \Gamma(U, F_i)$$

für jede offene Teilmenge U von X.

Beweis. Wir fixieren eine offene Menge $U \subseteq X$, eine offene Überdeckung

$$U = \bigcup U_\alpha$$

und zwei Schnitte

$$\sigma, \tau \in \varinjlim_{i\in I} F_i(U) \text{ mit } \sigma|_{U_\alpha} = \tau|_{U_\alpha} \text{ für jedes } \alpha.$$

Wir haben zu zeigen, $\sigma = \tau$. Weil X noethersch ist, können wir annehmen die Überdeckung ist endlich, sagen wir

$$U = U_{\alpha_1} \bigcup \ldots \bigcup U_{\alpha_r}$$

Die Schnitte σ und τ kommen von Schnitten der Garben F_i. Weil das System der F_i filtrierend ist, gibt es ein $i \in I$ und Schnitte $s,\ t \in F_i(U)$, welche die Schnitte σ bzw. τ repräsentieren. Wegen $\sigma|_{U_\alpha} = \tau|_{U_\alpha}$ kann man für jedes feste α den Index i so erhöhen, daß gilt

$$s|_{U_\alpha} = t|_{U_\alpha} .$$

Läßt man α die endlich vielen α_ν durchlaufen, so kann man erreichen, daß diese Identitäten gleichzeitig für diese endlich vielen α gilt. Die zugehörigen U_α bilden aber eine Überdeckung von U. Auf Grund des ersten Garbenaxioms ist deshalb $s = t$, also auch $\sigma = \tau$. Wir haben gezeigt, die Prägarbe (5) genügt dem ersten Garben-Axiom.
Überprüfen wir das zweite Garben-Axiom. Wie bisher können wir annehen, daß die Überdeckung aus den endlich vielen Mengen U_{α_ν} besteht. Für jedes ν sei ein Schnitt

$$\sigma_\nu \in \varinjlim_{i\in I} F_i(U_{\alpha_\nu})$$

gegeben, wobei

$$\sigma_\nu|_{U_{\alpha_\nu} \bigcap U_{\alpha_\mu}} = \sigma_\mu|_{U_{\alpha_\nu} \bigcap U_{\alpha_\mu}} \tag{1}$$

für je zwei μ und ν gelte. Jedes σ_ν wird repräsentiert durch einen Schnitt über U_{α_ν} eines F_j. Weil das System der F_j filtrierend ist und die Anzahl der σ_ν können wir durch Vergrößern der Indizes erreichen, daß es für alle Schnitte ein gemeinsames j gibt und außerdem noch j = i gilt. Für jedes ν gibt es also einen Schnitt

$$s_\nu \in F_i(U_{\alpha_\nu}),$$

welcher den Schnitt σ_ν repräsentiert. Wegen (1) sind die Bilder von

$$s_\nu|_{U_{\alpha_\nu} \bigcap U_{\alpha_\mu}} \text{ und } s_\mu|_{U_{\alpha_\nu} \bigcap U_{\alpha_\mu}} \text{ in } F_j(U_{\alpha_\nu} \bigcap U_{\alpha_\mu})$$

für ein hinreichend großes j wohldefiniert[6] und gleich. Weil die Anzahl der ν und μ endlich ist und das System der Garben filtrierend, können wir für alle ν und μ ein gemeinsames j finden und durch Vergrößern von i auch noch erreichen, daß j = i gilt, d.h. es ist

$$s_\nu|_{U_{\alpha_\nu} \bigcap U_{\alpha_\mu}} \text{ und } s_\mu|_{U_{\alpha_\nu} \bigcap U_{\alpha_\mu}} \text{ in } F_i(U_{\alpha_\nu} \bigcap U_{\alpha_\mu})$$

---

[6] weil das System der Garben filtrierend ist.

Dann gibt es aber ein $s \in F_i(U)$ mit $s|_{U_\nu} = s_\nu$ für alle ν. Bezeichne σ das natürliche Bild von s in

$$\varinjlim_{i\in I} F_i(U).$$

Nach Konstruktion gilt dann

$$\begin{aligned}\sigma|_{U_\nu} &= \text{natürliches Bild von } s|_{U_\nu} \text{ in } \varinjlim_{i\in I} F_i(U_{\alpha_\nu}) \\ &= \text{natürliches Bild von } s_\nu \text{ in } \varinjlim_{i\in I} F_i(U_{\alpha_\nu}) \\ &= \sigma_\nu\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, die Prägarbe

$$U \mapsto \varinjlim_{i\in I} F_i(U)$$

ist eine Garbe.
QED.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß injektive Garben welk sind. Dazu benötigen wir die Fortsetzung einer Garbe durch die 0.

2.1.3 Exaktheit des direkten Limes für Garben abelscher Gruppen

Seien X ein topologischer Raum, I eine filterend halbgeordnete Menge und

$$\varinjlim_{I} Sh_X(Ab)$$

die Kategorie der direkten Systeme abelscher Garben über I. Dann ist der Übergang zum direkten Limes,

$$\varinjlim_{I} : \varinjlim_{I} Sh_X(Ab) \longrightarrow Sh_X(Ab),\ (F_i)_{i\in I} \mapsto \varinjlim_{i\in I} F_i\ ,$$

ein exakter Funktor.
Beweis. Wir betrachten eine direktes System von kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow F'_i \longrightarrow F_i \longrightarrow F''_i \longrightarrow 0,\ i \in I,$$

von abelschen Garben auf X. Zu zeigen ist daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} F'_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} F_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} F''_i \longrightarrow 0.$$

exakt ist, d.h. für jeden Punkt $x \in X$ ist die Sequenz der Halme exakt,

$$0 \longrightarrow (\varinjlim_{i\in I} F'_i)_x \longrightarrow (\varinjlim_{i\in I} F_i)_x \longrightarrow (\varinjlim_{i\in I} F''_i)_x \longrightarrow 0.$$

exakt. Da der Übergang zum Halm in x ein direkter Limes ist (und weil Limites miteinander kommutieren), hat diese Sequenz die Gestalt

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} (F'_i)_x \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} (F_i)_x \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} (F''_i)_x \longrightarrow 0.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es deshalb zu zeigen, daß filtrierende direkte Limites auf den abelschen Gruppen exakt sind, d.h. für jedes direkte System über I von exakte Sequenzen abelscher Gruppen

$$A'_i \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{g_i} A''_i,\ i \in I,$$

ist die Sequenz

$$\varinjlim_{i\in I} A'_i \xrightarrow{f} \varinjlim_{i\in I} A_i \xrightarrow{g} \varinjlim_{i\in I} A''_i,\ i \in I,$$

Weil $\varinjlim_{i\in I}$ ein additiver Funktor ist, gilt $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$. Wir haben die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei also

$$\sigma \in \mathrm{Ker}(g).$$

Wir wählen ein $i \in I$ und ein $s\in A_i$ derart, daß das natürliche Bild von s im direkten Limes gleich σ ist,

$$s \text{ repräsentiert } \sigma.$$

Weil σ im Kern von g liegt, repräsentiert $g_i(s)$ das Nullelement im direkten Limes. Durch Vergrößern von i erreichen wir, daß sogar

$$g_i(s) = 0$$

gilt. Dann gibt es aber ein $s'\in A_i$ mit

$$f_i(s') = s.$$

Das natürliche Bild von s' im direkte Limes ist damit ein Element $\sigma' \in \varinjlim_{i\in I} A'_i$ mit

$f(\sigma') = \sigma$.

Wir haben gezeigt, daß $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ gilt, d.h. der direkte Limes über I ist ein exakter Funktor.

QED.

2.1.4 Fortsetzung[7] einer Garbe durch 0

Seien X ein topologischer Raum, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge

$$j: U \hookrightarrow X$$

die zugehörige offene Einbettung und F eine abelsche Garbe auf U. In dieser Situation bezeichne

$$j_!F$$

die <u>Fortsetzung von F durch Null</u>, d.h. die Garbe auf X, welche assoziiert ist zur Prägarbe auf X,

$$P: V \mapsto \begin{cases} F(V) \text{ falls } V \subseteq U \\ 0 \qquad \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Konstruktion erhalten wir für die Halme

$$(j_!F)_x = \begin{cases} F_x \text{ falls } x \in U \\ 0 \qquad \text{sonst} \end{cases}$$

(weil Prägarbe und assoziierte Garbe dieselben Halme haben). Aus dieser Formel ergibt sich die Existenz einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow j_!(F|_U) \longrightarrow F \longrightarrow i_*i^{-1}F \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

für jede abelsche Garbe F auf X, wobei

$$i: X - U \hookrightarrow X$$

die abgeschlossene Einbettung des Komplements von U bezeichnet (vgl. Hartshorne, Algebraic geometry, Exercise II.1.19).

[7] Extension by zero.

Für jede Garbe F auf U und jede Garbe G auf X hat man weiter einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_X}(j_!F, G) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_U}(F, j^*G)$$

d.h. der Funktor $j_!$ ist linksadjungiert zum inversen Bild j^*.

Beweis. Mit den obigen Bezeichnungen kann man die linke Hom-Menge identifizieren mit den Prägarben-Morphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}_X}(P, G).$$

Ein Element dieser Hom-Menge ist gegeben durch eine Familie von Morphismen

$$P(V) \longrightarrow G(V)$$

die zusammen mit den Restriktionen kommutative Vierecke bilden, wobei V die offenen Mengen von X durch läuft. Falls V nicht in U liegt, sind dies Nullabbildungen. Man kann sich also auf offene Mengen $V \subseteq U$ beschränken, d.h. das Element ist gegeben durch Morphismen

$$F(V) \longrightarrow G(V) \text{ mit } V \subseteq U.$$

Solche Morphismen definieren aber gerade Elemente von

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_U}(F, G|_U) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_U}(F, j^*G).$$

QED.

2.1.5 Beispiel: die injektiven $\mathcal{O}_X$-Moduln sind welk

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{M}$ ein injektiver $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist $\mathcal{M}$ welk.

Beweis. Sei $U \subseteq X$ eine offene Menge und bezeichne

$$j: U \longrightarrow X$$

die natürlichen Einbettung. Wir definieren

$$\mathcal{O}_U := j_!(\mathcal{O}_X|_U).$$

Für je zwei offene Teilmengen U, V von X mit

$$V \subseteq U$$

ist dann $\mathcal{O}_V$ eine Teilgarbe von $\mathcal{O}_U$ (und beide sind Teilgarben von $\mathcal{O}_X$, vgl. die exakte Sequenz (1) nach der Definition von $j_!$). Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_U \longrightarrow \mathcal{O}_U/\mathcal{O}_V \longrightarrow 0$$

erhalten wir durch Anwenden des Funktors $\mathrm{Hom}(?, \mathcal{M})$, welcher exakt ist, weil $\mathcal{M}$ injektiv sein soll, eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_U, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_V, \mathcal{M}) \longrightarrow 0.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_U, \mathcal{M}) &= \mathrm{Hom}(j_!(\mathcal{O}_X|_U), \mathcal{M}) \\ &= \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X|_U, j^*\mathcal{M}) \\ &= \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{M}|_U) \\ &= \mathcal{M}(U). \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_V, \mathcal{M}) = \mathcal{M}(V).$$

Wir erhalten also eine exakte Sequenz

$$\mathcal{M}(U) \longrightarrow \mathcal{M}(V) \longrightarrow 0.$$

Die Restriktionen von $\mathcal{M}$ sind also surjektiv, d.h. $\mathcal{M}$ ist welk.
QED.

2.1.6 Die Kohomologie welker Garben

Seien X ein topologischer Raum und F eine welke Garbe auf X. Dann gilt

$$H^i(X, F) = 0 \text{ für jedes } i > 0.$$

Mit anderen Worten, die welken Garben sind azyklisch für den Funktor

$$\Gamma(X, ?\ ).$$

Insbesondere kann man die Auflösungen durch welke Garben zur Berechnung der Garbenkohomologie verwenden.
Beweis (vgl. Hartshorne Proposition III.2.5). Wir betten die Garbe F in eine injektive Garbe I ein und betrachten die zugehörige kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow I \longrightarrow G \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

mit G = Koker(F $\longrightarrow$ I). Nach Voraussetzung ist F welk. Die Garbe I ist als injektive Garbe ebenfalls welk. Dann ist aber auch G (vgl. die Eigenschaften welker Garben) eine welke Garbe.
Weil F welk ist, erhalten wir durch Anwenden des globalen Schnittfunktors eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,F) \longrightarrow \Gamma(X,I) \longrightarrow \Gamma(X,G) \longrightarrow 0,$$

d.h.

$$0 \longrightarrow H^0(X,F) \longrightarrow H^0(X,I) \longrightarrow H^0(X,G) \longrightarrow 0,$$

Durch Vergleich mit der langen Kohomologie Sequenz zu (1) sehen wir, der erste Zusammenhangshomomorphismus muß Null sein. Wir erhalten exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow H^1(X,F) \longrightarrow H^1(X,I) \longrightarrow H^1(X,G) \longrightarrow \ldots \qquad (2)$$

und

$$\ldots \longrightarrow H^i(X,I) \longrightarrow H^i(X,G) \longrightarrow H^{i+1}(X,F) \longrightarrow H^{i+1}(X,I) \longrightarrow \ldots \qquad (3)$$

Weil I injektiv ist, gilt

$$H^i(X, I) = 0 \text{ für } i > 0$$

Wegen (2) ist damit

$$H^1(X,F) = 0,$$

und zusammen mit (3) folgt

$$H^{i+1}(X,F) \cong H^i(X,G) \text{ für } i > 0.$$

Nun ist aber auch, wie wir gesehen haben, auch G welk. Induktiv erhalten wir

$$H^i(X,F) = 0 \text{ für } i > 0.$$

QED.

2.1.7 Vergleich der Kohomologie in $Sh_X(Ab)$ mit der in $\mathcal{O}_X$-Mod

Sei (X, $\mathcal{O}_X$) ein (lokal) geringter Raum. Dann sind die abgeleiteten Funktoren der globalen Schnittfunktoren

$$\Gamma(X, ?\ ):\ Sh_X(Ab) \longrightarrow Ab$$

und

$$\Gamma(X, ?\ ):\ \mathcal{O}_X\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod}$$

mit

$$A := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

in natürlicher Weise isomorph. Insbesondere besitzen die Kohomologie-Gruppen

$$H^i(X, F)$$

für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul F die Struktur eines A-Moduls. Das gilt insbesondere für

$$X = \operatorname{Spec} A.$$

Beweis. Zur Berechnung der abgeleiteten Funktoren von

$$\Gamma(X, ?): \mathcal{O}_X\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)\text{-Mod}$$

verwenden wir injektive Auflösungen in $\mathcal{O}_X$-Mod. Nun sind injektive Garben welk und welke Garben sind azyklisch bezüglich des 'gewöhnlichen' globalen Schnittfunktors

$$\Gamma(X, ?): Sh_X(Ab) \longrightarrow Ab.$$

Die in $\mathcal{O}_X$-Mod berechnete Kohomologie stimmt also mit der 'gewöhnlichen' überein.
QED.

2.2 Verschwindungssatz von Grothendieck

2.2.1 Verhalten der Kohomologie bei direkten Limites

Seien X ein noeterscher topologischer Raum und $(F_i)_{i\in I}$ ein filtrierendes direktes System von Garben abelscher Gruppen. Dann gilt für jedes ganze $n \ge 0$

$$\varinjlim_{i\in I} H^n(X, F_i) \cong H^n(X, \varinjlim_{i\in I} F_i).$$

Beweis. Für jede Garbe F von abelschen Gruppen haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow C^0(F),$$

wobei $C^0(F)$ die Garbe der diskontinuierlichen Schnitte von F bezeichne. Durch Übergang zu Kokern und Anwenden des Funktors C^0 erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow C^0(F) \longrightarrow C^1(F)$$

von abelschen Garben. Durch Wiederholen dieses Vorgangs entsteht eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow C^0(F) \longrightarrow C^1(F) \longrightarrow C^2(F) \longrightarrow \ldots$$

wobei die Garben $C^i(F)$ welk sind, d.h. wir erhalten eine welke Auflösung von F.
Wie schon bemerkt, hängt $C^0(F)$ funktoriell von F ab. Dasselbe gilt für den Monomorphismus $F \longrightarrow C^0(F)$ und damit für die gesamte welke Auflösung

$$C^*(F): 0 \longrightarrow C^0(F) \longrightarrow C^1(F) \longrightarrow C^2(F) \longrightarrow \ldots$$

von F. Insbesondere gilt

$$H^n(X, F) = H^n(\Gamma(X, C^*(F)))$$

Speziell für $F = F_i$ und durch Übergang zum direkten Limes erhalten wir

$$\varinjlim_{i\in I} H^n(X, F_i) = \varinjlim_{i\in I} H^n(\Gamma(X, C^*(F_i)))$$

Man beachte, das gegebene direkte System der F_i ein direktes System

$$(C^*(F_i))_{i\in I}$$

von Komplexen welker Garben.

Weil der direkte Limes exakt ist auf der Kategorie der abelschen Gruppen, kommutiert er mit dem Kohomologie-Funktor, d.h. es gilt

$$\varinjlim_{i\in I} H^n(X, F_i) = H^n(\varinjlim_{i\in I} \Gamma(X, C^*(F_i))) \qquad (1)$$

Weil X ein noetherscher topologischer Raum ist, ist der direkte Prägarben-Limes

$$U \mapsto \varinjlim_{i\in I} \Gamma(U, F_i)$$

eines direkten System gleich dem Garben-Limes (Hartshorne, Überung II.1.11). Insbesondere gilt

$$\Gamma(X, \varinjlim_{i\in I} F_i) = \varinjlim_{i\in I} \Gamma(X, F_i).$$

Wir wenden dies auf (1) an und erhalten

$$\varinjlim_{i\in I} H^n(X, F_i) = H^n(\Gamma(X, \varinjlim_{i\in I} C^*(F_i))) \qquad (2)$$

Da der Übergang zum direken Limes exakt ist, erhalten wir weiter eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} F_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} C^0(F_i) \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} C^1(F_i) \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} C^2(F_i) \longrightarrow \ldots$$

Wie wir gesehen haben, sind direkte filtrierende Limites welker Garben auf einem noetherschen topologischen Raum welk. Bei der obigen exakten Sequenz handelt es sich also um eine welke Auflösung

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} F_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} C^*(F_i)$$

der Garbe

$$\varinjlim_{i\in I} F_i .$$

Damit gilt

$$H^n(X, \varinjlim_{i\in I} F_i) = H^n(\Gamma(X, \varinjlim_{i\in I} C^*(F_i))) \qquad (3).$$

Durch Vergleich von (2) und (3) erhalten wir die Behauptung.
QED.
Alternativer Beweis (unter Verwendung der ∂-Funktoren, vgl. Hartshorne III.2.9).
Für jedes $i \in I$ haben wir einen natürlichen Morphismus

$$F_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} F_i$$

und damit einen Homomorphismus

$$H^n(X, F_i) \longrightarrow H^n(X, \varinjlim_{i\in I} F_i).$$

Auf Grund der Universalitätseigenschaft des direkten Limes erhalten wir einen Homomorphismus

$$\varinjlim_{i\in I} H^n(X, F_i) \longrightarrow H^n(X, \varinjlim_{i\in I} F_i). \qquad (4)$$

Wir haben zu zeigen, daß dies ein Isomorphismus ist.
<u>1. Schritt</u>: der Fall n = 0 .
Für n = 0 bekommt der Homomorphismus die Gestalt

$$\varinjlim_{i\in I} \Gamma(X, F_i) \longrightarrow \Gamma(X, \varinjlim_{i\in I} F_i).$$

Dies ist aber ein Isomorphismus, weil X ein noetherscher topologischer Raum ist, also der direkte Limes

$$U \mapsto \varinjlim_{i\in I} \Gamma(U, F_i)$$

in der Kategorie der Prägarben bereits der Garben-Limes ist $\varinjlim_{i\in I} F_i$ (vgl. Hartshorne, Übung II.1.11).

Zum Beweis der Aussage, daß (4) ein Isomorphismus für beliebiges n ist, reicht es zu zeigen, auf beiden Seiten von (4) stehen universelle ∂-Funktoren.
<u>2. Schritt</u>. Auf beiden Seiten von (4) stehen ∂-Funktoren
Wir betrachten die direkten Systeme abelscher Garben auf X über I. Diese bilden eine abelsche Kategorie

$$\varinjlim_{I} Sh_X(Ab)$$

Die exakten Sequenzen in dieser Kategorie sind direkte Systeme kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow F'_i \longrightarrow F_i \longrightarrow F''_i \longrightarrow 0, i \in I, \qquad (5)$$

abelscher Garben auf X.

Wir betrachten die zugehörige exakte lange Kohomologie-Sequenz:

$$\ldots \longrightarrow H^n(X, F'_i) \longrightarrow H^n(X, F_i) \longrightarrow H^n(X, F''_i) \longrightarrow \ldots$$

Durch Anwenden des exakten Funktors $\varinjlim_{i\in I}$ erhalen wir eine exakte Sequez

$$\ldots \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} H^n(X, F'_i) \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} H^n(X, F_i) \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} H^n(X, F''_i) \longrightarrow \ldots$$

abelscher Gruppen. Damit ist gezeigt, auf der rechten Seite von (4) steht ein ∂-Funktor.
Indem wir auf (4) den direkten Limes anwenden, erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} F'_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} F_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} F''_i \longrightarrow 0$$

von Garben abelscher Gruppen auf X. Die zugehörige exakte lange Kohomologie-Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H^n(X, \varinjlim_{i\in I} F'_i) \longrightarrow H^n(X, \varinjlim_{i\in I} F_i) \longrightarrow H^n(X, \varinjlim_{i\in I} F''_i) \longrightarrow \ldots$$

zeigt, auf der rechten Seite von (4) steht ein ∂-Funktor.

Wir haben noch die Universalität der ∂-Funktoren auf den beiden Seiten von (4) zu beweisen.
<u>3. Schritt</u>. Die ∂-Funktoren auf den beiden Seiten von (4) sind universell.
Sei $(F_i)_{i\in I}$ ein direktes System von abelschen Garben auf X. Die natürlichen Einbettungen

$$F_i \longrightarrow C^0(F_i)$$

setzen sich zusammen zu einem Monommorphismus von direkten Systemen abelscher Gruppen

$$(F_i)_{i\in I} \hookrightarrow (C^0(F_i))_{i\in I}$$

Weil die Garben $C^0(F_i)$ welk sind, gilt

$$H^n(X, C^0(F_i)) = 0 \text{ für } n > 0,$$

also

$$\varinjlim_{i\in I} H^n(X, C^0(F_i)) = 0 \text{ für } n > 0,$$

Wir haben gezeigt, die Funktoren auf der linken Seite von (4) sind für $n > 0$ annullierbar. Sie bilden also einen universellen ∂-Funktor.

Weil die Garben $C^0(F_i)$ welk sind, gilt dasselbe für deren direkten Limes, d.h. es ist

$$H^n(X, \varinjlim_{i\in I} C^0(F_i)) = 0 \text{ für } n > 0.$$

Damit sind auch die Funktoren auf der rechten Seite von (4) annullierber, d.h. auch sie bilden einen universellen ∂-Funktor.
QED.

2.2.2 Kohomologie direkter Bilder entlang abgeschlossener Einbettungen

Seien X ein topologischer Raum und $j:Y \hookrightarrow X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt für jede abelsche Garbe F auf Y und jedes $n \geq 0$:

$$H^n(Y, F) = H^n(X, j_*F).$$

Beweis. Wir betrachten eine welke Auflösung von F auf Y, sagen wir

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow C^*(F).$$

Dann ist

$$0 \longrightarrow j_*F \longrightarrow j_*C^*(F) \qquad (1)$$

eine welke Auflösung von j_*F auf X, denn:

1. Direkte Bilder welker Garben sind welk.
2. Für $x \in X - Y$ sind die Halme der Sequenz (1) lauter triviale Gruppen. Sie bilden also eine exakte Sequenz.
3. Für $x \in Y$ gilt $(j_*F)_x = \varinjlim_{x\in U} F(Y\cap U) = F_x$, und die analoge Identität

   besteht auch für die $C^n(F)$ anstelle von F.

Damit gilt

$$H^n(X, j_*F) = H^n(\Gamma(X, j_*C^*(F))) = H^n(\Gamma(Y, C^*(F))) = H^n(Y, F).$$

QED.

2.2.3 Schreibweise

Wenn wir eine Garbe F auf einem abgeschlossenen Unterraum $Y \hookrightarrow X$ so behandeln, als wäre sie eine Garbe auf X, so meinen wir damit deren direktes Bild auf X (wobei wir den Funktor j_* oft weglassen werden).

2.2.4 Verschwindungssatz von Grothendieck

Sei X ein noetherscher topologischer Raum der Dimension

$$\dim X = n.$$

Dann gilt

$$H^i(X, F) = 0$$
für jede abelsche Garbe F auf X und jedes $i > n$.
Beweis. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. Für jede abgeschlossene Teilmenge $Y \subseteq X$ setzen wir
$$F_Y := j_*(F|_Y),$$
wobei $j: Y \hookrightarrow X$ die natürliche Einbettung bezeichne und $F|_Y := j^{-1}F$ sei. Analog setzen wir für jede offene $U \subseteq X$ Teilmenge
$$F_U := i_!(F|_U),$$
wobei $i: U \hookrightarrow X$ die natürliche Einbettung bezeichne.
Für Y abgechlossen in X haben wir insbesondere eine exakte Sequenz
$$0 \longrightarrow F_U \longrightarrow F \longrightarrow F_Y \longrightarrow 0 \text{ mit } Y := X\text{-}U. \qquad (1)$$
Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach der Dimension n von X.
<u>1. Schritt</u>. Reduktion auf den Fall X irreduzibel.
Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Anzahl der irreduziblen Komponenten von X (und nehmen an, die Behauptung gilt, wenn diese Anzahl gleich 1 ist). Sei
$$Y \subseteq X$$
eine irreduzible Komponente von X. Auf Grund der exakten Sequenz (1) und der zugehörigen langen Kohomologie-Sequenz reicht es zu zeigen,
$$H^i(X, F_U) = 0 \text{ und } H^i(X, F_Y) = 0 \text{ für } i > n.$$
Die zweite Identität besteht, weil Y irreduzibel ist (und wegen 2.1.9). Zum Beweis der ersten Identität betrachten wir die Garbe
$$(F_U)_{\overline{U}}$$
Weil $\overline{U}$ abgeschlossen ist, ist dies auf Grund der exakten Sequenz (1) eine Faktorgarbe von F_U. Für deren Halme erhalten wir
$$((F_U)_{\overline{U}})_x = (F_U)_x \qquad \text{für } x \in \overline{U}$$
$$((F_U)_{\overline{U}})_x = 0 = (F_U)_x \qquad \text{für } x \notin \overline{U}$$
Mit anderen Worten, es gilt $(F_U)_{\overline{U}} = F_U$, also
$$H^i(X, F_U) = H^i(X, (F_U)_{\overline{U}}).$$
Nach 2.1.9 können wir die rechte Seite als Kohomologie einer Garbe auf $\overline{U}$ auffassen. Da $\overline{U}$ weniger Komponenten als X besitzt, folgt die Behauptung des ersten Schritt auf Grund der Induktionsvoraussetzung.
<u>2. Schritt</u>. Der Fall, daß X irreduzibel von der Dimension 0 ist.[8]
Ist x der einzige Punkt von X so gilt nach Definition des Halms einer Garbe
$$\Gamma(X, F) = F_x .$$
Insbesondere ist der globale Schnittfunktor auf X exakt. Aus der Formel für die Berechung der Kohomologie mit Hilfe einer injektiven Auflösung
$$0 \longrightarrow F \longrightarrow I^*$$
von F erhalten wir
$$H^i(X, F) = H^i(\Gamma(X,I^*)) = 0 \text{ für } i > n = 0.$$
Die Behauptung des zweiten Schnitts ist damit bewiesen.

[8] Weil X von der Dimension 0 ist, sind alle Punkte abgeschlossen. Die Anzahl der Punkte von X ist endlich, weil X noethersch ist. Weil X irreduzibel ist, ist besteht X als Menge aus nur einem Punkt.

<u>3. Schritt</u>. Reduktion auf den Fall, daß F eine Teilgarbe einer Garbe der Gestalt $\mathbb{Z}_U$ ist. Wir nehmen an, X ist irreduzibel von der Dimension n > 0. Bezeichne

$$S := \vee_{U \subseteq X \text{ offen}} F(U)$$

die disjunkte Vereinigung aller Schnittmengen von F (d.h. S ist die Menge aller Schnitte von F). Weiter sei

$$T$$

die Menge aller endlichen Teilmengen von S. Für jedes $\alpha \in T$ sei weiter

$$F_\alpha$$

die von den Schnitten von α erzeugte Teilgarbe von F. Mit anderen Worten, für jede offene Teilmenge $V \subseteq X$ betrachtet man alle Schnitte von α, deren Definitionsbereich die Mengen V enthält, schränkt diese Schnitte auf V ein und nimmt die von diesen Einschränkungen erzeugte Untergruppe von F(V). Auf diese Weise ist eine Teil-Prägarbe von F definiert. Das natürliche Bild der zugehörigen Garbe in F bezeichnen wir mit F_α. Der Halm in $x \in X$ von F_α wird als Untergruppe von F_x erzeugt von den Keimen der Schnitte von α, die in einer Umgebung von x definiert sind. Insbesondere gibt es einen Epimorphismus abelscher Garben

$$\oplus_{s\in\alpha} \mathbb{Z}_{U_s} \twoheadrightarrow F_\alpha$$

wobei U_s den Definitoinsbereich des Schnittes s bezeichne der Schnitt $1 \in \mathbb{Z}_{U_s}(U_s)$ des s-ten direkten Summanden in den Schnitt $s \in F_\alpha(U_s)$ abgebildet wird.[9]

Nach Konstruktion bilden die F_α ein direktes System, und es gilt[10]

$$F = \varinjlim_\alpha F_\alpha ,$$

also, weil X noethersch ist,

$$H^i(X, F) = \varinjlim_\alpha H^i(X, F_\alpha).$$

Es reicht zu zeigen

$$H^i(X, F_\alpha) = 0 \text{ für } i > n \text{ und jedes } \alpha\in T.$$

Für jedes $\alpha\in T$ und jede Teilmenge α' von α betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F_{\alpha'} \longrightarrow F_\alpha \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

Dabei wird die Garbe $G = F_\alpha/F_{\alpha'}$ von $\#(\alpha-\alpha')$ Schnitten erzeugt. Durch Betrachten der zugehörigen langen Kohomologie-Sequenz reduzieren wir den Beweis der Behauptung auf den Fall, daß die Garbe F von nur einem Schnitt erzeugt wird, d.h. auf den Fall, daß es eine offene Menge $U \subseteq X$ und eine exakte Sequenz

$$\mathbb{Z}_U \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

gibt. Bezeichne $\mathcal{R}$ den Kern des linken Morphismus, und betrachten wir die kurze exakte Sequenz

---

[9] Zum Nachweis der Epimorphie betrachte man die induzierten Abbildungen auf den Halmen.

[10] Bereits der Prägarben-Limes der F_α ist gleich F.

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{Z}_U \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Mit Hilfe der zugehörigen langen Kohomologie-Sequenz sehen wir, es reicht, die Behauptung für die Spezialfälle

$$F = \mathcal{R} \text{ und } F = \mathbb{Z}_U$$

zu beweisen. Damit haben wir den Beweis der Behauptung auf den Fall, daß F eine Teilgarbe einer Garbe der Gestalt $\mathbb{Z}_U$ ist zurückgeführt.

<u>4. Schritt</u>: Reduktion auf den Fall, daß $F = \mathbb{Z}_U$ ist.

Sei $\mathcal{R}$ eine Teilgarbe von $\mathbb{Z}_U$. O.B.d.A. können wir annehmen, $\mathcal{R} \neq 0$. Für jeden Punkt $x \in U$ ist der Halm $\mathcal{R}_x$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}_U)_x = \mathbb{Z}$ und ist nicht für alle x trivial. Sei d die kleinste von Null verschiedene natürliche Zahl, die in einer ger Untergruppen $\mathcal{R}_x$ vorkommt. Dann gibt es eine offene Teilmenge

$$V \subseteq U$$

derart, daß $\mathcal{R}$ über V von d erzeugt wird, d.h.

$$\mathcal{R}|_V = d\bullet\mathbb{Z}_U|_V .$$[11]

Insbesondere ist $\mathcal{R}_V \cong \mathbb{Z}_V$. Wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_V \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}/\mathbb{Z}_V \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Die Halme der Faktorgarbe rechts sind Null außerhalb der abgeschlossenen Teilmenge

$$\overline{X\text{-}V}$$

von X. Weil X irreduzibel ist, hat diese Menge eine Dimension < n. Wie im ersten Schritt (mit $F = \mathcal{R}/\mathbb{Z}_V$ anstelle von F_U) sehen wir auf Grund der Induktionsvoraussetzung bezüglich der Dimension, daß

$$H^i(X, \mathcal{R}/\mathbb{Z}_V) = 0 \text{ für } i \geq n$$

gilt. Die lange Kohomolgiesequenz zu (2) reduziert den Beweis der Behauptung

$$H^i(X, \mathcal{R}) = 0 \text{ für } i > n$$

auf den Fall $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_V$.

---

[11] Jedenfalls gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq U$ des betrachteten Punktes x mit $d \in \mathcal{R}_x$ mit

$$d \in \mathcal{R}(V) \subseteq \mathbb{Z}_U(V) = \mathbb{Z}$$

(man beachte, X ist irreduzibel). Als Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist $\mathcal{R}(V)$ endlich erzeugt, sagen wir

$$\mathcal{R}(V) = \langle s_1,...,s_n \rangle.$$

Jedes s_i stimmt in einer Umgebung von x mit einem Vielfachen von d überein. Nun ist $\mathcal{R}$ eine Teilgarbe von $\mathbb{Z}_U$, und auf U stimmt $\mathbb{Z}_U$ mit der konstanten Garbe $\mathbb{Z}$ überein. die Restriktionen letzterer auf dem irreduziblen Raum U sind Isomorphismen. Deshalb sind die Restriktionen der Teilgarbe $\mathcal{R}|_U$ injektiv. Mit anderen Worten, die s_i sind bereits selbst Vielfache von d. Wir haben gezeigt $\mathcal{R}(V) = d\bullet\mathbb{Z}$. Dieselbe Argumentation, angewandt auf die offenen Teilmengen von V zeigt, $\mathcal{R}|_V = d\bullet\mathbb{Z}_U|_V$.

Durch Verkleinern von V erreichen wir $\mathcal{R}(V) = d\bullet\mathbb{Z}$ und $\mathcal{R}|_V = d\bullet\mathbb{Z}_U|_V$.

5. Schritt: Der Fall $F = \mathbb{Z}_U$ mit $U \subseteq X$ nicht leer und offen.
Wir setzen $Y := X - U$ und betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_U \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_Y \longrightarrow 0.$$

Weil X irreduzibel ist, gilt

$$\dim Y < \dim X = n.$$

Nach Induktionsvoraussetzung bezüglich der Dimension von X (und wegen 2.9) folgt

$$H^i(X, \mathbb{Z}_Y) = 0 \text{ für } i > n.$$

Nun ist $\mathbb{Z}$ als konstante Garbe auf einem irreduziblen Raum X welk, d.h. es gilt auch

$$H^i(X, \mathbb{Z}) = 0 \text{ für } i \geq n\ (> 0).$$

Die Behauptung ergibt sich damit aus der langen Kohomologie-Sequenz.
QED.

2.2.5 Beispiel

Seien k ein Körper, $X = \mathbb{A}^1_k$ die affine Gerade über k und $P, Q \in X$ zwei verschiedene abgeschlossene Punkte von X. Dann gilt

$$H^1(X, \mathbb{Z}_U) \neq 0 \text{ mit } U := X - \{P, Q\}.$$

Der Satz von Grothendieck gilt damit im allgemeinen nicht für i = dim X.
Beweis. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_U \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_Y \longrightarrow 0 \text{ mit } Y := X - U = \{P,Q\}.$$

und die zugehörige lange Kohomologie-Sequenz

$$H^0(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z}_Y) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_U) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z})$$

Die konstante Garbe $\mathbb{Z}$ ist auf dem irreduziblen Raum X welk. Ganz rechts steht also Null. Entsprechend steht ganz links die Gruppe $\mathbb{Z}$. Die Sequenz bekommt die Gestalt

$$\mathbb{Z} \longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z}_Y) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_U) \longrightarrow 0$$

Weiter ist

$$H^0(X, \mathbb{Z}_Y) = H^0(Y, \mathbb{Z}_Y) = H^0(Y, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

Das rechte Gleichheitszeichen besteht, weil Y aus zwei abgeschlossenen Punkten besteht. Die exakte Sequenz bekommt so die Gestalt

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_U) \longrightarrow 0.$$

Der linke Morphismus kann unmöglich surjektiv sein. Die Surjektion in der Mitte ist deshalb unmöglich 0. Also ist Kohomologie-Gruppe von Null verschieden.
QED.

Bemerkung
Das Beispiel läßt sich auf den Fall beliebiger Dimensionen verallgemeinern (vgl. Hartshorne, Algebraisc geometry, Übung III.2.1(b)). Der Beweis ist jedoch sehr viel aufwändiger.

2.2.6 Beispiel

Seien k ein Körper, $X := X^n := \mathbb{A}^n_k$ der affine Raum über k,

$$H_0,\dots,X_n \subseteq X$$

Hyperebenen in allgemeiner Lage und

$$U := U^n_i = X^n - (H_0 \cup \dots \cup H_i) \text{ für } i = 0,\dots,n.$$

Wir schreiben außerdem

$$U^n_{-1} := X^n$$

Es gilt

$$H^n(X^n, \mathbb{Z}_U) \neq 0 \text{ für } i = n, \text{ d.h. } U = U^n_n$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n, wobei wir simultan weitere Aussagen beweisen. Genauer, wir zeigen durch Induktion nach n,

1. $H^j(X, \mathbb{Z}_U) = \mathbb{Z}$ für $j = 0$ und $i = -1$.
2. $H^j(X, \mathbb{Z}_U) = 0$ für $j = 0$ und $i = 0,\dots,n$.
3. $H^j(X, \mathbb{Z}_U) = 0$ für $0 < j < n$ und $i = -1,\dots,n$.
4. $H^j(X, \mathbb{Z}_U) = 0$ für $j = n$ und $i = 0,\dots,n - 1$.
5. $H^j(X, \mathbb{Z}_U) \neq 0$ für $j = n$ und $i = n$.

Ein Teil dieser Aussage ist trivial. So gilt zum Beispiel

$$H^0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \tag{1}$$

weil die Garbe $\mathbb{Z}$ eine konstante Garbe auf einem irreduziblen Raum ist. Weiter ist

$$H^j(X, \mathbb{Z}) = 0 \text{ für } j > 0 \tag{2}$$

weil die konstante Garbe $\mathbb{Z}$ welk ist auf dem irreduziblen Raum X. Weiter ist

$$H^n(X^n, \mathbb{Z}_{X-Y}) = 0 \text{ für } \dim Y \le n-2,\ n \ge 2, \text{ Y lokal abgeschlossen,} \tag{3}$$

denn auf Grund der exakten Garben-Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{X-Y} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_Y \longrightarrow 0$$

auf X (und weil $\mathbb{Z}$ welk ist) gilt

$$H^n(X^n, \mathbb{Z}_{X-Y}) = H^{n-1}(X^n, \mathbb{Z}_Y) = 0.$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt dabei auf Grund des Dimensionssatzes von Grothendieck. Schließlich ist

$$H^0(X^n, \mathbb{Z}_{X-Y}) = 0 \text{ für } Y \neq \varnothing \text{ lokal abgeschlossen,} \tag{4}$$

denn $\mathbb{Z}_{X-Y}$ ist eine Teilgarbe der konstanten Garbe $\mathbb{Z}$, d.h. es gilt

$$H^0(X^n, \mathbb{Z}_{X-Y}) \subseteq H^0(X^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Insbesondere ist ein Schnitt bereits Null, falls einer seiner Halme Null ist. Für $x \in Y$ ist aber $(\mathbb{Z}_{X-Y})_x = 0$, d.h. es gilt (4).

<u>Der Fall n = 1</u>.

Im Fall n = 1 wurde Aussage 5 bereit in 2.2.5 bewiesen. Aussage 3 ist gegenstandslos. Aussage 2 ist ein Spezialfall von (4). Aussage 1 ist ein Spezialfall von (2). Es bleibt also Aussage 4 zu beweisen. Diese ergibt sich in Analogie zu 2.2.5 aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_U \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_Y \longrightarrow 0 \text{ mit } Y := X - U = \{P\}$$

und der zugehörigen langen Kohomologie-Sequenz

$$H^0(X, \mathbb{Z}_U) \longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z}_Y) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_U) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z})$$

welche genauer die Gestalt

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H^0(\{P\}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_U) \longrightarrow 0$$

hat. Die Gruppe in der Mitte hat ebenfalls die Gestalt $\mathbb{Z}$, und die Injektion links ist gerade die Einschränkung der Schnitte über X auf Y = {P}, d.h. diese ist auch surjektiv. Damit gilt

$$H^1(X, \mathbb{Z}_U) = 0,$$

und Aussage 4 ist im Fall n = 1 ebenfalls bewiesen.

<u>Der Fall n > 1</u>.

Aussage 1 ergibt sich aus (1) und Aussage 2 aus (4). Es bleiben die Aussagen 3-5 zu beweisen. Dazu betrachten wir die folgende exakte Garben-Sequenz auf X.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{U_i} \longrightarrow \mathbb{Z}_{U_{i-1}} \longrightarrow \mathbb{Z}_{U_{i-1}-U_i} \longrightarrow 0.$$

Man beachte, es gilt

$$\begin{aligned} U_{i-1} - U_i &= U_{i-1} - (U_{i-1} - H_i) \\ &= H_i \cap U_{i-1} \\ &= H_i - (H_0 \cup \ldots \cup H_{i-1}) \\ &= H_i - ((H_i \cap H_0) \cup \ldots \cup (H_i \cap H_{i-1})) \\ &= U_{i-1}^{n-1}. \end{aligned}$$

Die lange Kohomologie-Sequenz zu dieser Sequenz hat die folgende Gestalt

$$\begin{aligned} &H^{j-1}(X, \mathbb{Z}_{U_{i-1}}) \longrightarrow H^{j-1}(X^{n-1}, \mathbb{Z}_{U_{i-1}^{n-1}}) \\ &\longrightarrow H^j(X, \mathbb{Z}_{U_i}) \longrightarrow H^j(X, \mathbb{Z}_{U_{i-1}}) \longrightarrow H^j(X^{n-1}, \mathbb{Z}_{U_{i-1}^{n-1}}) \end{aligned} \tag{5}$$

<u>Zu Aussage 4</u>.

Unter den Bedingungen von Aussage 4 haben die Gruppen von (5) die folgende Gestalt. Die zweite Gruppe (von links) ist nach Induktionsvoraussetzung bezüglich n gleich Null,

$$H^{j-1}(X^{n-1}, \mathbb{Z}_{U_{i-1}^{n-1}}) = 0$$

(im Fall i = 0 auf Grund von (2)). Die letzte Gruppe von (5) ist nach dem Dimensionssatz von Grothendieck gleich Null,

$$H^j(X^{n-1}, \mathbb{Z}_{U_{i-1}^{n-1}}) = 0.$$

Damit gilt (mit j = n > 1)

$$H^j(X, \mathbb{Z}_{U_i}) = H^j(X, \mathbb{Z}_{U_{i-1}}) = \ldots = H^j(X, \mathbb{Z}_{U_{-1}}) = H^j(X, \mathbb{Z}) = 0$$

(das letzte Gleichheitszeichen gilt nach (2)). Damit ist Aussage 4 bewiesen.

<u>Zu Aussage 3</u>.

Unter den Bedingungen von Aussage 3 ist die letzte Gruppe von (5) gleich Null (im Fall j < n-1 nach Induktionsvoraussetzung bezüglich n, im Fall j = n-1 nach Induktionsvoraussetzung bezüglich n und Aussage 4). Man beachte im Fall i = 0 ist dies eine Folge von Aussage 2.

$$H^j(X^{n-1}, \mathbb{Z}_{U_{i-1}^{n-1}}) = 0.$$

Zum Beweis von Aussage 3 reicht es damit zu zeigen, daß der Homomorphismus in (5) ganz links surjektiv ist. Denn dann ergibt ist Aussage 3 nach denselben Schlüssen wie beim Beweis von Aussage 4. Beweisen wir also die Surjektivität des linken Homomorphismus in (5).
Im Fall $1 < j$ ist die zweite Gruppe in (5) gleich Null (nach Induktionsvoraussetzung bzgl. n bzw. nach (2)), der Homomorphismus ist trivialerweise surjektiv.
Im Fall $j = 1$ und $i \geq 1$ ist die zweite Gruppe in (5) ebenfalls gleich Null (nach (4)).
Im Fall $j = 1$ und $i = 0$ hat der linke Homomorphismus von (5) die Gestalt

$$H^0(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X^{n-1},\mathbb{Z})$$

und besteht gerade aus der Einschränkung der Schnitt über X auf den Unterraum X^{n-1}. Dies ist ein surjektiver Homomorphismus, d.h. die Aussage von (3) gilt auch in diesem Fall.
Im verbleibenden Fall $j = 0$ und $i = -1$. Gilt Aussage 3 nach (2).
Zu Aussage 5.
Nach Voraussetzung gilt $j = n$ und $i = n$. Wir haben zu zeigen, die dritte Gruppe von (5) ist von Null verschieden.

$$H^j(X,\mathbb{Z}_{U_i}) \neq 0.$$

Nach Aussage 4 ist die dritte Gruppe von (5) gleich Null. Nach Aussage 3 ist die erste Gruppe in (5) gleich Null. Wir haben also eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^{j-1}(X^{n-1},\mathbb{Z}_{U_{i-1}}n\text{-}1) \longrightarrow H^j(X,\mathbb{Z}_{U_i}) \longrightarrow 0$$

Es reicht also zu zeigen, daß die zweite Gruppe in (5) von Null verschieden ist. Das ist aber nach Induktionsvoraussetzung der Fall.
QED.

2.3 Kohomologie mit kompakten Träger

2.3.1 Definition

Seien X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ ein lokal[12] abgeschlossener Unterraum und F eine abelsche Garbe auf X. Wir bezeichnen mit

$$\Gamma_Y(X, F) := \{s \in \Gamma(X, F) \mid \mathrm{supp}(s) \subseteq Y\}$$

die Untergruppe der globalen Schnitte von F mit Träger in Y. Dabei sei der Träger eines Schnitts s definiert als die Menge

$$\mathrm{supp}(s) := \{x \in X \mid s_x \neq 0\},$$

der Punkte, in denen der Schnitt einen von Null verschiedenen Keim besitzt.
Bemerkung
Der Träger supp(s) eines Schnitts s von F ist eine abgeschlossene Teilmenge von X.
Beweis. Liegt ein Punkt x nicht im Träger von s, so gilt $s_x = 0$, d.h. der Schnitt ist Null in einer Umgebung von x. Es liegt also eine ganze Umgebung außerhalb des Trägers. Das Komplement von supp(s) ist somit offen, d.h. supp(s) ist abgeschlossen.
QED.

---

[12] zu jedem Punkt gibt es eine Umgebung U derart, daß $Y \cap U$ abgeschlossen in U ist, d.h .Y ist Durchschnitt einer offenen mit einer abgeschlossenen Teilmenge von X.

2.3.2 Eigenschaften von $\Gamma_Y(X, F)$

Seien X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ eine lokal abgeschlossene Teilmenge von X und F eine abelsche Garbe auf X. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Für jede offenen Teilmenge U von X mit
$$Y \subseteq U \subseteq X$$
gilt
$$\Gamma_Y(X, F) = \Gamma_Y(U, F|_U).$$
Genauer, die Einschränkung auf U,
$$\rho:\Gamma_Y(X, F) \longrightarrow \Gamma_Y(U, F|_U),\ s \mapsto s|_U\ ,$$
ist bijektiv.

(ii) Der Funktor
$$\Gamma_Y(X, ?): Sh_X(Ab) \longrightarrow Ab,\ F \mapsto \Gamma_Y(X, F),$$
ist linksexakt.

(iii) Der i-te rechtsabgeleitete Funktor wird mit
$$H^i_Y(X, F) := R^i\Gamma_Y(X, F)$$
bezeichnet und heißt i-te <u>Kohomologie X mit Träger in</u> Y und Koeffizienten in der Garbe F.

(iv) Für jede kurze exake Sequenz von abelschen Garben auf X, sagen wir
$$0 \longrightarrow F' \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} F'' \longrightarrow 0,$$
mit F' welk ist die zugehörige Sequenz
$$0 \longrightarrow \Gamma_Y(X, F') \longrightarrow \Gamma_Y(X, F) \longrightarrow \Gamma_Y(X, F'') \longrightarrow 0$$
exakt.

(v) Es gilt $H^i_Y(X, F) = 0$ für $i > 0$ für jede abelsche welke Garbe F, d.h. welke Garben sind azyklisch bezüglich der Kohomologie mit Träger in Y.

(vi) Für jede abelsche welke Garbe F auf X und jede abgeschlossene Teilmenge
$$Y \subseteq X$$
ist die zugehörige Sequenz
$$0 \longrightarrow \Gamma_Y(X, F) \longrightarrow \Gamma(X, F) \longrightarrow \Gamma(X - Y, F) \longrightarrow 0$$
exakt. Dabei steht links die natürliche Einbettung und rechts die Einschränkung der Schnitt auf X - Y.

(vii) Mit U := X - Y besteht für jede abelsche Garbe F auf X und jede abgeschlossen Teilmenge
$$Y \subseteq X$$
eine exakte Sequenz
$$0 \longrightarrow H^0_Y(X, F) \longrightarrow H^0(X, F) \longrightarrow H^0(U, F) \longrightarrow H^1_Y(X,F) \longrightarrow \dots$$
$$\dots \longrightarrow H^i_Y(X,F) \longrightarrow H^i(X, F) \longrightarrow H^i(U, F) \longrightarrow H^{i+1}_Y(X,F) \longrightarrow \dots$$

(viii) <u>Ausschneidungssatz</u> (Excisition). Sei V eine offene Teilmenge von X, welche die abgeschlossene Teilmenge Y enthält,
$$Y \subseteq V \subseteq X.$$
Dann bestehen für jede abelsche Garbe auf F natürliche Isomorphien
$$H^i_Y(X, F) \cong H^i_Y(V, F|_V)$$

Beweis. Zu (i). Wir betrachten zunächst den Fall, daß Y abgeschlossen ist in X.

Die Abbildung ρ ist injektiv: sei s ein Element aus dem Kern der Abbildung. Dann gilt

$$s|_U = 0 \text{ und } s|_{X-Y} = 0.$$

Die zweite Identität ergibt sich dabei aus der Annahme, daß der Träger von s ganz in Y liegt. Aus den beiden Identitäten und aus $Y \subseteq U$, d.h.

$$U \bigcup (X - Y) = X,$$

ergibt sich damit aber nach dem ersten Garben-Axiom s = 0.

Die Abbildung ρ ist surjektiv: sei $s \in \Gamma_Y(U, F|_U)$. Dann gilt, weil der Träger von s in Y liegt

$$s|_{U \bigcap (X-Y)} = s|_{U-Y} = 0 = 0|_{U \bigcap (X-Y)}$$

wobei die Null ganz rechts den Nullschnitt von F über X-Y bezeichne. Nach dem zweiten Garben-Axiom gibt es einen Schniit

$$t \in F(U \bigcup (X-Y)) = F(X)$$

mit $t|_U = s$ und $t|_{X-Y} = 0$. Auf Grund der zweiten Identität liegt der Träger von t in Y, d.h.

$$t \in \Gamma_Y(X, F),$$

und auf Grund er ersten Identität ist das Bild von t in $\Gamma_Y(U, F|_U)$ gleich s. Die Behauptung ist damit im Fall Y abgeschlossen bewiesen. Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall.

Injektivität der Abbildung ρ im allgemeinen Fall. Sei s ein Element aus dem Kern der Abbildung und sei Z die abgeschlossene Menge

$$Z := \mathrm{supp}(s) \subseteq Y.$$

Dann ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_Z(X,F) & \longrightarrow & \Gamma_Z(U,F|_U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_Y(X,F) & \longrightarrow & \Gamma_Y(U,F|_U) \end{array} \tag{1}$$

Dabei sollen die vertikalen Pfeile die natürlichen Inklusionen bezeichnen. Man beachte die beiden linken Gruppen sind Untergruppen von Γ(X,F) und die beiden rechten Gruppen Untergruppen von Γ(U, F). Die beiden horizontalen Pfeile sollen für die Einschränkung auf U stehen. Nach Wahl von Z liegt der Schnitt s in der linken oberen Gruppe. Sein Bild in der rechten unteren Gruppe ist Null. Weil die vertikalen Abbildungen injektiv sind, ist das Bild von s in der rechten oberen Gruppe Null. Auf Grund des bereits behandelten abgeschlossenen Falls ist die horizontale obere Abbildung injektiv. Deshalb ist s = 0.

Surjektivität der Abbildung ρ im allgemeinen Fall. Sei

$$s \in \Gamma_Y(U, F|_U)$$

vorgegeben. Wir setzen

$$Z := \mathrm{supp}(s) \subseteq Y$$

und betrachten das zugehörige kommutative Diagramm (1). Nach Wahl von Z liegt s in der rechten oberen Gruppe. Auf Grund des bereits behandelten abgeschlossenen Falls ist die obere horizontale Abbildung surjektiv, d.h. es gibt ein

$$t \in \Gamma_Z(X, F) \text{ mit } t|_U = s.$$

Wegen $Z \subseteq Y$ liegt t auch in der linken unteren Gruppe.
Zu (ii). Wir schreiben

$$\Gamma_Y(F) := \Gamma_Y(X, F).$$

Sei eine kurze exakte Sequenz abelscher Garben auf X gegeben, sagen wir

$$0 \longrightarrow F' \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} F'' \longrightarrow 0.$$

Wir haben die Exaktheit der zugehörigen Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma_Y(F') \xrightarrow{\varphi} \Gamma_Y(F) \xrightarrow{\psi} \Gamma_Y(F'').$$

der globalen Schnitt mit Träger in Y zu beweisen.
Nun ist Γ_Y ein Teilfunktor des globalen Schnittfunktors Γ. Weil Γ Monomorphismen in Monomorphismen überführt, gilt dasselbe auch für Γ_Y ($\varphi = \Gamma_Y(f)$ ist die Einschränkung der Injektion $\Gamma(f)$ und damit auch injektiv). Weil Γ_Y ein additiver Funktor ist, gilt

$$\psi\circ\varphi = \Gamma_Y(g)\circ\Gamma_Y(f) = \Gamma_Y(g\circ f) = \Gamma_Y(0) = 0,$$

also

$$\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi).$$

Sei jetzt $s \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Dann liegt s auch im Kern von $\Gamma(g)$, also im Bild von $\Gamma(f)$. Es gibt einen globalen Schnitt $s' \in \Gamma(X, F')$ dessen Bild in $\Gamma(X, F)$ gleich s ist. Weil f injektiv ist, ist auch die induzierte Abbildung auf den Halmen injektiv. Deshalb gilt

$$\mathrm{supp}(s') \subseteq \mathrm{supp}(s) \; (\subseteq Y),$$

d.h. s' liegt in $\Gamma_Y(F')$ und hat das Bild s. Wir haben gezeigt,

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi).$$

Zu (iii). Weil $Sh_X(Ab)$ genügend viele injektive Objekte besitzt, sind die rechtsabgeleiteten Funktoren des Funktors von (ii) wohldefiniert.
Zu (iv). Es reicht die Surjektivität der Abbildung

$$\Gamma_Y(X, F) \longrightarrow \Gamma_Y(X, F'') \tag{2}$$

zu beweisen. Die Exaktheit an den anderen Stellen ergibt sich aus der Linksexaktheitsaussage (ii). Wir betrachten zunächst den Fall, daß Y abgeschlossen ist.
Surjektivität von (2) im Fall Y abgeschlossen in X. Sei

$$s'' \in \Gamma_Y(X, F'').$$

Weil F' welk ist, gibt es einen globalen Schnitt $\tilde{s} \in \Gamma(X,F)$ mit $g(\tilde{s}) = s''$. Weil der Träger von s'' ganz in Y liegt, gilt

$$g(\tilde{s})_x = s''_x = 0$$

für jedes $x \in U := X - Y$, d.h. es ist

$$g(\tilde{s}|_U) = g(\tilde{s})|_U = 0.$$

Damit gibt es einen Schnitt $\tilde{s}' \in F'(U)$ mit $f(\tilde{s}') = \tilde{s}|_U$. Weil F' welk ist, gibt es auch einen Schnitt $s' \in F'(X)$ mit $s'|_U = \tilde{s}'$, also

$$f(s')|_U = f(s'|_U) = f(\tilde{s}') = \tilde{s}|_U.$$

Wir setzen

$$s := \tilde{s} - f(s').$$

Wie gerade gezeigt ist dann die Einschränkung von s auf U gleich Null, d.h. der Träger von s liegt in Y = X - U,

$$s \in \Gamma_Y(X, F).$$

Außerdem ist $g(s) = g(\tilde{s} - f(s')) = g(\tilde{s}) - g(f(s')) = s'' - 0 = s''$.

Surjektivität von (2) im allgemeinen Fall. Wir betrachten einen vorgegebenen Schnitt

$$s \in \Gamma_Y(X, F'')$$

und setzen

$$Z := \mathrm{supp}(s) \ (\subseteq Y).$$

Analog zum Diagramm (1) besteht dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_Z(X,F) & \longrightarrow & \Gamma_Z(X,F'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_Y(X,F) & \longrightarrow & \Gamma_Y(X,F'') \end{array} \tag{3}$$

dessen obere Zeile, wie gerade bewiesen surjektiv ist. Nach Wahl von Z liegt s in der rechten oberen Gruppe, hat also eine Urbild t in der linken oberen Gruppe,

$$t \in \Gamma_Z(X, F),\ g(t) = s.$$

Wegen $Z \subseteq Y$ liegt aber t auch in der linken unteren Gruppe.

Zu (v). Wir betrachten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow I \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

mit I injektiv. Dann ist I welk und mit F und I auch G. Wegen (iv) erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^1_Y(X, F) \longrightarrow H^1_Y(X, I) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow H^{i-1}_Y(X, I) \longrightarrow H^{i-1}_Y(X,G) \longrightarrow H^i_Y(X,F) \longrightarrow H^i_Y(X,I) \longrightarrow \ldots$$

Weil I injektiv ist, folgt

$$H^1_Y(X, F) = 0 \text{ und } H^i_Y(X,F) = H^{i-1}_Y(X,G)$$

also induktiv

$$H^i_Y(X,F) = 0 \text{ für } i > 0.$$

Zu (vi). Die Einschränkung eines Schnitts auf X-Y ist genau dann gleich Null, wenn sein Träger in Y liegt. Deshalb ist die Sequenz in der Mitte exakt (ohne die Annahme, daß F welk sein soll). Die Exaktheit an der linken Stelle besteht ebenfalls trivialerweise (ohne die Annahme, daß F welk sein soll). Die Surjektivität des rechten Morphismus folgt aus der Welkheit von F.

Zu (vii). Wir betrachten die kanonische Auflösung von F durch welke Garben

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow C^*(F).$$

Für jedes i schreiben wir die kurze exakte Sequenz von (vi) für die Garbe $C^i(F)$ auf,

$$0 \longrightarrow \Gamma_Y(X, C^i(F)) \longrightarrow \Gamma(X, C^i(F)) \longrightarrow \Gamma(X - Y, C^i(F)) \longrightarrow 0$$

Diese kurzen exakten Sequenzen setzen sich zu einer kurzen exakten Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow \Gamma_Y(X, C^*(F)) \longrightarrow \Gamma(X, C^*(F)) \longrightarrow \Gamma(X - Y, C^*(F)) \longrightarrow 0$$

zusammen. Nach (v) kann man die Kohomologie mit und ohne Träger mit Hilfe von welken Auflösungen berechnen. Die zu der kurzen exakten Komplex-Sequenz gehörige lange Kohomologie-Sequenz ist damit gerade die behauptete.
<u>Zu (viii)</u>. Ausschneidung.
Die Funktoren

$$H^i_Y(X, ?\,): Sh_X(Ab) \longrightarrow Ab,$$

definieren als abgeleitete Funktoren einen universellen ∂-Funktor $T: Sh_X(Ab) \longrightarrow Ab$ mit

$$T^0 = \Gamma_Y(X, ?).$$

Analog definieren die Funktoren

$$H^i_Y(V, ?\,): Sh_V(Ab) \longrightarrow Ab,$$

als abgeleitete Funktoren einen ∂-Funktor $\widetilde{T}: Sh_V(Ab) \longrightarrow Ab$ mit

$$\widetilde{T}^0 = \Gamma_Y(V, ?) \text{ und } \widetilde{T}^i \text{ annullierbar für } i > 0$$

Durch Einschränken auf die offene Teilmenge V ist ein Funktor

$$Res: Sh_X(Ab) \longrightarrow Sh_V(Ab), F \mapsto F|_V,$$

definiert. Weil dieser exakt ist, ist die Zusammensetzung mit $\widetilde{T}$ ein ∂-Funktor $\widetilde{T}\circ Res$, dessen Bestandteil 0-ten Grades gerade

$$\widetilde{T}^0\circ Res = \Gamma_Y(V, ?|_V) = \Gamma_Y(X, ?)$$

ist. Das rechte Gleichheitszeichen besteht, weil jeder Schnitt über V mit Träger in Y automatisch einen Schnitt über X mit Träger in Y definiert.
Weil der Funktor Res welke Garben in welke Garben abbildet, ist auch der zusammengesetzte Funktor $\widetilde{T}\circ Res$ in den Graden > 0 annullierbar, also universell. Es folgt

$$T = \widetilde{T}\circ Res.$$

Das ist aber gerade die Behauptung.
QED.

2.3.3 Der Fall kohärenter Garben auf einem affinen Schema X = Spec A

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Wir setzen

$X := \text{Spec } A$

$F := \widetilde{M}$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Für $m \in M = \Gamma(X, F)$ ist

$$\text{supp}(m) := V(\text{Ann } m) \text{ mit Ann } m := \{a \in A \mid am = 0\}.$$

(ii) $\text{Supp } F := \{x \in X \mid F_x \neq 0\} \subseteq V(\text{Ann } M)$

Falls A ein noetherscher Ring ist und M ein endlich erzeugter A-Modul, so gilt sogar das Gleichheitszeichen.

(iii) Seien $I \subseteq A$ ein Ideal und Y das abgeschlossene Teilschema

$$Y := \mathrm{Spec}\, A/I \hookrightarrow X.$$

Dann gilt

$$\Gamma_Y(X, F) = \{m \in M \mid \text{für jedes } a \in I \text{ gibt es ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n m = 0 \}.$$

Ist A noethersch, so gilt auch

$$\Gamma_Y(X, F) = \{m \in M \mid I^n m = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \}.$$

(iv) Sei A ein noetherscher Ring und M ein injektiver A-Modul. Dann ist der A-Modul

$$\Gamma_Y(X, F)$$

ebenfalls injektiv.

(v) Der Träger einer kohärenten Garbe auf einem noetherschen Schema ist abgeschlossen.

(vgl. Hartshorne, Algebraic geometry, Aufgabe II.5.6 (a), (b), (c), bzw. Lemma III.3.2).

Beweis. Zu (i). Es gilt

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Supp}(m) &\Leftrightarrow m \text{ liegt nicht im Kern der natürlichen Abbildung } M \longrightarrow M_x \\ &\Leftrightarrow m \text{ wird von keinem Element von } A - x \text{ annulliert.} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Ann}(m) \subseteq x \\ &\Leftrightarrow x \in V(\mathrm{Ann}(m)). \end{aligned}$$

Zu (ii). Für $x \in \mathrm{Supp}\, F$ gibt ein von Null verschiedenes Element in $F_x = M_x$, d.h. ein Element m, welches nicht im Kern der natürlichen Abbildung $M \longrightarrow M_x$ liegt. Nach (i) gilt $x \in \mathrm{supp}(m) = V(\mathrm{Ann}\, m)$, d.h.

$$\mathrm{Ann}\, M \subseteq \mathrm{Ann}(m) \subseteq x,$$

d.h. $x \in \mathrm{Ann}(M)$. Wir haben gezeigt,

$$\mathrm{Supp}\, F \subseteq V(\mathrm{Ann}\, M).$$

Seien jetzt A noethersch, M endlich erzeugt über A und $x \notin \mathrm{Supp}\, F$. Wir haben zu zeigen, x liegt nicht in $V(\mathrm{Ann}\, M)$.

Wegen $x \notin \mathrm{Supp}\, F$ gilt $0 = F_x = M_x$, d.h. jedes Element von M wird von einem Element aus A - x annulliert. Weil M endlich erzeugter A-Modul ist, sagen wir

$$M = Am_1 + \ldots + Am_r ,$$

können wir für jeden der endlich vielen Erzeuger m_i ein Element $a_i \in A - x$ wählen mit

$$a_i m_i = 0.$$

Bezeichne a das Produkt der endlich vielen a_i. Dann gilt $a \in A - x$ und $aM = 0$. Der Annullator von M liegt nicht ganz in x, d.h.

$$x \notin V(\mathrm{Ann}\, M).$$

Zu (iii). Sei $m \in \Gamma_Y(X, F)$ $(\subseteq \Gamma(X, F) = M)$. Nach (i) gilt dann

$$V(\text{Ann } m) = \text{supp}(m) \subseteq Y = V(I),$$

d.h.

$$I \subseteq \sqrt{I} \subseteq \sqrt{\text{Ann } m}.$$

Jedes Element a aus I besitzt eine Potenz, welche in Ann m liegt, d.h. welche m annulliert.

Sei jetzt umgekehrt $m \in M = \Gamma(X, F)$ ein Element mit der Eigenschaft, daß es für jedes $a \in I$ eine Potenz von a gibt, welche m annulliert. Dann gilt

$$I \subseteq \sqrt{\text{Ann } m},$$

also nach (i)

$$\text{supp}(m) = V(\text{Ann } m) \subseteq V(I) = Y,$$

also $m \in \Gamma_Y(X, F)$.

Im Fall A noethersch ist I endlich erzeugt. Die rechten Seiten der beiden behaupteten Identitäten stimmen in diesem Fall überein.

Zu (iv). Sei M ein injetiver A-Modul. Wir haben zu zeigen,

$$J := \Gamma_Y(X, F)$$

ist injektiv. Mit anderen Worten, jede A-lineare Abbildung

$$f: N' \longrightarrow J$$

auf einem Teilmodul N' eines A-Moduls N läßt sich zu einer A-linearen Abbildung

$$N \longrightarrow J$$

fortsetzen.

Mit Hilfe des Zornschen Lemmas sieht man, daß es genügt, die Fortsetzbarkeit von f auf einen Teilmodul der Gestalt

$$N' + An \text{ mit } n \in N - N'$$

zu beweisen. Nun hat $N' \cap An$ die Gestalt

$$N' \cap An = Ln \text{ mit einen Ideal } L \subseteq A.$$

Es reicht deshalb, die Fortsetzbarkeit jeder A-linearen Abbildung $L \longrightarrow J$ zu einer A-linearen Abbildung $A \longrightarrow J$ zu beweisen, d.h. wir können annehmen

$$N = A \text{ und } N' \text{ ist ein Ideal von } A.$$

Weil A noethersch ist, ist N' endlich erzeugt. Nach (iii) wird jedes Element von J von einer Potenz von I annulliert. Deshalb gilt für ein $n > 0$

$$0 = I^n \bullet f(N') = f(I^n \bullet N').$$

Nach dem Lemma von Artin-Rees gibt es eine natürliche Zahl n' mit

$$I^n \bullet N' \supseteq N' \cap I^{n'}$$

Insbesondere gilt $f(N' \cap I^{n'}) = 0$. Die gegebene Abbildung f faktorisiert sich also über $N'/N' \cap I^{n'}$. Betrachten wir das folgende kommutative Diagramm von A-linearen Abbildungen.

$$\begin{array}{ccccc}
N' & \xrightarrow{f} & J & \hookrightarrow & M \\
\| & & \uparrow & & \| \\
N' & \twoheadrightarrow & N'/N'\cap I^{n'} & \xrightarrow{g} & M \\
\cap & & \cap & & \| \\
N & \twoheadrightarrow & N/I^{n'} & \xrightarrow{h} & M
\end{array}$$

Das obere linke Quadrat ist kommutativ weil sich f, wie eben beschrieben über den Modul in der Mitte faktorisiert. Das untere linke Quadrat ist trivialerweise kommutativ. Die Abbildung g wird so gewählt, daß das obere rechte Quadrat kommutative wird. Die Abbildung h entsprechend für das untere rechte Quadrat. Letztere Abbildung existiert, weil M nach Voraussetzung injektiv ist.

Das Bild von h wird durch $I^{n'}$ annulliert (weil dies für den Definitionsbereich von h gilt).Das bedeutet aber, das Bild von h liegt in J (nach Definition von $J := \Gamma_Y(X, F)$ und (iii). Deshalb definiert h eine A-lineare Fortsetzung von f auf N.

Zu (v). Angenommen, es gibt ein noethersches Schema Y und eine kohärente Garbe G auf Y, deren Träger nicht abgeschlossen ist. Dann gibt es einen Punkt $y \in Y$, der in der Abschließung von Supp G liegt, aber nicht in Supp G selbst. Sei

$$U := \text{Spec } A$$

eine affine Umgebung eines solchen Punktes y. Dann gilt

$$\begin{aligned} y \in U - \text{Supp}(G) &= U - (U \cap \text{Supp } G) \\ &= U - \text{Supp}(G|_U). \end{aligned}$$

Weil U affin ist, hat $G|_U$ die Gestalt

$$G|_U = \widetilde{M}$$

mit einem endlich erzeugten A-Modul M. Es folgt nach (ii),

$$y \in \text{Spec } A - V(\text{Ann } M).$$

Der Annullator von M liegt also nicht ganz im Primideal y von A, d.h.

$$aM = 0 \text{ für ein } a \in A - y,$$

d.h.

$$y \in D(a) \text{ und } 0 = M_a = G(D(a)).$$

Wir ersetzen die offene affine Menge U = Spec A durch deren Teilmenge D(a) und errreichen

$$y \in U \text{ und } G|_U =^{13} 0.$$

Insbesondere gilt $U \cap \text{Supp } G = \emptyset$, d.h. es gibt eine offene Umgebung von y, die nicht im Träger von G liegt. Der Punkt y ist kein Berührungspunkt des Trägers. Das steht aber im Widerspruch zur Annahme, daß y in der Abschließung des Trägers liegen soll.
QED.

Bemerkung
In derselben Weise wie oben kann man weitere exakte Sequenzen konstruieren. Wie wichtigste davon ist die Mayer-Vietoris-Sequenz. Für deren Konstruktion ist es günstig eine garbisierte Version der obigen Konstruktionen zur Verfügung zu haben.

[13] $G|_U$ ist eine kohärente Garbe auf U, für welche der Modul der globalen Schnitte gleich 0 ist.

2.3.4 Die Garbe $\underline{\Gamma}_Y(F)$

Seien X ein topologischer Raum, F eine abelsche Garbe und $Y \subseteq X$ eine lokal abgeschlossene Teilmenge. Für je zwei offene Teilmengen U, V von X mit

$$V \subseteq U$$

induziert die Garben-Restriktion

$$\Gamma(U, F) \longrightarrow \Gamma(V, F)$$

einen Gruppen-Homomorphismus

$$\Gamma_{Y\cap U}(U, F|_U) \longrightarrow \Gamma_{Y\cap V}(V, F|_V).$$

Wir erhalten so eine Prägarbe

$$\underline{\Gamma}_Y(F)$$

mit

$$\Gamma(U, \underline{\Gamma}_Y(F)) = \Gamma_{Y\cap U}(U, F|_U)$$

für jede offene Teilmenge U von X. Es ist nicht schwer einzusehen, daß es sich dabei sogar um eine Garbe handelt.[14]

Für jeden Morphismus abelscher Garben auf X

$$f\colon F \longrightarrow G$$

und jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ induziert der Gruppen-Homomorphismus

$$f_U\colon F(U) \longrightarrow G(U)$$

einen Gruppen-Homomorphismus

$$\underline{\Gamma}_Y(f)_U\colon \underline{\Gamma}_Y(F)(U) \longrightarrow \underline{\Gamma}_Y(G)(U),$$

denn ein Schnitt s von $\underline{\Gamma}_Y(F)(U)$ ist ein Schnitt $s \in F(U)$ mit $s_x = 0$ für $x \in U - Y$, so daß gilt

$$f(s)_x = f(s_x) = f(0) = 0,$$

d.h. der Träger von $f(s) \in G(U)$ liegt in Y, d.h f(s) ist ein Schnitt von $\underline{\Gamma}_Y(G)(U)$. Die so definierten Gruppen-Homomorphismen setzen sich zu einen Garben-Morphismus

$$\underline{\Gamma}_Y(f)\colon \underline{\Gamma}_Y(F) \longrightarrow \underline{\Gamma}_Y(G)$$

zusammen. Wir erhalten auf diese Weise einen additiven Funktor

$$\underline{\Gamma}_Y\colon Sh_X(Ab) \longrightarrow Sh_X(Ab).$$

2.3.5 Eigenschaften der Garbe $\underline{\Gamma}_Y(F)$

(i) Der Funktor $\underline{\Gamma}_Y\colon Sh_X(Ab) \longrightarrow Sh_X(Ab)$ ist linksexakt.

(ii) Der i-te rechtsabgeleitete Funktor wird mit

---

[14] Da $\underline{\Gamma}_Y(F)$ eine Teilprägarbe der Garbe F ist, ist das erste Garben-Axiom automatisch erfüllt. Beim Nachweis des zweiten Axioms wählt man zu einer gegebenen Familie lokaler Schnitte zu nächst den auf Grund der Garbeneigenschaft von F existierenden globalen Schnitt. Eine Berechnung der Halme dieses Schnitts zeigt, daß es sich um einen Schnitt von $\underline{\Gamma}_Y(F)$ handelt.

$$\underline{H}^i_Y(X, F) := R^i\underline{\Gamma}_Y(X, F)$$

bezeichnet und heißt i-te <u>Kohomologie-Garbe von X mit Träger in</u> Y und Koeffizienten in der Garbe F.

(iii) Für jede abelsche welke Garbe F auf X ist die Garbe $\underline{\Gamma}_Y(F)$ ebenfalls welk.

(iv) Für jede kurze exake Sequenz von abelschen Garben auf X, sagen wir

$$0 \longrightarrow F' \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} F'' \longrightarrow 0,$$

mit F' welk ist die zugehörige Garben-Sequenz

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}_Y(F') \longrightarrow \underline{\Gamma}_Y(F) \longrightarrow \underline{\Gamma}_Y(F'') \longrightarrow 0$$

exakt.

(v) Für jede abelsche Garbe F auf X ist $\underline{H}^i_Y(X, F)$ die assoziierte Garbe zur Prägarbe

$$U \mapsto H^i_{Y\cap U}(U, F|_U)$$

Insbesondere gilt

$$\underline{H}^i_Y(X, F) = 0 \text{ für } i > 0$$

für jede abelsche welke Garbe F, d.h. welke Garben sind azyklisch bezüglich der Kohomologie-Garben mit Träger in Y (weil sie es bezüglich der Kohomologie-Gruppen mit Träger in Y sind).

(vi) Seien Y eine lokal abgeschlossene Teilmenge von X,

$$Y' \subseteq Y$$

eine abgeschlossene Teilmenge von Y und

$$Y'' := Y - Y'.$$

Dann ist für jede abelsche Garbe F auf X die folgende Sequenz abelscher Gruppen wohldefiniert und exakt.

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Y'}(X,F) \longrightarrow \Gamma_Y(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Y''}(X,F).$$

Sie ist sogar kurz exakt, falls F welk ist, d.h.

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Y'}(X,F) \longrightarrow \Gamma_Y(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Y''}(X,F) \longrightarrow 0$$

ist exakt.

(vii) In der Situation von (vi) besteht für jede abelsche Garbe F auf X eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0_{Y'}(F) \longrightarrow H^0_Y(F) \longrightarrow H^0_{Y''}(F) \longrightarrow H^1_{Y'}(F) \longrightarrow \dots$$
$$\dots \longrightarrow H^i_{Y'}(F) \longrightarrow H^i_Y(F) \longrightarrow H^i_{Y''}(F) \longrightarrow H^{i+1}_{Y'}(F) \longrightarrow \dots$$

Beweis (vgl. Grothendieck: Local cohomology). Für jede exakte Sequenz abelscher Garben auf X, sagen wir

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0,$$

erhäöt man durch Einschränken auf eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ ein exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F'|_U \longrightarrow F|_U \longrightarrow F''|_U \longrightarrow 0,$$

von abelschen Garben auf U. Nach Bemerkung 2.3.1 (ii) ist dann aber die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Y\cap U}(U, F'|_U) \longrightarrow \Gamma_{Y\cap U}(U, F|_U) \longrightarrow \Gamma_{Y\cap U}(U, F''|_U)$$

exakt. Wir gehen zum direkten Limes über alle offenen Mengen U über, die einen vorgegebenen Punkt x enthalten und erhalten die exakte Sequenz abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}_Y(F')_x \longrightarrow \underline{\Gamma}_Y(F)_x \longrightarrow \underline{\Gamma}_Y(F'')_x.$$

Da dies für jedes $x \in X$ gilt, ist die Garben-Sequenz

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}_Y(F') \longrightarrow \underline{\Gamma}_Y(F) \longrightarrow \underline{\Gamma}_Y(F'')$$

exakt.

Zu (ii). Weil $Sh_X(Ab)$ genügend viele injektive Objekte besitzt, sind die rechtsabgeleiteten Funktoren des Funktors von (i) wohldefiniert.

Zu (iii). Seien U und V offene Teilmengen von X mit $U \subseteq V$ und sei s ein Schnitt von $\underline{\Gamma}_Y(F)$ über U,

$$s \in \Gamma_{Y \cap U}(U, F|_U),$$

d.h. s ist ein Schnitt von F über U mit

$$Z := \mathrm{supp}(s) \subseteq Y \cap U.$$

Bezeichne o den Nullschnitt von F über $V - \overline{Z}$[15]. Die Schnitte o und s stimmen auf dem Durchschnitt ihrer Defintionsbereiche

$$(V - \overline{Z}) \cap U = U - \overline{Z} = U - Z$$

überein, denn beide sind sie dort gleich 0. Weil F eine Garbe ist, gibt es einen Schnitt t von F über

$$(V - \overline{Z}) \cup U$$

mit

$$t|_{V-\overline{Z}} = o \text{ und } t|_U = s.$$

Weil F welk ist, gibt es einen Schnitt $u \in F(V)$ mit

$$u|_{(V-\overline{Z})\cup U} = t.$$

Nach Konstruktion gilt

$$u|_U = t|_U = s.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß der Träger von u in $\overline{Z} \subseteq Y$ liegt. Dazu betrachten wir einen Punkt

$$x \in V - \overline{Z}.$$

Wir haben zu zeigen, der Keim von u in x ist gleich Null. Es gilt aber

$$\begin{aligned} u_x &= (u|_{(V-\overline{Z})\cup U})_x && \text{weil x in } (V-\overline{Z}) \cup U \text{ liegt} \\ &= t_x && \text{nach Wahl von u} \\ &= (t|_{V-\overline{Z}})_x && \text{weil x in } V-\overline{Z} \text{ liegt} \\ &= o_x && \text{nach Wahl von t} \\ &= 0 && \text{nach Wahl von o.} \end{aligned}$$

Zu (iv). Es reicht zu zeigen, für jede offene Teilmenge U von X ist die Sequenz der Schnitte über U exakt (weil filtrierte direkte Limites auf den abelschen Gruppe exakte Funktoren sind), d.h. die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Y\cap U}(U, F'|_U) \longrightarrow \Gamma_{Y\cap U}(U, F|_U) \longrightarrow \Gamma_{Y\cap U}(U, F''|_U) \longrightarrow 0$$

ist zu zeigen.

Das folgt aber aus 2.3.2 (iv) (und der Exaktheit des Funktors $F \mapsto F|_U$).

Zu (v). Die Prägarben

[15] Z muß nicht abgeschlossen in V sein. Wir ersetzen deshalb Z durch seine Abaschließung $\overline{Z}$ in X.

$$U \mapsto H^i_{Y\cap U}(U, F|_U)$$

bilden einen ∂-Funktor. Dieser Funktor ist universell, weil gilt

$$H^i_{Y\cap U}(U, F|_U) = 0 \text{ für } i > 0 \text{ und } F \text{ welk}$$

(nach 2.3.2 (v)). Da der Übergang zur assoziierten Garbe exakt ist, bilden auch die zugehörigen assoziierten Garben einen universellen ∂-Funktor. Im Grad 0 erhalten wir die assoziierte Garbe zur Prägarbe

$$U \mapsto \Gamma_{Y\cap U}(U, F|_U)$$

d.h. die Garbe

$$\underline{H}^0_Y(F) = \underline{\Gamma}_Y(F).$$

Der ∂-Funktor stimmt also mit den abgeleiteten Funktoren von $\underline{\Gamma}_Y$ überein.

Zu (vi). Nach Definition ist Y' der Durchschnitt von Y mit einer abgeschlossenen Teilmenge von X, also lokal abgeschlossen in X.
Weiter ist Y" der Durchschnitt von Y mit einer offenen Teilmenge von X, also lokal abgeschlossen in X. Die drei Schnittmengen sind also wohldefiniert.

Wegen $Y' \subseteq Y$ ist jeder Schnitt von F mit Träger in Y' auch ein solcher mit Träger in Y. Damit sind

$$\Gamma_{Y'}(X,F) \text{ und } \Gamma_Y(X,F)$$

ineinander enthaltene Untergruppen von $\Gamma(X, F)$. Wir definieren die linken Morphismus als die natürliche Inklusion dieser Untergruppen. Wir haben den Homomorphismus

$$\Gamma_Y(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Y''}(X,F)$$

zu definieren. Dazu schreiben wir Y" in der Gestalt

$$Y'' = Y - Y' = Y \cap U$$

mit einer offenen Menge U von X.Auf Grund des Ausschneidungssatzes gilt dann

$$\Gamma_{Y''}(X,F) = \Gamma_{Y''}(U,F|_U).$$

Wir betrachten das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X,F) & \longrightarrow & \Gamma(U;F) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma_Y(X,F) & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma_{Y''}(U,F|_U) \end{array}$$

Die vertikalen Pfeile sollen dabei die natürlichen Einbettungen bezeichnen. Der obere horizontale Pfeil bezeichne die Garben-Restriktion von F. Die untere horizontale Abbildung läßt sich dabei so wählen, daß das Diagramm kommutativ wird, und ist durch die Kommutativität des Diagramms eindeutig festgelegt.
Man beachte für einen Schnitt s von F(X) mit Träger in Y ist $s|_U$ ein Schnitt von F(U) mit Träger in $Y\cap U = Y''$. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß der untere horizontale Morphismus nicht von der speziellen Wahl der offenen Menge U abhängt.[16]

[16] Man wähle zwei solche offenen Mengen U und vergleiche die beiden zugehörigen Konstruktionen mit der Konstruktion zum Durchschnitt der beiden U.

Ein Schnitt s von $\Gamma_Y(X, F)$ liegt genau dann im Kern des Morphismus α, wenn $s|_U = 0$ gilt, d.h. wenn der Träger von s ganz in

$$Y - U = Y - Y\cap U = Y - Y'' = Y'$$

liegt, also genau dann wenn s sogar in $\Gamma_{Y'}(X, F)$ liegt. Wir haben damit die Exaktheit der beschriebenen Sequenz gezeigt. Wir haben noch deren kurze Exaktheit im Fall, daß F welk ist, zu beweisen.

Wenn F welk ist, ist es aber auch die Garbe $\underline{\Gamma}_{Y''}(F)$ (nach (iii)). Deshalb ist der Schnitt s dieser Garbe über U, Einschränkung eines Schnitts t dieser Garbe über X,

$$s = t|_U \text{ mit } t \in \Gamma_{Y''}(X, F) \subseteq \Gamma_Y(X, F).$$

Die Inklusion rechts besteht wegen $Y'' \subseteq Y$. Damit ist t ein Urbild von s der gesuchten Art.

Zu (vii). Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Bemerkung 2.3.2(vii).

QED.

Bemerkung

Die Beziehungen zwischen den hier konstruierten Kohomologie-Garben und den Kohomologie-Gruppen mit Träger lassen sich am besten durch sogenannte Spektralsequenzen beschreiben.

2.3.6 Der Fall kohärenter Garben auf einem affinen Schema

(i) Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul und $I \subseteq A$ ein Ideal. Wir setzen

$$X = \text{Spec } A$$
$$F := \widetilde{M}$$
$$Y := V(I) = \text{Spec } A/I$$

Dann ist die Garbe $\underline{\Gamma}_Y(F)$ quasi-kohärent. Insbesondere ist

$$\underline{\Gamma}_Y(F) = \Gamma_Y(X, F)^{\sim}$$

Ist A noethersch und M endlich erzeugt über A, so ist $\underline{\Gamma}_Y(F)$ kohärent.

(ii) Seien A ein noetherscher kommutativer Ring mit 1, M ein injektiver A-Modul.

Dann ist die Garbe $\widetilde{M}$ auf Spec A welk.

(iii) Für jedes Schema X, jedes abgeschlossene Teilschema $Y \subseteq F$ und jede quasi-kohärente Garbe F auf X die Garbe $\underline{\Gamma}_Y(F)$ quasi-kohärent.

Ist außerdem X noethersch und F kohärent, so ist auch $\underline{\Gamma}_Y(F)$ kohärent.

(vgl. Hartshorne, Algebraic geometry, Übung II.5.6 und Proposition III.3.4).

Beweis. Zu (i). Sei U eine offene Hauptmenge von Spec A, sagen wir

$$U = D(f) = \text{Spec } A_f,\ f \in A.$$

Der Durchschnitt $U\cap Y$ ist dann das abgeschlossene Teilschema von Spec A_f welches zum Ideal IA_f von A_f gehört,

$$U \cap Y = \text{Spec } A_f/IA_f\,.$$

Nach Definition der Garbe $F = \widetilde{M}$ ist $F|_U$ die quasikohärente Garbe auf Spec A_f zum

Modul M_f über A_f. Nach 2.3.3 (iii) erhalten wir

$$\begin{aligned}\Gamma(U, \underline{\Gamma}_Y(F)) &= \Gamma_{Y\cap U}(U, F|_U)\\ &= \{m \in M_f \mid \text{für jedes } a \in IA_f \text{ gibt es ein } n\in\mathbb{N} \text{ mit } a^n m = 0\}\\ &= \{\frac{m}{f^n} \mid m \in M, n\in\mathbb{N}, \exists\forall\ a\in I\ \exists\ u,v \in \mathbb{N}\ f^u a^v m = 0\}\\ &= \{\frac{m}{f^n} \mid m \in M, n\in\mathbb{N}, \exists\ u \in \mathbb{N}\ f^u m \in \Gamma_Y(X,F)\}\\ &= \Gamma_Y(X,F)_f\end{aligned}$$

Weil die offenen Hauptmengen $U = D(f)$ eine Topologie-Basis von $X = \operatorname{Spec} A$ bilden, folgt

$$\underline{\Gamma}_Y(F) = \Gamma_Y(X, F)^{\sim}.$$

Ist A noethersch und M endlich erzeugt über A, so ist der Teilmodul $\Gamma_Y(X, F)$ von

$$\Gamma(X, F) = M$$

ebenfalls endlich erzeugt, d.h. die Garbe $\underline{\Gamma}_Y(F)$ ist kohärent.

<u>Zu (ii)</u>. <u>1. Schritt</u>. Für jedes $f \in A$ ist die natürliche Abbildung $M \longrightarrow M_f$ surjektiv.

Für jede natürliche Zahl i setzen wir

$$N_i := \operatorname{Ann}(f^i).$$

Weil A noethersch ist, gibt es eine natürliche Zahl r mit

$$N_r = N_{r+1} = \dots$$

Sei $x \in M_f$ vor gegeben. Dann gibt es ein Element $m \in M$ und eine natürliche Zahl n mit

$$x = \frac{m}{f^n}$$

Betrachten wir die A-lineare Abbildung

$$A \longrightarrow M,\ a \mapsto af^r m.$$

Nach Definition der N_i enthält der Kern dieser Abbildung das Ideal $N_r = N_{n+r}$, d.h. die Abbildung faktorisiert sich über $A/N_{n+r} \cong f^{n+r}A$, $a \mapsto af^{n+r}$. Wir erhalten so eine A-lineare Abbildung

$$f^{n+r}A \longrightarrow M,\ af^{n+r} \mapsto af^r m.$$

Weil M injektiv ist, läßt sich diese Abbildung zu einer A-linearen Abbildung

$$\varphi: A \longrightarrow M$$

fortsetzen. Sei

$$n := \varphi(1).$$

Dann gilt

$$f^{n+r}n = f^{n+r}\bullet\varphi(1) = \varphi(f^{n+r}) = f^r m$$

also

$$x = \frac{m}{f^n} = \frac{f^r m}{f^{n+r}} = \frac{n}{1},$$

d.h. x ist das Bild von $n \in M$ bei der natürlichen Abbildung $M \longrightarrow M_f$.

<u>2. Schritt</u>. Beweis der Behauptung.
Wir führen den Beweis durch noethersche Induktion[17] nach der Abschließung

$$Y := (\mathrm{Supp}\,\widetilde{M})^{-}$$

des Trägers von der Garbe $\widetilde{M}$. Falls Y leer ist, ist M = 0 und die Behauptung ist trivialerweise richtig. Falls Y aus nur einem (automatisch abgeschlossenen) Punkt y besteht, gilt

$$\widetilde{M}(U) = \begin{cases} M & \text{falls } y \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Behauptung ist ebenfalls trivialerweise richtig. Nehmen wir jetzt an, daß Y aus mehr als nur einem Punkt besteht. Zum Beweis der Welkheit von $\widetilde{M}$ reicht es zu zeigen, daß für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ die Restriktionsabbildung

$$\Gamma(X, \widetilde{M}) \longrightarrow \Gamma(U, \widetilde{M})$$

surjektiv ist. Im Fall $Y \cap U = \emptyset$ ist dies trivialerweise der Fall (weil rechts die Null steht). Sei also

$$Y \cap U \neq \emptyset.$$

Da die offenen Hauptmengen von Spec A eine Topologie-Basis bilden, gibt es ein $f \in A$ mit

$$D(f) \subseteq U \text{ und } Y \cap D(f) \neq \emptyset. \tag{1}$$

Wir setzen

$$Z := X - D(f)$$

und betrachten das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(X,\widetilde{M}) & \longrightarrow & \Gamma(U,\widetilde{M}) & \longrightarrow & \Gamma(D(f),\widetilde{M}) \\ \cup & & \cup & & \\ \Gamma_Z(X,\widetilde{M}) & \longrightarrow & \Gamma_Z(U;\widetilde{M}) & & \end{array}$$

Sei $s \in \Gamma(U,\widetilde{M})$ vorgegeben und

$$s' := s|_{D(f)} \in \Gamma(D(f), \widetilde{M}) = M_f .$$

Nach dem ersten Schritt gibt es ein $t \in M = \Gamma(X, \widetilde{M})$ mit $t|_{D(f)} = s'$. Wir setzen

$$t' := t|_U .$$

Dann gilt

$$(s-t')|_{D(f)} = s' - s' = 0,$$

also

$$\mathrm{supp}(s-t') \subseteq X - D(f) = Z = V(fA).$$

Es reicht also zu zeigen, daß die Restriktionsabbildung

$$\Gamma_Z(X, \widetilde{M}) \longrightarrow \Gamma_Z(U, \widetilde{M}) \tag{2}$$

surjektiv ist, d.h. es reicht zu zeigen, die Garbe

[17] d.h. wir betrachten alle Moduln M, für welche die Behauptung falsch ist und die Menge der zugehörigen abgeschlossenen Teilmengen Y von Spec A. Weil Spec A noethersch ist, gibt es in dieser Menge ein minimales Element Y. Es reicht zu zeigen, daß die Behauptung für das M mit diesem Y gilt.

$$\underline{\Gamma}_Z(\widetilde{M})$$

ist welk. Nach (i) ist diese Garbe quasi-kohärent,

$$\underline{\Gamma}_Z(\widetilde{M}) = \Gamma_Z(X, \widetilde{M})^{\sim} = \widetilde{N}$$

mit

$$N = \Gamma_Z(X, \widetilde{M}) = \{m \in M \mid f^n m = 0 \text{ für ein } n > 0\}.$$

Nach 2.3.3 (iv) ist der A-Modul N ebenfalls injektiv. Für den Träger der Teilgarbe $\widetilde{N}$ von $\widetilde{M}$ erhalten wir

$$\mathrm{Supp}(\widetilde{N}) \subseteq Z \cap Y = Y - D(f)$$

Der Träger von $\widetilde{N}$ ist damit echt kleiner als Y (vlg. (1). Nach Induktionsvoraussetzung ist $\widetilde{N}$ welk, d.h. die Restriktionsabbildung (2) ist surjektiv.

Zu (iii). Zum Beweis des ersten Teils der Aussage reicht es zu zeigen, für jede affine offene Teilmenge U = Spec A von X ist die Garbe

$$\underline{\Gamma}_Y(F)|_U = \underline{\Gamma}_{Y\cap U}(F|_U)$$

quasi-kohärent. In dieser Situation hat aber $F|_U$ die Gestalt $F|_U = \widetilde{M}$ mit einem A-Modul M, und $Y \cap U$ ist ein abgeschlossenes Teilschema von U der Gestalt

$$Y \cap U = \mathrm{Spec}\ A/I \text{ mit einem Ideal I.}$$

Nach (i) ist damit

$$\underline{\Gamma}_Y(F)|_U = \Gamma_{Y\cap U}(U, F|_U)^{\sim}$$

d.h. es gilt die Behauptung.

Ist X noethersch und F kohärent, so ist A ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Der zweite Teil der Aussage folgt damit ebenfall aus (i).
QED.

2.3.7 Mayer-Vietoris-Sequenz

Seien X ein topologischer Raum,

$$Y' \subseteq X\ ,\ Y'' \subseteq X$$

zwei abgeschlossene Unterräume und F eine abelsche Garbe auf X. Dann besteht eine exakte Sequenz abelscher Gruppen

$$\ldots \longrightarrow H^j_{Y'\cap Y''}(X,F) \longrightarrow H^j_{Y'}(X,F) \oplus H^j_{Y''}(X,F)$$
$$\longrightarrow H^j_{Y'\cup Y''}(X,F) \longrightarrow H^{j+1}_{Y'\cap Y''}(X,F) \longrightarrow \ldots$$

welche Mayer-Vietories-Sequenz heißt.
Beweis. Betrachten wir den Komplex abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Y'\cap Y''}(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Y'}(X,F) \oplus \Gamma_{Y''}(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Y'\cup Y''}(X,F). \qquad (1)$$

$$s \mapsto (s,s) \qquad\qquad (s,t) \mapsto s-t$$

Dabei haben wir die natürlichen Inklusionen

$$\Gamma_{Y'\cap Y''}(X,F) \hookrightarrow \Gamma_{Y'}(X,F)$$

$$\Gamma_{Y'\cap Y''}(X,F) \hookrightarrow \Gamma_{Y''}(X,F)$$

$$\Gamma_{Y'}(X,F) \hookrightarrow \Gamma_{Y'\cup Y''}(X,F).$$

$$\Gamma_{Y''}(X,F) \hookrightarrow \Gamma_{Y'\cup Y''}(X,F).$$

verwendet. Man beachte, alle diese Gruppen sind Untergruppen von $\Gamma(X,F)$. Ist (s,t) ein Element aus dem Kern des rechten Homomorphismus, so gilt

$$s = t,$$

und der Träger von $s = t$ liegt sowohl in Y' als auch in Y'', also in $Y'\cap Y''$. Der Komplex ist also eine exakte Sequenz. Zeigen wir als nächstes, daß (1) sich zu einer kurzen exakten Sequenz erweitern läßt falls die Garbe F welk ist.

<u>1. Schritt</u>. Der linke Morphismus von (1) ist surjektiv, falls F welk ist.
Sei

$$s \in \Gamma_{Y'\cup Y''}(X,F)$$

ein vorgegebener Schnitt. Wir schreiben $Y'\cup Y'' - Y'$ in der Gestalt

$$Y'\cup Y'' - Y' = (Y'\cup Y'') \cap U$$

mit einer offenen Menge U von X und schränken s auf U ein. Der Träger der Einschränkung liegt dann in

$$\mathrm{supp}(s|_U) \subseteq (Y'\cup Y'') \cap U = Y'\cup Y'' - Y' \subseteq Y''.$$

Mit F ist auch die Garbe $\underline{\Gamma}_{Y''}(F)$ welk. Es gilt also einen Schnitt

$$t \in \Gamma_{Y''}(X, F)$$

mit $t|_U = s|_U$, d.h. die Einschränkung von

$$u := s - t$$

auf U ist Null, d.h.

$$\mathrm{supp}(u) \subseteq (Y'\cup Y'') - U = (Y'\cup Y'') - (Y'\cup Y'' - Y') \subseteq Y'.$$

Wir haben damit eine Zerlegung

$$s = u + t$$

gefunden mit $u \in \Gamma_{Y'}(X, F)$ und $t \in \Gamma_{Y''}(X, F)$. Das vorgegebene Element s ist damit das Bild des Elements $(u, -t)$ aus der mittleren Gruppe von (1). Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz.

<u>2. Schritt</u>. Konstruktion der exakten Sequenz.
Sei F eine vorgegebene abelsche Garbe auf X. Wir betrachten die welke Auflösung

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow C^*(F). \qquad (2)$$

Auf Grund des ersten Schritts erhalten wir für $j = 0, 1, 2,\ldots$ exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Y'\cap Y''}(X,C^j(F)) \longrightarrow \Gamma_{Y'}(X,C^j(F)) \oplus \Gamma_{Y''}(X,C^j(F)) \longrightarrow \Gamma_{Y'\cup Y''}(X,C^j(F)) \longrightarrow 0$$

die sich zu Komplexen abelscher Gruppen zusammensetzen. Aus der welken Auflösung (2) erhalten wir

$$H^j_{Y'}(X, F) = H^j(\Gamma_{Y'}(X, C^*(F)))$$

$$H^j_{Y''}(X, F) = H^j(\Gamma_{Y''}(X, C^*(F)))$$

$$H^j_{Y'\cap Y''}(X, F) = H^j(\Gamma_{Y'\cap Y''}(X, C^*(F)))$$
$$H^j_{Y'\cup Y''}(X, F) = H^j(\Gamma_{Y'\cup Y''}(X, C^*(F)))$$

Mit anderen Worten, die lange Kohomologie-Sequenz zur gerade konstruierten Komplex-Sequenz ist gerade die angegebene Mayer-Vietoris-Sequenz.
QED.

2.4 Kohomologie eines noetherschen affinen Schemas

2.4.1 Die Kohomologie quasi-kohärenter Garben

Seien A ein noetherscher kommutativer Ring mit 1 und
$$X := \operatorname{Spec} A.$$
Dann gilt
$$H^i(X, F) = 0$$
für jede quasi-kohärente Garbe F und jedes $i > 0$.

Bemerkung
Die Aussage gilt auch ohne die Annahme, daß A noethersch ist. Der Beweis im allgemeinen Fall ist aufwendiger, vlg. EGA III, 1.3.1) als der hier angegebne.
Beweis. Sei
$$M := \Gamma(X, F).$$
Weil F quasi-kohärent ist, gilt
$$F = \widetilde{M}.$$
Wir betrachten eine injektive Auflösung des A-Moduls M, sagen wir
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^*. \qquad (1)$$
Dann ist die zugehörige Sequenz quasi-kohärenter Garben
$$0 \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{I}^* \qquad (2)$$
exakt. Nach 2.3.6 ist jede der Garben $\widetilde{I}^i$ welk, d.h. bei der exakten Sequenz handelt es sich um eine welke Auflösung der Garbe $\widetilde{M} = F$. Da welke Garben azyklisch bezüglich des globalen Schnittfunktors sind, folgt
$$H^i(X, F) = H^i(\Gamma(X, \widetilde{I}^*)).$$
Durch Anwenden des globalen Schnittfunktors auf die Sequenz (2) erhalten wir aber die exakte Sequenz (1) zurück. Insbesondere ist
$$H^i(X, F) = H^i(\Gamma(X, \widetilde{I}^*)) = 0 \text{ für } i > 0.$$

QED.

2.4.2 Einbettung quasi-kohärenter Garben in welke quasi-kohärente Garben

Seien X ein noethersches Schema und F eine quasi-kohärente Garbe auf X. Dann ist F Teilgarbe einer welken quasi-kohärenten Garbe.
Beweis. Als noethersches Schema ist X Vereinigung von endlich vielen affinen offenen Teilmengen, sagen wir
$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_n \text{ mit } U_i = \operatorname{Spec} A_i \text{ für } i = 1,\ldots,n.$$
Wir schreiben

$$F|_{U_i} = \widetilde{M}_i \text{ für jedes } i$$

und betten den Modul M_i in einen injektiven Modul I_i ein,

$$M_i \subseteq I_i \text{ , mit } I_i \text{ injektiver } A_i\text{-Modul.}$$

Die quasi-kohärente Garbe $\widetilde{I}_i$ auf Spec A_i ist dann nach 2.3.6 (ii) welk. Bezeichne

$$f_i\colon U_i \hookrightarrow X$$

die natürliche Einbettung der offenen Menge U_i in X. Das direkte Bild $f_{i*}\widetilde{I}_i$ ist ebenfalls quasi-kohärent und welk. Da f_i^* linksadjungiert ist zum direkten Bild, definiert der identische Morphismus $f_i^*F \longrightarrow f_i^*F$ einen Morphismus

$$F \longrightarrow f_{i*}f_i^*F = f_{i*}(F|_{U_i})$$

In den Punkten von U_i dieser Morphismus auf den Halmen Isomorphismen. Aus der natürlichen Inklusion

$$F|_{U_i} = \widetilde{M}_i \hookrightarrow \widetilde{I}_i$$

erhalten wir durch Anwenden des direkten Bild-Funktors eine Inklusion

$$f_{i*}(F|_{U_i}) \hookrightarrow f_{i*}\widetilde{I}_i$$

und damit für jedes i einen Garbenmorphismus

$$F \longrightarrow f_{i*}\widetilde{I}_i$$

der auf den Halmen in allen Punkten aus U_i Injektionen induziert. Damit ist der zugehörige Diagonal-Morphismus

$$F \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n} f_{i*}\widetilde{I}_i$$

injektiv. Die direkte Summe rechts ist als direkte Summe welker quasi-kohärenter Garben welk und quasi-kohärent.
QED.
Bemerkung
Unser nächstes Ziel ist es, zu zeigen, daß die in 2.4.1 bewiesene Eigenschaft quasi-kohärenter Garben charakteristisch ist für affine noethersche Schemata. Zum Beweis benötigen wir einige vorbereitende Aussagen und insbesondere eine hinreichende Bedingung dafür, daß ein gegebenes Schema affin ist.

2.4.4 Die durch einen Schnitt der Strukturgarbe definierte Funktion

Seien X ein Schema und $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ein globaler Schnitt der Strukturgarbe. Für jeden Punkt $x \in X$ bezeichne

$$f(x)$$

das Bild des Keims $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ beim natürlichen Homomomorphismus

$$\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x} \hookrightarrow Q(\mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x}) = \kappa(x).$$

Weiter sein

$$X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Für jede offene affine Teilmenge U := Spec A von X ist

$$U \cap X_f = D(f|_U)$$

gerade die durch $f|_U \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ definierte offene Hauptmenge von U. Insbesondere ist X_f eine offene Teilmenge von X.

(ii) Sei X quasi-kompakt. Für jedes $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ mit $s|_{X_f} = 0$ gibt es dann eine Potenz von f, welche s annulliert,

$$f^\ell s = 0 \text{ für eine natürliche Zahl } \ell.$$

(iii) X besitze eine endliche offene affine Überdeckung

$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

derart, daß die paarweisen Durchschnitte $U_i \cap U_j$ quasi-kompakt sind. Dann gibt es für jeden Schnitt $a \in \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X)$ eine Potenz f^ℓ von f derart, daß $f^\ell a$ Einschränkung eines globalen Schnitts von $\mathcal{O}_X$ ist.

(iv) Unter den Bedingungen von (iii) gilt $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_f$.

(vgl. Hartshorne, Algebraic geometry, Übung II.2.16).

Beweis.

QED. <u>Zu (i)</u>. Für Punkte x aus U = Spec A haben f und $f|_U$ denselben Keim in x. Deshalb gilt $f(x) = (f|_U)(x)$. Wir können deshalb X und f durch U und $f|_U$ ersetzen und annehmen,

$$U = X = \text{Spec } A.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} U \cap X_f &= \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in \text{Spec } A \mid f \notin x\} \\ &= D(f). \end{aligned}$$

<u>Zu (ii)</u>. Sei U = Spec A eine affine offene Teilmenge von X. Mit $s|_{X_f} = 0$ gilt dann auch $s|_{U\cap X_f} = 0$, d.h. die Einschränkung $s|_U = \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A$ liegt im Kern der Restriktion

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \longrightarrow \Gamma(U\cap X_f, \mathcal{O}_U) = \Gamma(D(f|_U), \mathcal{O}_U) = A_{f|_U}$$

d.h. im Kern der natürlichen Abbildung

$$A \longrightarrow A_{f|_U}.$$

Deshalb wird $s|_U$ von einer Potenz von $f|_U$ annulliert,

$$0 = (f|_U)^\ell \cdot s|_U = (f^\ell s)|_U \text{ für ein } \ell = \ell(U).$$

Die offenen Mengen U überdecken X. Weil X quasi-kompakt ist, reichen endlich viele zum Überdecken, sagen wir

$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_r.$$

Bezeichne jetzt ℓ das Maximum der zu den einzelnen U_i gehörigen Exponenten. Dann gilt

$$(f^\ell s)|_{U_i} = 0 \text{ für } i = 1,\ldots,r.$$

Auf Grund des ersten Garbenaxioms folgt $f^\ell s = 0$ wie behauptet.
Zu (iii). Sei $U_i = \operatorname{Spec} A_i$. Wir schreiben den Schnitt

$$a|_{U_i \cap X_f} \in \Gamma(U_i \cap X_f, \mathcal{O}_X) = \Gamma(D(f|_{U_i}), \mathcal{O}_{U_i}) = (A_i)_{f|_{U_i}}$$

in der Gestalt

$$a|_{U_i \cap X_f} = \frac{a_i}{f_i^{n_i}} \text{ mit } f_i = f|_{U_i} \in A_i \text{ und } a_i \in A_i.$$

Da die Anzahl der U_i ist, können wir für alle i denselben Wert für die Exponenten n_i wählen,

$$n_i = n \text{ für alle i.}$$

Die Einschränkungen von $\frac{a_i}{f_i^n}$ und $\frac{a_j}{f_j^n}$ auf $U_i \cap U_j \cap X_f$ sind beide gleich $a|_{U_i \cap U_j \cap X_f}$, d.h. die Schnitte

$$a_i|_{U_i \cap U_j},\ a_j|_{U_i \cap U_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$$

haben dieselbe Einschränkung auf $U_i \cap U_j \cap X_f$. Nach (ii) wird deshalb die Differenz dieser Schnitte von einer Potenz von $f|_{U_i \cap U_j}$ annulliert. Da die Anzahl der U_i endich ist, können wir für jedes der Paare (i, j) dieselbe Potenz wählen, sagen wir

$$0 = (f|_{U_i \cap U_j})^\ell (a_i|_{U_i \cap U_j} - a_j|_{U_i \cap U_j}) = (f|_{U_i}^\ell \bullet a_i)|_{U_i \cap U_j} - (f|_{U_j}^\ell \bullet a_j)|_{U_i \cap U_j}$$

Auf Grund des zweiten Garbenaxioms gibt es einen Schnitt

$$b \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

mit

$$b|_{U_i} = f|_{U_i}^\ell \bullet a_i \text{ für } i = 1, \ldots, r.$$

Insbesondere ist

$$b|_{U_i \cap X_f} = a \bullet f^{n+\ell}|_{U_i \cap X_f} \text{ für } i = 1, \ldots, r.$$

Da die $U_i \cap X_f$ die offene Menge X_f überdecken, folgt auf Grund des ersten Garbenaxioms

$$b|_{X_f} = a \bullet f^{n+\ell},$$

d.h. es gilt die Behauptung.
Zu (iv). Betrachten wir die Restriktionsabbildung

$$\rho:\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X),\ s \mapsto s|_{X_f}.$$

Für jedes $x \in X_f$ gilt $f(x) \neq 0$, d.h. der Keim von f liegt nicht im maximalen Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$, ist also eine Einheit von $\mathcal{O}_{X,x}$. Das bedeutet, $f|_{X_f}$ ist eine Einheit des Rings[18]

$$\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X).$$

Deshalb faktorisiert sich die Restriktionsabbildung ρ über die natürliche Abbildung in den Quotientenring,

$$\sigma: \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_f.$$

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\sigma"'] & \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) \\
\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_f \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Nach (iii) ist die Abbildung μ surjektiv. Wir haben noch die Injektivität von μ zu beweisen. Betrachten wir ein Element des Kerns von μ, sagen wir

$$\frac{a}{f^\ell} \text{ mit } a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \text{ und } \ell \in \mathbb{N}.$$

Dann liegt auch das f^ℓ-fache dieses Elements im Kern, d.h. es ist

$$0 = \mu(f^\ell \bullet \frac{a}{f^\ell}) = \mu(\frac{a}{1}) = \mu(\sigma(a)) = \rho(a).$$

Nach (ii) wird a von einer Potenz von f annulliert. Dann gilt aber $\frac{a}{1} = \sigma(a) = 0$, also

$$0 = \frac{a}{1} = \frac{f^\ell}{1} \bullet \frac{a}{f^\ell}.$$

Weil $\frac{f^\ell}{1}$ eine Einheit von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_f$ ist, folgt

$$0 = \frac{a}{f^\ell}.$$

Also ist μ auch injektiv.
QED.

2.4.5 Die Garbe der Morphismen

Seien X und Y Schemata. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$sei

$$F(U) := \mathrm{Hom}_{Sch}(U, Y)$$

die Menge der Schema-Morphismen $U \longrightarrow Y$. Für je zwei offenen Teilmengen U, V von X mit $V \subseteq U$ sei

---

[18] Zu jedem Punkt $x \in X_f$ gibt es eine offene Umgebung U_x von x und einen Schnitt $s_x \in \Gamma(U_x, \mathcal{O}_X)$ mit $s_x \bullet f = 1$ auf U_x. Die s_x setzen sich zu einen Schnitt s von $\mathcal{O}_X$ über X_f zusammen.

$$F(U) \longrightarrow F(V),\ U \xrightarrow{\alpha} Y \mapsto V \xrightarrow{\alpha|_V} Y,$$

die Zusammensetzung mit der natürlichen Einbettung i: $V \hookrightarrow U$, d.h. $\alpha|_V := \alpha \circ i$. Dann ist F eine Garbe auf X mit Werten in der Kategorie der Mengen.

Beweis. Seien $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge von X und

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i$$

eine offene Überdeckung von U. Wir haben die beiden Garben-Axiome für F zu überprüfen. Seien

$$s,t \in F(U)$$

zwei Schnitte mit $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ für jedes i. Für die s und t zugrundeliegenden stetigen Abbildungen gilt dann s = t. Wir haben zu zeigen, dies gilt auch für die Schema-Morphismen, d.h. die Garben-Morphismen

$$s^{\#}: \mathcal{O}_Y \longrightarrow s_*\mathcal{O}_U \text{ und } t^{\#}: \mathcal{O}_Y \longrightarrow t_*\mathcal{O}_U$$

sind gleich. Mit anderen Worten, wir haben zu zeigen, für jede offene Teilmenge

$$V \subseteq Y,$$

sind die beiden folgenden Ring-Homomorphismen gleich.

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{s^{\#}(V)} \Gamma(s^{-1}(V), \mathcal{O}_U) \text{ und } \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{t^{\#}(V)} \Gamma(t^{-1}(V), \mathcal{O}_U).$$

Genauer, wir wissen bereits, es gilt

$$s^{-1}V = t^{-1}V,$$

und zu zeigen ist,

$$s^{\#}(V)f = t^{\#}(V)f \text{ für jedes } f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \tag{1}$$

und jede offene Teilmenge von V von Y. Nach Voraussetzung bestehen diese Identitäten, wenn man s und t durch die Einschränkungen dieser Morphismen of eine der offenen Teilmengen U_i von U ersetzt. Insbesondere gilt nach Voraussetzung

$$s^{\#}(V)f|_{s^{-1}V\cap U_i} = t^{\#}(V)f|_{s^{-1}V\cap U_i}$$

für jedes $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ und jede offene Teilmenge V von Y und jedes $i \in I$. Auf Grund des ersten Garben-Axioms für $\mathcal{O}_U$ gilt dann aber (1). Wir haben damit das erste Garben-Axiom für F bewiesen.

Sei eine Familie von Schnitten

$$s_i \in F(U_i)$$

gegeben, d.h. von Schema-Morphismen $s_i: U_i \longrightarrow Y$ mit

$$s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j} \tag{2}$$

für je zwei $i, j \in I$. Wir haben zu zeigen, daß es dann einen Schema-Morphismus

$$s: U \longrightarrow Y$$

gibt mit $s|_{U_i} = s_i$ für jede $i \in I$. Auf Grund von (2) gibt es zumindest eine stetige Abbildung $s: U \longrightarrow V$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für jedes $i \in I$. Sei s diese stetige Abbildung. Wir haben die Existenz eines Morphismus von Ring-Garben

$$s^{\#}: \mathcal{O}_Y \longrightarrow s_*\mathcal{O}_U$$

zu zeigen, dessen Zusammensetzung mit dem natürlichen Morphismus[19]

$$s_*\mathcal{O}_U \longrightarrow s_{i*}\mathcal{O}_{U_i}$$

für jedes $i \in I$ gleich $s_i^{\#}$ ist. Mit anderen Worten, für jede offene Teilmenge

$$V \subseteq Y$$

und jeden Schnitt $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ müssen wir einen Schnitt

$$s^{\#}(V)f \in \Gamma(s^{-1}(V), \mathcal{O}_U) = \Gamma(s^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$$

finden mit $s^{\#}(V)f\,|_{s^{-1}V \cap U_i} = s_i^{\#}(V)f$ für jedes $i \in I$. Auf Grund des zweiten Garben-Axioms für $\mathcal{O}_X$ existiert ein solcher Schnitt, falls

$$s_i^{\#}(V)f\,|_{s^{-1}V \cap U_i \cap U_j} = s_j^{\#}(V)f\,|_{s^{-1}V \cap U_i \cap U_j}$$

gilt für je zwei $i, j \in I$. Das ist aber der Fall wegen (2).

QED.

2.4.6 Die Garbe der Morphismen mit Werten in einem affinen Schema

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und X ein Schema. Dann besteht ein Isomorphismus von Bifunktoren

$$\alpha: \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(X, \mathrm{Spec}\ A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{Ringe mit } 1}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)),$$

mit Werten in der Kategorie der Mengen. Ist

$$s: X \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A$$

ein Morphismus von Schemata, so erhält man $\alpha(s)$, indem man auf den zugehörigen Garben-Morphismus

$$s^{\#}: \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A} \longrightarrow s_*\mathcal{O}_X$$

den globalen Schnitt-Funktor anwendet.

Beweis. Als Zusammensetzung des funktoriellen Morphismus $s \mapsto s^{\#}$ mit dem globalen Schnitt-Funktor ist α funktoriell. Wir haben die Bijektivität von α zu beweisen.

<u>1. Schritt</u>. Injektivität von α.
Für jeden Morphismus von Schemata

---

[19] Für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ sei

$$\Gamma(s^{-1}(V), \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(s_i^{-1}(V), \mathcal{O}_X),\ \alpha \mapsto \alpha|_{U_i},$$

gerade die Einschränkung der Schnitte der Strukurgarbe von X auf U_i.

$$s: X \longrightarrow Y := \operatorname{Spec} A,$$

jeden Punkt $x \in X$ und jede offene Umgebung $V \subseteq \operatorname{Spec} A$ von $y := s(x)$ ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccccc} A= & \Gamma(Y,\mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{s^\#(Y)} & \Gamma(X,\mathcal{O}_X) & \\ & \rho_V\downarrow & & \downarrow\rho_{s^{-1}V} & \\ & \Gamma(V,\mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{s^\#(V)} & \Gamma(s^{-1}V,\mathcal{O}_X) & \qquad (1) \\ & \rho_y\downarrow & & \downarrow\rho_x & \\ A_y = & \mathcal{O}_{Y,y} & \xrightarrow{s_x} & \mathcal{O}_{X,x} & \end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen sind dabei die Garben-Restriktionen bzw. die natürlichen Abbildungen in den direkten Limes. Die horizontalen Abbildungen kommen vom Morphismus s.

Bezeichne $m_{X,x}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$. Die Zusammensetzung der linken vertikalen Abbildungen ist dabei gerade die natürliche Abbildung

$$\sigma: A \longrightarrow A_y$$

in den Quotientenring. Es gilt deshalb

$$\begin{aligned} (\rho_x \circ \rho_{s^{-1}V} \circ s^\#(Y))^{-1}(m_{X,x}) &= (s_x \circ \sigma)^{-1}(m_{X,x}) \\ &= \sigma^{-1}(s_x^{-1} m_{X,x}) \\ &= \sigma^{-1}(yA_y) && (\ s_x \text{ ist lokaler Homomorpismus }) \\ &= y. && (\text{nach Definition von } \sigma). \end{aligned}$$

Der Punkt $y = s(x) \in Y$ ist damit eindeutig durch die folgenden Daten festgelegt:

- das Ideal $m_{X,x}$
- die rechten vertikalen Abbildungen (die nur von der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ abhängen)
- die Abbildung $\alpha(s) = s^\#(Y)$.

Mit anderen Worten, die dem Morphismus s zugrundeliegende stetige Abbildung

$$X \longrightarrow Y$$

ist durch $\alpha(s)$ festgelegt. Wir haben noch zu zeigen, der Garben-Morphismus

$$s^\#: \mathcal{O}_Y \longrightarrow s_*\mathcal{O}_X$$

ist ebenfalls durch $\alpha(s)$ festgelegt, d.h. die Familie der Homomorphismen

$$s^\#(V): \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(s^{-1}V , \mathcal{O}_X)$$

steht fest für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$, wenn $\alpha(s) = s^\#(Y)$ feststeht. Zum Beweis können wir uns auf den Fall beschränken, daß V eine offene Hauptmenge von Y = Spec A ist[20], sagen wir

$$V := D(f) \text{ mit } f \in A.$$

In diesem Fall hat das obere Viereck von (1) die Gestalt

---

[20] Weil die offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis bilden.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha(s)} & \Gamma(X,\mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_f & \xrightarrow{s^{\#}(V)} & \Gamma(s^{-1}V,\mathcal{O}_X) \end{array}.$$

Die linke vertikale Abbildung ist dabei die natürliche Abbildung $A \longrightarrow A_f$ in den Quotientenring. Das Bild von $f \in A$ in der rechten unteren Gruppe ist eine Einheit. Deshalb ist die Abbildung $s^{\#}(V)$ durch die Kommutativität dieses Vierecks eindeutig festlegt (auf Grund der Universalitätseigenschaft des Quotitientrings). Wir haben gezeigt, s ist durch $\alpha(s)$ eindeutig festgelegt, d.h. α ist injektiv.

<u>2. Schritt</u>. Surjektivität von α.
Sei

$$h: A \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

ein vorgegebener Homomorphismus von Ringen mit 1. Für jede affine offene Teilmenge von X, sagen wir

$$U = \operatorname{Spec} B \hookrightarrow X$$

erhalten wir durch Zusammensetzen von h mit der Garben-Restriktion einen Homomorphismus

$$h_U: A \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = B.$$

Dieser definiert einen Morphismus affiner Schemata

$$s_{h,U}: U = \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß sich diese Morphismen zu einem auf ganz X definierten Morphismus von Schemata zusammensetzen. Nach 2.4.5 reicht es zu zeigen, daß für je zwei affine offene Mengen

$$U' = \operatorname{Spec} B' \hookrightarrow X \text{ und } U'' = \operatorname{Spec} B'' \hookrightarrow X$$

die beiden Morphismen $s_{h,U'}$ und $s_{h,U''}$ auf $U'\cap U''$ übereinstimmen. Ebenfalls nach 2.4.5 reicht es zu zeigen, für jede affine offene Teilmenge

$$U = \operatorname{Spec} B \hookrightarrow U'\cap U''$$

sind die Einschränkungen von $s_{h,U'}$ und $s_{h,U''}$ auf U gleich. Mit anderen Worten wir haben die Kommutativität des folgenden Diagramms zu beweisen.

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[dr, "s_{h,U'}"'] & U \arrow[l, tail] \arrow[r, tail] \arrow[d, "s_{h,U}"] & U'' \arrow[dl, "s_{h,U''}"] \\ & \operatorname{Spec} A & \end{tikzcd}$$

Alle beteiligten Schemata sind affin. Es reicht deshalb zu zeigen, daß durch Anwenden des globalen Schnittfunktors ein kommutatives Diagramm entsteht. Es reicht damit die Kommutativität des folgenden Diagramms zu beweisen.

$$\begin{tikzcd} \Gamma(U',\mathcal{O}_X) \arrow[r] & \Gamma(U,\mathcal{O}_X) & \Gamma(U'',\mathcal{O}_X) \arrow[l] \\ & A \arrow[ul, "h_{U'}"] \arrow[u, "h_U"'] \arrow[ur, "h_{U''}"'] & \end{tikzcd}$$

Die oberen horizontalen Abbildungen sind dabei die Garben-Restriktionen. Die Kommutativität dieses Diagramms ergibt sich aus der Definition der h_U und der Tatsache, daß $\mathcal{O}_X$ eine Garbe (d.h. ein Funktor) ist.

QED.

2.4.7 Eine hinreichende Bedingung für affine Schemata

(i) Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata. Es existiere eine offene Überdeckung

$$Y = \bigcup_{i\in I} V_i$$

derart, daß die Einschränkungen

$$f^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i$$

für jedes i Isomorphismen sind. Dann ist f ein Isomorphismus.

(ii) Seien X ein Schema und $f_1,...,f_n \in A := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ endlich viele Schnitte der Strukturgarbe, so daß die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.
(a) Für jedes i ist die offene Menge

$$X_{f_i} := \{x \in X \mid f_i(x) \neq 0\}$$

affin.
(b) Das von den f_i in A erzeugte Ideal enthält das 1-Element von A.
Dann ist das Schema X affin.

Beweis. Zu (i). Die Umkehrungen der Einschränkungen $f^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i$ stimmen auf den gemeinsamen Teilen ihrer Definitionsbereiche V_i überein, setzen sich also zu einem Schema-Morphismus $Y \longrightarrow X$ zusammen (nach 2.4.5). Nach Konstruktion ist dieser invers zu f[21], d.h. f ist ein Isomorphismus.
Zu (ii). Der identische Ring-Homomorphismus

$$h = id: A \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

definiert nach 2.4.6 einen Schema-Morphismus

$$f: X \longrightarrow Y := \text{Spec } A.$$

Wir setzen

$$V_i := D(f_i) \; (\subseteq \text{Spec } A).$$

Für $y \in \text{Spec } A$ liegt das von den f_i erzeugte Ideal nicht in y (wegen (b)), d.h. mindestens ein f_i liegt nicht in y, d.h. es gilt $y \in D(f_i) = V_i$ für mindestens ein i. Wir haben gezeigt, die V_i bilden eine offene Überdeckung von Y,

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} V_i .$$

Berechnen wir $f^{-1}(V)$ für offene Hauptmengen $V = D(f) \hookrightarrow \text{Spec } A$, $a \in A$. Für $x \in X$ gilt:

---

[21] Dies ist klar für die zugrundeliegenden stetigen Abbildungen. Um dies für die Schema-Morphismen einzusehen, muß man die zugehörigen Garben-Morphismen betrachten und die durch sie auf den Halmen induzierten Abbildungen. Die Isomorphie der Garben läßt sich lokal in den Halmen überprüfen. Lokal ist f aber nach Voraussetzung ein Isomorphismus.

$$x \in f^{-1}(D(a)) \Leftrightarrow f(x) \in D(a) \Leftrightarrow a(f(x)) \neq 0 \text{ für die Funktion a auf } Y = \operatorname{Spec} A$$
$$\Leftrightarrow f^*(a)(x) \neq 0 \text{ für die Verpflanzung von a entlang f}$$
$$\Leftrightarrow h(a)(x) \neq 0 \text{ nach Definition von f}$$
$$\Leftrightarrow^{22} a(x) \neq 0 \text{ für die Funktion a auf X}$$
$$\Leftrightarrow x \in X_a .$$

Wir haben gezeigt,

$$f^{-1}(D(a)) = X_a$$

Insbesondere ergibt sich

$$f^{-1}(V_i) = X_{f_i}$$

und für beliebige i und j:

$$f^{-1}(V_i) \cap f^{-1}(V_j) = f^{-1}(V_i \cap V_j) = f^{-1}(D(f_i f_j)) = X_{f_i f_j}$$

Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(V_i) = X_{f_i} = \operatorname{Spec} B_i$ affin. Damit ist aber auch

$$f^{-1}(V_i) \cap f^{-1}(V_j) = \{x \in X_{f_i} \mid f_j(x) \neq 0\}$$
$$= \{ x \in \operatorname{Spec} B_i \mid (f_j|_{V_{f_i}})(x) \neq 0 \}$$
$$= \operatorname{Spec} (B_i)_{f_j|X_{f_i}}$$

affin, also quasi-kompakt für beliebige i und j.
Nach 2.4.4 (vi) gilt

$$\Gamma(f^{-1}(V_i), \mathcal{O}_X) = \Gamma(X_{f_i}, \mathcal{O}_X) = A_{f_i},$$

d.h. die Einschränkung von f auf V_i ist ein Isomorphismus

$$\operatorname{Spec} A_{f_i} = f^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i = \operatorname{Spec} A_{f_i}.$$

Nach (i) ist f selbst ein Isomorphismus, d.h. X ist affin.
QED.

2.4.8 Kohomologisches Kriterion for affine Schemata

Sei X ein noethersches Schema. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) X ist affin.
(ii) $H^i(X, F) = 0$ für jede quasi-kohärente Garbe F auf X und jedes $j > 0$.
(iii) $H^1(X, I) = 0$ für jede kohärente Idealgarbe $I \subseteq \mathcal{O}_X$.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Die Implikation besteht nach 2.4.1.

(ii) ⇒ (iii). Die Implikation besteht trivialerweise.

(iii) ⇒ (i). Es reicht zu zeigen, die Bedingungen von 2.4.7 (ii) sind erfüllt.

---

[22] Man beachte, h ist die identische Abbildung.

<u>1. Schritt</u>. X kann durch affine Teilmengen der Gestalt X_f mit $f \in A := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ überdeckt werden.

Seien $p \in X$ ein abgeschlossener Punkt, U eine affine offene Umgebung von p in X und

$$Y := X - U.$$

Sei $I_Y \subseteq \mathcal{O}_X$ die Idealgarbe von Y in $\mathcal{O}_X$ (d.h. die Garbe der Schnitte der Strukturgarbe mit Träger in U. Analog sei $I_{Y \bigcup \{p\}}$ die Idealgarbe der (echt größeren) abgeschlossenen Mengen $Y \bigcup \{p\}$ in $\mathcal{O}_X$. Beide Garben sind kohärente Idealgarben, die letztere eine Teilgarbe der ersteren, d.h. es besteht eine kurze exakte Sequenz kohärenter Garben

$$0 \longrightarrow I_{Y \bigcup \{p\}} \longrightarrow I_Y \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

In allen von p verschiedenen Punkten sind die Halme der Idealgarben gleich[23], d.h. es gilt

$$F_x = 0 \text{ für } x \in X - \{p\}.$$

Im Punkt x = p ist $I_{Y,x} = \mathcal{O}_{X,x}$ und $I_{Y \bigcup \{p\},p}$ ist gerade das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$, d.h. der Halm von F ist gerade der Restekörper

$$F_x = \kappa(x).$$

Damit ist F die Wolkenkratzergarbe mit

$$\Gamma(U, F) = \begin{cases} k(p) & \text{für } p \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus der kurzen exakten Garben-Sequenz erhalten wir eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(X, I_Y) & \longrightarrow & \Gamma(X,F) & \longrightarrow & H^1(X, I_{Y \bigcup \{p\}}) = 0 \\ & & \| & & \\ & & \kappa(p) & & \end{array}$$

Die erste Kohomologie rechts ist Null nach Voraussetzung (iii). Der linke Homomorphismus ist somit surjektiv. Es gibt einen Schnitt

$$f \in \Gamma(X, I_Y)$$

dessen Bild in k(p) das Einselement ist, d.h. mit

$$f(p) \neq 0.$$

Wegen $f \in I_Y$ gilt $f(x) = 0$ für $x \in Y$, d.h. es ist

$$p \in X_f \subseteq X - Y = U$$

also

$$p \in X_f = U_f$$

Mit U ist auch $U_f = X_f$ affin.

Durchläuft p alle abgeschlossenen Punkte von X, so ist die Vereinigung der zugehörigen Mengen X_f eine offene Teilmenge von X, die alle abgeschlossenen Punkte von X enthält. Das Komplement dieser Vereinigung ist abgeschlossen, enthält aber

---

[23] weil der Durchschnitt der beiden Mengen Y und $Y \bigcap \{p\}$ mit der offenen Menge X - {p} gleich ist (genauer, gleich Y).

keinen abgeschlossenen Punkt, muß also leer sein. Damit ist die Aussage des ersten Schritts bewiesen.
Weil X nach Voraussetzung noethersch ist, wird X bereits durch endlich viele Mengen X_f wie im ersten Schritt überdeckt, sagen wir

$$X = X_{f_1} \cup \ldots \cup X_{f_n} \text{ mit } f_1,\ldots,f_n \in A.$$

Nach 2.4.7(ii) reicht es zum Beweis der Behauptung, wenn wir die folgende Aussage beweisen.
2. Schritt. Die Schnitte $f_1,\ldots,f_n$ erzeugen das Einheitsideal von A.
Zum Beweis betrachten wir die $\mathcal{O}_X$-lineare Abbildung

$$\alpha: \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \mathcal{O}_X,$$

welche über jeder offenen Menge U von X gegeben ist durch die Abbildungsvorschrift

$$(s_1,\ldots,s_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i|_U \cdot s_i .$$

Für jeden Punkt $x \in X$ hat die auf den Halmen in x induzierte Abbildung die Gestalt

$$(s_1,\ldots,s_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (f_i)_x \cdot s_i .$$

Da die X_{f_i} eine Überdeckung von X bilden, gilt $f_i(x) \neq 0$ für mindestens ein i, d.h. mindestens ein f_i ist eine Einheit in $\mathcal{O}_{X,x}$. Die Abbildung auf den Halmen in x ist surjektiv. Da diese für alle x gilt, ist der Garben-Morphismus surjektiv. Wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_X^n \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \text{ mit } F := \operatorname{Ker}(\alpha).$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, es gilt

$$H^1(X, F) = 0, \tag{1}$$

denn dann ist die durch α induzierte Abbildung

$$A^n = \Gamma(X, \mathcal{O}_X^n) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A,\ (a_1,\ldots,a_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot a_i ,$$

surjektiv, d.h. 1 liegt im Bild, d.h. die f_i erzeugen das Einheitsideal.
Zeigen wir also, es gilt (1). Dazu betrachten wir die folgende absteigende Kette von Teilgarben von F,

$$F = F_n \supseteq F_{n-1} \supseteq \ldots \supseteq F_0 = 0 \text{ mit } F_i = F \cap \mathcal{O}_X^i ,$$

zusammen mit den kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow F_i \longrightarrow F_i/F_{i-1} \longrightarrow 0$$

Wegen

$$F_i/F_{i-1} = F \cap \mathcal{O}_X^i / F \cap \mathcal{O}_X^{i-1} = F \cap \mathcal{O}_X^i + \mathcal{O}_X^{i-1}/\mathcal{O}_X^{i-1} \ (\subseteq \mathcal{O}_X^i/\mathcal{O}_X^{i-1} = \mathcal{O}_X)$$

ist F_i/F_{i-1} isomorph zu einer Idealgarbe von $\mathcal{O}_X$). Nach Voraussetzung gilt also

$$H^1(X, F_i/F_{i-1}) = 0.$$

Deshalb sind die Abbildungen

$$H^1(X, F_{i-1}) \longrightarrow H^1(X, F_i)$$

für alle i surjektiv. Wegen $F_0 = 0$ sind damit die $H^1(X, F_i) = 0$ für alle i. Speziel für i = n erhalten wir (1).
QED.

3.Spektral-Sequenzen

3.1 Literatur

Spanier: Algebraic topology
Letztes Kapitel (nur Definition und Konstruktion der Sequenz zu einem filtrierten Modul mit Differential, Anwendungen ignorieren - Berechnung von Homotopie-Gruppen).
Cartan, Eilenberg: Homological algebra
Konstruktion der Spektralsequenz zu einem filtrierten Modul mit Differential, sehr technisch, viele abgeleitete exakte Sequenzen.
Godement: Topologie algebrique et theorie des faisceaux
Etwas zu detailiert für meinen Geschmack, keine strenge Gliederung in Satz und Beweis wie bei vielen klassischen Büchern. Enthält aber die wichtigsten Konstruktionen.
Serre: Algebre commutative, multiplicites
Einführung in die kommutative Algebra einschließlich Spektralsequenzen, Anwendungen auf die Multiplizitätstheorie, Formel für die lokalen Schnittmultiplizitäten. Man lernt sehr schnell, was eine Spektralsequenz ist (und viele andere Dinge).
Grothendieck: Sur quelques points d' algebre homologique
Standardwerk zur homologischen Algebra und zu den Spektralsequenzen, leider nicht ganz selfcontained. Verweise auf Godement.
Grothendieck: Local cohomology
Quillen: Homotopical algebra
Eisenbud et al: Commutative algebra
Weibel, C.A.: An introduction to homological algebra, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 38,Cabridge University Press, Cambridge 1994
Berücksichtigt auch modernere Gesichtspunkte der homologischen Algebra, insbesondere simpliziale Methoden und abgeleitete Kategorien.

3.2 Begriff der Spektralsequenz

3.2.1 Vorbemerkungen

(i) In erster Näherung ist eine Spektralsequenz eine Folge von Komplexen

$$\{E_r\}_{r\geq k}$$

mit der Eigenschaft, daß $H(E_r)$ als graduierte Gruppe mit E_{r+1} übereinstimmt.
Für solche Folgen sind verschiedene Konvergenzbegriffe definiert, die eine Beziehung zu einem Komplex E_∞, der mit einer Filtration versehen ist.

(ii) Additive Invarianten von Komplexen wie zum Beispiel Länge, Dimension, Euler-Charakteristik bleiben beim Übergang zur Kohomologie erhalten. Spektralsequenzen erlauben es somit, Invarianten der E_r mit denen des Limes-Komplexes in Beziehung zu setzen.

(iii) Spektralsequenzen sind eine Quelle für exakte Sequenzen, in denen die Kohomologiegruppen des Anfangskomplexes E_k und die des Limeskomplexes E_∞ vorkommen.

(iv) Alle bekannten Spektralsequenzen haben eine etwas komplexere Struktur als in (i) beschrieben. Die allgemeinen Konstruktionsprinzipien für Spektralsequenzen, die Konvergenzbegriffe und allgemein Sätze über Spektralsequenzen beziehen sich auf diese komplexere Struktur. Insbesondere betrachtet man Doppelkomplexe E_r und deren zugehörige einfache Komplexe.

3.2.2 Definition

Die folgende Definition stammt (mit leichten Variationen[24]) aus dem Buch von Spanier: Algebraic topology.
Eine <u>kohomologische Spektralsequenz</u> E vom Typ E_k ist eine Folge von Komplexen

$$\{E_r, d_r\}_{r\geq k}$$

über einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$ und Morphismen mit folgenden Eigenschaften.

(a) $E_r = \{E_r^{pq}\}_{p,q\in Z}$ ist ein bigraduierter Modul und d_r ein Differential[25] vom Bigrad (r, -r + 1),

$$d_r = d_r^{pq}: E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$$

(b) Für jedes r ≥ k bestehen Isomorphismen graduierter Objekte

$$\alpha_r: H(E_r) \xrightarrow{\cong} E_{r+1},$$

d.h.

$$\alpha_r^{pq}: Ker(d_r^{pq})/Im(d_r^{p-r,q+r-1}) \xrightarrow{\cong} E_{r+1}^{pq}$$

Ein <u>Morphismus von Spektralsequenzen</u> φ: E → E' ist eine Familie von Homomorphismen

$$\varphi_r^{pq}: E_r^{pq} \to E'^{pq}_r$$

für alle p,q,r∈Z mit r≥k, die mit allen auftretenden Differentialen und den Morphismen α kommutieren und für welche der durch $\varphi_r=\{\varphi_r^{pq}\}_{pq}: E_r \to E'_r$ induzierte Homomorphismus

$$H(\varphi_r): H(E_r) \to H(E'_r)$$

gerade mit $\varphi_{r+1}: E_{r+1} \to E'_{r+1}$ übereinstimmt.

<u>Bemerkungen</u>

(i) In dualer Weise läßt sich der Begriff der <u>homologischen Spektralsequenz</u>

$$\{E^r_{pq}\}_{p,q\in Z}, \; r \geq k$$

definieren. Die beiden Konstruktionen gehen durch die Substitutionen

$$E_r^{pq} = E^r_{-p,-q}, \; E^r_{pq} = E_r^{-p,-q}$$

ineinander über. Die Differentiale der zugehörigen einfachen Komplexe haben im homologischen Fall den Grad -1.

(ii) In der Definition von Grothendieck wird zusätzlich angenommen, daß es für jedes Paar (p, q) ein r(p,q) gibt mit[26]

---

[24] Wir haben die Position der Indizes der Bezeichnungsweise von Grothendieck angepaßt.

[25] d.h. die d_r sind Morphismen von $\mathcal{C}$ mit $d_r \circ d_r = 0$. Insbesondere definieren diese Morphismen auf dem zu E_r gehörigen graduierten Objekt $\{E_r^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ mit

$$E_r^n := \oplus_{p+q=n} E_r^{pq}$$

einen Morphismus vom Grad +1, durch welchen dieses Objekti die Struktur eines Komplexes bekommt.

$$d_r^{pq} = 0 \text{ und } d_r^{p-r,q+r-1} = 0 \text{ für } r \geq r(p,q).$$

Man sagt in dieser Situation auch, die Spektralsequenz ist regulär. Es gilt dann $E_r^{pq} = E_{r+1}^{pq}$ für alle hinreichend großen r, und man schreibt für diese r

$$E_\infty^{pq} := E_r^{pq}.$$

Zum Begriff der Spektralsequenz gehört bei Grothendieck zusätzlich eine Familie von Objekten

$$E^n, n \in \mathbb{Z},$$

der mit einer absteigenden Filtration durch Teilobjekte versehen sind und eine Familie von Isomorphismen

$$\beta_r^{pq}: E_\infty^{pq} \longrightarrow G^p(E^{p+q}).$$

Zum Begriff des Morphismus gehört dann eine Familie von Morphismen filtrierter Komplexe, die mit den Morphismen β verträglich ist.

(iii) Die Spektralsequenzen bilden eine Kategorie. Die meisten bekannten Spektralsequenzen definieren Funktoren auf einer abelschen Kategorie mit Werten in der dieser Kategorie der Spektralsequenzen. Man nennt solche Funktoren auch spektrale Funktoren.

(iv) Vereinbarung. Wir werden hier oft der Einfachheit halber annehmen, die zugrundeliegende Kategorie $\mathcal{C}$ ist gleich Ab oder A-Mod.

3.2.3 Konvergenzbegriffe.

Seien $E = \{E_r^{pq}\}_{r\geq k}$ eine reguläre Spektralsequenz vom Typ k und ccccc ein graduiertes Objekt mit einer absteigenden regulären[27] Filtration F*H mit

$$F^pH^{p+q}/F^{p+1}H^{p+q} = E_\infty^{pq}$$

In dieser Situtation werden wir sagen, E komvergiert nach H, und drücken dies symbolisch dadurch aus, daß wir schreiben

$$E_k^{pq} \Rightarrow H^n$$

Eine Spektralsequenz $E = \{E_r^{pq}\}_{r\geq k}$ heißt beschränkt, wenn es für jedes ganze n nur endlich viele Paare (p,q) gibt mit

$$E_k^{pq} \neq 0 \text{ und } p + q = n.$$

Eine Spektralsequenz $E = \{E_r^{pq}\}_{r\geq k}$ kollabiert im Grad r, wenn es höchstens ein von Null verschiedenes Objekt unter den E_r^{pq} gibt.

Bemerkungen

(i) Mit $E_k^{pq} = 0$ gilt auch E_r^{pq} für alle $r \geq k$. Beschränkte Spektralsequenzen sind deshalb regulär.

(ii) Eine Spektralsequenz, die im ersten Quadranten konzentriert ist, d.h. mit

---

[26] d.h. das Differential mit der Quelle E_r^{pq} und das Differential mit dem Ziel E_r^{pq} sind Null.

[27] d.h. es gelte $H = \cup_{p\in Z} F^pH$ (die Filtration ist erschöpfend) und für jedes n gibt es ein p mit

$$F^pH^n = 0.$$

$E_k^{pq} \neq 0$ nur für $0 \le p$ und $0 \le q$,

ist regulär (muß aber nicht beschränkt sein).

(iii) Falls $E = \{E_r^{pq}\}_{r\ge k}$ kollabiert und gegen $H = \{H^n\}$ konvergiert, so gilt für jedes ganzzahlige n,

$$H^n = F^pH^{p+q}/F^{p+1}H^{p+q} = E_\infty^{pq}$$

wenn $p + q = n$ und $E_\infty^{p'q'} = 0$ gilt für alle Paare (p',q') mit $p'+q' = n$, die von (p,q) verschieden sind.[28]

3.2.4 Konstruktion der E_∞^{pq} im allgemeinen Fall

Sei $E = \{E_r^{pq}\}_{r\ge k}$ eine nicht notwendig reguläre Spektralsequenz. Nach Definition ist E_{k+1}^{pq} bis auf Isomorphie ein Subquotient von E_k^{pq}, d.h.

$$E_{k+1}^{pq} \cong Z_{k+1}^{pq}/B_{k+1}^{pq}$$

mit

$$B_{k+1}^{pq} \subseteq Z_{k+1}^{pq}.$$

Wenn man das rechte Objekt so verkleinert und das linke so vergrößert, daß die Inklusion erhalten bleibt, so erhält man durch Faktorisieren einen Subquotienten des Subquotienten, also zum Beispiel E_{k+1}^{pq}. Durch Wiederholen ergiben sich so Folgen von Teilobjekten

$$0 = B_k^{pq} \subseteq B_{k+1}^{pq} \subseteq \ldots \subseteq B_r^{pq} \subseteq \ldots \subseteq Z_r^{pq} \subseteq \ldots \subseteq Z_{k+1}^{pq} \subseteq Z_k^{pq} = E_k^{pq}$$

mit

$$E_r^{pq} \cong Z_r^{pq}/B_r^{pq}$$

für alle r. Ist E regulär, so sind die Folgen der Teilobjekte B_r^{pq} bzw. Z_r^{pq} stationär, d.h. es gilt

$$E_\infty^{pq} \cong Z_\infty^{pq}/B_\infty^{pq} \text{ mit } Z_\infty^{pq} := \bigcup_{r\ge k} B_r^{pq} \text{ und } B_\infty^{pq} := \bigcap_{r\ge k} B_r^{pq}.$$

Ist E nicht notwendig regulär, so kann man auf diese Weise E_∞^{pq} definieren, so daß die Schreibweise

$$E_k^{pq} \Rightarrow H^n$$

auch für nicht-notwendig reguläre Spektralsequenzen eine Bedeutung bekommt. Wir sprechen in dieser Situation davon, daß E <u>schwach konvergiert gegen</u> H.

3.2.5 Kanten-Morphismen

Sei $E = \{E_r^{pq}\}_{r\ge k}$ eine Spektralsequenz, die im ersten Quadranten konzentriert ist. Für jede ganze Zahl n ist dann für höchsten endlich viele (p,q) mit $p + q = n$ das Objekt

$$E_\infty^{pq}$$

---

[28] wegen $F^{p'}H^n = F^{p'+1}H^n$ für alle (p',q').

von Null verschieden. Falls E gegen H = $\{H^n\}$ konvergiert,

$$E_k^{pq} \Rightarrow H^n,$$

so ist für jedes n die Filtration H^n endlich, denn mit

$$F^pH^n/F^{p+1}H^n = E_\infty^{pq}\ , p + q = n$$

ist[29]

$$0 = F^{n+1}H^n \subseteq F^nH^n \subseteq F^{n-1}H^n \subseteq \ldots \subseteq F^0H^n = H^n.$$

Weil E im ersten Quadraten konzentriert ist, ist E_∞^{0n} ein Teilobjekt von E_k^{0n}. Wir erhalten so einen Morphismus

$$H^n = F^0H^n \twoheadrightarrow F^0H^n/F^1H^n = E_\infty^{0n} \hookrightarrow E_k^{0n} \tag{1}$$

Analog ist E_∞^{n0} Faktorobjekt von E_k^{n0}, und wir erhalten einen Morphismus

$$E_k^{n0} \twoheadrightarrow E_\infty^{n0} = F^nH^n/F^{n+1}H^n = F^nH^n \hookrightarrow H^n \tag{2}$$

Die Morphismen heißen <u>Kanten-Morphismen</u> der Spektralsequenz.

3.2.6 Beispiel

Sei E = $\{E_r^{pq}\}_{r\geq k}$ konzentriert im ersten Quadranten,k = 2. Die Spektralsequenz konvergiere E gegen H = $\{H^n\}$. Dann ist der linke Morphismus von (2) für n = 1 injektiv. Das Bild von (2) ist in diesem Fall gleich F^1H^1, d.h. man erhält eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow E_2^{10} \longrightarrow H^1 \twoheadrightarrow H^1/F^1H^1$$

Wegen $H^1/F^1H^1 = F^0H^1/F^1H^1 = E_\infty^{01} \subseteq E_2^{01}$ erhält man eine exakte Sequenz der Gestalt

$$0 \longrightarrow E_2^{10} \longrightarrow H^1 \longrightarrow E_2^{01} \tag{3}$$

Der Morphismus von (2) für n = 2 hat als Kern das Bild von

$$d_2^{01} : E_2^{01} \longrightarrow E_2^{20}$$

und den Kokern H^2/F^2H^2. Wir erhalten so eine exakte Sequenz

$$E_2^{01} \longrightarrow E_2^{20} \longrightarrow H^2 \longrightarrow H^2/F^2H^2 \longrightarrow 0.$$

Der Kern des linken Morphismus ist $E_3^{01} = E_\infty^{01}$ = Bild des rechte Morphismus von (3). Damit erhalten wir eine exakte Sequenz der Gestalt

$$0 \longrightarrow E_2^{10} \longrightarrow H^1 \longrightarrow E_2^{01} \longrightarrow E_2^{20} \longrightarrow H^2 \longrightarrow H^2/F^2H^2 \longrightarrow 0.$$

Für weitere exakte Sequenzen dieser Art, siehe Cartan & Eilenberg: Homological algebra, Kapitel 15.

3.2.7 Beispiel

Die Spektralsequenz E = $\{E_r^{pq}\}_{r\geq 2}$ sei konzentriert in den beiden Zeilen q=0 und q=1, d.h.

---

[29] Weil die Filtration von H^n nach Voraussetzung ausschöpfend und separiert sein soll.

$$E_r^{pq} \neq 0 \text{ höchstens für } q = 0 \text{ und } q = 1.$$

Die Sequenz konvergiere gegen $H = \{H^n\}$. Dann besteht eine exakte Sequenz der Gestalt

$$\ldots \longrightarrow H^{p+1} \longrightarrow E_2^{p,1} \xrightarrow{d_2^{p,1}} E_2^{p+2,0} \longrightarrow H^{p+2} \longrightarrow E_2^{p+1,1} \longrightarrow \ldots$$

Beweis. Auf Grund der Voraussetzungen gilt $d_r = 0$ für alle $r \ge 3$. Damit ist

$$\mathrm{Koker}(d_2^{p,1}) = E_3^{p+2,0} = E_\infty^{p+2,0} = F^{p+2}H^{p+2}.$$

Wir erhalten somit eine exakte Sequenz

$$E_2^{p,1} \xrightarrow{d_2^{p,1}} E_2^{p+2,0} \longrightarrow F^{p+2}H^{p+2} \longrightarrow 0$$

Zusammen mit der exakten Sequenz $F^{p+2}H^{p+2} \hookrightarrow F^{p+1}H^{p+2} \longrightarrow E_\infty^{p+1,1} \longrightarrow 0$ erhalten wir die Exaktheit von

$$E_2^{p,1} \xrightarrow{d_2^{p,1}} E_2^{p+2,0} \longrightarrow F^{p+1}H^{p+2} \longrightarrow E_\infty^{p+1,1} \longrightarrow 0$$

Weiter ist

$$E_\infty^{p+1,1} = E_3^{p+1,1} = \mathrm{Ker}(d_2^{p+1,1}),$$

d.h. die folgende Sequenz ist exakt.

$$E_2^{p,1} \xrightarrow{d_2^{p,1}} E_2^{p+2,0} \longrightarrow F^{p+1}H^{p+2} \longrightarrow E_2^{p+1,1} \xrightarrow{d_2^{p+1,1}} E_2^{p+3,0}.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es somit zu zeigen,

$$F^{p+1}H^{p+2} = H^{p+2}.$$

Betrachten wir die folgende Kette von Teilobjekten von H^{p+2}.

$$F^{p+1}H^{p+2} \hookrightarrow F^pH^{p+2} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow F^0H^{p+2} = H^{p+2}$$

Die Faktoren benachbarter Objekte sind isomorph zu den Objekten

$$E_\infty^{p,2}, E_\infty^{p-1,3}, \ldots, E_\infty^{0,p+2}$$

Letztere aber sind sämtlich Null. In der aufsteigenden Kette gilt also überall das Gleicheitszeichen.
QED.

3.2 Konstruktion von Spektralsequenz

Die Spektralsequenz zu einem filtrierten Modul mit Differential[30].
  Spezialfälle: filtrierter Komplex, Doppelkomplex
Die Spektralsequenz einer Funktorkomposition (auch ein Spezialfall)
Die Hyperkohomologiesequenz (auch ein Spezialfall)
Exakte Paare

3.3.1 Die Spektralsequenz zu einem filtrierten Komplex (Spanier: Chap. 9,$1 Th. 2)

Seien K ein Komplex mit den Differential ∂: $K \to K$ (des Grades 1) und

---

[30] Die Kontruktion für einen beliebigen filtrierten Modul mit Differential kann man bei Cartan-Eilgenberg nachlesen. Wir spielt dort aber nur eine ditaktische Rolle: da nirgends definiert wird, was eine Spektralsequenz wirklich ist, will man am Anfang die Startdaten wenigstens möglich einfach halten. Wirklich von Interesse ist aber nur der Fall, daß der Modul ein Kettenkomplex ist. Wir werden uns im folgenden auf diesen Fall beschränken.

$$F = \{F^p\}_{p\in Z}$$

eine absteigende Filtration durch Teilkomplexe von K mit folgenden Eigenschaften

(a) Für jedes n gibt es ein p mit $F^pK^n = K^n$ (d.h. die Filtration ist nach oben beschränkt)[31].

(b) Für jedes n gibt es ein p mit $F^p \cap K^n = 0$ (d.h., die Filtration ist nach unten beschränkt).

Dann gibt es eine Spektralsequenz des Typs E_1 mit

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(F^p/F^{p+1}) \Rightarrow H^n(K).$$

Die Differentiale des Anfangsterms E_1^{pq} sind gerade die Zusammenhangs-homomorphismen der langen Kohomologiesequenz des Tripels (F^p, F^{p+1}, F^{p+2}).

Beweis (Vgl. Spanier oder Godement). Für beliebige ganze Zahlen r und p setzen wir

(1) $Z_r^p := \{c\in F^pK \mid \partial c\in F^{p+r}K\}$ $\quad(\approx Z(F^pK/F^{p+r}K)$ für $r\ge 0$, F^pK sonst$)$

$Z_\infty^p := \{c\in F^pK \mid \partial c = 0\}$ $\quad(= Z(F^pK))$

Dies sind graduierte Moduln bezüglich einer Graduierung, die von der des Komplexes K kommt (bis auf eine Verschiebung):

$$Z_r^{p,q} := \{c\in F^pK^{p+q} \mid \partial c\in F^{p+r}K\}$$

$$Z_\infty^{p,q} := \{c\in F^pK^{p+q} \mid \partial c = 0\}$$

Es bestehen die Inklusionen graduierter Moduln

$$\ldots\partial Z_{-1}^{p+1} \subseteq \partial Z_0^p \subseteq \partial Z_1^{p-1} \subseteq \ldots \subseteq \partial K\cap F^pK \subseteq Z_\infty^p \subseteq \ldots \subseteq Z_{-1}^{p+1} \subseteq Z_0^p = F^pK$$

Wir setzen für $p,r\in Z$:

(2) $E_r^p := Z_r^p / (\partial Z_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1})$ $\quad$ (0 im Fall $r < 0$)[32].

$E_\infty^p := Z_\infty^p / (\partial K\cap F^p + Z_\infty^{p+1})$

Der Randoperator ∂ überführt Z_r^p in Z_r^{p+r} und $\partial Z_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}$ in ∂Z_{r-1}^{p+1}. Also induziert er einen Homomorphismus

$$\partial^r: E_r^p \to E_r^{p+r},\ [z] \mapsto [\partial z].$$

Dabei ist E_r ein bigraduierter Modul, $E_r =$[33] $\{E_r^{pq}\}$ und $\partial^r: E_r \to E_r$ ein Differential vom Bigrad[34] $(r,-r+1)$. Im Fall $r< 0$ ist $\partial^r = 0$.

---

[31] Im Buch von Spanier wird nur gefordert $\cup F^p = K$ und $\cap F^p = 0$ (d.h., die Filtration sei konvergent). Die Gruppen E_r^{pq} müssen dann nicht konstant sein von einem festen r an. Stattdessen mußt man einen direkten Limes bilden.

[32] Vereinbarung $M/N := (M+N)/N$ im Fall N nicht ganz in M.

[33] $E_r^{p,q} := Z_r^{p,q} / (\partial Z_{r-1}^{p+1,q-2} + Z_{r-1}^{p+r+1,q-r-1})$, man beachte $Z_r^{p,q} \subseteq K^{p+q}$

[34] $\partial^r(E_r^{p,q}) \subseteq E_r^{p+r,q-r+1}$

Der Wert des zweiten oberen Index ergibt aus der Bedingung, daß ∂ den Wert von p+q um 1 erhöht.

<u>Der Fall r = 0</u>: Wir erhalten

$$E_0^{p,q} = F^pK^{p+q}/F^{p+1}K^{p+q}$$

$$\partial^0: F^pK/F^{p+1}K \to F^pK/F^{p+1}K,\ \ [z] \text{ a } [\partial z].$$

Das Differential ist gerade die durch ∂:K→K induzierte Abbildung auf $F^pK/F^{p+1}K$.
<u>Der Fall r = 1</u>: Wir erhalten

$$E_1^p = Z_1^p / (\partial Z_0^p + Z_0^{p+1})$$

mit $Z_1^p = \{c\in F^p \mid \partial c\in F^{p+1}\}$ und $F^{p+1} := Z_0^{p+1}$. Wir betrachten Zählen und Nenner Modulo F^{p+1} und erhalten

$$Z_1^{p,q}/F^{p+1}K^{p+q} \qquad = \text{(p+q)-Kozyklen von } F^p/F^{p+1}$$

$$(\partial Z_0^{p,q-1} + F^{p+1}K^{p+q})/F^{p+1}K^{p+q} \quad = \text{(p+q)-Koränder von } F^pK/F^{p+1}K$$

also

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p/F^{p+1})$$

Wir haben bereits gesehen, die Differentiale ∂^1 werden durch ∂:K→K induziert, d.h. es sind gerade die Zusammenhangshomomorphismen des Tripels (F^p, F^{p+1}, F^{p+2}).
<u>Der Fall r>1</u>. Wir berechnen zuerst den Kern von ∂^r an der Stelle E_r^p. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\partial^r: E_r^p \to E_r^{p+r}) &=^{35} \{[c] \mid c\in Z_r^p,\ \partial c\in \partial Z_{r-1}^{p+1} + Z_{r-1}^{p+r+1}\}\\ &=^{36} \{[c] \mid c\in Z_{r+1}^p\} + \{[x] \mid x\in Z_{r-1}^{p+1}\}\\ &= (Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1}) / (\partial Z_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1})\end{aligned}$$

Nun berechnen wir den Teil des Bildes von ∂^r, der in E_r^p liegt. Es gilt nach (2):

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\partial^r: E_r^{p-r} \to E_r^p) &= \partial Z_r^{p-r} \bmod \partial Z_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}\\ &= (\partial Z_r^{p-r} + Z_{r-1}^{p+1}) / (\partial Z_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1})\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned}H^p(E_r) &= (Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1})/(\partial Z_r^{p-r} + Z_{r-1}^{p+1})\\ &= Z_{r+1}^p/Z_{r+1}^p\cap(\partial Z_r^{p-r} + Z_{r-1}^{p+1})\\ &=^{37} Z_{r+1}^p / (\partial Z_r^{p-r} + Z_{r+1}^p\cap Z_{r-1}^{p+1})\end{aligned}$$

---

35 Siehe Formel (2) für E_r^p.

36 Wegen $\partial c = \partial x + y$ mit $x\in Z_{r-1}^{p+1}$ und $y\in Z_{r-1}^{p+r+1}$ kann man c in der Gestalt c = (c-x) +x schreiben. Der erste Summand c-x liegt in F^p und es gilt $\partial(c-x) = y \in Z_{r-1}^{p+r+1} \subseteq F^{p+r+1}$. Es gilt also $c-x\in Z_{r+1}^p$. Wir haben gezeigt, die linke Seite liegt in der rechten.

Die umgekehrte Inklusion:

1. Summand: $c\in Z_{r+1}^p \Rightarrow c\in F^p$ und $\partial c\in F^{p+r+1} \Rightarrow c\in F^p$ und $\partial c\in Z_\infty^{p+r+1} \subseteq Z_{r-1}^{p+r+1}$
2. Summand: $c\in Z_{r-1}^{p+1} \Rightarrow c\in Z_r^p$ (p kleiner, Summe gleich) und $\partial c\in \partial Z_{r-1}^{p+1}$

$$= Z^{p}_{r+1} / (\partial Z^{p-r}_{r} + Z^{p+1}_{r})$$
$$= E^{p}_{r+1}$$

<u>Der Fall r = ∞</u>: Es gilt

$$E^{p}_{r} = Z^{p}_{r} / (\partial Z^{p-r+1}_{r-1} + Z^{p+1}_{r-1}) \qquad \text{(Definition von } E^{p}_{r}\text{)}$$
$$= Z^{p}_{r} / (\partial Z^{p-r+1}_{r-1} + Z^{p}_{r} \cap F^{p+1}) \qquad \text{(Definition von } Z^{p}_{r}\text{)}$$
$$= (Z^{p}_{r} + F^{p+1}) / (\partial Z^{p-r+1}_{r-1} + F^{p+1})$$

Seien jetzt p und q fest gewählt. Weil die Filtration F nach unten beschränkt ist, gibt es dann ein r mit

$$F^{p+r}K^{p+q} = 0,$$

d.h. $Z^{p,q}_{r} = Z^{p,q}_{\infty}$. Weil die Filtration nach oben beschränkt ist, gibt es außerdem ein r mit

$$F^{p-r+1}K^{p+q-1} = K^{p+q-1},$$

d.h. $Z^{p-r+1,q+r-2}_{r-1} = \{c \in K^{p+q-1} \mid \partial c \in F^{p}\}$ und $\partial Z^{p-r+1,q+r-2}_{r-1} = \partial K^{p+q-1} \cap F^{p}K^{p+q}$

Für große r gilt deshalb

$$E^{p,q}_{r} = (Z^{p,q}_{\infty} + F^{p+1}K^{p+q}) / (\partial K^{p+q-1} \cap F^{p}K^{p+q} + F^{p+1}K^{p+q})$$
$$= Z^{p,q}_{\infty} / Z^{p,q}_{\infty} \cap (\partial K^{p+q-1} \cap F^{p}K^{p+q} + F^{p+1}K^{p+q})$$
$$= Z^{p,q}_{\infty} / (\partial K^{p+q-1} \cap F^{p}K^{p+q} + Z^{p,q}_{\infty} \cap F^{p+1}K^{p+q})$$
$$= Z^{p,q}_{\infty} / (\partial K^{p+q-1} \cap F^{p}K^{p+q} + Z^{p+1,q-1}_{\infty})$$
$$= E^{p,q}_{\infty}$$

Wir haben noch zu zeigen, die durch F auf H(K) induzierte Filtration,

$$F^{p}H^{p+q}(K) := \mathrm{Im}(H^{p+q}(F^{p}) \to H^{p+q}(K)),$$

hat als zugehörige graduierte direkte Summanden gerade die $E^{p,q}_{\infty}$. Es gilt aber

$$F^{p}H(K) = (Z^{p}_{\infty} + \partial K)/\partial K$$
$$Gr^{p}_{F}H(K) = (Z^{p}_{\infty} + \partial K)/(Z^{p+1}_{\infty} + \partial K)$$
$$= Z^{p}_{\infty}/ (Z^{p+1}_{\infty} + \partial K \cap Z^{p}_{\infty})$$
$$= Z^{p}_{\infty}/ (Z^{p+1}_{\infty} + \partial K \cap F^{p})$$
$$= E^{p}_{\infty}$$

QED.

[37] Wegen $\partial Z^{p-r}_{r} \subseteq Z^{p}_{\infty} \subseteq Z^{p}_{r+1}$

3.3.2 Die beiden Spektralsequenz zu einem Doppelkomplex

Sei ein Doppelkomplex K gegeben, d.h. zwei Familien von Homomorphismen

$$d_I^{p,q}: K^{p,q} \to K^{p+1,q} \quad \text{und} \quad d_{II}^{p,q}: K \to K^{p,q+1}$$

mit $p,q \in Z$ wobei gilt

$$0 = d_I \circ d_I \qquad \text{(‘horizontale Differentiale’)}$$

$$0 = d_{II} \circ d_{II} \qquad \text{(‘vertikale Differentiale’)}$$

$$0 = d_I \circ d_{II} + d_{II} \circ d_I$$

Wir nehmen weiter an, der Doppelkomplex ist nach oben und rechts beschränkt[38], d.h.es gebe ganze Zahlen p_0 und q_0 mit

$$K^{p,q} = 0 \text{ falls gibt } p \geq p_0 \text{ oder } q \geq q_0.$$

Wir bezeichnen den zugehörigen einfachen Komplex ebenfalls mit K, d.h. es sei

$$K^n := \oplus_{p+q=n} K^{p,q}$$

$$d := d_I + d_{II} \qquad \text{das Differential von K.}$$

Wir versehen diesen Komplex auf zweierlei Weise mit einer Filtration.

$$F_I^p K := \oplus_{p' \geq p} K^{p'q'}$$

$$F_{II}^q K := \oplus_{q' \geq q} K^{p'q'}$$

Beide Filtrationen sind offensichtlich nach oben und unten beschränkt[39]. Es gibt also zwei Spektralsequenzen, die gegen denselben Limes konvergieren:

$$E_1^{pq} = H_{II}^q(K^{p*}) \Rightarrow H^n(K).$$

$$E_1^{pq} = H_I^p(K^{*q}) \Rightarrow H^n(K).$$

Dabei bezeichne K^{p*} den einfachen Komplex[40] mit dem Differential $d_{II}|K^{p*}$ und

$$H_{II}^q(K^{p*})$$

dessen q-te Kohomologie[41]. Analog bezeichne K^{*q} den einfachen Komplex mit dem Differential $d_I|K^{*q}$ und $H_I^p(K^{*q})$ dessen p-te Kohomologie. Wir schreiben im folgenden einfach $H_{II}^q(K)$ und $H_I^p(K)$ anstelle von $H_{II}^q(K^{p*})$ bzw. $H_I^p(K^{*q})$. Beide Kohomologien bilden als Glieder einer Spektralsequenz Komplexe. Aus der

---

[38] In den nachfolgenden Betrachtungen lassen sich diese Beschränktheitsforderungen durch schwächere ersetzen. Oder durch Beschränktheitsbedingungen in anderen Richtungen.

[39] Sie sind ohne jede Einschränkung an die Komplexe konvergent.

[40] Man kann sich auch $K^{p*} = F_I^p K / F_I^{p+1} K$ als Doppelkomplex vorstellen, der aus nur einer vertikalen Spalte besteht. Insbesondere sind die horizontalen Differentiale dieses Doppelkomplexes Null.

[41] Um zu verstehen, warum auf der linken Seite die q-te Kohomologie (und nicht die (p+q)-te) stehen muß, stelle man sich vor, die n-te Kohomologiegruppe des Doppelkomplexes habe einen Bestandteil, der von Zyklen des Teilkomplexes K^{p*} kommt. Um Elemente von $H^{p+q}(K)$ zu repräsentieren, müssen diese in

$$K^{p+q} \cap K^{p*} = K^{p,q}$$

liegen. Sie repräsentieren also Elemente der q-ten Kohomologiegruppe des Komplexes K^{p*}.

Konstruktion der Spektralsequenz zu einem filtrierten Komplex[42] kann man eine Beschreibung von deren Differentialen gewinnen: sie werden gerade von den Differentialen d_I bzw. d_{II} induziert. Damit erhalten wir:

$$E_2^{pq} = H_I^p H_{II}^q(K) \Rightarrow H^n(K).$$

$$E_2^{pq} = H_{II}^q H_I^p(K) \Rightarrow H^n(K).$$

Man spricht von den beiden Spektralsequenzen eines Doppelkomplexes.

3.3.3 Die Spektral-Sequenz zu einer Funktorkomposition (Grothendieck, Theorem 2.4.1).

Seien

$$F:C \to C' \text{ und } G:C' \to C''$$

zwei additive Funktoren abelscher Kategorien.Es gelte

(a) C und C' besitzen genügend viele injektive Objekte (d.h. jedes Objekt sei Teilobjekt eines injektiven).
(b) (F und) G sind linksexakt.
(c) F überführt injektive Objekte in G-azyklische Objekte (d.h. solche, die R^qG für q>0 annulliert).

Dann existiert für jedes Objekt $A \in C$ eine Spektralsequenz in C'',

$$E_2^{pq} = R^pG \circ R^qF(A) \Rightarrow R^n(G \circ F)(A)$$

Beweis. Sei

$$0 \to A \to I^*$$

eine injektive Aufflösung von A. Dann sind die $R^qF(A)$ nach Definition gerade die Kohomologie-Objekte des Komplexes

$$0 \to F(A) \to F(I^*),$$

d.h.

(1) $\qquad R^qF(A) = H^q(F(I^*)).$

Als nächstes wählen wir eine injektive Cartan-Eilenberg-Auflösung des Komplexes $K:=F(I^*)$, d.h. eine Folge von Komplex-Morphismen

$$0 \to K \to L$$

mit L konzentriert im ersten Quadranden und folgenden Eigenschaften.

(a) Die L^{pq} sind injektiv für beliebige p und q.
(b) Für jedes p sind die folgenden Sequenzen exakt.

$$0 \to K^p \to L^{p0} \to L^{p1} \to \ldots$$

(p-Spalte über der Zeile K)

$$0 \to B^pK \to B_I^p(L^{*0}) \to B_I^p(L^{*1}) \to \ldots$$

(Bilder der horizontalen Differentiale)

$$0 \to Z^pK \to Z_I^p(L^{*0}) \to Z_I^p(L^{*1}) \to \ldots$$

(Kerne der horizontalen Differentiale)

$$0 \to H^pK \to H_I^p(L^{*0}) \to H_I^p(L^{*1}) \to \ldots$$

(Homologie der horizontalen Differentiale)

(c) Die folgenden exakten Sequenzen zerfallen.

---

[42] siehe zum Beispiel Spanier oder Cartan-Eilenberg

$$0 \to B_I^p(L^{*q}) \to Z_I^p(L^{*q}) \to H_I^p(L^{*q}) \to 0$$

$$0 \to Z_I^p(L^{*q}) \to L^{pq} \to B_I^{p+1}(L^{*q}) \to 0$$

Man beachte, aus (c) ergibt sich, die Auflösungen von (b) sind injektive Auflösungen.

Fassen wir L als Doppelkomplex auf und betrachten den zugehörigen Doppelkomplex G(L), der durch Anwenden des Funktors G entsteht, und die zu letzterem gehörigen Spektralsequenzen:

$$E'^{pq}_2 := H^p_{II}H^q_I\,(G(L)) \Rightarrow H^n(G(L))$$

$$E''^{pq}_2 := H^p_I H^q_{II}\,(G(L)) \Rightarrow H^n(G(L))$$

Es gilt

$$\begin{aligned} R^pG(R^qF(A)) &= R^pG(H^q(F(I^*))) && \text{nach (1)} \\ &= H^p_{II}G(H^q_I(L)) && \text{nach (b)} \\ &= E'^{pq}_2 \end{aligned}$$

Die zerfallenden exakten Sequenzen von (c) bleiben exakt, wenn man den Funktor G auf sie anwendet. Daraus ergibt sich, daß für diese Sequenzen der Funktor G mit dem Kohomologie-Funktor kommutiert[43]. Es gilt also

$$R^pG(R^qF(A)) = H^p_{II}(H^q_I(GL))$$

Den Anfangsterm der zweiten Spektralsequenz kann man analog interpretieren:

$$R^p((R^qG)\circ F)(A) = H^p((R^qG)(F(I^*))) \text{ da } 0 \to A \to I^* \text{ injektive Auflösung.}$$

$$= H^p_I H^q_{II}(G(L)) = E''^{pq}_2$$

Weil F injektive in G-azyklische Objekte überführt, besteht F(I*) aus G-azyklischen Objekten, d.h. es ist $R^qG(F(I^*)) = 0$ für $q \neq 0$. Die Spektralsequenz E'' ist somit konzentriert auf der x-Achse. Insbesondere sind sämtliche Differentiale Null, $H_{II}G(L)$ ist auf der x-Achse konzentriert[44], und es gilt

$$R^p(G\circ F)(A) = H^p(G(L)).$$

Die erste Spektralsequenz bekommt damit die Gestalt

$$R^pG(R^qF(A)) \Rightarrow R^p(G\circ F)(A).$$

QED.

3.3.4 Die Leray-Spektral-Sequenz

Seien $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$ zwei stetige Abbildungen. Wir betrachten die beiden Funktoren[45]

$$f_* : (\text{abelsche Garben auf } X) \to (\text{abelsche Garben auf } Y)$$

---

[43] Bilder, Kerne und Kohomologie werden koordinatenweise gebildet.

[44] Für q = 0 ist

$$\begin{aligned} R^p(GF)(A) &\overset{q=0}{=} E''^{pq}_2 = E''^{pq}_\infty = F^p H^{p+q}(G(L))/F^{p+1}H^{p+q}(G(L)) \\ &= H^{p+q}(G(L)) \qquad \text{(die Sequenz kollabiert)} \\ &\overset{q=0}{=} H^p(G(L)) \end{aligned}$$

[45] $(f_*F)(U) = F(f^{-1}(U))$ für jede Garbe F auf X, f_*F ist dann eine Garbe auf Y.

$$g_* : \text{(abelsche Garben auf Y)} \to \text{(abelsche Garben auf Z)}$$

Beide Funktoren sind linksexakt. Beide überführen welke Garben in welke Garben.[46] Da injektive Garben welk sind, sind gibt es somit eine Funktor-Kompositions-Spektralsequenz,

(1) $$R^p g_* \circ R^q f_* \Rightarrow R^n (g\circ f)*$$

Ist speziell Z = {pt} der einpunktige Raum, so ist g_* gerade der globale Schnittfunktor,

$$g_* = \Gamma(Y, ?): \text{(abelsche Garben auf Y)} \to Ab,\ F \mapsto \Gamma(Y,F),$$

also $R^p g_*(F) = H^p(Y,F)$ gerade der Kohomologie-Funktor. Die Spektralsequenz nimmt also die folgende Gestalt an.

(2) $$H^p(Y, R^q f_* F) \Rightarrow H^n(X, F)$$

Dabei bezeichne F eine Garbe von abelschen Gruppe auf X.Die Spektralsequenz heißt <u>Leray-Spektral-Sequenz</u> der stetigen Abbildung $f:X\to Y$. Speziel für die konstante Garbe mit dem Halm Z erhält man eine Spektralsequenz

(3) $$H^p(Y, R^q f_* Z) \Rightarrow H^n(X, Z)$$

mit der klassischen singulären Kohomologie als Limesterm.

3.10 Hyperkohomologie

Seien

$$F: C \to C'$$

ein (linksexakter) additiver Funktor abelscher Kategorien und K ein Komplex über C. Wir nehmen an, C hat genügend viele injektive Objekte und K ist konzentiert auf der rechten Halbachse, d.h.

$$K^n = 0 \text{ für } n < 0.$$

Weiter sei

$$0 \to K \to L^*$$

eine Sequenz von Komplex-Abbildungen mit folgenden Eigenschaften.

1. $0 \to K^n \to L^{n*}$ ist exakt für jedes n.
2. $R^n F(L^{p,q}) = 0$ für beliebige p,q und n > 0.

<u>Beispiele</u> für solche Komplexe L.

(a) $0 \to K \to L^*$ ist eine injektive Auflösung in der abelschen Kategorie der Komplexe K über C, die auf der rechten Halbachse konzentiert sind. Es ist leicht zu sehen, die injektiven Objekte sind gerade die Komplexe I* mit

I^n injektiv für alle n

$H^n(I^*) = 0$ für n>0

$Z(I) \subseteq I^*$ ist ein direkter Summand.

Die Komplex-Kategorie hat genügend viele injektive Objekte.

(b) L ist eine injektive Caran-Eilenberg-Auflösung von K.

Sei jetzt L* eine Sequenz wie oben beschrieben (d.h. Bedingunen 1 und 2 sollen erfüllt sein). Dann können wir L als Doppelkomplex auffassen. Die Kohomologie

$$HF(L)$$

des einfachen Komplexes F(L) ist dann im wesentlichen unabhängig von der speziellen Wahl von L. Sie heißt <u>Hyperkohomologie des Funktors</u> F bezüglich des Komplexes K und wird mit

$$\mathbf{R}F(K)$$

---

[46] d.h. Garben, für welche die Restriktionen $F(X) \to F(U)$ sämtlich surjektiv sind.

bezeichnet.
Beweis der Unabhängigkeit von HF(L) von L. Sei

$$0 \to K \to L'^*$$

eine injektive Auflösung von K (vgl. (a)). Dann gibt es über K einen Komplex-Morphismus (von Komplexen)

$$L^* \to L'^*$$

(der eindeutig ist bis auf Homotopie). Dieser induziert einen Morphismus von Doppelkomplexen

$$F(L) \to F(L')$$

und dieser wiederung einen Morphismus der zugehörigen ersten Spektralsequenzen. Insbesondere haben wir einen Morphismus der entsprechenden Anfangsterme

$$I_2^{p,q} = H_I^p H_{II}^q\,(F(L)) \to I'\,{}_2^{p,q} = H_I^p H_{II}^q\,(F(L'))$$

Dies ist sogar ein Isomorphismus, denn nach Definition der abgeleiteten Funktoren identifizieren sich diese Terme in natürlicher Weise mit

$$H^pR^qF(K)$$

Da die Spektralsequenzen konvergieren, ist der Morphismus der beiden Spektralsequenzen ein Isomorphismus. Insbesondere sind die Limes-Terme in natürlicher Weise isomorph[47], d.h. der Isomorphismus hängt nicht von der Wahl des

$$HF(L) \to HF(L')$$

Morphismus $L^*\to L'^*$ ab.
QED.
Bemerkung
Der Beweis liefert eine Beschreibung der Hyperkohomologie als abgeleiteten Funktor

$$F\circ H^0\colon K \mapsto H^0(K) \mapsto F(H^0(K))$$

der Zusammensetzung von F mit dem (linksexakten) 0-ten Kohomologie-Funktor H^0.

Der Anfangsterm der zweiten Spektralsequenz des Doppelkomplexes F(L') ist nämlich gerade

$$II'{}_2^{p,q} = H_{II}^q H_I^p(F(L'))$$

Als injektives Objekt der Komplex-Kategorie ist L'^{*q} für jedes q exakt in allen positiven Graden und ist eine zerfallende exakte Sequenz (d.h.direkte Summe kurzer zerfallender exakter Sequenzen). Insbesondere gilt

$$H_I^p(F(L') = 0 \text{ für alle } p \ne 0.$$

Die Spektralsequenz degeneriert (alle Differentiale sind Null), d.h. die von Null verschiedenen Anfangsterme sind gleich den entsprechenden Limestermen,

$$H_{II}^q H_I^0(F(L')) = H^q(F(L'))$$

Rechts steht gerade die Hyperkohomologie von F und links stehen die rechtsabgeleiteten Funktoren von $F\circ H^0$,

$$R^q(F\circ H^0)(K) = \mathbf{R}^q(FK).$$

3.11 Die beiden Hypercohomologie-Spektralsequenzen eines Funktors F

(1) $\quad I(F)_2^{p,q} = (H^p\circ R^qF)(K) \Rightarrow \mathbf{R}^nF(K)$

---

[47] Wir benutzen hier die Tatsache, daß ein Morphismus von kurzen exakten Sequenzen der Gestalt

$$0\to F^{p+1}/F^{p+r} \to F^p/F^{p+r}\to F^p/F^{p+1}\to 0$$

genau dann ein Isomorphismus ist, wenn er Isomorphismen auf den beiden äußeren Termen induziert.

(2) $\quad II(F)_2^{p,q} = (R^pF\circ H^q)(K) \Rightarrow \mathbf{R}^nF(K)$

Diese Spektralsequenzen heißen Hyperkohomologie-Spektralsequenzen des Funktors F bezüglich des Komplexes K.

Beweis. (1) ist gerade die erste Spektralsequenz zum oben betrachteten Doppelkomplex F(L).

Um (2) zu bekommen, wählen wir für L eine Cartan-Eilenberg-Auflösung

$$0 \to K \to L^*.$$

Insbesondere hat man dann injektive Auflösungen

(3) $$0 \to H^q(K) \to H_I^q(L^*).$$

Wegen der zerfallenden exakten Sequenzen der Cartan-Eilenberg-Auflösung, kommutiert der Kohomologie-Funktor H_I^q auf L^* mit additiven Funktoren. Insbesondere ist

$$F(H_I^q(L^*)) = H_I^q(FL).$$

Aus (3) erhält man also durch Anwenden von F einen Komplex

$$(0 \longrightarrow F\circ H^q (K) \to) \; H_I^q\circ F(L)$$

dessen Kohomologie-Gruppen gerade die $R^pF(H^q(K))$ sind. Die zweite Spektralsequenz zum Doppelkomplex F(L) hat damit den Anfangsterm

$$II_2^{pq} = H_{II}^p\circ H_I^q(FL) = R^pF\,(H^q(K)).$$

Das liefert den Anfangsterm (2). Der Limes-Term ist nach Definition gerade die Hyperkohomologie.

QED.

Bemerkungen

1. Sei $K \to K'$ ein Quasi-Isomorphismus von Komplexen, d.h.ein Komplex-Morphismus, der auf der Kohomologie einen Isomorphismus induziert. Dann werden auch auf den Anfangstermen der zweiten Hyperkohomologie-Spektral-Sequenz Isomorphismen induziert. Insbesondere sind die Limes-Terme isomorph, d.h. die beiden Komplexe haben isomorphe Hyperkohomologie.
2. Sei K ein Komplex aus F-azyklischen Objekten. Dann degeneriert die erste Hyperkohomologie-Spektralsequenz und es gilt
$$H^p(FK) = \mathbf{R}^nF(K),$$
d.h. die Hyperkohomologie stimmt überein mit der gewöhnlichen Kohomologie des Komplexes F(K).
3. Aus 1. und 2. ergibt sich eine Methode zur Berechnung der Hyperkohomologie: man wähle einen Quasi-Isomorphismus
$$K \to L$$
von K zu einem Komplex L aus F-azyklischen Objekten und berechne die Kohomologie von F(L).
4. Sei L eine Cartan-Eilenberg-Auflösung des Komplexes K. Dann ist die induzierte Abbildung der einfachen Komplexe $K \to L$ ein Quasi-Isomorphismus[48]. Das erklärt nachträglich, warum sich Cartan-Eilenberg-Auflösungen zur Konstruktion der Hyperkohomologie eignen.

Unser nächstes Ziel ist die Konstruktion der Spektralsequenz einer offenen Überdeckung eines topologischen Raums. In dieser tritt die sogenannte Čech-Kohomologie auf. Wir beginnen deshalb mit der Definiton der Čech-Kohomologie.

[48] Nach Definition ist die Kohomologie H(L) des einfachen Komplexes L gerade die Hyperkohomologie von K bezüglich des identischen Funktors Id. Da Id exakt ist, sind alle Objekte Id-azyklisch, d.h. die Hyperkohomologie H(L) von K ist kanonisch isomorph zu gewöhnlichen Kohomologie.

3.12 Čech-Kohomologie

Seien X ein topologischer Raum,

$$\mathbf{U} = \{U_i\}_{i\in I}$$

eine offene Überdeckung von X und

$$F \in Sh_X(Ab)$$

eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Wir versehen die Index-Menge I mit einer Wohlordnung. Für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ setzen wir

$$U_J := \cap_{j\in J} U_j$$

und

$$\check{C}^p(\mathbf{U},F) := \prod_{\#J=p+1} F(U_J)$$

Der Randoperator

$$d: \check{C}^p(\mathbf{U},F) \to \check{C}^{p+1}(\mathbf{U},F)$$

des <u>Čech-Komplexes</u> ist wie folgt definiert. Für

$$\alpha = (\alpha_J)_{\#J=p+1} \in \check{C}^p(\mathbf{U},F)$$

sei $d\alpha$ die Familie

$$d\alpha = ((d\alpha)_J)_{\#J=p+2}$$

mit

$$(d\alpha)_J = \sum_{\nu=0}^{p+1} (-1)^\nu \alpha_{J-\{j_\nu\}}|_{U_J}$$

für $J = \{j_0,...,j_{p+1}\}$ und $j_0<...<j_{p+1}$. Es ist leicht zu sehen, daß auf diese Weise ein Komplex definiert ist[49]. Die <u>Čech-Kohomologie der Überdeckung</u> **U** ist definiert als die Kohomologie des Čech-Komplexes,

$$\check{H}^p(\mathbf{U},F) := H^p(\check{C}^*(\mathbf{U},F)).$$

Sind **U** und **V** zwei Überdeckungen von X und ist **V** eine <u>Verfeinerung</u> von **U**, d.h. jede offene Menge von **V** liegt ganz in einer offenen Menge von **U**, so bestehen Gruppen-Homomorphismen

$$\check{C}^*(\mathbf{U},F) \longrightarrow \check{C}^*(\mathbf{V},F),$$

und man kann zeigen, daß die Komplexe $\check{C}^*(\mathbf{U},F)$ (und damit die Gruppen $\check{H}^p(\mathbf{U},F)$) ein filtrierendes direktes System bilden.

Die <u>Čech-Kohomologie</u> des Raumes X ist definiert als Limes über alle Überdeckungen von X,

$$\check{H}^p(X,F) := \lim_{\overrightarrow{\mathbf{U}}} \check{H}^p(\mathbf{U},F).$$

Bemerkungen

(i) Ist F eine Garbe von (nicht-notwendig abelschen) Gruppen, so liefern die obigen Konstruktionen immer noch eine Definition von $\check{H}^1(X,F)$. Eine genauere Analyse der Definition zeigt, daß diese Gruppe die Vektorraumbündel von X klassifiziert,

---

[49] $(dd\alpha)_J$ ist eine Linearkombination von Schnitten α_K (genauer: von deren Einschränkungen), wobei K aus J entsteht, indem man nacheinander zwei Indizes entfernt. Je nach Reihenfolge der Entfernung erhält man zwei Glieder, die sich nur in ihrem Vorzeichen voneinander unterscheiden, also gegenseitig wegheben.

deren Übergangsfunktionen Schnitte von F sind. Sei zum Beispiel X eine komplexe Mannigfaltigkeit und

$$F = GL(n, \mathcal{O}_X)$$

die Garbe der holomorphen Funktionen auf X mit Werten in der allgemeinen linearen Gruppe GL(n, $\mathbb{C}$). Ein 1-Kozyklus s zur Überdeckung **U** besteht dann aus einer Familie von homolomorphen Funktionen

$$s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}),\ U_\alpha \in \mathbf{U},$$

mit ds = 0, d.h. für je drei Indizes α, β, γ aus I mit $\alpha < \beta < \gamma$ gilt

$$Id = s_{\beta\gamma} \circ s^{-1}_{\alpha\gamma} \circ s_{\alpha\beta}$$

d.h. $s^{-1}_{\alpha\gamma} = s^{-1}_{\beta\gamma} \circ s^{-1}_{\alpha\beta}$, d.h. $s_{\alpha\gamma} = s_{\alpha\beta} \circ s_{\beta\gamma}$. Mit anderen Worten, s ist eine Famimilie von Übergangsfunktionen eines holomorphen Vektorraumbündels auf X.

Die 0-Koketten

$$t = \{ t_\alpha : U_\alpha \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}) \}_{\alpha \in I}$$

operieren auf den 1-Koketten vermittels

$$(t \bullet s)_{\alpha\beta} := t_\alpha \circ s_{\alpha\beta} \circ t^{-1}_\beta .$$

und überführen 1-Kozyklen in 1-Kozyklen. Im Fall kommutativer Gruppen liegen zwei 1-Kozyklen genau dann im selben Orbit, wenn sie sich um einen 1-Korand unterscheiden:

$$s'^{-1} \circ s'' = dt$$

d.h. $s'_{\alpha\beta} \circ s''^{-1}_{\alpha\beta} = t_\beta \circ t^{-1}_\alpha$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$, d.h.

$$t^{-1}_\beta s'_{\alpha\beta} = t^{-1}_\alpha \circ s''_{\alpha\beta}$$

d.h. im kommutativen Fall

$$s''_{\alpha\beta} = t_\alpha \circ s'_{\alpha\beta} t^{-1}_\beta$$

Deshalb ist es naheliegend, die Kohomologie-Gruppe

$$\check{H}^1(\mathbf{U}, F) \text{ mit } F = GL(n, \mathcal{O}_X)$$

zu definieren als die Menge der Orbits der 0-Koränder auf den 1-Kozyklen. Auf diese Weise liegen zwei 1-Kozyklen genau dann in derselben Kohomologie-Klasse, wenn sie zu isomorphen Bündeln gehören, und

$$\check{H}^1(X,F) := \varinjlim_{\mathbf{U}} \check{H}^1(\mathbf{U},F).$$

ist gerade die Menge der Isomorphie-Klassen der holomorphen Vektorraumbündel des Rangs n auf X. Im Fall n = 1 ist

$$F = \mathcal{O}^*_X$$

eine Garbe abelscher Gruppen, und $\check{H}^1(X,F)$ ist die Gruppe Isomorphieklassen der holomorphen Geradenbündel auf X. Anstelle der holomorphen Garbe $\mathcal{O}_X$ kann man auch andere Garben verwenden. Zum Beispiel die Garbe der glattten Funktionen auf einer glatten Mannigfaltigkeit oder die Garbe der regulären Funktionen auf einem Schema.

(ii) Der Čech-Komplex $\check{C}^*(\mathbf{U},F)$ entsteht durch Anwenden des globalen Schnittfunktors auf den sogenannten garbifizierten Čech-Komplex
$$\underline{\check{C}}^*(\mathbf{U},F)$$
mit
$$\underline{\check{C}}^p(\mathbf{U},F)\colon V \mapsto \check{C}^p(\mathbf{U}\cap V,F)$$
Dabei bezeichne $\mathbf{U}\cap V$ die Überdeckung $\{U_i\cap V \mid U_i\in\mathbf{U}\}$. Alternative Beschreibung:
$$\underline{\check{C}}^p(\mathbf{U},F) = \prod_{\#J=p+1} j_{I*}(F|_{U_I}).$$
Dabei bezeichne $j_I\colon U_I \hookrightarrow X$ die natürliche Einbettung der offenen Teilmenge U_I in den topologischen Raum X.
Dieser Garben-Komplex ist eine Auflösung von F für beliebige Garben F, d.h.
$$0\to F \to \underline{\check{C}}^*(\mathbf{U},F)$$
ist exakt.

(iii) Die Sequenz $0 \to F \to \underline{\check{C}}^*(\mathbf{U},F)$ ist eine injektive Auflösung falls F injektiv ist (d.h. die Sequenz zerfällt) und die Sequenz der globalen Schnitte ist ebenfalls exakt.

Beweis von (ii). Es reicht, die Exaktheit in den Halmen zu überprüfen. Wir geben ein $x\in X$ vor und wählen ein $j\in I$ derart, daß $x\in U_j$ gilt. Es reicht eine Homotopie
$$k\colon \underline{\check{C}}^p(\mathbf{U},G)_x \to \underline{\check{C}}^{p-1}(\mathbf{U},G)_x$$
mit $dk + kd = \mathrm{Id}$ zu konstruieren. Sei $\alpha\in\underline{\check{C}}^p(\mathbf{U},G)_x$. Wir betrachten die "Koordinaten" von α als in einer Umgebung von x definierte Schnitte und setzen für $i_0<\ldots<i_{p-1}$
$$(k\alpha)_{\{i_0,\ldots,i_{p-1}\}} = \varepsilon\cdot \alpha_{\{j,i_0,\ldots,i_{p-1}\}} = \varepsilon\cdot\alpha_{\{i_0,\ldots,j,\ldots,i_{p-1}\}}$$
Dabei sei ε das Vorzeichen der Permutation, welche j, i_0, ..., i_{p-1} in die natürliche Reihenfolge bringt und α_J sei Null, wenn #J von p+1 verschieden ist.
Wir erhalten für $J = \{i_0, \ldots,i_p\}$, $i_0< \ldots<i_p$ und j nicht in J, wobei j zwischen i_{x-1} und i_x liege[50]:
$$(dk\alpha)_J = \sum_\nu (-1)^\nu\, (k\alpha)_{\{i_0,\ldots,\hat{i}_\nu,\ldots,i_p\}}|_{U_J}$$
$$= \sum_{i_\nu<j} (-1)^\nu\varepsilon(J-\{i_\nu\},j)\alpha_{\{i_0,\ldots,\hat{i}_\nu,\ldots,j,\ldots,i_{p-1}\}}|_{U_J}$$
$$+ \alpha_{\{i_0,\ldots,i_{p-1}\}} \qquad (\text{wegen } (-1)^x = \varepsilon\,)^{51}$$

---

[50] Es ist dann $\varepsilon = \varepsilon(J,j) =$ Anzahl der Elemente von J vor $j = (-1)^x$.

[51] Im Fall $j \in J$ ist dies der einzige eventuell von Null verschiedene Summand.

$$- \sum_{j<i_\nu} (-1)^\nu \varepsilon(J-\{i_\nu\},j)\alpha_{\{i_0,\dots,j,\dots,\hat{i}_\nu,\dots,i_{p-1}\}}|U_J$$

$$= - \sum_{i_\nu<j} (-1)^\nu \varepsilon(J,j)\alpha_{\{i_0,\dots,\hat{i}_\nu,\dots,j,\dots,i_{p-1}\}}|U_J$$

$$+ \alpha_{\{i_0,\dots,i_{p-1}\}}$$

$$- \sum_{j<i_\nu} (-1)^\nu \varepsilon(J,j)\alpha_{\{i_0,\dots,j,\dots,\hat{i}_\nu,\dots,i_{p-1}\}}|U_J$$

$$= \alpha_J - \{ \varepsilon(J,j)\bullet(d\alpha)_{J\cup\{j\}} \}$$

Die geschweiften Klammern sollen dabei andeuten, daß in der alternierenden Summe in den Klammern das Glied, in welchen j als Index nicht vorkommt, fehlen soll. Wendet man den Operator k auf dieses Glied an, so erhält man nach Definition gerade Null. Deshalb gilt

$$(dk\alpha)_J = \alpha_J - (kd\alpha)_J.$$

Eine analoge Rechnung im Fall $j \in J$ liefert dieselbe Identität. Zusammen erhalten wir also $dk\alpha = \alpha - k(d\alpha)$, d.h.

$$dk + kd = Id.$$

Die identische Abbildung induziert also auf der Kohomologie des betrachteten Komplexes dieselbe Abbildung wie die Nullabbildung, d.h. die Kohomologie des Komplexes ist trivial.

QED.

Beweis von (iii). Es reicht, die beiden nachfolgenden Lemmata zu beweisen.

Lemma 1

Seien $U \subseteq X$ offen und F injektive Garbe auf X. Dann ist $F|_U$ injektiv auf U.

Lemma 2

Seien $U\subseteq X$ offen und F eine injektive Garbe auf U und $i: U \hookrightarrow X$ die natürliche Einbettung. Dann ist i_*F injektiv auf X.

<u>Zu Lemma 1</u>. Bezeichne $i: U \hookrightarrow X$ wie in Lemma 2 die natürlichen Einbettung. Aus dem Diagramm abelscher Garben auf U,

$$\begin{array}{l} B \\ \cup \\ A \to F|_U \end{array}$$

erhält man durch Anwenden des Funktors $i_!$ ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[drr] & & \\ \cup & & \\ A' \arrow[r] & i_!(F_U) \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

wobei der schräge Pfeil wegen der Injektivität von F existiert. Durch Einschränken auf U ergibt sich

$$\begin{array}{ccc} B & & \\ \cup & \searrow & \\ A & \to & F|_U \end{array}$$

Zu Lemma 2. Aus dem Diagramm abelscher Garben auf X,

$$\begin{array}{ccc} B & & \\ \cup & & \\ A & \to & i_*F \end{array}$$

erhält man durch Übergang zum adjungierten Funktor ein Diagramm[52]

$$\begin{array}{ccc} i^*B & & \\ \cup & \searrow & \\ i^*A & \to & F \end{array}$$

wobei der schräge Pfeil wegen der Injektivität von F existiert. Durch Übergang zum adjungierten Funktor ergibt sich

$$\begin{array}{ccc} B & & \\ \cup & \searrow & \\ A & \to & i_*F \end{array}$$

QED.

3.13 Die Spektralsequenz einer offenen Überdeckung

Seien X ein topologischer Raum, **U** eine offene Überdeckung von X und F eine Garbe von abelschen Gruppen. Dann existiert eine Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(\mathbf{U}, \mathbf{H}^q(F)) \Rightarrow H^n(X, F)$$

Dabei bezeichne $\mathbf{H}^q(F)$ die Prägarbe auf X mit $V \mapsto H^q(V, F)$ und $\check{H}^p(\mathbf{U},G)$ die Čech-Kohomologie mit Werten in der Prägarbe G.

Insbesondere bestehen die Kanten-Homomorphismen

$$\check{H}^n(\mathbf{U}, F) \longrightarrow H^n(X, F) \tag{1}$$

Bemerkungen

(i) Falls die Spektralsequenz kollabiert, sagen wir

$$\check{H}^p(\mathbf{U}, \mathbf{H}^q(F)) = 0 \text{ für } q \neq 0,$$

so stimmt die Čech-Kohomologie der Überdeckung trivialerweise mit der Garbenkohomologie überein:[53]

$$\check{H}^p(\mathbf{U}, F) = H^n(X, F).$$

Genauer: die Kanten-Homomorphismen (1) sind Isomorphismen.

(ii) Seien X ein separiertes noethersches Schema, F eine quasi-kohärente Garbe auf X und $U = \{U_j\}_{j\in J}$ eine Überdeckung von X durch affine offene Mengen.

Weil X separiert ist, sind dann die endlichen Durchschnitte $U_J = \bigcap_{j\in J} U_j$ ebenfalls affin, d.h. es gilt

[52] Man beachte, es gilt hier $i^*F = F|_U$. Insbesondere überführt i* Monomorphismen in Monomorphismen.

[53] Man beachte, $\mathbf{H}^0(F) = F$.

$$H^q(U_J, F) = 0 \text{ für alle endlichen } J \subseteq I.$$

Der Čech-Komplex $\check{C}(\mathbf{U}, \mathbf{H}^q(F))$ der Prägarbe $\mathbf{H}^q(F)$ ist identisch Null für $q \neq 0$, d.h die Bedingungen von (i) sind erfüllt. Die Čech-Kohomologie der quasi-kohärenten Garben bezüglich U stimmt mit der gewöhnlichen Garben-Kohomologie überein. Diese Tatsache wird uns in die Lage versetzen die Kohomologie der umkehrbaren Garben des projektiven Raums zu berechnen.

(iii) Die obige Spektralsequenz ist auch außerhalb der algebraischen Geometrie wichtig für Kohomologie-Berechnungen. Ist F eine konstante Garbe und sind die offenen Mengen U_j der Überdeckung U zusammen mit deren endlichen Durchschnitten kontrahierbar, so sind ebenfalls die Bedingungen von (i) erfüllt, d.h. die Čech-Kohomologie der Überdeckung stimmt mit der gewöhnlichen Garben-Kohomologie überein.

(iv) Wir werden sehen, die Konstruktion der obigen Spektralsequenz ist funktoriell und verträglich mit Verfeinerungen von Überdeckungen des Raumes X. Insbesondere definieren die Überdeckungen von X ein direktes System von solchen Spektralsequenzen. Durch Übergang zum direkten Limes erhält man eine Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(X, \mathbf{H}^q(F)) \Rightarrow H^n(X, F)$$

Insbesondere hat man Kanten-Homomorphismen

$$\check{H}^n(X, F) \longrightarrow H^n(X, F) \tag{2}$$

Weitere Aussagen zu den Eigenschaften der Čech-Kohomologie findet man in den Artikeln von Grothendieck [Gr 1957] und Serre [Se 1955] und im Lehrbuch von Godement [Go 1958]. Wir beschränken uns hier d einige Fakten (ohne Beweis) zu erwähnen.

(v) Für parakompakte Räume[54] stimmt die Čech-Kohomologie mit der gewöhnlichen Garben-Kohomologie überein, d.h. die Kanten-Homomorphismen (2) sind Isomorphismen. Für $p = 0$ und $p = 1$ gilt dies auch ohne die Voraussetzung der Parakompaktheit (vgl. Godement [Go 1958], Theorem II.5.10.1 und die Folgerung von Theorem II.5.9.1).

(vi) Der Čech-Komplex $\underline{\check{C}}^p(\mathbf{U},F)$ ist exakt für feine Garben[55] F und beliebige Überdeckungen **U** eines parakompakten Raumes[56] (vgl. Godement [Go 1958], Theorem II.5.2.3(b).

(vii) Falls die Mengen der Überdeckung **U** zusammen mit deren endlichen Durchschnitten eine Topologie-Basis von X bilden und falls

$$H^n(U_J, G) = 0$$

gilt für alle $n>0$ und alle endlichen Teilmengen $J\subseteq I$, so gilt

---

[54] d.h. der Raum ist separiert und jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche Verfeinerung.

[55] Eine abelsche Garbe F auf einem parakompakten Raum X heißt fein, wenn es für jede lokal endliche Überdeckung $\{U_j\}$ von X eine Familie von Garben-Morphismen $\{\eta_j: F \longrightarrow F\}$ gibt mit

(i) $\sum_j \eta_j = \mathrm{Id}$

(ii) $\eta_j(F_x) = 0$ für alle j und alle x aus einer Umgebung von $X - U_j$.

Die Familie der η_j heißt dann Zerlegung der Eins für F bezüglich der Überdeckung $\{U_j\}$

[56] Man konstruiert in dieser Situation eine Homotopie des identischen Komplex-Morphismus mit dem Null-Morphismus.

$$\check{H}^p(\mathbf{U},G) = \check{H}^p(X,G).$$

Genauer, die Kanten-Homomorphismen (1) und (2) sind Isomorphismen (vgl. Godement [Go 1958], Theorem II.5.9.1).

Konstruktion der obigen Spektralsequenz.

Seien X ein topologischer Raum, **U** eine offene Überdeckung von X und F eine Garbe von abelschen Gruppen. Wir betrachten eine injektive Auflösung[57] von F,

$$0 \to F \to I^0 \to \ldots \to I^n \to \ldots$$

und wenden auf diese den Funktor

$$\check{C}(?) := \check{C}(\mathbf{U}, ?\ ).$$

Das Ergebnis ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \check{C}(F) & \to & \check{C}(I^0) & \to \ldots \to & \check{C}(I^j) & \to \ldots \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \to & F & \to & I^0 & \to \ldots \to & I^j & \to \ldots \end{array}$$

Betrachten wir die beiden Spektralsequenzen zum Doppelkomplex $\check{C}(I)$,

(1) $\quad E'^{pq}_2 = H^p_I H^q_{II} \check{C}(I) \Rightarrow H^n\check{C}(I)$

(2) $\quad E''^{pq}_2 = H^p_{II} H^q_I \check{C}(I) \Rightarrow H^n\check{C}(I)$

<u>Berechnung der Anfangsterme von (1)</u>.

Es gilt

$$H^q_{II}\check{C}(I) = 0 \text{ für } q > 0,$$

denn der garbifizierte Čech-Komplex liefert injektive Auflösungen,

$$0 \to I^j \to \check{\mathbf{C}}^0(\mathbf{U}, I^j) \to \check{\mathbf{C}}^1(\mathbf{U}, I^j) \to \ldots,$$

die wegen der Injektivität der I^j zerfallen, also beim Anwenden des globalen Schnittfunktors zu exakten Sequenzen

$$0 \to \Gamma(X, I^j) \to \check{C}^0(\mathbf{U}, I^j) \to \check{C}^1(\mathbf{U}, I^j) \to \ldots$$

werden.[58]

Für q = 0 erhalten wir entsprechend

$$H^0_{II}\check{C}(I^q) = \Gamma(X, I^q).$$

Die erste Spektralsequenz kollabiert, d.h. die Limesterme sind gleich den entsprechenden von Null verschiedenen Anfangstermen:

$$H^p(X, F) = H^p(\Gamma(X, I^*)) = H^p_I H^0_{II}\, \check{C}(I^*) = E'^{p0}_2 = E'^{p0}_\infty = H^p(\check{C}(I)).$$

<u>Berechnung der Anfangsterme von (2)</u>.

Man beachte, der Übergang zum Čech-Komplex ist ein linksexakter Funktor.[59] Deshalb können wir schreiben,

$$H^q_I\check{C}(I) = (R^q\check{C})(F)$$

Dies ist ein Komplex, dessen p-tes Objekt gerade

$$(R^q\check{C}^p)(F)$$

ist. Beschreiben wir letzteres etwas näher. Es gilt

---

[57] die wir als die einzige eventuell von Null verschiedene Zeile eines Doppelkomplexes ansehen.

[58] In den positiven Graden stimmen diese mit den Spalten des Doppelkomplexes $\check{C}(I)$ überein. Die vertikale Kohomologie von $\check{C}(I)$ ist also in den positiven Graden trivial.

[59] Bezüglich offener Einbettungen i: U $\hookrightarrow$ X ist der inverse Bildfunktor i* exakt. Der Übergang zum direkten Bild ist linkeexakt für beliebige Morphismen. Schließlich ist der Übergang zu endilchen direkten Produkten exakt.

$$\check{C}^p(F) = \prod_{\#J=p+1} F(U_J) = \left(\prod_{\#J=p+1} \Gamma_{U_J}\right)(F)$$

mit $\Gamma_{U_J}(F) := F(U_J)$. Der Übergang zu den rechtsabgeleiteten Funktoren kommutiert mit direkten Produkten[60]. Deshalb gilt

$$(R^q\check{C}^p)(F) = \prod_{\#J=p+1} (R^q\Gamma_{U_J})(F)$$

Berechnen wir die direkten Faktoren. Der Funktor Γ_{U_J} ist gerade die Zusammensetzung

$$Sh_X(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\,|_{U_J}\,} Sh_{U_J}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\,\Gamma\,} \mathbf{Ab}$$

des Einschränkungsfunktors auf U_J mit dem globalen Schnittfunktor. Der Einschränkungsfunktor ist exakt und überführt[61] injektive Objekte in injektive Objekte. Die Spektralsequenz der Funktorkomposition entartet und liefert

$$(R^q\Gamma_{U_J})(F) = H^q(U_J, F|_{U_J}) = \Gamma(U_J, \mathbf{H}^q(F))$$

Damit ist

$$(R^q\check{C}^p)(F) = \prod_{\#J=p+1} \Gamma(U_J, H^q(F)) = \check{C}^p(\mathbf{U}, \mathbf{H}^q(F)).$$

Ensprechend erhält man, daß die Differentiale des Komplexes $(R^q\check{C})(F)$ gerade die des Čech-Komplexes der Prägarbe $\mathbf{H}^q(F)$ sind, d.h. es gilt

$$(R^q\check{C}^p)(F) = \check{C}(\mathbf{U}, \mathbf{H}^q(F)).$$

Damit erhalten wir als Anfangsterm der zweiten Spektralsequenz

$$H^p_{II}H^q_I\check{C}(I) = H^p_{II}(R^q\check{C})(F) = H^p(\check{C}(\mathbf{U}, H^q(F))) = \check{H}^p(\mathbf{U}, \mathbf{H}^q(F)).$$

QED.

4. Kohomologie des projektiven Raums

Wir wiederholen zunächst einige Begriffe, die im folgenden eine Rolle spielen werden.

4.1 Divisoren und Geradenbündel eines Schemas

4.1.1 Weil-Divisoren

Sei X ein noethersches Schema. Ein Primdivisor von X ist ein abgeschlossenes reduziertes und irreduzibles Teilschema

$$Y \subseteq X$$

mit der Eigenschaft, daß der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,Y} := \mathcal{O}_{X,\xi}$ von X im allgemeinen Punkt ξ von Y eindimensional ist,

$$\dim \mathcal{O}_{X,Y} := \dim \mathcal{O}_{X,\xi} = 1.$$

[60] Im wesentlichen, weil direkte Produkte injektiver Objekte injektiv sind.
[61] Nach Lemma 1 im Beweis von Bemerkung 3.12 (iii).

Ist X equidimensional[62] von der Dimension $d < \infty$ und katenär[63], so ist letztere Bedingung äquivalent zu der Forderung, daß Y die Kodimension 1 besitzen soll,

$$\mathrm{codim}_X(Y) = 1.$$

Ein Weil-Divisor von X ist ein Element der freien abelschen Gruppe

$$\mathrm{Div}(X),$$

die von den Primdivisoren erzeugt wird. Ein Weil-Divisor ist also eine formale endliche ganzzahlige Linearkombination

$$D = n_1 \bullet Y_1 + \ldots + n_r \bullet Y_r\ ,\ n_i \in \mathbb{Z},$$

von Primdivisoren Y_i. Die Menge der Primdivisoren von X wird mit

$$\mathbb{P}(X)$$

bezeichnet.

4.1.2 Hauptdivisoren

Sei X wie in 4.1.1 ein noethersches Schema. Wir nehmen weiterhin an, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. X ist reduziert und irreduzibel.
2. X ist regulär in der Kodimension 1, d.h. für jeden Primdivisor $Y \subseteq X$ ist der 1-dimensionale noethersche lokale Ring

   $$\mathcal{O}_{X,Y}$$

   regulär (d.h. ein diskreter Bewertingsring). Insbesondere ist $\mathcal{O}_{X,Y}$ ein Hauptidealring, und jedes von 0 verschiedene Ideal ist eine Potenz des maximalen Ideals

   $$m_{X,Y} = \pi\mathcal{O}_{X,Y}.$$

   Die Erzeuger π dieses Ideals heißen lokale Parameter von X in Y.

Sei weiter, $f \neq 0$ eine rationale Funktoin auf X, d.h. ein von Null verschiedener globaler Schnitt

$$f \in \Gamma(X, \mathcal{M}) = \mathcal{O}_{X,\eta} = Q(\mathcal{O}_{X,Y})$$

der (konstanten) Garbe $\mathcal{M}$ der rationalen Funktionen auf X, oder was das gleiche ist, ein Keim der Strukturgarbe von X im allgemeinen Punkt. Dann hat f die Gestalt

$$f = e \bullet \pi^n \text{ mit } n \in \mathbb{Z}$$

und einer Einheit $e \in \mathcal{O}^*_{X,Y}$.[64] Ist $n \geq 0$, so ist f eine reguläre Funktion in einer Umgebung des allgemeinen Punktes von Y. Die Zahl n heißt dann Nullstellenordnung von f entlang Y, d.h. man sagt dann, f habe eine Nullstelle der Ordung n entlang Y. Ist $n < 0$, so hat 1/f eine Nullstelle der Ordnung $|n|$ entlang Y. Die Zahl $|n|$ heißt dann Polstellenordnung von f entlang Y. Man schreibt

$$v_{X,Y}(f) := v_Y(f) := n$$

---

[62] d.h. alle Komponenten von X haben dieselbe Dimension d.

[63] d.h. für jede echt absteigende Kette

$$Y_\ell \supset Y_{\ell-1} \supset \ldots \supset Y_0$$

von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X, die keine Verfeinerung besitzt, gilt

$$\ell = \dim Y_\ell - \dim Y_0.$$

[64] f ist Quotient von Elementen aus $\mathcal{O}_{X,Y}$, die beide diese Gestalt haben.

und nennt diese Zahl <u>Nullstellen-Polstellen-Ordung</u> von f entlang Y oder auch einfach nur <u>Ordnung</u> von f entlang Y. Auf diese Weise ist eine additive Bewertung

$$v_Y: \Gamma(X, \mathcal{M})^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$

des rationalen Funktionenkörpers von X definiert, d.h. es gilt:

(i) v_Y ist ein surjektiver Gruppen-Homomorphismus, $v_Y(\pi) = 1$ und

$$v_Y(fg) = v_Y(f) + v_Y(g)$$

für je zwei rationale Funktionen f und g auf X.

(ii) $v_Y(f+g) \geq \min(v_Y(f), v_Y(g))$ für je zwei rationale Funktonen f und g auf X.

Wir werden gleich zeigen, für jede rationale Funktion $f \neq 0$ auf X gibt es nur endlich viele Primdivisoren Y von X mit

$$v_Y(f) \neq 0.$$

Insbesondere ist die Summe

$$\operatorname{div}(f) := (f) := \sum_{Y\in\mathbb{P}(X)} v_Y(f)\cdot Y \tag{1}$$

endlich, also ein wohldefinierter Weil-Divisor auf X. Dieser Divisor heißt der durch f definierte <u>Hauptdivisor</u>, oder <u>Nullstellen-Polstellen-Divisor</u> von f. Für je zwei von Null verschiedene rationale Funktionen f und g gilt

$$\operatorname{div}(fg) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g).$$

Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe von Div(X). Diese wird mit

$$P(X)$$

bezeichnet. Die Faktorgruppe

$$Cl(X) := \operatorname{Div}(X)/P(X)$$

heißt <u>Divisor-Klassen-Gruppe</u>.

Beweis der Endlichkeit der Summe (1)[65]. Seien

$$U = \operatorname{Spec} A$$

eine affine offene Teilmenge von X, auf welcher f regulär ist, und

$$Z := X - U.$$

Dann ist Z eine echte abgeschlossene Teilmenge der irreduziblen Menge X. Jeder Primdivisor von X, der ganz in Z liegt, muß gleich einer der Kompoenten von Z sein. Es gibt also nur endlich viele Primdivisor von X, die ganz in liegen. Alle anderen Primdivisoren von X haben Punkte mit U gemeinsam. Es reicht also zu zeigen, es gibt nur endlich viele Primdivisoren Y von X mit

$$Y \cap U \neq \emptyset \text{ und } v_Y(f) \neq 0.$$

Sei ξ der allgemeine Punkt von Y,

$$Y = \overline{\{\xi\}},\ \xi\in U = \operatorname{Spec} A.$$

Weil f regulär ist auf U, gilt $f \in \mathcal{O}_{X,\xi} = A_\xi$, also

$$v_Y(f) \geq 0.$$

Es ist genau dann

$$v_Y(f) > 0,$$

wenn $f\mathcal{O}_{X,\xi}$ in $m_{X,\xi} = \xi A_\xi$ liegt, d.h. f liegt in $A \cap \xi A_\xi = \xi$.

Weil ξ nach Definition eines Weil-Divisors die Höhe 1 hat und $f \neq 0$ ist, ist dann ξ ein minimales Primoberideal von fA, also assoziiert zu fA. Die Anzahl der assoziierten Primideale von fA ist aber endlich.

QED.

---

[65] vgl. Hartshorne, Lemma II.6.1.

4.1.3 Cartier-Divisoren

Seien X ein noethersches[66] Schema ohne eingebettete Komponenten und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Teilschema mit der Idealgarbe

$$I_Y \subseteq \mathcal{O}_X$$

und

$$\dim_y Y = \dim_y X - 1 \text{ für alle } y \in X.$$

Dann heißt Y effektiver Cartier-Divisor, wenn Y lokal durch nur eine Gleichung definiert werden kann, d.h. wenn I_Y lokal ein Hauptideal ist. Genauer, für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine offene affine Umgebung U = Spec A derart, daß

$$\Gamma(U, I_Y) = fA$$

ein Hauptideal ist. Man beachte, weil das Ideal I_Y eine kohärente Garbe ist, gilt dann

$$I_Y|_U = \widetilde{fA}\ .$$

Das Element $f \in A$ heißt dann lokale Gleichung von Y auf U. Wegen der Dimensionsbedingung an Y liegt außerdem f in minimalen Primideal von A. Weil X keine eingebetteten Komponenten haben soll, liegt f in keinem assoziierten Primideal von A, d.h.

f ist kein Nullteiler.

Ein effektiver Cartier-Divisor ist damit durch eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i \tag{1}$$

zusammen mit einem System von Nicht-Nullteilern $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ gegeben. Das zugehörige Ideal I_Y ist dabei gegeben durch

$$\Gamma(U, I_Y) = f_i\Gamma(U,\mathcal{O}_X) \text{ für offenes } U \subseteq U_i. \tag{2}$$

Wegen (1) erfüllen die lokalen Gleichungen die Bedingung

$$f_{i'}\Gamma(U,\mathcal{O}_X) = f_{i''}\Gamma(U,\mathcal{O}_X) \quad \text{für offenes } U \subseteq U_{i'} \cap U_{i''}$$

d.h.

$$f_{i'}/f_{i''} \in \mathcal{O}_X^*(U_{i'} \cap U_{i''}) \tag{3}$$

Umgekehrt definiert eine offene Überdeckung (1) zusammen mit einem System von Nicht-Nullteilern

$$f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X),$$

die der Bedingung (3) genügen für je zwei Indizes $i', i'' \in I$ einen effektiven Cartier-Divisor Y, dessen Ideal I_Y durch die Bedingungen (2) gegeben ist.

Seien jetzt zwei offene Überdeckungen

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i \text{ und } X = \bigcup_{j\in J} V_j$$

und zwei Familien von Nicht-Nullteilern

$$f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \text{ und } g_j \in \Gamma(V_j, \mathcal{O}_X)$$

[66] Man kann auf die Forderung, daß das Schema X noethersch ist verzichten. Die nachfolgenden Formulierungen würden dann aber komplizierter werden.

gegeben, welche beide den zu (3) analogen Bedingungen genügen. Dann sind die zugehörigen effektiven Cartier-Divisoren genau dann gleich, wenn gilt

$$f_i\Gamma(U,\mathcal{O}_X) = \Gamma(U,I_Y) = g_j\Gamma(U,\mathcal{O}_X) \text{ für offenes } U \subseteq U_i\cap V_j,$$

mit anderen Worten, wenn gilt

$$f_i/g_j \in \mathcal{O}^*_X(U_i\cap V_j) \text{ für alle } i\in I \text{ und alle } j\in J.$$

Wir sagen dann, die beiden Systeme $\{f_i\}$ und $\{g_j\}$ sind äquivalent. Einen effektiven Cartier-Divisor kann man damit mit einer Äquivalenzklasse von Nicht-Nullteiler-Familien $\{f_i\}$ identifizieren, oder genauer es ist die Nullstellen-Menge einer solchen Äquivalenzklasse.

Sei jetzt X ein beliebiges Schema. Den allgemeinen Begriff eines nicht-notwendig effektiven Cartier-Divisors von X erhält man, wenn man zuläßt, daß die oben betrachteten lokalen Gleichungen nicht nur Nullstellen sondern auch Pole haben dürfen, d.h. man betrachtet anstelle von Schnitten der Strukturgarbe, die Schnitte der vollen Quotientenringe, d.h. Garben $\mathcal{M}_X$ assoziert zur Prägarbe

$$U \mapsto Q(\mathcal{O}_X(U)) := S_U^{-1}\mathcal{O}_X(U) \text{ mit } S_U := \text{Menge der Nicht-Nullteiler von } \mathcal{O}_X(U).$$

Die Garbe $\mathcal{M}_X$ ist eine Garbe von Ringen. Die Teilgarbe der Einheitengruppen wird mit

$$\mathcal{M}^*_X$$

bezeichnet. Ihre Schnitte sind lokal die Quotienten von Nicht-Nullteilern, welche Schnitte der Strukturgarbe von X sind.

Ein <u>System von lokalen Gleichungen eines Cartier-Divisors</u> auf X ist eine Familie von Schnitten

$$\{f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{M}^*_X)\}_{i\in I}$$

derart, daß die U_i eine offene Überdeckung von X bilden und für je zwei Indizes $i,j \in I$ gilt

$$f_i/f_j \in \mathcal{O}^*_X(U_i\cap U_j).$$

Zwei solche Familien, sagen wir

$$\{f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{M}^*_X)\}_{i\in I} \text{ und } \{g_j \in \Gamma(V_j, \mathcal{M}^*_X)\}_{j\in J}$$

heißen äquivalent (d.h. man sagt, sie definieren denselben Cartier-Divisor), wenn für beliebige $i\in I$ und $j\in J$ gilt

$$f_i/g_j \in \mathcal{O}^*_X(U_i\cap V_j).$$

Ein <u>Cartier-Divisor</u> ist definiert als Äquivalenzklasse von lokalen Gleichungen.

Eine alternative Definition erhält man wie folgt. Wir betrachten den Garben-Morphismus

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{M}_X,$$

welche jede reguläre Funktion in die zugehörige rationale Funktion auf X abbildet, d.h. welcher induziert wird durch die natürlichen Abbildungen

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow S_U^{-1}\mathcal{O}_X(U)$$

in den Quotientenring. Da die hier verwendeten Nenner-Mengen Nicht-Nullteiler sind, sind diese Abbildungen injektiv, d.h. $\mathcal{O}_X$ wir so zu einer Teilgarbe von $\mathcal{M}_X$. Wir gehen von den Ringen zu den Einheitengruppen über und betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^*_X \longrightarrow \mathcal{M}^*_X \longrightarrow \mathcal{M}^*_X/\mathcal{O}^*_X \longrightarrow 0.$$

Weil die zugehörigen Sequenzen der Halme exakt sind, läßt sich jeder Schnitt der Faktorgarbe $\mathcal{M}^*_X/\mathcal{O}^*_X$ lokal zu einem Schnitt von $\mathcal{M}^*_X$ anheben. Die globalen Schnitte

$$H^0(X, \mathcal{M}^*_X/\mathcal{O}^*_X)$$

werden deshalb representiert durch Systeme von lokalen Gleichungen von Cartier-Divisoren. Zwei solche Systeme representieren genau dann denselben Schnitt, wenn sie äquivalent sind. Mit anderen Worten,

$$H^0(X, \mathcal{M}^*_X/\mathcal{O}^*_X) = \text{Abelsche Gruppe der Cartier-Divisoren.}$$

Außerdem besteht eine exakte Sequenz

$$H^0(X,\mathcal{O}^*_X)\longrightarrow H^0(X,\mathcal{M}^*_X)\longrightarrow H^0(X,\mathcal{M}^*_X/\mathcal{O}^*_X)\longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}^*_X)\longrightarrow H^1(X,\mathcal{M}^*_X)$$

Die erste Gruppe links besteht aus den Gleichungen, die weder Nullstellen noch Pole besitzen und deshalb den trivialen Cartier-Divisor representieren. Die zweite Gruppe links enthält die global definierten Gleichungen von Cartier-Divisoren, die man auch <u>Hauptdivisoren</u> nennt.

Falls X irreduzibel ist, ist $\mathcal{M}^*_X$ eine konstante Garbe, also eine welke Garbe auf X, d.h. die Gruppe ganz rechts ist trivial. Damit erhalten wir:

Folgerung

Sei X ein noethersches irreduzibles Schema. Dann ist die Gruppe der Isomorphieklassen umkehrbarer Garben auf X gerade

$$\begin{aligned}\mathrm{Pic}(X) = H^1(X,\mathcal{O}^*_X) &\cong H^0(X,\mathcal{M}^*_X/\mathcal{O}^*_X) \,/\, H^0(X,\mathcal{M}^*_X)\\ &= \text{Cartier-Divisoren auf X / Hauptdivisoren.}\end{aligned}$$

4.1.4 Cartier-Divisoren und Weil-Divisoren

Sei X ein noethersches reduziertes und irreduzibles Schema, welches regulär in der Kodimension 1 ist. Dann ist die Abbildung

$$H^0(X,\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \longrightarrow \mathrm{Div}(X),\ D := \{f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{M}^*_X)\}_{i\in I} \mapsto \sum_{Y\in\mathbb{P}(X)} v_Y(D)\cdot Y, \quad (1)$$

mit

$$v_Y(D) := v_Y(f_i) \text{ für } U_i \cap Y \neq \varnothing$$

wohldefiniert und ein Gruppen-Homomorphismus. Das Bild des Cartier-Divisors D heißt der zu D gehörige Weil-Divisor. Die Abbidung überführt Hauptdivisoren in Hauptdivisoren, induziert also einen Gruppen-Homomorphismus

$$\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Cl}(X). \quad (2)$$

Ist das Schema X lokal faktoriell, d.h. sind die lokalen Ringe von X sämtlich ZPE-Ringe, so sind die Abbildungen (1) und (2) Isomrorphismen.

Beweis. Sei D ein Cartier-Divisor auf X mit dem System lokaler Gleichungen

$$\{f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{M}^*_X)\}_{i\in I}.$$

<u>1. Schritt</u>. Die Definition von $v_Y(D)$ ist unabhängig von der Speziellen Wahl von i.

Seien i' und i" zwei Indizes aus I mit

$$U_{i'} \cap Y \neq \varnothing \text{ und } U_{i''} \cap Y \neq \varnothing.$$

Diese Mengen sind, weil Y irreduzibel ist, dichte offene Untermengen von Y. Insbesondere ist ihr Durchschnitt nicht leer,

$$U_{i'} \cap U_{i''} \cap Y \neq \emptyset.$$

Der allgemeine Punkt ξ von Y liegt in diesem Durchschnitt, weil er anderenfalls in der abgeschlossenen echten Teilmenge $Y - (U_{i'} \cap U_{i''})$ läge, also nicht dicht sein könnte in Y. Die Schnitte $f_{i'}$ und $f_{i''}$ von $\mathcal{O}_{X,\xi}$ unterscheiden sich nur um einen Faktor, der eine Einheit ist in $\mathcal{O}_{X,\xi}$. Sie haben damit denselben Wert.

<u>2. Schritt</u>. Die Definition von $v_Y(D)$ hängt nicht von der speziellen Wahl der lokalen Gleichungen von D ab.

Die Argumentation ist im wesentlichen dieselbe wie im ersten Schritt: neue lokale Gleichungen entstehen aus den alten durch Multiplikation mit einer Einheit des betrachteten lokalen Rings.

<u>3. Schritt</u>. Die Summe auf der rechten Seite von (1) ist endlich.

Weil X noethersch ist, überdecken bereits endlich viele der U_i auf denen die lokalen Gleichungen f_i definiert sind, das Schema X. Wir können deshalb annehmen, die Index-Menge I ist endlich.

Wie wir im Beweis der Korrektheit der Definition eines Hauptdivisors in 4.1.2. gesehen haben, gibt es für jedes der endlich vielen f_i nur endlich viele Primdivisoren Y mit $v_Y(f_i) \neq 0$. Die Summe (1) muß also endlich sein.

<u>4. Schritt</u>. (1) ist ein Gruppen-Homomorphismus.

Das ist der Fall, weil die v_Y Gruppen-Homomorphismen sind.

<u>5. Schritt</u>. (1) bildet Haupt-Divisoren in Hauptdivisoren ab.

Dies folgt direkt aus der Defintion der Begriffe Hauptdivisor für Cartier- und Weil-Divisoren.

<u>6. Schritt</u>. (1) ist bijektiv für lokal faktorielle Schemata X.

Sei D ein Weil-Divisor auf X. Für vorgegebenes $x \in X$ betrachten wir den natürlichen Morphismus

$$i_x: \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow U \subseteq X.$$

Dabei sei U = Spec A eine offene affine Umgebung von x und i_x die Zusammensetzung der natürlichen Einbettung $U \hookrightarrow X$ mit dem Schema-Morphismus, der durch die natürliche Abbildung $A \longrightarrow A_x = \mathcal{O}_{X,x}$ in den Quotientenring induziert wird. Diese Zusammensetzung ist dabei unabhängig von der speziellen Wahl von U.

Jeder Primdivisor Y von X der x enthält, definiert einen Primdivisor auf U und damit ein Primideal der Höhe 1 von A und damit ein solches der Lokalisierung $\mathcal{O}_{X,x} = A_x$ von A,also einen Primdivisor Y_x auf Spec $\mathcal{O}_{X,x}$.

Für jeden Primdivisor von X, der den Punkt x nicht enthält, läßt sich ein U finden, welches disjunkt ist zu Y. Für solche Primdivisoren setzen wir

$$Y_x := 0 = \text{Nulldivisor auf Spec } \mathcal{O}_{X,x}.$$

Für beliebige Weil-Divisoren

$$D = \sum_i n_i Y_i$$

sei weiter

$$D_x := \sum_i n_i (Y_i)_x .$$

Wir erhalten auf diese Weise einen Gruppen-Homomorphismus

$$\mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Div}(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,x}),\ D \mapsto D_x . \qquad (3)$$

Bemerkung: Der Kern dieses Homomorphismus wird gerade von Primdivisoren erzeugt, die den Punkt x nicht enthalten.

Um das einzusehen, beachten wir zunächst, daß zwei Primdivisoren Y' und Y" durch x mit demselben Bild bei dieser Abbildung zwei Primideale in A definieren, die in A_x dasselbe Primideal erzeugen. Dann sind aber auch die beiden Primideale in A gleich, d.h. es gilt

$$Y' \cap U = Y'' \cap U \ni x.$$

Diese Durchschnitte sind nicht-leere offene dichte Teilmengen in den Divisoren Y' und Y". Durch Übergang zum Abschluß erhalten wir Y' = Y". Wir haben gezeigt, auf den Primdivisoren durch x ist die Abbildung (3) injektiv. Dasselbe gilt dann auch für die von diesen Primdivisoren erzeugten Untergruppe.[67] Damit gilt aber die Aussage der Bemerkung.[68]

Sei jetzt ein Weil-Divisor von X vorgegeben, sagen wir

$$D = \sum_{i=1}^{r} n_i Y_i \in \mathrm{Div}(X)$$

Jeder der Divisoren $(Y_i)_x$ ist durch ein Primideal p_i der Höhe 1 von $\mathcal{O}_{X,x}$ gegeben. Weil $\mathcal{O}_{X,x}$ ein ZPE-Ring ist, ist ein solches Primideal ein Hauptideal,

$$p_i = f_i \mathcal{O}_{X,x}.$$

Wir setzen

$$f_x := \prod_{i=1}^{r} (f_i)^{n_i}$$

Dann geht der Hauptdivisor mit der globalen Gleichung f_x auf X bei der Abbildung (3) gerade in den Weil-Divisor D_x über.

Der zum Hauptdivisor $\mathrm{div}(f_x)$ auf X gehörige Divisor auf Spec $\mathcal{O}_{X,x}$ stimmt dann gerade mit dem zu D gehörigen Divisor D_x überein. Genauer, der von f_x über $A_x = \mathcal{O}_{X,x}$ erzeugte Modul ist gerade

$$f_x A_x = p_1^{n_1} \bullet \ldots \bullet p_r^{n_r} A_x,$$

---

[67] Eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Primdivisoren geht über in eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Primdivisoren, die gleich Null ist. Also müssen alle Koeffizienten Null sein.

[68] Jede $D \in \mathrm{Div}(X)$ läßt sich auf genau eine Weise in der Gestalt D = D' + D" schreiben, wobei D' aus Primdivisoren durch x besteht und D" aus solchen nicht durch x. Der zweite Summand liegt im Kern von (3). Liegt D im Kern, so auch D'. Wie eben gesehen ist dann aber D' = 0, d.h. D = D". Die Elemente aus dem Kern von (3) bestehen also aus Primdivisoren nicht durch x. Die umgekehrte Inklusion besteht trivialerweise.

wenn $p_i \in \operatorname{Spec} A$ das Primideal des Primdivisors Y_i bezeichnet. Die beiden A_x-Teilmoduln $f_x A$ und $p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r}$ von Q(A) stimmen dann aber auf einer Umgebung von x überein,[69] d.h. man kann U = Spec A so durch eine geeignete affine offene Hauptmenge U_x ersetzen, daß gilt

$$f_x\cdot\Gamma(V, \mathcal{O}_X) = p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r}\cdot\Gamma(V, \mathcal{O}_X) \text{ für jede offene Menge } V \subseteq U_x \qquad (4)$$

Wir lassen jetzt x die Menge X durchlaufen und erhalten eine offene Überdeckung

$$\{U_x\}_{x\in X}$$

und eine Familie von rationalen Funktionen f_x mit

$$f_{x'}\cdot\Gamma(V, \mathcal{O}_X) = f_{x''}\cdot\Gamma(V, \mathcal{O}_X) \text{ für jede offene Menge } V \subseteq U_{x'}\cap U_{x''}$$

und für je zwei Punkte x', x" ∈ X (wegen (4)). Die beiden Erzeuger unterscheiden sich um einen Faktor, der eine Einheit ist. Insbesondere gilt

$$f_{x'}/f_{x''} \in \Gamma(U_{x'}\cap U_{x''}, \mathcal{O}_X^*).$$

Nach Konstruktion gilt

$$D|_{U_x} = \operatorname{div}(f_x)|_{U_x}. \qquad (5)$$

für jedes $x \in X$. Wir haben gezeigt, die Schnitte

$$f_x \in Q(\mathcal{O}_X(U_x))$$

bilden ein System von lokalen Gleichungen eines Cartier-Divisors auf X. Das Bild dieses Cartier-Divisors bei der Abbildung (1) ist nach (5) gerade der vorgegebene Weil-Divisor D.

Wir haben gezeigt, die Abbildung (1) ist surjektiv. Wir haben noch zu zeigen, der Kern der Abbildung (1) ist trivial. Sei

$$\{f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{M}_X^*)\}_{i\in I}.$$

---

[69] Seien $M, N \subseteq Q(A)$ zwei endlich erzeugte A-Teilmoduln mit $MA_x = NA_x$ in Q(A). Dann gilt auch

$$(M\cap N)A_x = MA_x \cap NA_x = MA_x = NA_x$$

also

$$(M/(M\cap N)_x = MA_x/(M\cap N)A_x = 0$$

Jedes Element von $M/(M\cap N)$ wird von einem Element aus A-x annulliert. Weil der Modul $M/(M\cap N)$ endlich erzeugt ist, gibt es ein $s' \in A$-x mit $s'\cdot(M/M\cap N) = 0$, also

$$0 = (M/(M\cap N)_{s'} = MA_{s'}/(M\cap N)A_{s'}$$

also

$$MA_{s'} = (M\cap N)A_{s'}.$$

Analog findet man ein $s'' \in A$-x mit

$$NA_{s''} = (M\cap N)A_{s''}.$$

Die beiden Identitäten gelten auch mit $s = s's'' \in A$-x anstelle von s' bzw. s". Also gilt

$$MA_s = NA_s.$$

ein System von lokalen Gleichungen eines Cartier-Divisors aus dem Kern von (1). Durch Überdecken der U_i durch affine offene Mengen gewinnen wir ein System von lokalen Gleichungen mit

$$U_i = \mathrm{Spec}\, A_i \text{ affin für jedes } i \in I.$$

Für jedes i und jeden Primdivisor Y von X mit $U_i \cap Y \neq \varnothing$ gilt dann

$$v_Y(f_i) = 0,$$

d.h. für jedes Primideal $p \in \mathrm{Spec}\, A_i$ der Höhe 1 gilt

$$f_i \in (A_i)_p \text{ und } f_i^{-1} \in (A_i)_p.$$

Die rationale Funktion f_i und deren Inverses liegen im Durchschnitt dieser Lokalisierungen, also im ganzen Abschluß von A_i (vgl. Matsumura, Th. 38). Nun sind nach Voraussetzung alle lokalen Ring von X ZPE-Ringe, also normal[70]. Das hat zur Folge, daß X normal ist, d.h. alle affinen Koordinatenringe sind normal, d.h.

$$f_i,\ f_i^{-1} \in A_i\,.$$

Die lokalen Gleichungen des Divisors sind Einheiten, ihr System ist äquivalent zur globalen Gleichung 1. Der Cartier-Divisor gerade neutrale Element in der Gruppe der Cartier-Divisoren.

<u>7. Schritt</u>. Die Hauptdivisoren von $H^0(X, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$ entsprechen bei der Bijektion (1) im lokal faktoriellen Fall geraden den Hauptdivisoren von Div(X).

Sei $f \in \Gamma(X, \mathcal{M}^*)$ eine rationale Funktion auf X. Dann wird der Cartier-Divisor, der als System lokaler Gleichungen die aus einem Glied bestehende Familie

$$\{f \in \Gamma(X, \mathcal{M}^*\}$$

besitzt bei der Abbildung (1) gerade in den Divisor $\mathrm{div}(f) \in \mathrm{Div}(X)$ abgebildet.
QED.

---

[70] Die Normalisierung $\overline{X} \longrightarrow X$ ist dann ein Isomorphismus. Zum Beweis können wir annehmen, X = Spec A ist ein affines Schema (und A ein noetherscher Integritätsbereich). Betrachten wir die Inklusionen

$$A \subseteq \overline{A} \subset Q(A),$$

wobei $\overline{A}$ die ganze Abschließung von A in Q(A) bezeichne. Wir haben zu zeigen, links gilt das Gleichheitszeichen. Für jedes $x \in \mathrm{Spec}\, A$ ist $\overline{A}_x$ die ganze Abschließung von A_x in Q(A). Weil A_x ein ZPE-Ring, also normal, ist, folgt

$$A_x = \overline{A}_x \text{ für jedes } x \in \mathrm{Spec}\, A \qquad (6)$$

Jedes Element der ganzen Abschließung $\overline{A}$ von A liegt in einem endlich erzeugten A-Modul M zwische A und $\overline{A}$,

$$A \subseteq M \subseteq \overline{A}.$$

Es reicht zu zeigen, A = M für endlich erzeugte A-Moduln M zwischen A und $\overline{A}$.
Wegen (6) gilt $A_x = M_x$ für jedes $x \in \mathrm{Spec}\, A$. Die natürliche Inklusion kohärenter Garben

$$\widetilde{A} \hookrightarrow \widetilde{M}$$

ist ein Isomorphismus. d.h. es gilt A = M.

4.1.5 Cartier-Divisoren und umkehrbare Garben

Seien X ein Schema und D ein Cartier-Divisor mit dem System lokaler Gleichungen

$$\{f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{M}^*)\}_{i\in I}.$$

Dann bilden die Quotienten

$$f_i/f_j \in \overset{*}{\mathcal{O}}_X(U_i \cap U_j),\ i,j \in I$$

ein System von Übergangsfunktionen einer umkehrbaren Garbe[71]. Sei

$$\{g_j \in \Gamma(V_j, \mathcal{M}^*)\}_{j\in J}$$

ein zweites System lokaler Gleichungen von D. Durch Übergang zu einer gemeinsamen Verfeinerung der beiden Überdeckungen erreichen wir, daß

$$I = J \text{ und } U_i = V_i \text{ für } i \in I$$

gilt. Es ist dann

$$\varphi_i := f_i/g_i \in \overset{*}{\mathcal{O}}_X(U_i) \text{ für } i\in I,$$

und für beliebige Indizes $i,j \in I$ gilt

$$(f_i/f_j) = \varphi_i (g_i/g_j) \varphi_j^{-1} \text{ in } \overset{*}{\mathcal{O}}_X(U_i \cap U_j)$$

Die beiden Systeme von Übergangsfunktionen unterscheiden sich um den Korand der 0-Kokette $\{\varphi_i\}$, definieren also isomorphe umkehrbare Garben. Die eben konstruierte Garbe hängt also bis auf Isomorphie nur von D und nicht von dem zur Konstruktion verwendeten System lokaler Gleichungen ab. Wir bezeichnen die zu D gehörige umkehrbare Garbe mit

$$\mathcal{O}_X(D).$$

Bemerkungen

(i) Direkt aus der Konstruktion ergibt sich,

$$\mathcal{O}_X(D'+D'') \cong \mathcal{O}_X(D') \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D'')$$

für je zwei Cartier-Divisoren D' und D" auf X. Für den trivialen Cartier-Divisor 0 kann man als System lokaler Gleichungen die Familie aus einem Element

$$\{f \in \Gamma(X, \mathcal{M}^*)\}$$

wählen. Deshalb gilt

$$\mathcal{O}_X(0) \cong \mathcal{O}_X.$$

(ii) Wir erhalten so einen Gruppen-Homomorphismus

$$H^0(X, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(X, \overset{*}{\mathcal{O}}_X),\ D \mapsto \mathcal{O}_X(D),$$

der Gruppe der Cartier-Divisoren auf X mit Werten in der Gruppe der Isomorphie-Klassen der umkehrbaren Garben auf X.

(iii) Es besteht die Möglichkeit, in der Isomorphie-Klasse $\mathcal{O}_X(D)$ ein ausgezeichnetes Element auszuwählen, welches ebenfalls mit $\mathcal{O}_X(D)$ bezeichnet wird. Sei

$$\{f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{M}^*)\}_{i\in I}.$$

ein System lokaler Gleichungen von D. Dann gibt es einen Teilmodul $\mathcal{L}(D)$ der Modul-Garbe

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_X$$

[71] Trivialerweise sind die Kozykel-Bedingungen erfüllt.

der vollen Quotientenringe von $\mathcal{O}_X$, welche über U_i gerade vom Schnitt f_i^{-1} erzeugt wird,

$$\mathcal{L}_i := \mathcal{L}(D)|_{U_i} = f_i^{-1}\mathcal{O}_X|_{U_i} \qquad (\subseteq \mathcal{M}_X|_{U_i}).$$

über den affinen offenen Teilmengen $U = \operatorname{Spec} A \subseteq U_i$ gilt

$$\mathcal{L}(D)|_U = (f_i^{-1}A)^{\sim} \subseteq Q(A)^{\sim}.$$

Wegen $f_i/f_j \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ stimmen die beiden Teilgarben $\mathcal{L}_i$ und $\mathcal{L}_j$ von $\mathcal{M}$ auf dem Durchschnitt $U_i \cap U_j$ überein. Die $\mathcal{L}_i$ verheften sich also zu einer global definierten Teilgarbe von $\mathcal{M}$. Nach Konstruktion ist diese lokal isomorph zur Strukturgarbe von X, denn die Multiplikation mit f_i definiert einen Isomorphismus

$$\mathcal{L}(D)|_{U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X|_{U_i}.$$

Man sieht direkt, daß die Konstruktion des Teilmoduls $\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{M}_X$ nicht von der Wahl der lokalen Gleichungen von D abhängt.
Die zugehörigen Übergangsfunktionen sind gerade die Quotienten f_i/f_j, d.h. es ist

$$\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{O}_X(D).$$

(iv) Der Kern des Homomorphismus von (ii) besteht gerade aus den Hauptdivisoren. Zwei Cartier-Divisoren haben bei (ii) genau dann dasselbe Bild, wenn sie sich um einen Hauptdivisor unterscheiden, d.h. wenn sie linear äquivalent sind.

(v) Sei X ein noethersches reduziertes und irreduzibles Schema. Dann ist der Homomorphismus von (ii) surjektiv.

Beweis von (iv). Sei D ein Cartier-Divisor mit einer globalen Gleichung

$$f \in \Gamma(X, \mathcal{M}^*).$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}(D) = \frac{1}{f}\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X,$$

d.h. D liegt im Kern der Abbildung (ii). Liegt D umgekehrt im Kern dieser Abbildung, so gibt es einen Isomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$\mathcal{L}(D) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X.$$

Insbesondere gibt es einen globalen Schnitt $f \in \Gamma(X, \mathcal{L}(D)) \subseteq \Gamma(X, \mathcal{M}_X)$, der bei diesem Isomorphismus in die 1 abgebildet wird. Wegen

$$\mathcal{O}_X = 1 \cdot \mathcal{O}_X$$

erhalten wir durch Anwenden des Inversen dieses Isomorphismus

$$\mathcal{L}(D) = \frac{1}{f}\mathcal{O}_X .$$

Das bedeutet aber, D besitzt die globale Gleichung f, ist also ein Hauptdivisor.[72]

---

[72] Genauer, ist $\{f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{M}^*)\}_{i\in I}$ ein System von lokalen Gleichungen von D, so gilt lokal auf U_i

$$\frac{1}{f}\mathcal{O}_X|_{U_i} = \mathcal{L}(D) = \frac{1}{f_i}\mathcal{O}_X|_{U_i},$$

Beweis von (v). Sei $\mathcal{L}$ eine umkehrbare Garbe auf X. Auf Grund der Annahmen bezüglich X ist die Garbe $\mathcal{M}_X$ eine konstante Garbe.

Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_X|_U$ gilt

$$\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}|_U \cong \mathcal{O}\otimes\mathcal{M}|_U \cong \mathcal{M}|_U.$$

Wir betrachten den geringten Raum $(X, \mathcal{M}_X)$. Der $\mathcal{M}_X$-Modul $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}$ ist dann, wie wir gerade gesehen haben, lokal frei vom Rang 1. Die Kohomologie-Gruppe

$$H^1(X, \mathcal{M}_X^*)$$

besteht gerade aus den Isomorphie-Klassen der lokal freien $\mathcal{M}_X$-Moduln vom Rang 1.

Als konstante Garbe von abelschen Gruppen auf dem irreduziblen Raum X ist $\mathcal{M}_X^*$ welk, also Γ-azyklisch, d.h. es ist

$$H^1(X, \mathcal{M}_X^*) = 0.$$

Es gibt also nur eine Isomorphie-Klasse. Insbesondere ist

$$\mathcal{L}\otimes\mathcal{M} \cong \mathcal{M}.$$

Der natürliche Garben-Morphismus

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}\otimes\mathcal{M} \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}$$

ist ein Monomorphismus[73], d.h. $\mathcal{L}$ ist isomorph zu einem Teilmodul von $\mathcal{M}$. Weil $\mathcal{L}$ als $\mathcal{O}_X$-Modul lokal frei vom Rang 1 ist, ist $\mathcal{L}$ als Teilmodul von $\mathcal{M}$ lokal von der Gestalt

$$\frac{1}{f}\mathcal{O}_X \text{ mit einem Schnitt f von } \mathcal{M}^*,$$

also von der Gestatl $\mathcal{L}(D)$ mit einem Cartier-Divisor D. Mit anderen Worten $\mathcal{L}$ liegt in der Isomorphieklasse des Bildes von D bei der Abbildung von (ii).
QED.

4.1.6 Die Divisoren des projektiven Raums

Seien k ein Körper und $X = \mathbb{P}_k^N = \operatorname{Proj} k[x_0,...,x_N]$. Weil X noethersch, reduziert, irreduzibel und nicht-singulär ist, gilt

$$H^0(X, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \cong \operatorname{Div}(X) \text{ und } \operatorname{Cl}(X) \cong \operatorname{Pic}(X).$$

Wir werden deshalb im folgenden nicht sonderlich zwischen Cartier- und Weil-Divisoren unterscheiden.

Sei $Y \subseteq X$ ein Primdivisor. Als abgeschlossene Teilvarietät ist Y von der Gestalt

$$Y = V(I)$$

mit einem homogenen von Null verschiedenen Ideal

$$I \subseteq k[x_0,...,x_N].$$

---

d.h. die Quotienten f/f_i sind Schnitte von $\mathcal{O}_X^*$ (über U_i). Damit ist f globale Gleichung von D, d.h. D ist ein Hauptdivisor.

[73] weil die auf den Halmen induzierten Abbidungen bis auf Isomorphie gerade die natürlichen Einbettungen der $\mathcal{O}_{X,x}$ in den vollen Quotientenring und als solche Monomorphismen sind.

Weil Y irreduzibel ist, ist I ein Primideal. Sei $F \in I$ ein homogenes von Null verschiedenes Element minimalen Grades aus diesem Ideal. Weil I prim ist, liegt mindestens ein Primteiler von F ebenfalls in I. Also ist das Polynom

F irreduzibel.

Wegen $F \in I$ gilt

$$V(I) \subseteq V(F) \subset X.$$

Weil F irreduzibel ist, ist V(F) irreduzibel von einer Kodimension ≥ 1. Weil V(I) die Kodimension 1 hat, folgt

$$V(I) = V(F)$$

und

$$I = F \cdot k[x_0,...,x_N].$$

Wir wählen deshalb die Bezeichnung

$$Y := \mathrm{div}(F).$$

Wir haben gezeigt:

<u>Jeder Primdivisor von</u> $X = \mathbb{P}_k^N$ <u>hat die Gestalt</u> $Y = \mathrm{div}(F)$

<u>mit einem irreduziblen homogenen Polynom</u> $F \in k[x_0,...,x_N]$.

Für den zugehörigen Cartier-Divisor kann man auf $U_i = D_+(x_i)$ die rationale Funktion

$$F/x_i^d \text{ mit } d := \deg F$$

als lokale Gleichung von Y wählen. Wir bezeichnen den zugehörigen Cartier-Divisor ebenfalls mit div(F).

Allgemein erhalten wir für je zwei homogene Polynome F,G der Grade d und e einen Cartier-Divisor mit der lokalen Gleichung

$$F/G \cdot x_i^{e-d} \text{ auf } U_i.$$

Wir werden im folgenden schreiben,

$$\deg F/G = d-e.$$

Diesen Cartier-Divisor bezeichnen wir analog mit

$$\mathrm{div}(F/G),\ F,G \in k[x_0,...,x_N] - \{0\} \text{ homogen.}$$

Ist F ein Quotient homogener Polynome aus $k[x_0,...,x_N] - \{0\}$ und

$$F = (F_1)^{n_1} \cdot ... \cdot (F_r)^{n_r}$$

die Zerlegung in irreduzible paarweise teilerfremde Faktoren, so gilt

$$\mathrm{div}(F) = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot \mathrm{div}(F_i).$$

Dies ist gerade die Darstellung von div(F) als ganzzahlige Linearkombination von Primdivisoren. Insbesondere sehen wir, daß jeder Cartier-Divisor von X die Gestalt div(F) besitzt.

<u>Jeder Divisor von</u> $X = \mathbb{P}_k^N$ <u>hat die Gestalt</u> $Y = \mathrm{div}(F)$
<u>mit einem Quotienten F homogener Polynom von</u> $k[x_0,...,x_N] - \{0\}$.

Wie oben bemerkt haben die lokalen Gleichungen auf U_i eines solchen Divisors

$$D = \mathrm{div}(F)$$

die Gestalt

$$F/x_i^d \text{ mit } d = \deg F.$$

Die zugehörige umkehrbare Garbe hat auf U_i die Gestalt

$$\mathcal{L}(D)|_{U_i} = \frac{x_i^d}{F} \mathcal{O}_X|_{U_i} ,$$

und für deren Übergangsfunktionen erhalten wir

$$x_j^d/x_i^d \text{ auf } U_i \cap U_j$$

Insbesondere hängen diese nicht von der rationalen Funktion F ab, sondern nur von deren Grad. Wir schreiben deshalb auch

$$\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X(d) = \mathcal{O}_X(\deg F) \text{ für } D = \operatorname{div}(F) \text{ und } d = \deg F.$$

Insbesondere sehen wir:

<u>Jede umkehrbare Garbe auf</u> $X = \mathbb{P}_k^N$ <u>hat bis auf Isomorphie die Gestalt</u>

$\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X(d) = \mathcal{O}_X(\deg F)$ mit $D = \operatorname{div}(F)$, $d = \deg F$.

Weiter sehen wir, zwei Quotienten F und G homogener Polynome definieren genau dann linear äquivalente Divisoren, wenn sie denselben Grad haben:

$\deg F = \deg G \Leftrightarrow \operatorname{div}(F)$ und $\operatorname{div}(G)$ sind linear äquivalent.

Explizit:

$\operatorname{div} F - \operatorname{div} G = \operatorname{div}(F/G)$.

Haben F und G denselben Grad, so ist F/G eine wohldefinierte rationale Funktion auf X. Der <u>Grad eines Divisors</u>,

$\deg\colon \operatorname{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\operatorname{div}(F) \mapsto \deg F$,

ist wohldefiniert und hängt nur von der linearen Äquivalenz-Klasse des Divisors ab. Er induziert also eine Abbildung auf der Klassen-Gruppe, die ebenfalls mit deg bezeichnet wird:

$$\deg\colon \operatorname{Pic}(X) = \operatorname{Cl}(X) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}.$$

Wie wir gerade gesehen haben, ist dies ein Isomorphismus.

Insbesondere ist so auch der Grad einer umkehrbaren Garbe auf dem projektiven Raum definiert, und es gilt

$$\deg \mathcal{O}_X(d) = d.$$

Die hier eingeführte Terminologie läßt sich noch etwas verallgemeinern.

4.1.7 Die Garbe $\mathcal{O}_X(d)$ des projektiven Raums $\mathbb{P}_A^N$

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und

$$X := \mathbb{P}_A^N = \operatorname{Proj} A[x_0,\ldots,x_N].$$

Für jeden Quotienten homogener Polynome[74]

---

[74] Ein Polynom aus $A[x_0,\ldots,x_N] - \{0\}$ ist genau dann ein Nullteiler, wenn es ein Element von $A-\{0\}$ gibt welches alle Koeffizienten des Polynoms annulliert (vgl. Nagata: Local rings, (6.13). Der dortige Beweis im Fall von nur einer Unbestimmten läßt sich auf den Fall von endlich vielen Unbestimmten verallgemeinern, indem man Multi-Index-Schreibweise verwendet und die Potenzprodukte gradweise-lexikographisch anordnet: Sei $a = \sum_i a_i x^i \neq 0$ ein Nullteiler. Dann gibt es ein $b := \sum_i b_i x^i \neq 0$ mit

$$F \in Q(A[x_0,\dots,x_N])^* \supseteq^{\nearrow\uparrow} Q(A)(x_0,\dots,x_N)^*$$

bezeichne dann

$$D := \mathrm{div}(F)$$

den Cartier-Divisor mit der lokalen Gleichung

$$F/x_i^{\deg F} \text{ auf } U_i := D_+(x_i). \tag{1}$$

Die zugehörige umkehrbare Garbe $\mathcal{O}_X(D)$ hängt dann bis auf Isomorphie nur vom Grad $d = \deg F$ von F ab und wird auch mit

$$\mathcal{O}_X(d)$$

bezeichnet. Als Teilgarbe der Garbe $\mathcal{M}_X^*$ hat $\mathcal{O}_X(d)$ auf U_i die Gestalt

$$\mathcal{O}_X(d)|_{U_i} = \frac{1}{x_i^d}\mathcal{O}_X|_{U_i}.$$

Für jedes homogene Polynom des Grades d,

$$\sum_i a_i x^i \cdot \sum_i b_i x^i = 0. \tag{1}$$

Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Anzahl s der Summanden von b. Im Fall $s = 1$ ist nichts zu beweisen. Sei also $s > 1$. Sei β der höchste Koeffizient von b. Im Fall $a \cdot \beta = 0$ gilt die Behauptung. Nehmen wir also an, es gilt

$$\sum_i a_i x^i \cdot \beta \neq 0.$$

Dann gibt es ein a_j mit $a_j \cdot \beta \neq 0$, also mit $a_j \cdot \sum_i b_i x^i \neq 0$. Sei a_t der höchste Koeffizienten von a mit dieser Eigenschaft,

$$a_t \cdot \sum_i b_i x^i \neq 0.$$

Wegen (1) gilt dann

$$\sum_{i \le t} a_i x^i \cdot \sum_i b_i x^i = 0.$$

wobei die Summe des ersten Faktors über alle Koeffizienten erstreckt werde, die lexikographisch nicht größer als t sind. Insbesondere ist der höchste Koeffizient dieses Produkts gleich Null, d.h.

$$a_t \cdot \beta = 0. \tag{2}$$

Wir setzen

$$c := a_t \cdot \sum_i b_i x^i.$$

Dann ist c ein von Null verschiedenes Polynom, und wegen (1) gilt

$$a \cdot c = 0.$$

Wegen (2) ist die Anzahl der von Null verschiedenen Summanden kleiner als die Anzahl s dieser Summanden von b. Die Induktionsvoraussetzung liefert die Behauptung.

[75] Ist A ein kommutativer Ring mit 1, so bezeichne

$$A(x_0,\dots,x_N)$$

den Quotientenring des Polynomrings $A[x_0,\dots,x_N]$ bezüglich der Menge S der Polynome, deren Quotienten das Einheitsideal erzeugen.

$$F \in A[x_0,...,x_N],\ \deg F = d,$$

sind die Quotienten (1) reguläre Schnitte der Strukturgarbe,

$$F/x_i^d \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X),$$

und definieren damit einen globalen regulären Schnitt von $\mathcal{O}_X(d)$[76]. Die Abbildung

$$F \mapsto \text{durch F definierter globaler Schnitt von } \mathcal{O}_X(d)$$

ist injektiv, weil die x_i reguläre Elemente von $A[x_0,...,x_N]$ sind. Wir können also die homogenen Elemente des Grades d mit den zugehörigen Schnitte identifizieren,

$$A[x_0,...,x_N]_d \subseteq \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)).$$

Der projektive Koordinatenring des $\mathbb{P}_A^N$ wird so zu einem Teilring des Rings, der zu den Tensorpotenzen von $\mathcal{O}_X(1)$ gehört,

$$A[x_0,...,x_N] \subseteq \Gamma_*(X, \mathcal{O}_X) := \oplus_{d\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)).$$

Man beachte, das Produkt von zwei homogenen Polynomen entspricht gerade dem Tensorprodukt der zugehörigen Schnitte bezüglich der natürlichen Isomorphismen

$$\mathcal{O}_X(d')\otimes\mathcal{O}_X(d'') \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(d'+d'') \qquad (2)$$

welche die Produktstruktur des Rings rechts definieren.
Die homogenen Elemente des projektiven Koordinatenrings lassen sich somit als reguläre Schnitte der Garben $\mathcal{O}_X(n)$ auffassen, d.h. als reguläre Funktioen auf X mit Werten in den entsprechenden Geradenbündeln.

Für jede Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln F setzen wir

$$F(n) := F\otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d')$$

$$\Gamma_*(X, F) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X,F(n)).$$

Aus (2) erhält man durch tensorieren mit F natürliche Isomorphismen

$$\mathcal{O}_X(d')\otimes F(d'') \xrightarrow{\cong} F(d'+d'') \qquad (2)$$

Durch diese Isomorphismen ist auf $\Gamma_*(X, F)$ in natürlicher Weise die Struktur eines Moduls über $\Gamma_*(X, \mathcal{O}_X)$ definiert, und damit auch die Struktur eines Moduls über dem projektiven Koordinatenring.

4.1.8 Die Kohomologie des projektiven Raums $\mathbb{P}_A^N$

Seien A ein noetherscher Ring,

$$S := A[x_0,...,x_N]$$

der Polynomring über A in den N+1 Unbestimmten x_i und

---

[76] Weil $\frac{F}{x_i^d} \bullet (x_j/x_i)^d = \frac{F}{x_j^d}$ gilt und die $(x_j/x_i)^d$ ein System von Übergangsfunktionen von $\mathcal{O}_X(d)$ bilden.

$$X := \mathbb{P}^N_A = \mathrm{Proj}\ S$$

der projektive Raum über Spec A. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Der natürliche Homomorphismus graduierter Ringe mit 1,

$$S \longrightarrow \Gamma_*(X, \mathcal{O}_X)$$

ist ein Isomorphismus, d.h. es gilt

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) \cong A[x_0,...,x_N]_d \text{ für } d \in \mathbb{Z}.$$

(ii) $H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$ für $0 < i < N$ und $d \in \mathbb{Z}$.

(iii) $H^N(X, \mathcal{O}_X(-N-1)) \cong A$.

(iv) Die natürliche A-bilineare Abbildung[77]

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) \times H^N(X, \mathcal{O}_X(-d-N-1)) \longrightarrow H^N(X, \mathcal{O}_X(-N-1)) \cong A$$

eine perfekte Paarung[78] für jedes $d \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Zu (i). Wir setzen

$$U_i := D_+(x_i) = \mathrm{Spec}\ k[x_0,...,x_N]_{(x_i)} = \mathrm{Spec}\ k[\frac{x_0}{x_i}, ..., \frac{x_0}{x_N}]$$

Die U_i bilden eine offene affine Überdeckung xon X mit der Eigenschaft, daß die endlichen Durchschnitte

$$U_{i_0,...,i_p} := U_{i_0} \cap ... \cap U_p$$

ebenfalls affin sind. Die Čech-Kohomologie der Überdeckung

$$\mathbf{U} := \{U_i\}_{i=0,...,N}$$

stimmt für die quasi-kohärenten Garben $\mathcal{O}_X(d)$ mit der Garben-Kohomologie überein. Wir werden deshalb die Čech-Komplexe für diese Garben bestimmen. Auf der affinen offenen Menge U_i ist die Garbe $\mathcal{O}_X(d)$ frei,

$$\mathcal{O}_X(d)|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i},$$

also ist

$$\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X(d)) \cong \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \cong k[x_0,...,x_N]_{(x_i)} \cong x_i^d \cdot k[x_0,...,x_N]_{(x_i)}$$

---

[77] Das Tensorprodukt mit einem globalen Schnitt s von $\mathcal{O}_X(d)$ definiert einen Homomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$\mathcal{O}_X(-d-N-1) \longrightarrow \mathcal{O}_X(N-1)$$

und damit eine A-lineare Abbildung

$$f_s : H^N(X, \mathcal{O}_X(-d-N-1)) \longrightarrow H^N(X, \mathcal{O}_X(-N-1)).$$

Die so definierte Abbildung

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) \times H^N(X, \mathcal{O}_X(-d-N-1)) \longrightarrow H^N(X, \mathcal{O}_X(-N-1)),\ (s, t) \mapsto f_s(t),$$

ist A-bilinear.

[78] d.h. die durch sie definierten A-linearen Abbildungen jedes der beiden direkten Faktoren rechts ins Dual des anderen Faktors sind Isomorphismen.

Der Schnitt zum homogenen Polynom F des Grades d entspricht dabei dem Polynom F/x_i^d in der Mitte und dem Polynom F selbst rechts, wenn der rechte Isomorphismus in der Multiplikation mit x_i^d besteht. Wir erhalten als Zusammensetzung einen Isomorphismus

$$\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X(d)) \cong \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \cong x_i^d \bullet k[x_0,...,x_N]_{(x_i)} \qquad (1)$$

bei welchen dem homogenen Polynom F des Grades d auf der rechten Seite der durch F definierte Schnitt auf der linken Seite entspricht.

Wir bilden die direkte Summe über alle d und erhalten

$$\Gamma_*(U_i, \mathcal{O}_X) \cong k[x_0,...,x_N]_{x_i}$$

Man beachte, dies ist ein Isomorphismus graduierter Ringe mit 1. Durch Übergang zu den homogenen Bestandteilen des Grades d erhält man die Isomorphismen (1) zurück. Nun sind die Garben $\mathcal{O}_X(d)$ quasi-koherent, und dasselbe gilt für deren direkte Summe

$$F := \oplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(d).$$

Deshalb gilt

$$F|_{U_i} = \Gamma(U_i, F)^\sim = \Gamma_*(U_i, \mathcal{O}_X)^\sim = (k[x_0,...,x_N]_{x_i})^\sim$$

Für die affine offene Hauptmenge

$$U_{i_0,...,i_p} := U_{i_0} \cap ... \cap U_{i_p} = D(\frac{x_{i_1}}{x_{i_0}} \bullet ... \bullet \frac{x_{i_p}}{x_{i_0}})$$

von U_{i_0} erhalten wir also

$$\begin{aligned}\Gamma(U_{i_0,...,i_p}, F) &= (k[x_0,...,x_N]_{x_i})_{\frac{x_{i_1}}{x_{i_0}}\bullet...\bullet\frac{x_{i_p}}{x_{i_p}}} \\ &= k[x_0,...,x_N]_{x_{i_0}\bullet...\bullet x_{i_p}} \\ &= S_{x_{i_0}\bullet...\bullet x_{i_p}}\end{aligned}$$

Der Čech-Komplex von U mit Koeffizienten in F hat die Gestalt

$$\check{C}(\mathbf{U}, F): 0 \longrightarrow \prod_{i_0} S_{i_0} \xrightarrow{\partial^0} \prod_{i_0<i_1} S_{x_{i_0}\bullet x_{i_1}} \xrightarrow{\partial^1} ... \longrightarrow \prod_{i_0<...<i_p} S_{x_{i_0}\bullet...\bullet x_{i_p}} \xrightarrow{\partial^p} \ldots$$

Er besteht aus graduierten A-Moduln, und die Differentiale respektieren die Graduierung (und basieren auf den natürlichen Einbettungen in die Quotientenringe). Nach Konstruktion ist

$$H^0(X, F) = \mathrm{Ker}(\partial^0).$$

Wir haben zu zeigen,

$$S = \mathrm{Ker}(\partial^0) \qquad (2)$$

Weil das 0-te Differential des garbifizierten Čech-Komplexes als Kern gerade die Garbe F ist, erhalten wir durch Übergang zu den globalen Schnitten, daß gilt

$$S \subseteq \Gamma(X, F) \subseteq \mathrm{Ker}(\partial^0)$$

Es besteht also zumindeste die Inklusion '$\subseteq$'.Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Sei s ein Element aus dem Kern von ∂^0. Weil die Differentiale die Graduierungen respektieren, liegt dann auch jeder homogene Bestandteil von s im Kern, und es reicht zu zeigen, daß diese homogenen Bestandteile in $H^0(X, F)$ liegen. Wir können also annehmen,

$$s \in \mathrm{Ker}(\partial^0), \text{ s homogen vom Grad d.}$$

Der Schnitt s hat die Gestalt

$$s = \{s_i\}_{i=0,...,N} \text{ mit } s_i \in S_{x_i}$$

Die natürlichen Abbildungen in die Quotientenringe $S_{x_{i_0}\bullet...\bullet x_{i_p}}$ von S sind injektiv (weil die x_i keine Nullteiler von S sind). Wir können deshalb alle diese Ringe als Teilringe von

$$S' := S_{x_0...x_N}$$

auffassen. Die Aussage, daß s im Kern von ∂^0 liegt, bedeutet dann, daß gilt

$$s_i = s_j \text{ in } S'$$

für je zwei Indizes i,j, d.h.

$$s' := s_0 = s_1 = ... = s_N \text{ in } S'.$$

Ein homogenes Element s' des Grades d von S' hat die Gestalt

$$s' = x_0^{i_0}\bullet...\bullet x_N^{i_N}\bullet F(x_0,...,x_N)$$

mit einem homogenen Polynom $F \in S$ mit

$$d = i_0 +...+ i_N + \deg F$$

(vgl. (1)) Wir können dabei annehmen, daß F durch keine der Unbestimmten x_i teilbar ist. Die Bedingung $s' = s_\nu$ bedeutet dann, daß $i_j \geq 0$ gilt für alle von ν verschiedenen j. Da s im Kern von ∂^0 liegen soll, müssen alle $i_j \geq 0$ sein, d.h.

$$s = x_0^{i_0}\bullet...\bullet x_N^{i_N}\bullet F(x_0,...,x_N)$$

liegt in S. Es gilt also (2), und damit Aussage (i).

<u>Zu (iii)</u>. Wir behalten die bisherigen Bezeichnungen bei. Wir haben

$$H^N(X, F) = \mathrm{Koker}(\partial^{N-1}: \prod_{i=0}^{N} S_{x_0...x_{i-1}x_{i+1}...x_N} \longrightarrow S_{x_0...x_N})$$

zu berechnen. Es gilt

$$\partial^{N-1}(s_0,...,s_n) = s_0 - s_1 + ...+ (-1)^N s_N.$$

Die alternierende Summe, welche den Korand definiert besteht hier nur aus einem Summanden.

Wir betrachten $S_{x_0...x_N}$ als freien A-Modul mit der Basis

$$x_0^{i_0}\bullet...\bullet x_N^{i_N} \text{ mit } i_0, ..., i_N \in \mathbb{Z}.$$

Das Bild von ∂^{N-1} wird dabei von solchen Potenzprodukten erzeugt, und zwar von denjenigen mit $i_\nu \ge 0$ für mindestens ein ν.[79] Damit ist der Kokern der von den übrigen Potenzprodukten erzeugte freie A-Modul. Mit anderen Worten, $H^N(X, F)$ ist frei über A mit der Basis

$$x_0^{i_0}\bullet\ldots\bullet x_N^{i_N} \text{ mit } i_0 < 0, \ldots, i_N < 0$$

Alle diese Basis-Elemente haben einen Grad

$$i_0+\ldots+i_N \le (-1) + \ldots + (-1) = - N - 1.$$

Zum maximalen Grad - N - 1 gibt es nur einen freien Erzeuger, nämlich den mit $i_0 =\ldots= i_N = -1$. Der homogene Bestandteil dieses Grades ist somit vom Rang 1,

$$H^N(X, \mathcal{O}_X(-N-1)) \cong A. \qquad (3)$$

Dies ist gerade die Behauptung von Aussage (iii).
<u>Zu (iv)</u>. Wie wir gerade gesehen haben, ist $d = - N - 1$ der größte Grad mit

$$H^N(X, \mathcal{O}_X(d)) \ne 0$$

Der zweite Faktor des Definitionsbereichs der Paarung von (iv) ist somit Null für $d < 0$. Dasselbe gilt wegen (i) auch für den ersten Faktor. Die Paarung ist also perfekt für alle ganzen Zahlen $d < 0$. Für $d \ge 0$ hat der erste Faktor eine Basis aus Potenzprodukten des Grad d,

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) = \oplus_{i_0+\ldots+i_N=d, 0\le i_\nu} A\bullet x_0^{i_0}\ldots x_N^{i_N}. \qquad (4)$$

Entsprechend besitzt der zweite Faktor eine Basis aus Potenzprodukten des Grades -d-N-1, wobei sämtliche Exponenten negativ sind,

$$H^N(X, \mathcal{O}_X(-d-N-1)) = \oplus_{-(j_0+1)-\ldots-(j_N+1)=d, j_\nu<0} A\bullet x_0^{j_0}\ldots x_N^{j_N} \qquad (5)$$

Die Multiplikation mit dem Schnitt

$$\sigma = x_0^{i_0}\ldots x_N^{i_N}, \sum_\nu i_\nu = d$$

aus dem ersten Faktor (4) induziert einen Garben-Morphismus

$$\mathcal{O}_X(-d-N-1) \longrightarrow \mathcal{O}_X(N-1),$$

der sich als Multiplikation mit σ auf die Čech-Komplexe fortsetzt und damit auf der N-ten Kohomomologie die Gestalt

$$x_0^{j_0}\ldots x_N^{j_N} \mapsto x_0^{i_0+j_0}\ldots x_N^{i_N+j_N},$$

hat, wobei das Potenzprodukt rechts durch Null zu ersetzen ist, falls einer der Exponenten von -1 verschieden ist.[80] Die Multiplikation mit σ überführt also das Basis-Element

$$x_0^{-1-i_0}\ldots x_N^{-1-i_N}$$

von (5) in das Basiselement von $H^N(X, \mathcal{O}_X(N-1))$ und alle übrigen Basiselemente von (5) in die Null. Die Elemente der Basis (4) entsprechen damit gerade den Elementen des Duals der Basis von (5), d.h. die Paarung ist perfekt.

---

[79] Man wähle für eine der Koordinaten s_i ein Potenzprodukt und für alle übrigen Koordinaten die Null.

[80] Der Kokern (3) entsteht durch Wegfaktorisieren aller Potenprodukte mit dem falschen Grad.

Zum Beweis des Satzes ist noch die Aussage von (ii) zu beweisen.
Zu (ii). Wir führen den Beweis durch Induktion nach N. Im Fall N = 1 ist die Aussage leer. Sei also N > 1.
Der oben betrachtete Čech-Komplex $\check{C}(\mathbf{U}, F)$ entsteht aus dem garbifizierten Čech-Komplex $\check{\mathbf{C}}(\mathbf{U},F)$ durch Anwenden des globalen Schnitt-Funktors. Wir schränken jetzt den garbifizierten Čech-Komplex auf U_N ein und wenden dann den globalen Schnitt-Funktor an. Wir erhalten so den Čech-Komplex des Raums U_N bezüglich der Überdeckung

$$\mathbf{U}' = \{U_i \cap U_N\}_{i=0,\dots,N}.$$

Die endlichen Durchschnitte der Mengen dieser Überdeckung sind affin. Die Kohomologie des Čech-Komplexes ist gleich der Garben-Kohomologie

$$H^i(\check{C}(\mathbf{U}', F|_{U_N})) = H^i(U_N, F) = 0 \text{ für } i > 0.$$

Das Gleichheitszeichen rechts gilt, weil U_N affin ist. Nun ist der Durchschnitten von U_N mit den endlichen Durchschnitten U_J der U_i gerade die durch x_N definierte offene Hauptmenge der U_J. Deshalb entsteht der eingeschränkte Čech-Komplex aus dem uneingeschränkten durch Übergang zu den Quotienten bezüglich der Potenzen von x_N:

$$\check{C}(\mathbf{U}', F|_{U_N}) = \check{C}(\mathbf{U}, F)_{x_N}.$$

Weil der Überganz zum Quotientenring exakt ist, kommutiert dieser Funktor mit dem Kohomologie-Funktor. Es folgt für i > 0

$$\begin{aligned} 0 &= H^i(\check{C}(\mathbf{U}', F|_{U_N})) \\ &= H^i(\check{C}(\mathbf{U}, F)_{x_N}) \\ &= H^i(\check{C}(\mathbf{U}, F))_{x_N} \\ &= H^i(X, F)_{x_N} \end{aligned}$$

Damit wird jedes Element von $H^i(X, F)$ von einer Potenz des Elements x_N annulliert. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß die Multiplikation mit x_N eine bijektive Abbildung

$$H^i(X, F) \xrightarrow{x_N} H^i(X, F) \tag{6}$$

induziert.
Zum Beweis betrachten wir den Primdivisor $H = \mathrm{div}(x_N)$. Die Idealgarbe von H wird auf U_i durch die reguläre Funktion x_N/x_i erzeugt, stimmt dort also mit $\mathcal{O}_X(-H)$ überein. Weil dies für alle i gilt, ist

$$\mathcal{O}_X(-1) = \mathcal{O}_X(-H)$$

gerade die Idealgarbe des reduzierten und irreduziblen abgeschlossenen Teilschemas H. Insbesondere besteht eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{x_N} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow 0.$$

wobei der Monomorphismus links gerade in der Multiplikation mit dem globalen Schnitt x_N von $\mathcal{O}_X(1)$ besteht.

Wir tensorieren mit den lokal freien Garben $\mathcal{O}_X(d)$ und gehen zur direkten Summe über. Wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F(-1) \xrightarrow{x_N} F \longrightarrow F_H \longrightarrow 0$$

mit

$$F_H := \oplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_H(d).$$

Aus der kurzen exakten Sequenz erhalten wir die Exaktheit der Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H^i(X, F(-1)) \xrightarrow{x_N} H^i(X, F) \longrightarrow H^i(X, F_H) \longrightarrow \ldots \qquad (7)$$

Als S-Modul ist F(-1) gerade der Modul, den man aus F durch Versschieben der Grade um 1 erhält. Die linke Abbildung besteht gerade in der Multiplikation der S-Moduls mit dem Element x_N von S.[81]

Nun ist H isomorph zum $\mathbb{P}_A^{N-1}$, und wegen F_H =[82] direktes Bild von $\oplus\ \mathcal{O}_H(d)$ gilt anch 2.2.2,

$$H^i(X, F_H) = H^i(H, \oplus\ \mathcal{O}_H(d)).$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt

$$H^i(X, F_H) = 0 \text{ für } 0 < i < N\text{-}1.$$

Zusammen mit (7) ergibt sich,

(6) ist surjektiv für $0 < i < N-1$ und

(6) ist injektiv für $1 < i < N$.

Wir haben noch die Surjektivität für $i = N-1$ und die Injektivität für $i = 1$ zu beweisen.

Die exakte Sequenz (7) hat am linken Ende die Gestalt

$$0 \longrightarrow H^0(X, F(-1)) \xrightarrow{x_N} H^0(X, F) \xrightarrow{\alpha} H^0(X, F_H) \longrightarrow 0.$$

Die Null rechts außen kommt dabei von der Tatsache daß die Abbildung α gerade die natürliche Surjektion

$$S \longrightarrow S/(x_N)$$

ist (nach (i)). Daraus ergibt sich die Injektivität von (6) für $i = 1$.

Das rechte Ende der langen Kohomologie-Sequenz hat die Gestalt

---

[81] d.h. wenn die Graduierungen ignoriert ist es die gewöhnliche Multiplikation

$$H^i(X, F) \xrightarrow{x_N} H^i(X, F)$$

mit x_N.

[82] Die abgeschlossene Einbettung $i: H \hookrightarrow X = \mathbb{P}_A^N$ definiert einen Gruppen-Homomorphismus

$$\operatorname{Pic} X \longrightarrow \operatorname{Pic} H,\ G \mapsto i^*G$$

(wegen $i^*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_H$). Das Bild der getwisteten Garbe $\mathcal{O}_X(d)$ ist dabei gerade $\mathcal{O}_H(d)$ (weil die Übergangsfunktionen der Bildgarbe durch Einschränken der Übergangsfunktionen x_i^d/x_j^d auf H enstehen, bzw. weil die Einschränkung eines homogenen Polynoms des Grades d auf H ein homogenes Polynom des Grades d - oder Null - ist).

$$0 \longrightarrow H^{N-1}(X, F_H) \xrightarrow{\partial} H^N(X, F(-1)) \xrightarrow{x_N} H^N(X, F) \longrightarrow 0$$

Die Null rechts kommt von der Tatsache daß H eine Dimensioin < N besitzt. Um die Null links zu verstehen, beachten wir daß $H^N(X, F)$ der freie A-Modul ist mit der Basis aus Monomen der Gestalt

$$x_0^{j_0} \bullet \ldots \bullet x_N^{j_N} \text{ mit } j_0 < 0, \ldots, j_N < 0.$$

Ein solches Monomom liegt genau dann im Kern von x_N, wenn durch Multiplikation mit x_N ein Monom entsteht, daß nicht mehr diese Gestalt hat, d.h. wenn $j_N = -1$ ist. Der Kern von x_N ist somit der freie A-Modul mit der Basis aus Monomen der Gestalt

$$x_0^{j_0} \bullet \ldots \bullet x_N^{j_N} \text{ mit } j_0 < 0, \ldots, j_{N-1} < 0, j_N = -1.$$

Nun ist $H^{N-1}(X, F_H)$ der freie A-Modul mit der Basis aus Monomen der Gestalt

$$x_0^{j_0} \bullet \ldots \bullet x_{N-1}^{j_{N-1}} \text{ mit } j_0 < 0, \ldots, j_{N-1} < 0,$$

und ∂ ist die Division durch x_N,[83] und ∂ bildet surjektiv auf den Kern von x_N ab. Insbesondere ist damit ∂ injektiv. Aus der Injektivität von ∂ ergibt sich aber die Surjektivität von (6) im Fall i = N-1.
QED.

4.1.9 Die Kohomologie kohärenter Garben auf projektiven Schemata

Seien A ein kommutativer noetherscher Ring mit 1 und X ein projektives Schema über A[84], F eine kohärente Garbe auf X. Wir bezeichenen mit $\mathcal{O}_X(d)$ die Tensorpotenzen einer sehr amplen Garbe $\mathcal{O}_X(1)$ auf X.[85] und setzen

$$F(f) := F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d)$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $H^i(X, F)$ ist ein endlich erzeugter A-Modul.
(ii) Es gibt eine von F abhängige ganze Zahl d_0 mit

$$H^i(X, F(d)) = 0 \text{ für jedes } i > 0 \text{ und jedes } n \geq d_0.$$

Beweis: siehe Hartshorne, Algebraic geometry, Th. III.5.2
QED.

---

[83] Man betrachte die kurze exakte Sequenz der Cech-Komplexe, welche die lange Kohomologie-Sequenz /7) definiert: den Zusammenhangshomomorphismus erhält man, indem man einen Repräsentanten einer Kohomologie-Klasse wählt, ein Urbild bezüglich $F \longrightarrow F_H$ wählt, den Korandoperator anwendet und ein Urbild bezüglich der Multiplikation mit x_N sucht, d.h. durch x_N teilt. Man beachte, über den offenen affinen Hauptmengen U_J induziert der Garben-Morphismus $F \longrightarrow F_H$ Surjektionen.

[84] d.h. ein abgeschlossenes Teilschema eines $\mathbb{P}_A^N$.

[85] d.h. $\mathcal{O}_X(1)$ ist das inverse Bild bezüglich einer abgeschlossenen Einbettung $X \hookrightarrow P := \mathbb{P}_A^N$ in einen projektiven Raum über A der Twistgarbe $\mathcal{O}_P(1)$ dieses projektiven Raums.

4.1.10 Direkte Bilder kohärenter Garben (proper mapping theorem).

Seien $f: X \longrightarrow Y$ ein projektiver Morphismus[86] noetherscher Schemata und F eine kohärente Garbe auf X. Dann ist das direkte Bild f_*F eine kohärente Garbe auf Y.

Beweis: siehe Hartshorne, Algebraic geometry, Th. III, 8.8
QED.
Bemerkungen

(i) Außer f_*F sind auch die höheren direkten Bilder R^if_*F kohärent.

(ii) Die Aussage gilt allgemeiner für eigentliche Morphismen (vgl. Grothendieck, EGA III, 3.2.1).

(iii) Es gibt ein d_0 mit $R^if_*F(d) = 0$ für jedes $i > 0$ und jedes $d \ge d_0$.

4.2 Garben von Differentialformen

4.2.1 Kähler-Differentiale

Sei $f: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1. Wir betrachten im folgenden B als Modul über A, d.h. wir schreiben

$$a \bullet b := f(a)b \text{ für } a \in A \text{ und } b \in B.$$

Die Multiplikation in B definierten eine A-bilineare Abbildung

$$B \times B \longrightarrow B,\ (b', b'') \mapsto b'b''.$$

Diese induziert einen A-linearen Homomorphismus

$$B\otimes_A B \longrightarrow B,\ b'\otimes b'' \mapsto b'b'', \tag{1}$$

von kommutativen Ringen mit 1, welcher offensichtlich surjektiv ist. Der Ring $B\otimes_A B$ besitzt bezüglich

$$b\bullet x := (b\otimes 1)\bullet x$$
$$x\bullet b := (1\otimes b)\bullet x$$

zwei B-Modul-Strukturen, die wir mit <u>linke</u> bzw. <u>rechte</u> B-Modul-Struktur von $B\otimes_A B$ nennen werden. Der Homomorphismus (1) ist B-lineare bezüglicher beider Strukturen.

Wir bezeichnen mit

$$I := I_{B/A} := \mathrm{Ker}(B\otimes_A B \longrightarrow B)$$

den Kern von (1) und erhalten so eine exakte Sequenz von B-Moduln

$$0 \longrightarrow I_{B/A} \longrightarrow B\otimes_A B \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

(bezüglich beider B-Modul-Strukturen von $B\otimes B$). Entsprechend besitzt auch I zwei B-Modul-Strukturen. Wir setzen

$$\Omega := \Omega_{B/A} := I/I^2$$

und nennen diesen B-Modul Modul der <u>Kähler-Differentiale</u> von B über A (genauer der Kähler-Differentiale bezüglich f. Nach Konstruktion gilt

$$I\bullet\Omega = 0. \tag{2}$$

[86] d.h. f ist über den offenen Mengen U = Spec A von Y lokal von der Gestalt

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_A \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A,$$

wobei der linke Morphismus eine abgeschlossene Einbettung und der rechte Morphismus der natürliche ist.

Bemerkungen

(i) Für beliebige Elemente

$$b \in B \text{ und } \omega \in \Omega$$

gilt wegen $b\otimes 1 - 1\otimes b \in I$ und (2) stets

$$b\bullet\omega = \omega\bullet b,$$

d.h. die beiden B-Modul-Strukturen von Ω stimmen überein.

(ii) Die Zusammensetzung der A-linearen Abbildung

$$B \longrightarrow I,\ b \mapsto b\otimes 1 - 1\otimes b,$$

mit der natürlichen Abbildung in den Faktorring $I \longrightarrow I/I^2$ wird mit

$$d = d_{B/A}: B \longrightarrow \Omega_{B/A},\ b \mapsto b\otimes 1 - 1\otimes b \bmod I_{B/A}.$$

Für $b\in B$ heißt

$$db$$

(Kähler-) Differential von b über A.Es gilt

a) $da = 0$ für jedes Element a aus dem Bild von $f: A\longrightarrow B$.[87]

b) $d(b'b'') = b'\bullet db'' + b''\bullet db'$ für je zwei Elemente $b', b'' \in B$[88]

c) Die Abbildung d ist A-linear.[89]

(iii) Das Ideal I wird als B-Modul (bezüglich beider B-Modul-Strukturen) von den Elementen der Gestalt

$$b\otimes 1 - 1\otimes b \text{ mit } b \in B$$

erzeugt. Insbesondere gilt

$$\Omega_{B/A} = \sum_{b\in B} B\bullet db$$

(iv) Seien $B = A[x_1,...,x_N]$ ein Polynomring ung $f: A \longrightarrow B$ die natürliche Einbettung. Dann gilt für jedes Polynom $b = b(x_1,...,x_N)$

$$db = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial b}{\partial x_i}\bullet dx_i.$$

Insbesondere ist

$$\Omega_{B/A} \cong Bdx_1 + ... + Bdx_N$$

ein freier B-Modul mit dem B-linear unabhängigen Erzeugendensystem

$$dx_1,...,dx_N$$

Beweis von (iii). Für jedes Element

$$\alpha = \sum_i b'_i\otimes b''_i \in I$$

gilt

---

[87] Weil das Tensorprodukt über A linear ist, gilt $a\otimes 1 - 1\otimes a = a\bullet(1\otimes 1 - 1\otimes 1) = 0$.

[88] Genauer ist

$$\begin{aligned} d(b'b'') &= b'b''\otimes 1 - 1\otimes b'b'' \bmod I \\ &= (b'\otimes 1)\bullet(b''\otimes 1 - 1\oplus b'') + (b'\otimes 1 - 1\otimes b')\bullet(1\otimes b'') \bmod I \\ &= b'\bullet db'' + db'\bullet b'' \end{aligned}$$

Weil die beiden B-Modul-Strukturen von Ω gleich sind, ist das gerade die behauptete Formel.

[89] Man wende b) and für den Fall, daß einer der Faktoren b' oder b'' im Bild von $f: A\longrightarrow B$ liegt.

$$\sum_i b'_i b''_i = 0 \qquad (1)$$

und

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_i (b'_i\otimes 1)\bullet(1\otimes b''_i)\\ &= \sum_i (b'_i\otimes 1)\bullet(1\otimes b''_i - b''_i\otimes 1) + \sum_i b'_i b''_i\otimes 1\\ &= \sum_i (b'_i\otimes 1)\bullet(1\otimes b''_i - b''_i\otimes 1) \text{ wegen (1).}\end{aligned}$$

Analog ist

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_i (b'_i\otimes 1)\bullet(1\otimes b''_i)\\ &= \sum_i (b'_i\otimes 1 - 1\otimes b'_i)\bullet(1\otimes b''_i) + \sum_i 1\otimes b'_i b''_i\\ &= \sum_i (b'_i\otimes 1 - 1\otimes b'_i)\bullet(1\otimes b''_i) \text{ wegen (1).}\end{aligned}$$

Beweis von (iv).
Es gilt

$$B\otimes_A B \cong A[x_1,...,x_N,y_1,...,y_N],\ x_i\otimes 1 \mapsto x_i,\ 1\otimes x_i \mapsto y_i\ .$$

Die natürliche Abbildung $B\otimes_A B \longrightarrow B$ hat bezüglich dieses Isomorphismus die Gestalt

$$A[x_1,...,x_N,y_1,...,y_N] \longrightarrow A[x_1,...,x_N],\ p(x,y) \mapsto p(x,x).$$

Das von den x_i-y_i erzeugte Ideal I liegt im Kern dieser Abbildung. Die Abbildung faktorisiert sich deshalb über

$$A[x_1,...,x_N,y_1,...,y_N]/I \cong A[x_1,...,x_N].$$

Wir sehen also, I ist gleich dem Kern diese Abbildung:

$$I = I_{B/A} = (x_1-y_1,...,x_N-y_N)\bullet A[x_1,...,x_N,y_1,...,y_N]$$

Mit $X_i := x_i$-y_i folgt

$$I = I_{B/A} = (X_1,...,X_N)\bullet A[X_1,...,X_N,y_1,...,y_N]$$

Mit $B' = A[X_1,...,X_N]$ und $I' = (X_1,...,X_N)B'$ erhalten wir, weil

$$B'' := A[X_1,...,X_N,y_1,...,y_N]$$

als Polynomring über B' flach ist,

$$\begin{aligned}\Omega_{B/A} &= I/I^2\\ &= I'B''/I'^2B''\\ &\cong I'\otimes_{B'}B''/I'^2\otimes_{B'}B''\\ &\cong I'/I'^2\otimes_{B'}B''\\ &\cong I'/I'^2\otimes_{B'/I'}B'/I'\otimes_{B'}B'' \quad (I'/I'^2 \text{ ist ein } B'/I'\text{-Modul})\\ &\cong I'/I'^2\otimes_{B'/I'}B''/I'B''\end{aligned}$$

Nun ist B'/I' = A, B"/I'B" = B und der erste Faktor ist gerade der freie A-Modul mit dem A-linear unabhängigen Erzeugendensystem $X_1,...,X_N$. Wir erhalten so die direkte Zerlegung

$$\Omega_{B/A} = B\bullet\overline{X}_1+...+B\bullet\overline{X}_N$$

Dabei bezeichne $\overline{X}_i$ die Restklasse von $X_i = x_i - y_i = x_i\otimes 1 - 1\otimes x_i$, d.h.

$$\overline{X}_i = dx_i$$

QED.

4.2.2 Kähler-Differential auf Schemata

Sei h: $A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit 1 und $f \in B$ ein Element. Dann besteht eine natürliche Isomorphie

$$\Omega_{B_f/A} \cong (\Omega_{B/A})_f .$$

Beweis. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow B\otimes_A B \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

Erhalten wir durch Anwenden des Funktors $\otimes_B B_f$ die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I_{1\otimes f} \longrightarrow B\otimes_A B_f \longrightarrow B_f \longrightarrow 0$$

Wir wenden den Funktor $B_f\otimes_B$ an und beachten, das das natürliche Bild von f in B_f eine Einheit ist, der Quotienten-Ring von B_f bezüglich der Potenzen von f also gleich B_f ist. Wir erhalten so die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (I_{1\otimes f})_{f\otimes 1} \longrightarrow B_f\otimes_A B_f \longrightarrow B_f \longrightarrow 0.$$

Es folgt mit $J = (I_{1\otimes f})_{f\otimes 1}$

$$\Omega_{B_f/A} = J/J^2 = ((I/I^2)_{1\otimes f})_{f\otimes 1}$$

Weil die linke und die rechte Modul-Struktur von I/I^2 über B gleich sind, entsteht der Modul auf der rechten Seite, indem man zweimal zum Quotienten-Ring bezüglich der Potenzen von f übergeht. Der zweite Übergang hat also zu keiner Veränderung, d.h. es git

$$\Omega_{B_f/A} \cong (I/I^2)_f = (\Omega_{B/A})_f .$$

QED.

Bemerkungen

(i) Seien h: $A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von Ringen mit 1,

$$X := \operatorname{Spec} A$$
$$Y := \operatorname{Spec} B$$

und f: $Y \longrightarrow X$ der durch h induzierte Morphismus affiner Schemata. Dann bezeichne $\Omega_{Y/X}$ die quasi-kohärente Garbe.

$$\Omega_{Y/X} = (\Omega_{B/A})^{\sim}$$

Auf Grund der eben bewiesenen Aussage besteht dann für jede affine offene Hauptmenge V = D(f) $\subseteq$ Spec B ein natürlicher Isomorphismung

$$\Gamma(V, \Omega_{Y/X}) = (\Omega_{B/A})_f \cong \Omega_{B_f/A}$$

und damit ein natürlicher Isomorphismus von quasi-kohärenten Garben

$$\Omega_{Y/X}|_V \cong (\Omega_{B_f/A})^\sim = \Omega_{V/X}.$$

(ii) Seien f: Y $\longrightarrow$ X ein Morphismus von Schemata mit X = Spec A affin. Für je drei affine offene Mengen V, V', V'' $\subseteq$ Y mit V $\subseteq$ V'$\cap$V'' bestehen dann natürliche Isomorphismen

$$\Omega_{V'/X}|_V \cong \Omega_{V/X} \cong \Omega_{V''/X}|_V .$$

Die lokal auf den affinen offenen Teilmengen V von Y definierten Garben $\Omega_{V/X}$ verheften sich deshalb zu einer global definierten quasi-kohärenten Garbe

$$\Omega_{Y/X}$$

(iii) Sei f: Y $\longrightarrow$ X ein Morphismus von Schemata. Für jede affine offene Teilmenge

$$U \subseteq X$$

sind dan auf der Einschränkung

$$f^{-1}(U) \longrightarrow U$$

von f auf U die quasi-kohärenten Garben $\Omega_{f^{-1}(U)/U}$ definiert. Diese verheften sich zu einer auf ganz Y definierten quasi-kohärenten Garbe

$$\Omega_{Y/X}$$

welche Garbe der Kähler-Differentiale oder auch Garbe der regulären 1-Formen auf Y über X heißt.

(iv) Sei f: Y $\longrightarrow$ X Morhismus von Schemata mit der Eigenschaft, daß die Kompontenen aller Fasern dieselbe Dimension n besitzten. Dann heißt

$$\omega_{Y/X} := \wedge^n \Omega_{Y/X}$$

kanonische Garbe von Y über X.

4.2.3 Kähler-Differentiale und kanonische Garbe auf dem projektiven Raum

Seien A eine noetherscher kommutativer Ring mit 1,

$S := A[x_0,...,x_N]$

$X :=$ Spec A

$Y := \mathbb{P}^N_A$

und f: Y $\longrightarrow$ X der natürliche Morphismus von Schemata zur Inklusion

$$A \hookrightarrow S = A[x_0,...,x_N]$$

Auf der affinen offenen Menge

$$U_i = D_+(x_i) = \text{Spec } S_{(x_i)} = \text{Spec } A[\frac{x_0}{x_i}, \dots , \frac{x_N}{x_i}]$$

hat die Garbe der Kähler-Differentiale über X die Gestalt

$$\Omega_{U_i/X} = \mathcal{O}_{U_i} d\frac{x_0}{x_i} + \ldots + \mathcal{O}_{U_i} d\frac{x_N}{x_i} \qquad (d\frac{x_i}{x_i} = d1 = 0)$$

d.h. des handelt sich um einen freien $\mathcal{O}_{U_i}$-Modul vom Rang N. Für die kanonische Garbe erhalten wir

$$\omega_{U_i/X} = \mathcal{O}_{U_i} d\frac{x_0}{x_i} \wedge \ldots \wedge d\frac{x_{i-1}}{x_i} \wedge \frac{x_{i+1}}{x_i} \wedge \ldots \wedge d\frac{x_N}{x_i} .$$

Dies ist eine freie Garbe vom Rang 1.

Vergleichen wir die Garben $\omega_{U_i/X}$ und $\omega_{U_j/X}$ auf $U_i \cap U_j$. Um die Rechnung zu vereinfachen beschränken wir uns auf den Fall i = 0 und j = N, d.h. auf den Vergleich der Garben

$$\omega_{U_0/X} = \mathcal{O}_{U_0} d\frac{x_1}{x_0} \wedge \ldots \wedge d\frac{x_N}{x_0} .$$

$$\omega_{U_N/X} = \mathcal{O}_{U_N} d\frac{x_0}{x_N} \wedge \ldots \wedge d\frac{x_{N-1}}{x_N} .$$

Wir über $U_0 \cap U_N$ erhalten wir

$$x_0/x_N = 1/(x_N/x_0)$$
$$x_i/x_N = (x_i/x_0)/(x_N/x_0) \qquad \text{für } i = 1,\ldots,N-1$$

also mit $X_i = \frac{x_i}{x_0}$

$$d\frac{x_0}{x_N} = dX_N^{-1} = -X_N^{-2} dX_N$$

$$d\frac{x_i}{x_N} = d(X_N^{-1} \cdot X_i) = -X_N^{-2} \cdot X_i dX_N + X_N^{-1} dX_i$$

Damit erhalten wir

$$\omega_{U_0/X}|_{U_0 \cap U_N} = \mathcal{O}_{U_0 \cap U_N} dX_1 \wedge \ldots \wedge dX_N .$$

$$\begin{aligned}\omega_{U_N/X}|_{U_0 \cap U_N} = \mathcal{O}_{U_0 \cap U_N} & X_N^{-2} dX_N \wedge \\ & \ldots \wedge (-X_N^{-2} \cdot X_i dX_N + X_N^{-1} dX_i) \wedge \\ & \ldots \wedge (-X_N^{-2} \cdot X_{N-1} dX_N + X_N^{-1} dX_{N-1}) \\ = X_N^{-N-1} & \mathcal{O}_{U_0 \cap U_N} dX_1 \wedge \ldots \wedge dX_N\end{aligned}$$

Der Verheftungsisomorphismus auf $U_0 \cap U_N$ besteht in der Multiplikation mit der (-N-1)-ten Potenz von $X_N = \frac{x_N}{x_0}$. Mit anderen Worten, die die lokal definierten umkehrbaren Garben verheften sich zur Garbe

$$\omega_{Y/X} \cong \mathcal{O}_Y(-N-1).$$

Anders ausgedrückt, die Differentialform $d\frac{x_0}{x_N} \wedge \ldots \wedge d\frac{x_{N-1}}{x_N}$ hat auf U_N weder Pole noch Nullstellen und entlang der Hyperebene $x_N = 0$ einen Pol der Ordnung N+1. Ein Divisor K mit

$$\omega_{Y/X} \cong \mathcal{O}_Y(K).$$

heißt <u>kanonischer Divisor</u> von Y über X (und wird gewöhlich mit K bezeichnet).

Die Ergebnisse von 4.1.8 lassen sich damit wie folgt formulieren:

$$H^N(Y,\mathcal{O}_Y(K)) = A = H^0(Y, \mathcal{O}_Y).$$

Sei D ein Divisor auf Y mit $\mathcal{O}_Y(D) = \mathcal{O}_Y(d)$.[90] Dann gelten die folgenden Aussagen:

$H^N(Y,\mathcal{O}_Y(K-D)\otimes\omega_{Y/X})$ ist dual zu $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D))$.

$H^N(Y,\mathcal{O}_Y(D))$ ist dual zu $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(K-D))$

Der Dualitätssatz von Serre verallgemeinert diese Aussagen auf den Fall von projektiven Varietäten, deren lokale Ringe Cohen-Macaulay-Ringe sind.

5. Ext-Gruppen und Garben

6. Serre-Dualität

7. Höhere direkte Bilder

8. Flache Morphismen

9. Glatte Morphismen

10. Kohomologie und Basiswechsel

Literatur

[BD 1968] Bucur,I., Deleanu, A.: Introduction to the theory of categories, John Wiley & Sons, New York 1968

[CE 1956] Cartan, H., Eilenberg, S.: Homological algebra, Princeton University Press 1956.

[Ba 1968] Bass, H.: Algebraic K-theory, Benjamin, New York 1968

[Fa 1973] Faith, C.: Algebra: Rings, modules and categories I, Springer, New York 1973

[Go 1958] Godement, R.: Topologie algébrique et théorie de faisceaux, Hermann, Paris 1958

[Gr 1957] Grothendieck, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Mathematical Journal 9 (1957), 119-221

[Gr 1967] Grothendieck, A.: Local cohomology, Lecture Notes in Math. 41 (1967)

[Ha 1977] Hartshorne, R.: Algebraic geometry , Springer, New York 1977

[Ma 1970] Matsumura, H.: Commutative Algebra, Benjamin, New York 1970.

[90] Ist A ein Körper, so haben wir gesehen, daß jeder Divor des projektiven Raums dieser Bedingung genügt.

[Mi 1974] Milnor, J.W., Stasheff, J.D.: Charakteristik Classes, Princeton University Press, University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1974
[Mi 1965] Mitchell, B.: Theorie of categories, Academic Press, New York 1965
[Na 1962] Local rings, Interscience Tracts in Pure & Applied Math., J. Wiley, New York 1962
[Sc 1970] Schubert, H.: Kategorien I & II: Akademie-Verlag, Berlin 1970
[Se 1955] Serre, J.-P.: Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math. 61 (1955), 197-278

Č

Index

—K—

—L—

—M—

—N—

—O—

—P—

—Q—

—R—

—S—

—T—

—Ü—

—U—

—V—

Inhalt