

Klausur-Übungsaufgaben

Verwenden Sie bitte für jede Aufgabe ein **separates Blatt**, welches mit **Name, Immatrikulationsnummer, Studienziel** (Dipl.Math., Dipl.Wi.Math., etc.) versehen ist. Aufgabenzettel bitte beifügen.

Es dürfen **keine** Hilfsmittel (Notizen jeglicher Art, Bücher, Taschenrechner, etc.) verwendet werden!

Die Zahl der pro Aufgabe bei klar ersichtlichem Lösungsweg maximal zu vergebenen Punkte ist jeweils angegeben.

1. Gib die Definition einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ auf einer Menge X .
2. Finde eine σ -Algebra $\mathcal{A}$ auf $\mathbb{N}$ und ein Maß μ auf $(\mathbb{N}, \mathcal{A})$ so daß $L^1(\mathbb{N}, \mathcal{A}, \mu)$ identifiziert werden kann mit dem Raum der absolut konvergenten Reihen.
3. Entscheide, ob die folgende Integrale existieren und berechne sie in dem entsprechenden Fall:
 - $\int_{\{0 \leq x, y, x^2 + y^2 \leq R^2\}} \frac{1}{\sqrt{xy}} d\lambda^2(x, y),$
 - $\int_{\{\|(x_1, \dots, x_n)\|_2^2 \leq a^2\}} \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}} d\lambda^n(x), x \in \mathbb{R}^n,$
 - $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} d\lambda^2(x, y),$
 - $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\|x\|_2^a} d\lambda^n(x), a \in \mathbb{R} \text{ fest.}$
4. Formuliere den Satz über die majorisierte (*oder auch*: beschränkte) Konvergenz von Lebesgue.
5. Formuliere die Minkowski-Ungleichung.
6. Zeige: Die Funktion $f: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ist messbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar.
7. Was ist eine geschlossene Differential-2-Form $\omega \in \Omega^1(U, \mathbb{R})$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$?
8. Berechne das Volumen des von den Flächen

$$z = x^2 + y^2, \quad x + y = 4, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

berandeten Gebietes $G \subset \mathbb{R}^3$.

Bitte wenden!

9. Die Ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ und $x^2/4a^2 + y^2/4b^2 = 1$ ($a, b > 0$) beranden in $\mathbb{R}^2$ ein Ringgebiet G . Berechne

$$\int_{G_1} \sqrt{4 - z^2/a^2 - y^2/b^2} d\lambda^2(x, y)$$

über den Durchschnitt $G_1 = G \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}$ mit dem ersten Quadranten.

10. Sei eine Fläche F als der Graph von $z = f(x, y) = 1 - x^2 + y^3$ über dem Rechteck $(x, y) \in [0, 1] \times [1, 3]$ gegeben. Sei $\vec{X}$ das Vektorfeld $\vec{X}(x, y, z) = (z, x, y/2)$. Bestimmen Sie den Fluß von $\vec{X}$ durch F .

11. Untersuche, ob das Vektorfeld

$$X(x, y, z) = (e^{z^2} + y^2z, 2xyz, 2xye^{z^2} + y^2x), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

ein Potentialfeld ist, und berechne gegebenenfalls eine Stammfunktion.

12. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{X}(x, y, z) = (0, y, 0)$ durch die Oberfläche des Körpers

$$K = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 4z^2\}.$$

13. Finden Sie ein rotationsfreies Vektorfeld $\vec{X}$ auf $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, welches kein Gradientenfeld auf G ist, d.h. es existiert kein Potential $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\vec{X} = \text{grad } \Phi$.

a) Geben Sie die Definition einer Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

b) Zeigen Sie gemäß der Definition, daß

$$\left\{ x \in \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mid a_k \in \{0, 2\} \text{ f.a. } k \in \mathbb{N} \right\}$$

eine Nullmenge im $\mathbb{R}$ ist.

14. Finden Sie ein divergenzfreies Vektorfeld $\vec{X}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, welches keine Rotation ist, d.h. es existiert kein Vektorfeld $\vec{Y}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $\vec{X} = \text{rot } \vec{Y}$.

15. a) Geben Sie eine Basis von $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ an.

b) Sei $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4$ und berechnen Sie $\omega \wedge \omega$.

c) Berechnen Sie $d(x^2 dz - yz dx)$.